Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Bárbara Ferreira da Cunha Teles

Sudoku: Estratégias e Estruturas.

Rio de Janeiro

2016

Bárbara Ferreira da Cunha Teles

Sudoku: Estratégias e Estrutura.

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Prof.ª Dra. Patrícia Nunes da Silva

Prof. Dr. Helvécio Rubens Crippa

Rio de Janeiro

2016

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

T269 Teles, Bárbara Ferreira da Cunha.
Sudoku: estratégias e estrutura /Bárbara Ferreira da Cunha Teles. – 2016.
70 f. : il.
Orientadores: Patrícia Nunes da Silva e Helvécio Rubens Crippa.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística

1. Jogos em educação matemática – Teses. 2. Sudoku – Teses. I. Silva, Patricia Nunes da. II. Crippa, Helvécio Rubens. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 51-8

Bárbara Ferreira da Cunha Teles

Sudoku: Estratégias e Estrutura.

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 29 de julho de 2016.

Banca Examinadora

Prof.ª Dra. Patricia Nunes da Silva

Instituto Matemática e Estatística- UERJ

Prof. Dr. Helvécio Rubens Crippa

Instituto Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Sérgio Luiz Silva

Instituto Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Gladson Antunes

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2016

DEDICATÓRIA

Dedico a minha família e amigos que sempre estiveram comigo durante este processo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus, porque sem Ele nada disso seria possível. Ele que me sustentou e se fez ainda mais presente quando já não era possível caminhar sozinha. Agradeço a todos que Ele colocou em meu caminho pra que me ajudassem a chegar ao céu.

Agradeço também aos meus pais Andréa e Sérgio, que sempre acreditaram e investiram em mim, sempre apoiaram minhas escolhas e fizeram tudo que possível pra ajudar na caminhada, e a toda família que sempre torceu por minha vitória, meus sinceros agradecimentos.

Não posso deixar de agradecer aos meus orientadores Patrícia e Rubinho que estiveram presentes e ativos durante todo o processo, até quando eu desanimava. Foram fundamentais para que este trabalho chegasse ao fim. Obrigada pelo apoio e ensinamentos constantes.

A nossa presente tribulação, momentânea e ligeira, nos proporciona um peso eterno de glória incomensurável.

2Coríntios 4,17 – Bíblia Sagrada.

RESUMO

TELES, Bárbara Ferreira da Cunha. **Sudoku**: estratégias e Estrutura.2016. 70f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT), Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

Frequentemente, qualquer jogo ou atividade que envolva números é associado à Matemática. O Sudoku, a princípio, é apenas uma organização de números que obedecem a certas regras. Não é requerido nenhum conhecimento matemático prévio para resolver um jogo de Sudoku.

Neste trabalho será explorada a matemática contida no jogo. É feita uma associação de um jogo de Sudoku a um sistema de equações lineares, onde cada equação é a representação algébrica das regras e condições iniciais do jogo. O objetivo é tratar o jogo de Sudoku como um problema matemático e seus possíveis desdobramentos, interpretando detalhadamente o artigo publicado na *The American Mathematical Monthly,* intitulado *Sudoku: Strategy versus Structure*, de Provan, 2009.

São descritas as regras, história e algumas estratégias de resolução. Cada uma das equações é descrita detalhadamente, exemplificando de que forma elas se aplicam ao jogo.

No decorrer do trabalho são provados teoremas que envolvem as estratégias usadas em um único bloco na resolução do jogo, e que se discute também sob que condições o sistema de equações associado é bem sucedido na solução do jogo. Para demonstração desses teoremas alguns assuntos independentes de sistema de equações são usados. Sendo assim, todos os resultados e/ou definições necessárias para tais demonstrações se encontram descritas em um capítulo específico do trabalho.

.

Palavras-chave: Sudoku. Estratégias. Sistema de Equações Lineares.

ABSTRACT

TELES, Bárbara Ferreira da Cunha. **Sudoku**: strategy versus structure.2016. 70f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT), Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

Often, any game or activity involving numbers is associated with mathematics. Sudoku, the principle is just an organization of numbers that follow certain rules. It is not required any previous mathematical knowledge to solve a Sudoku game.

In this text we explore the mathematics contained in the game. Is done an association between a game of Sudoku and a system of linear equations, where each equation is the algebraic representation of the rules and initial conditions of the game is made.

The goal is look to the Sudoku game as a mathematical problem and its possible results in detail, interpreting the article in The American Mathematical Monthly, titled Sudoku: Strategy vs. Structure of Provan, 2009.

The rules, history and some solving strategies are described. Each of the equations is described in detail, exemplifying how they apply to the game. Throughout the text are proven theorems that involve the strategies used in a single block in the resolution of the game, and also discusses whether under what conditions the system associated equations is successful in solving the game.

For demonstration of these theorems some independent subjects of the system of equations are used. Therefore, all results and / or settings required for such statements are described in a specific chapter of the text.

Keywords: Sudoku. Strategy. System of linear equations

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Sudoku e suas variantes tornaram-se muito populares nas últimas duas décadas e agora podem ser encontrados em diversas revistas populares, jornais e na web. Provavelmente, sua popularidade pode ser atribuída às regras simples e ao acesso fácil.

Este trabalho baseou-se no artigo publicado na *The American Mathematical Monthly*, intitulado *Sudoku: Strategy versus Structure*, de Provan, 2009.

O objetivo deste é relacionar um jogo de Sudoku a um sistema de equações lineares e caracterizar um grupo comum de estratégias usadas na resolução de uma vasta quantidade de jogos.

No sistema linear, cada equação representa de forma algébrica uma regra do jogo, e suas soluções são inteiras não negativas da forma 0-1, onde, pela estrutura das equações, temos que $x_{p,k} = 1$ se o índice k for atribuído ao quadrado p, e $x_{p,k} = 0$ caso contrário.

A caracterização simples de determinado conjunto de estratégias é demonstrada através de um teorema de grafos a fim de responder a perguntas como: quão fácil pode ser resolver um jogo usando um conjunto específico de regras de eliminação do conjunto de candidatos? E sob que condições essas estratégias resolvem completamente um jogo?

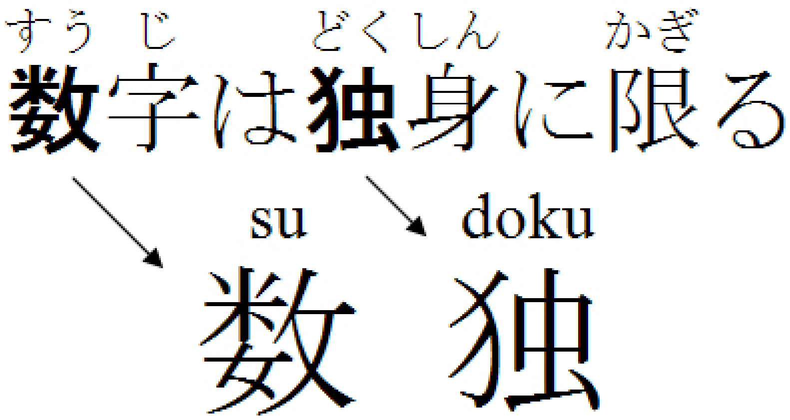
Em outro teorema, Provan (2009) demonstra que a possibilidade de resolver um jogo utilizando somente esse conjunto de estratégias garante que a solução do jogo pode ser representada como a única solução não negativa do sistema de equações lineares. A este teorema foi atribuída uma demonstração independente do artigo de origem. Já que a demonstração contida neste estava inconsistente e com informação insuficiente para compreensão. Como o autor sugeria a demonstração com a utilização de programação linear, este foi um caminho em que a solução foi buscada, mas completamente independente da demonstração contida no artigo. Portanto, a demonstração contida neste trabalho é original, usando conceitos de programação linear e matrizes duplamente estocásticas. Esta parte do trabalho fez com que pesquisas paralelas fossem fundamentais para o término, já que foram usados conteúdos que não estavam previstos para o trabalho.

Com essas demonstrações as perguntas propostas são respondidas e podem surgir algumas outras para pesquisas posteriores.

1 HISTÓRIA DO SUDOKU

Sudoku é uma palavra de origem japonesa que significa “dígito único”, fazendo assim alusão a uma de suas regras básicas. Na verdade, Sudoku é abreviação da frase japonesa “*suujiwadokushinnikagiru*” que significa “*os dígitos devem ser únicos*”.

Figura 1 - Origem do nome Sudoku



Fonte: A to Z of Sudoku (Narendra Jussien).

O quebra-cabeça foi projetado na década de 70 por Howard Garns, arquiteto aposentado. Sua inspiração, provavelmente, veio do “quadrado latino” criado por Leonard Euler no século XVIII. No *quadrado latino* não há a necessidade de se trabalhar com números. Os elementos a serem preenchidos no *quadrado latino* podem ser quaisquer, desde que cada elemento apareça uma única vez em cada linha e coluna. Mais precisamente, em um *quadrado latino* de ordem n, os elementos de um conjunto S de cardinalidade $n$serão distribuídos em uma matriz $n \times n$de modo que cada elemento de S ocorre em cada linha e em cada coluna.

No final da década de 70 uma revista norte-americana da editora *Dell Magazine* publicou pela primeira vez o Sudoku. Na época foi atribuído o nome de “*Number Place*”, até hoje usado em algumas partes dos Estados Unidos.

Só em 1984, quando uma empresa japonesa descobriu o jogo e levou-o ao país é que este passou a chamar-se Sudoku. Dois anos depois o jogo já era bastante popular no Japão. Com isso, outras editoras japonesas também passaram a publicar o Sudoku usando outros nomes, já que o Sudoku era uma marca registrada pela empresa japonesa pioneira. No Ocidente a popularidade do jogo demorou um pouco mais para se concretizar.

Regras simples, necessidade de apenas uma folha de papel, lápis e borracha além de público alvo amplo, são alguns dos fatores que tornam o jogo tão atrativo. Embora possua regras simples é preciso um grande exercício intelectual no preenchimento da grade do jogo.

O formato mais comum do jogo é a grade 9×9 formado por sub-grades 3×3. Alguns quadrados já vêm preenchidos inicialmente e estas atribuições devem ser consideradas no preenchimento da grade.

O objetivo do jogo é preencher toda a grade com números de 1 a 9 de modo que cada número apareça uma única vez em cada linha, coluna ou sub-grade 3×3.

A dificuldade de um jogo de Sudoku tem muito a ver com a quantidade de índices preenchidos inicialmente, sua relevância e posicionamento, e com a habilidade humana em solucioná-lo. Também não se sabe ainda qual a quantidade mínima de quadrados que devem ser preenchidos inicialmente, de modo que haja solução única para o jogo. A menor quantidade encontrada até hoje é de 17 quadrados preenchidos (DELAHAYE, 2006).

Figura 2 - Exemplo de jogo de Sudoku com 17 atribuições iniciais

3							9	
					8	7		
				1				
			6	3			4	
	8	1				5		
	2							
5			9					
		9	3					
						1		

Fonte: http://staffhome.ecm.uwa.edu.au/~00013890/sudokumin.php

2 RESOLVENDO O JOGO DE SUDOKU

Algumas técnicas, embora sejam óbvias, são extremamente úteis. Muitos dos jogos de Sudoku classificados como fáceis ou intermediários podem ser totalmente solucionados apenas com essas técnicas. Algumas delas serão descritas neste capítulo, embora possam existir muitas outras técnicas que não foram descritas formalmente.

Serão mantidos os nomes originais em inglês.

Para nos referirmos à localização de qualquer quadrado, linha, coluna ou sub-grade 3×3 precisamos fixar uma notação específica que será usada durante todo o trabalho.

Para identificar os quadrados utilizaremos a seguinte numeração:

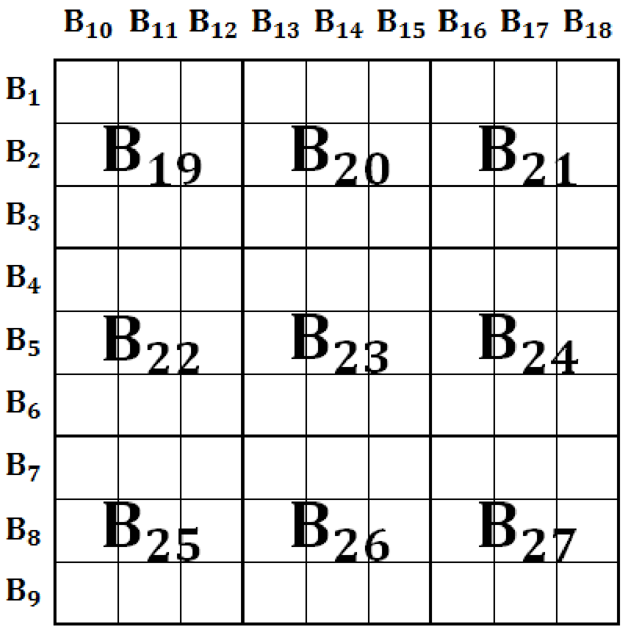
Figura 3 - Numeração usada para os quadrados da grade.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81

Fonte: O autor, 2016.

Para os blocos (linhas, colunas ou sub-grades 3×3), usaremos a numeração a seguir.

Figura 4 - Numeração usada nos blocos da grade



Fonte: O autor, 2016.

Squeezing – Talvez essa seja a primeira técnica que usamos na busca por índices a serem preenchidos. Usamos esta estratégia antes mesmo de pensar no conjunto de candidatos para cada quadrado não preenchido. É possível determinar alguns índices apenas observando os quadrados já preenchidos.

Esta estratégia é usada quando há o mesmo índice já preenchido em dois blocos conectados para determinar a localização deste mesmo índice no último bloco conectado.

Figura 5 - Exemplo de técnica de resolução

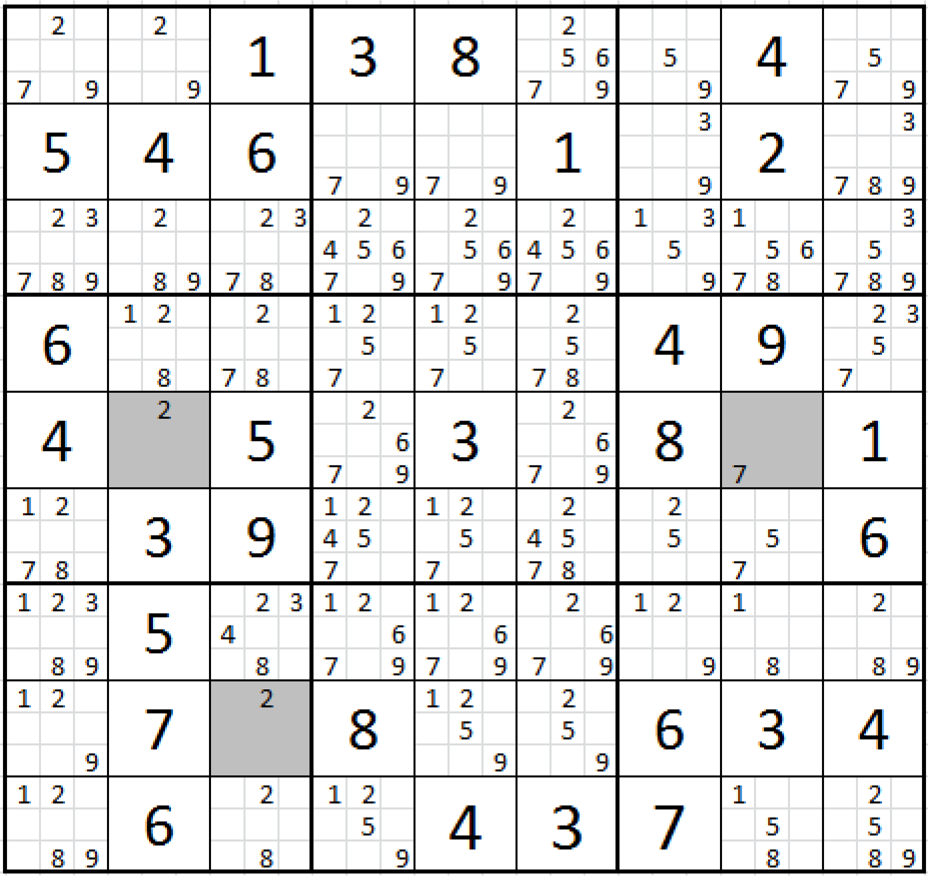
		1	3	8			4	
5	4	6			1		2	
6						4	9	
4		5		3		8		1
	3	9						6
	7		8			6	3	4
	6			4	3	7		

Fonte: Adaptação da Figura 2 de DAVIS (2012)

Considere os blocos B_{19} e B_{22} conectados. Ambos já estão preenchidos com o índice 5. O terceiro bloco conectado é o bloco B_{25}, onde o índice 5 ainda não está alocado. No bloco B_{19} o índice 5 aparece na coluna B_{10} e no bloco B_{22} ele aparece na coluna B_{12}. Portanto, no bloco B_{25} a única possiblidade para o índice 5 é na coluna B_{11}. Porém, na coluna B_{11} dois quadrados já estão preenchidos, sobrando apenas o quadrado 56 para alocar o índice 5. Sendo assim está determinado o índice 5 para o quadrado 56.

Unique Missing Candidate – Se 8 dos 9 índices em um determinado bloco já estão determinados, o elemento final tem que ser o único restante. Analogamente, se 8 dos 9 índices são impossíveis em um determinado quadrado, então o valor deste quadrado é o único possível, esta técnica também é chamada de *naked single* e está descrita abaixo.

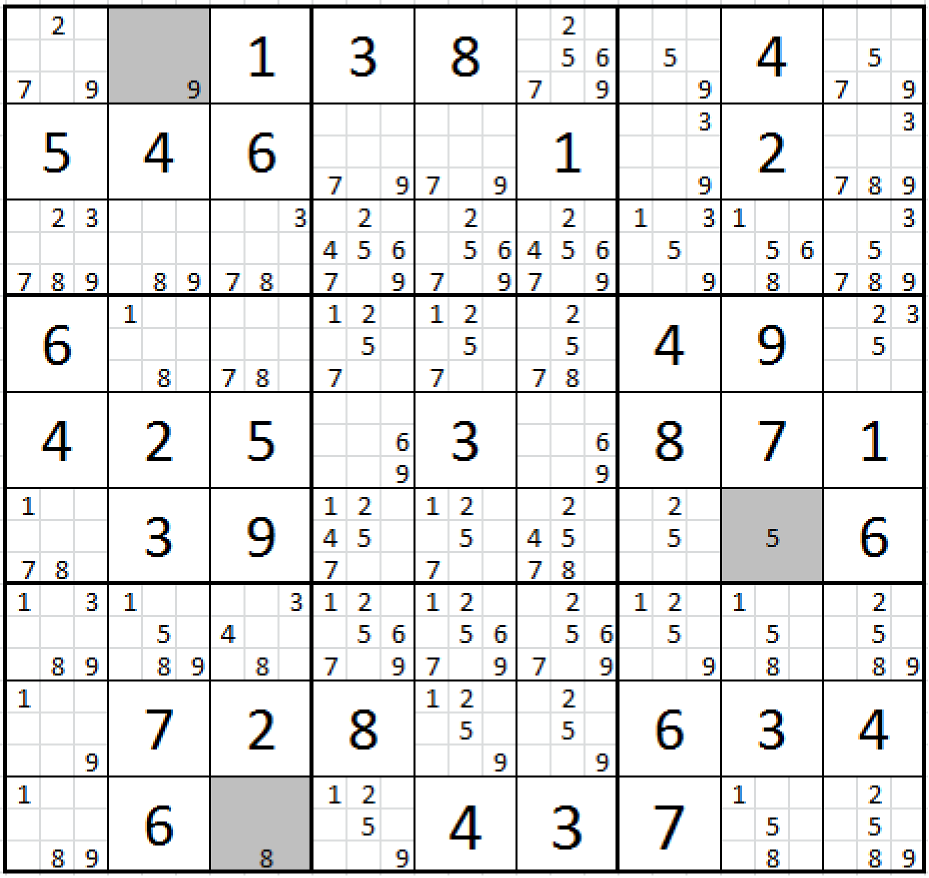
Figura 6 - Exemplos de técnicas de resolução com candidatos já preenchidos



Fonte: Adaptação da Figura 2 de DAVIS (2012).

Na Figura 6podemos ver que os quadrados 38, 44 e 66 possuem um único candidato, logo este deve ser o índice alocado em cada um desses quadrados.

Figura 7 - Unique Missing Candidates já preenchidos



Fonte: Adaptação da Figura 2 de DAVIS (2012).

Ao preenchermos esses índices, outros quadrados passam a ter apenas um candidato possível, fazendo assim com que novos índices sejam determinados.

Naked single – Técnica muito similar a anterior, mas que só pode ser aplicada quando descrito todos os possíveis candidatos a um quadrado. Para todo quadrado já preenchido inicialmente em um jogo de Sudoku, imagine a lista de todos os candidatos de 1 a 9 em cada quadrado não preenchido. Ou seja, para cada quadrado n já preenchido com um índice k, elimine a possibilidade deste índice em todos os quadrados pertencentes aos mesmos blocos que n. Os valores remanescentes representam os possíveis índices que podem ser inseridos em cada quadrado.

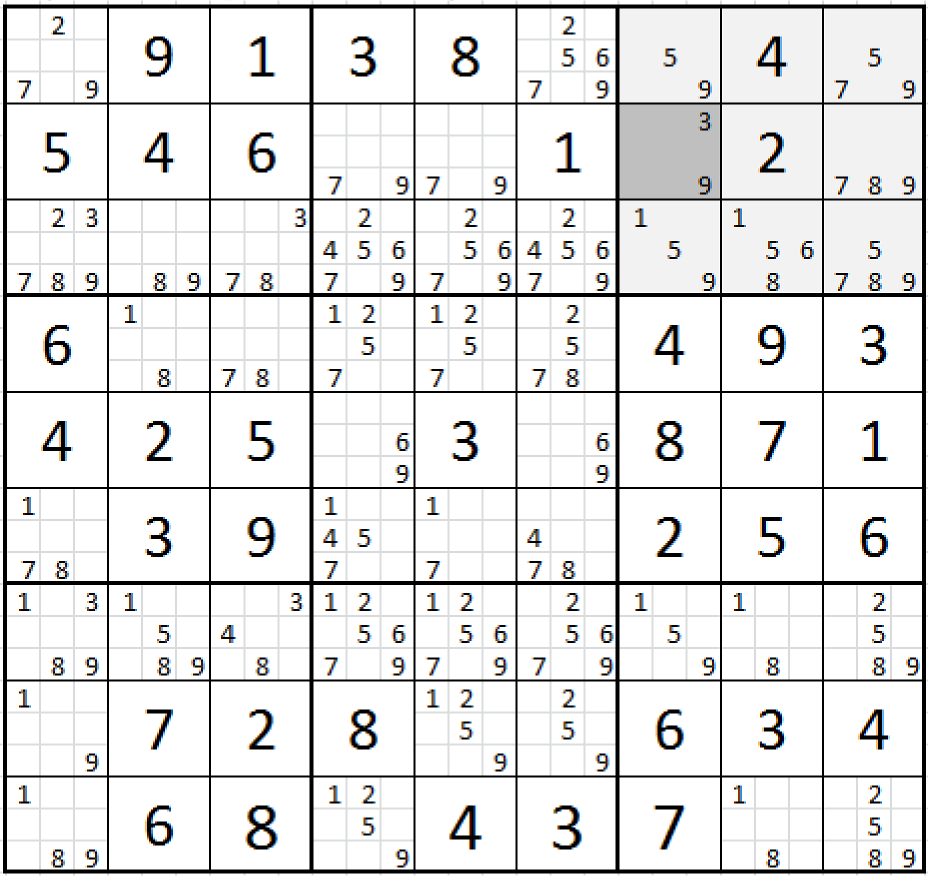
Se após todas as eliminações de candidatos impossíveis sobrar apenas um valor, chamamos esta situação de *naked single*, onde este único valor remanescente é o índice que deve ser alocado no quadrado referido.

No exemplo da Figura 6, vemos um jogo de Sudoku onde os números maiores representam os valores que já estavam preenchidos inicialmente. Os quadrados que ainda não tinham valores determinados estão preenchidos com os possíveis candidatos após as eliminações usando os índices já preenchidos. Após essas eliminações, notamos que o jogo contém três *naked singles*, os quadrados 38 e 66 que devem ser preenchidos com o índice 2, e o quadrado 44que deve ser preenchido com o índice 7.

Uma vez preenchidos esses *naked singles*, outros *naked singles* aparecerão, como vemos no exemplo da Figura 7. Conseguimos eliminar o candidato 2 do quadrado 75, ficando assim determinado que esse quadrado deve ser preenchido com o índice 8. Analogamente, podemos preencher o quadrado 2 com o índice 9 e o quadrado 53 com o índice 5. E, após isso, novos *naked singles* aparecerão.

Hidden singles – Às vezes, existe uma única possibilidade para determinado quadrado baseado em análises feitas de acordo com os quadrados já preenchidos, mas apenas a eliminação de candidatos analisando linhas, colunas e blocos não torna este único candidato óbvio. Esta técnica é similar a já descrita *squeezing*, a não ser pelo fato de que *hidden singles* só podem ser identificados quando os candidatos a índices estão preenchidos nos quadrados vazios.

Figura 8 - Exemplo de hidden single



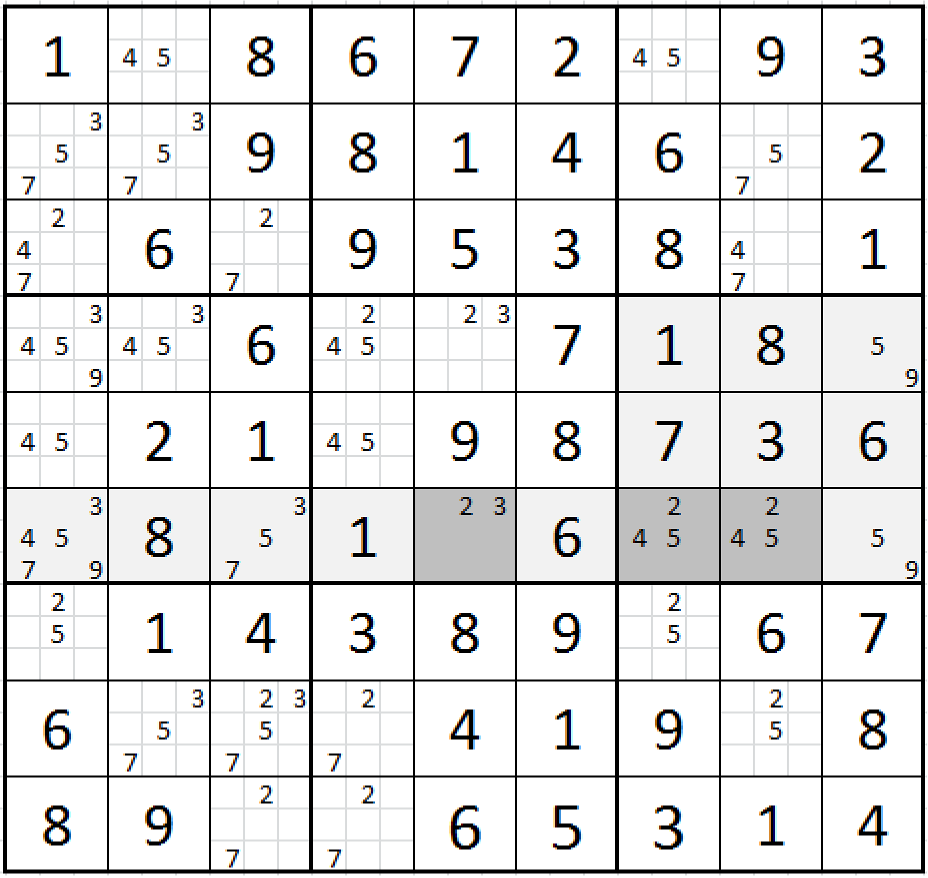
Fonte: Adaptação da Figura 2 de DAVIS (2012).

Usemos a Figura 8como exemplo. Há um *hidden single* no quadrado 16, cujo valor deve ser 3. Dizemos que o índice 3 era um *hidden single*, já que sem uma análise mais específica o índice 9 também era um candidato possível. Porém, se observarmos todo o bloco B_{21} notamos que o 3 não aparece como candidato em nenhum outro quadrado deste bloco. Logo, o 3 deve ocupar o quadrado 16.

Um modo de encontrar candidatos escondidos é buscar em todos os blocos um candidato que só apareça em um dos quadrados.

Locked candidates – Esta situação ocorre quando um índice que deve estar em uma linha ou coluna só pode aparecer em um dos blocos que intersectam essa linha ou coluna. Logo, esse candidato deve ser eliminado de todos os quadrados remanescentes desse bloco e das interseções com a linha e coluna onde o índice foi alocado. Vejamos alguns exemplo:

Figura 9 - Exemplo de Locked Candidates

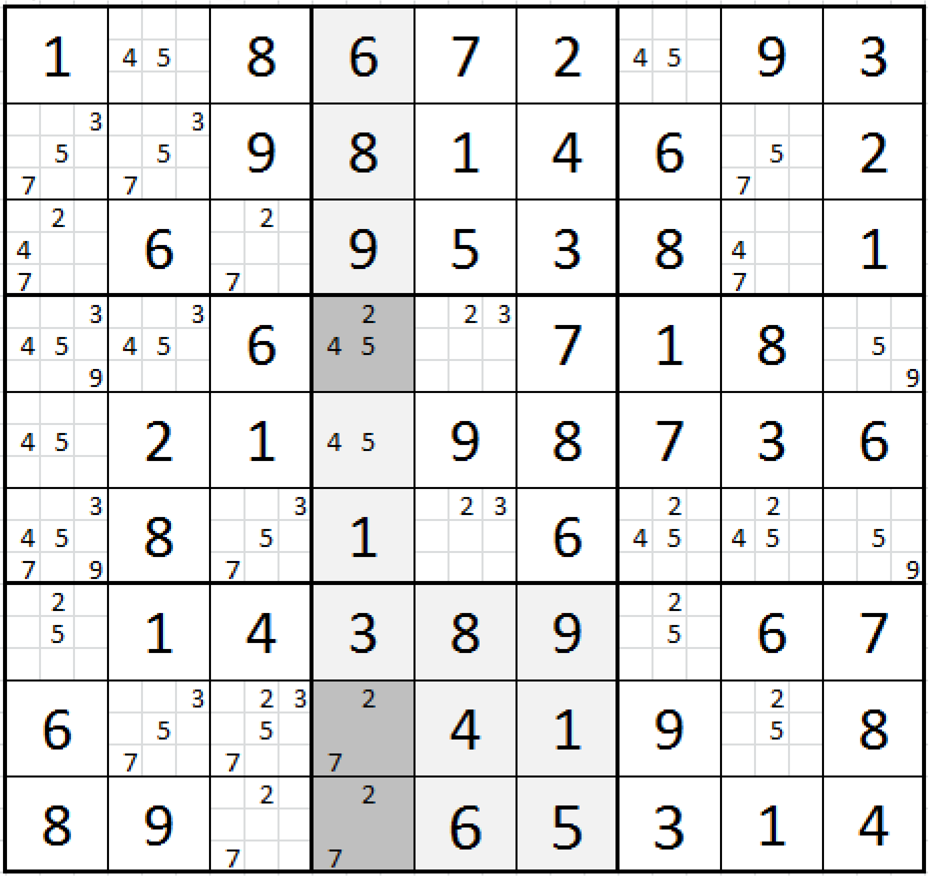


Fonte: Adaptação da Figura 3 de DAVIS (2012).

Na Figura 9estão ilustradas situações de *locked candidates*.

O bloco B_{24} deve conter o índice 2, e as únicas posições possíveis são nos quadrados 52 e 53, ambos também pertencentes ao bloco B_6. Logo, o índice 2 não pode ser candidato em nenhum outro quadrado do bloco B_6, inclusive no quadrado 50 (que agora sabemos que deve ser preenchido com o índice 3).

Figura 10 - Exemplo de Locked candidate



Fonte: Adaptação da Figura 3 de DAVIS (2012).

Analogamente, na Figura 10, o índice 2 deve aparecer no bloco B_{26}, no quadrado 67 ou 76, ambos também pertencentes ao bloco B_{13}. Com isso, o índice 2 não poderá ser candidato em mais nenhum quadrado do bloco B_{13}, incluindo o quadrado 31.

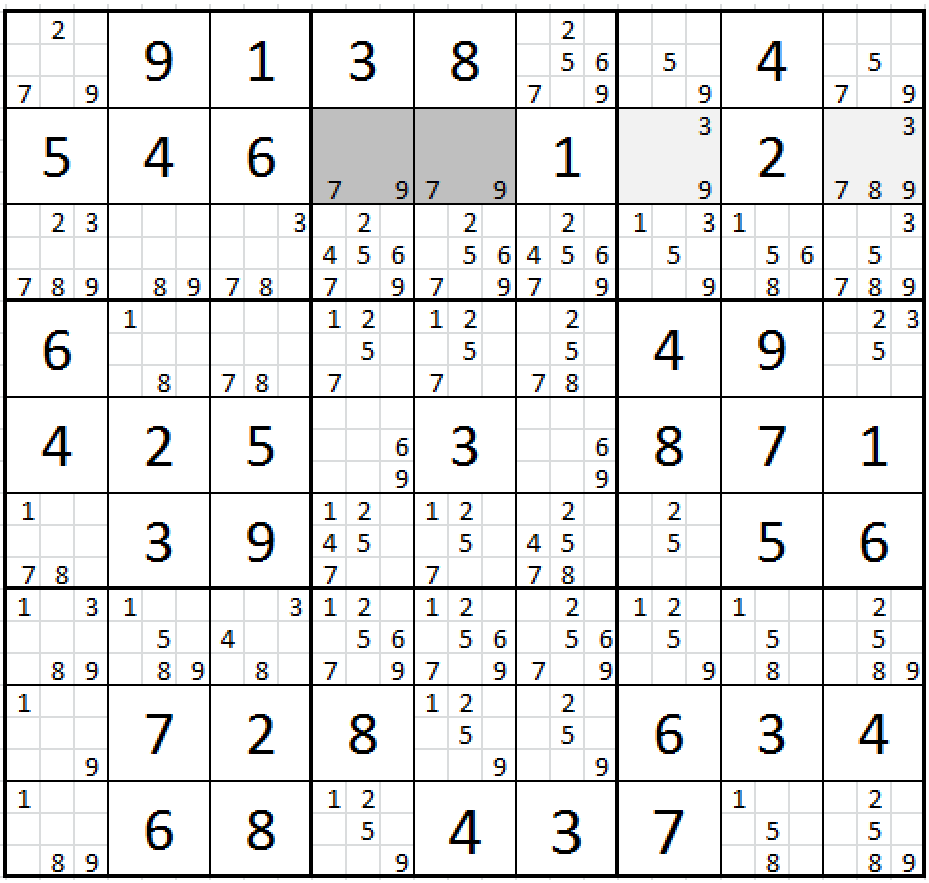
Temos também que o índice 5 tem que aparecer no bloco B_{18}, e os únicos quadrados possíveis são 36 e 54, ambos também pertencentes ao bloco B_{24}. Portanto, o índice 5 não poderá ser candidato em mais nenhum quadrado do bloco B_{24}, incluindo os quadrados 52 e 53.

Naked hidenpairs, triplets, quadsetc – São similares ao caso *naked singles*, exceto pelo fato de ter somente um candidato em cada quadrado. Agora teremos os mesmos dois candidatos em dois quadrados, os mesmos três candidatos em três quadrados e assim por diante.

Os *naked pairs* ocorrem quando há os mesmos dois candidatos para dois quadrados de um mesmo bloco. Como sabemos que esses candidatos devem ocupar aqueles quadrados em alguma ordem, podemos eliminá-los como possíveis candidatos de qualquer outro quadrado do mesmo bloco.

Analogamente, no caso dos *naked triplets*, temos os três mesmos candidatos para três quadrados do mesmo bloco, e assim por diante.

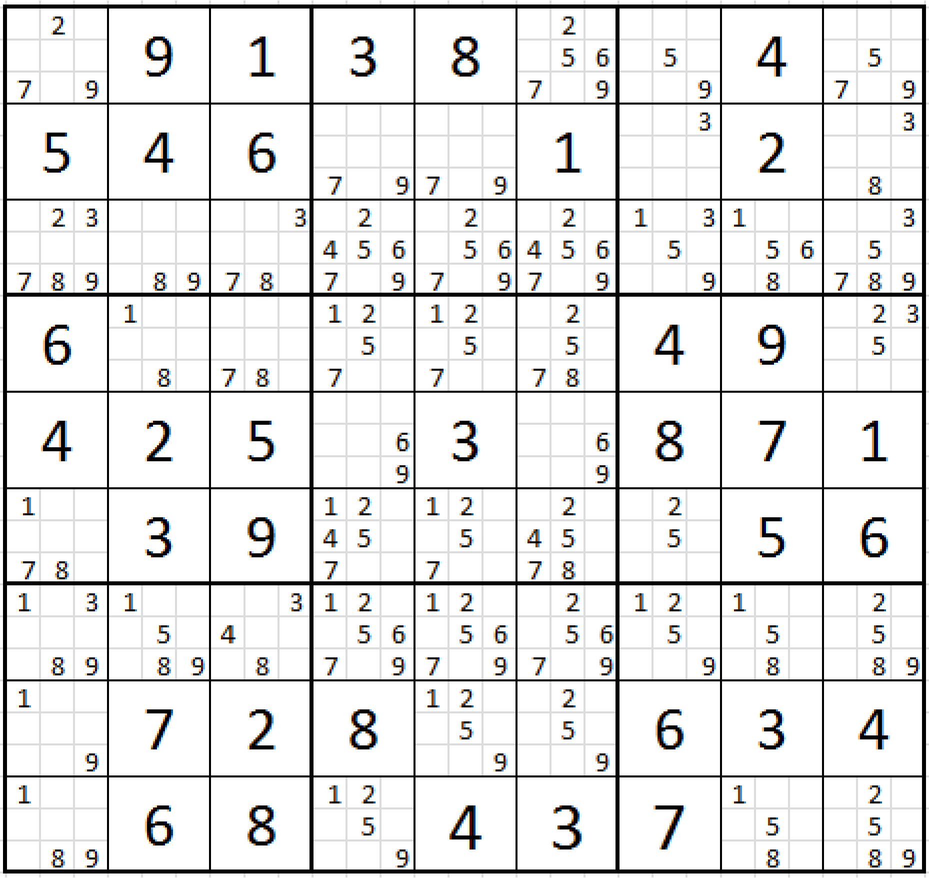
Figura 11 - Exemplo de Naked Pair



Fonte: Adaptação da Figura 2 de DAVIS (2012).

Temos exemplo de *naked pair* nos quadrados 13 e 14 no bloco B_2 naFigura 11. Os índices 7 e 9 são os únicos candidatos possíveis para esses quadrados, logo devem ocupá-los em alguma ordem. Com isso, sabemos que os índices 7 e 9 não poderão ocupar nenhum outro quadrado do bloco B_2. Portanto os candidatos 7 e 9 podem ser eliminados dos quadrados 16 e 18.

Figura 12 - Jogo após eliminação do naked pair



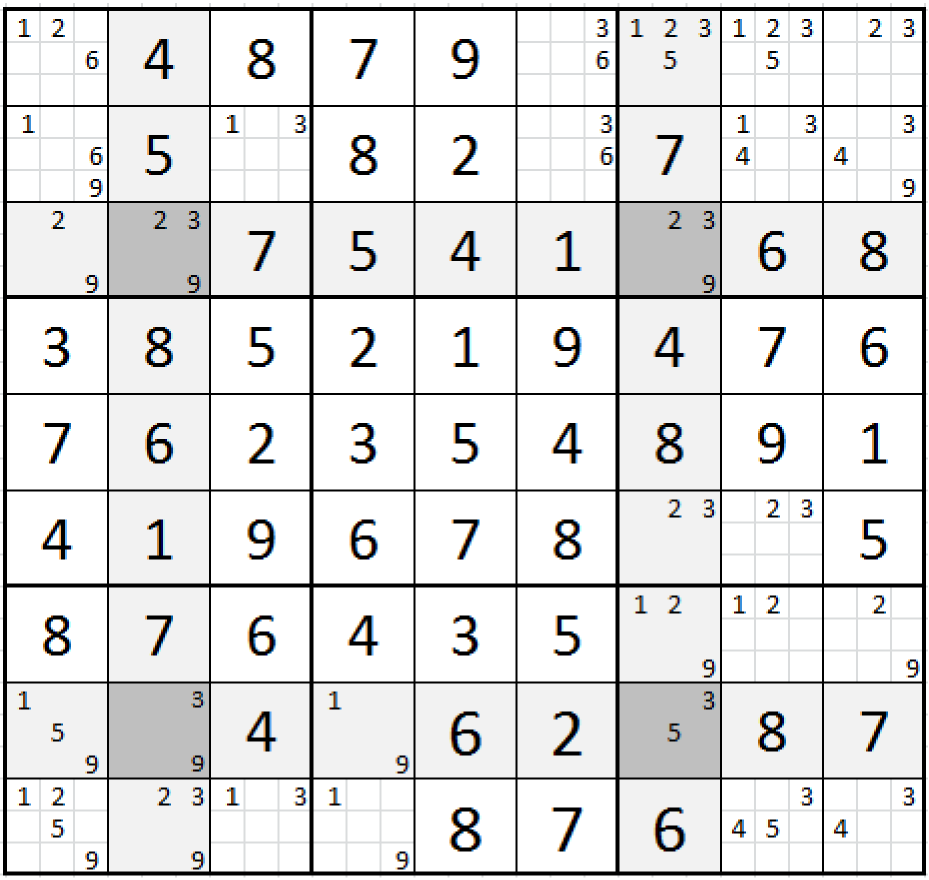
Fonte: Adaptação da Figura 2 de DAVIS (2012).

Após essas eliminações, fica definido o índice 3 para o quadrado 16 e o índice 8 para o quadrado 18.

Esta estratégia, mais tarde, será tratada como *Regra da casa dos pombos*, que generaliza qualquer estratégia que envolva um único bloco.

X-wings e Swordfish – Uma combinação *x-wing* ocorre quando o mesmo candidato aparece exatamente duas vezes em duas linhas e nas mesmas colunas dessas duas linhas.

Figura 13 - Exemplo de X-Wing



Fonte: Adaptação da Figura 7 de DAVIS (2012).

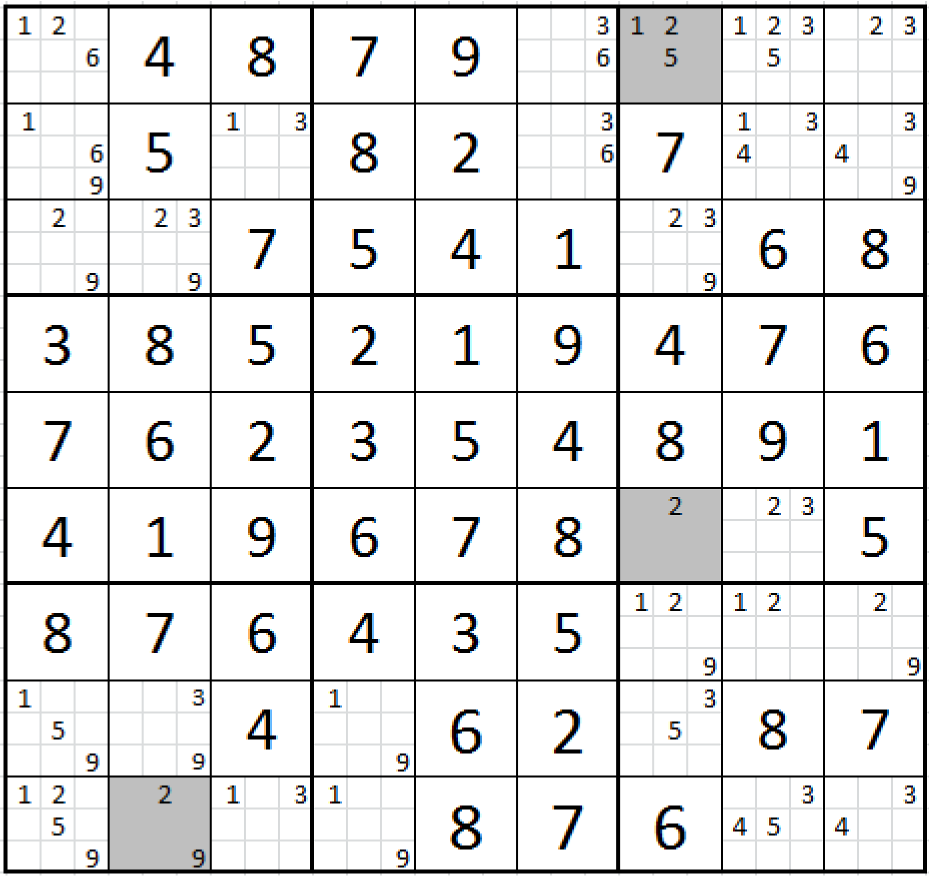
Observe a Figura 13, onde aparece uma configuração *x-wing* nas linhas B_3 e B_8 e colunas B_{11} e B_{16}.

Os quadrados onde aparecem a x-wings formam um retângulo, então um par de vértices opostos do retângulo deve conter aquele candidato.

Com isso, no exemplo da Figura 13, o índice 3 deve estar ou nos quadrados 20 e 70 ou nos quadrados 25 e 65. O formato de X deu nome a estratégia.

Em qualquer dessas situações, nenhum outro quadrado da linha ou coluna que contenham os vértices do retângulo pode conter aquele candidato. No exemplo, podemos concluir que o índice 3 não pode ser candidato nos quadrados 7, 52 e 74. Sendo assim, eliminando o índice 3 dos quadrados em que ele não é mais um candidato possível, temos:

Figura 14 - Jogo após eliminação de índices pelo método x-wings



Fonte: Adaptação da Figura 7 de DAVIS (2012).

Uma *swordfish* é exatamente igual uma *x-wing*, exceto pelo fato de que deve ocorrer em três linhas/colunas com três candidatos nessas linhas/colunas.

3 TEOREMAS E COROLÁRIOS.

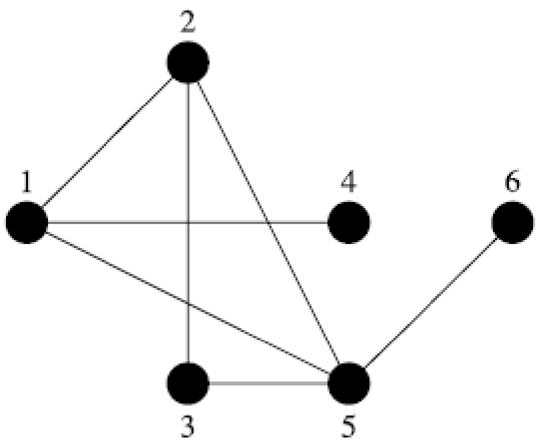
Neste capítulo apresentaremos resultados de grafos e programação linear que serão utilizados no decorrer do trabalho. Como referência, utilizamos ROSS(2000), FEOFILOFF(2011) e MENEZES (2006).

3.1 Grafos

Um grafo consiste em um conjunto V de elementos chamados vértices (ou nós) e um conjunto de pares de vértices distintos chamados arestas (ou pontes, ou arcos). Usualmente representados como um sistema gráfico, onde círculos representam os vértices e linhas representam as arestas.

Representamos o grafo $V = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $A = \{(1,2),\ (1,4),\ (1,5),\ (2,3),\ (2,5),\ (3,5),\ (5,6)\}$ como no esquema a seguir.

Figura 15 - Representação de um grafo

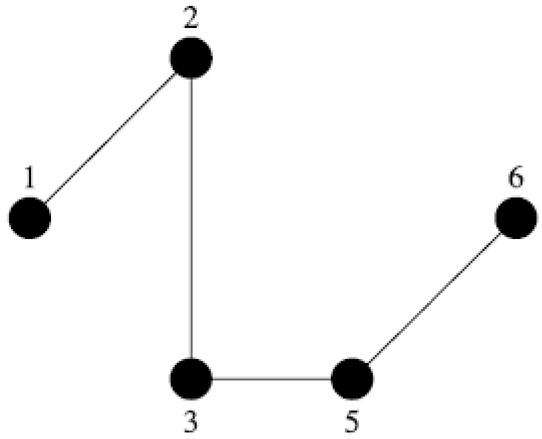


Fonte: ROSS, 2000.

As arestas não têm direção, portanto os pares (1,4) e (4,1) representam a mesma ligação.

Dada uma sequência de vértices $i, i_1, i_2, \dots, i_k, j$, cujos pares (i, i_1), (i_1, i_2), $(i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k), (i_k, j)$ são todos pontes, é chamada caminho do vértice i ao vértice j.

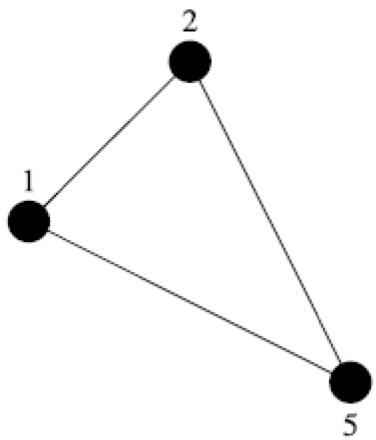
Figura 16 - Exemplo de caminho entre dois vértices



Fonte: ROSS, 2000.

Definição: Um caminho $i, i_1, i_2, \dots, i_k, i$ onde voltamos para o vértice de partida e onde todas as pontes (i, i_1), (i_1, i_2), $(i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k), (i_k, i)$ são distintas, é chamado de grafo ciclo.

Figura 17 – Exemplo de grafo ciclo



Fonte: ROSS, 2000.

Dizemos que vértices i e j estão conectados ou que há uma cadeia entre estes vértices, se$i = j$ ou se há um caminho entre i e j. Para vértices conectados usamos a notação $i \leftrightarrow j$.

Definição: Um grafo é conexo se, para qualquer par $\{v, w\}$ de seus vértices, existe um caminhocom extremos v e w.

Definição: um subgrafo de um grafo G é um grafo cujo conjunto de vértices é um subconjunto do conjunto de vértices G e o conjunto de arestas é um subconjunto do conjunto de arestas de G.

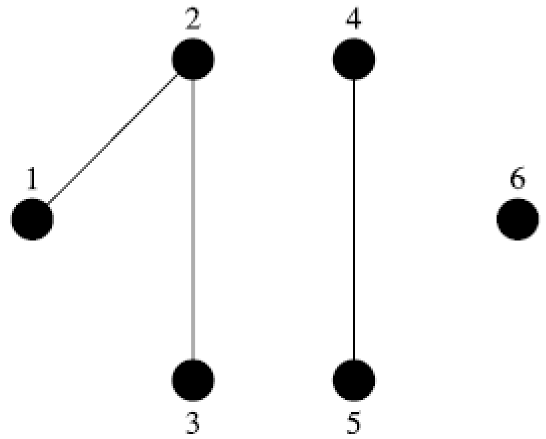
Definição: Um subgrafo conexo H de um grafo G é maximal (com relação à propriedadede ser conexo) se não faz parte de um subgrafo conexo maior, ou seja, se nãoexiste grafo conexoH' tal que$H \subset H' \subseteq G$.

Definição: Um componente de um grafo G é qualquer subgrafo conexo maximal de G.

Proposição 1 – Se $i \leftrightarrow j$ e $j \leftrightarrow k$ então $i \leftrightarrow k$.

Se i e j se comunicam, dizemos que estão no mesmo componente. Isto é uma consequência da proposição acima para quaisquer dois componentes idênticos ou disjuntos.

Figura 18 - Grafo com três componentes

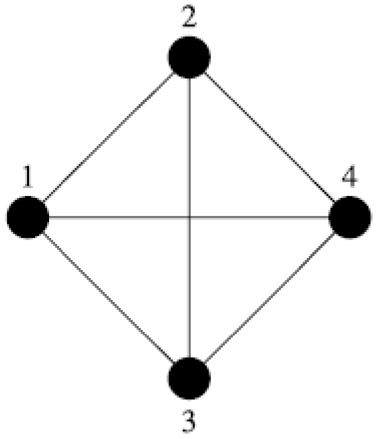


Fonte: ROSS, 2000.

Definição: Um grafo com um único componente é dito conexo.

Definição: Um grafo é dito ser completo quando há uma aresta entre cada par de seus vértices.

Figura 19 - Exemplo de grafo completo com quatro vértices

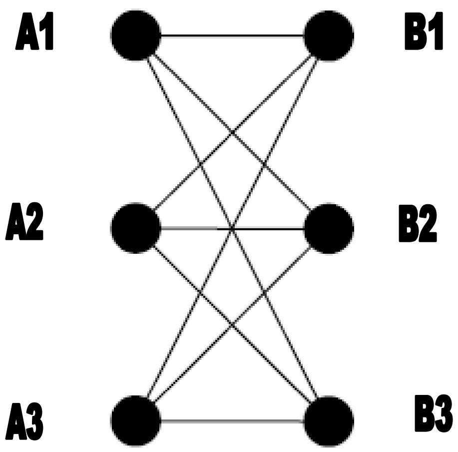


Fonte: ROSS, 2000.

Definição: Os vértices de uma mesma ponte são chamados *adjacentes* ou *vizinhos*. Analogamente, duas pontes são adjacentes ou vizinhas se possuem um vértice em comum.

Definição: Um grafo é chamado *bipartido* quando há uma bipartição dos vértices do grafo em dois conjuntos $\{A, B\}$ de modo que toda ponte tenha um vértice em A e outro em B. Um grafo $\{A, B\}$ bipartido é completo se todo vértice de A é adjacente a todos os vértices de B.

Figura 20 - Exemplo de grafo bipartido completo



Fonte: Adaptada de ROSS, 2000.

Definição: A vizinhança de um vértice v em um grafo G é o conjuntode todos os vizinhos de v, ou seja, conjunto de todos os vértices que fazem ponte com o vértice v.

Definição: Um emparelhamento (*matching*) é um conjunto de arestas duas a duas não adjacentes.

Definição: Um emparelhamento M é perfeito se cada vértice do grafo é vértice de algum elemento de M.

Teorema de Hall–Seja G um grafo bipartido com bipartição (A, B). Então há um emparelhamento $M \subseteq G$ que satura A se e somente se $|N(X)| \geq |X|$ para todo $X \subset A$. Onde $N(X)$ representa a vizinhança de X.

3.2**Programação Linear**

A programação linear é uma técnica que permite a resolução de problemas de otimização, onde as funções analisadas são funções afins e as restrições são desigualdades lineares. Ou seja, maximizar ou minimizar funções do tipo:

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + d$$

Sujeita a desigualdade do tipo $x \geq 0$. Onde $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Trabalharemos apenas com o caso em que $d = 0$.

Consideremos os números inteiros m e n tais que $n > m > 0$. Dados uma matriz numérica com coeficientes reais A, $m \times n$, e vetores $b \in R^m$ e$c \in R^n$, o seguinte problema de otimização:

$$\begin{cases} \min C^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

é chamado problema de Programação Linear no formato padrão. Onde C^T é a matriz transposta de C.

O conjunto $X = \{x \in R^n; Ax = b, x \geq 0\}$ é chamado conjunto viável e um ponto $x \in X$ é denominado ponto viável.

Quando existe o número $v(P) = \min\{c^T x; x \in X\}$ é denominado valor ótimo.

O conjunto $X(P) = \{x \in X;\ c^T x = v(P)\}$ é chamado conjunto de soluções ótimas e um ponto $x \in X(P)$ é denominado solução ótima.

Vale ressaltar que as denominações e conclusões são análogas para o problema de maximização.

Um poliedro convexo fechado ou, simplesmente, poliedro, é um conjunto formado pela interseção de um número finito de semi-espaços fechados. Um semi-espaço em uma dimensão é uma semirreta; em duas dimensões é um semi-plano. Dois semi-espaços complementares dividem o espaço.

Definição: poliedro é um conjunto formado pela interseção de um número finito de semi-espaços fechados.

Definição: Seja S um subconjunto de R^{n}. Dizemos que um conjunto S é um politopo, quando Sé um poliedro limitado.

Proposição 2: Seja S um subconjunto de R^n. Se S é um poliedro, então Sé um conjunto convexo e fechado.

Proposição 3: Considere o Problema de Programação Linear Padrão. O conjunto de soluções viáveis X é um poliedro, convexo e fechado.

Dada uma matriz A, $m \times n$, $0 < m < n$, e um vetor $b \in R^m$. Considere um sistema de equações lineares $Ax = b$, tal que o $posto(A) = m$. Ou seja, a matriz A possui m linhas (ou colunas) linearmente independentes.

(a) Uma matriz B, $m \times m$, obtida de A formada por $m$colunas linearmente independentes é chamada matriz base de A.

(b) As variáveis correspondentes a esta matriz base B, $m \times m$, no sistema $Ax = b$, chamam-se varáveis básicas. E as demais $n - m$ variáveis são chamadas variáveis não básicas. O vetor de variáveis básicas é representado por x_B e o vetor de variáveis não básicas por x_N.

(c) Obtemos um sistema compatível, com m equações e m variáveis, anulando-se as $n - m$ variáveis não básicas. Resolvendo o sistema linear $Bx_B = b$, quando $x_N = 0$, determinamos uma solução básica.

(d) Uma solução básica onde as variáveis básicas são todas não negativas chama-se solução básica viável. Caso exista ao menos uma variável básica nula denomina-se solução básica viável degenerada.

Exemplo: Vamos analisar as soluções básicas e básicas viáveis de um sistema na forma matricial $Ax = b$.

Considere a matriz A. Como:

$$A=\begin{bmatrix} 1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\ 1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$x = (x_{1,1}, \dots, x_{1,4}, x_{2,1}, \dots, x_{2,4}, \dots, x_{4,1}, \dots, x_{4,4})$$

$$b = (1,1,1,1,1,1,1,1,0,0)$$

O sistema$Ax = b$ matricialmente é dado por:

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\ 1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_{1,1}\\ x_{1,2}\\ x_{1,3}\\ x_{1,4}\\ x_{2,1}\\ x_{2,2}\\ x_{2,3}\\ x_{2,4}\\ x_{3,1}\\ x_{3,2}\\ x_{3,3}\\ x_{3,4}\\ x_{4,1}\\ x_{4,2}\\ x_{4,3}\\ x_{4,4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\0\\0 \end{vmatrix}$$

Mais à frente, em nossa análise, será interessante comparar o posto da matriz A com o da matriz A'dada por:

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

Note que a matriz A' é obtida a partir da matriz A pela eliminação das duas últimas linhas.

Para determinar o posto da matriz A, vamos operar com as linhas da matriz a fim de determinar vetores linearmente independentes.

A linha 1 foi substituída pela soma das linhas 1 a 4 menos a soma das linhas 5 a 8.

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{vmatrix}
x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{1,4} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{2,4} \\ x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \\ x_{3,4} \\ x_{4,1} \\ x_{4,2} \\ x_{4,3} \\ x_{4,4}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0
\end{vmatrix}$$

Agora a linha 5 foi substituída por linha 5 menos a soma das linhas 2, 3 e 4.

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{vmatrix}
x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{1,4} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{2,4} \\ x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \\ x_{3,4} \\ x_{4,1} \\ x_{4,2} \\ x_{4,3} \\ x_{4,4}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0
\end{vmatrix}$$

Note que até aqui operamos somente sobre as oito primeiras linhas. Isso permite que discutamos o posto da matriz A' já que as duas linhas finais que diferenciam a matriz A de A' ainda não foram utilizadas. Note que a matriz A' possui oito linhas, mas uma delas é completamente nula, podemos então desprezá-la e interpretar cada coluna de A' (desconsiderada a primeira componente) como um vetor do $\mathbb{R}^7$. Como o escalonamento gerou os sete vetores da base canônica de $\mathbb{R}^7$ (destacados na matriz acima), vemos que o posto de A' é igual a 7. Vamos prosseguir com o escalonamento para determinar o posto de A. Vamos usar as linhas 9 e 10 para zerar os elementos não nulos respectivamente da primeira e sétima colunas. Feito isso, multiplicamos a quinta linha por -1.

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&1&1&1 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{1,4} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{2,4} \\ x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \\ x_{3,4} \\ x_{4,1} \\ x_{4,2} \\ x_{4,3} \\ x_{4,4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Usaremos agora a quinta linha para zerar os demais termos da sexta coluna.

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&-1&-1&-1&0&-1&-1&-1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&1&1&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0&-1&0&0&-1&-1&0&0&-1&-1 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{1,4} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{2,4} \\ x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \\ x_{3,4} \\ x_{4,1} \\ x_{4,2} \\ x_{4,3} \\ x_{4,4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Analogamente, a matriz A possui 10 linhas, mas uma delas é completamente nula, podemos desprezá-la e interpretar cada coluna de A (desconsiderada a primeira componente) como um vetor do $\mathbb{R}^9$. Como o escalonamento gerou os nove vetores da base canônica de $\mathbb{R}^9$, vemos que o posto de A é igual a 9.

Vamos agora determinar uma solução básica. Para isso, devemos considerar uma matriz quadrada formada por vetores linearmente independentes.

Para essa solução básica, vamos considerar as sete primeiras colunas, a nona e a décima terceira. E, portanto, as variáveis envolvidas serão$x_{1,1}$, $x_{1,2}$, $x_{1,3}$, $x_{1,4}$, $x_{2,1}$, $x_{2,2}$, $x_{2,3}$, $x_{3,1}$ e $x_{4,1}$. O valor zero é atribuído às variáveis não envolvidas. Para determinar suas componentes, devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{1,4} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{3,1} \\ x_{4,1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Ou equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{1,4} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{3,1} \\ x_{4,1} \\ \ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Isto é,

$$\begin{cases} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} = 1 \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} = 1 \\ x_{3,1} = 1 \\ x_{4,1} = 1 \\ x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} = 1 \\ x_{1,2} + x_{2,2} = 1 \\ x_{1,3} + x_{2,3} = 1 \\ x_{1,4} = 1 \\ x_{1,1} = 0 \\ x_{2,3} = 0 \end{cases}$$

Substituindo os valores conhecidos $x_{3,1} = 1$, $x_{4,1} = 1$, $x_{1,4} = 1$, $x_{1,1} = 0$ e $x_{2,3} = 0$, temos:

$$\begin{cases} x_{1,2} + x_{1,3} = 0 \\ x_{2,1} + x_{2,2} = 1 \\ x_{3,1} = 1 \\ x_{4,1} = 1 \\ x_{2,1} + x_{4,1} = 0 \\ x_{1,2} + x_{2,2} = 1 \\ x_{1,3} = 1 \\ x_{1,4} = 1 \\ x_{1,1} = 0 \\ x_{2,3} = 0 \end{cases}$$

Cuja única solução é

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{1,4} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{3,1} \\ x_{4,1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Sendo assim, obtemos uma solução básica dada por

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{1,4} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{2,4} \\ x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \\ x_{3,4} \\ x_{4,1} \\ x_{4,2} \\ x_{4,3} \\ x_{4,4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Porém, como nem todas suas componentes são não negativas, esta não é uma solução básica viável. Note também que se considerarmos apenas as colunas associadas às componentes não nulas, isto é, da segunda a sexta colunas, a nona e a décima terceira da matriz A′, temos sete colunas linearmente independentes, e a solução acima também é básica (mas não viável) do sistema $A'x = 1$. Onde esse 1 corresponde a um vetor cujas coordenadas são todas iguais a 1.

Vamos associar as componentes do vetor x ao preenchimento de um bloco de um jogo de Sudoku 4×4 da seguinte maneira: $x_{p,k} = 1$ indicará que o índice k será colocado no quadrado p e $x_{p,k} = 0$ indicará que o índice k não pode ser colocado no quadrado p. Assim, as soluções básicas viáveis são aquelas que representam um preenchimento possível para o bloco naquele momento do jogo. Para obtermos uma solução básica viável, vamos escolher as colunas linearmente independentes de acordo com um possível preenchimento do bloco em questão. Por exemplo, vamos considerar que teremos 2 atribuído ao primeiro quadrado ($x_{1,2} = 1$); 1, ao segundo ($x_{2,1} = 1$); 3, ao terceiro ($x_{3,3} = 1$) e 4, ao quarto ($x_{4,4} = 1$). Nesse caso, devemos necessariamente escolher as colunas 2, 5, 11 e 16 para compor nosso conjunto de colunas linearmente independentes. Note que para determinar uma solução básica de A, necessariamente teremos que considerar as colunas 1 e 7, pois dentre as demais conseguimos escolher no máximo sete colunas linearmente independentes. Consideremos as colunas de 1 a 7 e as colunas 11 e 16. Observe que elas são linearmente independentes e que

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{1,4} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{3,3} \\ x_{4,4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

é solução do sistema,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{1,4} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{3,3} \\ x_{4,4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Ou equivalentemente

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{1,4} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{3,3} \\ x_{4,4} \\ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Sendo assim, temos:

$$\begin{cases} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} = 1 \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} = 1 \\ x_{3,3} = 1 \\ x_{4,4} = 1 \\ x_{1,1} + x_{2,1} = 1 \\ x_{1,2} + x_{2,2} = 1 \\ x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} = 1 \\ x_{1,4} + x_{4,4} = 1 \\ x_{1,1} = 0 \\ x_{2,3} = 0 \end{cases}$$

Substituindo as variáveis conhecidas $x_{3,3} = 1$,$x_{4,4} = 1$, $x_{1,1} = 0$ e $x_{2,3} = 0$.

$$\begin{cases} x_{1,2} = 1 \\ x_{2,1} = 1 \\ x_{3,3} = 1 \\ x_{4,4} = 1 \\ x_{1,1} = 0 \\ x_{2,2} = 0 \\ x_{2,3} = 0 \\ x_{1,3} = 0 \\ x_{1,4} = 0 \\ x_{1,1} = 0 \\ x_{2,3} = 0 \end{cases}$$

Sendo assim, obtemos a solução básica viável dada por:

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{1,4} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{2,4} \\ x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \\ x_{3,4} \\ x_{4,1} \\ x_{4,2} \\ x_{4,3} \\ x_{4,4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Considere x' solução básica viável de $Ax = b$. Queremos mostrar que x'é solução básica viável de $A'x = 1$(onde o 1 representa um vetor com todas as coordenadas iguais a 1). Note que já sabemos que $x' \geq 0$ e $A'x = 1$**,** já que a matriz A' é justamente formada pelas primeiras linhas de A. Sendo assim, se a solução é válida para o sistema $Ax = b$, é válida para $A'x = 1$. Por ser básica viável de $Ax = b$, as colunas de A correspondentes às componentes não nulas de x' são em número menor ou igual ao posto de A e são linearmente independentes. Além disso, as duas últimas entradas dessas colunas são nulas. Isso porque, as últimas entradas estão associadas às equações que eliminam determinado índice, ou seja, $x_{p,k} = 0$. Consequentemente, as colunas de A' correspondentes às componentes não nulas de

x' também são linearmente independentes. Sendo assim, o conjunto de soluções básicas viáveis de A está contido no conjunto de soluções básicas viáveis de A'.

Definição: Seja S um subconjunto convexo de R^n. Um ponto x em S é denominado ponto extremo de S, quando x não é uma combinação linear convexa de quaisquer dois outros pontos distintos em S.

Proposição 4: Se um problema de programação linear admite solução ótima, então uma solução ótima é atingida em ao menos um ponto extremo do conjunto viável.

Teorema 1:Considere o problema de programação linear. Um ponto viável $x \in X$ é ponto extremo se, e somente se, xé uma solução básica viável.

Definição: Chamamos de matriz duplamente estocástica a matriz cuja soma de todos os elementos de uma linha ou coluna é igual a 1.

Definição: Chamamos de matriz de permutação uma matriz identidade com as linhas ou colunas permutadas. Desse modo, é constituída só por zeros e 1's e em cada linha e cada coluna existe um e um só elemento igual a 1.

Teorema 2: O conjunto de todas as matrizes duplamente estocásticas $n \times n$, é um poliedro convexo cujos vértices são matrizes de permutação.

Vamos considerar um exemplo de problema de programação linear que será útil na discussão que faremos sobre o Sudoku. Usaremos um jogo de Sudoku 4x4, apenas para facilitar os cálculos e compreensão, mas sem perda de generalidade para o caso 9x9 ou outro similar. Considere o problema de maximização

3.3 **Matrizes Duplamente Estocásticas**

$$
\begin{cases}
\max \ x_{p_0,k_0} \\
x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} = 1 \\
x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} = 1 \\
x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} = 1 \\
x_{4,1} + x_{4,2} + x_{4,3} + x_{4,4} = 1 \\
x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} = 1 \\
x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2} = 1 \\
x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3} = 1 \\
x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} + x_{4,4} = 1 \\
x_{1,1} = 0 \\
x_{2,3} = 0 \\
x \geq 0
\end{cases}
\qquad (S1)
$$

Inicialmente, vamos escrever esse problema na forma padrão. Para tanto, considere $c = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, cujas coordenadas são todas nulas, exceto a coordenada correspondente à posição p_0, k_0 que é igual a 1. Considere $x \in R^{16}$ com coordenadas dadas por $x = (x_{1,1}, \ldots, x_{1,4}, x_{2,1}, \ldots, x_{2,4}, \ldots, x_{4,1}, \ldots, x_{4,4})$.

Desse modo, temos $c^t x = x_{p_0,k_0}$. Considere agora a matriz A, como descrita abaixo:

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Cada linha corresponde aos coeficientes das equações descritas no sistema(S1) acima, e cada coluna associa-se a uma componente de $x = (x_{1,1}, \ldots, x_{1,4}, x_{2,1}, \ldots, x_{2,4}, \ldots, x_{4,1}, \ldots, x_{4,4})$.

Seja $b = (1,1,1,1,1,1,1,1,0,0)$.Considere o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{vmatrix}
x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{1,4} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{2,4} \\ x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \\ x_{3,4} \\ x_{4,1} \\ x_{4,2} \\ x_{4,3} \\ x_{4,4}
\end{vmatrix}
=
\begin{matrix}
1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0
\end{matrix}$$

Portanto, o problema pode ser escrito como

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Note que esse sistema é o mesmo analisado no exemplo anterior e que já foram discutidas suas soluções básicas viáveis e sua relação com as soluções básicas viáveis do sistema $A'x = 1,\ x \geq 0$.

Vimos que $(0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1)$ é uma solução básica do sistema, e em especial, também é solução básica viável de $A'x = \mathbf{1},\ x \geq 0$.

Vamos representar esta solução básica viável em uma matriz da forma:

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & x_{2,4} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & x_{3,4} \\ x_{4,1} & x_{4,2} & x_{4,3} & x_{4,4} \end{bmatrix}$$

Sendo assim, temos:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que essa matriz é uma matriz duplamente estocástica. E isso acontecerá com todas as matrizes formadas por soluções básicas viáveis de $A'x = 1$.Sendo assim, as componentes dos extremos do conjunto viável são zeros e 1's. Portanto, o problema só pode ter valores ótimos zeros ou 1.

Além disso, x^* é extremo de $X = \{Ax = b, x \geq 0\}$ e também de $X' = \{A'x = 1, x \geq 0\}$. Por outro lado, todo extremo de X' induz uma matriz duplamente estocástica que também é extremo no conjunto de todas as matrizes duplamente estocásticas.

4 SUDOKU EM ASSOCIAÇÃO COM SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Neste capítulo o objetivo é associar a solução de um jogo de Sudoku a um sistema de equações. Será feita uma interpretação detalhada do referido artigo, a fim de que procedimentos que não são descritos no texto original sejam explicitados neste trabalho.

Como já dito neste trabalho, o Sudoku pode apresentar vários formatos, embora o mais tradicional seja a malha quadrada. Sem perda de generalidade, considerarei nos exemplos e cálculos o jogo clássico no formato quadrado 9x9, podendo ser feitas as mesmas considerações para outros formatos de jogos.

Inicialmente será necessário adotarmos uma notação específica para nos referirmos a cada parte do jogo. A notação adotada será a mesma utilizada em capítulo anterior. Vamos relembrá-la.

- Chamaremos de So conjunto dos n quadrados da malha. Em nosso caso, $n = 81$, pois usaremos uma malha quadrada 9x9.

Figura 21 - Numeração do conjunto S

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81

Fonte: O autor, 2016.

Com isso temos: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 80, 81\}\cdot$.

- O conjunto I será o conjunto dos índices de 1 a m, onde m são os valores que poderão ser preenchidos nos quadrados do conjunto S. Logo, em nosso caso, $m = 9$ e $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,9\}$.

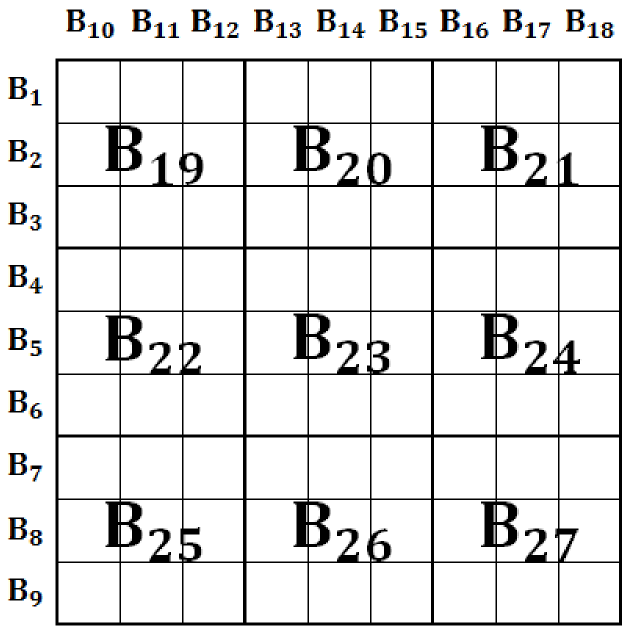
Figura 22 – Exemplo de jogo de Sudoku inicialmente preenchido com alguns índices.

	4	1			6		2	9
3			7	9				
		9				3		8
8			6		4	2	9	
	7			5			6	
	3	6	1		8			7
4		3				9		
				3	2			4
6	5		4			7	3	

Fonte: http://www.theguardian.com/lifeandstyle/2013/mar/04/sudoku-2437-easy.

- O conjuntoβ será o conjunto dos blocos, onde em cada bloco haverá exatamente m quadrados. Esses blocos são as linhas, colunas e quadrados 3x3, onde, segundo as regras do jogo, cada índice de 1 a 9 só pode aparecer uma única vez. Com isso, temos 27 blocos (9 linhas, 9 colunas e 9 quadrados 3x3), com a seguinte numeração adotada:

Figura 23 - Sudoku com numeração dos blocos



Fonte: O autor, 2016.

- Haverá também o conjunto A das atribuições iniciais, que são os quadrados que já vêm preenchidos no início do jogo. O conjunto A será $A = \{(p_i, k_i), i = \{1,2,3, \ldots, r\}\}$, onde ao $p_i \in S$ foi atribuído o índice $k_i \in I$.

Usando o jogo da Figura 22como referência, podemos representar alguns dos elementos do conjunto A, como: $A = \{(13,7), (48,6), (68,3), \ldots\}$.

Neste contexto, o objetivo do jogo é atribuir um índice de I para cada um dos quadrados remanescentes de S, de forma que em cada $B_i \in \beta$ tenha um conjunto completo de índices. Para que se tenha um jogo de Sudoku válido é preciso que se tenha apenas uma solução condizente com as atribuições iniciais.

A solução de um jogo de Sudoku pode ser representada como a única solução 0-1 para um conjunto específico de equações lineares. Sendo assim, definiremos $m.n$ variáveis $x_{p,k}$, onde m é a quantidade de índices que podem ser usados e n a quantidade de quadrados na malha. Teremos $x_{p,k} = 1$ se o índice k é atribuído ao quadrado p, e $x_{p,k} = 0$ caso contrário. Para solucionar o Sudoku desejado as variáveis $x_{p,k}$ devem satisfazer o seguinte conjunto de restrições.

A regra do jogo que se refere ao fato de que cada quadrado contém exatamente um índice pode ser representada matematicamente por:

$$\sum_{k \in I} x_{p,k} = 1, p \in S \qquad (1)$$

A equação acima garante o preenchimento de cada quadrado com um único índice de I. Como são 81 quadrados, este primeiro somatório nos dá 81 equações, uma para cada quadrado. Mesmo os quadrados já preenchidos têm uma equação correspondente.

A equação (1) fixa um dos quadrados e testa todos os índices. Como este somatório tem como resultado 1 e buscamos apenas soluções do tipo 0-1, sabemos que o quadrado p usado na equação será preenchido por exatamente um dos índices do conjunto I.

Fixado o quadrado p a equação fica:

$$x_{p,1} + x_{p,2} + x_{p,3} + x_{p,4} + x_{p,5} + x_{p,6} + x_{p,7} + x_{p,8} + x_{p,9} = 1$$

A segunda condição a ser atendida é:

$$\sum_{p \in B_i} x_{p,k} = 1, B_i \in \beta, k \in I \qquad (2)$$

A equação (2) garante que dentro de um mesmo bloco cada quadrado seja preenchido com apenas um dos índices de I.

Fixado um bloco $B_i \in \beta$ cada um dos índicesé testado em cada um dos quadrados pertencentes àquele bloco.

Fixando, por exemplo, o bloco B_{23} teríamos 9 equações do tipo:

$$x_{31,k} + x_{32,k} + x_{33,k} + x_{40,k} + x_{41,k} + x_{42,k} + x_{49,k} + x_{50,k} + x_{51,k} = 1$$

Uma equação para cada índice.

No caso de um jogo9×9, temos 27 blocos. Com isso, teremos 9 equações para cada bloco, num total de 243 equações.

A terceira condição a ser atendida é:

$$x_{p_i,k_i} = 1, \qquad i = 1,2,3, \dots, r \qquad (3)$$

A equação(3) corresponde às atribuições iniciais, ou seja, os quadrados com índices já preenchidos que devem ser respeitados e que com isso nos dá a solução de algumas das variáveis do sistema.

Usaremos o exemplo a seguir para aplicar algumas destas equações de nosso sistema.

Figura 24 - Jogo de Sudoku com as atribuições iniciais

	4						6	8
7					5	3		
		9		2				
3			5					7
		1	2	6	4	9		
2					7			6
				5		7		
		6	3					1
4	8						3	

Fonte: O autor, 2016.

O sistema completo de um jogo 9×9 é formado inicialmente por 729 variáveis, já que são 81 quadrados e 9 possibilidades de índices para cada um deles. Obviamente, após analisarmos as atribuições iniciais há uma significante redução de variáveis, mas a princípio todas elas fazem parte do sistema.

Aqui não analisaremos todas as equações do sistema. Enfocaremos apenas aquelas que interferem na busca da solução para o quadrado escolhido.

Usaremos as equações para determinar o índice em algum dos quadrados vazios.

Fixemos o quadrado 38 como o quadrado a ser preenchido, podendo, eventualmente, na resolução das equações determinar o índice de alguns outros quadrados.

De acordo com equação(1) fixamos um dos quadrados e testaremos cada um dos índices. Este somatório nos dá uma equação para cada quadrado, ou seja, 81 equações. Mas estamos buscando apenas a solução para o quadrado 38, logo fixando o quadrado número 38, temos por(1):

$$\sum_{k \in I} x_{38,k} = 1$$

$$x_{38,1} + x_{38,2} + x_{38,3} + x_{38,4} + x_{38,5} + x_{38,6} + x_{38,7} + x_{38,8} + x_{38,9} = 1 \qquad (4)$$

Apenas com essa equação ainda não é possível chegar a nenhuma conclusão. Passemos então para a equação(3) que nos dá todos os valores já preenchidos.

De(3)temos:

$$\begin{aligned} x_{2,4} &= x_{8,6} = x_{9,8} = x_{10,7} = x_{15,5} = x_{16,3} = x_{21,9} = x_{23,2} = x_{28,3} = x_{31,5} = x_{36,7} = x_{39,1} \\ &= x_{40,2} = x_{41,6} = x_{42,4} = x_{43,9} = x_{46,2} = x_{51,7} = x_{54,6} = x_{59,5} = x_{61,7} \\ &= x_{66,6} = x_{67,3} = x_{72,1} = x_{73,4} = x_{74,8} = x_{80,3} = 1 \end{aligned}$$

São 27 quadrados já preenchidos neste jogo, logo temos 27 variáveis com resultado 1.

Ao obter as atribuições iniciais eliminamos não só as 27 variáveis acima determinadas, mas outras 8 para cada uma delas.

Por exemplo, ao obtermos a informação $x_{2,4} = 1$, sabemos que o quadrado de número 2 está preenchido com o índice 4, o que nos permite concluir pela equação(1)que este quadrado não poderá ser preenchido com nenhum dos outros índices, logo, se $x_{2,4} = 1$, temos que:

$$x_{2,1} = x_{2,2} = x_{2,3} = x_{2,5} = x_{2,6} = x_{2,7} = x_{2,8} = x_{2,9} = 0.$$

Com isso eliminamos 9 variáveis do nosso sistema. Como temos 27 atribuições iniciais, eliminaremos um total de 243 variáveis só com essas informações.

Como não podemos tirar mais nenhuma conclusão com a equação(1), passemos agora para a equação(2). De acordo com a equação(2), fixamos um bloco ao qual o quadrado pertence e testamos cada índice em todos os quadrados daquele bloco.

Tomando o quadrado 38 como referência, temos três blocos aos quais ele pertence: B_5, B_{11} e B_{22}. De acordo com a Figura 21 e Figura 23,podemos ver que o bloco B_5 é formado pelos quadrados 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44 e 45; bloco B_{11} é formado pelos quadrados 2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, 65 e 74, e o bloco B_{22} é formado pelos quadrados 28, 29, 30, 37, 38, 39, 46, 47 e 48.

Fixemos, primeiramente, o bloco B_5. Com isso, temos que:

$$\sum_{p \in B_5} x_{p,k} = 1, k \in I$$

Teremos 9 equações, uma para cada índice.

$$\sum_{p \in B_5} x_{p,1} = 1 \quad \sum_{p \in B_5} x_{p,2} = 1 \quad \sum_{p \in B_5} x_{p,3} = 1$$
$$\sum_{p \in B_5} x_{p,4} = 1 \quad \sum_{p \in B_5} x_{p,5} = 1 \quad \sum_{p \in B_5} x_{p,6} = 1$$
$$\sum_{p \in B_5} x_{p,7} = 1 \quad \sum_{p \in B_5} x_{p,8} = 1 \quad \sum_{p \in B_5} x_{p,9} = 1$$

Tomemos, como exemplo, as três primeiras equações que fixam o bloco B_5 e os índices 1, 2 e 3, respectivamente:

$$\sum_{p \in B_5} x_{p,1} = 1 \quad \sum_{p \in B_5} x_{p,2} = 1 \quad \sum_{p \in B_5} x_{p,3} = 1$$

$$x_{37,1} + x_{38,1} + x_{39,1} + x_{40,1} + x_{41,1} + x_{42,1} + x_{43,1} + x_{44,1} + x_{45,1} = 1$$
$$x_{37,2} + x_{38,2} + x_{39,2} + x_{40,2} + x_{41,2} + x_{42,2} + x_{43,2} + x_{44,2} + x_{45,2} = 1$$
$$x_{37,3} + x_{38,3} + x_{39,3} + x_{40,3} + x_{41,3} + x_{42,3} + x_{43,3} + x_{44,3} + x_{45,3} = 1$$

Mas como já sabemos que $x_{39,1} = 1$ e $x_{40,2} = 1$, temos que:

$$x_{37,1} + x_{38,1} + 1 + x_{40,1} + x_{41,1} + x_{42,1} + x_{43,1} + x_{44,1} + x_{45,1} = 1$$
$$x_{37,1} + x_{38,1} + x_{40,1} + x_{41,1} + x_{42,1} + x_{43,1} + x_{44,1} + x_{45,1} = 0$$

$$x_{37,2} + x_{38,2} + x_{39,2} + 1 + x_{41,2} + x_{42,2} + x_{43,2} + x_{44,2} + x_{45,2} = 1$$
$$x_{37,2} + x_{38,2} + x_{39,2} + x_{41,2} + x_{42,2} + x_{43,2} + x_{44,2} + x_{45,2} = 0$$

Logo, como buscamos apenas soluções da forma 0-1, temos que:

$$x_{37,1} = \boldsymbol{x_{38,1}} = x_{40,1} = x_{41,1} = x_{42,1} = x_{43,1} = x_{44,1} = x_{45,1} = 0$$
$$x_{37,2} = \boldsymbol{x_{38,2}} = x_{39,2} = x_{41,2} = x_{42,2} = x_{43,2} = x_{44,2} = x_{45,2} = 0$$

Agindo de maneira análoga, neste mesmo bloco B_5, notaremos que os quadrados 41, 42 e 43 já estão preenchidos com os índices 6, 4 e 9 respectivamente. Portanto, como temos:

$$x_{40,2} = x_{41,6} = x_{42,4} = x_{43,9} = 1$$

Concluímos que:

$$x_{37,1} = x_{37,2} = x_{37,6} = x_{37,4} = x_{37,9} = 0$$
$$x_{38,1} = x_{38,2} = x_{38,6} = x_{38,4} = x_{38,9} = 0$$
$$x_{44,1} = x_{44,2} = x_{44,6} = x_{44,4} = x_{44,9} = 0$$
$$x_{45,1} = x_{45,2} = x_{45,6} = x_{45,4} = x_{44,9} = 0$$

Já que os índices 1, 2, 6, 4 e 9 não poderão aparecer nos quadrados remanescentes deste bloco. Logo, teremos como possibilidade para estes quadrados apenas os índices 3, 5,7 e 8.

Então, temos que:

$$x_{37,3} + x_{38,3} + x_{44,3} + x_{45,3} = 1$$
$$x_{37,5} + x_{38,5} + x_{44,5} + x_{45,5} = 1$$
$$x_{37,7} + x_{38,7} + x_{44,7} + x_{45,7} = 1$$
$$x_{37,8} + x_{38,8} + x_{44,8} + x_{45,8} = 1$$

Isso nos mostra que os quatro quadrados vazios de B_5 devem ser preenchidos com os índices 3, 5, 7 e 8.

Com este primeiro bloco B_5, não é possível nenhuma conclusão mais. Com isso, passaremos para o próximo bloco.

Fixaremos agora o bloco B_{11}.

$$\sum_{p \in B_{11}} x_{p,k} = 1, k \in I$$

Novamente teremos 9 equações, uma pra cada índice.

$$\sum_{p \in B_{11}} x_{p,1} = 1 \quad \sum_{p \in B_{11}} x_{p,2} = 1 \quad \sum_{p \in B_{11}} x_{p,3} = 1$$
$$\sum_{p \in B_{11}} x_{p,4} = 1 \quad \sum_{p \in B_{11}} x_{p,5} = 1 \quad \sum_{p \in B_{11}} x_{p,6} = 1$$
$$\sum_{p \in B_{11}} x_{p,7} = 1 \quad \sum_{p \in B_{11}} x_{p,8} = 1 \quad \sum_{p \in B_{11}} x_{p,9} = 1$$

Como já sabemos que os únicos índices possíveis para o quadrado 38 são 3, 5, 7 e 8, vamos expandir os somatórios acima para estes índices.

$$x_{2,3} + x_{11,3} + x_{20,3} + x_{29,3} + x_{38,3} + x_{47,3} + x_{56,3} + x_{65,3} + x_{74,3} = 1$$
$$x_{2,5} + x_{11,5} + x_{20,5} + x_{29,5} + x_{38,5} + x_{47,5} + x_{56,5} + x_{65,5} + x_{74,5} = 1$$
$$x_{2,7} + x_{11,7} + x_{20,7} + x_{29,7} + x_{38,7} + x_{47,7} + x_{56,7} + x_{65,7} + x_{74,7} = 1$$
$$x_{2,8} + x_{11,8} + x_{20,8} + x_{29,8} + x_{38,8} + x_{47,8} + x_{56,8} + x_{65,8} + x_{74,8} = 1$$

Mas, pelas atribuições iniciais, temos que:

$$x_{74,8} = 1$$

O que nos mostra que $x_{38,8} = 0$, ou seja, o quadrado 38 não pode ser preenchido com o índice 8. Portanto, agora nos restam apenas os índices 3, 5 e 7.

Com este segundo bloco B_{11} não é possível nenhuma conclusão mais a respeito do quadrado 38. Com isso, passaremos para o próximo bloco.

Fixaremos agora o bloco B_{22}.

$$\sum_{p \in B_{22}} x_{p,k} = 1, k \in I$$

Teremos 9 equações, uma para cada índice.

$$\sum_{p \in B_{22}} x_{p,1} = 1 \quad \sum_{p \in B_{22}} x_{p,2} = 1 \quad \sum_{p \in B_{22}} x_{p,3} = 1$$
$$\sum_{p \in B_{22}} x_{p,4} = 1 \quad \sum_{p \in B_{22}} x_{p,5} = 1 \quad \sum_{p \in B_{22}} x_{p,6} = 1$$
$$\sum_{p \in B_{22}} x_{p,7} = 1 \quad \sum_{p \in B_{22}} x_{p,8} = 1 \quad \sum_{p \in B_{22}} x_{p,9} = 1$$

Como só nos resta 3, 5 e 7 como opções de índices para o quadrado 38, abriremos apenas os somatórios destes índices. Logo,

$$x_{28,3} + x_{29,3} + x_{30,3} + x_{37,3} + x_{38,3} + x_{39,3} + x_{46,3} + x_{47,3} + x_{48,3} = 1$$
$$x_{28,5} + x_{29,5} + x_{30,5} + x_{37,5} + x_{38,5} + x_{39,5} + x_{46,5} + x_{47,5} + x_{48,5} = 1$$
$$x_{28,7} + x_{29,7} + x_{30,7} + x_{37,7} + x_{38,7} + x_{39,7} + x_{46,7} + x_{47,7} + x_{48,7} = 1$$

Verificamos pelas atribuições iniciais (3) que $x_{28,3} = 1$. Logo,

$$x_{29,3} + x_{30,3} + x_{37,3} + x_{38,3} + x_{39,3} + x_{46,3} + x_{47,3} + x_{48,3} = 0$$

O que significa que os quadrados 29, 30, 37, 38, 46, 47 e 48 não podem ser preenchidos com o índice 3. Com isso, temos:

$$x_{29,3} = x_{30,3} = x_{37,3} = x_{38,3} = x_{39,3} = x_{46,3} = x_{47,3} = x_{48,3} = 0$$

Eliminamos assim mais uma possibilidade para o quadrado 38. Agora, as únicas possibilidades para esse quadrado são os índices 5 e 7.

Em relação a esses índices, temos as seguintes equações:

De(1)temos:

$$x_{38,5} + x_{38,7} = 1 \qquad (5)$$

De (2)temos:

$$\begin{aligned} x_{37,5} + x_{38,5} + x_{44,5} + x_{45,5} &= 1 \\ x_{37,7} + x_{38,7} + x_{44,7} + x_{45,7} &= 1 \end{aligned} \qquad (6)$$

Ao analisarmos o bloco B_{24}, do qual fazem parte os quadrados 34, 35, 36, 43, 44, 45, 52, 53 e 54, temos pela equação (3) que $x_{36,7} = 1$, logo nenhum quadrado deste bloco B_{24} poderá ser preenchido com índice 7.

Logo,

$$x_{44,7} = x_{45,7} = 0$$

Reduzindo a equação (6) para:

$$x_{37,7} + x_{38,7} = 1$$

O que significa que o índice 7 deve ser alocado ou no quadrado 37 ou no quadrado 38.

Considerando o bloco B_{10}, do qual o quadrado 37 faz parte, temos pelas atribuições iniciais (3) que $x_{10,7} = 1$. Como os quadrados 37 e 10 fazem parte do mesmo bloco B_{10}, concluímos que $x_{37,7} = 0$.

Com isso, por(6) temos:

$$x_{37,7} + x_{38,7} + x_{44,7} + x_{45,7} = 1$$
$$0 + x_{38,7} + 0 + 0 = 1$$
$$x_{38,7} = 1$$

Logo, o quadrado 38 deve ser preenchido com índice 7.

Nesse exemplo, não resolvemos o sistema completo. Usamos apenas as equações que eram pertinentes para o preenchimento do quadrado 38. Obviamente, o sistema completo seria muito mais trabalhoso de se resolver manualmente. Por outro lado, são várias equações ao mesmo tempo, muito mais informações que se cruzam, o que fariam com que muitas conclusões fossem obtidas ao mesmo tempo e mais rapidamente, podendo assim determinar o índice de vários quadrados e não de um único, como feito neste exemplo.

É claro que resolver um sistema desse tipo manualmente não é uma tarefa fácil, nem prática. Porém, pode ser facilmente resolvida por programas de computador e, sendo assim, podem ser gerados jogos válidos diversos de maneira rápida.

Manualmente, em geral, o jogo é resolvido por um conjunto de estratégias de eliminações de candidatos. Após essas eliminações, ficamos com alguns candidatos possíveis para cada um dos quadrados ainda não preenchidos. Definimos então o conjunto de candidatos que não foram eliminados do quadrado p por nenhuma estratégia como o conjunto C_p. Nesse contexto, a equação (3) pode ser representada também por:

$$x_{pk} = 0, p \in S, k \notin C_p \qquad (7)$$

Quando o conjunto de candidatos de um quadrado tem apenas um índice, então esse quadrado já pode ser preenchido. O jogo estará totalmente solucionado quando restar um único índice em todos os conjuntos de candidatos.

Com isso surgem algumas perguntas pertinentes a respeito da eliminação de candidatos e resolução do jogo.

1. Quão fácil é resolver um jogo completamente usando um conjunto de estratégias específicos de eliminação de candidatos? Um conjunto de regras pode se tornar bastante complexo para jogos em níveis mais elevados. Não é conhecido até os dias de hoje nenhum conjunto de estratégias forte o bastante para resolver qualquer jogo de Sudoku.

2. Quão próxima está a solução do sistema citado acima da solução do jogo associado?

Para responder a primeira pergunta estudamos um conjunto simples de regras de eliminação de candidatos, que são as estratégias de um único bloco.

Estratégias de um bloco são aquelas que eliminam uma atribuição particular baseada nas restrições(1), (2) e (7) aplicadas em um bloco $B_i \in \beta$.

Estratégias de um bloco envolvem procurar por uma relação entre índices candidatos em um determinado bloco, ignorando como estes índices interagem com outros blocos. Estratégias de um bloco não são restritas ao uso em um bloco particular, podendo ser usada sucessivamente em blocos diferentes, desde que cada aplicação das estratégias considere apenas um bloco e seu conjunto de candidatos correspondente.

O conjunto de estratégias de eliminação de um bloco, que faz parte das utilizadas por qualquer jogador, pode ser descrita de forma bastante sucinta, fazendo analogia ao conhecido Teorema da Casa dos Pombos. Pela aplicabilidade semelhante, o mesmo nome é usado para descrever este conjunto de estratégias de um bloco.

Regra da casa dos pombos. Seja $M \subset I$ um subconjunto de índices e D um subconjunto de quadrados, todos contidos em um mesmo bloco B_i, tal que: (a) $|M| = |D|$ e (b) $C_p \subseteq M$ para todo quadrado $p \in D$. Então os elementos de M podem ser removidos de C_p para todo $p \in B_i \backslash D$.

Em outras palavras, se há um conjunto de k quadrados em um mesmo bloco cujo conjunto de candidatos juntos contém exatamente$k$ diferentes índices, então estes índices não podem aparecer em nenhum outro quadrado deste bloco.

Esta regra inclui muitas das estratégias já descritas anteriormente. E apenas com esta regra é possível resolver completamente a maioria dos jogos de Sudoku.

Vejamos um exemplo de aplicação desta regra para eliminação de índices candidatos.

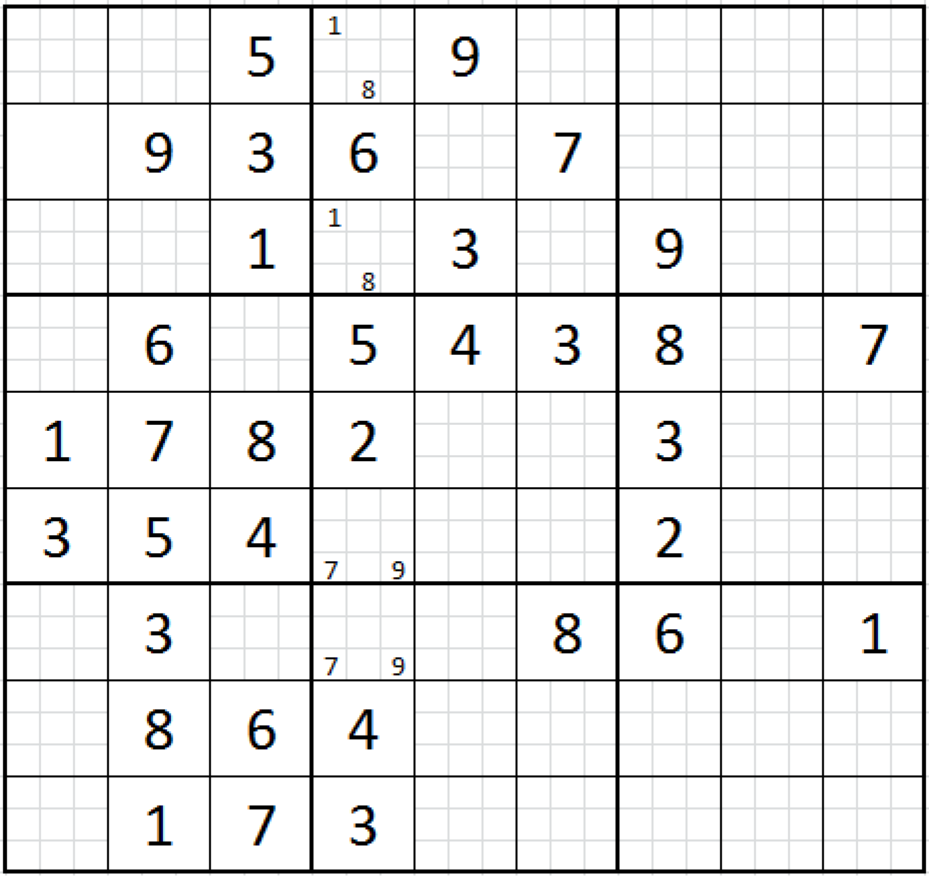
Figura 25 - Exemplo do uso da regra dos pombos

		5	1 8	9				
	9	3	6		7			
		1	1 8	3		9		
	6		5	4	3	8		7
1	7	8	2			3		
3	5	4	1 7 8 9			2		
	3		1 7 9		8	6		1
	8	6	4					
	1	7	3					

Fonte: Adaptação da revista Coquetel – Livro Sudoku vol.5

Observando o bloco B_{13} daFigura 25, vemos que os quadrados 4 e 22 possuem como únicos candidatos os índices 1 e 8. Logo, mesmo sem saber onde cada um dos índices será alocado, podemos concluir que esses índices ocuparão os quadrados 4 e 22. Com isso, sabemos que no bloco B_{13} nenhum outro quadrado poderá ser ocupado pelos índices 1 e 8. Logo, eliminamos estas possibilidades dos quadrados 49 e 58. Sendo assim, ficamos com as seguintes possibilidades para os quadrados do bloco B_{13}:

Figura 26 - Bloco depois de aplicada a regra da casa dos pombos

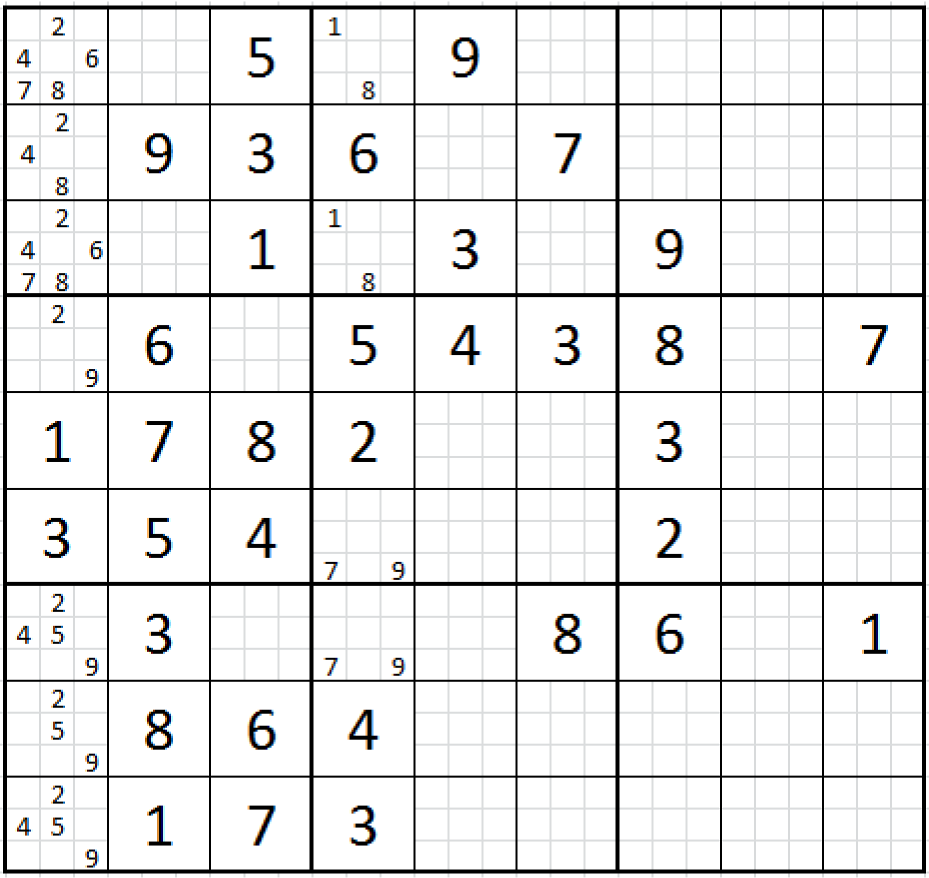


Fonte: Adaptação da revista Coquetel – Livro Sudoku vol.5

Neste caso, tínhamos dois quadrados de um mesmo bloco com apenas dois candidatos pra preencher esses quadrados, logo esses dois índices não poderiam ocupar nenhum outro quadrado do mesmo bloco.

Vejamos outro exemplo, no mesmo jogo, onde o uso da regra dos pombos, além de eliminar candidatos, define o índice a ser preenchido em um dos quadrados.

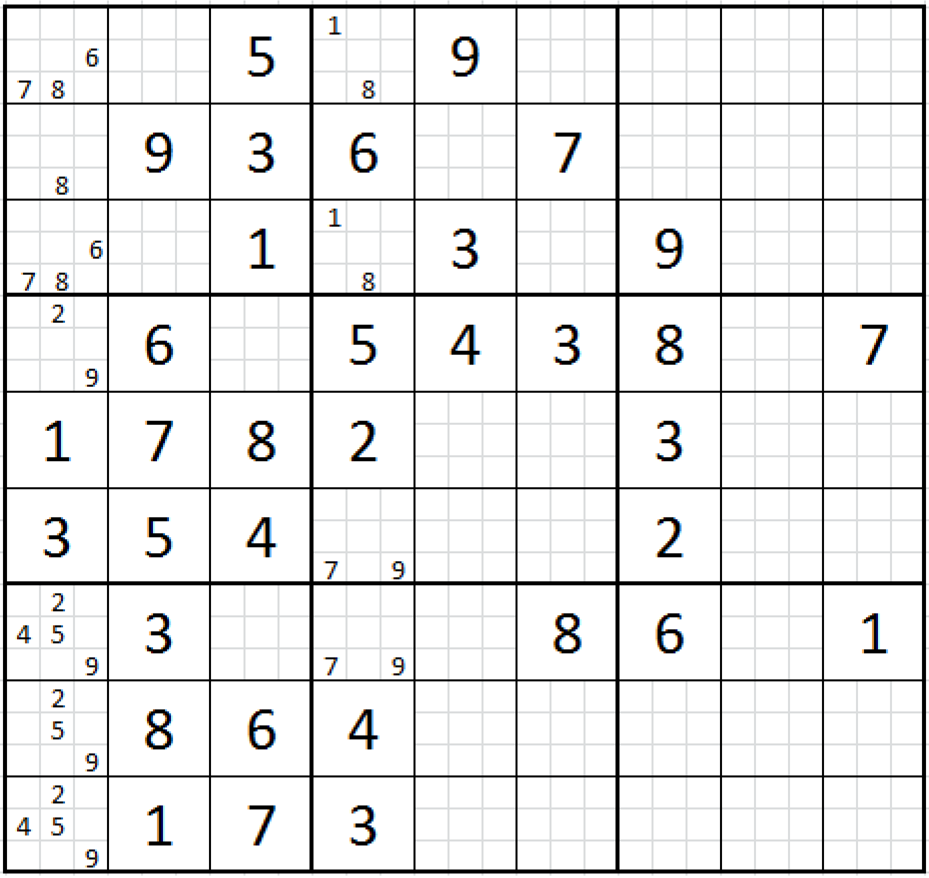
Figura 27 - Exemplo de uso da regra da casa dos pombos



Fonte: Adaptação da revista Coquetel – Livro Sudoku vol.5

Observando o bloco B_{10}, vemos os candidatos em cada um dos quadrados remanescentes. Ao observarmos os quadrados 28, 55, 64 e 73 vemos que estes quatro quadrados possuem quatro candidatos a índices neles: 2, 4, 5 e 9. Se para quatro quadrados temos quatro candidatos, podemos concluir que estes quatro candidatos não poderão aparecer em nenhum dos outros quadrados deste bloco. Logo, podemos excluir essas possibilidades dos quadrados 1, 10 e 19. Com isso, ficamos com as seguintes possibilidades:

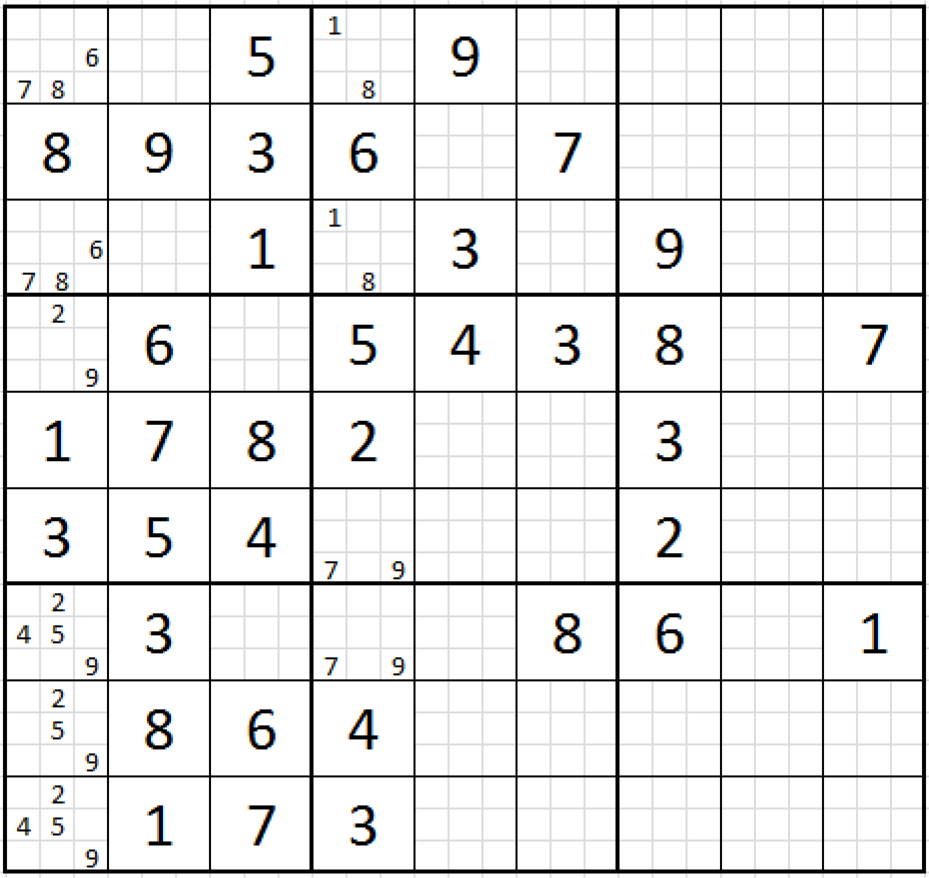
Figura 28 - Exemplo de Sudoku após uso da regra da casa dos pombos.



Fonte: Adaptação da revista Coquetel – Livro Sudoku vol.5

Com isso, vemos que o quadrado 10 ficou com um único candidato a índice. Logo, o quadrado 10 deve ser preenchido com o índice 8. Ficando, assim, com as seguintes possibilidades nos quadrados remanescentes:

Figura 29 - Aplicação da regra da casa dos pombos para determinação de índice



Fonte: Adaptação da revista Coquetel – Livro Sudoku vol.5

Para responder a segunda pergunta foi investigado sob quais circunstâncias o sistema associado ao jogo, definido pelas equações (1), (2) e (3) com variáveis não negativas, garante soluções 0-1 e resolvem o jogo. Verificou-se que o sucesso da regra da casa dos pombos em solucionar o jogo é também uma garantia de que esta solução 0-1 é a única solução não negativa do sistema linear associado.

A verdade é que a regra da casa dos pombos contempla todas as estratégias de um bloco. Sendo assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 3: Qualquer eliminação que pode ser feita usando uma estratégia de um bloco também pode ser feita usando a regra da casa dos pombos.

Prova: considere uma estratégia de um bloco aplicada a um bloco $B_i \in \beta$ em um determinado estágio de resolução do jogo, com um conjunto atual de candidatos C_p, $p \in S$. Então uma estratégia de um bloco deve usar somente subconjuntos das restrições (

1), (2) e (7) para que o índice$k_0$seja eliminado ao quadrado $p_0 \in B_i$, ou seja, se $x_{p_0,k_0} = 1$, essa relação não pode satisfazer as equações a seguir:

$$\sum_{k \in I} x_{pk} = 1,\ \ p \in B_i \tag{8}$$

$$\sum_{p \in B_i} x_{pk} = 1,\ \ k \in I \tag{9}$$

$$x_{p,k} = 0, p \in B_i,\ k \notin C_p \tag{10}$$

Interpretar as equações (8), (9) e (10) como uma exigência para atribuição de índices de I em B_i, usando somente índices permitidos no conjunto C_p, $p \in B_i$, é equivalente aencontrar um emparelhamento perfeito no grafo bipartido G de $B_i \times I$ que contém somente pontes (p, k), $k \in C_p$.

Uma atribuição (p_0, k_0) será eliminada demonstrando que não há um emparelhamento perfeito que contenha a ponte (p_0, k_0).

Aplicando a teoria de grafos no jogo de Sudoku estamos considerando que o grafo bipartido é composto pelos conjuntos B_i e I, onde os vértices de B_i representam os quadrados pertencentes ao bloco B_i do jogo, e os vértices de I representam os índices. A ponte (p, k) existirá para todo $k \in C_p$, ou seja, somente serão pontes do grafo G ligações entre os quadrados de B e seus candidatos a índices k tal que $k \in C_p$.

Considerar a ponte (p_0, k_0) como parte de um emparelhamento é equivalente a remover os vértices p_0 e k_0 de G, e todas as pontes adjacentes a qualquer um desses vértices, e definir um emparelhamento perfeito no subgrafo resultante. Ao retirarmos esses vértices de G ficaremos com um subgrafo G'. A atribuição (p_0, k_0) será então eliminada se e somente se o grafo resultanteG' não admitir um emparelhamento perfeito. O grafo G' consisteem um subgrafo de G que não contém p_0 e $k_0$nem quaisquer pontes que possuam estes vértices.

Se conseguirmos mostrar que o grafo G', resultante da eliminação destes vértices do grafo G, não possui um emparelhamento perfeito, então poderemos concluir que a atribuição (p_0, k_0) foi indevida.

Pelo Teorema de Hall, descrito em capítulo anterior, se G' não tem um emparelhamento perfeito então existem subconjuntos $X \subseteq I \setminus \{k_0\}$ e $D \subseteq B \setminus \{p_0\}$ onde $|X| < |D|$ e X é uma vizinhança de D em G'. Isto é, X é um subconjunto de índices que não contém k_0 e D é um subconjunto de quadrados que não contém p_0 etoda ponte de G' que seja adjacente a um vértice em D também é adjacente a um vértice em X, já que$X$é a vizinhança de Dem G'. Isto é, para todo índice de X existe pelo menos uma ponte que o liga a algum quadrado de D. Além disso, a quantidade de vértices (índices) vizinhos aos quadrados de D é menor que a quantidade de quadrados para cada quadrado em D e todos os índices distintos de k_0 pertencentes a X. Ou seja, $C_p - \{k_0\} \subset X, \forall p \in D$.

Consideremos o conjunto M, tal que $M = X \cup \{k_0\}$, e um subgrafo bipartido de G em $M \times D$.Lembrando que a vizinhança de D ($N(D)$) é o conjunto de todos os vértices que possuem ligações com algum quadrado de D, ou seja, $N(D)$ é a união de todos os candidatos à índices dos quadrados de D (C_p). Com isso, note que M contém a vizinhança $N(D)$ de D em G,então $|N(D)| \leq |M| \leq |D|$. Ou seja, a desigualdade que era estritamente menor $|X| < |D|$, passa a ser $|M| \leq |D|$, já que o conjunto M difere de X por um único elemento.

Com isso, temos que $C_p \subseteq M$ para todo $p \in D$.

Logo, temos que:

$$|\boldsymbol{N}(\boldsymbol{D})| \leq |\mathbf{M}| \leq |\mathbf{D}| \tag{11}$$

Como o grafo G originou-se de um jogo válido que possui uma única solução, sabemos que G tem um emparelhamento perfeito. Logo, pelo Teorema de Hall, $|N(D)| \geq |D|$.

Sendo assim, temos $|M| = |D|$. Logo, pela regra da casa dos pombos se $|M| = |D|$, então os índices contidos em M preencherão os quadrados contidos em D em alguma ordem. Usando M e D como definidos acima, eliminamos a atribuição (p_0, k_0), pois pela regra da casa dos pombos todos os índices em M devem ser eliminados de C_p para $p \notin D$, que é o caso de p_0.

Iremos agora investigar sob quais condições o relaxamento do sistema linear definido pelas equações (1), (2) e (3) para soluções não negativas garante a produção de soluções do tipo 0-1, e resolve o jogo.

Veremos que o sucesso da regra da casa dos pombos na resolução de um jogo de sudoku é também uma garantia de que o relaxamento que os resolve é válido.

A demonstração do teorema a seguir não é a mesma contida no artigo original. É sugerida uma nova justificativa usando conceitos de programação linear e matrizes duplamente estocásticas.

Teorema 4: Se um jogo de Sudoku pode ser solucionado inteiramente usando a regra da casa dos pombos, então existe uma única solução não negativa das equações (1), (2) e (3), e esta é a solução do jogo.

Prova: Considere x^* a única solução do tipo 0-1 das equações (1), (2) e (3), e suponha que exista uma segunda solução não negativa $\hat{x}$ das mesmas equações. Comece solucionando o jogo usando a regra da casa dos pombos até a primeira vez que um dos elementos da solução x^* difere da solução de $\hat{x}$, ou seja, o momento em que um índice k_0 é eliminado do conjunto de candidatos a um quadrado p_0 (C_{p_0}) e $\hat{x}_{p_0,k_0} \neq 0$. Isso sempre acontece, já que a regra da casa dos pombos elimina todo par de candidatos(p_0, k_0), onde $x^*_{p_0,k_0} = 0$, e há no mínimo uma dessas eliminações onde $\hat{x}_{p_0,k_0} \neq x^*_{p_0,x_0}$. Caso contrário, as soluções x^* e $\hat{x}$ seriam iguais.

Vamos considerar o problema de programação linear formado pelas equações (8), (9), (10) e

$$\mathbf{max}\, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x_{p_0,k_0} x \geq 0} \tag{12}$$

Então queremos caracterizar a solução do problema de otimização cujas coordenadas são não negativas e satisfazem

$$\max c^t x, \;\; x \geq 0$$

$$\sum_{k \in I} x_{pk} = 1, \;\; p \in B_i$$

$$\sum_{p \in B_i} x_{pk} = 1, \;\; k \in I$$

$$x_{p,k} = 0, p \in B_i, \;\; k \notin C_p$$

Aqui x é um vetor do R^{81} e c é um vetor do R^{81} que tem todas as coordenadas nulas, exceto a correspondente à coordenada x_{p_0,k_0} que é igual a 1.

Usaremos o resultado da Proposição 4 (que também vale para maximização), que nos diz que uma solução ótima é atingida em ao menos um ponto extremo do conjunto viável. Vamos identificar quais são os extremos do politopo definido por (8), (**9**) e (10 **)**.

Inicialmente observe que $\hat{x}$ é solução de (8),(9) e (10). Isso significa que o conjunto viável associado ao nosso problema de programação linear é não vazio. Como a função objetivo é contínua e nosso conjunto viável é não vazio e compacto, nosso problema de programação linear tem solução.

O Teorema 1 nos diz que um ponto é extremo se e só se é uma solução básica viável.

- Observe que toda solução $\hat{x}$ básica viável de (8), (9) e (10) é também uma solução básica viável de (8), (9).
- Note agora que com as coordenadas de uma solução básica viável $\hat{x}$de (8), (9)você pode definir uma matriz M duplamente estocástica e que os extremos do conjunto viável de (8), (9) para $x \geq 0$, “coincidem” com os extremos do conjunto das matrizes duplamente estocásticas.
- Pelo teorema 2 sabemos que os extremos do conjunto das matrizes duplamente estocásticas são matrizes de permutação.
- Portanto, como uma solução de nosso problema de programação linear é um extremo de (8), (9) e (10), e todo extremo de (8), (9) e (10) é também extremo (8), (9), e todo extremo (8), (9) define uma matriz duplamente estocástica que também é extremo do conjunto das matrizes duplamente estocásticas. Portanto, essa solução é composta por 0 e 1 e(**(**12)tem solução do tipo 0-1.

Concluímos, assim, que o valor máximo do problema de programação linear só pode ser 0 ou 1.Então, qualquer solução do sistema, obrigatoriamente, tem que ter coordenadas iguais a 0 ou 1, inclusive a coordenada tratada x_{p_0,k_0}.

Porém, sabíamos inicialmente que $\hat{x}_{p_0,k_0} \neq 1$, porque estávamos no momento do jogo em que o índice k_0 estava sendo eliminado do quadrado p_0. E também sabíamos que $\hat{x}_{p_0,k_0} \neq 0$, já que a solução $x^*_{p_0,x_0} = 0$, e que $\hat{x}_{p_0,k_0} \neq x^*_{p_0,x_0}$.

Com isso chegamos a uma contradição. Sendo assim, concluímos que não existe uma segunda solução para o sistema. Logo x^* é solução única não negativa do sistema.

CONCLUSÃO

O trabalho mostrou a possibilidade de obter um modelo matemático para um jogo de Sudoku de forma matemática, interpretando-o como um sistema de equações. Cada uma dessas equações representa uma das regras básicas do jogo, incluindo as condições iniciais dos quadrados já preenchidos. É claro que, resolver um jogo simples9×9 através de seu sistema de equações associado é muito mais trabalhoso manualmente do que pelo método tradicional com lápis, papel e estratégias de eliminação. Porém, a interpretação do jogo matematicamente através de um sistema de equações nos permite demonstrar alguns resultados, tirar conclusões sobre condições em que certas regras são suficientes para solucioná-lo, e até mesmo testar se o jogo é válido e criar jogos novos.

Todo esse processo é mais facilmente realizado através de programas de computador que resolvam sistemas de equações lineares, já que, em geral, trabalhamos com uma grande quantidade de variáveis.

Um dos resultados demonstrado foi que qualquer eliminação de um candidato feita por estratégias de um único bloco pode ser feita usando o regra da casa dos pombos, onde há n índices para serem alocados em n quadrados.E também foi garantido que, se um jogo de Sudoku pode ser inteiramente solucionado usando a regra da casa dos pombos, então o sistema de equações associado possui uma única solução não negativa, que é a solução do jogo.

Esses resultados nos geram outros questionamentos que podem ser estudados em outro trabalho sobre o tema. Há uma descrição para estratégias de eliminação de dois blocos análoga a regra da casa dos pombos para as estratégias de um único bloco? Ou seja, será que há uma estratégia que substitui todas as estratégias que envolvam dois blocos? Qual a quantidade n' mínima de blocos que deve ser considerada para que estratégias de n' blocos solucione completamente o jogo? É claro que 27 blocos seriam suficientes, no caso de um jogo9×9, mas será que existe um número mínimo de blocos que garante a solução?Existe um conjunto de estratégias de eliminação que soluciona qualquer jogo e garante que o sistema de equações associado tenha uma única solução não negativa que é a solução do jogo? Qual o conjunto mínimo de estratégias que resolve o jogo e garante a unicidade de solução não negativa do sistema de equações associado ao jogo?

Quanto mais se investigar a respeito de jogos de Sudoku e suas estratégias de resolução mais questionamentos surgirão. Este trabalho tem a intenção de sanar alguns desses questionamentos com as demonstrações feitas e com isso dar condições que outras perguntas e conclusões sejam obtidas com sucesso.

REFERÊNCIAS

BERMAN, Abraham. PLEMMONS, Robert J. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. Siam. 1994.

DAVIS, Tom. *The Mathematics of Sudoku*. 2012. Disponível em: <http://www.geometer.org/ mathcircles/>. Acesso em: 17 jul.2016.

DEVOS, Matt. *GraphTheory -- Lecture Notes*, 2014. Disponível em:<http://www.sfu.ca/~mdevos/notes/>. Acesso em: 17 de julho de 2016.

FAUSTINO, Ana Maria Ferreira Alves. Análise Numérica - MIEC, 2015. Disponível em:<https://moodle.up.pt/pluginfile.php/87102/mod_resource/content/2/Matperm14_15.pdf>. Acesso em: 17 de julho de 2016.

FEOFILOFF, Paulo. *Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos*. 2011. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/>. Acesso em : 17 jul. 2016.

JUSSIEN, Narendra. *A to Z of Sudoku*.1.ed.USA:Iste, 2007.

MENEZES, Marco A. F. *Programação Linear*. Departamento de Computação da Universidade Católica de Goiás. 2010.

PROVAN, Scott J. *Strategy versus Structure*. The American Mathematical Monthly, Vol. 116, No. 8. 2009.

ROSS, Sheldom M. *Topics in Finite and Discrete Mathematics*. Cambridge University Press. 2004.