EDUARDO FILIPE DE MIRANDA SOUTO

ENSINO DE SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae.*

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2017

EDUARDO FILIPE DE MIRANDA SOUTO

ENSINO DE SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 14 de março de 2017.

Anderson Tiago da Silva

Diogo da Silva Machado

Allan de Oliveira Moura
(Orientador)

Dedico este trabalho a minha saudosa avó Maria Amélia de Miranda que mesmo sem oportunidade de estudar sabia da importância do conhecimento e sempre foi minha maior conselheira e incentivadora.

"Quanto mais aumenta nosso conhecimento, mais evidente fica nossa ignorância".

John F. Kennedy

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me guiar nas estradas e na vida.

Agradeço ao meu querido pai, João Bosco Souto, pelos ensinamentos de valores e por estar ao meu lado não me deixando declinar jamais. A minha doce mãe, Maria Auxiliadora de Miranda Souto, por sempre ter me mostrado o quanto devo estender a mão para ajudar os que de mim precisam, o quanto devo lutar para atingir meus objetivos, pelo incondicional apoio em todos os momentos e por ser minha maior torcedora.

Ao meu irmão, Rafael Tiago de Miranda Souto, por se orgulhar de mim fazendo-me sentir grande, por entender minha ausência em prol dos estudos e por sempre acreditar em meu progresso.

A República Máfia pela acolhida, em especial Igor Lopes e Flávio Santos pelo incentivo desde o processo seletivo e apoio constante durante todo o curso.

A todos os meus tios e tias pelo carinho constante. Destes devo mencionar José Geraldo, Maria Clara, Márcia e Maria Terezinha por acompanhar cada momento desta caminhada.

Aos meus companheiros do Rotaract Club de Viçosa e Rotary Club de Conselheiro Lafaiete que desde o início foram grandes incentivadores assim como todos os companheiros do Distrito 4580 de Rotary International.

Aos amigos Adriana Marta, Felipe Santos, Flávia Cristina, Terezinha Antunes e Thiago Viana por não me deixarem desistir em momentos difíceis e a todos os amigos do GruPão que sempre estiveram presentes nesta minha jornada.

Aos colegas de trabalho do Colégio Potência e da E. E. Gen. Sylvio Raulino de Oliveira por me proporcionarem as condições para este aperfeiçoamento e aos meus queridos alunos pelo incentivo.

Aos meus colegas de mestrado Bruno, Elimar, Gleisiane e Paulo pela união e pela amizade.

Aos professores do IMPA e da UFV que se empenharam em nos ensinar sempre com criatividade e dedicação.

Ao meu orientador Allan de Oliveira Moura pelos indiscutíveis ensinamentos, pela presença constante e pelo trabalho de parceria na construção deste.

A Universidade Federal de Viçosa, em especial ao Departamento de Matemática, pela oportunidade concedida e estrutura disponível.

Sumário

Lista de Figuras

Resumo

SOUTO, Eduardo Filipe de Miranda, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2017. **Ensino de sequências e progressões no ensino médio**. Orientador: Allan de Oliveira Moura.

Este trabalho aborda conceitos de Sequências Numéricas, Progressões Aritméticas e Geométricas. É apresentado um questionário de verificação de conhecimento prévio, essencial para o estudo, e uma proposta de Ensino de Sequências e Progressões para alunos do Ensino Médio.

Abstract

SOUTO, Eduardo Filipe de Miranda, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March, 2017. **Teaching of sequences and progressions in high school**. Advisor: Alan de Oliveira Moura.

This work deals the concepts of Numerical Sequences, Arithmetic and Geometric Progressions. It's presented a prior knowledge verification questionnaire, essencial for the study, and a teaching proposal of Sequence and Progressions for High School students.

Introdução

O conteúdo deste trabalho atende às normas, competências e habilidades relacionadas ao estudo de Sequências de Números Reais contidas no Guia de Referência para o Exame Nacional do Ensino Médio bem como nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.

O Estudo das sequências, progressões aritméticas e progressões geométricas acompanha o desenvolvimento da sociedade e tem fundamental importância nas relações sociais e do homem com a natureza. Há cerca de 5000 anos os babilônios já observavam os períodos de cheia do rio Nilo para o planejamento do processo de plantação e colheita. Objetivando proporcionar um bom entendimento do estudo das sequências e progressões, o conteúdo deste, busca pelo conhecimento da matemática de maneira contextualizada de forma a motivar a associação da matemática com temas da realidade do aluno.

Este trabalho tem seu conteúdo dividido em 4 capítulos onde no Capítulo 1 - Análise de Livros Didáticos - é feita uma análise da abordagem dada por 4 livros didáticos propostos para o Ensino Médio para o estudo das Sequências e Progressões. São observados ordenação, conceitos, exemplos, atividades, ilustração e contextualização. Os livros escolhidos são livros de frequente uso em instituições de ensino que ofertam Ensino Médio. A análise feita é uma análise baseada em minha visão e experiência enquanto professor. Todos os livros analisados são livros disponíveis para as escolas no Programa Nacional do Livro didático sendo, portanto, livros com autorização para utilização em sala de aula.

No Capítulo 2 - Verificação do Conhecimento Prévio dos Alunos - é proposta uma análise do conhecimento do aluno que está prestes a iniciar seus estudos de sequências, com base nos conteúdos necessários para tal compreensão. Essa verificação é proposta e, após aplicada a uma turma de Ensino Médio, é comentada no capítulo. A pesquisa com os alunos está registrada no Comitê de Ética e Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Federal de Viçosa sob o número 56617916.4.0000.5153.

O Capítulo 3 - Caderno de Estudos - apresenta o estudo de sequências, progressões aritméticas e progressões geométricas de maneira contextualizada contendo além das definições, exemplos e questões resolvidas.

Finalmente nas Considerações Finais são apresentadas conclusões sobre o conteúdo abordado nos capítulos anteriores.

Capítulo 1

Análise de Livros Didáticos

Os parâmetros curriculares nacionais chamam atenção à forma de apresentação do conteúdo ao aluno, bem como a importância de que tal conteúdo tenha um significado para o mesmo. Garantir que o aluno consiga dar significado e estabelecer conexões entre os conteúdos, por si só, constitui um erro no processo de ensino e é fator "determinante" do fracasso na aprendizagem.

> *"Se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para ideias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidos nos diversos conteúdos, no entanto o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente a Matemática mostram claramente que isso não é verdade."*
>
> *(NACIONAIS, Parâmetros Curriculares; MÉDIO, Ensino. Parte III–Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2013.)*

Nas seções deste capítulo são apresentadas descrições das abordagens de Progressões e Sequências dos livros Matemática Ciência e Aplicações - Volume 1 - Atual Editora, Matemática para o 2º grau - Volume 1 - Editora Ática, Novo Olhar Matemática - Volume 1 - Editora FTD e Fundamentos de Matemática Elementar - volume 4 - Atual Editora, seguidas de análise das mesmas.

1.1 Livro: Matemática Ciência e Aplicações - Volume 1 - Atual Editora

Autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida

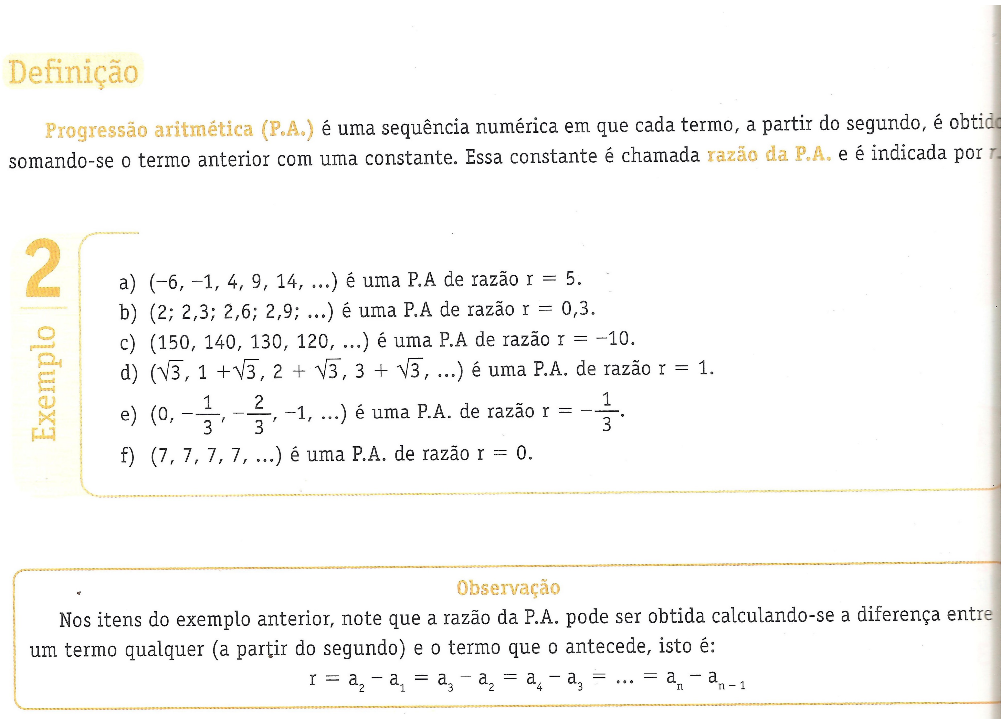
Figura 1.1: Livro: Matemática Ciência e Aplicações Vol. 1

Este livro traz o conteúdo em seu primeiro volume, destinado a alunos do primeiro ano do Ensino Médio dividido em doze capítulos: teoria dos conjuntos, conjuntos numéricos, noções gerais sobre funções, função afim, função quadrática, função modular, função exponencial, função logarítmica, complemento sobre funções, progressões, matemática comercial e financeira, semelhança e triângulos retângulos e trigonometria no triângulo retângulo.

No capítulo 10, *Progressões*, é apresentado o conceito de sequência numérica como uma função com domínio nos números naturais. Deste modo, a relação entre progressão aritmética e geométrica com a função afim e exponencial, respectivamente, é explicitada no texto. O capítulo traz a lei de formação, propriedades, termo geral de sequências, soma dos n primeiros termos de P.A. e P.G., soma dos infinitos termos de uma P.G. e interpretações gráficas para progressões aritméticas e geométricas em suas páginas 243 e 277.

O capítulo tem início com uma seção de nome *Sequências* mostrando uma função $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ e analisando o comportamento do seu domínio e de sua imagem. Em seguida a abordagem para a formatação do termo geral de uma sequência a_n através de exercícios resolvidos. O livro cita o termo "lei da recorrência", termo não utilizado nos demais livros e acrescenta outro exemplo ao texto. Antes de introduzir as progressões o livro apresenta uma lista de oito questões propostas voltadas para a fixação do conceito de sequência.

A apresentação de progressões aritméticas é feita por situação-problema e evidenciado a formação de uma sequência a partir dos dados da situação-problema, um termo é sempre obtido somando o termo anterior a uma constante, ainda não denominada razão. Posteriormente o livro apresenta a definição de progressão aritmética da seguinte forma:



Definição

Progressão aritmética (P.A.) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se o termo anterior com uma constante. Essa constante é chamada **razão da P.A.** e é indicada por r.

Exemplo 2

a) $(-6, -1, 4, 9, 14, \ldots)$ é uma P.A de razão $r = 5$.
b) $(2; 2{,}3; 2{,}6; 2{,}9; \ldots)$ é uma P.A de razão $r = 0{,}3$.
c) $(150, 140, 130, 120, \ldots)$ é uma P.A de razão $r = -10$.
d) $(\sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, \ldots)$ é uma P.A. de razão $r = 1$.
e) $(0, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1, \ldots)$ é uma P.A. de razão $r = -\frac{1}{3}$.
f) $(7, 7, 7, 7, \ldots)$ é uma P.A. de razão $r = 0$.

Observação

Nos itens do exemplo anterior, note que a razão da P.A. pode ser obtida calculando-se a diferença entre um termo qualquer (a partir do segundo) e o termo que o antecede, isto é:

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_n - a_{n-1}$$

Figura 1.2: Definição de P.A do livro Matemática Ciência e Aplicações - volume 1, Pág. 246

A seguir são apresentados seis exemplos de progressões aritméticas e suas razões. O livro chama atenção para o fato de que a razão de uma progressão aritmética é obtida através da diferença entre um termo (a partir do segundo) e o termo anterior.

A classificação das progressões aritméticas é apresentada em seção separada onde são dadas as definições de progressões aritméticas crescentes, decrescentes e constantes, relacionando as definições com os exemplos que questões resolvidas já apresentadas. O termo geral da progressão aritmética é apresentado conjecturando a fórmula utilizando-se de que $a_n - a_{n-1} = r$. Antes de propor ao aluno que resolva vinte e nove exercícios, o livro apresenta oito exercícios resolvidos. Os exercícios propostos envolvem desde questões simples, onde a aplicação direta da fórmula do termo geral da progressão aritmética determina o resultado, seja ele o termo geral, a razão ou primeiro termo quanto exercícios que exigem maior atenção do aluno, relacionando múltiplos e divisores, paridade, sistemas de equações e geometria plana.

A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética é apresentada inicialmente por seus aspectos históricos envolvendo Carl Friedrich Gauss (1777-1855) onde a fórmula após ser conjeturada é demonstrada. O texto observa que os termos equidistantes dos extremos de uma P.A. possuem a mesma soma que a soma dos extremos e apresenta dois exercícios resolvidos e onze exercícios propostos.

Ao final do capítulo é apresentado uma seção intitulada *Aritmética e Função Afim*, diferenciando as duas exatamente pelo Domínio da função afim.

A apresentação de progressão geométrica também é feita através de exemplo emendado à definição assim dita:

Definição

Progressão geométrica (P.G.) é a sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante real. Essa constante é chamada **razão da P.G.** e é indicada por q.

Exemplo 4

a) (4, 12, 36, 108, ...) é uma P.G. de razão $q = 3$.
b) (−3, −15, −75, −375, ...) é uma P.G. de razão $q = 5$.
c) $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$ é uma P.G. de razão $q = \frac{1}{2}$.
d) (2, −8, 32, −128, 512, ...) é uma P.G. de razão $q = -4$.
e) (−1000, −100, −10, −1, ...) é uma P.G. de razão $q = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

Figura 1.3: Definição de P.G. do livro Matemática Ciência e Aplicações - volume 1, Pág. 254

São apresentados oito exemplos de progressões geométricas e suas respectivas razões e mostrado que a P.G. de termos $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ possui razão indeterminada.

A classificação das progressões geométricas foi mostrada em seção à parte, definindo as progressões geométricas como crescente, decrescente, constante, alternada ou oscilante e estacionária. Nesta mesma seção o aluno é estimulado a produzir uma progressão geométrica de razão q, primeiro termo a_1 utilizando a lei da recorrência. Essa lei é apresentada em seguida, sendo conjecturada. Assim como na progressão aritmética, são apresentados seis exercícios resolvidos e em seguida vinte e cinco exercícios propostos de aplicação direta da fórmula do termo geral para obter a_1, q ou n, questões envolvendo números irracionais, e equações do segundo grau.

A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é feita a partir da demonstração da mesma seguida de um exemplo, duas questões resolvidas e nove exercícios propostos. Em seguida, é apresentada a soma dos termos de uma progressão geométrica infinta, através de exemplos e utilizando a definição de limite, juntamente com quatro exercícios resolvidos e sete exercícios propostos. O produto de n termos é apresentado através da demonstração da fórmula acompanhado de um exercício resolvido e quatro questões propostas. As funções exponenciais e as progressões geométricas são apresentadas e diferenciadas graficamente.

O capítulo encerra com uma abordagem histórica da sequência de Fibonacci seguido de dezoito exercícios complementares e um desafio da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

O livro em seu capítulo 10 trabalhou com observação de regularidades em padrões, investigação, levantamento e validação de conjecturas e generalizações. Por outro lado, o livro não apresentou questões aplicadas no Exame Nacional do Ensino Médio, embora cita em sua apresentação utilizar-se de sugestões da Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação. Alguns problemas que não aparecem na vida real, sem necessidade, também são apresentados ao aluno.

1.2 Livro Matemática para o 2º grau - Volume 1 - Editora Ática

Autores: Nelson Gentil, Carlos Alberto Marcondes dos Santos, Antônio Carlos Greco, Antônio Bellotto Filho e Sérgio Emílio Greco

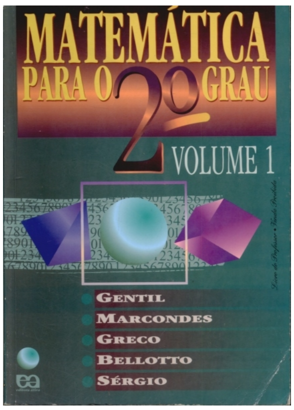
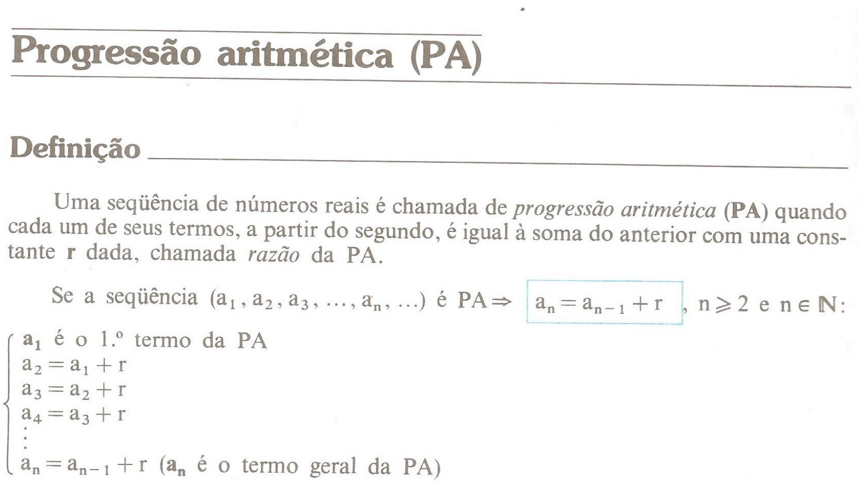


Figura 1.4: Livro: Matemática para o 2º Grau - Vol. 1

O livro traz em seu primeiro volume, dedicado a alunos do primeiro ano do Ensino Médio, 12 capítulos: Revisão, Conjuntos, Par Ordenado - relações, Funções, Funções Elementares e equações, Função quadrática e inequação, Função modular - composta - inversa, Função exponencial, Logaritmo - Função Logarítmica, Sequência - Progressão Aritmética (P.A.) - Progressão Geométrica (P.G.), Relações trigonométricas no triângulo retângulo.

No capítulo 11, Sequências - Progressões Aritméticas (P.A.) - Progressões Geométricas (P.G.) são apresentadas as definições de sequências e progressões, onde o rigor (a nível permitido para Ensino Médio) nas demonstrações é predominante e as atividades exigem do aluno conhecimento de manipulações algébricas em suas páginas de 201 a 237.

O capítulo inicia com a definição de Sequência introduzindo as notações de 1º termo, 2º termo, ..., enésimo termo. a seção também evidencia a diferença entre sequência numérica e conjunto numérico. A lei de formação de uma sequência é apresentada a partir de exemplos seguida de sete exercícios propostos. Em seguida a progressão aritmética é assim definida:



Progressão aritmética (PA)

Definição

Uma seqüência de números reais é chamada de *progressão aritmética* (**PA**) quando cada um de seus termos, a partir do segundo, é igual à soma do anterior com uma constante **r** dada, chamada *razão* da PA.

Se a seqüência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ é PA $\Rightarrow$ $\boxed{a_n = a_{n-1} + r}$, $n \geqslant 2$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_1 \text{ é o 1.º termo da PA} \\ a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r \\ a_4 = a_3 + r \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} + r \; (a_n \text{ é o termo geral da PA}) \end{cases}$$

Figura 1.5: Definição de P.A. do livro Matemática para o 2º grau - volume 1, Pág. 203

O livro classifica uma progressão aritmética em crescente, decrescente ou constante, citando exemplos e identificando o raio de cada uma delas como sendo $r = a_n - a_{n-1}$. Posteriormente há uma seção intitulada *Representação de uma P.A.* em que um termo central é apresentado como a soma do termo anterior com a razão ou a diferença entre o termo posterior e a razão onde se conclui que um termo central é igual à média aritmética entre seu termo posterior e anterior. São apresentados seis questões resolvidas seguidos de 11 exercícios propostos envolvendo identificação do raio de uma progressão aritmética, classificação da P.A., determinação de um elemento a partir de outros.

A fórmula geral da P.A. é apresentada através de uma demonstração e seguida de oito exercícios resolvidos e vinte e um exercícios propostos que buscam tratar diversas formas de aplicação do termo geral. O texto apresenta uma seção chamada interpolação aritmética que mostra como é feita a interpolação de k meios aritméticos entre dois números com dois exercícios resolvidos e cinco exercícios propostos. O livro mostra a soma de n termos de uma progressão aritmética desenvolvendo a fórmula, resolvendo oito exercícios e propondo vinte exercícios para o aluno.

A progressão geométrica é apresentada diretamente em sua definição:

Progressão geométrica (PG)

Definição

Uma seqüência de números reais é chamada *progressão geométrica* (**PG**) quando cada um de seus termos, a partir do segundo, é igual ao produto do anterior por uma constante **q** dada, chamada *razão* da PG.

Se a seqüência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ é PG $\Rightarrow$ $\boxed{a_n = a_{n-1} \cdot q}$, $n \geqslant 2$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \mathbf{a_1} \text{ é o 1.º termo da PG} \\ a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_2 \cdot q \\ a_4 = a_3 \cdot q \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \; (\mathbf{a_n} \text{ é o termo geral da PG}) \end{cases}$$

Desse modo, em uma PG, cada termo dividido pelo seu anterior é igual à razão **q**:

Figura 1.6: Definição de P.G. do livro Matemática para o 2º grau - volume 1, Pág. 217

A classificação de P.G. é dividida em crescente, decrescente, alternante, constante e estacionaria ou singular. Da mesma forma que nas progressões aritméticas, o livro traz uma seção denominada Representação de um P.G., onde define que um termo central é igual à média geométrica de seu anterior e posterior. Em seguida são apresentados quatro exercícios resolvidos e sete exercícios propostos.

A fórmula geral da P.G. é apresentada mediante demonstração e com nove exercícios resolvidos seguidos de dezesseis exercícios propostos envolvendo aplicação direta da fórmula do termo geral e também interpolação geométrica. O capítulo também mostra como calcular o produto dos termos de uma P.G. limitada e a soma dos termos de uma P.G. limitada e ilimitada utilizando exemplos e definição através da noção de limites. São apresentados quatorze exercícios resolvidos e trinta e três exercícios propostos. Ao final do capítulo há um pequeno texto sobre Carl F. Gauss (1777-1855) e a soma dos termos de uma P.A. O capítulo encerra com uma seção de sessenta e um exercícios complementares.

Neste livro, ainda há outro capítulo intitulado Questões de Vestibular que apresenta 22 questões sobre sequências e progressões.

Embora explore bastante a definição matemática de sequências e progressões, o livro pouco apresenta situações-problema em suas questões que, em sua maioria, não são contextualizadas. Também apresentou as seções Soma de P.G. limitada e Produto de uma P.G. limitada sem definir uma sequência limitada. O grande número de questões propostas possibilita ao aluno um treinamento intenso porém com situações pouco utilizadas no dia a dia. As questões de vestibular, com questões de vestibulares de vários lugares do Brasil contribuem com aplicações do conteúdo, embora mesmo nestas há pouca contextualização do assunto com a vida cotidiana do aluno.

1.3 Livro Novo Olhar Matemática - Volume 1 - Editora FTD

Autor: Joamir Souza

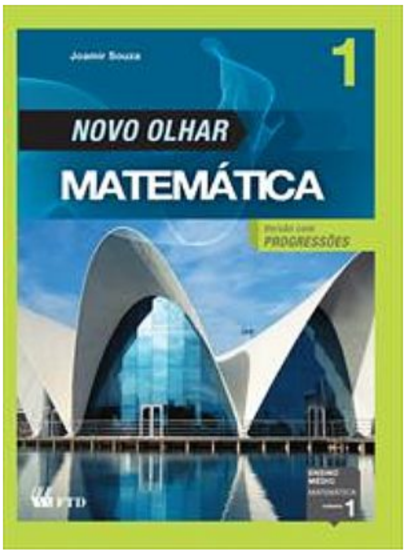
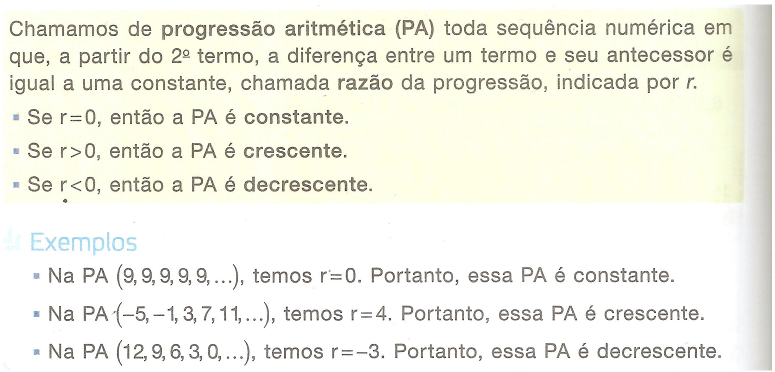


Figura 1.7: Livro: Novo Olhar Matemática - Vol 1

O livro traz o conteúdo em seu primeiro volume, destinado a alunos do primeiro ano do Ensino Médio e é dividido em 3 unidades: Os conjuntos, As funções, Progressões e Trigonometria, subdivididas em nove capítulos: Conjuntos, Funções, Funções Afim, Função Quadrática, Função exponencial, Logaritmo e Função Logarítmica, Função Modular, As Progressões, Trigonometria no Triângulo Retângulo.

A Unidade 3: Progressões, inicia com um texto sobre a flipagem e o movimento que gera desenhos animados como texto introdutório do capítulo 8: As progressões. O Capítulo começa com um exemplo contextualizado de sequência e a utilização de nomenclaturas como enésimo termo, termo de ordem n, sequência ou sucessão finita e infinita e obtenção dos termos de uma sequência através de seu termo geral. Em seguida o livro apresenta treze exercícios propostos que abordam a definição de sequência e a manipulação para que se obtenha o termo geral de uma sequência.

A progressão aritmética é apresentada inicialmente por uma situação-problema para depois ter sua definição apresentada conforme Figura 1.8.


Chamamos de **progressão aritmética (PA)** toda sequência numérica em que, a partir do 2º termo, a diferença entre um termo e seu antecessor é igual a uma constante, chamada **razão** da progressão, indicada por *r*.

- Se r=0, então a PA é **constante**.
- Se r>0, então a PA é **crescente**.
- Se r<0, então a PA é **decrescente**.

Exemplos

- Na PA (9, 9, 9, 9, 9, ...), temos r=0. Portanto, essa PA é constante.
- Na PA (−5, −1, 3, 7, 11, ...), temos r=4. Portanto, essa PA é crescente.
- Na PA (12, 9, 6, 3, 0, ...), temos r=−3. Portanto, essa PA é decrescente.

Figura 1.8: Definição de P.A. do livro Novo Olhar Matemática - volume 1, Pág. 222

Em seguida o livro mostra que, em uma P.A., um termo é igual ao termo anterior somado à razão e conclui que um termo é igual à média aritmética dos termos anterior e posterior a ele, apresentando depois três atividades resolvidas e quinze atividades propostas.

O termo geral da progressão aritmética é apresentado sendo conjecturado e com cinco questões resolvidas, com destaque para a questão que trata da interpolação aritmética. As trinta e duas atividades propostas apresentam desde questões de aplicação direta da fórmula do termo geral quanto a análise gráfica e exercícios da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep). Em seguida são apresentadas duas seções que relacionam P.A. e função afim e P.A. e função quadrática. A estas seções segue uma lista de oito atividades propostas. A soma dos n termos de uma P.A. é mostrada através de exemplos, seguidos de um texto denominado *A Lenda de Gauss*, que trata sobre a história de Carl F. Gauss (1777-1855) e é concluída com apresentação e demonstração da fórmula seguido de três atividades resolvidas e quinze atividades propostas.

O conceito de progressão geométrica é apresentado, assim como na progressão aritmética, inicialmente através de exemplos e posterior definição:

Chamamos de **progressão geométrica (PG)** toda sequência numérica em que, a partir do 2º termo, o quociente entre um termo e seu antecessor é igual a uma constante, chamada **razão** da progressão e indicada por q.

- Se $q=1$, então a PG é **constante**.
- Se $q>1$ e $a_1>0$ ou $0<q<1$ e $a_1<0$, então a PG é **crescente**.
- Se $q>1$ e $a_1<0$ ou $0<q<1$ e $a_1>0$, então a PG é **decrescente**.
- Se $q<0$, então a PG é **alternante**.

Exemplos

- Na PG $(5, 5, 5, 5, 5, \ldots)$, temos $q=1$. Como $q=1$, essa PG é constante.
- Na PG $\left(-8, -4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \ldots\right)$, temos $q=\frac{1}{2}$ e $a_1=-8$. Como $0<q<1$ e $a_1<0$, essa PG é crescente.
- Na PG $(-3, -9, -27, -81, -243, \ldots)$, temos $q=3$ e $a_1=-3$. Como $q>1$ e $a_1<0$, essa PG é decrescente.
- Na PG $\left(\frac{1}{25}, -\frac{1}{5}, 1, -5, 25, \ldots\right)$, temos $q=-5$. Como $q<0$, essa PG é alternante.

Figura 1.9: Definição de P.G. do livro Novo Olhar Matemática - volume 1, Pág. 235

O livro traz também o termo recorrência para determinar o enésimo termo de uma P.G. Após duas atividades resolvidas são propostos oito exercícios.

O termo geral da P.G. é apresentado conjecturando uma fórmula para o mesmo onde são mostrados cinco exemplos, dos quais em dois utilizam-se calculadora e foi traçado um gráfico da sequência, seguida de quinze atividades propostas. Há uma seção denominada *P.G. e Função* que relaciona a função exponencial a uma P.G. A Esta seção somam-se cinco atividades propostas. A soma dos n primeiros termos de uma P.G. é apresentada através da conjecturação de sua fórmula, quatro atividades resolvidas e dez atividades propostas. Diferente dos outros livros analisados, o capítulo apresenta o tema Série geométrica convergente, utilizando-a para concluir a fórmula da soma dos termos da P.G infinita e o trabalho com as dízimas periódicas. São propostas nove atividades para resolução dos alunos.

O capítulo ainda conta com uma seção denominada *Situações envolvendo P.A. e P.G.* através de duas questões resolvidas e treze atividades propostas. Ainda é apresentada a seção *Explorando o tema*, que consta de um texto com uma situação a ser resolvida e a aplicação das progressões para a resolução do problema e a utilização da indução matemática como demonstração de conjecturas. O livro acrescenta a seção *Reflexão sobre o capítulo* que retoma os conceitos estudados durante o capítulo e ainda a Seção *Exercícios complementares* com doze atividades.

O livro, em seu final apresenta um capítulo extra denominado Tecnologias, em seção que trata de progressões, onde o aluno é estimulado a trabalhar com progressões aritméticas e geométricas em planilhas eletrônicas.

Diferente da maioria dos livros para Ensino Médio, este define a progressão geométrica a partir a razão entre dois termos e não pelo o produto de um termo por uma constante. Também deixou claro a definição de série geométrica divergente e convergente. As atividades do livro, quase em sua totalidade, são contextualizadas e mostram ao aluno como o conhecimento de sequências e progressões aritméticas e geométricas pode ser utilizado em muitas situações cotidianas. A seção *Situações envolvendo P.A. e P.G.* é de extrema relevância ao aplicar as progressões em situações de juros, taxas de natalidade e mortalidade, funções e velocidade, dentre outros, proporcionando conexões entre diferentes temas matemáticos. Dentre as análises feitas, este foi o que mais partiu de problemas e não de definições como meio de construção do processo de aprendizagem. O relacionamento das observações do mundo real com representações e princípios matemáticos foi muito bem feito neste livro. O uso da calculadora, embora não seja imprescindível, foi apresentado pois em quase todos os problemas de progressão geométrica da vida real seu uso se faz necessário.

1.4 Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 4 - Atual Editora

Autor: Gelson Iezzi Samuel Hazzan

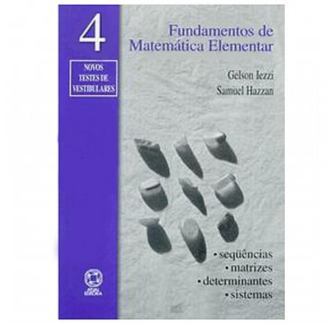
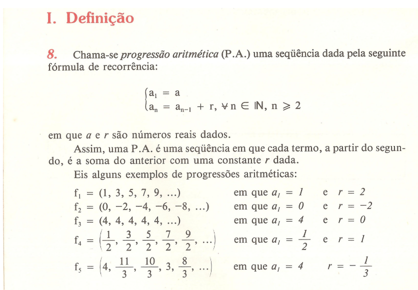


Figura 1.10: Fundamentos de Matemática Elementar - Vol 4

Este livro é destinado a um estudo mais completo da matemática do Ensino Médio e em seu volume 4 apresenta o estudo das sequências, progressões, matrizes, determinantes e sistemas lineares dividido em seis capítulos: Sequências, Progressões Aritméticas, Progressões Geométricas, Matrizes, Determinantes e Sistemas. O objetivo do nosso estudo está compreendido nos três primeiros capítulos entre as páginas um e setenta e sete.

O Capítulo 1, Sequência, com as definições de sequências finitas e sequências infintas sua relação com pares ordenados e igualdade entre sequências. Em seguida a lei de formação de uma sequência é definida através de fórmulas de recorrência exemplificadas e são apresentados quatro exercícios propostos.

O capítulo 2, Progressões Aritméticas, inicia com a seguinte definição de progressão aritmética:



I. Definição

8. Chama-se *progressão aritmética* (P.A.) uma seqüência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 2 \end{cases}$$

em que a e r são números reais dados.

Assim, uma P.A. é uma seqüência em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante r dada.

Eis alguns exemplos de progressões aritméticas:

$f_1 = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$ em que $a_1 = 1$ e $r = 2$

$f_2 = (0, -2, -4, -6, -8, \ldots)$ em que $a_1 = 0$ e $r = -2$

$f_3 = (4, 4, 4, 4, 4, \ldots)$ em que $a_1 = 4$ e $r = 0$

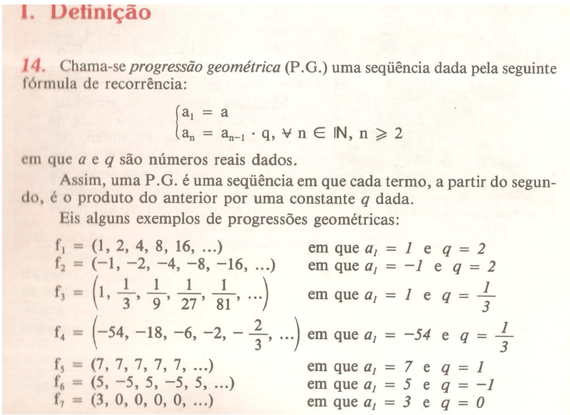
$f_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \ldots\right)$ em que $a_1 = \frac{1}{2}$ e $r = 1$

$f_5 = \left(4, \frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3, \frac{8}{3}, \ldots\right)$ em que $a_1 = 4$ $r = -\frac{1}{3}$

Figura 1.11: Definição de P.A. do livro Fundamentos de Matemática Elementar - volume 4, Pág. 6

O livro classifica as progressões aritméticas em crescentes, decrescentes ou constantes e propõe vinte e oito exercícios. Destes vinte e oito, o livro apresenta a solução para cinco.

A fórmula geral de P.A. é mostrada conjecturando-a a partir de exemplos e, após sua definição é apresentada sua definição pelo princípio da indução finita. Esta seção termina com dezenove exercícios dos quais quatro apresentam solução. O capítulo tem uma seção sobre interpolação aritmética onde explica o que é interpolar meios aritméticos, apresenta em exemplo e nove exercícios, sendo um resolvido. A soma dos termos de uma progressão aritmética é apresentada e demonstrada por indução finita seguida de trinta e cinco exercícios propostos, sendo cinco resolvidos. O capítulo se encerra com a seção *Leitura* que apresenta um texto sobre o desenvolvimento do estudo de Dirichlet sobre os números primos de uma progressão aritmética. O Capítulo 3, Progressão Geométrica, apresenta assim definida uma progressão geométrica:



I. Definição

14. Chama-se *progressão geométrica* (P.G.) uma seqüência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} \cdot q, \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2 \end{cases}$$

em que *a* e *q* são números reais dados.

Assim, uma P.G. é uma seqüência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior por uma constante *q* dada.

Eis alguns exemplos de progressões geométricas:

$f_1 = (1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$ em que $a_1 = 1$ e $q = 2$

$f_2 = (-1, -2, -4, -8, -16, \ldots)$ em que $a_1 = -1$ e $q = 2$

$f_3 = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\right)$ em que $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{3}$

$f_4 = \left(-54, -18, -6, -2, -\frac{2}{3}, \ldots\right)$ em que $a_1 = -54$ e $q = \frac{1}{3}$

$f_5 = (7, 7, 7, 7, 7, \ldots)$ em que $a_1 = 7$ e $q = 1$

$f_6 = (5, -5, 5, -5, 5, \ldots)$ em que $a_1 = 5$ e $q = -1$

$f_7 = (3, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ em que $a_1 = 3$ e $q = 0$

Figura 1.12: Definição de P.G. do livro Fundamentos de Matemática Elementar - volume 4, Pág. 24

A classificação de progressões geométricas foi feita através das denominações crescente, constante, decrescente, alternantes ou estacionárias, seguido de vinte e dois exercícios dos quais um é resolvido.

A fórmula do termo geral da P.G. é apresentada utilizando exemplos e é citado que a mesma é demonstrada por indução finita, embora essa demonstração não seja feita no livro. São propostos dezenove exercícios, sendo um resolvido. A interpolação geométrica é definida e são apresentados exemplos e posteriormente cinco exercícios propostos que antecedem a seção que trata da soma dos termos de uma progressão geométrica. Tal seção também apresenta a fórmula e diz que o princípio da indução finita é uma forma de demonstração, embora não acrescenta tais cálculos. Após um exemplo, são propostos dezesseis exercícios.

O capítulo apresenta uma seção que trata sobre o limite de uma sequência e sequência convergentes, onde o limite é definido. Em seguida a soma dos termos de um P.G. infinita é apresentada e demonstrada. Esta seção propõe ao aluno a resolução de vinte e seis exercícios.

O livro traz ao final um capítulo denominado “Testes de vestibulares” com nove questões sobre sequências, cinquenta e cinco questões sobre progressões aritméticas e sessenta e cinco questões sobre progressões geométricas.

O conteúdo de Sequências e progressões apresentado neste livro é completo para um aluno do Ensino Médio. Suas questões seguem um nível crescente de dificuldade e os exercícios resolvidos em meio aos propostos aparecem como forma de obtenção de um outro olhar sobre a resolução de determinadas questões. Embora a contextualização das questões seja algo pouco apresentado, o estudo através deste livro proporciona a um bom conhecimento para o aluno.

Capítulo 2

Verificação do Conhecimento Prévio dos Alunos

2.1 A Instituição de Ensino

Os alunos participantes da pesquisa são alunos do Colégio Potência situado em Conselheiro Lafaiete-MG, na região central da cidade.

Aprovado em 5 de fevereiro de 2001, nos termos do artigo 44, processo nº 29584 e publicado no "Minas Gerais" do dia 20 de fevereiro de 2001, o Colégio Potência surgiu após 11 anos de existência do Pré-Vestibular Potência. No primeiro mês de aula, eram pouco mais de 500 alunos distribuídos e exatamente 50 funcionários.

Atualmente, são oferecidos os cursos de Ensino Fundamental – iniciação à alfabetização (1ª EA), 1º ao 5º ano e 6º ao 9º ano; Ensino Médio com 3º ano integrado; Cursos Técnicos Profissionalizantes em Mecânica, Mineração, Eletroeletrônica e Segurança do Trabalho, Edificações e Logística. Oferece ainda o pré-vestibular, que tem conduzido grande número de pessoas ao ensino superior. O colégio funciona nos três turnos do dia com Educação Infantil e 1º a 8º ano no turno da tarde, 9º ano e Ensino Médio no turno da manhã e Cursos Técnicos e Pré-Vestibular à noite.

A mensalidade do Ensino Médio atualmente é em torno de $R\$500,00$, atendendo segundo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), ao público de indicador socieconômico de classe alta.

Figura 2.1: Fachada do Colégio Potência

2.2 Aplicação do Teste

Foi proposto aos dezessete alunos do 1º ano do Ensino Médio participantes da pesquisa que resolvessem oito questões com o objetivo de identificar habilidades dos alunos ao identificar sequências e resolver equações de primeiro grau e exponenciais, comuns em cálculos que envolvam sequências. Todos os alunos da turma participaram voluntariamente da pesquisa. As atividades foram aplicadas em sala de aula, durante a aula de matemática, como atividade extracurricular e não foram pontuadas na nota dos alunos.

As questões 1 e 2 tiveram como objetivo analisar se o aluno identifica sequências simples como algo que pode seguir determinada lógica. A primeira questão foi resolvida corretamente por todos os alunos e a justificativa comum de resposta foi que um termo é obtido somando duas unidades ao termo anterior. Um aluno justificou que um termo é o número que faz com que a diferença entre ele e o termo anterior é 2.

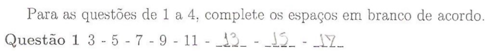

Para as questões de 1 a 4, complete os espaços em branco de acordo.
Questão 1 3 - 5 - 7 - 9 - 11 - _13_ - _15_ - _17_

Figura 2.2: Questão 1 do teste de Verificação de conhecimento prévio

A segunda questão, também com unanimidade de acertos foi desenvolvida pelos alunos como uma sequência em que um termo é obtido triplicando o termo anterior. Um aluno identificou a sequência como uma sequência numérica que dobra o termo anterior e soma o termo anterior ao resultado obtido para obter o termo seguinte.

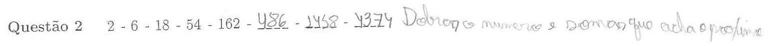


Figura 2.3: Questão 2 do teste de Verificação de conhecimento prévio

Com as questões 3 e 4 foi observado a habilidade do aluno em identificar sequências de segunda ordem. A terceira questão, com treze acertos, três erros e uma resposta em branco foi identificada pela maioria dos alunos como uma sequência alternada de sinal ou ainda termos somando e subtraindo alternadamente. Embora a maioria dos alunos não conseguiram justificar de forma correta, eles identificaram a sequência e o termo pedido na questão. Um aluno que forneceu uma resposta errada definiu a sequência como soma dos números pares e subtração dos números ímpares, o que é claramente falso, observando apenas os dois primeiros termos da sequência. Os demais erros foram erros de cálculo feitos pelos alunos.

Figura 2.4: Questão 3 do teste de Verificação de conhecimento prévio
Transcrição do texto da figura: "Segue a sequência numérica: número par soma e número ímpar subtrai."

A quarta questão, foi deixada em branco por um aluno e respondida corretamente pelos demais que identificaram a sequência e realizaram corretamente os cálculos.

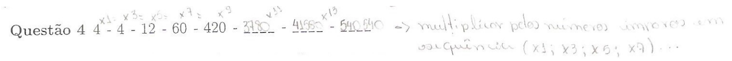


Figura 2.5: Questão 4 do teste de Verificação de conhecimento prévio

As questões 5 a 8 solicitam ao aluno conhecimento algébrico na manipulação de equações onde são utilizadas operações semelhantes às utilizadas nos cálculos envolvendo progressões. Na oitava questão o conhecimento de equações exponenciais foi explorado.

A quinta questão, com acerto de todos os alunos foi respondida de maneira curiosa por três alunos que preferiram aplicar a propriedade distributiva à multiplicação $(5-1).6$ ao invés de resolver a diferença entre parênteses antes de efetuar a multiplicação.

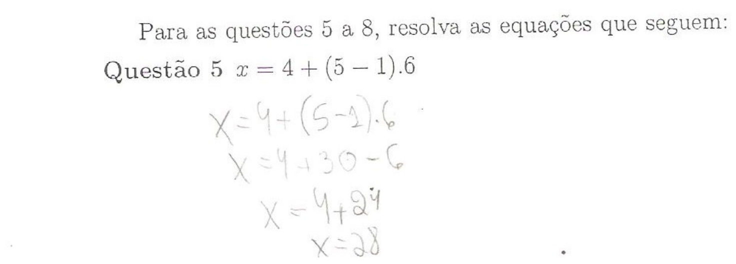


Figura 2.6: Questão 5 do teste de Verificação de conhecimento prévio

Na sexta questão, onde três alunos erraram, treze acertaram e um aluno deixou a questão em branco, os equívocos apresentados foram:

- Não efetuar corretamente a multiplicação $(x-1).4$;
- Não concluir que $4x = 49 \Rightarrow x = \frac{49}{4}$;
- Efetuar as operações errando cálculos.

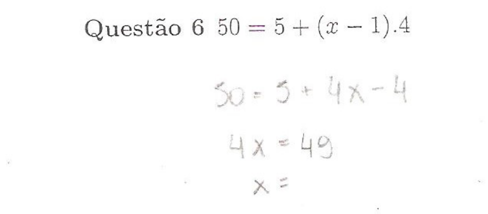


Figura 2.7: Questão 6 do teste de Verificação de conhecimento prévio

A sétima questão teve quinze acertos e dois erros de cálculo onde um aluno atribuiu 9 para 3^3 e outro aluno atribuiu 243 para 3^3. Os demais alunos desenvolveram corretamente a questão.

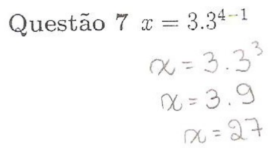


Figura 2.8: Questão 7 do teste de Verificação de conhecimento prévio

A oitava questão com quatro alunos sem respondê-la, dois erros e onze acertos percebe-se que os alunos tiveram dificuldade ao concluir que $32 = 2^5$ e que $96 = 3.2^5$. Um aluno ao desenvolver a equação copiou-a errado e um aluno anulou as bases das potências sem nenhum critério correto, concluindo o erro. Os demais alunos resolveram normalmente a equação chegando ao resultado correto.

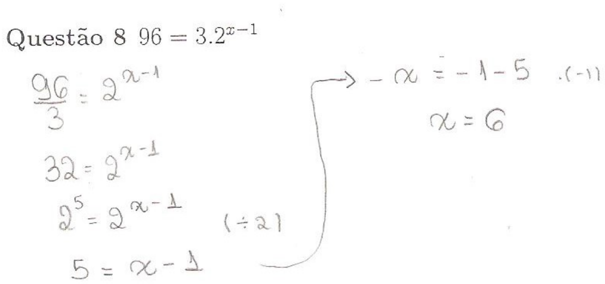


Figura 2.9: Questão 8 do teste de Verificação de conhecimento prévio

Observando o resultado de cada aluno e considerando que as escolas, em sua maioria, exigem pelo menos 60% de aproveitamento para aprovação, estes tiveram um resultado satisfatório quando percebe-se que todos acertaram mais de 75% das questões e que a maioria dos erros cometidos pelos mesmo podem ser corrigidos com maior atenção na resolução das questões.

Capítulo 3

Caderno de Estudos

3.1 Sequências

3.1.1 Introdução

Desde a antiguidade os homens procuravam entender o ciclo das cheias dos rios para o melhor cultivo dos alimentos, entender as fases da lua e de outros fenômenos. Desenvolveu calendários que serviam de quantificadores do tempo afim de padronizar o transcurso de um ciclo. Para isso passou-se a criar e desenvolver sequências numéricas ao longo da história.

> *"Os egípcios começaram cedo a se interessar pela astronomia e observaram que a inundação anual do Nilo tinha lugar pouco depois que Siriús, a estrela do cão, se levantava a leste logo antes do sol. Observando que esses surgimentos heliacais de Siriús, o anunciador da inundação, eram separados por 365 dias, os egípcios estabeleceram um bom calendário solar feito de doze meses de trinta dias cada um e mais cinco dias de festa no final do ano dedicados aos deuses Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nephthys."*
>
> *Boyer, Carl B., História da Matemática, Edgard Blücher, São Paulo, 1974*

No Papiro de Rhind, um documento egípcio de cerca de 1650 a.C., onde o escriba Ahmes mostra a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria, há um problema criativo que remete à sequências numéricas:

Quando ía a Sto Ives,

Encontrei um homem com sete mulheres

Cada uma tinha sete sacos,

Cada saco tinha sete gatos,

Cada gato tinha sete gatinhos.

Gatinhos, gatos, sacos e mulheres

Quantos iam a Sto Ives?

Podemos identificar a solução do problema da seguinte maneira: 1 homem + 7 mulheres = 8 pessoas. Cada mulher com 7 sacos (7x7 = 49 sacos). Cada saco com 7 gatos (49x7 = 343 gatos). Cada gato com 7 gatinhos (343x7 = 2401 gatinhos). Então 8 + 343 + 2401 = 2752 (os 49 sacos não são seres vivos e, por isso não são somados). No caso do problema resolvido, ele representa uma sequência de múltiplos de 7, $7x7 = 49$, $49x7 = 343$, $343x7 = 2401$. Porém o resultado é diferenciado dada a contextualização do problema.

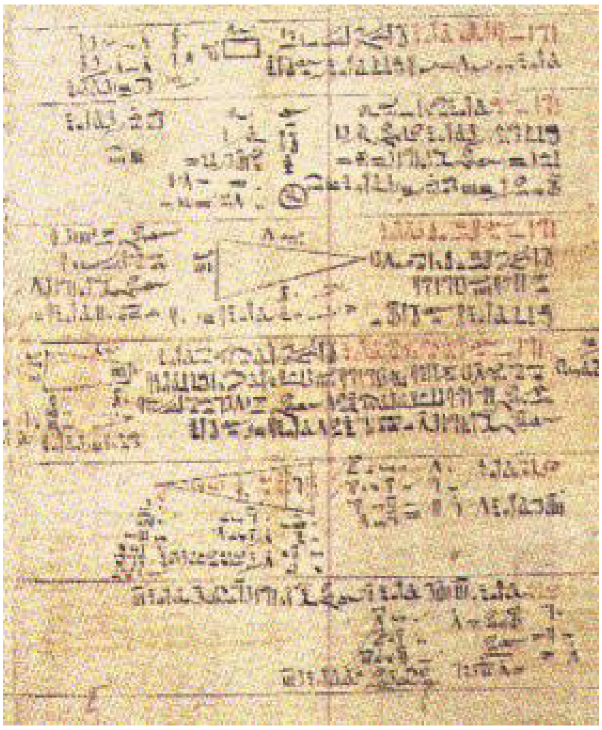


Figura 3.1: Papiro de Rhind

3.1.2 Definição

Vamos denotar por $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números naturais sem o zero.

Chama-se **Sequência finita** toda aplicação f do conjunto $\{1, 2, 3, 4, ..., n\}$ em $\mathbb{R}$. Em toda sequência finita, a cada número i, $1 \leq i \leq n$, um número real a_i é associado.

Chama-se **Sequência infinita** toda aplicação f de $\mathbb{N}^*$ em $\mathbb{R}$. Em toda sequência infinita, a cada $i \in \mathbb{N}^*$ está associado em $a_i \in \mathbb{R}$.

Cada elemento de uma sequência é denominado termo da sequência e em uma sequência de n termos cada i termo é identificado como a_i. Por exemplo, na sequência $(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23)$ o número 14 é o 5º termo e pode ser representado por a_5. Assim temos $a_5 = 14$.

Em uma sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n)$ os termos a_1 e a_n são chamados extremos da sequência. Dois termos a_i e a_j são equidistantes dos extremos se, e somente se, o número de termos que antecedem a_i é igual ao número de termos que sucedem a_j.

Exemplos:

- $(2, 4, 5, 10, 20)$ é a sequência de divisores positivos de 20.
- $(1, 3, 5, 7, 9, 11, ..., 2n + 1, ...)$ é a sequência de números ímpares.
- Os termos a_6 e a_{10} são dois termos equidistantes na sequência $(a_{1,}a_2, a_3, ..., a_{15})$.
- $(2016, 2012, 2008, 2004, ..., 1896)$ é a sequência dos anos em que aconteceram os Jogos Olímpicos da Era Moderna.

3.1.3 Lei de Formação

Em diversas situações, interessam as sequências que possuem uma lei de formação, isto é, aquelas em que seus termos obedecem a determinada regra. A lei de formação de uma sequência pode ser identificada através de três formas: uma regra que expressa a_n em função de n, sua fórmula de recorrência, que estabelece uma regra para identificar a_1 e outra regra para identificar cada termo a_n a partir do termo anterior (a_{n-1}) ou ainda através de uma propriedade que os números devem apresentar.

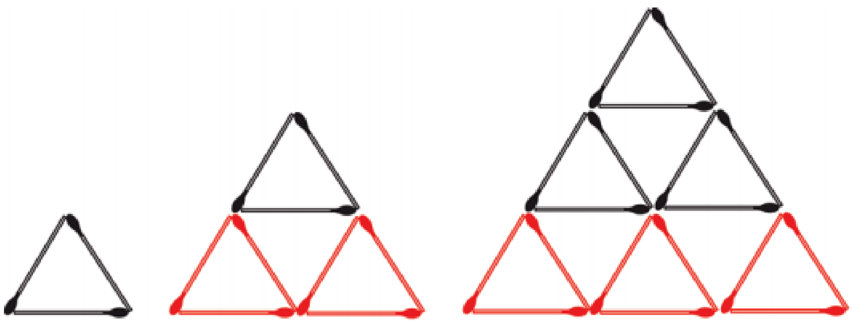
Exemplos:

- A fórmula $a_n = 4n^2+3, n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ representa a sequência $(7, 19, 39, 67, 103)$.
- $\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_n = 2b_{n-1} + 1 \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}^*$ é a fórmula de recorrência que representa a sequência $(5, 11, 23, 47, 95...)$.

- Escrever a sequência que apresenta o dobro dos cinco primeiros números naturais ímpares: $(2, 6, 10, 14, 18)$.

3.1.4 Questões Resolvidas

QUESTÃO 1 - (Obmep - 2012 - nível 2) Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo. Quantos palitos formam o lado desse triângulo?



Resolução: Pela observação da figura é possível notar que do primeiro triângulo para o segundo triângulo foram acrescentados dois triângulos e para a terceira, três triângulos. Logo 6 e 9 palitos, respectivamente.

Deste modo:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = a_1 + 2.3$$

$$a_3 = a_2 + 3.3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + 3n$$

Efetuando a soma das igualdades temos:

$$a_n = \frac{(n+1).3n}{2}$$

Para a utilização de 135 palitos temos $a_n = 135$. Assim:

$$135 = \frac{(n+1).3n}{2}$$

Efetuando as operações temos que $n = 9$ é a resposta para a questão.

QUESTÃO 2 - (Obmep - 2015 - nível 3) Uma sequência de números é definida por $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = a_n + a_n^2$ para todo número natural n ≥ 1. Por exemplo: $a_2 = a_1 + a_1^2 = 3 + 3^2 = 12$. Qual é o algarismo das unidades de a_{2015} ?

Resolução: Calculando alguns outros termos da sequência temos:

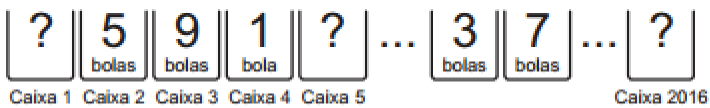
$a_3 = a_2 + a_2^2 = 12 + 12^2 = 156$ e $a_4 = a_3 + a_3^2 = 156 + 24336 = 24492$

Considere u_i sendo o último algarismo de a_i. Deste modo, observando, a_1, a_2, a_3 e a_4 temos que $u_2 = 2$, $u_3 = 6$, e $u_4 = 2$. Sem calcular o valor de a_5 temos que as unidades de $2 + 2^2$ representam $u_5 = 6$.

Daí temos que o valor de u_i está variando de acordo com o valor de i da seguinte maneira:

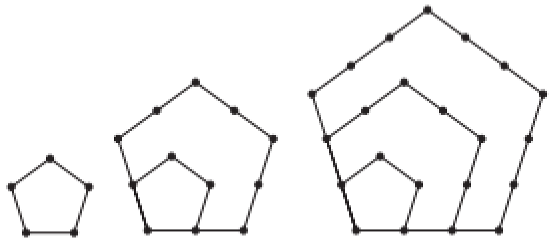
Quando i é par, então $u_i = 2$ e quando i é ímpar, então $u = 6$. Como em a_{2015}, $i = 2015$ é ímpar, então $u_{2015} = 6$, portanto o algarismo das unidades de a_{2015} é 6.

QUESTÃO 3 - (Obmep - 2016 - nível 3) Joãozinho distribuiu bolas em caixas numeradas de 1 a 2016. Ele fez isso de forma que o número total de bolas, em quaisquer cinco caixas consecutivas, fosse sempre o mesmo. Na figura abaixo estão indicadas as quantidades de bolas em algumas caixas; a figura também mostra que Joãozinho colocou 3 e 7 bolas em duas caixas vizinhas. Quantas bolas ele colocou na última caixa?



Resolução: As caixas com 3 e 7 bolas são vizinhas, e as caixas 1 e 5 estão vazias. Se a caixa 1 inicia uma sequência e a 5 termina, para que os números de bolas 3 e 7 sejam vizinhos, as caixas com 7 bolas devem iniciar a sequência e as 3 bolas devem terminar a sequência, ficando $7 - 5 - 9 - 1 - 3$. Desse modo, as cinco caixas consecutivas sempre somarão 25. Tendo em vista que esta é uma sequência numérica de 5, a caixa 2016 será a primeira caixa de uma nova sequência, correspondendo ao número de 7 bolas.

QUESTÃO 4 - (Obmep - 2016 - nível 3) Abaixo temos três figuras pentagonais: a primeira com 5 pontos, a segunda com 12 pontos e a terceira com 22 pontos. Continuando esse processo de construção, a vigésima figura pentagonal terá 651 pontos. Quantos pontos terá a vigésima primeira figura?



Resolução: Observando a segunda e terceira pentagonal nota-se que a segunda figura foi obtida acrescentando-se 4 novos pontos (vértices do polígono) e n pontos em cada um dos 3 vértices opostos ao ponto fixo, sendo n a posição da pentagonal na sequência. Assim os pontos da poligonal n são dados por $P_n = P_{n-1} + 3(n-1) + 4$.

Como a vigésima poligonal possui 651 pontos, então para a vigésima primeira figura temos:

$$P_{21} = P_{20} + 3.20 + 4$$

$$P_{21} = 651 + 60 + 4 = 715$$

Portanto a vigésima primeira poligonal possui 715 pontos.

3.2 Progressão Aritmética

3.2.1 Introdução

As projeções para a produção de arroz no período de 2012 – 2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	**Projeção (t)**
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

Suponha ser necessário obter o valor da projeção em 2021.

Uma forma de obter essa estimativa é através do estudo das sequências. Considere a sequência $(50,25; 51,50; 52,75; 54...)$. Observando-a nota-se que cada termo a_{n+1} é obtido através da soma do termo anterior ao valor de $1,25$, daí $a_{n+1} = a_n + 1,25$.

Sendo $a_1 = 50,25$, $a_2 = 51,50$, $a_3 = 52,75$, $a_4 = 54,00$, temos que

$a_4 = 54 + 1,25 = 55,25$,

$a_5 = 55,25 + 1,25 = 56,5$,

$a_6 = 56,5 + 1,25 = 57,75$,

$a_7 = 57,75 + 1,25 = 59,00$,

$a_8 = 59 + 1,25 = 60,25$,

$a_9 = 60,25 + 1,25 = 61,5$ e, finalmente,

$a_{10} = 61,5 + 1,25 = 62,75$.

Portanto a projeção de produção em 2021 é $62,75$.

Com o conhecimento de sequências facilmente resolvemos situações como a apresentada acima, porém essa resolução torna-se trabalhosa quando é necessário encontrar um termo muito distante do termo que se tem. Para essas questões, o estudo das progressões aritméticas torna-se bastante útil.

3.2.2 Definição

Denominamos **progressão aritmética (P.A.)** como a sequência onde a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. A essa constante atribui-se o nome de *razão* da progressão aritmética

Por exemplo, a sequência (a_1, a_2, a_3) será uma P.A. sempre que $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = r$ (razão).

Uma sequência pode ser classificada de acordo com sua razão, da seguinte maneira:

- Crescente: quando $a_n > a_{n-1}$, ou seja, $r > 0$.
- Decrescente: quando $a_n < a_{n-1}$, ou seja, $r < 0$.
- Constante: quando $a_n = a_{n-1}$, ou seja, $r = 0$.

Exemplos:

- $(4, 12, 20, 28...)$ é uma progressão aritmética infinita de $a_1 = 4$ e raio igual a 8, portanto, crescente;
- $(4,6; 5,8; 7,0)$ é uma progressão aritmética finita de $a_1 = 4,6$ e raio igual a $1,2$, portanto, crescente.
- $(27, 24, 21, ...)$ é uma progressão aritmética infinita de $a_1 = 27$ e raio igual a -3, portanto, decrescente.

- $(-1, -1, -1, -1...)$ é uma progressão aritmética infinita de $a_1 = -1$ e raio igual a 0, portanto, constante.

3.2.3 Questões Resolvidas

QUESTÃO 5 - (Univ. Federal do Pará) Sabendo que a sequência $(1 - 3x, x - 2, 2x + 1)$ é uma P.A., determinar o valor de x.

Resolução: Como a sequência é uma progressão aritmética temos que $(x - 2) - (1 - 3x) = (2x + 1) - (x - 2)$. Assim:

$$x - 2 - 1 + 3x = 2x + 1 - x + 2 \Rightarrow$$
$$4x - 3 = x + 3 \Rightarrow$$

$$4x - x = 3 + 3 \Rightarrow$$
$$3x = 6 \Rightarrow$$

$$x = \frac{6}{3}$$

QUESTÃO 6 - (SBM) Determine 4 números em progressão aritmética crescente, conhecendo sua soma 8 e a soma de seus quadrados 36.

Resolução: Considere que os dois números centrais dessa P.A. são $x - y$ e $x + y$. Dessa forma temos que $(x + y) - (x - y) = 2y$.

Então a progressão aritmética é dada por $(x - 3y,\ x - y,\ x + y,\ x + 3y)$.

Assim como a soma dos termos é 8 temos:

$$x - 3y + x - y + x + y + x + 3y = 8 \Rightarrow$$

$$4x = 8 \Rightarrow$$

$$x = \frac{8}{4} \Rightarrow$$

$$x = 2$$

Como a soma dos quadrados é 36, temos:

$$(x - 3y)^2 + (x - y)^2 + (x + y)^2 + (x + 3y)^2 = 36 \Rightarrow$$

$$x^2 - 6xy + 9y^2 + x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 6xy + 9y^2 = 36 \Rightarrow$$

$$4x^2 + 20y^2 = 36$$

Como $x = 2$, temos

$$4.4 + 20y^2 = 36 \Rightarrow$$

$$20y^2 = 20 \Rightarrow$$

$$y^2 = \frac{20}{20} \Rightarrow$$

$$y^2 = 1 \Rightarrow$$

$$y = \pm\sqrt{1} \Rightarrow$$

$$y = \pm 1.$$

Como a P.A. é crescente, então $(x + y) > (x - y)$. Daí

$$2 + y > 2 - y \Rightarrow$$

$$y + y > 0 \Rightarrow$$

$$2y > 0 \Rightarrow$$

$$y > 0.$$

Logo $x = 2$ e $y = 1$. Assim $x - 3y = 2 - 3 = -1$, $x - y = 2 - 1 = 1$, $x + y = 2 + 1 = 3$, $x + 3y = 2 + 3 = 5$.

Portanto os números são $-1, 1, 3, 5$.

QUESTÃO 7 - (PUC - MG) As medidas dos ângulos internos de um triângulo estão em progressão aritmética de razão 20°. Quanto mede o menor ângulo desse triângulo?

Resolução: Consideremos a P.A $(x-20°, x, x+20°)$ sendo a progressão dada na questão. Dessa forma a soma dos termos dessa progressão é $180°$ pois a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é $180°$. Daí

$$x - 20° + x + x + 20° = 180° \Leftrightarrow$$

$$3x = 180° \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{180°}{3} \Leftrightarrow$$

$$x = 60°$$

Logo os ângulos do triângulo são $x-20° = 40°$, $x = 60°$ e $x = 80°$ e, portanto, o menor ângulo do triângulo mede $40°$

QUESTÃO 8 - (Papiro de Rhind) Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em Progressão Aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores.

Resolução: Seja a sequência:$(x-2r$,$x-r$, x,$x+r$, $x+2r)$, considerando q a razão. A soma tem que resultado 100, pois são 100 pães. Assim

$x-2r$+$x-r$ + x+$x+r$, $x+2r = 100 \Leftrightarrow 5x = 100 \Leftrightarrow x = 20$.

Encontrando o valor de x é 20, basta descobrir o valor da razão. Pelas informações do problema temos:

$$\frac{1}{7}(x + x + r + x + 2r) = x - 2r + x - r \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{7}(3x + 3r) = 2x - 3r \Leftrightarrow$$

$$3x + 3r = 14x - 21r \Leftrightarrow$$

$$11x = 24r$$

Como $x = 20$, então

$$11.20 = 24r \Leftrightarrow$$

$$220 = 24r \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{220}{24} = \frac{55}{6}.$$

Dessa forma temos que a sequência $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r) = (20 - 2.\frac{55}{6}, 20 - \frac{55}{6}, 20, 20 + \frac{55}{6}, 20 + 2.\frac{55}{6}) = (\frac{5}{3}, \frac{65}{6}, \frac{175}{6}, \frac{115}{3})$ representa a quantidade de pães que cada um dos 5 homens receberá.

3.2.4 Termo Geral da Progressão Aritmética

Em uma progressão aritmética o próximo termo é igual ao seu antecessor somado a uma razão r. Dessa forma, podemos dizer, genericamente, que $a_2 = a_1 + r$.

Assim, temos que $a_3 = a_2 + r$. Substituindo o valor genérico de a_2 na expressão temos $a_3 = a_1 + 2r$.

Analogamente, $a_4 = a_3 + r$ que após substituído o valor de a_3 na expressão fica $a_4 = a_1 + 3r$.

Repetindo o procedimento seguidamente tem-se:

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + r.$$

$$a_3 = a_1 + 2r.$$

$$a_4 = a_1 + 3r$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Portanto, o termo geral de um progressão aritmética é dado por $a_n = a_1 + (n - 1)r$ para $n \geq 2$.

Essa fórmula pode ser demostrada utilizando o princípio da indução matemática:

Ela é válida para o segundo termo pois, por definição, cada termo é igual ao anterior mais uma constante fixa r e portanto $a_2 = a_1 + r$;

Assumindo como hipótese de indução que a fórmula é válida para $n-1$, ou seja, que $a_{n-1} = a_1 + (n-2)r$, resulta que o n-ésimo termo é dado por:

$$a_n = a_{n-1} + r \Leftrightarrow$$

$$a_n = (a_1 + (n-2)r) + r \Leftrightarrow$$

$$a_n = a_1 + ((n-2)r + r) \Leftrightarrow$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Exemplos:

- O 15º termo da P.A. $(3, 7, 11, 15...)$ é dado por $a_{15} = 3 + (15-1).4 = 59$.
- O número de termos da P.A. $(12, 15, 18, ..., 279)$ é dado por $279 = 12 + (n-1).3 \Leftrightarrow$n=90.

3.2.5 Questões Resolvidas

QUESTÃO 9 - (Enem - 2011) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33000 passagens; em fevereiro, 34500; em março, 36000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

Resolução: Considere a sequência $(33.000, 34.500, 36.000...)$ uma P.A e note que sua razão r é $r = 1.500$

Sendo a_n o número mensal de aumento de passagens da empresa no mês n, queremos descobrir o valor de a_7. Deste modo:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow$$

$$a_7 = 33.000 + (7-1).1500 \Leftrightarrow$$

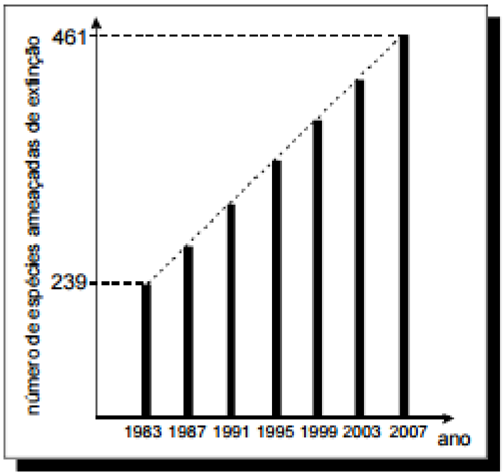
$$a_7 = 33.000 + 6.1500 \Leftrightarrow$$

$$a_7 = 33.000 + 9.000 \Leftrightarrow$$

$$a_7 = 42.000$$

Portanto no mês de julho o aumento de passagens foi de 42.000.

QUESTÃO 10 - (Enem - 2007) O gráfico abaixo, obtido a partir de dados do Ministério do Meio Ambiente, mostra o crescimento do número de espécies da fauna brasileira ameaçadas de extinção.



Se mantida, pelos próximos anos, a tendência de crescimento mostrada no gráfico, o número de espécies ameaçadas de extinção em 2011 será igual a?

Resolução: Analisando o gráfico percebe-se 7 períodos, com um intervalo de 4 anos entre cada um. Segue que o período de 2011 é o imediatamente posterior ao de 2007. Sabendo que no primeiro período tem-se o valor de 239 espécies e no sétimo período o valor é 461 temos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Leftrightarrow$$

$$461 = 239 + (6-1).r \Leftrightarrow$$

$$461 - 239 = 5r \Leftrightarrow$$

$$222 = 6r \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{222}{6} \Leftrightarrow$$

$$r = 37$$

Ou seja, a variação a cada período é de 37 espécies.

Somando 37 ao período de 2007, obtemos o período seguinte, de 2011, que é de $461 + 37 = 498$ espécies.

QUESTÃO 11 - (Enem - 2010) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir:

Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

Resolução: Pela figura é fato que para formar um quadrado são necessários 4 canudos. Para formar dois quadrados são necessários 7 canudos e para formar três quadrados 10 canudos são necessários. Assim temos:

Quadrados	Canudos
1	4
2	7
3	10

Não é difícil perceber que o número de canudos (C) forma uma progressão aritmética de razão 3. Então é verdadeiro que $a_n = a_1 + (n-1).r \Leftrightarrow C = 4 + (Q-1).3$, onde Logo

$$C = 4 + (Q-1).3 \Leftrightarrow$$

$$C = 4 + 3Q - 3 \Leftrightarrow$$

$$C = 3Q + 1.$$

Portando a expressão que fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura é $C = 3Q + 1$.

QUESTÃO 12 - (IFBA) O cometa Halley visita a Terra a cada 76 anos. Sua última aparição foi em 1986. Quantas vezes ele visitou a Terra desde o nascimento de Cristo?

Resolução: Os anos de passagem do cometa formam uma progressão aritmética de razão -76. Assim, seu termo geral é dado por $a_n = 1986 + (n-1).(-76)$ onde a_n representa os anos de passagem do cometa e n a quantidade de vezes que o cometa passou. Considere $n = 1$ para passagem do cometa em 1986, $n = 2$ para a passagem do cometa em 1910 e assim sucessivamente.

A questão pede o ano de passagem do cometa na era cristã, logo $a_n > 0$. Dessa maneira temos:

$$1986 + (n-1).(-76) > 0 \Leftrightarrow$$

$$2062 - 76n > 0 \Leftrightarrow$$

$$76n < 2062 \Leftrightarrow$$

$$n < \frac{2062}{76} \Leftrightarrow$$

$$n < 27,1315...$$

Assim as passagens na era cristã aconteceram em todos os $a_n, n \leq 27$. Como deseja-se encontrar a primeira passagem, então n deverá assumir o maior valor possível, neste caso, $n = 27$ .Logo

$$a_n = 1986 + (n-1).(-76) \Leftrightarrow$$

$$a_{27} = 1986 + (27-1).(-76) \Leftrightarrow$$

$$a_{27} = 1986 + 26.(-76) \Leftrightarrow$$

$$a_{27} = 1986 - 1976 \Leftrightarrow$$

$$a_{27} = 10$$

Portanto o cometa Halley visitou 27 vezes a Terra na era cristã e sua primeira passagem na era cristã se deu no ano 10.

3.2.6 Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética

O matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) é considerado o maior matemático do século XIX e um dos maiores de todos os tempos. Com origem de família pobre, seu pai tentou evitar que recebesse instrução adequada mas ele teve o apoio de sua mãe e de um tio para os estudos.

Desde pequeno foi considerado pelo seu professor, Buttner, uma criança com habilidades acima da média. Buttner entregou a seu ajudante, Johann Martin Bartels, um jovem de 17 anos, a responsabilidade dos ensinamentos a Gauss.

Segundo conta-se, o professor pediu à turma que calculasse o valor da soma de 1 a 100 e em pouco tempo Gauss respondeu 5050, corretamente.

Gauss observou que a soma de dois termos equidistantes é igual à soma dos extremos.

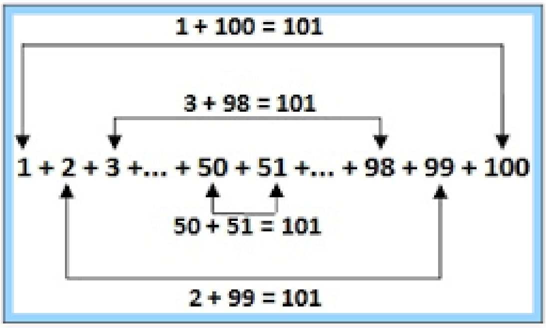


Figura 3.2: Soma dos números de 1 a 100

Assim, Gauss concluiu que o resultado da soma pode ser dado pela soma de dois termos equidistantes multiplicada pela quantidade de termos e dividido por dois, ou seja

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}.$$

A demonstração desta fórmula pode ser dada da seguinte maneira:

Somando

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$ e

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$, obtemos

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$. Como a soma de dos termos equidistantes é sempre a mesma temos:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$ assim,

$2S_n = (a_1 + a_n).n \Leftrightarrow$
$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n).n}{2}$
A soma dos números de 1 a 100 pode, então, ser calculada da seguinte maneira:
Os números de 1 a 100 formam a progressão aritmética $(1, 2, 3...99, 100)$ de

- $a_1 = 1$
- $a_{100} = 100$
- $n = 100$

Assim, para calcular a soma dos termos temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

$$S_{100} = \frac{(1 + 100)100}{2} \Leftrightarrow$$

$$S_{100} = \frac{101(100)}{2} \Leftrightarrow$$

$$S_{100} = \frac{10100}{2} = 5050$$

Uma maneira mais rigorosa de demonstrar a fórmula é através da indução matemática:

Considere $S_n : 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{(n+1)n}{2}$.

Note que $1 = \dfrac{(1+1).1}{2}$ é verdadeira. Portanto a igualdade é verdadeira para $n = 1$.

Considere $S_{n+1} : 1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Agora suponha que S_n seja verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Somando $n + 1$ a ambos os lados da igualdade temos

$$1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \frac{(n+1)n}{2} + (n+1) \Leftrightarrow$$

$$1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \frac{(n+1)n + 2(n+1)}{2} \Leftrightarrow$$

$$1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \Leftrightarrow$$

$$1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \Leftrightarrow$$

$$1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Logo a igualdade é verdadeira para S_{n+1}.

Portanto, a fórmula

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.2.7 Questões Resolvidas

QUESTÃO 13 - (Enem - 2013) As projeções para a produção de arroz no período de $2012 - 2021$, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	**Projeção (t)**
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de

Resolução: As quantidades de arroz produzidas formam uma progressão aritmética, dado seu crescimento constante igual a $51,50 - 50,25 = 1,25$. Assim, para calcular o total produzido no período de 2012 a 2021 podemos utilizar da fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$, sendo a_1 a produção em 2012, a_n a produção em 2021 e $n = 10$.

Sabendo que $a_n = a_1 + (n-1).r$ temos que $a_{10} = 50,25 + (10-1).1,25 \Leftrightarrow a_{10} = 50,25 + 9.1,25 = 61,5$. Assim:

$$S_n = \frac{(50,25 + 61,5).10}{2} \Leftrightarrow$$

$$S_n = 111,75.5 \Leftrightarrow$$

$$S_n = 558,75$$

QUESTÃO 14 - (Enem - 2012) Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas. A quantidade de cartas que forma o monte é:

Resolução: Para calcularmos as cartas do monte, basta subtrairmos do total de cartas a quantidade de cartas que formam as colunas. As quantidades de cartas que formam as colunas podem ser representadas pela P.A. $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$. Assim, para saber quantas cartas são utilizadas nas colunas basta que façamos a soma dos termos da P.A.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \Rightarrow$$

$$S_7 = \frac{(1+7).7}{2} \Leftrightarrow$$

$$S_7 = \frac{8.7}{2} \Leftrightarrow$$

$$S_7 = \frac{56}{2} = 28$$

Logo são utilizadas 28 cartas para a composição das colunas. Dai a quantidade de cartas do monte é dada por $52 - 28 = 24$.

Portanto, o monte possui 24 cartas.

QUESTÃO 15 - (Enem - 2010) Ronaldo é um garoto que adora brincar com números. Numa dessas brincadeiras, empilhou caixas numeradas de acordo com a sequência conforme mostrada no esquema a seguir.

			1			
		1	2	1		
	1	2	3	2	1	
1	2	3	4	3	2	1
			...			

Ele percebeu que a soma dos números em cada linha tinha uma propriedade e que, por meio dessa propriedade, era possível prever a soma de qualquer linha posterior às já construídas. A partir dessa propriedade, qual será a soma da 9ª linha da sequência de caixas empilhadas por Ronaldo?

Resolução: Na figura temos que o termo central de cada linha é igual ao número desta linha, isto é, na primeira linha, temos o número 1 , na segunda, 2 e assim por diante.

Observe que, antes do termo central, os números seguem em ordem crescente até o termo central formando uma P.A. e decrescem até 1 após ele, com os mesmos números. Assim, a soma dos termos da $n-ésima$ linha é:

$$2.[(n-1)+(n-2)+(n-3)+...+3+2+1]+n$$

$(n-1)+(n-2)+(n-3)+...+3+2+1$ é a soma dos termos de 1 até $n-1$ e pode ser expressa por

$$S_{n-1}=\frac{[(n-1)+1].(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n}{2}$$

desde modo, substituindo o valor de S_{n-1} na expressão que fornece a soma dos termos até a $n-ésima$ linha temos

$$2.\frac{n^2-n}{2}+n=n^2-n+n=n^2$$

Assim a soma da $n-ésima$ linha da sequência é n^2 e, portanto, a soma da 9ª linha da sequência é $9^2=81$.

3.3 Progressão Geométrica

3.3.1 Introdução

Veja uma versão de uma famosa lenda sobre a história do jogo de xadrez:

> *Conta-se que o rajá indiano Balhait, entediado com jogos em que a sorte acabava prevalecendo sobre a perícia e a habilidade do jogador, pediu a um sábio de sua corte, chamado Sissa, que inventasse um jogo que valorizasse qualidades nobres, como a prudência, a diligência, a lucidez e a sabedoria, opondo-se às características de aleatoriedade e fatalidade observadas no nard (antigo jogo indiano com dados).*
>
> *Passado algum tempo, Sissa se apresentou ao rajá com sua invenção. Tratava-se de um tabuleiro quadriculado, sobre o qual se movimentavam peças de diferentes formatos, correspondendo cada formato a um elemento do exército indiano: Carros (Bispos), Cavalos,*

Elefantes (Torres) e Soldados (Peões), além de um Rei e um vizir (Rainha). Sissa explicou que escolheu a guerra como tema porque é a guerra onde mais pesa a importância da decisão, da persistência, da ponderação, da sabedoria e da coragem.

O rajá ficou encantado com o jogo e concedeu a Sissa o direito a pedir o que quisesse como recompensa. Sissa tentou recusar a recompensa, pois a satisfação de ter criado o jogo, por si só, já lhe era gratificante. Mas o rajá insistiu tanto que Sissa concordou em fazer um pedido:

- Desejo, como recompensa, um tabuleiro de Xadrez cheio de grãos de trigo, sendo que a primeira casa deve ter um grão, a segunda deve ter dois, a terceira deve ter quatro, a quarta deve ter oito, e assim sucessivamente, dobrando o número de grãos na casa seguinte, até encher todas as casas do tabuleiro com o número de grãos correspondentes.

O rajá se recusou a satisfazer um pedido tão modesto, e tentou persuadir Sissa a escolher uma recompensa mais valiosa. No entanto, Sissa disse que para ele bastava que lhe fosse conferida aquela recompensa, e nada mais.

Diante disso, o rajá ordenou que lhe dessem um saco de trigo, julgando que nele haveria pagamento de sobra, mas Sissa se recusou a aceitá-lo. Disse que não queria nem um grão a mais nem a menos do que lhe cabia receber.

Foi só então que o rajá ordenou aos seus matemáticos que calculassem a quantia exata que deveria ser paga, e descobriu, para sua consternação, que todo o trigo da Índia não era suficiente, aliás, todo o trigo cultivado no mundo, durante dezenas de anos, não seria suficiente!

Tahan, Malba. "O homem que calculava".(2012)

Escrevendo a sequência de grãos em cada casa do tabuleiro temos $(1, 2, 4, 8, 16, 32, ...)$ que facilmente nota-se não ser uma progressão aritmética, embora esta sequência estabelece um padrão em seus termos: $(1, 2, 4, 8, 16, 32, ...) = (2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, ...)$ um termo é igual ao anterior multiplicado por 2. Quando situações semelhantes acontecem, elas determinam um tipo de sequência denominada progressão geométrica.

3.3.2 Definição

Definimos **Progressão Geométrica (P.G.)** a sequência onde a razão entre cada termo e seu antecessor é uma constante. A essa constante atribui-se o nome de *razão* da progressão geométrica.

Por exemplo, a sequência (a_1, a_2, a_3) será uma P.G. sempre que $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = q$ (razão).

Uma sequência pode ser classificada de acordo com sua razão, da seguinte maneira:

- Crescente: quando $a_n > a_{n-1}$, ou seja, para $a_1 > 0$ temos $q > 1$ ou para $a_1 < 0$ temos $0 < q < 1$.
- Decrescente: quando $a_n < a_{n-1}$, ou seja, para $a_1 > 0$ temos $0 < q < 1$ ou para $a_1 < 0$ temos $q > 1$.
- Constante: quando $a_n = a_{n-1}$, ou seja, $q = 1$ ou para qualquer valor de q quando $a_1 = 0$.
- Alternante: quando cada termo tem sinal oposto ao sinal do termo anterior, ou seja, $q < 0$.

Exemplos:

- $(6, 6, 6, 6, 6, ...)$ é uma progressão geométrica infinita de $a_1 = 6$ e razão igual a 1, portanto, constante.
- $(3, 6, 12, 24)$ é uma progressão geométrica finita de $a_1 = 3$ e razão igual a 2, portanto, crescente.
- $(-100, -50, -25, -\frac{25}{4}, ...)$ é uma progressão geométrica infinita de $a_1 = -100$ e razão igual a $\frac{1}{2}$, portanto, crescente.
- $(16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, ...)$ é uma progressão geométrica infinita de $a_1 = 16$ e razão igual a $\frac{1}{2}$, portanto, decrescente.
- $(-4, -12, -36, -108)$ é uma progressão geométrica finita de $a_1 = -4$ e razão igual a 3, portanto, decrescente.
- $(-2, +4, -8, +16, -32, +64)$ é uma progressão geométrica finita de $a_1 = -2$ e $q = -2$, portanto, alternante.

3.3.3 Questões Resolvidas

QUESTÃO 16 - (Enem - 2008) Fractal (do latim fractus, fração, quebrado) — objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais — objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);

2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;

3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;

4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

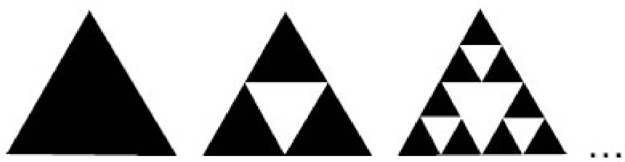


Figura 1 Figura 2 Figura 3

De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da sequência apresentada acima é:

A 

B 

C 

D 

E 

Resolução: Na sequência de figuras, pode-se observar que as figuras 1, 2 e 3 apresentam 1, 3 e 9 triângulos pretos, respectivamente. Considere a_n a quantidade de triângulos pretos da figura n. Dessa forma queremos descobrir a_4. Da observação das figuras pode-se criar a sequência $(1, 3, 9...)$.

Observando a sequência, nota-se que:

$\frac{3}{1} = \frac{9}{3}$, logo a sequência é uma progressão geométrica de razão $q = 3$. Dessa maneira temos que $a_4 = a_3.3 = 9.3 = 27$.

Portanto a opção correta é a opção C que apresenta 27 triângulos pretos.

QUESTÃO 17 - (Cesgranrio - 1988) Suponha que os números x, -6, $3x + 3$ e y estão, nesta ordem, em progressão geométrica. Desse modo os valores de x e y são:

Resolução: Como a sequência forma uma progressão geométrica, então

$$\frac{-6}{x} = \frac{3x+3}{-6} = \frac{y}{3x+3}$$

Assim temos

$$(-6).(-6) = (3x + 3).x \Rightarrow$$

$$36 = 3x^2 + 3x \Rightarrow$$

$$3x^2 + 3x - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + x - 12 = 0.$$

Resolvendo a equação segue que

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-12)}}{2.1} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow$$

$$x = 3 \text{ ou } x = -4$$

Para calcular os valores de y temos:

$$\frac{-6}{x} = \frac{y}{3x+3} \Rightarrow$$

$$(3x+3).(-6) = xy \Rightarrow$$

$$-18x - 18 = xy \Rightarrow$$

Para $x = 3$ temos:

$$-18.(3) - 18 = 3y \Rightarrow -54 - 18 = 3y \Rightarrow y = \frac{-72}{3} \Rightarrow y = -24$$

Para $x = -4$ temos:

$$-18.(-4) - 18 = -4y \Rightarrow 54 = -4y \Rightarrow y = \frac{54}{-4} = -\frac{27}{2}$$

Portanto os valores de x e y são, respectivamente, 3 e -24 ou -4 e $-\frac{27}{2}$.

QUESTÃO 18 - (UEPA - 2002) Um carro, cujo preço à vista é $R\$24.000,00$, pode ser adquirido dando-se uma entrada e o restante em 5 parcelas que se encontram em progressão geométrica. Um cliente que optou por esse plano, ao pagar a entrada, foi informado que a segunda parcela seria de $R\$4.000,00$ e a quarta parcela de $R\$1.000,00$. Quanto esse cliente pagou de entrada na aquisição desse carro?

Resolução: Sabemos que:

$a_2 = 4000$ e $a_4 = 1000$, portanto a progressão geométrica formada pelas parcelas é uma P.G. decrescente.

Como $a_2 = a_1.q$ então $4000 = a_1.q \Rightarrow a_1 = \dfrac{4000}{q}$.

Como $a_4 = a_1.q^3$ então $1000 = a_1.q^3 \Rightarrow 1000 = \dfrac{4000}{q}.q^3 \Rightarrow 1000 = 4000.q^2 \Rightarrow q^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow q = \dfrac{1}{2}$.

Assim $a_1 = \dfrac{4000}{q} = \dfrac{4000}{\frac{1}{2}} = 8000$.

Daí:

$a_3 = a_2.q = 4000.\dfrac{1}{2} = 2.000$ e $a_5 = a_4.q = 1000.\dfrac{1}{2} = 500$

Logo $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 8.000 + 4.000 + 2.000 + 1.000 + 500 = 15.500$.

Subtraindo o valor total das parcelas do valor do carro, obtém-se o valor da entrada, logo

$24.000 - 15.500 = 8500$

Portanto o cliente pagou $R\$8500,00$ de entrada.

QUESTÃO 19 - (UFMG) Uma criação de coelhos foi iniciada há exatamente um ano e, durante esse período, o número de coelhos duplicou a cada quatro meses. Hoje, parte dessa criação deverá ser vendida para se ficar com a quantidade inicial de coelhos. Para que isso ocorra, a porcentagem da população atual dessa criação de coelhos a ser vendida é

a) 75

b) 80

c)$83,33$

d) $87,5$

Resolução: Não há informação da quantidade inicial de coelhos logo podemos afirmar que esse valor é x. Sendo assim, passados 4 meses, a população de coelhos tornou-se $2x$,8 meses,$4x$; após 12 meses, a população passou a ser $8x$.

Podemos representar a sequência da quantidade de coelhos como uma progressão geométrica $(x, 2x, 4x, 8x)$ de razão $q = 2$.

Como, de acordo com o enunciado, o criador de coelhos quer voltar a ter a quantia inicial (x), então ele deve vender $8x - x = 7x$ coelhos.

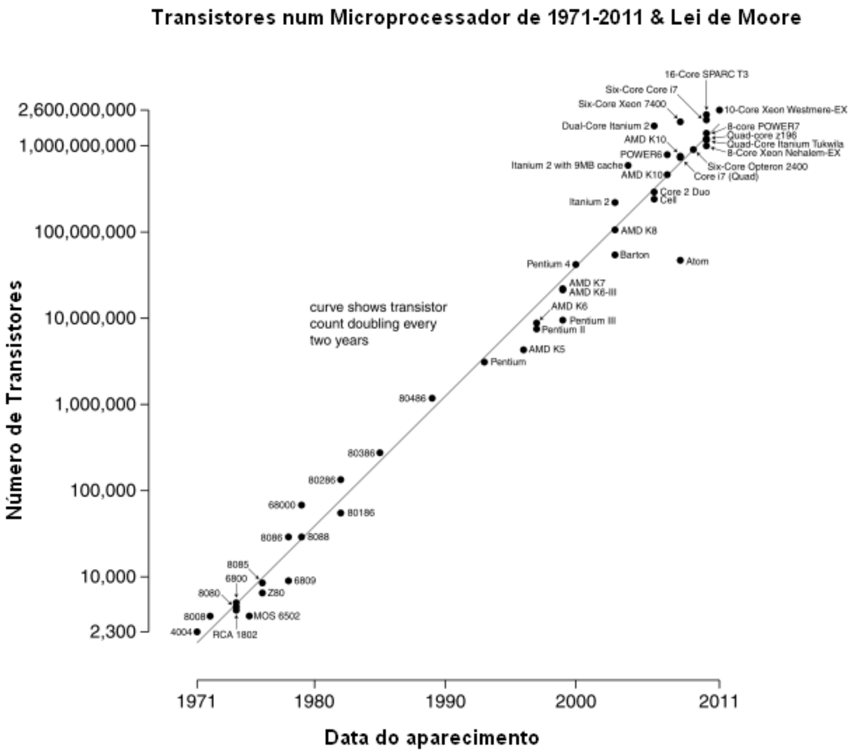
Uma das maneiras de calcular a porcentagem de coelhos a ser vendida é através de uma regra de três:

$$\begin{array}{cc} 8x & 100\% \\ 7x & v \end{array} \Rightarrow v = \frac{7x.100\%}{8x} = 87,5\%$$

Portanto, a população de coelhos a ser vendida é $87,5\%$, alternativa d.

3.3.4 Termo Geral da Progressão Geométrica

O famoso engenheiro Gordon Moore em 1965 é cofundador da Intel e disse que a cada dois anos, aproximadamente, seria possível dobrar a quantidade de transitores em um chip, dobrando a potência possível de um computador. Essa teoria sempre foi comprovada ao longo dos anos como mostra o gráfico a seguir.



Dessa forma, seguindo fielmente a regra, a quantidade de transitores em um chip forma uma progressão geométrica de razão 2. Mas como descobrir a quantidade e transitores de uma determinada época, sem ter que calcular termo a termo dessa progressão?

Situações como a apresentada nos levam ao estudo de uma forma de determinar um *n-ésimo* termo de uma progressão geométrica

Sabemos que de uma P.G. de razão q:

$$n-1 \text{ fatores} \begin{cases} a_1 \\ a_2 = a_1.q \\ a_3 = a_2.q \\ a_4 = a_3.q \\ a_5 = a_4.q \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1}.q \end{cases}$$

Multiplicando as igualdades, temos:

$$a_n = a_1.q.q.q.....q.q$$

Assim,

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

Essa fórmula pode ser demonstrada utilizando o princípio da indução matemática:

Para $n = 1$ temos

$$a_1 = a_1.q^{1-1} \Rightarrow$$

$$a_1 = a_1$$

Portanto a igualdade é verdadeira para $n = 1$.

Suponha, agora, que a fórmula seja correta para algum $n \in \mathbb{N}$, isto é, que $a_n = a_1.q^{n-1}$. Multiplicando por q ambos os lados dessa igualdade, segue que

$$a_{n+1} = a_n.q = a_1.q^{n-1}.q = a_1.q^n$$

o que mostra que a fórmula é correta para $n+1$. Portanto, ela é correta para todo $n \in \mathbb{N}$.

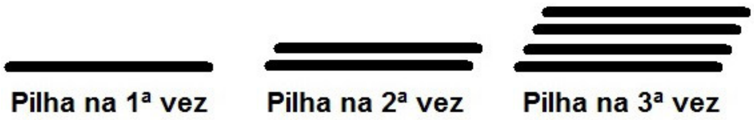
Exemplos:

- Na progressão geométrica $(2, 4, 8, ...)$ o 10^o termo é $a_{10} = 2.2^{10-1} = 2.2^9 = 2.512 = 1024$.

- A progressão geométrica $(6, -18, ..., 729)$ possui 6 termos pois $729 = 6.(-3)^{n-1} \Leftrightarrow n = 6$.

3.3.5 Questões Resolvidas

QUESTÃO 20 - (Vunesp - 2003) Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. A espessura de cada tábua é $0,5cm$. Forma-se uma pilha de tábuas colocando-se uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já estejam na pilha.



Determine, ao final de nove dessas operações:

a) quantas tábuas terá a pilha;

b) a altura, em metros, da pilha.

Resolução: a) Como em cada formação das pilhas é colocada a mesma quantia da anterior, a quantidade de madeiras em cada pilha dobra em relação à pilha anterior. Assim podemos formar uma P.G. que representa a quantidade de madeiras em cada pilha $(1, 2, 4...)$ de razão $q = 2$.

Sendo a_9 a quantidade de maneira da 9ª pilha, conhecendo o 1º termo da P.G. e a razão, podemos utilizar a fórmula do termo geral da P.G.

$$a_n = a_1.q^{n-1} \Rightarrow$$

$$a_9 = 1.2^{9-1} \Rightarrow$$

$$a_9 = 2^8 \Rightarrow$$

$$a_9 = 256$$

Portanto, a 9ª pilha terá 256 madeiras.

b) Basta multiplicar a quantidade de tábuas pela espessura de cada uma que é $0,5cm$. Assim

$$256.0,5 = 128cm = 1,28m$$

Portanto a 9ª pilha terá $1,28m$.

QUESTÃO 21 - (UFPE) Suponha que o preço de um automóvel se desvaloriza 10 por cento ao ano nos seus 5 primeiros anos de uso. Se este automóvel novo custou $R\$10.000,00$, qual será o seu valor em reais após os 5 anos de uso?

Resolução: Se o automóvel desvaloriza-se 10% ao ano, podemos afirmar que a cada ano seu valor passa a ser apenas 90% do que era anteriormente. Para determinar esse valor a cada ano, basta multiplicar o valor anterior por $0,9$ (que equivale a 90%).

Dessa forma, há uma progressão geométrica com razão $0,9$, por isso utilizaremos a fórmula do termo geral da P.G. para resolver a questão.

Consideremos $a_1 = 10.000$, $q = 0,9$ e $n = 6$ (pois, após 5 nos o automóvel estará em seu 6º ano).

$$a_n = a_1.q^{n-1} \Rightarrow$$

$$a_6 = a_1.q^{6-1} \Rightarrow$$

$$a_6 = 10000.(0,9)^5 = 10000.0,59049 \Rightarrow$$

$$a_6 = 5904,9$$

Portanto, o valor do automóvel será de $R\$5.904,90$.

QUESTÃO 22 - (UFV) Uma bactéria de determinada espécie divide-se em cada 2 horas. Depois de 24 horas, qual será o número total de bactérias?

a) 1024

b) 24

c) 4096

d) 12

e) 16777216

Resolução: Inicialmente temos 1 bactéria. Após duas horas, temos 2 bactérias. Após 2 horas cada uma das bactérias se divide, resultando em 4 bactérias. Deste modo, pode-se formar uma progressão geométrica em que cada termo a_n representa o número de bactérias após cada período $2h$, $(2, 4, 8...)$. Logo para um período de $24h$ temos a_{12}:

$$a_n = a_1.q^{n-1} \Rightarrow$$

$$a_{12} = 2.2^{12-1} = 2.2^{11} = 2^{12} = 4096$$

Portanto, após $24h$ a quantidade de bactérias desta espécie será de 4096, alternativa c.

3.3.6 Soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica

Na introdução das progressões geométricas foi apresentado o problema enfrentado pelo rajá indiano Balhait para fazer o pagamento da quantia de trigos pedido por Sissa mas não foi calculado a quantidade de trigos a ser paga. Na história, as quantidades de trigo podem ser representadas pela P.G. $(1, 2, 4, 8...)$, uma P.G. de $a_1 = 1$, $q = 2$ e 64 termos.

A soma dos n primeiros termos de uma P.G. é $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ **(I)**.

Multiplicando os termos da equação por $q \neq 0$ temos $q.S_n = q.(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$ **(II)**

Subtraindo **(II)** de **(I)**, temos:

$$\begin{array}{c} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \\ -q.S_n = q.(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) \\ \hline S_n - S_n.q = a_1 - a_n.q \end{array}$$

Sabemos que $a_n = a_1.q^{n-1}$, assim

$$S_n - S_n.q = a_1 - a_n.q \Rightarrow$$

$$S_n.(1-q) = a_1 - a_1.q^{n-1}.q \Rightarrow$$

$$S_n.(1-q) = a_1 - a_1.q^n \Rightarrow$$

$$S_n.(1-q) = a_1(1-q^n) \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{a_1.(1-q^n)}{1-q}$$

A fórmula $S_n = \dfrac{a_1.(1-q^n)}{1-q}$ pode ser demonstrada utilizando a indução matemática da seguinte maneira:

Para $n = 1$ temos que $S_n = \dfrac{a_1.(1-q)}{1-q} = a_1$. Logo a igualdade é verdadeira para $n = 1$.

Supondo que a fórmula seja verdadeira para n, verifiquemos se é verdadeira para $n + 1$:

$$S_{n+1} = a_{n+1} + S_n$$

Como $a_n = a_1.q^{n-1}$ então $a_{n+1} = a_1.q^n$. Assim,

$$S_{n+1} = a_1.q^n + S_n \Rightarrow$$

$$S_{n+1} = a_1.q^n + \frac{a_1.(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow$$

$$S_{n+1} = a_1.\left(q^n + \frac{1-q^n}{1-q}\right) \Rightarrow$$

$$S_{n+1} = a_1.\left(\frac{q^n.(1-q)+(1-q^n)}{1-q}\right) \Rightarrow$$

$$S_{n+1} = a_1.\left(\frac{q^n - q^{n+1} + 1 - q^n}{1-q}\right) \Rightarrow$$

$$S_{n+1} = a_1.\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

Logo a fórmula é verdadeira para $n + 1$ e, portanto, verdadeira para $n \in \mathbb{N}$.

Retornando ao problema inicial, conhecendo a fórmula apresentada, pode-se determinar a quantidade de trigo que o rajá indiano Balhait deverá para ao Sissa da seguinte maneira:

$$S_n = \frac{a_1.(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow$$

$$S_{64} = \frac{2^0.(1-2^{64})}{1-2} = 2^{64} - 1$$

$$S_{64} = 18.446.744.073.709.551.615$$

Esse gigantesco valor representa a quantidade de trigo que o inventor deveria receber do rajá.

Figura 3.3: A lenda do Xadrez

Exemplo:

- A soma dos termos da P.G. $(10000, 5000, 2500, 1250, 625)$ é $S_5 = \dfrac{10000.\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{10000.\left(1 - \frac{1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \dfrac{10000.\frac{31}{32}}{\frac{1}{2}} = 19375$

3.3.7 Questões Resolvidas

QUESTÃO 23 - (UFPB) Hélio comprou em uma loja,uma máquina de lavar roupas, no seguinte plano de pagamento: 10 parcelas, sendo a primeira de $R\$256,00$ e o valor de cada parcela, a partir da segunda, correspondendo a 50% do valor da anterior. Hélio pagou pela máquina o valor total de

a) $R\$511,75$

b) $R\$511,50$

c) $R\$511,00$

d) $R\$510,50$

e) $R\$510,00$

Resolução: Cada parcela corresponde a 50% (metade) da parcela anterior, portanto as parcelas formam uma progressão geométrica de $a_1 = 256$ e $q = \dfrac{1}{2}$. Para uma compra em 10 parcelas, considere $n = 10$.

O valor total da máquina pode ser calculado pela soma dos termos da progressão geométrica que representa as parcelas deste financiamento. Assim

$$S_n = \frac{a_1.(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow$$

$$S_{10} = \frac{256.\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$S_{10} = \frac{256.\left(1-\frac{1}{1024}\right)}{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$S_{10} = \frac{256.\dfrac{1023}{1024}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$S_{10} = \frac{1023}{4}.\frac{2}{1} \Rightarrow$$

$$S_{10} = \frac{1023}{2} = 511,5$$

Portanto, o valor total da máquina de lavar é $R\$511,50$, alternativa b.

QUESTÃO 24 - (Obmep - 2006) No início de janeiro de 2006, Tina formou com colegas um grupo para resolver problemas de Matemática. Eles estudaram muito e por isso, a cada mês, conseguiam resolver o dobro do número de problemas resolvidos no mês anterior. No fim de junho de 2006 o grupo havia resolvido um total de 1134 problemas. Quantos problemas o grupo resolveu em janeiro?

(A) 12

(B) 18

(C) 20

(D) 24

(E) 36

Resolução: Como a cada mês Tina e seus colegas dobram o número de problemas resolvidos, este número ano a ano forma uma P.G. Dessa maneira, considere:

S_6 = soma dos termos (ao final de 6 meses deu 1134)

a_1 = primeiro elemento (o que se quer descobrir na questão)

q = razão (q no caso é 2, pois a cada mês eles fazem o dobro do mês anterior)

n = número de termos (no caso é 6, pois de Janeiro a Junho são seis meses)

Assim, aplicando a fórmula da soma dos termos de uma P.G., temos:

$$S_n = \frac{a_1.(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow$$

$$1134 = \frac{a_1.(1-2^6)}{1-2} \Rightarrow$$

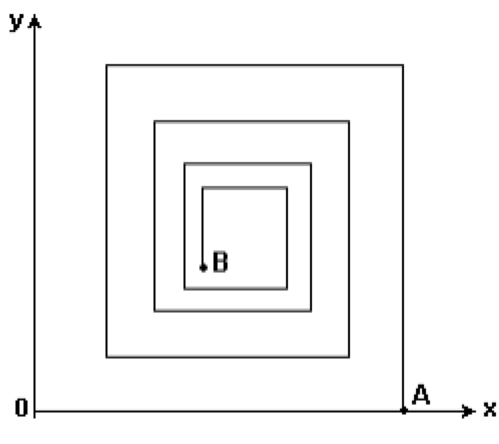
$$1134 = \frac{a_1.(1-64)}{-1} \Rightarrow$$

$$a_1 = \frac{-1134}{-63} \Rightarrow$$

$$a_1 = 18$$

Portanto, o número inicial de questões resolvidas por Tina e seus amigos foi 18.

QUESTÃO 25 - (Fuvest - 2003) No plano cartesiano, os comprimentos de segmentos consecutivos da poligonal, que começa na origem 0 e termina em B (ver figura), formam uma progressão geométrica de razão p, com $0 < p < 1$. Dois segmentos consecutivos são sempre perpendiculares. Então, se $\overline{OA} = 1$, a abscissa x do ponto $B = (x, y)$ vale:



a) $\dfrac{1-p^{12}}{1-p^4}$

b) $\dfrac{1-p^{12}}{1+p^2}$

c) $\dfrac{1-p^{16}}{1-p^2}$

d) $\dfrac{1-p^{16}}{1+p^2}$

e) $\dfrac{1-p^{20}}{1-p^4}$

Resolução: O segmento $\overline{OA} = 1$. O segmento seguinte tem medida igual a p, logo este termina no ponto $(1, p)$. O segmento posterior tem segmento igual a $p.p = p^2$, daí termina no vértice de coordenada $(1 - p^2, p)$. O próximo segmento possui segmento igual a p^3, assim este segmento termina no vértice $(1 - p^2, -p^3)$ Seguindo, tem-se um segmento de comprimento p^4 que termina no vértice $(1 - p^2 + p^4, p - p^3)$.

Observando a poligonal temos que as abscissas dos vértices determinados se alteram apenas quando a poligonal tem segmento horizontal (paralelo ao eixo x), ou seja, nos vértices ímpares considerando o ponto A como 1º vértice. Logo as abscissas são, 1, $1 - p^2$, $1 - p^2 + p^4$, $1 - p^2 + p^4 - p^6 ...$.

Observando os valores temos a soma de uma P.G. de razão $q = -p^2$. Assim, para o ponto B, 16º vértice que possui abscissa igual à abscissa do 15º vértice, que corresponde ao 8º termo da progressão, temos:

$$S_n = \frac{a_1.(1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow$$

$$S_8 = \frac{1.(1 - (-p^2)^8}{1 - (-p^2)} \Rightarrow$$

$$S_8 = \frac{1 - p^{16}}{1 + p^2}$$

Portanto a abscissa do ponto B é $\dfrac{1 - p^{16}}{1 + p^2}$, alternativa d.

3.3.8 Soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica

O filósofo grego Zenon ($450a.C.$) entre muito de seus estudos apresentou um paradoxo conhecido como *Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga*: Aquiles, disputando uma corrida com uma tartaruga, num ímpeto de generosidade, resolveu dar a ela uma pequena vantagem, deixando que o bicho partisse alguns centímetros à sua frente. A velocidade do mais veloz e valente guerreiro grego é igual a 10 vezes a velocidade da tartaruga. A distância que os separa é de 100 metros. Nessas condições, quando Aquiles vencer os 100 metros, a tartaruga terá corrido $\frac{1}{10}$ do que percorreu Aquiles e ficará 10 metros a sua frente. Quando Aquiles correr esses 10 metros, a tartaruga terá percorrido $\frac{1}{10}$ dessa distância e estará 1 metro a sua frente. Quando Aquiles correr esse metro, a tartaruga terá percorrido 10 centímetros, e assim por diante. Esse raciocínio pode levar muita gente a concluir que Aquiles, por mais rápido que seja, nunca alcançará a tartaruga. Assim, pensava o Zenon.

Sabemos que o pensamento de Zenon, embora pareça lógico é errado pois nestas condições após algum tempo Aquiles encontrará e ultrapassará a tartaruga. Matematicamente há uma explicação para isso:

Quando Aquiles percorrer os primeiros $100m$, a tartaruga percorrerá $10m$;

Quando Aquiles percorrer os próximos $10m$, a tartaruga percorrerá $1m$;

Quando Aquiles percorrer o próximo $1m$, a tartaruga percorrerá $0,1m$.

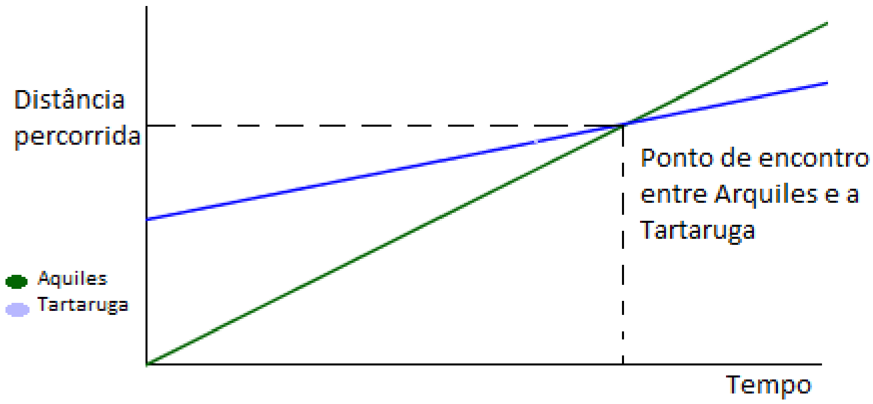


Figura 3.4: O Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga

Assim, para alcançar a tartaruga Aquiles deverá correr a distância $S = 100 + 10 + 1 + 0,1 + ...$, o que representa a soma de uma progressão geométrica de razão $q = \frac{1}{10}$ e $a_1 = 100$.

Dessa forma, S pode ser expressa por $S = \dfrac{100.\left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{10}}$. Observando a equação e o contexto do problema, precisa-se calcular o valor de S para um valor infinito de n, porém, n é o expoente de uma fração onde o numerador é 1 (elemento neutro da potenciação) e o denominador é maior que 1. Daí, quanto maior o valor de n, mais próximo de zero será o valor de $\left(\dfrac{1}{10}\right)^n$ o que torna este valor desprezível. Logo

$$S = \frac{100.\left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{10}} \Rightarrow$$

$$S = \frac{100.\left[1 - 0\right]}{1 - 0,1} \Rightarrow$$

$$S = \frac{100}{0,9} = 111,111...$$

Ou seja, quando Aquiles percorrer $111,111...m$ ele alcançará a tartaruga.

Para progressões geométricas infinitas onde $-1 < q < 1$, é possível estimar um valor para a soma de seus termos, pois estes em determinado momento, admitirão valores desprezíveis para a soma, como visto no caso histórico anterior.

Assim, para $-1 < q < 1$ temos

$$S_n = \frac{a_1.(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1.(1-0)}{1-q} \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

E para a quando a progressão geométrica tiver razão $q \leq -1$ ou $q \geq 1$?

Nestes casos q^n terá valores cada vez maiores quando n aumenta. Logo, quando a P.G. for infinita, a soma de seus termos será também um número infinito.

Exemplos:

- A soma dos termos da P.G. $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}...)$ é dada por $S = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$
- O número $0,444...$ por ser escrito na forma $0,4 + 0,04 + 0,004 + ...$. Observando esta sequência de somas podemos identificá-la como a soma dos termos da P.G $(0,4; 0,04; 0,004...)$ cuja razão é $q = \frac{1}{10} = 0,1$. Portanto a soma dos infintos termos da P.G. $(0,4; 0,04; 0,004...)$ é $S = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{0,4}{1-0,1} = \dfrac{0,4}{0,9} = \dfrac{4}{9} = 0,4444$. Esta é uma outra maneira de mostrar que $\dfrac{4}{9} = 0,4444....$

3.3.9 Questões Resolvidas

QUESTÃO 26 - (PUC SP – 2004) Uma pessoa A chega às 14 horas para um encontro que havia marcado com uma pessoa B. Como B não chegara ainda, A resolveu esperar um tempo t_1 igual a meia hora e, após isso, um tempo $t_2 = \dfrac{1}{2}t_1$ e, após, um tempo $t_3 = \dfrac{1}{2}t_2$ e, assim por diante. Se B não veio ao encontro, quanto tempo A esperou até ir embora?

a) 1 hora

b) 1 hora e 30 minutos

c) 2 horas

d) cerca de um ano

e) resto da vida

Resolução: A cada período de espera a pessoa A diminui pela metade o tempo que está disposta a continuar esperando. Assim tem-se uma P.G. de razão $q = \dfrac{1}{2}$ e $a_1 = 30$. Para saber o tempo total de espera basta calcular a soma dos teros desta progressão geométrica. Logo,

$$S = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow$$

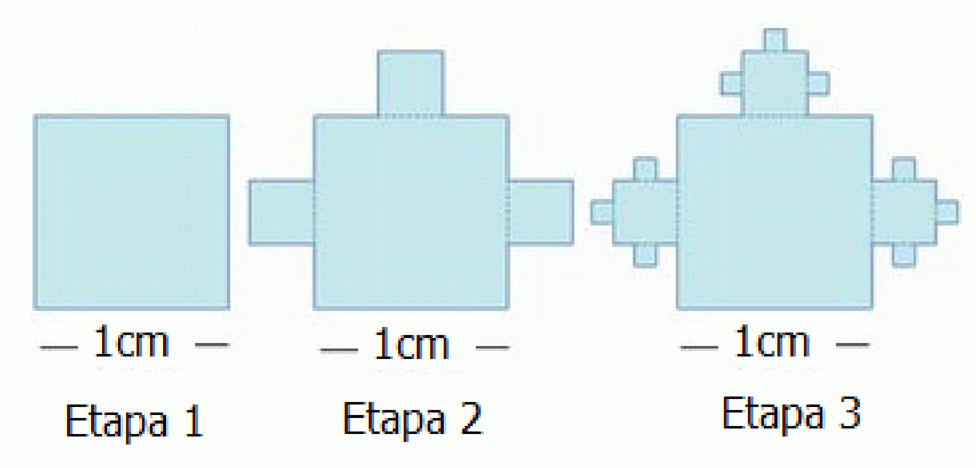
$$S = \frac{30}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$S = \frac{30}{\frac{1}{2}} = 30.\frac{2}{1} \Rightarrow$$

$$S = 60.$$

Portanto a pessoa A esperou 60 minutos que equivalem a 1 hora. Alternativa a.

QUESTÃO 27 - (UFRJ - 2003) A região fractal F, construída a partir de um quadrado de lado $1cm$, é construída por uma infinidade de quadrados e construída em uma infinidade de etapas. A cada nova etapa consideram-se os quadrados de menor lado (l) acrescentados na etapa anterior acrescentando-se, para cada um destes, três novos quadrados de lado $\dfrac{1}{3}$. As três primeiras etapas de construção de F são apresentados a seguir:



Calcule a área de F. Justifique.

Resolução: Para a etapa 1 a área total é dada pela área do quadrado de lado $1cm$. Para a etapa 2 a área total é dada pela área do quadrado de lado $1cm$

somada às áreas dos 3 quadrados de lado $\frac{1}{3}cm$. A área total da figura da etapa 3 é dada pela área do quadrado de lado $1cm$ adicionada às áreas dos 3 quadrados de lado $\frac{1}{3}cm$ adicionadas à área dos 9 quadrados de lado $\frac{1}{9}cm$. Dessa forma:

Etapa 1 : $A = 1.1 = 1cm^2$

Etapa 2: $A = 1.1 + 3.\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 + 3.\frac{1}{9} = 1 + \frac{1}{3}cm^2$

Etapa 3: $A = 1.1 + 3.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 9.\left(\frac{1}{9}\right)^2 = 1 + 3.\frac{1}{9} + 9.\left(\frac{1}{9}\right)^2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}cm^2$

Então, a área do Fractal é $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}...$ que é a soma dos termos de uma P.G. de $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{3}$ $(-1 < q < 1)$. Assim:

$$S = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow$$

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$S = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Portanto a área $F = \frac{3}{2}cm^2$.

QUESTÃO 28 - (VUNESP - 2005) O lado de um triângulo equilátero mede $3m$. Unindo-se os pontos médios de seus lados, obtém-se um novo triângulo equilátero. Unindo-se os pontos médios do novo triângulo, obtém-se outro triângulo equilátero e, assim sucessivamente. Determine a soma dos perímetros de todos os triângulos construídos.

Resolução: A cada novo triângulo formado possui lado com medida igual a metade do lado do triângulo anterior pois o ponto médio de um segmento divide-o em dois outros segmentos de medida igual à metade do segmento que os originou. Dessa forma, o perímetro do primeiro triângulo é $3.3 = 9m$, o perímetro do segundo triângulo é $3.\frac{3}{2} = \frac{9}{2}m$, do terceiro triângulo é $3.\frac{3}{4} = \frac{9}{4}m$ o que forma a P.G $\left(9, \frac{9}{2}, \frac{9}{4}, ...\right)$ de $a_1 = 9$ e razão $q = \frac{1}{2}$. Assim, a soma dos perímetros dos triângulos formados pode ser calculada pela soma dos termos de uma P.G. de razão $-1 < q < 1$. Logo

$$S = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow$$

$$S = \frac{9}{\frac{1}{2}} = 9.2 \Rightarrow$$

$$S = 18m$$

Portanto, a soma dos perímetros de todos os triângulos construídos é $18m$.

QUESTÃO 29 - (UFPI - 2010) Ao largar-se uma bola de uma altura de $5m$ sobre uma superfície plana, observa-se que, devido a seu peso, a cada choque com o solo, ela recupera apenas $\frac{3}{8}$ da altura anterior. Admitindo-se que o deslocamento da bola ocorra somente na direção vertical, qual é o espaço total percorrido pela bola pulando para cima e para baixo?

(A) $6m$

(B) $11m$

(C) $15m$

(D) $18m$

(E) $19m$

Resolução: A bola a cada toque no chão percorre $\dfrac{3}{8}$ da altura anterior, dessa forma as alturas que a bola atinge são 5, $5.\dfrac{3}{8}$, $5.\left(\dfrac{3}{8}\right)^2$ ... . Então a distância total que a bola percorre (descendo e subindo) é representada pela soma $D = 5 + \dfrac{15}{8} + \dfrac{15}{8} + \dfrac{45}{64} + \dfrac{45}{64} + ... = 5 + \dfrac{30}{8} + \dfrac{90}{64} + ...$ formando assim, a soma de 5 com a soma dos termos de uma progressão geométrica de $a_1 = \dfrac{30}{8}$ razão $q = \dfrac{3}{8}$. Daí

$$D = 5 + S \Rightarrow$$

$$D = 5 + \frac{\frac{30}{8}}{1 - \frac{3}{8}} \Rightarrow$$

$$D = 5 + \frac{\frac{30}{8}}{\frac{5}{8}} \Rightarrow$$

$$D = 5 + \frac{30}{5} \Rightarrow$$

$$D = 5 + 6 = 11$$

Portanto, a distância total percorrida pela bola é $11m$, alternativa B.

Capítulo 4

Considerações Finais

Este trabalho tem foco para o Ensino Médio, nos estudos de Sequências e Progressões com o intuito de mostrar uma abordagem de fácil entendimento com as principais definições e demonstrações. Não foram apresentadas uma quantidade exagerada de fórmulas e sim aquelas necessárias para uma compreensão adequada das progressões e utilização das mesmas no dia a dia e na vida prática do aluno.

O desenvolvimento histórico das sequências foi inserido não como um capítulo a parte, mas como parte integrante do processo de ensino-aprendizagem assim como situações curiosas que as envolvem objetivando assim um maior interesse por parte daquele que faz o estudo e enriquecendo o tema.

Os livros didáticos analisados neste estudo fazem uma boa abordagem das sequências e progressões, porém as vezes com questões de pouca utilidade prática ou excessiva quantidade de fórmulas, o que pode tornar o tema confuso àquele que nunca teve contato com sequências e progressões.

O caderno de estudos foi construido de forma a garantir maior aproximação dos conteúdos práticos com o conteúdo teórico, na medida que as questões resolvidas foram apresentadas após cada tópico, e estas, contextualizadas de acordo com o que estabelece os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio. As resoluções foram apresentadas de maneira clara em busca de um fácil entendimento do leitor.

Assim, foi apresentada uma maneira de trabalhar o estudo de Sequências e Progressões sem se preocupar com casos particulares de forma a atender o Guia de Referência para o Exame Nacional do Ensino Médio, explorando o aspecto histórico e contextualizando o tema respeitando os Parâmetros Curriculares Nacionais e os Conteúdos Básicos Comuns para a Matemática no Estado de Minas Gerais.

Referências

BALDIN,Yuriko Yamamoto; SILVA,Aparecida Francisco da. **Resolução de Problemas na Sala de Aula, Uma proposta da Obmep para Capacitação de Professores em Estratégias de Ensino da Matemática - volume 1**. Rio de Janeiro,RJ. IMPA, 2016.

BRAGA, Newton C. **A Lei de Moore**.
Disponível em http://www.newtoncbraga.com.br/index.php/eletronica/52-artigos-diversos/8084-a-lei-de-moore-art1177. Acesso em 20 ago. 2016.

BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. **Pârametros curriculares Nacionais do Ensino Médio: Matemática e suas tecnologias**. 2013.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática - volume único: livro do professor**. São Paulo, SP. Editora Ática, 2008, 1ª edição.

GENTIL, Nelson, et al.**Matemática para o 2º Grau**.São Paulo, SP. Editora Ática, 2001.

HEFEZ, Abramo. **Indução matemática**. Rio de Janeiro: OBMEP, 2009.

IDADE ANTIGA: EGITO.
Disponível em http://aprendendoagostardehistoria.blogspot.com.br/p/idade-antiga.html. Acesso em 20 ago. 2016.

IEZZI,Gelson. et al. **Matemática: ciência e aplicações - volume 1**. São Paulo, SP. Atual Editora, 2010, 5ª edição.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar - volume 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas**. Atual Editora, 1993.

LIMA, Elon Lages et al. **Matemática no Ensino Médio - volume 2**. Editora SBM, 2006.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar: matemática - volume 1**. São Paulo, SP. Editora FTD, 2013, 2ª edição.

TAHAN, Malba; DE LINHARES, Thais Quintella. **O homem que calculava**. 2010.

Anexo

Projeto de Pesquisa: ENSINO DE SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES NO ENSINO MÉDIO

Verificação de Conhecimento Prévio
Instituição de Ensino: Colégio Potência
Professor: Eduardo Souto   Ensino Médio - Data:___/____/______
Nome:____ Número:______
O NOME DO ALUNO OU QUALQUER OUTRO DADO DE IDENTIFICAÇÃO NÃO SERÃO PUBLICADOS, PERMANECENDO EM ABSOLUTO SIGILO

....

Para as questões de 1 a 4, complete os espaços em branco de acordo.

Questão 1 3 - 5 - 7 - 9 - 11 - ____ - ____ - ____

Questão 2 2 - 6 - 18 - 54 - 162 - ____ - ____ - ____

Questão 3 8 - 10 - 7 - 11 - 6 - ____ - ____ - ____

Questão 4 4 - 4 - 12 - 60 - 420 - ____ - ____ - ____

Para as questões 5 a 8, resolva as equações que seguem:

Questão 5 $x = 4 + (5 - 1).6$

Questão 6 $50 = 5 + (x - 1).4$

Questão 7 $x = 3.3^{4-1}$

Questão 8 $96 = 3.2^{x-1}$