Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de pós-graduação e pesquisa
Programa de pós-graduação em Matemática - PROMAT

Uma Abordagem para o Ensino de Funções no Ensino Médio

por

Marcele Rodrigues Moreno Santos

Mestrado Profissional em Matemática - São Cristóvão - SE

Orientador: Prof. Dr. Evilson da Silva Vieira

Coorientadora: Prof. Ms. Joseane de Almeida Topázio

Abril de 2013

Marcele Rodrigues Moreno Santos

Uma Abordagem para o Ensino de Funções no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Evilson da Silva Vieira

Coorientadora: Prof. Ms. Joseane de Almeida Topázio

São Cristovão

2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Santos, Marcele Rodrigues Moreno
S237a Uma abordagem para o ensino de funções no ensino médio / Marcele Rodrigues Moreno Santos; orientador Evilson da Silva Vieira. – São Cristóvão, 2013.
65 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat) – Universidade Federal de Sergipe, 2013.

1. Funções (Matemática). 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Aprendizagem. I. Vieira, Evilson da Silva, orient. II. Título

CDU 517.5

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Uma abordagem para o ensino de funções

por

Marcele Rodrigues Moreno

Aprovada pela Banca Examinadora:

Evilson Vieira

Prof. Dr. Evilson da Silva Vieira - UFS
Orientador

Prof. Dr. Eteeldes Gonçalves Júnior - UFES
Primeiro Examinador

Rita Mariani

Profª. Dra. Rita de Cassía Pistóia Mariani – UFS
Segunda Examinadora

São Cristóvão, 13 de abril de 2013

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Critóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

Dedicatória

Aos meus familiares queridos, que sempre me apoiaram e incentivaram nos estudos: meus pais Luiz e Lucia, meu irmão Jean Louis, meus filhos Bruno, Társila e Thayane e meu esposo Augusto César.

A todos os alunos que aprenderam um pouco comigo, mas me ensinaram muito mais, me proporcionando crescimento, busca por melhoras no ensino e muita alegria.

Agradecimentos

- A Deus, por ter me dado sabedoria, forças para lutar e saúde para persistir no caminho que escolhi.

- Aos meus pais, por todo esforço e incentivo para que eu estudasse sempre. Pelos bons conselhos, carinho e por desejar a minha vitória. Por me ensinar a ser persistente. Também, pelos ensinamentos que me permitiram descobrir um jeito diferente de ensinar, e me dedicar com amor à minha profissão.

- Ao meu irmão por todo incentivo que sempre me deu, para que eu nunca desistisse de estudar e seguir meus sonhos.

- Aos meus filhos pelo amor, pela compreensão dos momentos em que me ausentei, me irritei ou falhei. Por todas as ajudas nas tarefas domésticas, por terem suportado ficar tantos sábados sem minha presença. E algumas vezes privarem-se de momentos de lazer e confraternização.

- Ao meu esposo, pelo companheirismo e carinho, por acreditar no meu sonho e compreender as ausências que ocorreram durante os momentos de curso e elaboração deste trabalho.

- Aos colegas de curso pelos momentos de muito estudo, pelas trocas que propiciaram aprendizado, pelas conversas tão descontraídas e importantes que tivemos, pelos lanchinhos. Em especial agradeço a alguns que me apoiaram em momentos delicados e participaram desta conquista de uma forma mais próxima: Elizabeth, Elson, Evani, Lucia e Wellington. Sem vocês a caminhada teria sido mais árdua.

- A uma amiga especial, que me incentivou com os estudos, acreditou em meu potencial, me ensinou muito sobre construção de sequências didáticas e me fez descobrir muitas coisas na área de Educação Matemática. Ainda, dedicou seu tempo para me ajudar a iniciar este trabalho. Simone, agradeço a Deus por ter te colocado no meu caminho profissional e retribuo te desejando muito sucesso.

- Aos professores deste curso por suas orientações que me conduziram à aquisição de novas descobertas, em especial ao admirável prof. Dr. Kalasas Vasconcelos de Araújo por sua simplicidade e carinho com todos os estudantes.

- Ao professor Dr. Evilson da Silva Vieira (UFS), por ter aceitado o desafio de me orientar, após tantos desencontros. Por sua simplicidade, paciência, sabedoria e por seus ensinamentos que foram muito úteis para conclusão desta pesquisa.

- A professora Ms. Joseane de Almeida Topázio (UNEB), que dedica boa parte do seu tempo em atividades de formação e despertou em mim a vontade de ler e buscar mais conhecimentos sobre a Educação Matemática devido à forma como se apropria das ideias e demonstra seus conhecimentos, e por ter aceitado me ajudar na coorientação desta pesquisa.

- Aos professores, Dr. Etereldes Gonçalves Junior (UFES) e Drª. Rita de Cássia Pistóia Mariani (UFS), por comporem a banca examinadora, e pelas sugestões de melhoria na escrita deste trabalho.

- Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram para minha formação.

Resumo

Após observar como acontece o ensino das funções nas classes de ensino médio, bem como a disposição destes conteúdos nos livros didáticos, com a finalidade de auxiliar professores deste segmento em sua prática docente a romper as barreiras deste ensino tradicional, cansativo, pouco produtivo (no sentido de propiciar o aprendizado) e que desestimula o estudante, foi feito um estudo bibliográfico sobre o aprendizado em Matemática e possíveis mudanças na forma de apresentar as funções e seus gráficos, incluindo suas características. Desta forma, apresentamos uma abordagem diferente das tradicionais, para o ensino das funções, repensando este ensino com enfoque na construção dos conhecimentos, investigações, sequência lógica e nas relações entre os conteúdos. Também expusemos sobre os benefícios dos recursos tecnológicos, os softwares matemáticos que podem auxiliar e enriquecer o estudo dos gráficos de funções e suas variações. Apresentamos uma sequência didática para o ensino das funções nas formas algébricas e geométricas, utilizando o programa Geogebra, que o leitor poderá aplicar e ampliar, adequando à sua realidade.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática, Ensino de Funções, Funções, Geogebra, Matemática, Sequência Didática, Transformações Geométricas em Funções.

Sumário

Introdução

Durante meus estudos, desde o ensino médio, procurava fazer relações e entender as justificativas para fórmulas, relações, tive professores que me estimularam a isto, pois justificavam, faziam demonstrações e chamavam a atenção para as regularidades. Quando tive contato com funções trigonométricas, no 2º ano, percebi que as funções sofriam variações em seus gráficos de acordo com as formas algébricas, atendendo a algumas regularidades, estudando e procurando semelhanças entre os procedimentos, propriedades, conceitos, para evitar decorar informações. No 3º ano, percebi que estas variações também aconteciam na função modular, e mais tarde, na universidade, conheci a forma fatorada que permitia a percepção de que as variações nas formas algébricas de algumas funções estavam diretamente relacionadas com as transformações geométricas que os gráficos destas funções sofriam, me certificando que as regularidades percebidas anteriormente não eram simples coincidências. Também aprendi justificativas para teoremas, propriedades, relações, que me faziam admirar cada vez mais os conhecimentos matemáticos.

Quando comecei a ensinar, ou até mesmo na época do colégio, quando ajudava alguns colegas a estudar, procurei informar minhas descobertas (que não eram somente minhas), mostrava sempre relações e justificativas, para evitar o excesso de fórmulas, repetições e a necessidade de decorar tudo. Assim, com estudos e experiências fui aprimorando a metodologia do “fazer matemática”, tentando ajudar os estudantes a perceber e entender as relações entre os conhecimentos matemáticos. Algum tempo depois, soube que existiam muitos estudos sobre o ensino da Matemática, e que esta área de pesquisa era chamada de Educação Matemática.

Ao longo destes anos, minha experiência docente mostrou-me que os alunos apresentam grandes dificuldades na compreensão de conceitos, não estão habituados a dar importância a estes, às justificativas e demonstrações de propriedades e relações matemáticas, priorizando procedimentos, fórmulas e exemplos de aplicações destas. Com isto, não se preocupam em compreender os processos envolvidos nos conteúdos trabalhados, nem comportam-se de forma questionadora e investigadora, durante as aulas; percebo que a maioria dos estudantes aceitam as informações de forma passiva. Apesar das resistências, sempre tentei incentivá-los a ver a matemática com outro olhar, mais curioso, analisando os conhecimentos de uma forma mais geral, ampla, como uma rede de conceitos e teoremas. Assim, priorizei em minha prática o entendimento dos conceitos, as relações, as investigações e descobertas, tentando construir conhecimentos através de outros já adquiridos, mas algumas vezes tivemos que desconstruir para reconstruir, atitudes que acredito serem necessárias para uma boa aprendizagem. Várias vezes observei muita resistência, dificuldades de entendimento e poucos raciocínios, durante as aulas de Matemática. Como exemplo, no estudo das funções eram notórias as dificuldades de associar as formas algébricas e geométricas de uma dada função, bem como a construção de seus gráficos, geralmente feita ponto a ponto, logo após a construção de uma tabela. A partir de então, sempre que possível, elaborava minhas aulas com o objetivo de auxiliar o aluno no desenvolvimento de uma postura mais crítica diante de sua aprendizagem.

Depois da leitura de um artigo de Gravina (1990) na RPM, pude aperfeiçoar e organizar melhor, uma estratégia que eu já utilizava em classe, seguindo sua sugestão de aula. Percebi com esse trabalho o quanto o ensino de funções ficou mais atrativo e significativo para o aluno, além de proporcionar um enfoque mais investigativo e proveitoso para os estudos posteriores. Após meu ingresso no curso de Novas Tecnologias Matemáticas, conheci alguns recursos tecnológicos, entre eles softwares matemáticos, me desafiei a utilizá-los em minhas aulas e, nas aulas de funções, optei por utilizar o Winplot ou Geogebra (softwares livres), podendo criar um ambiente de aprendizagem mais criativo e instigante, onde o estudante participava de forma mais ativa e observava as relações entre as formas algébricas e geométricas das funções, fazia conjecturas e criava procedimentos próprios para construções dos gráficos das funções, sem utilizar somente tabelas, muitas vezes escolhiam, estrategicamente, um ponto a ser considerado e mostrado no gráfico. Nesta experiência, com o ensino de funções, usando as transformações e com atividades investigativas, pude perceber que este tipo de aula motiva os estudantes, permite que sintam-se seguros ao entender as relações e conseguir desenhar os traçados, e desejam buscar mais informações. A maioria deles é capaz de olhar para a função na forma algébrica, imaginar sua forma geométrica, buscar os parâmetros e traçar os gráficos. Diferente do que ocorria com estudantes que haviam aprendido de outra forma (só com o uso de tabelas), que se juntaram às turmas (que haviam aprendido desta forma), em momentos posteriores a este aprendizado. Estes estudantes, normalmente não visualizavam facilmente o gráfico, nem tinham segurança nos traçados. Alguns deles quando percebiam os colegas (ou eu) fazendo rapidamente e de forma diferente da que usavam, questionavam sobre nossa metodologia e se interessavam em adquirir estas habilidades.

Dando continuidade às minhas pesquisas sobre o ensino de Matemática, escolhi o ensino das funções e pretendo encontrar uma estratégia de ensino que possa auxiliar os professores em suas práticas, no momento da construção dos conhecimentos sobre funções e suas formas algébrica e geométrica, no ensino médio. Utilizaremos a pesquisa bibliográfica, e através desta buscaremos informações sobre a aprendizagem matemática, a fim de elaborarmos um projeto de ensino que seja eficaz e propicie um aprendizado holístico, quando colocado em prática por professores deste segmento.

Capítulo 1

O ensino de funções

Neste capítulo vamos tratar do estudo de funções no ensino médio, seu objetivo, as dificuldades enfrentadas na aprendizagem e aplicação em outros conteúdos e áreas de estudo. Também retrataremos as consequências do ensino que ocorre na maioria das classes, em que professores seguem os passos dos livros didáticos, sem avaliar se os objetivos deste estudo estão sendo atingidos e se o processo de aprendizagem tem significado, a este chamamos ensino na forma tradicional.

1.1 Objetivos do ensino de funções

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), um dos objetivos do ensino de Matemática no Ensino Médio, é o domínio de linguagens para a representação e a comunicação científico-tecnológica, assim descrito:

> [...] o desenvolvimento de códigos e linguagens em ciência e tecnologia, deve ser tomado como um aspecto formativo de interesse amplo, ou seja, no ensino de cada disciplina científica, este desenvolvimento não está somente a serviço desta ciência ou das ciências, mas sim promovendo uma competência geral de Representação e Comunicação. De forma geral, o desenvolvimento de competências nesse domínio da representação e comunicação envolve, em todas as disciplinas da área: o reconhecimento, a utilização e interpretação de seus códigos, símbolos e formas de representação; a análise e síntese da linguagem científica presentes nos diferentes meios de comunicação e expressão; a elaboração de textos; a argumentação e posicionamento crítico perante temas da ciência e tecnologia. (PCNEM, 1999, p.24)

Observamos a necessidade do desenvolvimento de competências de representação, interpretação e reconhecimento dos códigos e símbolos, em todas as formas possíveis. Como o foco desta pesquisa são as funções, destacamos suas formas algébrica, geométrica no plano cartesiano, por conjuntos de pares ordenados ou por tabelas com alguns pontos. Pois estas estão presentes de diferentes formas na própria ciência, no nível médio e superior, na resolução de situações problema, na geometria analítica, na matemática financeira, no cálculo diferencial e integral, em outras ciências. E o reconhecimento destas formas facilitam a escolha da estratégia mais adequada a cada aplicação, bem como o entendimento de alguns conceitos ou procedimentos destes estudos.

Selecionamos, ainda no PCNEM (1999, p.114-116), alguns objetivos que estão relacionados com o ensino das funções:

- Ler e interpretar dados ou informações, apresentados em diferentes linguagens e representações, como tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, árvores de possibilidades, fórmulas, equações ou representações geométricas.
- Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra. [...] assim como transformar as linguagens mais específicas umas nas outras, como tabelas em gráficos ou equações.
- Selecionar diferentes formas para representar um dado ou conjunto de dados e informações reconhecendo as vantagens e limites de cada uma delas. Por exemplo, escolher entre uma equação, uma tabela ou um gráfico para representar uma dada variação ao longo do tempo.
- Identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades. Por exemplo, perceber que todas as funções do segundo grau possuem o mesmo tipo de gráfico, o que implica em propriedades de sinal, crescimento e decrescimento.
- Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações problema.
- Interpretar, fazer uso e elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações. Por exemplo, utilizar funções ou gráficos para modelar situações envolvendo cálculos de lucro máximo ou prejuízo mínimo.
- Identificar transformações entre grandezas ou figuras para relacionar variáveis e dados, fazer quantificações, previsões e identificar desvios.

Diante destes, nos questionamos se o quarto objetivo, descrito acima, tem sido considerado nas classes de ensino médio e nos livros didáticos. Caso estejam presentes em algumas propostas de atividades que busquem elucidar estas relações, ocorrem para todos os tipos de funções, ou somente em algumas como as funções quadráticas e modulares. E continuamos questionando se existem no plano de curso da maioria dos professores de ensino médio, atividades que permitam ao estudante alcançar este objetivo e perceber estas regularidades.

1.2 Dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de funções

As dificuldades do ensino e aprendizagem de funções não estão vinculadas a um só fator, mas sim à forma como estes conteúdos são estruturados: em uma sequência de capítulos onde se estuda, separadamente, cada tipo de função e as construções gráficas sem correlações. O ensino das funções, feita pela maioria dos professores e apresentada nos livros didáticos, tem ocorrido de uma forma mecânica, onde os estudantes aprendem a dar valores para a variável x e obter y, construindo uma tabela, formando pares ordenados que servirão para traçar o gráfico, ponto a ponto, marcar no plano cartesiano estes pontos e ligar, não atentando para o fato que cada ponto deste, e todos os outros que surgiram ao traçar o gráfico, satisfazem a uma relação (forma algébrica da função), não relacionam os conceitos, desprezando assim as características de cada função. Em geral, estas características não são aproveitadas para construções e reconhecimento de suas representações geométricas. E os estudantes acabam entendendo que função é algo assim, $f(x)$ igual a uma expressão com x, como uma equação, e gráfico como um conjunto de pontos ligados no plano. Ainda, comumente, confundem equações com funções, e tendem a procurar as raízes destas em qualquer procedimento, sem falar nas simplificações que fazem com seus coeficientes, como fazem nas resoluções de algumas equações, não percebendo que modificaram a função. Não estão aptos à olharem para alguns gráficos e distinguir a que classe de função podem pertencer, fazer conjecturas e relacionar as variações das constantes nas formas algébricas de funções com as transformações geométricas que seus gráficos sofrem. Saunders e De Blassio (1995 apud ROCHA, 2010, p.2) argumentam sobre o ensino de construções gráficas com o uso de tabelas:

> [...] com esse procedimento o educando pode substituir a ideia de que toda função tem um gráfico pela ideia de que toda função têm uma tabela. Além disso, essa abordagem é por demais simplista e não leva a uma análise da relação entre as variáveis ou grandezas envolvidas, perdendo assim a oportunidade de mostrar a importância do aprendizado em Matemática para as demais áreas do conhecimento, ao não mostrar a sua aplicabilidade.

Markovits e outros (1995), constatou em sua pesquisa que os estudantes têm dificuldades e concepções erradas em muitas informações ligadas ao estudo das funções: localizar pré-imagens e imagens nos eixos em representações gráficas; distinguir conjunto imagem e contradomínio; considerar o domínio e o contradomínio ao comparar funções. Também encontram dificuldades com a função constante, pois todas as pré-imagens possuem a mesma imagem, funções com gráficos desconexos (referindo-se a funções não contínuas, no exemplo da pesquisa, utilizou uma função de N em N) e gráficos de funções definidas por secções (mais de uma sentença). Neste último caso, alguns estudantes acharam que não poderia ser uma função, por ter mais de uma imagem para cada pré-imagem, desconsiderando os intervalos de definição do domínio. Em várias atividades, aplicadas em sua pesquisa, foram notórias as dificuldades relacionadas à definiçao de função. Sobre isto, o autor comenta:

> Porém,a complexidade do conceito de função também é parcialmente responsável pelas dificuldades dos alunos. Notemos que a definição de função, tal como é ensinada atualmente, envolve muitos conceitos domínio, contradomínio, conjunto imagem, regra de correspondência. Assim, ou temos de ter a certeza de que esses conceitos foram compreendidos em todas as representações, antes de continuarmos a ensinar mais coisas sobre funções, ou temos de optar por deixar de lado alguns aspectos. (MARKOVITS, 1995, p.59)

Os erros e as dificuldades apresentadas, nas resoluções das atividades propostas, estavam sempre relacionadas com a forma de representação das funções (nos enunciados). Algumas características se tornavam mais facilmente perceptíveis na forma gráfica que na algébrica, pois:

> [. . .]A representação gráfica é mais visual; o domínio, o contradomínio e a regra da correspondência são dados simultaneamente; e se tem uma impressão visual do comportamento da função.Mas, em quase todos os currículos a representação algébrica é ensinada antes da representação gráfica. (MARKOVITS, 1995, p.65)

Então, sugerem que se trabalhe mais a forma gráfica no início do desenvolvimento do conceito de função. Mas em algumas atividades, a forma algébrica ainda foi melhor interpretada para encontrar a solução correta. "[Um] exemplo desse tipo de dificuldades ocorre na passagem de uma forma de representção de uma fução para outra. Verificamos que a passagem da forma algébrica para a gráfica foi mais fácil que no sentido contrário." (MARKOVITS, 1995, p.64)

A leitura das representações gráficas requer dos estudantes a discriminação das diferentes variáveis visuais pertinentes a este tipo de representação, e que tenham consciência das correspondências entre as variações visuais dos gráficos e as alterações na escrita da forma algébrica. A capacidade de sintetizar uma grande quantidade de informações através de uma equação matemática ou da representação gráfica pode ser um grande diferencial. No entanto, a abordagem desse tema no Ensino Básico e Superior, geralmente, deixa muito a desejar, muitas vezes é feito de forma superficial, deixando de comparar as diferentes formas de representação, quando solicitadas as observações sobre as funções e suas características, como exemplo, domínio,contradomínio imagem, pré-imagem, raízes e pontos críticos. Deixando de utilizar todas as suas potencialidades no desenvolvimento de um comportamento crítico e criativo nos estudantes.

Existe uma grande distância entre a interpretação global, que se espera dos alunos, e a leitura ponto a ponto na qual o professor se baseia para introduzir o registro gráfico. Acrescentamos como uma dificuldade ao ensino de funções, a utilização dos recursos para estas aulas, na maioria das vezes, os professores priorizam o uso de quadro, papel e livro didático, ao de recursos tecnológicos, como o uso de softwares matemáticos, por vários motivos. Tais como: o tempo que aulas práticas ocupam, ainda mais se forem planejadas somente como ilustração, sem influência no aprendizado, pode-se pensar que o tempo dispensado às aulas assim, não é prioritário; a dificuldade de acesso a estes ambientes; o conhecimento das ferramentas (softwares matemáticos); e o tempo que o professor deve dispensar para investir em pesquisas e no preparo de aulas com estes recursos. Enfim, diante de tantos obstáculos o ciclo se repete, e o aprendizado continua defasado, em muitos ambientes de ensino. Mas isto não pode ser generalizado, pois existem professores buscando meios e aplicando estratégias para modificarem suas práxis e obter melhores resultados no aprendizado dos estudantes.

1.3 Consequências do ensino de funções de forma tradicional e fragmentada

Conforme dito anteriormente, chamamos de ensino na forma tradicional aquele que se atém às informações como são apresentados no livro didático. Inicialmente são apresentados os conceitos de procedimentos aos estudantes, depois e propõe-se que eles apliquem estes conceitos e procedimentos nos exercícios. Prioriza-se a forma algébrica à geométrica, ensina-se a construção dos gráficos através de tabelas, sem atentar para as características de cada tipo de função. Chamamos esta metodologia de fragmentada, poi os tipos de funções são ensinados separados, algumas características são cobradas repetidas vezes ao longo do processo, sem ser observadas as relações entre os conceitos e procedimentos.

Devido ao estudo fragmentado, sem tecer a rede de conceitos, colaborando para o conhecimento instantâneo - aprendem-se procedimentos para fazer avaliações e adquirir promoções - despresando o entendimento dos procedimentos, teoremas, justificativas e relações entre estes, observamos que as dificuldades apresentadas durante o estudo das funções, no ensino médio, causam algumas consequências posteriores. As deficiências no aprendizado acarretam problemas em outros conteúdos que fazem parte do currículo do ensino médio, a exemplo do entendimento das representações gráficas dos juros e cálculos financeiros. Também implicando na resolução de problemas de outras áreas de conhecimento, como no estudo dos movimentos ou da intensidade do som, em Física; nos desenvolvimentos de micro-organismos, em Biologia; na análise do grau de acidez de algumas soluções, em Química; na análise da escala Richter, em Geografia; entre outros, estendendo-se à outras ciências estudadas no ensino superior. A análise de funções em sua forma geométrica, ou o reconhecimento da relação entre as diversas formas de representação, ajudam a solucionar estes problemas. Sobre isto Lima (1999, prefácio) diz:

> [. . .] a Matemática oferece uma variedade de conceitos abstratos que servem de modelos para situações concretas, permitindo assim analisar, prever e tirar conclusões de forma eficaz [. . .] as funções afins, as quadráticas, as exponenciais, as logarítmicas e as trigonométricas, cada uma delas é estudada como o modelo matemático adequado para representar uma situação específica
>
> A fim de saber qual o tipo de função que deve ser empregado para resolver um determinado problema, é necessário comparar as características desse problema com as propriedades típicas da função que se tem em mente. Este processo requer que se conheçam os teoremas de caracterização para cada tipo de função. Sem tal conhecimento é impossível aplicar satisfatoriamente os conceitos e métodos matemáticos para resolver os problemas concretos que ocorrem, tanto no dia-a-dia como nas aplicações da Matemática às outras ciências e à tecnologia.

Estudos sobre o ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, no Ensino Superior, têm sido realizados revelando a dificuldade dos alunos com os conceitos abordados nessa disciplina, todos ligados diretamente ao estudo das funções e suas formas gráficas. Segundo Cabral e Catapani (2003 apud MONTEIRO, 2011, p.11):

> Os indicadores desta problemática estão comprovados pelas taxas de reprovação, repetência e abandono das disciplinas de Cálculo. De forma geral, embora a disciplina exija esforços e dedicação dos alunos, estes expressam muitas dificuldades em compreender os conceitos explorados.

Podemos observar, baseado em relatos de pesquisadores sobre o tema, que a deficiência no estudo de funções no ensino básico, se estende pelo ensino superior, nas disciplinas que exigem estes conhecimentos, não só em Cálculo Diferencial, em Matemática, como em disciplinas de outras ciências. Como o foco desta pesquisa não é relatar estes problemas, não foram levantados dados sobre isto, mas os mesmos podem ser observados em muitas pesquisas, algumas utilizadas como referência bibliográfica aqui.

Capítulo 2

Ensino e aprendizagem de Matemática

"O professor de Matemática é chamado com frequência de matemático." Fiorentini e Lorenzato (2007, p.3) prosseguem em seu texto explicando que existem diferenças entre o educador matemático e o matemático:

> [...] Embora tenham a Matemática em comum o olhar para este campo de saber pode ser diferente mesmo quando ambos pensam sobre o ensino desta matéria. [...] O matemático tende a conceber a matemática com um fim em si mesma, priorizando conteúdos formais e uma prática voltada a formação de novos pesquisadores. E o educador matemático em, contrapartida, tende a conceber a matemática como um meio ou instrumento importante à formação intelectual e social (dos estudantes).[...] tende a colocar a matemática a serviço da educação, priorizando, portanto, esta última.

Apesar de haver um recorte no texto, a exposição dos autores descreve dois tipos de pesquisadores distintos: os matemáticos buscando "novos conhecimentos e ferramentas matemáticas que possibilitam o desenvolvimento da matemática pura e aplicada" e os educadores matemáticos buscando "o desenvolvimento de conhecimentos e práticas pedagógicas que contribuam para uma formação mais integral, humana e crítica do aluno e do professor." Refletimos sobre a primeira afirmativa e sobre a ideia em relação aos profissionais, entendemos o que os autores informam, e sabemos que muitos profissionais ligados ao ensino de matemática vêem assim, mas acreditamos que é necessário ser matemático e educador, portanto o professor de Matemática deve ser matemático, mas não poderia ser professor de Matemática aquele que não é matemático, nem aquele que não tem formação em Licenciatura. Concordamos com a necessidade de ter um olhar diferenciado para prática, da preocupação com o aprendizado. E em especial concordamos com os objetivos desta linha de pesquisa sobre o ensino de Matemática denominado Educação Matemática (EM), que estes autores defendem e Fiorentini (1989 apud FIORENTINI e LORENZATO, 2007, p.5) define:

> De um modo geral, poderíamos dizer que a EM caracteriza-se como uma práxis que envolve o domínio do conteúdo específico (a matemática) e o domínio de idéias e processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e/ou à apropriação/construção do saber matemático escolar.

Mas discordamos da dicotomia, que existem nos discursos extremistas, além de existirem estes dois pesquisadores descritos, também existem aqueles que foram excluídos nesta descrição e em algumas discussões sobre o assunto: o matemático que é educador, aquele que é matemático por formação e é educador por se preocupar com a licenciatura, estudar e pensar em sua prática, buscando estratégias para educar, ou melhor, promover o aprendizado; e o educador que não é matemático, aquele que se preocupa com a práxis, com a forma de aprendizado do indivíduo e muitas variáveis importantes no campo da Educação, e que podem auxiliar os profissionais especialistas a melhorarem suas práticas, mas não tem conhecimento sobre as relações entre os conceitos e conhecimentos matemáticos; o primeiro é um matemático educador (e talvez não seja chamado de educador matemático) e o segundo não pode assim ser chamado. Então vemos nesta dicotomia, uma separação que foi criada, e que ao contrário do que poderia acontecer,beneficiando a Educação, torna-se um problema que dificulta os avanços dos objetivos da Educação e da Educação Matemática. Muitos fazem Matemática e Educação Matemática, e não deveriam ter que optar por se dizer matemático ou educador, são matemáticos e educadores, mas a distorção neste movimento, faz com que alguns prefiram ser chamados só de matemáticos para não serem "mal vistos" pelos cientistas matemáticos (só pesquisadores) que não atentam para Educação. O equilíbrio deveria ser cultivado, por todos que estão ligados ao desenvolvimento e perpetuação dos conhecimentos de Matemática. Conforme pensam Fiorentini e Lorenzato (2007, p.5):

> Lamentavelmente, ainda é frequente, em muitas instituições de Ensino Superior, a organização de dois grupos profissionais disjuntos - os matemáticos, de um lado, e os educadores matemáticos, de outro -, cada qual com suas expectativas, concepções e interpretações acerca do ensino da matemática.

O profissional que conseguem pensar nas duas perspectivas pode ser chamado de educador matemático, este deve conhecer os conteúdos de forma que possam ser 'revirados' e trabalhados com todas as conexões, mesmo que em sua prática não exponha todas as informações de um conteúdo, ele precisa saber como surgiu, as demonstrações, as relações, os conceitos, e decidir como e o que é importante em sua prática, para que possa preparar suas aulas com olhar no educando e na formação, preparar aulas investigativas e com vários recursos didáticos, e ter condições de sanar dúvidas, fazer as devidas intervenções, demonstrar que uma conjectura pode estar incorreta, com um simples contra-exemplo, ou ter certeza de que uma descoberta (de um estudante) tem fundamento, incentivando para que continuem em suas buscas, tudo baseado em seus conhecimentos matemáticos, enfim ter segurança para fazer matemática.

> Polya (1965) considera que um professor de matemática tem em suas mãos uma grande oportunidade: se utiliza seu tempo exercitando seus alunos em operações rotineiras, matará neles o interesse, impedirá seu desenvolvimento intelectual; porém, se estimula neles a curiosidade, poderá despertar-lhes o gosto pelo pensamento independente.(VILA e CALLEJO, 2006, p.17)

2.1 Estratégias de aprendizagem e o desenvolvimento do pensamento matemático

Muitos estudos sobre as estratégias de aprendizagem ocorreram nas últimas décadas, várias conquistas que passaram por diferentes teorias, comportamentalismo, psicologia cognitiva, psicologia sócio-cultural, entre outras vertentes ou direcionamentos. Não entramemos neste campo de estudo, mas usaremos nossa crença na existência e evolução das estratégias para preparar a abordagem de ensino que nos propomos fazer. Enfim resumindo estes avanços e estudos, acreditamos que o do conhecimento é construído e resignificado, que o indivíduo é capaz de pensar sobre os próprios pensamentos (metacognição), e sobre o próprio processo de aprendizagem, e que o processo de aprendizagem pode ser influenciado por diversos fatores, entre eles o ambiente, a relação entre as partes, a comunicação. Então, vemos o papel do professor como fundamental na agilidade da construção dos conhecimentos, um estrategista, claro que a aprendizagem poderá ocorrer sem este intermediador, mas com um bom intermediador (que pode aproveitar a gama de conhecimentos para criar as condições de aprendizado) o processo transcorrerá mais eficazmente. Este intermediador, o professor, é um coautor no processo de aprendizagem, não um simples transmissor de informações, pois já se sabe que as informações não são transferidas entre as mentes humanas, como fazemos com máquinas. Assim vemos que se o professor souber como poderá acontecer o aprendizado, estiver preparado e atento às mudanças, poderá preparar melhor suas estratégias de intervenção, para auxiliar os estudantes na formação de seus conhecimentos, propiciar o aprendizado e minimizar muitos problemas no ensino de matemática.

Considerando que todo conhecimento é construído através da resignificação de experiências, em geral, por meio de situações com as quais se tem alguma familiaridade, todos os conceitos e novos procedimentos terão um campo de validade restrito, de acordo com a vivência de cada estudante. Para Capra (1982, p.259) "a nova visão da realidade baseia-se na consciência do estado de inter-relação e interdependência essencial de todos os fenômenos - físicos, biológicos, psicológicos, sociais e culturais". Essa visão corrobora com a necessidade de estimular a amplitude do pensamento e sua associação de ideias, facilitando a construção do raciocínio lógico.

Para Zabala (1998), as aprendizagens dependem das características singulares de cada um dos aprendizes. Em sua obra, busca a concepção dos processos de ensino/aprendizagem e afirma que não é possível ensinar nada, sem partir da ideia de como as aprendizagens se produzem. Dificilmente pode-se responder à pergunta "como ensinar?", objeto da didática, se não se sabe sobre os níveis de desenvolvimento, os estilos cognitivos, os ritmos e as estratégias de aprendizagem. Então, um critério para estabelecer o nível de aprendizagem, quais as metodologias e estratégias de ensino devem ser usadas em classe serão as capacidades e os conhecimentos prévios de cada estudante, medidos através de atividades diagnósticas.

Ainda concordamos com este autor, em sua concepção construtivista, que permite compreender a complexidade dos processos de ensino/aprendizagem. Para este autor "o ensino tem que ajudar a estabelecer tantos vínculos essenciais e não-arbitrários entre os novos conteúdos e os conhecimentos prévios quanto permita a situação" (ZABALA, 1998, p.38). O papel ativo e protagonista do estudante não se contrapõe à necessidade de um papel também ativo do educador, assim a natureza da intervenção pedagógica estabelece os parâmetros em que pode se mover a atividade mental do estudante, passando por momentos sucessivos de equilíbrio, desequilíbrio e reequilíbrio. (ZABALA, 1998)

Segundo Huete e Bravo (2006), a Psicologia Cognitiva leva em conta a necessidade de desenvolver, em todo processo de instrução, duas dimensões do conhecimento. Na primeira dimensão, mencionam-se os corpos organizados de conhecimento: dados armazenados na memória, estrutura organizada de corpos de conhecimento, conhecimentos figurativos e conhecimento proposicional. Na segunda, são apresentados os processos metodológicos envolvidos nas novas aquisições que, sobretudo, incrementam a bagagem cognitiva e sua aplicabilidade em outras situações: conhecimento algorítmico, operativo, estratégias específicas de processamento. Estas dimensões englobam os quatro tipos de aprendizagem matemática - *memorização, aprendizagem algorítmica, aprendizagem de conceitos e resolução de problemas.* Não trataremos em detalhes destas aprendizagens, mas acreditamos que estas se complementam e devem ser exploradas em atividades diversificadas para que o aprendizado de um novo conhecimento (conteúdo do currículo) seja adquirido com significado e de forma global.

2.2 Metodologias e estratégias de ensino

São muitos os estudos sobre as estratégias e metodologias mais adequadas para o ensino da Matemática. Após algumas pesquisas, escolhemos algumas, relacionadas com as concepções de aprendizagem descritas anteriormente, para utilizarmos na preparação da abordagem para o ensino de funções. No PCNEM (1999, p.154) podemos verificar indicações para metodologias e estratégias que possam propiciar aulas mais proveitosas, que permitam o alcance de tantos objetivos:

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. [...] A maneira como se organizam as atividades e a sala de aula, a escolha de materiais didáticos apropriados e a metodologia de ensino é que poderão permitir o trabalho simultâneo dos conteúdos e competências. Se o professor insistir em cumprir programas extensos, com conteúdos sem significado e fragmentados, transmitindo-os de uma única maneira a alunos que apenas ouvem e repetem, sem dúvidas, as competências estarão fora de alcance. O estudo das **funções** permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria Matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no **conceito de função** e em **suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções**.

Apostamos na sugestão acima, e concordamos com a necessidade de dedicação na preparação de um ambiente de aprendizagem que facilite e estimule o pensar, e mantenha os estudantes em atividade, junto com o professor, desenvolvendo habilidades e competências. E acreditamos que o papel do professor é muito complexo, principalmente quando ele opta por ser o orientador da aprendizagem. Para Rogers (1951 apud CASTRO e RAMOS-DE-OLIVEIRA, 2002, p.115), "...não podemos ensinar diretamente outra pessoa; podemos apenas facilitar sua aprendizagem." Com isto o professor deve ser capaz de planejar, imaginando o que poderá ocorrer no momento de aplicação de suas estratégias de ensino, deixar acontecer e mediar, intervir sempre, mas nunca inibir ou impedir o andamento natural da construção, com cortes, indicações diretas dos erros, ou apresentação das soluções. Por isso será necessário conhecer bem seus objetivos, e ser capaz de elaborar intervenções específicas para cada situação, procurando responder às dúvidas com questionamentos que direcionem o estudante, mas não apontando de forma direta, e deixar o estudante agir em suas buscas, não impedindo que aprofundem o conhecimento do conteúdo que está sendo trabalhado. Para Lerner (2003, p.126), "quando o professor adota - provisoriamente [...]- uma atitude de neutralidade em face das posições dos alunos, quando não estabelece explícita, nem implicitamente sua avaliação do que [os estudantes[1]] dizem ou fazem, [estes] são [obrigados] a argumentar em defesa das suas hipóteses, das suas interpretações ou das suas estratégias." Desta forma o professor não será passivo, nem detentor do saber a ser transferido, será co-autor da construção do saber. Também devem ser motivadores e se preocupar com a segurança do estudante, para que o mesmo não desista de suas investigações. Maslow (1972 apud CASTRO e RAMOS-DE-OLIVEIRA, 2002, p.115) enfatiza o papel da segurança, no desenvolvimento de um indivíduo:

> A pessoa sadia interage, espontaneamente, com o ambiente, através de pensamentos e interesses e se expressa independentemente do nível de conhecimento que possui. Isto acontece se ela não for mutilada pelo medo e na medida em que se sente segura o suficiente para a interação.

Para propiciar o aprendizado de conceitos, nos atentamos para as seguintes informações:

> [...] aprender conceitos exige habilidades, devido ao caráter de abstração que esta ciência possui. É necessário perceber que esta foi construída de forma hierárquica, alguns conceitos sobre a definição de outros, e que conforme apontou Skemp (1980, p.31), um conceito não é definível em si mesmo, ainda que dê para exemplificá-lo. [...] Nesse sentido Cockcroft (1985, p. 84) destaca que a compreensão matemática deve ser conseguida mediante a realização de trabalhos práticos ou resolução de problemas. (HUETE E BRAVO, 2006, p.71)

Diante da dificuldade encontrada para ensinar e aprender conceitos, deve-se estimular o entendimento, ao invés de memorizá-los, procurando co-relações, exemplos e generalizações, além de estar atento para que as construções não sejam infundadas, isto é, para garantir o aprendizado do novo conceito, deve-se ter um diagnóstico que certifique se os pré-requisitos já são conhecimentos adquiridos. "Uma aprendizagem significativa obriga o aluno a observar, perguntar, formular hipóteses, relacionar conhecimentos novos com os que já possui, tirar conclusões lógicas a partir dos dados obtidos. Enfim, exige que construa paralelamente fatos, conceitos, princípios, procedimentos e estratégias relativas ao conhecimento matemático." (HUETE E BRAVO, 2006, p.24)

Os avanços nos estudos de estratégias de aprendizagem tiveram seu auge na década de 1990, acompanhada da inserção das TIC (Tecnologias da Informação e da Comunicação) nas classes, como recurso de ensino e aprendizagem e não apenas como instrumento de pesquisa, ou presente em aulas de informática e tecnologia. Os pesquisadores viram nestas o poder de criar contextos capazes de promover o uso apropriado de estratégias para o aprendizado. Coll (2008, p. 315) cita três características que demonstram este poder de 'ensinar a aprender':

---

[1] A autora utiliza o termo *crianças*, que preferimos trocar, por estarmos trabalhando com jovens do ensino médio.

> As TIC requerem, para seu funcionamento, uma determinada ordenação e a visibilidade das ações e oferecem uma rápida resposta para essas ações, favorecendo a tomada de consciência e a autoregulação cognitiva [...]. Em segundo lugar, as TIC promovem uma interação dinâmica com objetos de conhecimento e com sujeitos que interagem e compartilham sua aquisição estabelecendo um diálogo contínuo entre as nossas produções e as produções dos outros, o que nos permite observar a natureza das mudanças produzidas, aprender com os erros e reescrever nossa atividade mental, atuando como uma 'lupa' e como 'espelho' metacognitivos, que ampliam nossos rastos e mostram as rotas transitadas. Finalmente, suas capacidades multimídias e hipermídias aumentam as possibilidades de aprender novas formas de gestão do conhecimento graças à versatilidade dos formatos de representação da informação e a facilidade para criar e modificar redes de conhecimento.

O ambiente de aprendizagem também é peça fundamental nesta construção, e a habilidade de prepará-los tem que ser do professor, envolvendo sua formação, atitudes e crenças. Estão envolvidos neste ambiente a preparação das estratégias, a arrumação do ambiente físico, a distribuição dos estudantes (em grupos ou não, com os devidos cuidados nas escolhas do grupo), as intervenções a escolha das atividades investigativas e problemas. Sobre este ambiente Vila e Callejo (2006, p.29), explicam:

> [...] Ele é criado selecionando-se problemas que sejam acessíveis aos alunos, que não acarretem frustação, que pelo menos admita um tratamento parcial mais simples, mas que ao mesmo tempo suponham um desafio; valorizando-se a exposição de ideias, a argumentação e o espírito crítico; fomentando-se o trabalho em grupo, a comunicação de ideias, o contraste e o diálogo; envolvendo os estudantes em processos geradores de conhecimento, como definir, fazerem-se perguntas e perguntar, observar, classificar, particularizar, generalizar, conjecturar, demonstrar e aplicar.

Direcionando ao nosso objeto de estudo, encontramos nas Orientações Curriculares do Ensino Médio (OCEM, 2004, p.72) a seguinte sugestão sobre o ensino de funções:

> O estudo de funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras. Também é interessante provocar os alunos para que apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decrescimento (mais ou menos rápido). É conveniente solicitar aos

> alunos que expressem em palavras uma função dada de forma algébrica, por exemplo, $f(x) = 2x + 3$, como a função que associa a um dado valor real o seu dobro, acrescido de três unidades; isso pode facilitar a identificação, por parte do aluno, da ideia de função em outras situações, como, por exemplo, no estudo da cinemática, em Física. É importante destacar o significado da representação gráfica das funções, quando alteramos seus parâmetros, ou seja, identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando alteramos seus coeficientes.

E sobre a construção de gráficos de funções, sugerem:

> Sempre que possível, os gráficos das funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis. A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções. (OCEM, 2004, p.72)

Juntando à tudo isto um pouco do potencial do uso das investigações matemáticas, expostos por Ponte e outros (2003, p.23), tais como:

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor.

Para o desenvolvimento de uma aula (ou conjunto de aulas) de investigação teremos três fases, que podem ser aplicadas de várias maneiras:

> (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito,
>
> (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma,
>
> (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado.
>
> (PONTE, 2003, p.25)

Para Ponte e outros (2003), numa aula de investigação o professor deve dar autonomia para o estudante ser o autor de sua investigação e garantir que o trabalho flua e seja significativo do ponto de vista da Matemática, sendo assim deverá desempenhar uym conjunto de papéis: desafiar os estudantes, avaliar seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar os seus trabalhos.

Apropriados destes conhecimentos sobre ensino e aprendizagem, começamos a elaborar uma proposta didática para o ensino de funções.

Capítulo 3

Translações e transformações: uma proposta para o ensino de funções

Utilizando as estratégias e metodologias de ensino escolhidas e descritas acima, as transformações geométricas que os gráficos das funções sofrem ao variarmos as constantes de suas formas algébricas e a funcionalidade dos softwares matemáticos, criamos uma abordagem para o ensino de funções que descreveremos neste capítulo, junto com uma sequência de ensino.

3.1 Estudo da variação das funções

Inicialmente, faremos uma breve descrição de transformações geométricas, sem nos aprofundarmos nas definições e classificações, nos detendo somente nas informações que serão utilizadas neste trabalho. Uma transformação geométrica no plano é uma correspondência bijetora entre pontos de um plano sobre si mesmo. Algumas transformações podem preservar a forma da figura e conservar as distâncias entre dois pontos do plano, são chamadas de *transformações isométricas* (ou isometrias). Se as transformações não preservam as distâncias, mas preservam a forma, ampliam ou reduzem o tamanho da figura na mesma proporção, são chamadas *homotetias*. Aqui, utilizaremos também, as transformações que não são homotéticas, isto é, não preservam a forma da figura. Comparando uma figura com sua imagem após este tipo de transformação temos a impressão de que esta sofreu uma deformação em um só sentido, horizontal ou vertical, etas transformações são chamadas *transformações lineares horizontais*, e *transformações lineares verticais*, lembrando que as duas transformações podem ocorrer ao mesmo tempo, mas se a razão utilizada for a mesma nas duas direções, teremos uma homotetia. As transformações isométricas incluem as *translações*, *rotações* e *reflexões* (pontuais ou axiais), e podemos explicar, assim:

- As *translações* são transformações que movimentam a figura de uma posição à outra sem girar, sendo necessário especificar a distância e direção.

- As *rotações* são transformações que 'giram a figura' ao redor de um ponto (centro da rotação), de tal forma que as distâncias entre os pontos da posição anterior e os da posição nova sejam a mesma. Será necessário especificar o ângulo de giro e o sentido (horário ou anti-horário).

- As *reflexões* por retas são transformações que deslocam a figura através de uma reta, chamada eixo. Isto é as distâncias dos pontos da figura original (O_i) ao eixo são iguais aos da figura refletida (R_i) ao eixo, e o segmento entre estes pontos (O_iR_i) é perpendicular ao eixo.

Trabalharemos com as variações das funções: linear, modular, quadrática, exponencial e logaritmica, mas estas também se aplicam à outras funções. Começaremos com as funções em suas formas mais simples , assim:

$$r(x) = x$$

$$q(x) = x^2$$

$$m(x) = |x|$$

$$e(x) = k^x, \text{ com } k > 0$$

$$l(x) = \log_k(x), \text{ com } k > 0 \text{ e } k \neq 1.$$

Referiremo-nos a estas , no decorrer do texto, como *funções básicas*. O valor de k, base das funções exponencial e logarítmica, se variado também influenciam nas formas gráficas, o que pode atrapalhar algumas das observações sobre as transformações, então consideraremos este como um valor fixo, inicialmente. Nas atividades para os estudantes deveremos fixar k, escolhendo um valor (de preferência inteiro e maior que 1) para trabalhar somente a variação das outras constantes, em momentos posteriores devem ser trabalhadas as relações entre as formas gráficas e algébricas, para as funções exponenciais e logaritmícas com a variação de k. A partir dos gráficos das funções básicas podemos verificar algumas variações, ao modificarmos os valores das constantes que compõem a forma algébrica. Essas variações podem ser translações, reflexões ou transformações lineares, verticais ou horizontais, assim classificadas:

i) Translação horizontal: $g(x) = f(x - b)$ com $b \neq 0$.

   Os pontos $(x, f(x))$ são levados em $(x, f(x - b))$, o que provoca um deslocamento horizontal do gráfico da função $f(x)$ de b unidades, no sentido do sinal da constante, conforme mostrado na Figura (3.1).

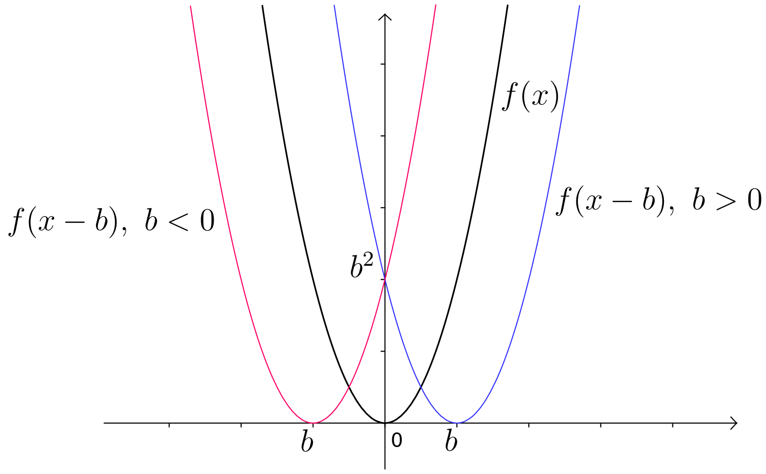

Figura 3.1: Translação horizontal da função quadrática $f(x) = x^2$

Ex_1: Para construir o gráfico da função $g(x) = (x-2)^2$, basta deslocar o gráfico de $q(x) = x^2$ para a esquerda 2 unidades. Assim, o vértice de $g(x)$ será $V(-2, 0)$ e a interseção com o eixo das ordenadas é o ponto $(0, 4)$.

ii) Translação vertical: $h(x) = f(x) + d$ com $d \neq 0$.

Os pontos $(x, f(x))$ são levados em $(x, f(x) + d)$, o que provoca um deslocamento vertical do gráfico da função $f(x)$, em d unidades no sentido do sinal da constante, conforme mostrado na Figura (3.2).

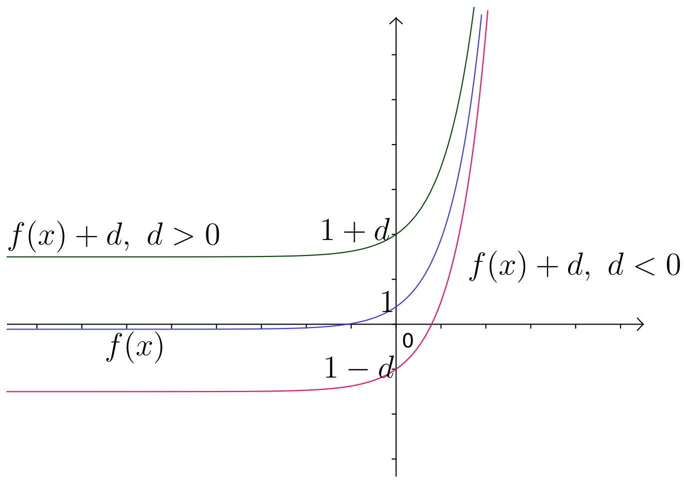

Figura 3.2: Translação vertical da função exponencial $f(x) = 2^x$

Ex_2: Para construir o gráfico da função $h(x) = 2^x + 3$, basta deslocar o gráfico de $e(x) = 2^x$, 3 unidades para cima. A interseção do gráfico de $h(x)$ com o eixo das ordenadas é o ponto $(0, 4)$ e sua assíntota horizontal é a reta $y = 3$.

iii) Transformação linear vertical: $i(x) = af(x)$ com $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

1º caso: $a > 0$: Os pontos $(x, f(x))$ são levados em $(x, af(x))$.

Vamos considerar $f(x)$ somente na forma básica, teremos para uma mesma abscissa, exceto nos pontos $(x, 0)$, as ordenadas $f(x)$ e $i(x)$, satisfazendo a seguinte relação:

a) Para intervalos do domínio em que $f(x) > 0$:
$f(x) < i(x)$ se $a > 1$
$f(x) > i(x)$ se $0 < a < 1$

b) Para intervalos do domínio em que $f(x) < 0$:
$f(x) > i(x)$ se $a > 1$
$f(x) < i(x)$ se $0 < a < 1$

Provocando um deslocamento linear vertical para todos os pontos da função, exceto nos pontos cuja ordenada é zero, isto é, nos zeros da função $f(x)$ (caso esta possua). Assim, o gráfico de $i(x)$ fica com aparência de mais 'alongado' ou mais 'achatado' em relação ao gráfico da função $f(x)$, isto é, os pontos (x, y) do gráfico de $f(x)$, serão deslocados verticalmente para (x, ay), conforme mostrado na Figura (3.3).

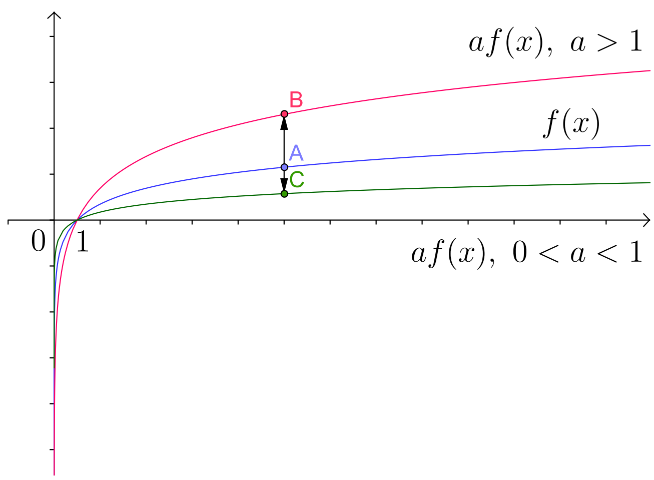

Figura 3.3: Transformação linear vertical da função logarítmica $f(x) = \ln(x)$

2º caso: $a < 0$: O gráfico de $i(x) = af(x)$ será simétrico ao de $J(x) = -af(x)$, em relação ao eixo $\overrightarrow{Ox}$. Como $-a > 0$ o gráfico de $I(x)$ pode ser construído usando o 1º caso deste item.

Ex_3: Para construir o gráfico da função $i(x) = 3log(x)$, basta utilizar o gráfico de $l(x) = log(x)$, conservar a raiz e deslocar para cima os pontos que estão acima do eixo $\overrightarrow{Ox}$ e para baixo os pontos que estão abaixo do eixo $\overrightarrow{Ox}$, de forma que para cada abscissa do domínio, as imagens sejam o triplo das imagens de $l(x)$.

Lembrando que para obter um esboço (ter a noção do gráfico) não será necessário fazer os cálculos para obter os pontos de $i(x)$. Por isso consideramos este método útil para ter uma visualização (noção) da forma geométrica.

iv) Transformação linear horizontal: $j(x) = f(cx)$ com $c \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

1º caso: $c > 0$: Os pontos $(x, f(x))$ são levados em $(x, f(cx))$.

Ainda considerando $f(x)$ somente na forma básica, como descrita anteriormente, teremos a variável x com coeficiente 1, assim podemos garantir que ao multiplicarmos x por c, em $j(x) = f(cx)$, teremos:

a) Para intervalos do domínio em que $f(x) > 0$:
$f(x) < j(x)$ se $c > 1$
$f(x) > j(x)$ se $0 < c < 1$

b) Para intervalos do domínio em que $f(x) < 0$:
$f(x) > j(x)$ se $c > 1$
$f(x) < j(x)$ se $0 < c < 1$

Provocando um deslocamento linear horizontal para os pontos da função, exceto do ponto de abscissa $x = 0$, que permanecerá com a mesma ordenada de $f(x)$. Comparando os gráficos de $f(x)$ e $j(x)$, perceberemos que o gráfico de $j(x)$ fica mais 'esticado' ou mais 'comprimido', horizontalmente, em relação ao gráfico da função $f(x)$. Pois os pontos $(x, f(x))$ do gráfico de $f(x)$, exceto $(0, f(0))$, são deslocados horizontalmente para $(\frac{x}{c}, f(x))$, conforme mostrado na Figura (3.4).

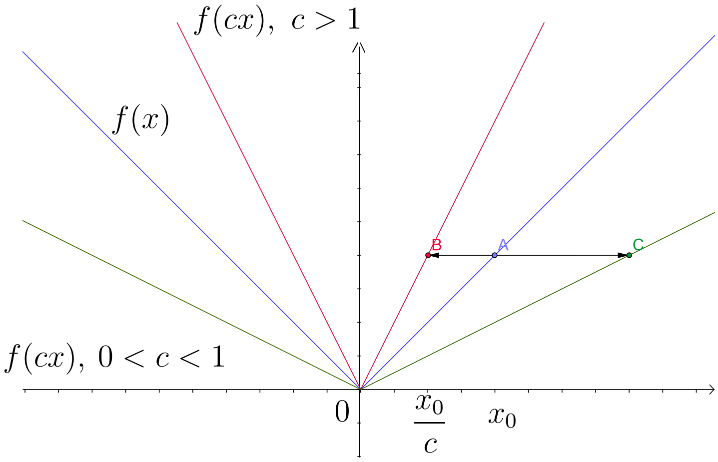

Figura 3.4: Transformação linear horizontal da função modular $f(x) = |x|$

2º caso: $c < 0$: O gráfico de $j(x) = f(cx)$ será simétrico ao gráfico de $J(x) = f(-cx)$, em relação ao eixo $\overrightarrow{Oy}$. Como $-c > 0$ o gráfico de $J(x)$ pode ser construído pelo 1º caso deste item.

Ex_4: Para construir o gráfico da função $j(x) = |2x|$, conservamos o ponto de interseção da função $m(x)$ com o eixo das ordenadas, $(0, m(0))$, neste exemplo $(0, 0)$. Deslocamos os outros pontos em direção ao eixo $\overrightarrow{Oy}$, comprimindo lateralmente o gráfico de $m(x)$. Para ter noção do gráfico de $j(x)$ ou construir um esboço, podemos imaginar que as imagens de $m(x)$ serão imagens de $j(\frac{x}{2})$, assim todos os pontos foram deslocados horizontalmente.

Obs.: Em algumas funções esta variação coincide com outras, não sendo muito perceptível a influência desta constante, mas é válido o estudo desta transformação para ser aplicada em algumas situações específicas. Também pode ser utilizado como atividade investigativa, a busca das relações entre esta transformação e outras. Assim como a demonstração algébrica deste fato.

Ex_5: Para construir o gráfico de $y = \dfrac{x^2}{4} + 1$ poderemos observar que :

a) $y = x^2$ sofreu uma transformação linear vertical ($a = \frac{1}{4}$) e depois uma translação vertical ($d = 1$).

b) $y = x^2 + 1$ sofreu uma transformação linear horizontal ($c = \frac{1}{2}$).

Assim, verificamos que a transformação linear horizontal pode ser substituída pelas outras transformações. Mas, em algumas atividades ela pode ser útil, por exemplo para resolver um exercício com o enunciado - Sabendo que $f(x) = x^2 + 1$, construa o gráfico da função $g(x) = f(\frac{x}{2})$ - a opção b é mais adequada que a opção a.

v) Reflexões

Nos casos de transformações lineares, podemos observar que as constantes (a ou c) negativas provocam uma simetria em relação aos eixos coordenados, chamadas de reflexões. Para $g(x) = -f(x)$ teremos uma simetria em relação ao eixo $\overrightarrow{Ox}$, e para $g(x) = f(-x)$ a simetria é em torno do eixo $\overrightarrow{Oy}$. Conforme mostrado na Figura (3.5).

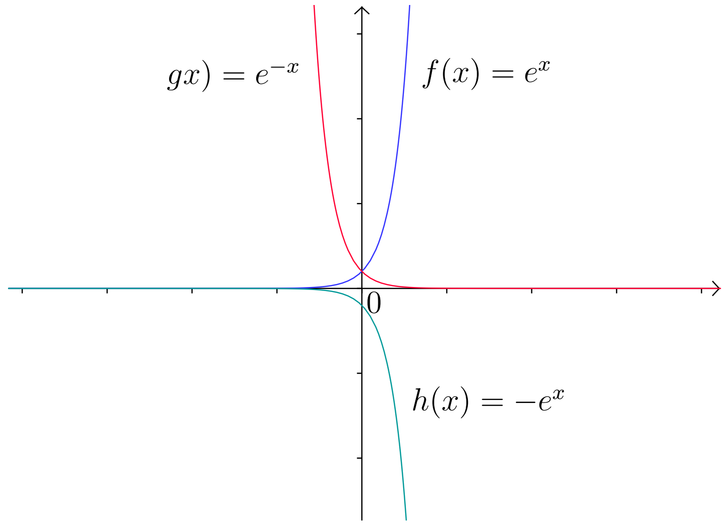

Figura 3.5: Reflexões em relação aos eixos coordenados da função exponencial $f(x) = e^x$

Juntando estas constantes de variação em uma única função teremos:

$$g(x) = af(cx - b) + d$$

Mas ao fatorarmos a forma algébrica de cada função para evidenciar estas constantes, nem sempre utilizaremos todas. Trabalhamos com todas as transformações separadamente, e é possivel perceber que os três tipos iniciais são mais utilizados, já que o quarto em várias situações será encoberto por outras.

Entendemos que assim deve ser proposto aos estudantes, depois de compreendida, separadamente, a função de cada constante, pode-se trabalhar com mais de uma constante na forma algébrica, com o intuito dos estudantes serem capazes de mexer na forma algébrica, destacando as constantes trabalhadas e montar o gráfico, utilizando as transformações sobre a função básica.

Ex_6: Para construir o gráfico de $t(x) = 2x^2 - 4x - 1$, podemos fatorar sua forma algébrica até aparecer a variável x uma única vez, para evidenciar as constantes de variação. Assim:

$$\begin{aligned} t(x) &= 2(x^2 - 2x - \frac{1}{2}) \\ t(x) &= 2(x^2 - 2x + 1 - \frac{3}{2}) \\ t(x) &= 2(x-1)^2 - 3 \end{aligned}$$

- ◇ Faz a translação horizontal do gráfico da função $q(x) = x^2$ para direita 1 unidade → obtém $r(x) = q(x-1)$, com o vértice em $(1, 0)$ e a interseção com $\overrightarrow{Oy}$ em $(0, 1)$.

- ⋄ Aplica a transformação linear vertical sobre $r(x)$ (dobrando os valores das ordenadas) $\rightarrow$ obtém $s(x) = 2r(x)$, com o vértice em $(1, 0)$ e a interseção com $\overrightarrow{Oy}$ em $(0, 2)$.

- ⋄ Sobre o gráfico de $s(x)$ aplica a translação vertical para baixo 3 unidades $\rightarrow$ obtém $t(x) = s(x) - 3$, com o vértice em $(1, -3)$ e a interseção com $\overrightarrow{Oy}$ em $(0, -1)$.

  Conforme 3.6:

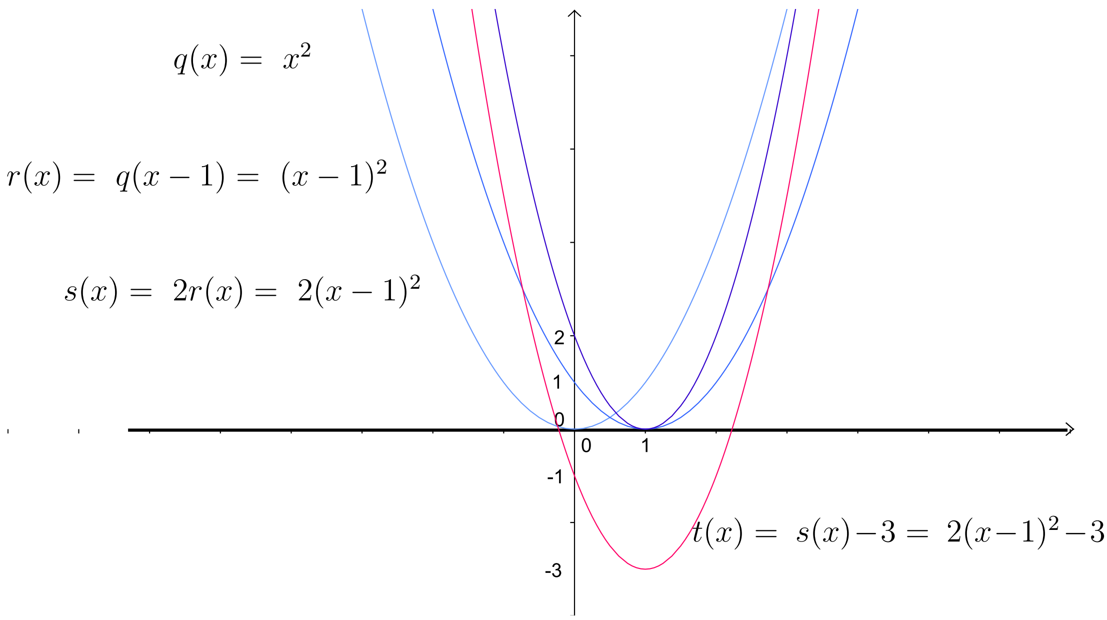

Figura 3.6: Construção do gráfico de $p(x) = 2(x-1)^2 - 3$

Nas atividades que serão propostas aos estudantes, espera-se que eles percebam estas variações, usando linguagem própria e não técnica, como: o gráfico subiu, desceu, deslocou para direita ou esquerda, girou, inverteu. Cabe ao professor após a construção do conceito coletivo, comentar a linguagem matemática correta e adequada ao curso.

3.2 Proposta alternativa

Duval (1988, traduzido por Moretti, 2011 p.99) descreve uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais, assim:

> O conjunto traçado/eixos forma uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Toda modificação desta imagem, que leva a uma modificação na expressão algébrica correspondente, determina uma variável visual pertinente para a interpretação gráfica. É importante,

> deste modo, identificar todas as modificações pertinentes possíveis desta imagem, quer dizer, ver as modificações conjuntas da imagem e da expressão algébrica: isto significa proceder a uma análise de congruência entre dois registros de apresentação de um objeto ou de uma informação. Com esta abordagem não estamos mais na presença da associação "um ponto - um par de números", mas na presença da associação "variável visual de representação - unidade significativa da expressão algébrica".

É com esta abordagem de interpretação global que podemos partir da forma algébrica para reconhecer a forma geométrica, enquanto o recurso ponto à ponto (tabela) não permite uma visão global destas variáveis visuais, por isto as dificuldades neste tipo de atividade são frequentes entre os estudantes.

Zuffi (1999, p.16) defendendo a observação da gênese histórica do conceito de funções para serem exploradas e aplicadas por professores do Ensino Médio em suas aulas, conclui:

> Os conhecimentos históricos podem, então, colaborar com os professores para uma reflexão mais profunda sobre as ideias matemáticas. Particularmente com relação às funções, eles podem auxiliar o professor na distinção entre suas concepções pessoais no assunto, entre as diversas formalizações matemáticas, propostas ao longo dos séculos, e sobre como isso se relaciona ao aprendizado de seus alunos.

Então, observando os conhecimentos relativos às funções de uma forma mais ampla e generalizada, como os matemáticos veem, propomos uma metodologia que trabalhe de forma global com as funções, partindo do geral para o específico, mostrando que função (independente da classificação e nomenclatura quanto ao tipo de sua forma algébrica) tem definição única, tem representação algébrica e geométrica (linguagens diferentes para o mesmo conceito), tem características comuns, atendem a algumas variações de acordo com as constantes da forma algébrica. Juntando a isto os recursos tecnológicos de que dispomos hoje, uma variedade de softwares matemáticos, e os benefícios que estes podem trazer à Educação Matemática, conforme Borba (1999, p. 294) explicita:

> As mídias, vistas como técnicas, permitem que "mudanças ou progresso do conhecimento" sejam vistos como mudanças paradigmáticas impregnadas de diferentes técnicas desenvolvidas ao longo da história. É neste sentido que no atual momento da Educação Matemática devemos testar estas metáforas teóricas geradas por diferentes pesquisas, para que consigamos desenvolver novas práticas pedagógicas que permitam que mais estudantes tenham acesso a estudar Matemática e a resolver problemas que sejam relevantes para sistemas seres-humanos-computadores, quer sejam estes propostos pelo professor, como no caso da experimentação, quer desenvolvidos pelos próprios estudantes, como no caso da modelagem.

Diante das novas perspectivas de ensino, pensando nas dificuldades e consequências deste processo e considerando os objetivos do ensino de funções, apresentados anteriormente, propomos uma mudança nos encaminhamentos didáticos e na ordem dos conteúdos relacionados ao estudo das funções, começando pela quebra da linearidade e optando pelo trabalho em rede; utilizando atividades que propõem a descoberta, elaboração de conjecturas e socialização destas, discussão e argumentação, contribuindo para que o conhecimento seja adquirido através da associação de ideias. Este modelo didático foi baseado na organização proposta pela Sequência Didática (ZABALA, 2007) e as questões têm o caráter investigativo (PONTE, 2003). Composta de uma sequência didática com atividades sequenciadas (exercícios que devem ser aplicados e resolvidos na ordem proposta, pois a sequência é planejada com o objetivo de construção de conhecimentos, em geral uma questão complementa a anterior ou prepara para a próxima). Zabala (2007) define seqüência didática como um termo de educação usado para se referir a um procedimento encadeado de passos, ou etapas ligadas entre si para tornar mais eficiente o processo de aprendizado. As sequências didáticas são planejadas e desenvolvidas para a realização de determinados objetivos educacionais, com inicio e fim conhecidos tanto pelos professores, quanto pelos estudantes. Para compreender o valor pedagógico e as razões que justificam uma sequência didática é fundamental identificar suas fases, as atividades que a constitui e as relações que estabelecem com o objeto de conhecimento, visando atender as verdadeiras necessidades dos estudantes.

Para que os objetivos sejam atingidos as atividades sequenciadas devem abranger todos os conteúdos curriculares do ensino de funções no ensino médio (neste trabalho acrescentamos somente um exemplo e alguns comentários, não caberia uma escrita tão grande e minuciosa de atividades, deixando a cargo de o professor preparar as outras atividades para aplicação em sua turma). Um dos objetivos das aulas de funções propostas neste trabalho, atendendo aos objetivos descritos em 1.1, é que os estudantes obtenham informações sobre gráficos, em especial, sobre a forma das curvas, aprendam a identificar e descrever os efeitos da variação das constantes (da forma algébrica) nos gráficos das funções, reconheça e construa gráficos sem utilizar tabelas, identificando as interseções com os eixos coordenados, o tipo de curva a ser traçada e outras características, sempre que necessário.

Esta sequência didática foi planejada de forma que o estudante consiga estabelecer as relações entre os coeficientes das funções e a forma do gráfico, explorando a forma fatorada (contraída) da expressão de modo que a variável x só apareça uma vez, uma sugestão da OCEM (2004) para o ensino das funções quadráticas, que estendemos a todos os tipos de funções estudados no Ensino Médio. Começando com as funções nas formas mais simples, gradativamente aumentamos as constantes nos termos da forma algébrica (que influenciam nas variações), até chegarmos a forma geral. Assim após conhecer o gráfico de $y = f(x)$, os estudantes poderão obter os gráficos de:

$$y = f(x) + k,\ y = f(x + k),\ y = kf(x) \text{ e } y = f(kx),$$

onde k é uma constante real. E ainda os gráficos de:

$$y = f(|x|) \text{ e } y = |f(x)|.$$

O conjunto de aulas para esta proposta será o mesmo que seria utilizado na forma convencional. Em geral, apresentam-se alguns conceitos (ou noção) de função, paridade, crescimento e outros, seguidos de uma sequência de funções específicas: função linear, função modular, função quadrática, função exponencial, função logarítmica e por último, funções trigonométricas. Propomos uma mudança na ordem destes conteúdos. Não falaremos de todas as informações (raiz, interseções, forma algébrica, forma geométrica, tabela e construção de gráficos) repetidas vezes para cada tipo de função. Falaremos sobre características ou pontos notáveis e comuns nos gráficos, para todas as funções a serem estudadas, independente do tipo. Inicialmente faremos uma separação por grupos que sofrem a mesma variação, para que os conhecimentos sejam construídos gradativamente. Não falamos neste trabalho de alguns conteúdos presentes e necessários no estudo de funções, O ensino de alguns conceitos precedem as aulas propostas aqui, e estão especificados como pré-requisitos na seção 3.3.1.

> Antes de tentar ensinar um novo conceito, é imprescindível conhecer quais são seus conceitos adjacentes e, para cada um deles, descobrir os contributários, assim sequencialmente até os conceitos primários. Essa concatenação conceitual é problemática: se na construção da estrutura de abstrações sucessivas determinado nível não é compreendido - ou mal compreendido -, qualquer avanço para conceitos derivados encontra-se em perigo. (HUETE e BRAVO, 2006, p.57)

Por isso, antes da aplicação desta sequência, precisamos garantir alguns conhecimentos e para tal pode ser feita uma revisão (ou ter o cuidado durante as aulas anteriores para que as construções destes conhecimentos possam ser utilizadas nas próximas construções). Sugerimos, após revisar o cálculo das raízes de equações, explicar o termo zero da função e comparar estes processos, aproveitando para mostrar no plano cartesiano que pontos assim estão sobre o eixo das abscissas e podem ser chamados de interseções da função com este, prosseguindo com a construção e relação de conceitos. Neste momento, podemos questionar sobre a interseção com o eixo das ordenadas e de forma rápida, preparar alguns termos e conceitos que serão necessários para os momentos posteriores. Para exemplificar tais procedimentos, seria viável utilizar funções variadas, não se detendo só a um tipo de curva. Lembrar que também sera necessário lembrar das noções de crescimento e decrescimento de funções.

A partir deste momento podemos iniciar a apresentação das funções específicas, nomeando e classificando estas funções por sua forma algébrica, justificando a nomenclatura e comentando que cada uma terá um gráfico diferente quando representada no plano cartesiano (forma geométrica específica). Aqui cabe ao professor optar por apresentá-las aos estudantes (com ou sem uso de um software matemático) ou não, no segundo caso deverá planejar um momento da atividade com o software, em que os estudantes poderão descobrir as formas geométricas, analisando a forma algébrica e classificá-las. Seguiremos com as observações das variações (para todos os tipos de funções), inicialmente, desejamos que eles percebam as relações entre as formas algébrica e geométrica, isto é, os movimentos que os gráficos das funções sofrem com a mudança das constantes na forma algébrica. Após conferir todas as conclusões coletivas a que os estudantes chegaram com as atividades propostas, e escrever um resumo destas variações, poderemos propor outras atividades (para sistematizar os novos conhecimentos): solicitar a construção dos gráficos, sem o software, e a observação dos gráficos para relacionar com a forma algébrica.

Durante estas atividades aproveitaremos para evidenciar os conceitos anteriores, então acrescentaremos atividades que eles deverão solucionar algebricamente e explicitar no gráfico as interseções com os eixos, os intervalos de crescimento e decrescimento, e outras observações que possam ser verificadas em cada caso. Ainda poderemos, a partir daqui, trabalhar com funções modulares do tipo $y = |f(x)|$ e $y = f(|x|)$, onde $f(x)$ pode ser qualquer função já trabalhada anteriormente; funções inversas, irracionais ou cúbicas, também podem ser inseridas, cabendo ao professor observar as possibilidades de acordo com a turma. No apêndice acrescentamos um plano de aulas com uma sequência didática e alguns exemplos de atividades sequenciadas, que poderão ser aplicadas, mas devem ser ampliadas, estendendo a todo o ensino de funções. O professor pode ficar à vontade para modificar e adequar ao seu ambiente de trabalho e turma. Sugerimos que ao passar atividades deste tipo, organize a turma em dupla ou em trio, pois as trocas e conjecturas realizadas entre os estudantes são muito importantes para o aprendizado. Para Moura (2007, p.14):

> A autonomia do sujeito que aprende é conquistada de forma mais ampla por intermédio do trabalho em grupo, pois os alunos começam a buscar estratégias para resolver problemas, e quando não conseguem ou não atingem o resultado esperado confrontam suas ideias, refletem juntos sobre o caminho percorrido, buscam nova solução para o problema. Estão praticando o exercício da metacognição.

Para esta proposta usaremos programas que desenhem gráficos a partir da forma algébrica das funções, permitindo que os estudantes detectem rapidamente as regularidades entre os gráficos das funções, estes auxiliam na visualização dos gráficos, permitindo que observações sejam feitas para responder às questões de investigação. Ainda podemos acrescentar o fato de tornar as aulas mais atraentes e lúdicas. “Pode-se notar que com a capacidade de geração de gráficos destas novas mídias há um deslocamento da ênfase algébrica dada ao estudo das funções para uma atenção maior à coordenação entre representações algébricas, gráficas e tabulares." (BORBA, p.293) No entanto, a utilização do computador na sala de aula requer uma preparação por parte dos educadores e do grupo, para que fiquem claros os objetivos e os combinados que devem ser seguidos para o trabalho fluir, este recurso deve ajudar no ensino da Matemática, levando o estudante a interagir com o programa, desenvolvendo habilidades, podendo trocar ideias com os colegas, argumentando e aceitando argumentos, comparando, percebendo seus erros e aprendendo com eles, enfim construindo conhecimentos.

Optamos por utilizar o Geogebra neste trabalho, por acharmos mais agradável e rápida a visualização algébrica e geométrica, em duas janelas simultâneas. Por ser um software livre pode ser utilizado em qualquer escola, inclusive os estudantes podem acessá-lo em seu ambiente de estudo extraclasse. Deixando claro que outros softwares também permitem a elaboração de atividades similares às propostas aqui expostas, e a escolha fica a critério do profissional. O objetivo do uso de um software é a agilidade e a possibilidade de construir gráficos próximos do real (aceitando as limitações das máquinas), para que sejam feitas algumas observações e investigações, sem que erros básicos de construção, que um estudante em fase inicial poderia cometer, sejam obstáculoss para as conclusões. Para Valente (1999, p.84), "o uso de software para o ensino pode ser um fator de estímulo para o aluno em sala de aula, além de ser um facilitador para sua aprendizagem." Além de possibilitar que o estudante adquira uma postura crítica e questionadora. O Geogebra é um software de Matemática dinâmica para utilizar em ambiente de sala de aula, que reúne Geometria, Álgebra e Cálculo. Não será necessário que o estudante tenha total conhecimento do software, uma vez que essa aprendizagem se dará de forma gradual, de acordo com as necessidades que aparecerem. Fica como sugestão uma apresentação rápida do software e a disponibilização de um tutorial, para consulta, antes do início das atividades, ou incentivo para que manipulem a ferramenta livremente a fim de descobrir seus recursos. É suficiente explicar a linguagem simbólica e, algumas informações podem ser passadas nos enunciados das atividades. Para o professor, que queira conhecer melhor a ferramenta, existem algumas apostilas e tutoriais, com explicações detalhadas sobre o Geogebra, na internet, inclusive no site do programa.

3.3 Sequência de ensino de funções

Apresentamos um planejamento para o ensino de funções e construções gráficas, com uma sequência didática e parte de uma atividade sequenciada. A sequência didática é dividida em momentos, onde o tempo destinado a estes deverá ser decidido pelo professor, para cada momento haverá uma atividade sequenciada. Aqui expomos dois exemplos de atividade sequenciada, e algumas sugestões para que o professor construa as outras.

3.3.1 Plano de aulas

Assunto: Funções e construções gráficas

Público alvo: Estudantes da 1ª série do Ensino Médio

Objetivos:

- ◇ Ler e interpretar dados ou informações, apresentados como tabelas, gráficos, equações ou representações algébricas.
- ◇ Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra.
- ◇ Identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades.
- ◇ Construir gráficos de funções utilizando as transformações geométricas e características das funções.
- ◇ Relacionar formas algébricas às formas geométricas das funções.

Pré-requisitos necessários a esta sequência de aulas:

- ◇ Proporcionalidade entre duas grandezas;
- ◇ Conceito de módulo;
- ◇ Noção de par-ordenado, conhecimento de sistema de coordenadas e plano cartesiano;
- ◇ Solução de equações (raízes);
- ◇ Noção intuitiva de função;
- ◇ Crescimento e decrescimento de uma função;
- ◇ Valor numérico de uma função;
- ◇ Determinar uma coordenada conhecendo a outra;

Materiais e tecnologias:

- ◇ Software Geogebra ou outros similares que permitam o trabalho com construção de gráficos;
- ◇ Computadores para estudantes e professor, data-show, quadro e pincel, roteiro de atividades sequenciadas.

Recomendações metodológicas:

- ⋄ Utilizar o laboratório de informática, dividindo a turma em equipes, com o mínimo de dois estudantes por máquina, para que haja a troca de conhecimentos e minimização de dúvidas.
- ⋄ Explicar os objetivos das atividades a serem executadas, enfatizando que ao término de cada sequência, eles deverão escrever suas conclusões baseadas nas observações do processo.
- ⋄ Explicar informações básicas para utilização do software.
- ⋄ Propor, inicialmente, atividades separadas pelos tipos de transformação geométrica, somente após o conhecimento de cada uma individualmente deverão ser propostas atividades onde as funções sofrem mais de uma transformação. Também iniciaremos com funções na forma fatorada, onde a variável x aparece apenas uma vez, ao final poderemos propor desafios para que os estudantes fatorem as formas algébricas e percebam as transformações necessárias para construção dos gráficos.

Dificuldades previstas

- ⋄ Dificuldades na utilização da ferramenta.
- ⋄ Fazer observações necessárias para conclusões.

3.3.2 Sequência didática

Cada momento está relacionado com uma parte do conteúdo e uma atividade sequenciada conforme o organograma 3.7 a seguir.

O primeiro momento foi preparado para apresentar e classificar as funções, os próximos momentos foram divididos de acordo com os quatro tipos de variações no gráfico, para cada tipo de variação serão necessários três momentos diferentes. Para não ser repetitivo na escrita optamos por enumerá-los com mais de um número, já que as ações são as mesmas, modificando apenas as atividades.

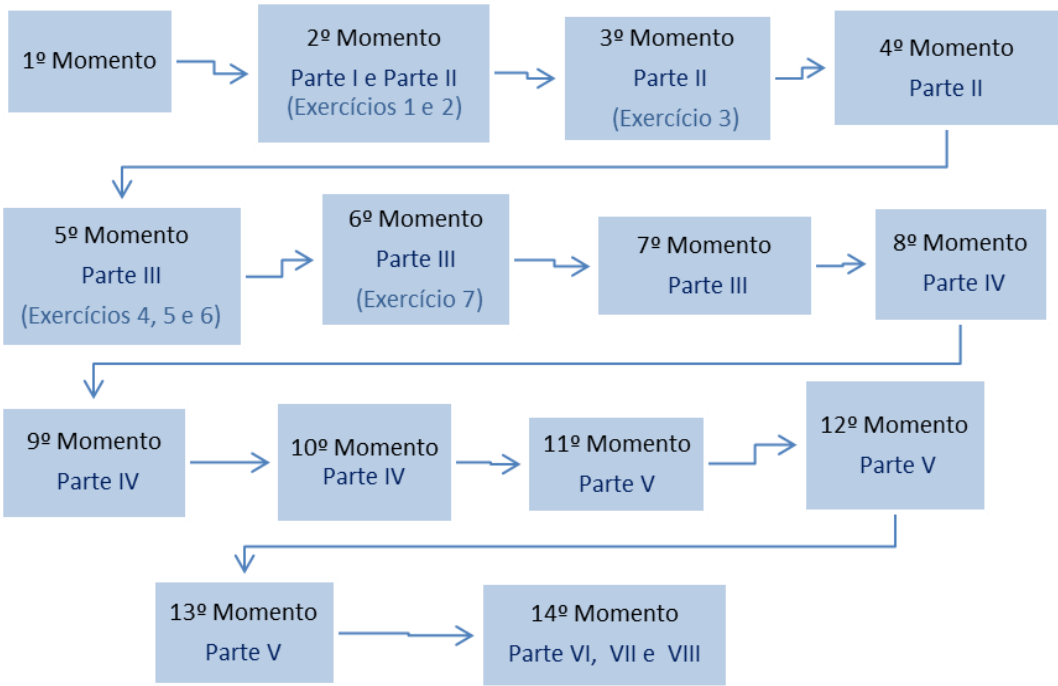

Figura 3.7: Organograma da Sequência Didática

1º momento: *Apresentação das funções nas formas geométrica e algébrica.*

Sugerimos iniciar com as funções: linear, modular, quadrática, exponencial e logarítmica (posteriormente funções trigonométricas e outras se achar necessário).

Apresentar o gráfico e a forma algébrica das funções:

$$f(x) = x,\ f(x) = x^2,\ f(x) = |x|,\ f(x) = 2^x \text{ e } f(x) = \log_2(x)$$

(nestas duas últimas, devemos iniciar com algum valor para a base, escolhemos 2, mas poderia ser qualquer outro), em ordem aleatória (no quadro ou slide), sem relacioná-los.

Solicitar que relacionem estes, utilizando cálculos mentais para encontrar pontos que satisfaçam as funções, se necessário discutir com um colega, e anotar a resposta para conferir depois. Após alguns minutos, o professor faz o levantamento de soluções e escreve a relação correta, descrevendo os nomes, comentando o que caracterizam a nomenclatura, mostrando nos gráficos um pouco da relação da nomenclatura com a curva. Exemplos de comentários que o professor poderá fazer:

- A função quadrática possui este nome devido ao maior expoente que aparece em sua forma algébrica.

- A curva da função exponencial cresce mais rapidamente (no caso de bases maiores que um) quanto maior for o expoente, devido às potências.

Definir interseção com os eixos coordenados, zeros da função, crescimento e decrescimento. Neste momento, o professor deverá instruir sobre as construções dos gráficos na forma básica, utilizando estas características definidas acima, dando os passos que serão necessários para cada tipo de função. Solicita que os estudantes repitam as construções, para sistematizar.

Caso perceba dificuldades, e ache necessário poderá comentar o uso de tabelas, relembrando que a função é um conjunto de pontos e pedir que construam estas funções com este recurso. (Esta metodologia é mais um recurso e não é o objetivo da atividade, logo não deverá ser priorizada em relação à outra. Para tanto, solicitar que eles determinem e apontem no gráfico as características acima, mesmo conseguindo construir o gráfico sem utilizá-las.)

2º, 5º, 8º e 11º momentos: *Construção de gráficos e regras de variação das funções*

Levar a classe para um ambiente com computadores, dividir em duplas (ou grupos, conforme a capacidade do ambiente), distribuir um roteiro com atividades, passos e comandos a serem efetuados pelo estudante para utilizar o software e resolver as atividades propostas. (Este procedimento só é necessário no 2º momento.)

Obs.: Caso seja necessário o trabalho pode ser concluído em casa, mas é melhor que seja realizado em classe, para que as intervenções necessárias e adequadas sejam feitas pelo professor, evitando assim que as respostas apareçam devido a alguma ajuda alheia, o que pode conduzir a perda do trabalho de reflexão e investigação. As ações abaixo podem ser realizadas na sala da turma.

Após o término da atividade, socializar respostas e validar em grupo, sempre que necessário o professor faz algumas intervenções para auxiliar a turma na construção coletiva das conjecturas esperadas (construção coletiva das regras de variação).

Aproveitar o momento para mostrar concavidade na função quadrática, e a existência de uma assíntota horizontal na função exponencial, e vertical na função logaritmica (passar somente a noção da existência desta reta, ou fazer intervenções para verificar se os estudantes perceberam a existência desta).

3º, 6º, 9º e 12º momentos: *Características específicas e identificação no gráfico.*

No laboratório de Informática, solicitar construções de gráficos, com o software, para responder às outras questões (sobre raízes, interseções com os eixos, concavidade - definir antes, crescimento, valores mínimos ou máximos, e outras características.)

Após o término da atividade, socializar respostas e validar em grupo, com intervenções do professor sempre que necessário, mas evitando ditar o que está certo ou errado, transforme as discórdias em questões, provoque reflexões e discussões.

4º, 7º, 10º e 13º momentos: *Relação de formas algébricas e geométricas.*

Em classe, para sistematizar o novo conhecimento:

1. Solicitar que construam gráficos com as conclusões dos momentos anteriores, sem o uso de tabelas, nem softwares.

2. Solicitar que relacionem os gráficos com algumas leis (listadas em atividade, ou questões de alternativas), para tal deverão usar as descobertas anteriores e justificar a resposta.

Socializar respostas, fazer intervenções necessárias para que concluam mais algumas informações, que por ventura não tenham sido percebidas e sanar dúvidas.

14º momento: *Misturando as variações.*

Solicitar construção do esboço gráfico (todos os tipos estudados), sem o uso do software ou tabelas, utilizando as características da função e relação do gráfico com os coeficientes, conforme conclusões sobre variações, também devem determinar alguns itens relativos a cada função (raízes, interseções com os eixos, concavidade).

Socializar respostas, fazer intervenções necessárias para que concluam algumas informações, que por ventura não tenham sido percebidas. Neste momento é interessante aplicar uma atividade avaliativa diagnóstica para que o professor possa perceber a necessidade de retorno em alguma construção, com novas atividades. (Este tipo de atividade pode ser feita em outros momentos durante o processo.)

Se achar necessário e acessível ao grupo, inserir estudo de máximos e mínimos, assíntotas (saindo da noção inicial exposta em momento anterior, aqui podem ser formuladas questões e solicitar as construções de gráficos das funções e suas assíntotas), funções modulares.

3.3.3 Atividade Sequenciada: construção de gráficos de funções

Parte I - Conhecendo o Geogebra - Instruções iniciais

Usando as ferramentas na barra de ferramentas, você pode fazer construções na janela de visualização com o mouse. Ao mesmo tempo, as coordenadas correspondentes e as equações são exibidas na janela de Álgebra. A barra de entrada é utilizada para introduzir as coordenadas, equações, comandos e funções diretamente; estes são exibidos nas janelas de visualização e Álgebra imediatamente após pressionar a tecla Enter.

Operação	Símbolo	Exemplo
Multiplicação	$*$	`2*5`
Potência	ˆ	`x^2`
Divisão	/	`2/5`
Raiz Quadrada	sqrt	`sqrt 5`
Módulo	abs	`abs x`

Tabela 3.1: Alguns comandos necessários

Não se preocupe em guardar todas essas sintaxes, ou seja, estrutura de fórmulas, pois ao escolher um operador ou comando, basta clicar em F1 que o software indica a estrutura a ser escrita.

Parte II - Translação vertical

Em cada item construa o gráfico das funções em uma mesma janela, escolhendo cores diferentes para cada função. Para mudar cor; na janela álgebra, clique com botão direito sobre a função, **propriedades**, abra a aba **cor** e escolha uma cor. Certifique-se que os eixos estão aparentes, caso não esteja clique **exibir** e **eixos**.

Exercício 1. Construir os gráficos de cada item em um mesmo plano. Ao término de cada item salvar.

1. $f(x) = x$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = x - 1$
2. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 2$, $h(x) = x^2 - 2$
3. $f(x) = |x|$, $g(x) = |x| + 3$, $h(x) = |x| - 1$

Responda todas as questões abaixo, observando os gráficos $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ de cada item (1, 2 e 3) acima. (obs.: tente responder todas as questões observando as funções do item 1, antes de passar para as do item 2, e assim sucessivamente.)

a. O que você acha que ocorrerá com o gráfico de $j(x) = f(x)+\frac{1}{2}$?

b. Retorne ao software, construa o gráfico de $j(x)$ e verifique se aconteceu o que você pensou.

c. Descreva com suas palavras o que ocorreu com os gráficos de $g(x)$, $h(x)$ e $j(x)$ se pensarmos no gráfico de $f(x)$ em movimento?

d. Acredita que isto ocorre para qualquer função?

Exercício 2. Construa um seletor: clique no botão **controle deslizante** (penúltimo da barra); na lista clique em **controle deslizante**; abrirá uma janela, marque **número**; em nome, confirme **a**; em intervalo aumente para -10 e 10; **aplicar**; clique em um ponto próximo dos cantos da tela de visualização.

Mexa, com o mouse no ponto **a**, para direita ou esquerda. Ao movimentar o seletor **a**, você está variando os valores de **a** sobre a reta real.

a. Construa o gráfico de $g(x) = 2^x + a$.

   Com o mouse mexa no ponto **a**, pare sobre **a=0**, observe o gráfico e a forma algébrica (na janela de Álgebra), depois movimente para o sentido positivo. O que ocorreu com o gráfico de $g(x)$? Variando **a** para o sentido negativo, o que ocorre com o gráfico $g(x)$?

b. Você é capaz de escrever uma regra para estas variações e verificar se ocorre com outras funções (diferentes da exponencial)?

c. Supondo que você já conhece o gráfico de uma função $f(x)$ qualquer, como construiria o gráfico de $g(x) = f(x) + 4$ e $h(x) = f(x) - 4$?

d. Faça $f(x) = 3^x$, substitua nas leis de $g(x)$ e $h(x)$, acima e construa o gráfico das três funções, com o uso do software. Ocorreu o que você esperava?

Após socializar respostas com a turma e professor, registre o conceito coletivo aqui.

Exercício 3. Lembrando que zero da função é o valor de x que anula $f(x)$, isto é, $f(x) = 0$, responda os seguintes itens:

a. Calcule o zero das funções do exercício E_1 e marque o ponto $(x_0, f(x_0))$ nos gráficos destas funções, que você fez, anteriormente.

b. Agora responda, os pontos marcados tem algo em comum? Você sabe por que isto ocorreu?

c. Na função $f(x) = 3^x$, qual o valor de x tal que $f(x) = 0$? Qual o zero da função $h(x) = f(x) - 3$?

d. Observou alguma regularidade sobre a interseção do eixo das abscissas $(\overrightarrow{Ox})$ com o gráfico de uma função?

e. O que poderemos fazer se quisermos encontrar a interseção da função com o eixo das ordenadas $(\overrightarrow{Oy})$? Antes de responder, faça alguns testes usando os gráficos já construídos.

Parte III - Translação horizontal

Exercício 4. Pense e responda:

a. Na parte anterior você trabalhou comparando funções, onde ocorria um acréscimo na variável y, isto é, uma nova função $g(x)$ é a função $f(x)$ acrescida de uma constante k, $g(x) = k + f(x)$, e isto provocava uma variação gráfica. E se este acréscimo for feito na variável x, o que pode ocorrer com a função? Para ajudar nesta solução, pense no problema seguinte.

b. Um criador quer engordar um animal para que chegue em certo peso P até o final do ano, e para isto fornece a mesma quantidade de ração Q diariamente, se o criador aumentar a quantidade de ração diária, o animal obterá o peso P no final do ano, antes ou depois? (considere que outras situações não influenciam nesta engorda) E se ele diminuir a quantidade de ração? Nesta situação o peso P é uma função da quantidade de ração Q?

Exercício 5. Construa os gráficos de cada item em uma mesma janela, usando cores diferentes para cada função. Lembre-se de salvar cada item, ao concluí-lo.

1. $f(x) = 5^x$, $g(x) = 5^{(x+1)}$, $h(x) = 5^{(x-1)}$
2. $f(x) = x^2$, $g(x) = (x + 3)^2$, $h(x) = (x - 3)^2$
3. $f(x) = |x|$, $g(x) = |x + 2|$, $h(x) = |x - 1|$

Observando os gráficos $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ de cada item, responda para todos os itens:

a. O que você acha que ocorrerá com o gráfico de $j(x) = f(x + \sqrt{3})$?

b. Retorne ao software, no arquivo salvo para cada item, construa o gráfico de $j(x)$, e verifique se aconteceu o que você pensou.

c. Descreva com suas palavras o que ocorreu com a os gráficos de $g(x)$, $h(x)$ e $j(x)$ se pensarmos no gráfico de $f(x)$ em movimento.

d. Você acredita que isto ocorre para qualquer função?

Exercício 6. Em uma nova janela, construa um seletor **b** (repetindo o procedimento anterior, mas nomeando como **b**).

a. Construa o gráfico de $g(x) = \log_2(x + b)$. Para tal, digite $f(x) = \ln(x + b)/\ln(2)$.
   Com o mouse mexa no ponto **b**, pare sobre **b=0**, observe o gráfico e a lei, depois movimente para o sentido positivo. O que ocorreu com o gráfico de $g(x)$? Variando **b** para o sentido negativo, o que ocorre com o gráfico de $g(x)$?

b. Você é capaz de escrever uma regra para estas variações e verificar se ocorre com outras funções (diferentes da logarítmica)?

c. Supondo que você já conhece o gráfico de uma função $f(x)$ qualquer, como construiria o gráfico de $g(x) = f(x + 4)$ e $h(x) = f(x - 4)$?

d. Faça $f(x) = x$, substitua nas leis de $g(x)$ e $h(x)$, acima e construa o gráfico das três funções, com o uso do software. Ocorreu o que você esperava?

e. As variações da parte I e II são iguais para alguma função?

Exercício 7. Baseado nos gráficos já construídos anteriormente, no exercício 5:

a. Encontre as interseções dos gráficos destas funções com o eixo das abscissas. Depois marque-as nos gráficos.

b. Verifique se os pontos de interseção com o eixo $\overrightarrow{Ox}$ (zeros da função) atendem a observação que você fez no exercício 3.

c. Você observou alguma regularidade com relação a interseção do gráfico com o eixo $\overrightarrow{Oy}$?

d. A função $f(x) = \log_2(x)$ interseta o eixo $\overrightarrow{Oy}$? E a função $h(x) = f(x + 2)$? Em caso afirmativo, escreva as coordenadas do ponto de interseção.

e. O que você verificou para encontrar a interseção da função com o eixo das ordenadas $\overrightarrow{Oy}$ no exercício 3, também vale para as funções desta parte?

f. Você conhece alguma função que não interseta o eixo das ordenadas? Será que existem outras?

Após socializar respostas com a turma e professor, registre o conceito coletivo.

Parte IV - Transformação linear horizontal

Seguindo as ideias anteriores, criamos exercícios que envolvem a comparação das funções $f(x)$ e $g(x) = f(cx)$, com c constante e diferente de zero. E questionamos sobre as observações possíveis, algumas questões dos itens anteriores serão repetidas, e outras adequadas as variações deste item. Sugerimos inserir algumas questões como:

Exemplo a. Observando o gráfico da função $g(x)$ e comparando com o de $f(x)$, podemos dizer que houve um deslocamento de $f(x)$, sem mudar sua forma ou tamanho?

Exemplo b. Clicando na figura do gráfico de $f(x)$ e arrastando pelo plano, você consegue posicioná-la de forma a sobrepor o gráfico de $g(x)$?

Exemplo c. Existe algum ponto no gráfico de $g(x)$ com coordenadas iguais aos de um ponto de $f(x)$?

Parte V - Transformação linear vertical

Neste item as questões e intervenções podem ser iguais as da Parte IV, acrescentando aquelas em que são feitas as comparações entre estas duas variações, como foi feito para as Partes II e III.

Parte VI - Todas as variações juntas

Aqui as atividades devem misturar mais de uma variação, aos poucos e ao final de uma sequência pedir para que criem uma regra ou fórmula, utilizando a escrita geral.

Exemplo a. Agora que já observaram algumas variações, descreva com suas palavras qual a função de cada constante real a, b, c e d na função $g(x) = af(cx - b) + d$, quando comparadas com a função $f(x)$.

Exemplo b. Escreva uma regra resumindo todas as variações que estudamos. Se eu conhecer o gráfico de $f(x)$ como poderei construir o de $g(x) = af(x - b)$, e o de $h(x) = f(cx) + d$?

Exemplo c. Fatore a forma algébrica da função $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$ para escreve-la de forma que as constantes que influenciam na forma geométrica fiquem explicitas. Depois construia o gráfico, descrevendo as transformações que foram utilizadas.

Parte VII - Concavidade, assíntotas, máximos e mínimos

Algumas intervenções que cabem aqui, adequadas a cada função:

Exemplo a. Nesta função existe algum ponto que tem ordenada menor que todas as outras do gráfico? (Repete para maior.)

Exemplo b. Podemos dizer que todos os pontos deste gráfico estão acima de uma reta, como se o gráfico estivesse apoiado sobre uma reta horizontal? Em caso afirmativo, que reta é esta? (Repetir para situado abaixo de uma reta)

Parte VIII - Outras funções modulares

Fazer questões e intervenções, aplicando módulo em funções já estudadas. A seguir, um exemplo, que deve ser ampliado, com mais de um caso, ou feito em partes, dependendo do nível em que o grupo se encontra, para que as conclusões esperadas possam ser percebidas mais facilmente.

Exemplo 1. a. Construa a função $f(x) = x - 4$.
b. Determine, com o uso do software, suas raízes.

Exemplo 2. a. Construa a função $g(x) = |x - 4|$
b. Determine, com o uso do software, suas raízes.

Exemplo 3. a. Construa a função $h(x) = |x - 4| - 1$
b. Determine, com o uso do software, suas raízes.

Exemplo 4. a. Construa a função $i(x) = ||x - 4| - 1|$
b. Determine, com o uso do software, suas raízes.
c. Comparando $f(x)$ com $g(x)$, o que ocorreu?
d. Comparando $g(x)$ com $h(x)$, o que ocorreu?
e. Comparando $h(x)$ com $i(x)$, o que ocorreu?
f. A presença do módulo numa função alterou a forma gráfica? Como?

Estas atividades devem ser ampliadas para dar continuidade ao trabalho, envolvendo os outros conteúdos pertinentes ao estudo das funções no Ensino Médio. Caso tenha tempo também podemos trabalhar com as trigonométricas, funções definidas por várias sentenças, função do terceiro grau, irracionais, e assim aprofundar o estudo conforme o desenvolvimento da turma. Ainda podem solicitar que construam desenhos utilizando o software e as funções, colocando restrições de intervalos, se necessário, variando cores, pintando áreas, e explorando outras ferramentas que o software oferece.

Observações:

1. Quando trabalhar com funções trigonométricas, acrescentar um tópico para análise de períodos.
2. No trabalho com funções quociente ou irracionais, analisar domínio e restrições.

Conclusão

Com a pesquisa bibliográfica, que realizamos durante este trabalho, pudemos verificar que existem muitos educadores preocupadas com a mudança no ensino de funções para que aconteça aprendizagem significativa de forma que estes conhecimentos possam ser aplicados posteriormente, vimos muitos relatos de dificuldades nas construções gráficas e percepções de características nas diversas formas de representação das funções, devido a forma de ensino. Assim como percebemos que possuem muitos estudiosos na área da Educação Matemática que defendem o uso de softwares nas classes de matemática, são inúmeros os trabalhos escritos sobre o uso destes softwares no ensino de funções, em sua maioria ligados a função quadrática, devido à influência dos coeficientes do polinômio de segundo grau que define a função, lembrando que estas relações para este tipo de função são mais discutidas e trabalhadas, e já estão inseridos na maioria dos livros didáticos. Também é grande a quantidade de teorias e estudos para melhorar o ensino, incentivando o crescimento de orientadores na construção do conhecimento de Matemática, onde o papel do professor passa de transferidor do saber para orientador de estudantes, que passarão a fazer Matemática. "A matemática é uma criação da mente humana, e seu ensino deve transformar-se em autênticos processos de descoberta por parte do aluno. *Não se aprende matemática, faz-se.*" (HUETE e BRAVO, 2006, p.21). Gravina e Santarosa (1999 apud ROCHA, 2006, p.2) argumentam que:

> No contexto da Matemática, a aprendizagem nesta perspectiva depende de ações que caracterizam o 'fazer matemática': experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar. É o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento, baseada essencialmente na transmissão ordenada de 'fatos', geralmente na forma de definições e propriedades. Dessa forma faz-se necessário que os professores se disponham a refletir sobre suas práticas para implementar atividades que possam contribuir para um melhor aprendizado de seus alunos.

Como o objetivo desta pesquisa foi encontrar uma forma de ensinar funções, dando ênfase as construções gráficas, atendendo aos objetivos propostos pelos parâmetros curriculares nacionais, minimizando dificuldades de aprendizado e aplicação destes conteúdos em outros conteúdos ou ciências. Um de nossos focos foi a aprendizagem, para tal buscamos referenciais teóricos, estudos que nos orientassem e auxiliassem à entender as influências no aprendizado, e estratégias que pudessem auxiliar no ensino para promover uma aprendizagem significativa. Tivemos como propósito elaborar um conjunto de intervenções e atividades exploratórias, voltadas para o ensino de funções, para serem desenvolvidas em classes comuns. E algumas atividades para serem aplicadas em um laboratório de informática, utilizando-se o Software Geogebra, para ajudar o educando a compreender o conceito e a relação entre as formas das funções. Caso na escola não tenha computadores para uso dos estudantes, pode-se fazer alguns ajustes na atividade sequenciada e utilizá-la como atividade extraclasse em grupo. Apesar de não ter sido possível analisar os resultados desse trabalho em classe, após esta pesquisa, utilizando a sequência didática conforme apresentada aqui, pode-se verificar com a aplicação de algumas atividades, em momentos anteriores (aperfeiçoamos e colocamos aqui algumas atividades que foram aplicadas para estudantes da 1ª série do ensino médio antes da confecção deste trabalho) que os resultados obtidos foram favoráveis à aprendizagem dos estudantes, possibilitando conjecturas, criação de hipóteses, trocas de informações, e empenho na busca pelas soluções, por parte dos educandos.

É importante desprendê-los de tabelas, pois somente com este método os estudantes não estarão aptos a observar algumas características, os pontos podem ser escolhidos de forma aleatória. Mas se o professor solicitar informações específicas, além da construção gráfica o estudante poderá sentir a necesidade de observar a função com mais detalhes, e não somente como um conjunto de pontos. Se não forem acostumados a questionar, duvidar, investigar, serão passivos, aceitarão o mais simples e se tornarão meros repetidores de procedimentos. Cabe ao professor estimular (ou provocar) isto, inserindo, em atividades de classe e avaliativas, questões que necessitem de análises, conjecturas e o uso de conceitos adquiridos durante a construção do aprendizado. Assim um método que só permite a construção gráfica, não será suficiente para que os estudantes respondam todas as questões.

Durante esta pesquisa tivemos acesso ao capítulo do livro As ideias da Álgebra, que traz uma técnica para construir gráficos de funções, também baseada nas transformações geométricas, similar à proposta aqui, com diferenças na abordagem, pois utiliza um recurso para iniciar a construção, que o autor chama de 'caixa preta', que ao ser preenchida conforme as instruções dadas, pode-se perceber qual transformação está ocorrendo e como variar o gráfico da função básica; lembrando que técnicas como esta funcionam como algoritmos, não proporcionam a investigação e descoberta, a menos que seja proposta uma atividade anterior à informação da forma prática, para que os estudantes possam descobrir e entender as passagens e regularidades da técnica. Também encontrei muitos artigos e teses sobre funções. Com isto percebi que muitos educadores estão repensando as estratégias de ensino de funções, e desta forma já podem estar ocorrendo em muitos ambientes de ensino, aulas diferentes, pelo menos alguns professores, que já leram alguns destes materiais, podem estar aplicando, ou modificando de alguma forma sua prática.

Vimos algumas vantagens nesta proposta, o uso do software auxilia os estudantes a relacionar as formas algébricas e geométricas, visualizá-las e com a possibilidade de mover os gráficos na janela de visualização do geogebra, observando as variações na forma algébrica (na janela de álgebra), o uso do seletor (que também permitem alguns movimentos) auxilia nas observações e aumentam as possibilidades de conclusões, aprofundando mais os conhecimentos (se compararmos com atividades sem o uso de um software). Com a junção das estratégias utilizadas, daremos condições para os estudantes se apropriarem de ideias, que o levam a ver algumas formas algébricas e imaginar uma forma geométrica bem próxima do real, assim como fazemos quando lemos as palavras bola ou boneca, e remetemos nossos pensamentos a estas imagens, imediatamente.

Reconhecer e relacionar formas algébrica e geométrica de uma função, construir sem precisar memorizar ou ver tabelas, visualizar o comportamento das funções, entender o comportamento das funções são habilidades necessárias para estudantes que utilizarão a matemática em cursos superiores, como por exemplo no estudo de Cálculo Diferencial e Integral, portanto acreditamos ser imprescindível a mudança no ensino de funções, de forma que estas habilidades possam ser despertadas e motivadas, nos estudantes.

Referências Bibliográficas

[1] BORBA, M. C. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In: BICUDO M. A. V. (Org.).**Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Ed. UNESP, 1999. p.285-295.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica - SEB. Departamento de Políticas de Ensino Médio. **Orientações Curriculares do Ensino Médio. Matemática**. Celi Aparecida Espasandin Lopes. Brasília, DF, 2004. 402p.

[3] BRASIL. Secretaria de Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**. Brasília, DF, MEC, 1999. 4 v. v. 3. 58p.

[4] CASTRO, E. A. e RAMOS-DE-OLIVEIRA, P. **Educando para o pensar**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002. 127p.

[5] CAPRA, Fritjof. **O ponto de mutação**. São Paulo: Cultrix, 1982.

[6] COLL, César e MONEREO, Carles. **Psicologia da Educação Virtual**: Aprender e ensinar com as tecnologias da Informação e da Comunicação. Porto Alegre: Artmed, 2008. 365p.

[7] DUVAL, Raymond. Traduzido por Moretti, M. T. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **REVEMAT**, Florianópolis (SC), v. 6, n. 2, p.96-112, 2011. Disponível em <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2011v6n2p96>. Acesso em: 12 nov. 2012.

[8] FIORENTINI, D. e LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2007. 248p.

[9] GRAVINA, M. A. O quanto precisamos de tabelas na construção de gráficos de funções? **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n.17, p.27-34, 2º sem, 1990.

[10] HUETE, J. C. Sánchez e BRAVO, J. A. Fernandéz. **O Ensino da Matemática**: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2006. 216p.

[11] LERNER, Delia. O ensino e o aprendizado escolar: Argumentos contra uma falsa oposição. In: CASTORINA, J. et al. **Piaget-Vygotsky**: Novas contribuições para o debate. São Paulo: Ática, 2003. p.87-146.

[12] LIMA, Elon Lages. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 1999. 237p.

[13] MARKOVITS, Z.; EYLON, B.; BRUCKHEIMER, M. Dificuldades dos alunos com o conceito de função. In: Arthur F. Coxford e Alberto P. Shulte (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p.49-69.

[14] MONTEIRO, Alessandro. **Estudo de Funções Através de uma Abordagem Geométrica Utilizando o Software Geogebra**. Belo Horizonte: UFMG, 2011. 35p.

[15] MOURA, Regina C. A. Trabalho em grupo na sala de aula. **Presença Pedagógica**, Minas Gerais, v.13, n.78, p. 11-16, nov./dez. 2007.

[16] PIRES, Célia Maria Carolino. **Currículos de Matemática**: Da Organização Linear à ideia de Rede. São Paulo: FTD, 2000. 223p.

[17] PONTE, J. P.; BROCARDO, J. e OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizomte: Autêntica, 2003. 149p.

[18] ROCHA, J.; MIRAGEM, F. F. Explorando a Função Quadrática com o Software Winplot. **Novas Tecnologias na Educação** CINTED-UFRGS, Rio Grande do Sul, v.8, n.3, p. 10, dez. 2010.

[19] THAELER, John S. Transformações de entrada e saída em gráficos básicos: um método de traçar gráficos. In: Arthur F. Coxford e Alberto P. Shulte (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p.263-278.

[20] VALENTE, J. A. Análise dos Diferentes Tipos de Software usados na Educação. In: Valente, J. A. (org.). **O Computador na Sociedade do Conhecimento**. Campinas: NIED/ Unicamp, 1999. 115p.

[21] VILLA, A. e CALEJJO, M. **Matemática para aprender a pensar**: o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006. 211p.

[22] ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

[23] ZUFFI, Edna Maura. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do Conceito de Função. **Educação Matemática em Revista**, Ano 8, n. 9. Artigo, p.10-16.

Referências Eletrônicas

[1] http://www.edumat.com.br/software-matematicos

[2] http://www.geogebra.org/download/install.htm

[3] http://www.professores.uff.br/.../softweres_diversos.doc