

GLEISIANI DE FÁTIMA OLIVEIRA

**ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA:  
COMO CLASSIFICAR PROBLEMAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

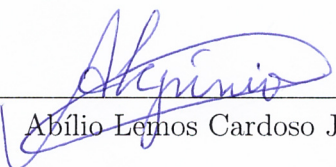
VIÇOSA  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2017

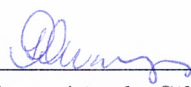
GLEISIANI DE FÁTIMA OLIVEIRA

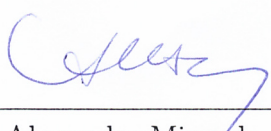
**ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA:  
COMO CLASSIFICAR PROBLEMAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 09 de junho de 2017.

  
Abílio Lemos Cardoso Júnior

  
Amarísio da Silva Araújo

  
Alexandre Miranda Alves  
(Orientador)

*Dedico este trabalho aos meus familiares,  
nos quais eu sempre encontrei ajuda nos  
momentos em que eu mais precisei.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela Sua presença constante em minha vida e por me dar a luz necessária para realizar tudo a que me proponho.

Aos meus familiares, por compreender os momentos de ausência e pelo apoio incondicional.

Ao meu orientador, Alexandre Miranda Alves, que tornou possível a realização deste trabalho, estando sempre pronto para me auxiliar. A ele, minha gratidão pelas correções, pelo apoio, pela paciência e pela dedicação.

A todos os professores do PROFMAT, da UFV, que sempre foram fonte de inspiração.

A todos os meus amigos de turma, pelo companheirismo e por ajudarem a tornar a caminhada mais leve e agradável.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>vii</b>
<b>Resumo</b>	<b>viii</b>
<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1 HISTÓRIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA E APLICAÇÕES</b>	<b>3</b>
<b>2 ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ESTADO DO RIO DE JANEIRO</b>	<b>9</b>
2.1 Análise de resultados de avaliações externas . . . . .	10
2.2 Análise da entrevista feita com alunos do ensino médio . . . . .	13
<b>3 MÉTODO DE CLASSIFICAÇÃO DE PROBLEMAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA</b>	<b>19</b>
3.1 Princípio fundamental da contagem . . . . .	20
3.2 Permutações simples . . . . .	21
3.3 Arranjos simples . . . . .	22

3.4	Combinações simples . . . . .	23
3.5	Um método de classificação de problemas . . . . .	24
3.6	Aplicação do método desenvolvido . . . . .	29
<b>4</b>	<b>MATERIAL PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA O USO DE PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO</b>	<b>33</b>
4.1	Princípio fundamental da contagem . . . . .	34
4.2	Fatoriais . . . . .	35
4.3	Permutações simples . . . . .	35
4.4	Arranjos simples . . . . .	36
4.5	Combinações simples . . . . .	37
4.6	Um método de classificação de problemas . . . . .	39
4.7	Exercícios propostos . . . . .	44
4.8	Respostas dos exercícios propostos . . . . .	48
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>50</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>51</b>
	<b>ANEXOS</b>	<b>53</b>

# Lista de Figuras

2.1	Resultados do SAERJ em 2013, 2014 e 2015 . . . . .	11
2.2	Resultados do SAEB em 2015 . . . . .	12
3.1	Esquema . . . . .	25
4.1	Esquema . . . . .	39
5.1	Parecer do CEP (Página 01) . . . . .	54
5.2	Parecer do CEP (Página 02) . . . . .	55
5.3	Parecer do CEP (Página 03) . . . . .	56
5.4	Parecer do CEP (Página 04) . . . . .	57

# Lista de Tabelas

2.1	Resultados da primeira questão da entrevista . . . . .	14
2.2	Resultados da segunda questão da entrevista . . . . .	15
2.3	Resultados da terceira questão da entrevista . . . . .	15
2.4	Resultados da quarta questão da entrevista . . . . .	15
2.5	Resultados da quinta questão da entrevista . . . . .	16
2.6	Resultados da sexta questão da entrevista . . . . .	16



# Resumo

OLIVEIRA, Gleisiani de Fátima, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, junho de 2017. **Ensino de análise combinatória: como classificar problemas.** Orientador: Alexandre Miranda Alves

Este trabalho consiste em apresentar uma proposta para o ensino de análise combinatória, utilizando um método de classificação de problemas. Este método deve auxiliar os alunos do ensino médio a identificar e diferenciar os problemas de permutação, arranjo e combinação. Neste trabalho é apresentada uma análise feita acerca do ensino de análise combinatória nas escolas públicas do estado do Rio de Janeiro e também são expostos os resultados de uma entrevista realizada com alunos e professores do ensino médio, a fim de entender e especificar as dificuldades encontradas no ensino e na aprendizagem deste conteúdo. Além disso, são apresentados o método de classificação de problemas, aqui desenvolvido, e os resultados de sua aplicação para alguns alunos do ensino médio. Por fim, é proposto um material para o ensino de análise combinatória, para o uso de professores do ensino médio.

# Abstract

OLIVEIRA, Gleisiani de Fátima, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, June, 2017. **Combinatorial Analysis Teaching: how to classify problems.** Advisor: Alexandre Miranda Alves

This work consists of presenting a proposal for the teaching of combinatorial analysis, using a problem classification method. This method should enable high school students to identify and differentiate permutation, arrangement, and combination problems. This paper will present an analysis about the teaching of combinatorial analysis in public schools in the State of Rio de Janeiro, and will also present the results of an interview with students and high school teachers in order to understand and specify the difficulties encountered in the teaching and learning of this content. In addition, it will be presented the aforementioned problem classification method, developed here, and the results of its application to some high school students. Finally, will be proposed a material for the teaching of combinatorial analysis addressed to high school teachers.

# INTRODUÇÃO

A análise combinatória é uma importante ferramenta para a resolução de diversos tipos de problemas, tendo uma vasta aplicabilidade em diversas áreas. Assim, é importante que o ensino de análise combinatória seja desenvolvido de forma a possibilitar que os seus conceitos sejam utilizados na resolução de problemas do dia-a-dia. Porém, na maioria das vezes, o ensino escolar limita-se a um treinamento repetitivo, fazendo uso excessivo de fórmulas para encontrar o número de arranjos, combinações ou permutações, não focando na interpretação do problema, mas sim na sua resolução.

Segundo [9],

”A aprendizagem dos conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a análise combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas.” (MORGADO, 1991, p.3)

Entre as dificuldades mais comuns encontradas no ensino de análise combinatória, segundo [12], está a dificuldade de identificar e diferenciar os diversos tipos de agrupamento. E esta foi a motivação inicial para a realização deste trabalho, tendo em vista a necessidade que existe de encontrar meios e desenvolver métodos que facilitem o ensino do conteúdo e que melhorem o aprendizado e a compreensão do aluno.

O objetivo deste trabalho é propor um método que busque melhorar o ensino/aprendizagem de análise combinatória no ensino médio e minimizar as dificuldades apresentadas pelos alunos na interpretação de problemas. Este método consiste em classificar os problemas que envolvem análise combinatória, facilitando a identificação e diferenciação entre os diversos tipos de agrupamento.

No primeiro capítulo do trabalho é apresentada a história da análise combinatória e algumas de suas aplicações.

No segundo capítulo, é analisada a situação do ensino de matemática no Estado do Rio de Janeiro. São analisados os resultados de algumas avaliações externas, aplicadas a alunos do ensino médio, tais como: SAERJ e SAEB. E são apresentados os resultados de uma entrevista feita com alguns alunos e professores do ensino médio, sobre o ensino e a aprendizagem de análise combinatória.

No terceiro capítulo, é proposto um método de classificação de problemas, que busca minimizar as dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio na interpretação e na diferenciação de problemas de análise combinatória. Além disso, são apresentados os resultados da aplicação desse método para alguns alunos do ensino médio.

No quarto capítulo, é proposto um material sobre análise combinatória que poderá ser utilizado por professores do ensino médio no ensino deste conteúdo. Este material contém o método de classificação de problemas proposto neste trabalho, além de definições, exemplos, exercícios e suas respostas.

# Capítulo 1

## HISTÓRIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA E APLICAÇÕES

A análise combinatória é a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas, e é uma importante ferramenta para a resolução de diversos tipos de problemas, tendo uma vasta aplicabilidade em diversas áreas.

De acordo com [8], a análise combinatória é um conjunto de procedimentos que possibilita a construção de grupos diferentes formados por um número finito de elementos de um conjunto sob certas circunstâncias. Em outras palavras, a análise combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar - de uma forma indireta - o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.

Segundo [11], em geral, os problemas que envolvem análise combinatória podem ser divididos em dois grupos:

- Aqueles em que precisa-se demonstrar a existência de subconjuntos de um conjunto finito que satisfazem certas condições.
- Aqueles em que precisa-se contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito que satisfazem certas condições.

Embora a análise combinatória disponha de técnicas e de fórmulas que permitem a resolução de vários tipos de problemas, encontrar a solução de um problema

que envolve análise combinatória quase sempre exige muita interpretação, certa engenhosidade e compreensão plena da situação a que o problema se refere.

Segundo [9],

”Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se muito difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução.” (MORGADO, 1991, p.2)

Segundo [15], apesar de ser uma área ampla, em um primeiro curso de análise combinatória para o ensino médio, busca-se privilegiar o estudo de combinações, arranjos e permutações. Isto se deve, primeiramente, porque estes são os mais simples tipos de agrupamento e de uso mais amplo. E, além disso, eles permitem resolver uma grande quantidade de problemas e têm uma grande aplicabilidade a problemas de probabilidades finitas, este que é um campo de aplicação importante da análise combinatória.

Um dos primeiros problemas estudados, ligado à análise combinatória é o desenvolvimento do binômio

$$(1 + x)^n.$$

O quadrado  $(1 + x)^2$  já estava presente no livro *Os Elementos*, de Euclides<sup>1</sup>, em torno de 300 a. C.

Por volta de 1300, na China, o triângulo de Pascal<sup>2</sup> já era conhecido por Chu Shih-Chieh<sup>3</sup>, e antes disso, pelos hindus e árabes. Báskhara<sup>4</sup> já sabia como calcular o número de permutações, de combinações e de arranjos de  $n$  objetos. Levi Ben Gerson<sup>5</sup>, entre outras coisas, já havia tentado demonstrar o 5º Postulado de Euclides.

O responsável pelo nome ”coeficiente binomial” foi Stifel<sup>6</sup>, que em 1550 mos-

---

<sup>1</sup>Euclides de Alexandria foi um matemático grego, nascido no século III a. C., que ficou conhecido como o ”Pai da Geometria”, devido às suas grandes contribuições para a área. Sua principal obra foi o livro ”*Os Elementos*”.

<sup>2</sup>Blaise Pascal foi um matemático francês, que nasceu em 1623 e faleceu em 1662. O ”triângulo de Pascal” tem o objetivo de dispor os coeficientes binomiais, de modo que os coeficientes de mesmo numerador agrupem-se em uma mesma linha, e coeficientes de mesmo denominador agrupem-se na mesma coluna.

<sup>3</sup>Chu Shih-Chieh foi um matemático chinês, que nasceu em 1249 e faleceu em 1314.

<sup>4</sup>Báskhara Akaria foi um matemático hindu, que nasceu em 1114 e faleceu em 1185.

<sup>5</sup>Levi Ben Gerson foi um matemático e filósofo religioso francês, que nasceu em 1288 e faleceu em 1344.

<sup>6</sup>Michael Stifel foi um matemático alemão, que nasceu em 1486 e faleceu em 1567.

trou como calcular

$$(1 + x)^n,$$

a partir do desenvolvimento de

$$(1 + x)^{n-1}.$$

Sabe-se também que Al-Karaji <sup>7</sup>, nos fins do século X, já conhecia a lei de formação dos elementos do triângulo de Pascal:

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p.$$

O triângulo de Pascal teve seu primeiro aparecimento no Ocidente, em um livro de Petrus Apianus<sup>8</sup>. Niccolò Fontana Tartaglia <sup>9</sup> relacionou os elementos do triângulo de Pascal com as potências de  $(x + y)$ .

Em 1654, Pascal publicou um tratado mostrando como utilizá-los para achar os coeficientes do desenvolvimento de

$$(a + b)^n.$$

Jaime Bernoulli <sup>10</sup>, em seu livro *Ars Conjectandi*, em 1713, usou a interpretação de Pascal para demonstrar que

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i.$$

A segunda parte deste livro de Jaime Bernoulli é dedicada à teoria das combinações e permutações.

---

<sup>7</sup>Al-Karaji foi um matemático e engenheiro árabe, que nasceu em 953d.C., e faleceu em 1029.

<sup>8</sup>Petrus Apianus foi um humanista alemão, conhecido por seus trabalhos em matemática, astronomia e cartografia. Nasceu em 1495 e faleceu em 1552.

<sup>9</sup>Niccolò Fontana Tartaglia foi um matemático italiano, cujo nome está ligado ao triângulo de Tartaglia e à solução da equação do terceiro grau. Nasceu em 1499 e faleceu em 1557.

<sup>10</sup>Jaime Bernoulli foi um matemático suíço, que nasceu em 1654 e faleceu em 1705.

Isaac Newton <sup>11</sup> mostrou como calcular diretamente

$$(1 + x)^n,$$

sem antes calcular

$$(1 + x)^{n-1}.$$

Mostrou também que cada coeficiente pode ser determinado, usando o anterior, pela fórmula

$$\binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1} \binom{n}{r}.$$

Mais do que isso, Newton mostrou como desenvolver

$$(x + y)^r,$$

onde  $r$  é um número racional, obtendo, neste caso, um desenvolvimento em série infinita.

Uma outra generalização do teorema do binômio é considerar potências da forma

$$(x + y + \dots + z)^n,$$

o chamado *Teorema Mutinomial*, descoberto por Leibniz <sup>12</sup> e demonstrado por Johann Bernoulli <sup>13</sup>.

Abraham De Moivre <sup>14</sup>, Daniel Bernoulli <sup>15</sup> e Jacques P. M. Binet <sup>16</sup> mostraram como achar diretamente os números de Fibonacci <sup>17</sup> sem ser necessário calcular todos eles. Para isso, De Moivre utilizou pela primeira vez a técnica das

---

<sup>11</sup>Isaac Newton foi um astrônomo, alquimista, filósofo natural, teólogo e cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático, que nasceu em 1646 e faleceu em 1727.

<sup>12</sup>Gottfried Wilhelm Leibniz foi um filósofo, cientista, matemático, diplomata e bibliotecário alemão, que nasceu em 1646 e faleceu em 1716.

<sup>13</sup>Johann Bernoulli foi um matemático suíço que nasceu em 1667 e faleceu em 1748.

<sup>14</sup>Abraham De Moivre foi um matemático francês famoso pela Fórmula de De Moivre, que relaciona os números complexos com a trigonometria, e por seus trabalhos na distribuição normal e na teoria das probabilidades. Nasceu em 1667 e faleceu em 1754.

<sup>15</sup>Daniel Bernoulli foi um matemático suíço, que nasceu em 1700 e faleceu em 1782.

<sup>16</sup>Jacques Philippe Marie Binet foi um matemático francês, que nasceu em 1786 e faleceu em 1856.

<sup>17</sup>Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa, foi um matemático italiano, tido como o primeiro grande matemático europeu da Idade Média. Nasceu em 1170, em Pisa, na Itália.



funções geradoras. Esta técnica, muito poderosa e útil para estudar sucessões recorrentes, foi bastante desenvolvida por Euler <sup>18</sup> em seu livro clássico *Introductio in Analysin Infinitorum*, onde ele a utiliza para atacar o problema das partições de um inteiro.

O interesse de Euler por este problema surgiu a partir de uma pergunta feita por Phillipe Naudé<sup>19</sup>, que trabalhava em Berlim, em uma carta, na qual ele perguntava de quantas maneiras um número pode ser escrito como soma de inteiros positivos distintos. Esta pergunta, prontamente respondida por Euler, foi a origem da "Teoria das Partições". Mas as contribuições de Euler à análise combinatória não pararam por aí. Várias obras suas, muitas delas sobre probabilidades, contêm resultados importantes da Análise Combinatória. Em particular, devemos a ele o enunciado e a solução do *Problema das Sete Pontes de Königsberg*, um teorema da *Teoria dos Grafos*, parte muito importante, atualmente, da análise combinatória.

A análise combinatória tem crescido significativamente nas últimas décadas. A importância de problemas de enumeração tem crescido, devido a necessidades em teoria dos grafos, em análise de algoritmos, entre outros. Muitos problemas importantes podem ser modelados matematicamente, como problemas de teoria dos grafos.

Em 1937, George Pólya<sup>20</sup> introduziu uma nova técnica de enumeração, com várias aplicações, e que trata problemas como: a enumeração do número de isômeros de uma substância, a enumeração de grafos, principalmente árvores, entre outros. Problemas estes que até então eram resolvidos somente por métodos "ad hoc"<sup>21</sup>.

A teoria Pólya era uma maneira de enumerar configurações diferentes relativamente a um grupo de permutações dado. Um exemplo de aplicação desta teoria é o problema de determinar o número de tetraedros regulares diferentes

---

<sup>18</sup>Leonhard Paul Euler foi um matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha. Fez importantes descobertas em várias áreas da matemática, como o cálculo e a teoria dos grafos. Nasceu em 1707 e faleceu em 1783.

<sup>19</sup>Phillipe Naudé foi um matemático francês, que nasceu em 1654 e faleceu em 1729.

<sup>20</sup>George Pólya foi um matemático húngaro-americano, que nasceu em 1887 e faleceu em 1955.

<sup>21</sup>O método ad hoc utiliza a prática de reuniões entre especialistas de diversas áreas, para se obter dados e informações em tempo reduzido, imprescindíveis à conclusão dos estudos.

com faces pintadas com duas cores, preto e branco, por exemplo. Podemos ter um tetraedro todo preto, outro todo branco, um com uma face branca e as outras pretas, etc. Dois tetraedros são considerados diferentes se um deles não pode ser obtido do outro por meio de rotações.

F. P. Ramsey<sup>22</sup> criou outra importante teoria de análise combinatória, que garante a existência de certas configurações. Um dos exemplos mais simples do chamado Teorema de Ramsey afirma que se tivermos no plano um conjunto de  $n$  pontos, com  $n \geq 6$ , no qual não há três pontos colineares, então, se unirmos todos os pontos dois a dois, usando duas cores distintas para traçar os segmentos de reta que unirão os pontos, então forçosamente teremos formado um triângulo cujos lados são todos da mesma cor.

Segundo [9],

”Diz-se geralmente que a Teoria das Probabilidades originou-se com Blaise Pascal e Pierre de Fermat<sup>23</sup>, devido à problemas relativos à probabilidade de ganhar em certos jogos de cartas. despertado o interesse pelo assunto, Pascal correspondeu-se com Fermat sobre o que hoje chamaríamos de probabilidades finitas.” (MORGADO, 1991, p. 4)

Porém, a teoria elementar das probabilidades já havia sido introduzida. Em *Divina Comédia*, de Dante Alighieri<sup>24</sup>, há referências às probabilidades em jogos de dados. O desenvolvimento da Análise Combinatória está diretamente ligado à necessidade de resolver problemas de contagem originados na Teoria das Probabilidades. Para mais detalhes, ver em [1] e [5].

---

<sup>22</sup>Frank Plumpton Ramsey foi um lógico inglês, que nasceu em 1903 e faleceu em 1930.

<sup>23</sup>Pierre de Fermat foi um matemático e cientista francês, que nasceu em 1601 e faleceu em 1665.

<sup>24</sup>Dante Alighieri foi um escritor, poeta e político florentino, nascido na atual Itália. É considerado o primeiro e maior poeta da língua italiana. Nasceu em 1265 e faleceu em 1321.

## Capítulo 2

# ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

A Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro faz uso de um Currículo Mínimo em toda a rede de ensino básico. Este documento serve como referência a todas as escolas públicas do estado, apresentando as competências e habilidades que devem estar nos planos de curso e nas aulas. Segundo o Currículo Mínimo, o ensino de análise combinatória deve ser feito no primeiro bimestre da terceira série do ensino médio e deve proporcionar ao aluno as seguintes habilidades e competências:

- Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples.
- Utilizar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo da contagem na resolução de problemas.
- Identificar e diferenciar os diversos tipos de agrupamentos.

Como podemos perceber, o estudo de análise combinatória nas escolas públicas do estado do Rio de Janeiro é básico, atendo-se apenas ao estudo dos princípios aditivo e multiplicativo, permutações simples, arranjos simples e combinações simples. Além disso, o Currículo Mínimo prevê, dentre outras habilidades e com-

petências, que o aluno consiga identificar e diferenciar os diversos tipos de agrupamento, isto é, que o aluno seja capaz de distinguir os problemas de permutação, arranjo e combinação.

## 2.1 Análise de resultados de avaliações externas

O SAERJ (Sistema de Avaliação da Educação do Estado do Rio de Janeiro) é uma avaliação externa em larga escala, realizada pela Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro nas suas unidades escolares. O SAERJ é aplicado anualmente para todas as séries do ensino básico e tem a finalidade de acompanhar a aquisição de habilidades e competências esperadas para cada ano de escolaridade, bem como realizar comparações com o nível de desempenho dos demais estados e com os dados do MEC, como o IDEB. Os resultados desta avaliação constituem um importante instrumento para a melhoria do processo de aprendizagem nas escolas e para o monitoramento das políticas públicas de educação traçadas pela Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro, ver em [3].

A figura 2.1 mostra os resultados do SAERJ em 2013, 2014 e 2015, especificamente na disciplina de matemática, nas terceiras séries do ensino médio de todo o estado do Rio de Janeiro. Na imagem, há um comparativo entre o desempenho dos alunos:

- De todo o Estado do Rio de Janeiro;
- Da Regional Noroeste Fluminense (que abrange todas as cidades da região Noroeste do estado do Rio de Janeiro);
- De um colégio específico: Colégio Etelvina Alves da Silva, localizado em Itaperuna. (Este foi um dos colégios onde foi aplicada a proposta de ensino de análise combinatória, desenvolvida neste trabalho.)

A figura mostra a proeficiência média em matemática, o grau de participação nas avaliações e a evolução do desempenho dos estudantes ao longo desses três anos (2013, 2014 e 2015). Na figura, as faixas de cor vermelha, representam o percentual de alunos da terceira série do ensino médio, com baixo desempenho

em matemática. As faixas de cor amarela, representam o percentual de alunos da terceira série do ensino médio, com desempenho intermediário em matemática. As faixas de cor verde claro, representam o percentual de alunos com desempenho adequado e as faixas de cor verde escuro, representam o percentual de alunos com desempenho avançado.

Analisando a figura 2.1, podemos perceber a defasagem no conhecimento de matemática apresentada pelos estudantes:

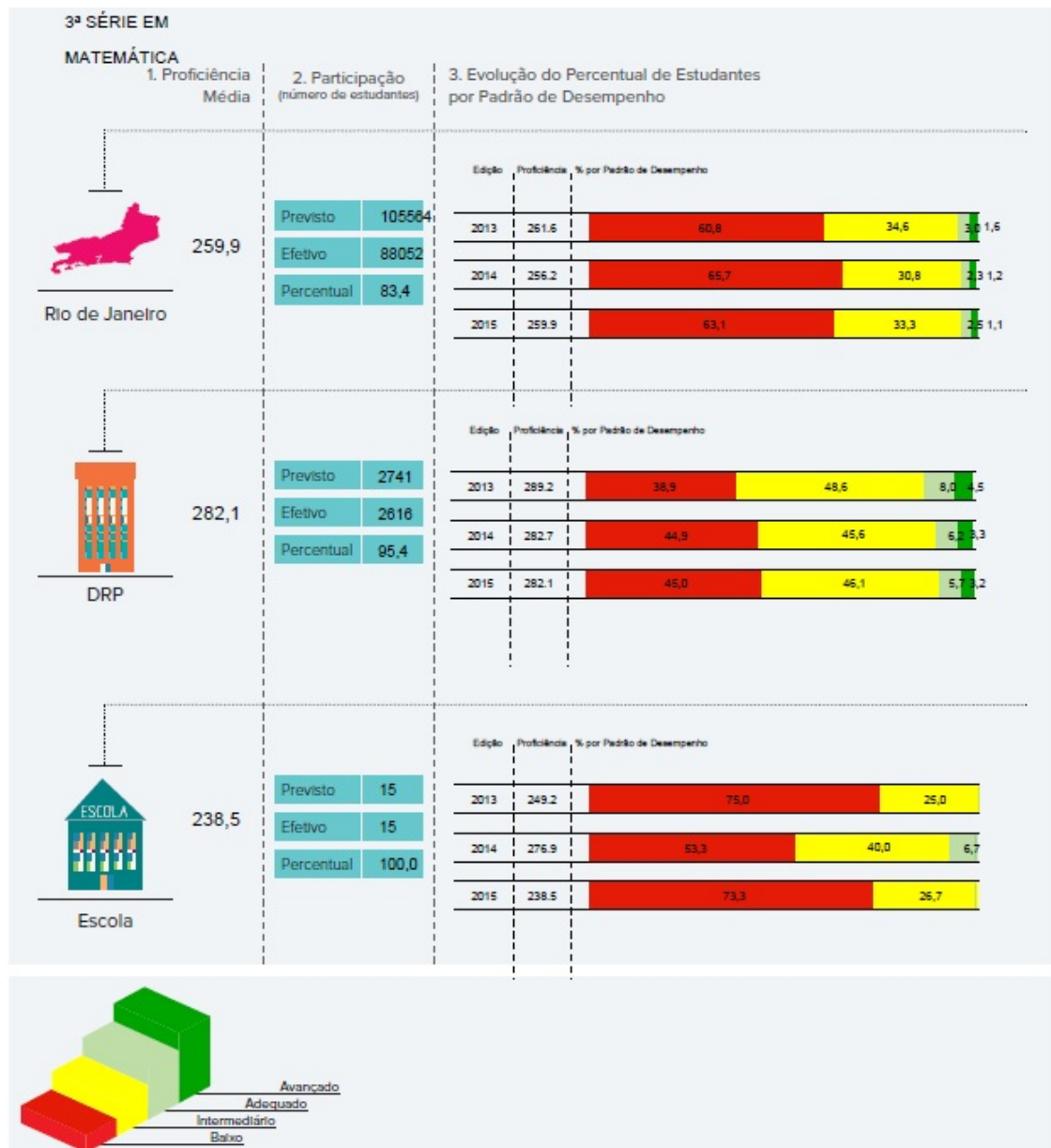


Figura 2.1: Resultados do SAERJ em 2013, 2014 e 2015

Como podemos observar na figura 2.1, seja no âmbito estadual, regional, ou especificamente em um colégio, o fato é que, em geral, mais de 80% dos alunos das

terceiras séries do ensino médio das escolas públicas do estado do Rio de Janeiro, encontram-se no nível baixo ou intermediário, no que diz respeito ao desempenho em matemática. Apenas cerca de 10% desses alunos tem desempenho adequado ou avançado em matemática, o que não é satisfatório.

Outras duas avaliações externas em larga escala, aplicadas em todo o país são a PROVA BRASIL e o SAEB. O Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e a PROVA BRASIL são dois exames complementares que compõem o Sistema de Avaliação da Educação Básica. O SAEB, realizado pelo Inep/MEC, abrange estudantes das redes públicas e privadas do país, localizados em área rural e urbana, matriculados no 5º e 9º anos do ensino fundamental e também na 3ª série do ensino médio.

A figura 2.2 mostra o desempenho das terceiras séries do ensino médio, na disciplina de matemática, no SAEB, no ano de 2015. A imagem apresenta os níveis de proficiência de cada um dos estados brasileiros. São 11 níveis (De 0 a 10) e cada um deles é representado por uma cor, de acordo com a legenda:

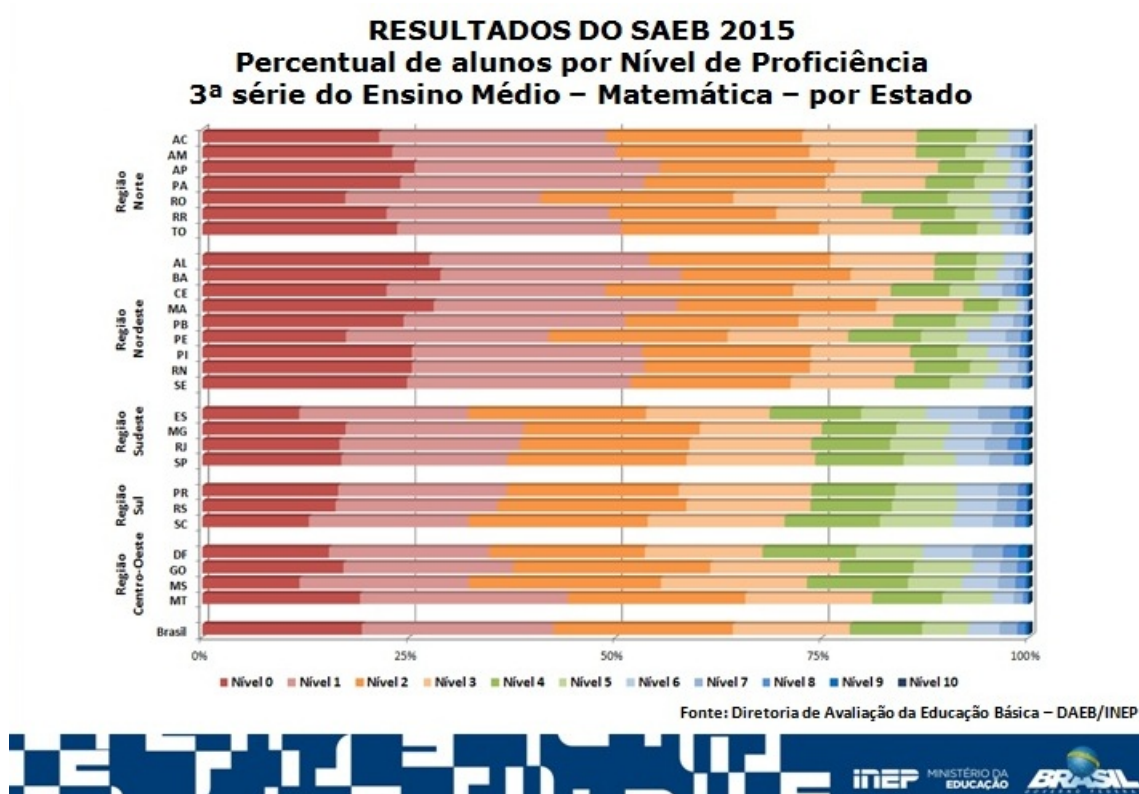


Figura 2.2: Resultados do SAEB em 2015

Observando a figura 2.2, vemos que os níveis de proficiência dos alunos da

terceira série do ensino médio, em matemática, não só no estado do Rio de Janeiro, mas em quase todos os estados do país, são muito baixos. Em quase todos os estados brasileiros, cerca de 75% dos alunos estão nos níveis 0, 1, 2 e 3. Considerando que os níveis variam de 0 a 10, percebemos que o nível de proficiência em matemática deixa muito a desejar.

A partir dos dados mostrados nas avaliações externas analisadas, podemos observar o baixo desempenho em matemática, apresentado pelos alunos das terceiras séries do ensino médio no estado do Rio de Janeiro, o que nos mostra uma necessidade de novas e melhores propostas de ensino para o conteúdo.

## **2.2 Análise da entrevista feita com alunos do ensino médio**

Mediante autorização do Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos, da Universidade Federal de Viçosa, ver em anexo, foi realizada uma entrevista com os alunos de duas turmas de terceira série do ensino médio de duas escolas públicas do estado do Rio de Janeiro: Uma turma do Colégio Estadual Etelvina Alves da Silva (composta por 8 alunos) e outra turma do Colégio Estadual Chequer Jorge (composta por 22 alunos), ambos localizados em Itaperuna - RJ. Participaram da entrevista todos os alunos das duas turmas, isto é, 30 alunos, no total. Esses alunos foram convidados a responder, de forma discursiva, seis perguntas, através das quais eles puderam relatar sobre suas dificuldades na aprendizagem de análise combinatória e os motivos dessas dificuldades. Dessa forma, foi oferecida a eles a possibilidade de sugerir meios para tornar o ensino deste conteúdo mais atrativo e interessante.

Segue o roteiro da entrevista:

### **ROTEIRO DA ENTREVISTA COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO:**

- 1) Você sabe o que é um problema de análise combinatória? O que é análise combinatória?

- 2) Você tem dificuldades no conteúdo de análise combinatória?
- 3) Especifique essas dificuldades.
- 4) Se um problema de análise combinatória é proposto para você, você tem dificuldades para identificar a qual tipo de agrupamento (Arranjo, Combinação ou Permutação) o problema se refere?
- 5) No conteúdo de análise combinatória, você tem dificuldades de memorizar e aplicar as fórmulas utilizadas em cada tipo de agrupamento?
- 6) Sugira meios para que o ensino de análise combinatória seja mais atrativo e interessante.

Segue abaixo, o resultado da entrevista, por questão:

### RESULTADOS DA ENTREVISTA:

RESULTADOS DA 1ª QUESTÃO	
RESPOSTAS	NÚMERO DE ALUNOS
Responderam de forma correta	10
Responderam de forma incorreta	15
Não souberam responder	5

Tabela 2.1: Resultados da primeira questão da entrevista

**1ª QUESTÃO:** Em geral, os alunos tiveram muita dificuldade ao responder essa questão. Alguns responderam que não sabiam, alguns tentaram se expressar com suas próprias palavras, mas não foram muito claros e alguns fizeram uso de exemplos. Respostas como: “Problemas de análise combinatória são aqueles que podem ser resolvidos usando permutação, arranjo ou combinação” e “Problemas de análise combinatória são problemas de contagem” estavam entre as respostas obtidas nessa questão.



RESULTADOS DA 2ª QUESTÃO	
RESPOSTAS	NÚMERO DE ALUNOS
Sim	30
Não	0

Tabela 2.2: Resultados da segunda questão da entrevista

**2ª QUESTÃO:** Resposta positiva de todos os alunos. Todos, sem exceção, relataram ter algum tipo de dificuldade no aprendizado de análise combinatória.

RESULTADOS DA 3ª QUESTÃO	
RESPOSTAS	NÚMERO DE ALUNOS
Identificar o tipo de agrupamento	23
Aplicar fórmulas e realizar cálculos	7

Tabela 2.3: Resultados da terceira questão da entrevista

**3ª QUESTÃO:** A maioria dos entrevistados relatou ter dificuldade na identificação do tipo de agrupamento do problema, dificuldade em diferenciar se o problema trata de permutação, arranjo ou combinação. A maioria garantiu que consegue aplicar as fórmulas e resolver os cálculos a partir do momento em que o tipo de agrupamento é definido. Alguns alunos relataram também ter dificuldade em aplicar a fórmula e realizar os cálculos, e outros poucos alunos, ressaltaram sua dificuldade em resolver também as expressões com fatoriais.

RESULTADOS DA 4ª QUESTÃO	
RESPOSTAS	NÚMERO DE ALUNOS
Sim	30
Não	0

Tabela 2.4: Resultados da quarta questão da entrevista

**4ª QUESTÃO:** Resposta positiva de todos os alunos. Os alunos relataram que até mesmo nos problemas mais simples, sempre paira a dúvida se trata-se de um problema de permutação, arranjo ou combinação.

RESULTADOS DA 5ª QUESTÃO	
RESPOSTAS	NÚMERO DE ALUNOS
Sim	5
Não	25

Tabela 2.5: Resultados da quinta questão da entrevista

**5ª QUESTÃO:** Poucos alunos responderam que sim. A maioria relatou que não encontra grandes dificuldades em memorizar e aplicar as fórmulas e resolver os cálculos, a partir do momento que sabem com que tipo de problema estão trabalhando. Alguns alunos relataram que às vezes se confundem ao lembrar-se das fórmulas de arranjo e combinação, por serem muito parecidas, e, novamente foi ressaltada certa dificuldade ao fazer cálculos com fatoriais.

RESULTADOS DA 6ª QUESTÃO	
RESPOSTAS	NÚMERO DE ALUNOS
Problemas mais simples	10
Auxílio na diferenciação dos agrupamentos	8
Construção da árvore das possibilidades	7
Sugestão de regras práticas	5

Tabela 2.6: Resultados da sexta questão da entrevista

**6ª QUESTÃO:** As sugestões dos alunos foram:

- Que o professor sempre trabalhe com problemas de fácil entendimento (problemas mais simples, menos complexos);
- Que o professor os auxilie a conseguir diferenciar os problemas de permutação, arranjo e combinação;
- Que o professor construa a árvore das possibilidades, sempre que possível, pois acreditam que conseguindo visualizar as possibilidades, eles conseguem entender melhor o problema;

- Que o professor sugira regras (ou algum tipo de associação) para que os alunos consigam memorizar melhor as fórmulas.

Nos mesmos colégios onde foram realizadas as entrevistas com os alunos do ensino médio (Colégio Estadual Etelvina Alves da Silva e Colégio Estadual Chequer Jorge), foram ouvidos dez professores de matemática que lecionam a disciplina no ensino médio:

- Manoel Jardim do Prado;
- Elizabeth Cardoso de Abreu Pinheiro;
- Maria Mercedes Barbosa;
- Vaneide Sanches Alongo;
- Verônica de Moura Gomes;
- Mariana Costa Pereira;
- Wallace Luz;
- Vilma Boza Pontes;
- Ailton Carlos Clemente;
- Carla Valéria Dionízio de Souza.

Para os mesmos, foi feita a seguinte pergunta:

*Quais são as principais dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem de análise combinatória?*

As repostas foram diversas:

- Construir a árvore de possibilidades;
- Diferenciar os problemas de arranjo dos problemas de combinação;
- Memorizar as fórmulas de arranjo, combinação e permutação;

- Identificar um problema de permutação;
- Resolver questões de análise combinatória que sejam puras aplicações de fórmulas;
- Compreender os textos dos problemas ou das questões;
- Calcular fatoriais;
- Diferenciar o uso de arranjo em agrupamentos e o uso do Princípio fundamental da contagem em eventos;

Todos os professores, sem exceção, ressaltaram a grande dificuldade apresentada pela maioria dos alunos em diferenciar os tipos de agrupamento (Permutação, arranjo e combinação).

## Capítulo 3

# MÉTODO DE CLASSIFICAÇÃO DE PROBLEMAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Muitas vezes ao resolver um problema de análise combinatória, o aluno se depara com a seguinte questão: os agrupamentos mencionados no problema são permutações, arranjos ou combinações?

Ao ensinar análise combinatória no ensino médio, de acordo com o exposto no capítulo 2, percebemos que ao propor, separadamente, problemas de arranjo, combinação e permutação, os alunos conseguem resolvê-los. Porém, se é dado um problema aleatório, os alunos apresentam muita dificuldade para identificar a qual tipo de agrupamento o problema se refere.

Assim, fica nítido que a maneira de resolver cada um dos agrupamentos bem como a aplicação das fórmulas é aprendida, mas a interpretação do exercício, a identificação do tipo de agrupamento a que se refere cada situação é o grande problema.

Baseado neste problema, a realização deste trabalho fez-se necessária, uma vez que é importante que o aluno saiba diferenciar quando o agrupamento mencionado em determinado problema será arranjo, permutação ou combinação. Espera-se que fazendo uso do método apresentado nesse trabalho, o aluno seja capaz de

classificar problemas de análise combinatória, identificar e diferenciar os diversos tipos de agrupamento.

Vejamos como e quando usar cada tipo de agrupamento.

Algumas das definições e dos exemplos nas seções seguintes, podem ser encontrados em [2], [4], [7], [9] e [13].

### 3.1 Princípio fundamental da contagem

O princípio fundamental da contagem diz que se há  $x$  modos de tomar uma decisão  $A$  e, tomada a decisão  $A$ , há  $y$  modos de tomar a decisão  $B$ , então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões  $A$  e  $B$  é  $x \times y$ .

**EXEMPLO 1:** Com 4 homens e 4 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?

**SOLUÇÃO:** Formar um casal equivale a tomar duas decisões ( $A$  e  $B$ ):

Decisão  $A$  : Escolha do homem (4 modos).

Decisão  $B$  : Escolha da mulher (4 modos).

Portanto, há  $4 \times 4 = 16$  modos de formar casal.

Ao utilizar o princípio fundamental da contagem, bem como outros agrupamentos que veremos a seguir, algumas estratégias fazem diferença na hora de resolver os problemas:

- **Postura:** Devemos sempre nos colocar no lugar da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. No exemplo acima, nos colocamos no papel da pessoa que deveria formar o casal.
- **Divisão:** Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples. No exemplo acima, formar o casal foi dividido entre escolher o homem e escolher a mulher.

- Não adiar dificuldades: Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

Em muitas situações de análise combinatória podemos usar o princípio fundamental da contagem, mas em algumas situações, os cálculos tendem a se tornar complexos e trabalhosos. Nestes casos, lançamos mão de outros tipos de agrupamentos, alguns dos quais apresentamos a seguir.

## 3.2 Permutações simples

As permutações simples se caracterizam pela ordenação de objetos. Uma permutação simples de  $n$  objetos distintos é um agrupamento ordenado desses objetos.

Para a solução, procedemos da seguinte forma:

Temos  $n$  modos de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar,  $n - 1$  modos de escolher o objeto que ocupará o segundo lugar, ..., 1 modo de escolher o objeto que ocupará o último lugar. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de modos de ordenar  $n$  objetos distintos é:

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1 = n!$$

O número de permutações simples de  $n$  objetos distintos é representado por  $P_n$ . Assim,

$$P_n = n!$$

**EXEMPLO 2:** Quantos são os anagramas da palavra CONTAGEM?

**SOLUÇÃO:** Um anagrama é o resultado da reorganização das letras em uma palavra de maneira a formar palavras diferentes. Em outras palavras, um anagrama consiste em permutar as letras de uma palavra. Logo o número de

anagramas da palavra CONTAGEM, que tem oito letras é:

$$P_8 = 8! = 40320.$$

### 3.3 Arranjos simples

Os arranjos simples são os tipos de agrupamentos nos quais tanto a ordem de posicionamento no grupo quanto a natureza dos elementos causam diferenciação entre os agrupamentos. Em outras palavras, um arranjo simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , com  $p \leq n$ , é uma escolha de  $p$  elementos, entre os  $n$  elementos dados, na qual a ordem importa.

Para o cálculo do número de arranjos simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , procedemos da seguinte forma:

O cálculo consistirá de  $p$  etapas e cada uma dessas etapas corresponderá à escolha do elemento que ocupará determinada posição. Na primeira etapa, temos  $n$  possibilidades de escolha, pois qualquer um dos  $n$  elementos pode ser escolhido. Na segunda etapa, temos  $n - 1$  possibilidades de escolha, descontando apenas o elemento escolhido na primeira etapa. Em cada uma das etapas seguintes existe uma escolha a menos que na etapa anterior. E na última etapa, a etapa  $p$ , existem  $n - (p - 1) = n - p + 1$  possibilidades, pois já foram escolhidos  $p - 1$  elementos. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de modos de escolher  $p$  elementos entre  $n$  elementos dados é:

$$A_{n,p} = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - p + 1).$$

Mas

$$n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1) = \frac{n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1) \times (n - p) \times \dots \times 1}{(n - p) \times \dots \times 1} = \frac{n!}{(n - p)!}.$$

Logo, o cálculo do número de arranjos simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , é dado pela fórmula:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n - p)!}$$



**EXEMPLO 3:** Em um colégio, quatro alunos candidataram-se para ocupar os cargos de presidente e vice-presidente do grêmio estudantil. De quantas maneiras distintas a escolha poderá ser feita?

**SOLUÇÃO:** Sejam A,B,C e D, os quatro alunos mencionados no problema. Temos quatro alunos disputando duas vagas, portanto, queremos agrupar quatro elementos tomados dois a dois. Fazendo uso da fórmula:

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 4 \times 3 = 12.$$

Logo, é possível formar 12 agrupamentos.

### 3.4 Combinações simples

As combinações simples são os tipos de agrupamentos nos quais somente a natureza dos elementos causa diferenciação entre os agrupamentos, ou seja, a ordem de posicionamento dos elementos no grupo, não difere um grupo de outro. Em outras palavras, uma combinação simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , com  $p \leq n$ , é uma escolha de  $p$  elementos, entre os  $n$  elementos dados, na qual a ordem não importa.

Para o cálculo do número de combinações simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , procedemos da seguinte forma:

Para estabelecer uma fórmula para o cálculo do número de combinações simples, é preciso entender como os conceitos de arranjos simples e permutações simples estão relacionados. Calcular o número de arranjos simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , consiste em duas etapas: A primeira delas é escolher os  $p$  elementos distintos dentre os  $n$  elementos dados. A segunda etapa é ordenar os  $p$  elementos escolhidos. Observemos que na primeira etapa não estamos ordenando os elementos, apenas escolhendo. E na segunda etapa, apenas ordenamos os  $p$  elementos escolhidos. Assim, a primeira etapa consiste em formar uma combinação de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , enquanto que a segunda etapa consiste em fazer uma permutação dos  $p$  elementos de cada grupo formado. Portanto, utilizando o

Princípio Multiplicativo, temos:

$$A_{n,p} = C_{n,p} \times P_p.$$

Daí:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_p}.$$

Donde temos:

$$C_{n,p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}.$$

Logo, o cálculo do número de combinações simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , é dado pela fórmula:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

**EXEMPLO 4:** Em uma festa de aniversário será servido sorvete aos convidados. Serão oferecidos os sabores de morango ( $M$ ), chocolate ( $C$ ), baunilha ( $B$ ) e ameixa ( $A$ ) e o convidado deverá escolher dois entre os quatro sabores. De quantas maneiras distintas o convidado poderá montar seu sorvete?

**SOLUÇÃO:** Sejam  $M, C, B$  e  $A$ , os quatro sabores de sorvete disponíveis, dos quais cada convidado escolherá dois. Portanto, queremos agrupar quatro elementos tomados dois a dois. Fazendo uso da fórmula:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2! \times (4-2)!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Logo, é possível formar 6 agrupamentos.

### 3.5 Um método de classificação de problemas

Em geral, os problemas de análise combinatória podem ser divididos em dois grupos: Aqueles que imprimem a ideia de **ordenação** de objetos e aqueles que

imprimem a ideia de **escolha** de um determinado número de objetos dentre um grupo de objetos dados. Sempre que de alguma maneira, o problema nos levar a **ordenar  $n$  objetos em  $n$  lugares**, este problema tratará de **permutação**. E se, de alguma forma, o problema nos levar a **escolher uma determinada quantidade  $p$  dentre uma quantidade  $n$  de objetos,  $p < n$** , então este problema tratará de **arranjo ou combinação**. Para identificar se o problema é de arranjo ou combinação, devemos construir um dos agrupamentos mencionados no problema e trocar a ordem de seus elementos. Se com essa troca, obtivermos um **agrupamento diferente** do original, então este problema será de **arranjo**. Mas, se com essa troca, obtivermos um **agrupamento igual** ao original, teremos um caso de **combinação**.



Figura 3.1: Esquema

Vejamos isso de forma mais detalhada.

Para identificar quando determinado problema se refere à permutação, nos atentemos ao seguinte: Todos os problemas que dizem respeito a permutações simples, são (ou podem ser transcritos) dessa forma:

**Dados  $n$  objetos distintos, de quantos modos é possível ordená-los?**

Assim, para verificar se os agrupamentos pedidos em um determinado problema são permutações, tentemos reescrevê-lo nesses termos. Voltemos ao exemplo 2, para aplicar a regra:

**EXEMPLO 2:** Quantos são os anagramas da palavra CONTAGEM?

**SOLUÇÃO:** Cada anagrama da palavra contagem, nada mais é que uma ordenação das letras C, O, N, T, A, G, E, M. Assim, o problema dado, poderia ser reescrito da seguinte forma:

**Dadas 8 letras distintas de quantos modos é possível ordená-las?**

Assim, o número de anagramas da palavra CONTAGEM, isto é, o número de modos de ordenar as 8 letras dadas, é:

$$P_8 = 8! = 40320.$$

Assim como os problemas de permutação são ou podem ser reescritos na forma:

**Dados n objetos distintos de quantos modos é possível ordená-los?**

Os problemas de arranjos e combinações simples, também são ou podem ser transcritos na forma:

**De quantos modos podemos selecionar p objetos distintos entre n objetos distintos dados?**

Deparando-se com um problema desse tipo, para decidir se os agrupamentos do problema são arranjos ou combinações, nos portamos da seguinte maneira:

Construímos um dos agrupamentos sugeridos pelo problema e, a seguir, mudamos a ordem de apresentação dos elementos desse agrupamento.

- Se, com essa mudança na ordem dos elementos, obtivermos um agrupamento diferente do original, então esse agrupamento é um arranjo.
- Se, com essa mudança na ordem dos elementos, obtivermos um agrupamento igual ao original, então esse agrupamento é uma combinação.

Voltemos aos exemplos 3 e 4, para aplicar a regra:

**EXEMPLO 3:** Em um colégio, quatro alunos candidataram-se para ocupar os cargos de presidente e vice-presidente do grêmio estudantil. De quantas maneiras distintas a escolha poderá ser feita?

**SOLUÇÃO:** Observemos que o problema dado pode ser reescrito da seguinte forma:

**De quantos modos podemos selecionar 2, entre 4 alunos?**

Logo, já sabemos que este problema é de arranjo ou combinação. Agora, precisamos decidir se o problema é de arranjo ou combinação. Sejam  $A, B, C$  e  $D$ , os quatro alunos mencionados no problema. Observemos que se o aluno  $A$  é eleito presidente e o aluno  $B$  é eleito vice-presidente do grêmio, temos o conjunto  $(A, B)$ . Trocando a ordem dos elementos deste conjunto, temos o conjunto  $(B, A)$ , onde o aluno  $B$  foi eleito presidente e o aluno  $A$ , seu vice. Isto é, ao trocar a ordem de seus elementos do conjunto construído, obtivemos um agrupamento diferente do original, logo, este problema é de arranjo.

Assim, temos quatro alunos disputando duas vagas, portanto, queremos agrupar quatro elementos tomados dois a dois. Fazendo uso da fórmula:

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 4 \times 3 = 12.$$

Logo, é possível formar 12 agrupamentos. São eles:

$(A, B), (A, C), (A, D), (B, A), (B, C), (B, D), (C, A), (C, B), (C, D), (D, A), (D, B), (D, C)$

Assim, nas situações de arranjos simples, como essa, os agrupamentos se diferem:

- Pela natureza dos elementos:  $(A, B) \neq (C, D)$
- Pela ordem dos elementos:  $(A, B) \neq (B, A)$

**EXEMPLO 4:** Em uma festa de aniversário será servido sorvete aos convidados. Serão oferecidos os sabores de morango ( $M$ ), chocolate ( $C$ ), baunilha ( $B$ ) e ameixa ( $A$ ) e o convidado deverá escolher dois entre os quatro sabores. De quantas maneiras distintas o convidado poderá montar seu sorvete?

**SOLUÇÃO:** Observemos que o problema dado pode ser reescrito da seguinte forma:

**De quantos modos podemos selecionar 2, entre 4 sabores de sorvete?**

Logo, já sabemos que este problema é de arranjo ou combinação. Agora, precisamos decidir se o problema é de arranjo ou combinação. Sejam  $M, C, B$  e  $A$ , os quatro sabores de sorvete disponíveis, dos quais cada convidado escolherá dois. Observemos que se um convidado escolhe um sorvete de morango e chocolate ( $M, C$ ), e outro convidado escolhe um sorvete de chocolate e morango ( $C, M$ ), na verdade, os dois convidados fizeram a mesma escolha, isto é,  $(M, C) = (C, M)$ . Isto significa que, ao trocar a ordem dos elementos de um conjunto construído, obtemos um agrupamento igual ao original, logo, este problema é de combinação.

Assim, queremos agrupar quatro elementos tomados dois a dois. Fazendo uso da fórmula:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2! \times (4-2)!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Logo, é possível formar 6 agrupamentos. São eles:

$$(M, C), (M, B), (M, A), (C, B), (C, A), (B, A)$$

Assim, nas situações de combinações simples, como essa, os agrupamentos se diferem apenas pela natureza dos elementos:  $(M, C) \neq (B, A)$ , e não pela ordem dos elementos:  $(M, C) = (C, M)$ .

Um último exemplo:

**EXEMPLO 5:** Quantas saladas contendo exatamente quatro frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes?

**SOLUÇÃO:** O problema dado pode ser reescrito da forma:

**De quantos modos podemos selecionar 4 frutas distintas entre 10 frutas distintas dadas?**

Logo, já sabemos que se trata de um problema de arranjo ou combinação simples. Para decidir a qual dos dois tipos de agrupamento o problema se refere, basta montarmos um dos conjuntos sugeridos pelo problema, isto é, uma das saladas composta por 4 frutas. Sejam  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9, F_{10}$ , as dez frutas disponíveis e consideremos a salada composta pelas quatro primeiras frutas citadas:  $(F_1, F_2, F_3, F_4)$ .

Invertendo a ordem dos elementos do conjunto acima, temos:  $(F_4, F_3, F_2, F_1)$ , que é uma salada composta pelas mesmas frutas da salada anterior, logo, a mesma salada. Isso significa que com a mudança feita na ordem dos elementos, obtivemos um agrupamento igual ao original. Logo, esse agrupamento é uma combinação.

Resolvendo o problema, temos:

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4! \times (10 - 4)!} = \frac{10!}{4! \times 6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 6!} = \frac{5040}{24} = 210.$$

Portanto, pode-se formar 210 saladas.

### 3.6 Aplicação do método desenvolvido

Mediante autorização do Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos, da Universidade Federal de Viçosa, ver em anexo, foi aplicada uma avaliação para os alunos de duas turmas de terceira série do ensino médio de duas escolas públicas do estado do Rio de Janeiro: Uma turma do Colégio Estadual Etelvina Alves da Silva (composta por 8 alunos) e outra turma do Colégio Estadual Chequer Jorge

(composta por 22 alunos), ambos localizados em Itaperuna – RJ, no dia 28 de fevereiro de 2017. Fizeram a avaliação, no total, 30 alunos, 8 alunos do Colégio Estadual Etelvina Alves da Silva e 22 alunos do Colégio Estadual Chequer Jorge. A avaliação, que segue abaixo, é composta por seis questões, duas de cada tipo de agrupamento (Combinação, arranjo e permutação.).

### **AVALIAÇÃO:**

- 1) Quantas saladas contendo exatamente três verduras podemos formar se dispomos de 7 tipos de verduras diferentes?
- 2) Quantos são os anagramas da palavra MESTRADO?
- 3) Na turma 3001, dez alunos candidataram-se para concorrer aos cargos de representante e vice-representante da turma. De quantas maneiras distintas a escolha poderá ser feita?
- 4) Ana comprou um conjunto ornamental para jardins, composto pela Branca de Neve e os sete anões e pretende organizá-los em fila. De quantas maneiras diferentes esses enfeites podem ser organizados no jardim (considerando como maneiras diferentes aquelas em que a ordem das estátuas seja diferente)?
- 5) Um técnico de basquete dispõe de 5 pivôs e pretende usar 2 deles em cada formação. Quantas formações diferentes ele pode armar?
- 6) No treino de amanhã, o técnico de uma seleção de vôlei quer treinar seus 8 jogadores nas posições de ataque pela direita, ataque pela esquerda e ataque pelo centro. Quantos trios distintos ele poderá formar, considerando como diferentes os trios que tenham, pelo menos, 1 posição ocupada por 1 jogador diferente?

A avaliação acima foi aplicada nas duas turmas mencionadas da seguinte forma: Cada uma dessas turmas foi dividida ao meio, por meio de sorteio. Separadamente, para a primeira metade da turma foi apresentado o método de



classificação de problemas desenvolvido neste trabalho, e para a outra metade da turma, este método não foi apresentado. Em seguida, foi aplicada a avaliação acima para os dois grupos.

Considerando os dois colégios, tivemos um total de quatro grupos, aos quais denominamos de  $G1$ ,  $G2$ ,  $G3$  e  $G4$ : Os grupos  $G1$  e  $G2$  são do Colégio Estadual Etelvina Alves da Silva e os grupos  $G3$  e  $G4$  são do Colégio Estadual Chequer Jorge. Dois desses grupos ( $G1$  e  $G3$ ) conheceram a proposta de classificação de problemas apresentada nesse trabalho, antes de fazer a avaliação e os outros dois grupos ( $G2$  e  $G4$ ) fizeram a avaliação sem conhecer a proposta, somente com o seu conhecimento prévio de análise combinatória. As fórmulas referentes a cada agrupamento foram disponibilizadas para todos os alunos.

Todas as avaliações foram corrigidas e foi atribuída a cada avaliação uma nota de 0 a 6, sendo que cada questão teve o valor de um ponto, e, sendo que para a correção foram considerados a identificação do problema e os cálculos feitos para sua resolução. Dessa forma:

- Recebeu **1 ponto**, o aluno que soube identificar o tipo de agrupamento e realizou corretamente os cálculos da referida questão.
- Recebeu **0,5 ponto**, o aluno que soube identificar o tipo de agrupamento, mas não realizou corretamente os cálculos da referida questão.
- Recebeu **zero**, o aluno que não identificou corretamente o agrupamento e errou os cálculos.

A partir desses critérios, tivemos os seguintes resultados:

- A média aritmética das notas do grupo  $G1$  foi 4,9.
- A média aritmética das notas do grupo  $G2$  foi 3,1.
- A média aritmética das notas do grupo  $G3$  foi 5,2.
- A média aritmética das notas do grupo  $G4$  foi 3,3.

Como podemos observar, o desempenho dos alunos que tiveram acesso á proposta de ensino desenvolvida nesse trabalho foi mais satisfatório do que o desempenho dos alunos que não tiveram acesso a ela.

Ressaltamos, ainda, que houve alunos que tiraram nota máxima (seis) nos grupos  $G1$  e  $G3$ , (fato que não ocorreu nos demais grupos) e que o tempo gasto pelos alunos desses dois grupos foi, em geral, menor que o tempo gasto pelos alunos dos grupos  $G2$  e  $G4$ . Além disso, os erros cometidos pelos alunos dos grupos  $G1$  e  $G3$ , foram, em sua maioria, em cálculos e não na identificação do tipo de agrupamento do problema, diferentemente, dos alunos dos demais grupos.

Diante dos resultados, consideramos que o objetivo principal do trabalho foi alcançado: A proposta de ensino aqui desenvolvida foi capaz de melhorar o desempenho dos alunos desses dois colégios. Dessa forma, ela pode ser uma ferramenta capaz de auxiliar outros alunos na aprendizagem de análise combinatória e na classificação de problemas.

## Capítulo 4

# MATERIAL PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA O USO DE PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

O material apresentado neste capítulo foi elaborado com o intuito de auxiliar o professor de matemática do ensino médio, no ensino de análise combinatória. O material é composto pelas definições do Princípio Fundamental da Contagem, Fatorial, Permutações Simples, Arranjos Simples e Combinações Simples. São apresentados diversos exemplos resolvidos e algumas dicas importantes para a resolução de problemas. Além disso, é detalhado aqui, o método de classificação de problemas desenvolvido nessa pesquisa e, ao final, propomos diversos problemas e suas respectivas soluções.

Algumas das definições e dos exemplos nas seções seguintes, podem ser encontrados em [2], [4], [7], [9] e [13].

## 4.1 Princípio fundamental da contagem

O princípio fundamental da contagem, diz que se há  $x$  modos de tomar uma decisão  $A$  e, tomada a decisão  $A$ , há  $y$  modos de tomar a decisão  $B$ , então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões  $A$  e  $B$  é  $x \times y$ .

**EXEMPLO 1:** Com 4 homens e 4 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?

**SOLUÇÃO:** Formar um casal equivale a tomar duas decisões ( $A$  e  $B$ ):

Decisão  $A$  : Escolha do homem (4 modos).

Decisão  $B$  : Escolha da mulher (4 modos).

Portanto, há  $4 \times 4 = 16$  modos de formar casal.

Ao utilizar o princípio fundamental da contagem, bem como outros agrupamentos que veremos a seguir, algumas estratégias fazem diferença na hora de resolver os problemas:

- Postura: Devemos sempre nos colocar no lugar da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. No exemplo acima, nos colocamos no papel da pessoa que deveria formar o casal.
- Divisão: Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples. No exemplo acima, formar o casal foi dividido entre escolher o homem e escolher a mulher.
- Não adiar dificuldades: Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

Em muitas situações de análise combinatória podemos usar o princípio fundamental da contagem, mas em algumas situações, os cálculos tendem a se tornar complexos e trabalhosos. Nestes casos, lançamos mão de outros tipos de agrupamentos, alguns dos quais apresentamos a seguir.

## 4.2 Fatoriais

Sendo  $n \in \mathbb{N}$ , chama-se fatorial de  $n$ , o número representado por  $n!$ , assim definido:

- $0! = 1$
- $1! = 1$
- $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ , para  $n > 1$ .

### EXEMPLO 2:

- a)  $2! = 2 \times 1 = 2$
- b)  $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
- c)  $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
- d)  $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
- e)  $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

## 4.3 Permutações simples

As permutações simples se caracterizam pela ordenação de objetos. Uma permutação simples de  $n$  objetos distintos é um agrupamento ordenado desses objetos.

Para a solução, procedemos da seguinte forma:

Temos  $n$  modos de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar,  $n - 1$  modos de escolher o objeto que ocupará o segundo lugar, ..., 1 modo de escolher o objeto que ocupará o último lugar. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de modos de ordenar  $n$  objetos distintos é:

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1 = n!$$

O número de permutações simples de  $n$  objetos distintos é representado por  $P_n$ . Assim,

$$P_n = n!$$

**EXEMPLO 2:** Quantos são os anagramas da palavra CONTAGEM?

**SOLUÇÃO:** Um anagrama é o resultado da reorganização das letras em uma palavra de maneira a formar palavras diferentes. Em outras palavras, um anagrama consiste em permutar as letras de uma palavra. Logo o número de anagramas da palavra CONTAGEM, que tem oito letras é:

$$P_8 = 8! = 40320.$$

## 4.4 Arranjos simples

Os arranjos simples são os tipos de agrupamentos nos quais tanto a ordem de posicionamento no grupo quanto a natureza dos elementos causam diferenciação entre os agrupamentos. Em outras palavras, um arranjo simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , com  $p \leq n$ , é uma escolha de  $p$  elementos, entre os  $n$  elementos dados, na qual a ordem importa.

Para o cálculo do número de arranjos simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , procedemos da seguinte forma:

O cálculo consistirá de  $p$  etapas e cada uma dessas etapas corresponderá à escolha do elemento que ocupará determinada posição. Na primeira etapa, temos  $n$  possibilidades de escolha, pois qualquer um dos  $n$  elementos pode ser escolhido. Na segunda etapa, temos  $n - 1$  possibilidades de escolha, descontando apenas o elemento escolhido na primeira etapa. Em cada uma das etapas seguintes existe uma escolha a menos que na etapa anterior. E na última etapa, a etapa  $p$ , existem  $n - (p - 1) = n - p + 1$  possibilidades, pois já foram escolhidos  $p - 1$  elementos. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de modos de escolher  $p$  elementos entre  $n$  elementos dados é:

$$A_{n,p} = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - p + 1).$$

Mas

$$n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1) = \frac{n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1) \times (n - p) \times \dots \times 1}{(n - p) \times \dots \times 1} = \frac{n!}{(n - p)!}.$$

Logo, o cálculo do número de arranjos simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , é dado pela fórmula:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

**EXEMPLO 3:** Em um colégio, quatro alunos candidataram-se para ocupar os cargos de presidente e vice-presidente do grêmio estudantil. De quantas maneiras distintas a escolha poderá ser feita?

**SOLUÇÃO:** Sejam A,B,C e D, os quatro alunos mencionados no problema. Temos quatro alunos disputando duas vagas, portanto, queremos agrupar quatro elementos tomados dois a dois. Fazendo uso da fórmula:

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 4 \times 3 = 12.$$

Logo, é possível formar 12 agrupamentos.

## 4.5 Combinações simples

As combinações simples são os tipos de agrupamentos nos quais somente a natureza dos elementos causa diferenciação entre os agrupamentos, ou seja, a ordem de posicionamento dos elementos no grupo, não difere um grupo de outro. Em outras palavras, uma combinação simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , com  $p \leq n$ , é uma escolha de  $p$  elementos, entre os  $n$  elementos dados, na qual a ordem não importa.

Para o cálculo do número de combinações simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , procedemos da seguinte forma:

Para estabelecer uma fórmula para o cálculo do número de combinações simples, é preciso entender como os conceitos de arranjos simples e permutações simples estão relacionados. Calcular o número de arranjos simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , consiste em duas etapas: A primeira delas é escolher os  $p$  elementos distintos dentre os  $n$  elementos dados. A segunda etapa é ordenar os  $p$

elementos escolhidos. Observemos que na primeira etapa não estamos ordenando os elementos, apenas escolhendo. E na segunda etapa, apenas ordenamos os  $p$  elementos escolhidos. Assim, a primeira etapa consiste em formar uma combinação de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , enquanto que a segunda etapa consiste em fazer uma permutação dos  $p$  elementos de cada grupo formado. Portanto, utilizando o Princípio Multiplicativo, temos:

$$A_{n,p} = C_{n,p} \times P_p.$$

Daí:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_p}.$$

Donde temos:

$$C_{n,p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}.$$

Logo, o cálculo do número de combinações simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ , é dado pela fórmula:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

**EXEMPLO 4:** Em uma festa de aniversário será servido sorvete aos convidados. Serão oferecidos os sabores de morango ( $M$ ), chocolate ( $C$ ), baunilha ( $B$ ) e ameixa ( $A$ ) e o convidado deverá escolher dois entre os quatro sabores. De quantas maneiras distintas o convidado poderá montar seu sorvete?

**SOLUÇÃO:** Sejam  $M, C, B$  e  $A$ , os quatro sabores de sorvete disponíveis, dos quais cada convidado escolherá dois. Portanto, queremos agrupar quatro elementos tomados dois a dois. Fazendo uso da fórmula:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2! \times (4-2)!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Logo, é possível formar 6 agrupamentos.



## 4.6 Um método de classificação de problemas

Em geral, os problemas de análise combinatória podem ser divididos em dois grupos: Aqueles que imprimem a ideia de **ordenação** de objetos e aqueles que imprimem a ideia de **escolha** de um determinado número de objetos dentre um grupo de objetos dados. Sempre que de alguma maneira, o problema nos levar a **ordenar  $n$  objetos em  $n$  lugares**, esse problema tratará de **permutação**. E se, de alguma forma, o problema nos levar a **escolher uma determinada quantidade  $p$  dentre uma quantidade  $n$  de objetos,  $p < n$** , então este problema tratará de **arranjo ou combinação**. Para identificar se o problema é de arranjo ou combinação, devemos construir um dos agrupamentos mencionados no problema e trocar a ordem de seus elementos. Se com essa troca, obtivermos um **agrupamento diferente** do original, então este problema será de **arranjo**. Mas, se com essa troca, obtivermos um **agrupamento igual** ao original, teremos um caso de **combinação**.



Figura 4.1: Esquema

Vejamos isso de forma mais detalhada.

Para identificar quando determinado problema se refere à permutação, nos atentemos ao seguinte: Todos os problemas que dizem respeito a permutações simples, são (ou podem ser transcritos) dessa forma:

**Dados  $n$  objetos distintos de quantos modos é possível ordená-los?**

Assim, para verificar se os agrupamentos pedidos em um determinado problema são permutações, tentemos reescrevê-lo nesses termos. Voltemos ao exemplo 2, para aplicar a regra:

**EXEMPLO 2:** Quantos são os anagramas da palavra CONTAGEM?

**SOLUÇÃO:** Cada anagrama da palavra contagem, nada mais é que uma ordenação das letras C, O, N, T, A, G, E, M. Assim, o problema dado, poderia ser reescrito da seguinte forma:

**Dadas 8 letras distintas de quantos modos é possível ordená-las?**

Assim, o número de anagramas da palavra CONTAGEM, isto é, o número de modos de ordenar as 8 letras dadas, é:

$$P_8 = 8! = 40320.$$

Assim como os problemas de permutação são ou podem ser reescritos na forma:

**Dados n objetos distintos de quantos modos é possível ordená-los?**

Os problemas de arranjos e combinações simples, também são ou podem ser transcritos na forma:

**De quantos modos podemos selecionar p objetos distintos entre n objetos distintos dados?**

Deparando-se com um problema desse tipo, para decidir se os agrupamentos do problema são arranjos ou combinações, nos portamos da seguinte maneira:

Construímos um dos agrupamentos sugeridos pelo problema e, a seguir, mudamos a ordem de apresentação dos elementos desse agrupamento.

- Se, com essa mudança na ordem dos elementos, obtivermos um agrupamento diferente do original, então esse agrupamento é um arranjo.
- Se, com essa mudança na ordem dos elementos, obtivermos um agrupamento igual ao original, então esse agrupamento é uma combinação.

Voltemos aos exemplos 3 e 4, para aplicar a regra:

**EXEMPLO 3:** Em um colégio, quatro alunos candidataram-se para ocupar os cargos de presidente e vice-presidente do grêmio estudantil. De quantas maneiras distintas a escolha poderá ser feita?

**SOLUÇÃO:** Observemos que o problema dado pode ser reescrito da seguinte forma:

**De quantos modos podemos selecionar 2, entre 4 alunos?**

Logo, já sabemos que este problema é de arranjo ou combinação. Agora, precisamos decidir se o problema é de arranjo ou combinação. Sejam  $A, B, C$  e  $D$ , os quatro alunos mencionados no problema. Observemos que se o aluno  $A$  é eleito presidente e o aluno  $B$  é eleito vice-presidente do grêmio, temos o conjunto  $(A, B)$ . Trocando a ordem dos elementos deste conjunto, temos o conjunto  $(B, A)$ , onde o aluno  $B$  foi eleito presidente e o aluno  $A$ , seu vice. Isto é, ao trocar a ordem de seus elementos do conjunto construído, obtivemos um agrupamento diferente do original, logo, este problema é de arranjo.

Assim, temos quatro alunos disputando duas vagas, portanto, queremos agrupar quatro elementos tomados dois a dois. Fazendo uso da fórmula:

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 4 \times 3 = 12.$$

Logo, é possível formar 12 agrupamentos. São eles:

$(A, B), (A, C), (A, D), (B, A), (B, C), (B, D), (C, A), (C, B), (C, D), (D, A), (D, B), (D, C)$

Assim, nas situações de arranjos simples, como essa, os agrupamentos se diferem:

- Pela natureza dos elementos:  $(A, B) \neq (C, D)$
- Pela ordem dos elementos:  $(A, B) \neq (B, A)$

**EXEMPLO 4:** Em uma festa de aniversário será servido sorvete aos convidados. Serão oferecidos os sabores de morango ( $M$ ), chocolate ( $C$ ), baunilha ( $B$ ) e ameixa ( $A$ ) e o convidado deverá escolher dois entre os quatro sabores. De quantas maneiras distintas o convidado poderá montar seu sorvete?

**SOLUÇÃO:** Observemos que o problema dado pode ser reescrito da seguinte forma:

**De quantos modos podemos selecionar 2, entre 4 sabores de sorvete?**

Logo, já sabemos que este problema é de arranjo ou combinação. Agora, precisamos decidir se o problema é de arranjo ou combinação. Sejam  $M, C, B$  e  $A$ , os quatro sabores de sorvete disponíveis, dos quais cada convidado escolherá dois. Observemos que se um convidado escolhe um sorvete de morango e chocolate ( $M, C$ ), e outro convidado escolhe um sorvete de chocolate e morango ( $C, M$ ), na verdade, os dois convidados fizeram a mesma escolha, isto é,  $(M, C) = (C, M)$ . Isto significa que, ao trocar a ordem dos elementos de um conjunto construído, obtemos um agrupamento igual ao original, logo, este problema é de combinação.

Assim, queremos agrupar quatro elementos tomados dois a dois. Fazendo uso da fórmula:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2! \times (4-2)!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Logo, é possível formar 6 agrupamentos. São eles:

$$(M, C), (M, B), (M, A), (C, B), (C, A), (B, A)$$

Assim, nas situações de combinações simples, como essa, os agrupamentos se diferem apenas pela natureza dos elementos:  $(M, C) \neq (B, A)$ , e não pela ordem dos elementos:  $(M, C) = (C, M)$ .

Um último exemplo:

**EXEMPLO 5:** Quantas saladas contendo exatamente quatro frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes?

**SOLUÇÃO:** O problema dado pode ser reescrito da forma:

**De quantos modos podemos selecionar 4 frutas distintas entre 10 frutas distintas dadas?**

Logo, já sabemos que se trata de um problema de arranjo ou combinação simples. Para decidir a qual dos dois tipos de agrupamento o problema se refere, basta montarmos um dos conjuntos sugeridos pelo problema, isto é, uma das saladas composta por 4 frutas. Sejam  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9, F_{10}$ , as dez frutas disponíveis e consideremos a salada composta pelas quatro primeiras frutas citadas:  $(F_1, F_2, F_3, F_4)$ .

Invertendo a ordem dos elementos do conjunto acima, temos:  $(F_4, F_3, F_1, F_2)$ , que é uma salada composta pelas mesmas frutas da salada anterior, logo, a mesma salada. Isso significa que com a mudança feita na ordem dos elementos, obtivemos um agrupamento igual ao original. Logo, esse agrupamento é uma combinação.

Resolvendo o problema, temos:

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4! \times (10-4)!} = \frac{10!}{4! \times 6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 6!} = \frac{5040}{24} = 210.$$

Portanto, pode-se formar 210 saladas.

## 4.7 Exercícios propostos

Os exercícios propostos nesta seção podem ser encontrados em [6], [9], [10] e [14].

- 1) Classifique os agrupamentos sugeridos a seguir em arranjo ou combinação:
  - a) Escolher seis dos sessenta números para uma aposta de um jogo.
  - b) Indicar possíveis classificações dos quatro primeiros colocados no Campeonato Brasileiro de Futebol.
  - c) Eleger uma comissão de dois alunos para representantes de sala, em que ambos terão o mesmo cargo.
  - d) Formar um número de telefones com oito algarismos distintos.
  - e) Eleger uma comissão de dois alunos em que um será o porta-voz da classe, e o outro será o secretário.
  - f) Escolher três vértices de um cubo para formarmos triângulos.
- 2) Quantos anagramas podemos formar com a palavra MESTRADO?
- 3) Seis pessoas entram em um banco. Em quantas sequências diferentes elas podem formar uma fila indiana no caixa?
- 4) Cinco jogadores de futebol A, B, C, D e E, concorrem a um dos títulos de 1º, 2º ou 3º melhor jogador do Campeonato Brasileiro. De quantas maneiras diferentes esses títulos podem ser distribuídos?
- 5) Considerando a palavra CADERNO, responda:
  - a) Quantos anagramas podemos formar?
  - b) Quantos anagramas começam por C?
  - c) Quantos anagramas começam por C e terminam por O?
- 6) (UEFS) O número de equipes de trabalho que poderão ser formadas num grupo de dez indivíduos, devendo cada equipe ser constituída por um coordenador, um secretário e um digitador, é:

- a) 240
  - b) 360
  - c) 480
  - d) 600
  - e) 720
- 7) (Fuvest 2004) Três empresas devem ser contratadas para realizar três trabalhos distintos em um condomínio. Cada trabalho será atribuído a uma única empresa e todas elas devem ser contratadas. De quantas maneiras distintas podem ser distribuídos os trabalhos?
- a) 6
  - b) 12
  - c) 18
  - d) 24
  - e) 36
- 8) (UEG 2005) A UEG realiza seu Processo Seletivo em dois dias. As oito disciplinas, Língua Portuguesa- Literatura Brasileira, Língua Estrangeira Moderna, Biologia, Matemática, História, Geografia, Química e Física, são distribuídas em duas provas objetivas, com quatro disciplinas por dia. No Processo Seletivo 2005/2, a distribuição é a seguinte:
- Primeiro dia: Língua Portuguesa-Literatura Brasileira, Língua Estrangeira Moderna, Biologia e Matemática.
  - Segundo dia: História, Geografia, Química e Física.

A UEG poderia distribuir as disciplinas para as duas provas objetivas, com quatro por dia, de:

- a) 1.680 modos diferentes.
- b) 256 modos diferentes.
- c) 140 modos diferentes.

- d) 128 modos diferentes.
- e) 70 modos diferentes.
- 9) (UEL 2006) Na formação de uma Comissão Parlamentar de Inquérito (CPI), cada partido indica um certo número de membros, de acordo com o tamanho de sua representação no Congresso Nacional. Faltam apenas dois partidos para indicar seus membros. O partido A tem 40 deputados e deve indicar 3 membros, enquanto o partido B tem 15 deputados e deve indicar 1 membro. Assinale a alternativa que apresenta o número de possibilidades diferentes para a composição dos membros desses dois partidos nessa CPI.
- a) 55
- b)  $(40 - 3) \times (15 - 1)$
- c)  $15 \times \frac{40!}{37! \times 3!}$
- d)  $40 \times 39 \times 38 \times 15$
- e)  $40! \times 37! \times 15!$
- 10) (UFMG 2006) A partir de um grupo de oito pessoas, quer-se formar uma comissão constituída de quatro integrantes. Nesse grupo, incluem-se Gustavo e Danilo, que, sabe-se, não se relacionam um com o outro. Portanto, para evitar problemas, decidiu-se que esses dois, juntos, não deveriam participar da comissão a ser formada. Nessas condições, de quantas maneiras distintas se pode formar essa comissão?
- a) 70
- b) 35
- c) 45
- d) 55
- e) 65
- 11) (UFV 2004) Um farmacêutico dispõe de 4 tipos de vitaminas e 3 tipos de sais minerais e deseja combinar 3 desses nutrientes para obter um composto químico. O número de compostos que poderão ser preparados usando-se, no máximo, 2 tipos de sais minerais é:



- a) 32
- b) 28
- c) 34
- d) 26
- e) 30

12) (CESGRANRIO 2002) Um brinquedo comum em parques de diversões é o "bicho-da-seda", que consiste em um carro com cinco bancos para duas pessoas cada e que descreve sobre trilhos, em alta velocidade, uma trajetória circular. Suponha que haja cinco adultos, cada um deles acompanhado de uma criança, e que, em cada banco do carro, devam acomodar-se uma criança e o seu responsável. De quantos modos podem as dez pessoas ocupar os cinco bancos?

- a) 14400
- b) 3840
- c) 1680
- d) 240
- e) 120

13) (PUCMG 2003) Um bufê produz 6 tipos de salgadinhos e 3 tipos de doces para oferecer em festas de aniversário. Se em certa festa devem ser servidos 3 tipos desses salgados e 2 tipos desses doces, o bufê tem  $x$  maneiras diferentes de organizar esse serviço. O valor de  $x$  é:

- a) 180
- b) 360
- c) 440
- d) 720
- e) 100

- 14) (UEL 2003) Sejam os conjuntos  $A = \{1,2,3\}$  e  $B = \{4,5,6,7,8\}$ . Que quantidade de pares de números podemos formar, usando um número do conjunto A e um número do conjunto B?
- a) 10
  - b) 15
  - c) 60
  - d) 120
  - e) 125
- 15) (UNESP 2003) O conselho administrativo de um sindicato é constituído por doze pessoas. A diretoria do sindicato tem quatro cargos diferentes a serem preenchidos por membros do conselho. De quantas maneiras diferentes esta diretoria poderá ser formada?
- a) 40
  - b) 7920
  - c) 11880
  - d) 11!
  - e) 12!

## 4.8 Respostas dos exercícios propostos

- 1) a) Combinação.  
b) Arranjo.  
c) Combinação.  
d) Arranjo.  
e) Arranjo.  
f) Combinação.
- 2)  $8! = 40320$

3)  $6! = 720$

4)  $A_{5,3} = 60$

5) a)  $7! = 5040$

b)  $6! = 720$

c)  $5! = 120$

6) E

7) A

8) E

9) C

10) D

11) C

12) B

13) D

14) B

15) C

## Capítulo 5

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

As dificuldades observadas no ensino e na aprendizagem de análise combinatória no ensino médio e o comprovado baixo desempenho em matemática apresentado por esses alunos em avaliações externas de larga escala, foram as motivações para este trabalho.

Baseando-nos na dificuldade apresentada por muitos alunos do ensino médio para identificar se determinada situação é um problema de arranjo, combinação ou permutação, buscamos com este trabalho, propor uma maneira de classificar problemas simples de análise combinatória, de forma que a partir desta classificação o aluno seja capaz de identificar e diferenciar os diversos tipos de agrupamentos.

O método de classificação desenvolvido foi aplicado para alguns alunos do ensino médio e o resultado obtido foi satisfatório: Com a utilização do método, constatamos melhoras no desempenho dos alunos, na resolução de problemas de análise combinatória.

Além disso, foi desenvolvido um material de apoio para os professores do ensino médio, que contém o método de classificação de problemas de análise combinatória, aqui desenvolvido, bem como exemplos, exercícios resolvidos e propostos e dicas para a resolução de problemas de contagem.

Proporcionar para os estudantes uma educação de qualidade e uma aprendizagem significativa não é uma tarefa fácil. É necessário empenho, estudo, dedicação e aprimoramento constante. Espera-se que a proposta de ensino apresentada nessa pesquisa possa contribuir para essa tarefa, melhorando o ensino e a aprendizagem de análise combinatória no ensino médio.

# Referências Bibliográficas

- [1] ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula**. Rio Claro: IGCE, Unesp, 1998. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática).
- [2] BARROSO, J. **Conexões com a Matemática**. São Paulo: Moderna, 2010.
- [3] BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Mais Ensino Médio: Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN+** . Brasília: MEC, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acessado em 17/01/2017.
- [4] DANTE, L. R. **Matemática**. Rio de Janeiro: Ática, 2001.
- [5] DORNELAS, A.C.B. **O princípio multiplicativo como recurso didático para a resolução de problemas de contagem**. Recife: Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2004. (Dissertação de Mestrado em Ensino da Ciências)
- [6] IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar- Volume 4**. 2.ed. São Paulo: Atual Editora, 1977.
- [7] LIMA, E. L., et al. **A Matemática do Ensino Médio – volume 1**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [8] MIZUKAMI, M.G.N. **Ensino: as abordagens do processo**. São Paulo: EPU, 1986.

- [9] MORGADO, A. C.O., et al. **Análise Combinatória e Probabilidade. Coleção Do Professor de Matemática.** Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- [10] PAIVA, M. **Matemática.** Rio de Janeiro: Moderna, 2001.
- [11] SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P. e MURARI, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória.** 4. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.
- [12] SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; NUNES, T. **Na vida dez, na escola zero.** 12. ed. São Paulo: Cortez, 2001.
- [13] SILVA, C. X; BARRETO, B. **Matemática Aula por Aula.** 2 ed. São Paulo: FTD, 2005.
- [14] SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática.** Rio de Janeiro: Saraiva, 2012.
- [15] SOUZA, J. R. **Novo Olhar Matemática - volume 1.** 2 ed. São Paulo: FTD, 2013.

# ANEXOS

**PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP**

**DADOS DO PROJETO DE PESQUISA**

**Título da Pesquisa:** Ensino de Análise Combinatória  
**Pesquisador:** Alexandre Miranda Alves  
**Área Temática:**  
**Versão:** 2  
**CAAE:** 57967216.0.0000.5153  
**Instituição Proponente:** Departamento de Matemática  
**Patrocinador Principal:** Departamento de Matemática

**DADOS DO PARECER**

**Número do Parecer:** 1.711.788

**Apresentação do Projeto:**

"Muitas vezes ao resolver um problema de análise combinatória, o aluno se depara com a seguinte questão: os agrupamentos mencionados no problema são permutações, arranjos ou combinações? Ao ensinar análise combinatória no ensino médio, percebemos que ao propor, separadamente, problemas de arranjo, combinação e permutação, os alunos conseguem resolvê-los. Porém, se é dado um problema aleatório, os alunos apresentam muita dificuldade para identificar a qual tipo de agrupamento o problema se refere. Assim, fica nítido que a maneira de resolver cada um dos agrupamentos e a aplicação das fórmulas é aprendida, mas que o problema está na interpretação do exercício, em identificar o tipo de agrupamento a que se refere cada situação. Baseado neste problema, a realização deste trabalho fez-se necessária, uma vez que é importante mostrar para o aluno quando o agrupamento mencionado em determinado problema será arranjo, permutação ou combinação, apresentando para ele, uma maneira de classificar os problemas e, assim, ser capaz de identificar e diferenciar os diversos tipos de agrupamento."

Figura 5.1: Parecer do CEP (Página 01)



Continuação do Parecer: 1.711.750

**Objetivo da Pesquisa:**

Segundo os pesquisadores,

Objetivo Primário:

Observada a dificuldade apresentada por muitos alunos do ensino médio para identificar se determinada situação é um problema de arranjo, combinação ou permutação, o objetivo deste trabalho é propor uma classificação dos problemas que envolvem análise combinatória, de forma que a partir desta classificação o aluno possa identificar a qual tipo de agrupamento se refere cada problema.

**Avaliação dos Riscos e Benefícios:**

Foi devidamente reformulado conforme as recomendações. Texto final: Existe o risco de eventuais constrangimentos causados pela entrevista que será feita com os alunos do ensino médio, participantes da pesquisa. No entanto, visando minimizar o problema, ressaltamos o direito que todos os alunos terão de deixar de responder qualquer uma das questões que compõem a entrevista, sem qualquer penalidade, sempre que o aluno se sentir constrangido ou desconfortável para responder.

**Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:**

Não há necessidade de reavaliação nesse ponto, pois não aconteceram alterações.

**Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:**

Os termos alterados (Assentimento e TCLE) estão adequados.

**Recomendações:**

Quando da coleta de dados, o TCLE deve ser elaborado em duas vias, rubricado em todas as suas páginas e assinado, ao seu término, pelo convidado a participar da pesquisa ou responsável legal, bem como pelo pesquisador responsável, ou pessoa(s) por ele delegada(s), devendo todas as assinaturas constar na mesma folha.

Não é necessário apresentar os TCLEs assinados ao CEP/UFV. Uma via deve ser mantida em arquivo pelo pesquisador e a outra é do participante da pesquisa.

**Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:**

Aprovado

**Considerações Finais a critério do CEP:**

Ao término da pesquisa é necessário apresentar, via notificação, o Relatório Final (modelo

Figura 5.2: Parecer do CEP (Página 02)

Continuação do Parecer: 1.711.700

disponível no site [www.cep.ufv.br](http://www.cep.ufv.br)). Após ser emitido o Parecer Consubstanciado de aprovação do Relatório Final, deve ser encaminhado, via notificação, o Comunicado de Término dos Estudos.  
Projeto analisado durante a 6ª reunião de 2016, realizada no dia 04 de agosto de 2016.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_P ROJETO_735453.pdf	15/08/2016 15:52:58		Acelto
Outros	Carta_Resposta.pdf	15/08/2016 15:51:32	Gielsiani de Fátima Oliveira	Acelto
Outros	TA_Modificado.pdf	15/08/2016 15:51:05	Gielsiani de Fátima Oliveira	Acelto
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_Modificado.pdf	15/08/2016 15:50:00	Gielsiani de Fátima Oliveira	Acelto
Folha de Rosto	FolhaDeRostoNova.pdf	19/07/2016 13:39:19	Gielsiani de Fátima Oliveira	Acelto
Outros	Roteiro_da_Entrevista.pdf	16/07/2016 16:19:49	Gielsiani de Fátima Oliveira	Acelto
Outros	TA.pdf	16/07/2016 16:02:28	Gielsiani de Fátima Oliveira	Acelto
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE.pdf	16/07/2016 15:35:49	Gielsiani de Fátima Oliveira	Acelto
Outros	Autorizacao_2.pdf	16/07/2016 15:29:03	Gielsiani de Fátima Oliveira	Acelto
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	Projeto_Detalhado.pdf	13/07/2016 00:26:13	Gielsiani de Fátima Oliveira	Acelto
Declaração de Instituição e Infraestrutura	Declaracao_de_Instituicao_e_Infraestrut ura.pdf	27/06/2016 22:19:38	Gielsiani de Fátima Oliveira	Acelto

**Situação do Parecer:**

Aprovado

**Necessita Apreciação da CONEP:**

Não

Endereço: Universidade Federal de Viçosa, Avenida PH Rolfs s/n, Edifício Arthur Bernardes  
Bairro: Campus Universitário CEP: 36.570-900  
UF: MG Município: VIÇOSA  
Telefone: (31)3809-2402 E-mail: [cep@ufv.br](mailto:cep@ufv.br)

Figura 5.3: Parecer do CEP (Página 03)

VICOSA, 05 de Setembro de 2016

---

Assinado por:  
**HELEN HERMANA MIRANDA HERMSDORFF**  
(Coordenador)

Figura 5.4: Parecer do CEP (Página 04)