



Programa PIBID/CAPES
Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

TEORIA E APLICAÇÕES

Autor: Fabricio Gomes

Orientador: Nilton Barroso

Fabricio de Jesus Leite Gomes

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS
Teoria e Aplicação.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Departamento de Matemática da Universidade de
Brasília, como parte dos requisitos para obtenção
do grau de

Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Nilton Barroso

Brasília-DF
2017

Esta é a Página da Ficha de Catalogação com os dados internacionais de Catalogação, fornecidos pela Biblioteca Central da UnB”.

OBSERVAÇÃO: O aluno deve se dirigir até a Biblioteca Central da UnB e solicitar Ficha Catalográfica. Posteriormente a Biblioteca envia de volta a Ficha com todos os dados.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento Pós-Graduação em Matemática

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Teoria e Aplicação

por
Fabricio de Jesus Leite Gomes *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 24 de julho de 2017.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Nilton Barroso - MAT-UnB (Orientador)

Prof. Dr. Guy Grebot - MAT-UnB (Membro)

Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva - MAT-UnB (Membro)

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Esta é a página do “TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO ELETRÔNICA DO TCC” pela Biblioteca da UnB.

Dedico este trabalho aos meus pais Antônio Leite Gomes
e Adair Maria de Jesus Gomes.

Primeiramente agradeço a Deus pela beleza da linguagem matemática, aos meus pais pelo apoio e incentivo, aos meus amigos Ronildo Severino do Carmo, Garcia Pereira Salviano e Áquila Rodrigues Fontoura pelo acompanhamento e suporte e em especial ao meu orientador Dr. Nilton Barroso pela disponibilidade e dedicação. Agradeço ainda à Secretaria de Educação do Distrito Federal por proporcionar-me dedicação integral ao curso concedendo-me afastamento remunerado de minhas atividades. E, por fim, agradeço à CAPES pelo suporte financeiro concedido.

RESUMO. Neste trabalho estamos interessados em saber se, com ferramentas prescritas, é possível realizar teoricamente determinada construção geométrica. No início estudaremos as construções euclidianas com régua e compasso e os problemas clássicos da antiguidade: a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo. Em seguida veremos como esses problemas podem ser resolvidos com compasso e régua marcada. Por fim, estudaremos as construções de Mascheroni apenas com o compasso.

Palavras-Chave: geometria euclidiana, geometria analítica, régua, compasso, régua marcada.

ABSTRACT. In this work we are interested in discovering if, with prescribed tools, it is theoretically possible to do some geometrical construction. We begin by studying the euclidean ruler and compass constructions and the classical problems from the antiquity: the duplication of the cube, the angle trisection and the *quadratura circuli*. Next, we will see how to solve these problems with compass and marked ruler. In the end we will discuss the Mascheroni constructions with compass alone.

Keywords: euclidean geometry, analytic geometry, ruler, compass, marked ruler

Sumário

Introdução	2
1 Construções Geométricas Euclidianas	3
1.1 Construções com Régua e Compasso Euclidianos.	3
1.2 O Teorema de Descartes	6
1.3 Números Construíveis	13
2 Alguns Problemas Célebres da Antiguidade	16
2.1 Construções de Polígonos Regulares	16
2.2 A Duplicação do Cubo e a Trissecção do Ângulo	25
2.3 A Quadratura do Círculo	26
3 Construções com Régua Marcada	29
3.1 Três Problemas Clássicos	30
3.2 Equações Cúbicas e Quárticas	37
4 Construções Geométricas com o Compasso Apenas	45
4.1 A Inversão em um Círculo	45
4.2 A Inversão em um Círculo com o Compasso	50
4.3 O Resultado de Mascheroni	53
Bibliografia	58

Introdução

O estudo a seguir leva-nos a viajar no tempo ao desvendarmos problemas que intrigaram matemáticos desde a antiguidade. As construções geométricas euclidianas, restritas ao uso da régua não marcada e do compasso nos encantam por sua beleza e nos fascinam com problemas aparentemente simples, porém, de impossível resolução.

Pouco se sabe sobre a vida do autor de os *Elementos*, Euclides de Alexandria, que nasceu por volta do ano 330 aC. Sua obra contém praticamente toda matemática produzida até então, e serviu como introdução à matemática elementar: Aritmética, Geometria e Álgebra. Dos treze livros que a compõem, os cinco primeiros referem-se à geometria plana. O primeiro apresenta boa parte da geometria estudada no ensino básico. Os detalhes históricos e maiores informações sobre a vida e obra de Euclides podem ser encontrados em [1] e [7].

Além da riqueza de informação matemática, os *Elementos* se destaca pela linguagem inovadora em que descreve seu conteúdo. A sua forma axiomática, dedutiva e unificada é tão consistente que resiste à mudanças ao longo dos séculos, servindo de modelo para os mais variados ramos do conhecimento. No século XIX, seu quinto postulado sofreu investidas por matemáticos na tentativa de prová-lo, o que causou o surgimento de geometrias não-euclidianas. Estas se referem à Geometria Hiperbólica e Geometria Elíptica.

Utilizando a Geometria Analítica, provaremos a (im)possibilidade de algumas construções geométricas que ficaram sem solução durante séculos. Desdobraremos nos capítulos a seguir sobre os três problemas clássicos de construção: Trissecção do ângulo, duplicação do cubo e quadratura do círculo.

Apesar das restrições euclidianas a utilização de novos métodos como o uso da régua marcada, possibilitou aos matemáticos a solução de vários problemas, cuja qual usaremos no tocante aos problemas propostos que se mostraram insolúveis sob as exigências euclidianas. Por conseguinte, andando na contramão de muitos matemáticos, provaremos ainda que é possível encontrar com apenas o compasso todas as medidas geométricas euclidianas.

A linguagem utilizada é de fácil compreensão, o que torna o conteúdo uma fonte de pesquisa para alunos e professores do Ensino Básico, possibilitando ao estudante um aprendizado sólido de uma abordagem pouco utilizada no currículo escolar tradicional.

Capítulo 1

Construções Geométricas Euclidianas

Neste capítulo falaremos brevemente sobre a Geometria Euclidiana do ponto de vista axiomático e explicaremos a gênese do problema de construções com régua e compasso. Em seguida usaremos a Geometria Analítica, que constitui um modelo para a Geometria Euclidiana, para estudar o problema do ponto de vista algébrico. Tal abordagem permitirá, no capítulo seguinte, dar desfecho aos três grandes problemas da antiguidade: a duplicação do cubo, a trisseção do ângulo e a quadratura do círculo.

1.1 Construções com Régua e Compasso Euclidianos.

Euclides viveu por volta do século III AC e, segundo historiadores da ciência, ocupou durante boa parte da sua vida uma posição equivalente à chefia do departamento de matemática da universidade de Alexandria, no Egito. Alexandria ficava no encontro de importantes rotas comerciais da época e uma cópia de todo livro que por ali passava era deixada na sua imensa biblioteca. Em pouco tempo ali estava o maior repositório do conhecimento humano da época. A principal contribuição de Euclides para o acervo foi sua obra *Elementos*, onde estavam estabelecidos os fundamentos do que viria a ser chamado de Geometria Euclidiana.

Treze livros fazem parte dos *Elementos* e versam sobre tópicos que vão desde a geometria à teoria de números. No primeiro livro Euclides enuncia cinco postulados, usados como sustentáculo de todo o edifício lógico que construiria a seguir. Era a partir desses postulados, pelas regras da lógica, que Euclides buscava demonstrar seus resultados geométricos. Vejamos os axiomas conforme foram enunciados por Euclides de acordo com [3], página 98:

- P.1** É possível traçar uma reta passando por dois pontos dados;
- P.2** É possível prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta;
- P.3** É possível traçar um círculo com centro em qualquer ponto e com qualquer raio;
- P.4** Todos os ângulos retos são iguais;
- P.5** Se uma linha reta intercepta duas outras linhas retas e determina de um mesmo lado ângulos internos cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas duas linhas retas, se prolongadas indefinidamente, encontrar-se-ão no lado que estão os ângulos cuja soma é menor que dois ângulos retos.

Note que os três primeiros axiomas de Euclides nos ensinam, essencialmente, como usar a régua e o compasso. Construções geométricas surgiram na antiguidade, muito antes da formulação dos *elementos*, e contribuíram grandemente para o avanço da matemática. Os postulados de Euclides apenas serviram para colocar problema das construções com régua e compasso sobre um terreno mais firme.

A noção de números era ainda muito incipiente na época de Euclides; não se concebiam os números negativos, muito menos o conjunto dos números reais, e até então os gregos consideravam os números racionais apenas como o quociente de números naturais. A Geometria Euclidiana, tal como foi formulada por Euclides, prescinde da noção de número; nela podemos comparar dois objetos dados, mas não podemos falar sobre “quanto” ou “de que quantidade” dois objetos diferem. Apesar disso, é possível fazer álgebra com segmentos e construir, geometricamente, a soma, a subtração, o produto, o quociente e a raiz quadrada de segmentos dados. Esse é o primeiro passo para compreender como a existência de certas estruturas algébricas fornecem um modelo adequado para a Geometria Euclidiana. A ideia foi levada adiante pelo famoso matemático e filósofo francês René Descartes no século XVII que fundou o que hoje conhecemos como a Geometria Analítica.

Conforme veremos, a Geometria Analítica mostrou-se um poderoso instrumento que multiplicou os poderes da Álgebra e da Geometria pondo-as para trabalhar juntas, em simbiose, uma em auxílio à outra. Com esse auxílio, diversos problemas geométricos cuja solução desconhecia-se puderam ser resolvidos; entre esses problemas estão os famosos problemas sobre construções geométricas com régua e compasso da antiguidade. Antes de falar sobre construções geométricas, entretanto, precisamos deixar claro quais são as regras do jogo, ou seja, deve-se estabelecer o que pode-se fazer com a régua e com o compasso.

Com a régua e o compasso euclidianos podemos obter objetos geométricos pela aplicação repetida, porém finita, de qualquer uma das construções abaixo:

1. *Traçar uma reta passando por dois pontos dados;*
2. *Traçar um círculo com centro em um determinado ponto e com um determinado raio;*
3. *Determinar o ponto de intersecção de duas retas;*
4. *Determinar o ponto de intersecção de um círculo e uma reta;*
5. *Determinar o ponto de intersecção de dois círculos.*

Aqui, a palavra *dado* significa *prescrito* ou *construído previamente*. Um problema de construção geométrica está bem posto quando prescrevemos uma coleção de pontos do plano como dados iniciais, ou seja, quando é dado um conjunto de pontos \mathcal{P} e perguntamos que objetos geométricos podem ser construídos a partir daí com as regras acima.

Para ter uma ideia do tipo de problema que estamos tratando, tomemos como exemplo a primeira proposição do livro I dos *elementos*, em que Euclides propõe a construção de um triângulo equilátero dado um segmento AB .

Proposição I.1. *Dado o segmento AB , construir um triângulo equilátero de base AB .*

Dem. Dado o ponto A e o segmento AB construa o círculo de centro em A e raio AB . Analogamente, construa o círculo de centro em B e raio AB ; esses círculos interceptam-

se em um ponto C^1 . Dados os pontos A , B e C temos os segmentos AC e BC . Como $AC = AB = BC$, o triângulo $\triangle ABC$ é um triângulo equilátero, como nós queríamos demonstrar.

□

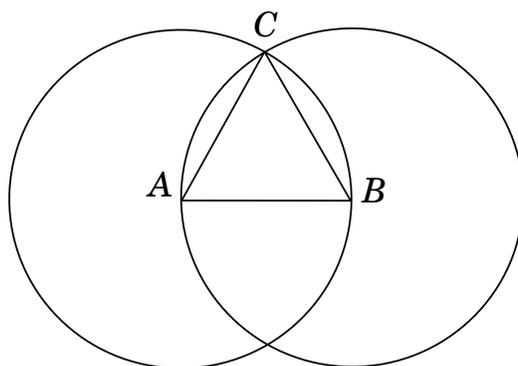


Figura 1.1

As construções com régua e compasso seguindo as prescrições acima revelaram-se um dos maiores desafios jamais criados pela mente humana. É surpreendente o nível de sofisticação das construções que podemos realizar a partir dessas regras; também é surpreendente como construções que, a princípio parecem relativamente simples, demonstram-se impossíveis de serem levadas a cabo.

Como os postulados de Euclides restringem o uso da régua e do compasso de acordo com as regras estabelecidas acima, esses instrumentos, para esses fins, são conhecidos como *ferramentas euclidianas*. Vale notar que a régua euclidiana não possui nenhum tipo de marcação (na língua inglesa há uma palavra mais precisa para esse tipo de instrumento: *straightedge*; algo como borda lisa ou borda reta); isso significa que não podemos usar a régua euclidiana para transportar distâncias, uso corriqueiro da régua em situações práticas. A princípio, o compasso euclidiano também não pode ser usado para transportar distâncias para diferentes regiões do plano, por esse motivo costumamos dizer que o compasso euclidiano colapsa ou fecha-se quando é levantado do papel. Tal característica pode parecer uma desvantagem considerável do compasso euclidiano em relação ao compasso usual, entretanto as duas ferramentas revelam-se equivalentes, isto é, podemos realizar o transporte de um segmento para uma semirreta dada, de acordo com a terceira proposição do primeiro livro dos *Elementos*; veja [3].

Na próxima seção desse capítulo veremos como uma questão puramente geométrica sobre a construção com régua e compasso euclidianos metamorfoseia-se em uma questão puramente algébrica sobre a extensão de corpos infinitos. Conforme já adiantamos, a chave para mudança tão brusca de paradigma está na Geometria Analítica, concebida no século XVII pelo matemático e filósofo francês René Descartes (1596-1650)

¹Na realidade não há como garantir a existência do ponto C a partir dos axiomas de Euclides; apenas com a moderna fundamentação da geometria essa questão foi resolvida. Para maiores detalhes o leitor interessado pode consultar [11], página 104.

1.2 O Teorema de Descartes

O filósofo René Descartes é autor da obra *La Géométrie* onde se encontram os germens da Geometria Analítica. Para uma melhor compreensão da moderna relação entre álgebra e geometria são imprescindíveis as noções de corpo, corpo ordenado e corpo ordenado euclidiano que veremos a seguir.

Definição 1. *Um conjunto não-vazio \mathbb{K} é um corpo se está munido das operações soma e produto que satisfazem as seguintes propriedades para todos a, b e c pertencentes a \mathbb{K} :*

C1. $a + b = b + a$;

C2. $a + (b + c) = (a + b) + c$;

C3. Existe $0 \in \mathbb{K}$ tal que $a + 0 = a$ para todo $a \in \mathbb{K}$;

C4. Para todo a existe $-a \in \mathbb{K}$ tal que $a + (-a) = 0$;

C5. $a \cdot b = b \cdot a$;

C6. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

C7. Existe $1 \in \mathbb{K}$ tal que $a \cdot 1 = a$ para todo $a \in \mathbb{K}$;

C8. Para todo $a \neq 0$ existe $a^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$;

C9. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Os exemplos mais conhecidos de corpos são os conjuntos dos números racionais \mathbb{Q} , dos números reais \mathbb{R} e dos números complexos \mathbb{C} . Por outro lado, o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ não é um corpo, pois há números inteiros que não possuem inverso multiplicativo em \mathbb{Z} .

Podemos obter novos exemplos de corpos considerando conjuntos da forma

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\},$$

para $n \in \mathbb{N}$. O elemento $\overline{k} \in \mathbb{Z}_n$, $0 \leq k \leq n-1$, é o conjunto de todos os números inteiros que deixam resto k na divisão por n . Assim, em $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ por exemplo, $\overline{0}$ é o conjunto de todos os números inteiros pares (resto 0 da divisão por 2) e $\overline{1}$ é o conjunto de todos os números inteiros ímpares (resto 1 na divisão por 2).

Se definimos a soma e o produto nesses conjuntos como

$$\begin{aligned}\overline{a} + \overline{b} &= \overline{a + b}, \\ \overline{a} \cdot \overline{b} &= \overline{a \cdot b},\end{aligned}$$

uma rápida checagem das propriedades **P1-P9** poderia induzir o leitor incauto a concluir que, munido das operações acima, os conjuntos \mathbb{Z}_n são corpos para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso não é

verdade! Para ver isso, note que em $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ temos

$$\begin{aligned}\bar{2} \cdot \bar{0} &= \bar{0}, \\ \bar{2} \cdot \bar{1} &= \bar{2}, \\ \bar{2} \cdot \bar{2} &= \bar{0}, \\ \bar{2} \cdot \bar{3} &= \bar{2}.\end{aligned}$$

Assim, o elemento $\bar{2}$ não tem inverso multiplicativo em \mathbb{Z}_4 ! Pode-se verificar, mas não faremos isso aqui, que \mathbb{Z}_p é um corpo se, e somente se, p é um número primo. Portanto, $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$, etc. são corpos ao passo que $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_9$, etc. não o são. Para maiores detalhes sobre esses corpos o leitor pode consultar [9], página 180.

Dizemos que um corpo \mathbb{K} tem característica n se

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ vezes}} = 0.$$

Se não existe número natural com a propriedade acima dizemos que \mathbb{K} tem característica 0. Claramente \mathbb{Z}_p tem característica p . Por outro lado \mathbb{Q} e \mathbb{R} têm característica 0, conforme veremos a seguir.

Definição 2. Um corpo \mathbb{K} é ordenado junto a um subconjunto \mathcal{P} , dos quais os elementos são chamados positivos, satisfazendo:

O.1 Se $a, b \in \mathcal{P}$ então $a + b \in \mathcal{P}$ e $a \cdot b \in \mathcal{P}$

O.2 Para qualquer $a \in \mathbb{K}$ apenas uma das posições acontece, $a \in \mathcal{P}, a = 0$ ou $-a \in \mathcal{P}$

Uma **relação** em um conjunto \mathbb{X} é um subconjunto $\mathcal{R} \subset \mathbb{X} \times \mathbb{X}$; podemos escolher um símbolo especial para denotar a relação, digamos “ \cong ”, daí, sempre que $(x, y) \in \mathcal{R}$, escrevemos $x \cong y$. O exemplo mais simples de relação em um conjunto \mathbb{X} é a relação de igualdade, denotada por “ $=$ ”; neste caso $\mathcal{R} = \{(x, x) : x \in \mathbb{X}\}$. Em geometria euclidiana, por exemplo, define-se uma relação $\mathcal{R} \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ entre os conjuntos dos pontos \mathbb{X} e das retas \mathbb{Y} , denotada pela palavra “sobre”: dados um ponto P e uma reta r , se $(P, r) \in \mathcal{R}$, dizemos que o ponto P está sobre a reta r ; essa é uma maneira rigorosa e palatável, bem ao gosto de um matemático moderno, de dizer que uma reta passa por um ponto ou que o ponto P pertence à reta r . Relações de congruência de ângulos e segmentos são outros exemplos de relações da geometria euclidiana.

Relações com certas propriedades recebem nomes especiais. Por exemplo, uma relação “ \cong ” em \mathbb{X} é dita **relação de equivalência** se tem as seguintes propriedades:

- (i) Para todo $x \in \mathbb{X}$ temos $x \cong x$;
- (ii) Se $x \cong y$, então $y \cong x$, para todos x e y em \mathbb{X} ;
- (iii) Se $x \cong y$ e $y \cong z$, então $x \cong z$, para todos x, y e z em \mathbb{X} .

A relação de igualdade e as relações de congruência de ângulos e segmentos, mencionadas acima, são exemplos de relações de equivalência; da sua parte, a relação “sobre” não o é. Uma relação denotada por “ $<$ ” é dita uma **relação de ordem** no conjunto \mathbb{X} se satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) Para todos x e y em \mathbb{X} , para os quais $x \neq y$, temos que $x < y$ ou $y < x$;
- (ii) Para todo $x \in \mathbb{X}$ temos que $x \not< x$;
- (iii) Se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.

O símbolo $x \not< x$ significa que x não está relacionado a x , mais precisamente, $(x, x) \notin \mathcal{R}$. A existência do subconjunto \mathcal{P} em um corpo \mathbb{K} , satisfazendo as propriedades da definição 2, permite definir uma relação de ordem em \mathbb{K} da seguinte forma: escrevemos $a < b$ ($b > a$) se $b - a \in \mathcal{P}$ e dizemos que a é menor do que b (b é maior do que a). Dizemos ainda que $a \leq b$ ($b \geq a$) se $a = b$ ou $a < b$ ($a = b$ ou $b > a$). Usando essa definição podemos demonstrar facilmente todas as propriedades usuais de ordem. Para ilustrar, vamos mostrar que se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$. De fato, temos que $b - a \in \mathcal{P}$ e $c - b \in \mathcal{P}$, então $(c - b) + (b - a) = c - a \in \mathcal{P}$, ou seja, $a < c$. As demais propriedades podem ser demonstradas de maneira análoga e deixamos essa tarefa para o leitor diligente.

Se \mathbb{K} e \mathbb{F} são corpos, uma aplicação sobrejetiva $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{F}$ é um **isomorfismo** se preserva as operações de \mathbb{K} e \mathbb{F} , isto é, se $f(a + b) = f(a) + f(b)$ e $f(ab) = f(a)f(b)$; neste caso dizemos que \mathbb{K} e \mathbb{F} são **isomórficos**. Ainda, dizemos de $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$ é um **subcorpo** de \mathbb{K} se, restritas à \mathbb{K}' , as operações de \mathbb{K} fazem de \mathbb{K}' um corpo; por exemplo, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ é um subcorpo do corpo dos números reais.

Com as definições acima, vejamos as propriedades de um corpo ordenado.

Proposição 1. *Seja \mathbb{K} um corpo ordenado. Então*

- (i) *Para qualquer $a \neq 0 \in \mathbb{K}$, a^2 é positivo.*
- (ii) *O número 1 é positivo;*
- (iii) *O corpo \mathbb{K} tem característica 0;*
- (iv) *Existe um subcorpo $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$ que é isomórfico à \mathbb{Q} . Além disso, \mathbb{K}' é o menor subcorpo de \mathbb{K} que contém 1.*

Dem. No caso do item (i), note que se $a \neq 0$, então $a \in \mathcal{P}$ ou $-a \in \mathcal{P}$. Se $a \in \mathcal{P}$ por **O.2** da definição acima temos que $a^2 = a.a \in \mathcal{P}$. Se $-a \in \mathcal{P}$, então $(-a).(-a) = a^2 \in \mathcal{P}$. Em qualquer caso temos que a^2 é um elemento positivo de \mathbb{K} . O item (ii) segue do item (i) quando observa-se que em todo corpo $1 \neq 0$ e que $1 = 1^2$. Desde que $1 \in \mathcal{P}$, então $1 + 1 + 1 + \dots + 1$, n vezes, também pertence a \mathcal{P} . Em particular, quaisquer somas desse tipo são diferentes de zero, isso mostra que \mathbb{K} tem característica 0, o que prova (iii).

Para verificar (iv) vamos construir um isomorfismo $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{K}$, logo \mathbb{Q} será isomórfico ao subcorpo $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$. Para isso começamos definindo $f(0) = 0$ e para cada $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ vezes}}$$

$$f(-n) = -\underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n \text{ vezes}} = -f(n).$$

Com essas definições pode-se verificar facilmente que

$$\begin{aligned} f(n+m) &= f(m) + f(n), \\ f(nm) &= f(n)f(m). \end{aligned}$$

Agora, para $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ definimos

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) \cdot f(n)^{-1} = \underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{m \text{ vezes}} \underbrace{(1+1+\cdots+1)^{-1}}_{n \text{ vezes}}$$

Neste caso valem

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}\right) &= f\left(\frac{m}{n}\right) + f\left(\frac{m'}{n'}\right), \\ f\left(\frac{m}{n} \frac{m'}{n'}\right) &= f\left(\frac{m}{n}\right) f\left(\frac{m'}{n'}\right). \end{aligned}$$

Como exemplo, vamos demonstrar apenas a primeira propriedade acima

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}\right) &= f\left(\frac{mn' + m'n}{nn'}\right) \\ &= f(mn' + m'n) f(nn')^{-1} \\ &= [f(m)f(n') + f(m')f(n)] f(n)^{-1} f(n')^{-1} \\ &= f(m)f(n)^{-1} + f(m')f(n')^{-1} \\ &= f\left(\frac{m}{n}\right) + f\left(\frac{m'}{n'}\right). \end{aligned}$$

O que foi verificado acima garante que f é um isomorfismo. Note que se $a \in f(\mathbb{Q}) = \mathbb{K}'$ e $\mathbb{K}'' \subset \mathbb{K}$ é um subcorpo de \mathbb{K} contendo 1, claramente $a \in \mathbb{K}''$, pois a é obtido de 1 por aplicações sucessivas das operações de corpo. Isso significa que $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}''$, logo \mathbb{K}' é o menor subcorpo de \mathbb{K} que contém a unidade. \square

Os corpos \mathbb{Q} e \mathbb{R} são ordenados. Entretanto, o corpo dos números complexos \mathbb{C} não é ordenado, pois $i^2 = -1$ e $-1 \notin P$. Os corpos \mathbb{Z}_p também não são ordenados, pois têm característica p . Podemos encontrar mais exemplos de corpos ordenados fazendo extensões de \mathbb{Q} em \mathbb{R} e tomando a ordem induzida de \mathbb{R} . Por exemplo, dado $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ definimos

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$$

com operações definidas por

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) &= (a + a') + (b + b')\sqrt{2}, \\ (a + b\sqrt{2})(a' + b'\sqrt{2}) &= (aa' + 2bb') + (ab' + a'b)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Não é difícil mostrar que, munido dessas operações, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um subcorpo dos reais \mathbb{R} . O conjunto \mathcal{P}' dos números positivos de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é definido como $\mathcal{P} \cap \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ou seja, é simplesmente o conjunto de todos os elementos de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ que são positivos em \mathbb{R} .

Dado um corpo ordenado \mathbb{K} , a proposição acima mostra que se aplicamos as operações de corpo à unidade podemos construir (um corpo isomórfico à) \mathbb{Q} ; em particular, a menos de um isomorfismo, podemos supor que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$. Esse fato será importantíssimo quando da definição de números construíveis.

Dizemos que um corpo ordenado \mathbb{K} é **euclidiano** se todo elemento positivo de \mathbb{K} tem raiz quadrada em \mathbb{K} , isto é, se dado $a \in \mathcal{P}$ existe $b \in \mathbb{K}$ tal que $b^2 = a$. Note que se b é uma raiz quadrada de a , ou seja, se $b^2 = a$ então

$$(-b)^2 = (-b)(-b) = b^2 = a,$$

logo $-b$ também é uma raiz de a . Concluimos que, se $a \neq 0$, esse elemento possui duas raízes quadradas em um corpo euclidiano, uma positiva e outra negativa; a positiva será denotada por \sqrt{a} e a negativa por $-\sqrt{a}$.

Dado um corpo ordenado euclidiano \mathbb{K} , o conjunto $\mathbb{K}^2 = \mathbb{K} \times \mathbb{K} = \{(x, y) : x \in \mathbb{K} \text{ e } y \in \mathbb{K}\}$ é chamado de plano cartesiano sobre o corpo \mathbb{K} . Cada elemento $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ é um ponto² e os objetos geométricos são definidos como um conjunto de pontos cujas coordenadas satisfazem certa equação. Por exemplo, uma reta r é um conjunto da forma

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 : ax + by + c = 0\}$$

em que a e b não são simultaneamente nulos. A partir de definições como essas é possível demonstrar todos os axiomas da Geometria Euclidiana. Para maiores detalhes veja [11].

Nesse sentido podemos dizer que a Geometria analítica é um modelo para a Geometria Euclidiana. Os resultados que podemos provar em Geometria Analítica refletem-se em resultados na Geometria Euclidiana e vice-versa. Veremos a seguir o poder dessa dualidade demonstrando com recursos algébricos como podemos responder às questões sobre construção geométricas com régua e compasso.

Um dos conceitos primitivos da Geometria Euclidiana é a relação de congruência de segmentos. Os postulados da geometria implicam que essa noção é uma relação de equivalência (veja a definição na página 7); isso significa que podemos dividir o conjunto de todos os segmentos em classes de equivalência não-vazias e disjuntas. A medida de um segmento é definida como a classe de equivalência à qual ele pertence, ou seja, a medida de um segmento é aquilo que todos os segmentos congruentes têm em comum! É possível construir um corpo ordenado euclidiano cujos elementos positivos são as medidas de segmentos. Para maiores detalhes veja [11], capítulo 4.

Dado o segmento AB , denotaremos a sua medida por $[AB]$. Note que as observações feitas acima e a Proposição 1 garantem que dado $a \in \mathbb{Q}$ existe um segmento AB tal que $[AB] = a$. Em particular, existe um segmento com medida 1; dizemos que esse é o segmento **unitário**.

Proposição 2. *Suponha que tenham sido dados os segmentos AB , CD e um segmento unitário. Podemos construir com régua e compasso euclidianos segmentos que denotaremos*

²Pode-se definir a noção de par ordenado apenas em termos da teoria de conjunto. Explicitamente

$$(x, y) = \{\{x, y\}, \{x\}\}.$$

por $AB + CD$, $AB - CD$, $AB \cdot CD$, $\frac{AB}{CD}$ e \sqrt{AB} cujas medidas serão, respectivamente, $[AB] + [CD]$, $[AB] - [CD]$, $[AB][CD]$, $\frac{[AB]}{[CD]}$ e $\sqrt{[AB]}$.

Dem. Para construir $AB + CD$, sobre uma reta r marcamos AB e justapomos o segmento CD . define-se $AB + CD = AD$. Dizemos que $CD < AB$ se existe um ponto P entre A e B tal que AP é congruente a CD ; nesse caso, definimos que $PB = AB - CD$. Por definição $[AB + CD] = [AB] + [CD]$ e $[AB - CD] = [AB] - [CD]$.

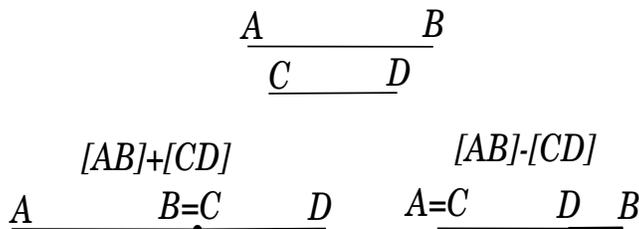


Figura 1.2

Para definir o produto, tomamos duas semirretas r e s de vértice O ; usando o compasso, sobre a semirreta r marcam-se pontos X e Y tais que OX e OY são congruentes ao segmento unitário e a AB , respectivamente; sobre a semirreta s marcamos os pontos Z e W tais que OZ é congruente a CD e a reta \overleftrightarrow{YW} é paralela a \overleftrightarrow{XZ} . Define-se $OW = AB \cdot CD$.

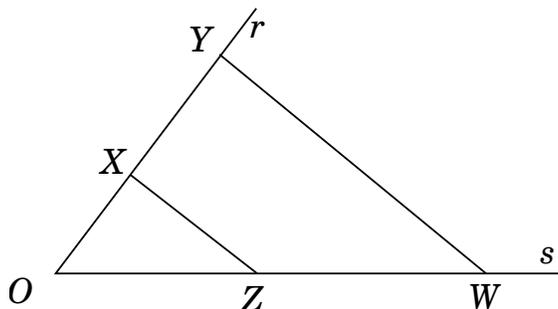


Figura 1.3

Observe que pelo Teorema de Tales vem que

$$\frac{[OW]}{[AB]} = \frac{[CD]}{1},$$

ou seja, $[OW] = [AB][CD]$. Trocando os papéis de OY e OW na definição acima, definimos que $OW = \frac{AB}{CD}$. Da mesma forma $[OW] = \frac{[AB]}{[CD]}$

Para a construção da raiz quadrada de um segmento dado, faça a seguinte construção: ponha AB sobre uma reta r e some a AB um segmento unitário BC . Determinado o ponto médio M do segmento AC , traçamos a circunferência com raio AM e centro em M . Se D é o ponto de intersecção da circunferência com a reta perpendicular a r passando por B ,

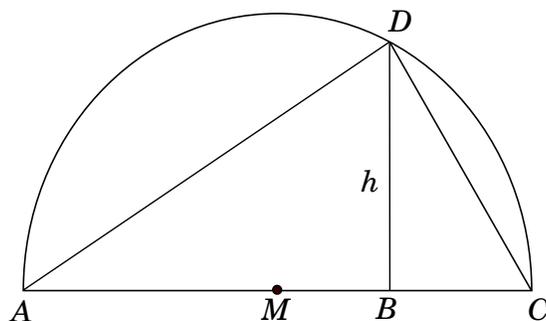


Figura 1.4

definimos $BD = \sqrt{AB}$. Para mostrar que $[BD] = \sqrt{[AB]}$, note que os triângulo $\triangle ADC$ é reto, pois D subtende um diâmetro, logo $h^2 = [BD]^2 = [AB][AC] = [AB].1 = [AB]$. \square

O análogo algébrico da proposição acima é o resultado abaixo.

Teorema 1 (Descartes). *Suponha que \mathbb{K} é um corpo ordenado euclidiano. Seja ainda $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ uma coleção³ de pontos no plano cartesiano $\mathbb{K}^2 = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Então, se é possível construir o ponto $P = (x, y)$ com régua e compasso euclidianos, as coordenadas de P podem ser obtidas dos dados iniciais por aplicações sucessivas, porém finitas, das operações $+$, $-$, \cdot , \div e a extração de raiz quadrada de número positivo.*

Dem. Como vimos, cada construção geométrica euclidiana corresponde à aplicação de um dos passos descritos na página 4; vejamos o que pode ocorrer em cada caso. Dados os ponto $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, podemos traçar a reta que passa por esses pontos; essa reta é dada como o conjunto dos pontos (x, y) tais que

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Note que para determinar os pontos da reta necessitamos apenas das operações usuais de um corpo. O mesmo valerá para determinarmos o ponto de intersecção de duas retas, pois nesse caso precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0, \end{cases}$$

em que a, b, c, a', b' e c' são elementos de \mathbb{K} e isso pode ser levado a cabo apenas com as operações usuais de um corpo.

³Esta coleção é finita ou infinita, enumerável ou não-enumerável a depender do conjunto de índices \mathcal{A} . Estes são os dados iniciais do problema; podemos ter um ponto, um número finito de pontos ou um número infinito de pontos – retas ou círculos, por exemplo. Exceto quando apenas um ponto é dado, podemos assumir, sem perda de generalidade, que os pontos $(0,0)$ e $(1,0)$ estão nesta coleção, caso contrário escolhemos um ponto arbitrário como origem e um segundo ponto para definir um segmento unitário.

A equação do círculo com centro (a, b) e raio dado pelo segmento AB é

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2 = R^2.$$

Podemos determinar pontos do círculo como os elementos $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ tais que

$$y = \pm \sqrt{R^2 - (x - a)^2} + b$$

e $a - R \leq x \leq a + R$. Vale notar ainda que, como \mathbb{K} é um corpo euclidiano, temos que $R \in \mathbb{K}$.

No caso da intersecção de círculo e reta necessitamos resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \\ ax + by + c = 0. \end{cases}$$

Isolando a variável y na segunda equação e substituindo na primeira, obtemos uma equação quadrática em x

$$A'x^2 + B'x + C' = 0$$

em que os coeficientes A' , B' e C' são elementos de \mathbb{K} . A solução dessa equação é dada pela fórmula de Bhaskara

$$\frac{-B' \pm \sqrt{B'^2 - 4A'C'}}{2A'}.$$

Dessa forma, vê-se que para determinar os pontos de intersecção de uma reta e um círculo, além das operações usuais de um corpo, necessitamos retirar raízes quadradas de números positivos de \mathbb{K} . Por fim, no caso da intersecção de dois círculos, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \\ x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' = 0. \end{cases}$$

Subtraindo as equações obtemos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \\ (A - A')x + (B - B')y + (C - C') = 0 \end{cases}$$

e voltamos ao caso anterior de intersecção de círculo e reta. Isso implica que, nesse caso, também precisaremos ocasionalmente da raiz quadrada de elementos positivos de \mathbb{K} para determinar os pontos de intersecção de dois círculos. \square

1.3 Números Construíveis

Vamos responder à seguinte pergunta: quais números são construíveis com régua e compasso euclidianos se nos é dado apenas um segmento unitário? As Proposições 1 e 2 garantem que podemos construir segmentos com medida dada por racionais positivos ou raízes quadradas de racionais positivos. Mas quais são esses números? Como podemos escrevê-los explicitamente? O símile algébrico do problema permite responder facilmente essa questão; neste caso a pergunta é: dados os pontos $(0, 0)$ e $(1, 0)$, que pontos podemos construir com régua e compasso euclidianos? O teorema 1 dá a resposta: podemos construir pontos tais

que as suas coordenadas são números obtidos pelas operações de corpo e extração de raiz quadrada a partir de \mathbb{Q} . Podemos escrever explicitamente esses números considerando extensões algébricas de \mathbb{Q} por elementos da forma $\sqrt{k_1}$ tais que $k_1 \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{k_1} \notin \mathbb{Q}$. Sendo assim, definimos

$$\mathbb{Q}(\sqrt{k_1}) = \{a + b\sqrt{k_1} : a \in \mathbb{Q} \text{ e } b \in \mathbb{Q}\},$$

sujeitos às operações

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{k_1}) + (a' + b'\sqrt{k_1}) &= (a + a') + (b + b')\sqrt{k_1}, \\ (a + b\sqrt{k_1})(a' + b'\sqrt{k_1}) &= (aa' + k_1bb') + (ab' + a'b)\sqrt{k_1}. \end{aligned}$$

Note ainda que a diferença de elementos de \mathbb{K}_1 é um novo elemento de \mathbb{K}_1 e para a divisão temos

$$\frac{a + b\sqrt{k_1}}{c + d\sqrt{k_1}} = \frac{(a + b\sqrt{k_1})(c - d\sqrt{k_1})}{(c + d\sqrt{k_1})(c - d\sqrt{k_1})} = \frac{ac - k_1bd}{c^2 - k_1d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - k_1d^2}\sqrt{k_1} = p + q\sqrt{k_1}.$$

Na realidade, não é difícil demonstrar que $\mathbb{Q}(\sqrt{k_1})$ é um subcorpo ordenado de \mathbb{R} . Se denotamos $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$ e $\mathbb{K}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{k_1})$ temos que

$$\mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1.$$

Podemos fazer uma nova extensão $\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_1(\sqrt{k_2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{k_2}, \sqrt{k_1})$ em que $k_2 \in \mathbb{K}_1$ mas $\sqrt{k_2} \notin \mathbb{K}_1$ definida como

$$\mathbb{K}_2 = \{a + b\sqrt{k_2} : a \in \mathbb{K}_1 \text{ e } b \in \mathbb{K}_1\}$$

e daí teremos

$$\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2.$$

Prosseguindo dessa forma construímos torres de subcorpos ordenados de \mathbb{R} da forma

$$\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n \subset \mathbb{R},$$

em que \mathbb{K}_i é uma extensão do corpo \mathbb{K}_{i-1} e os elementos de \mathbb{K}_i são da forma $a + b\sqrt{k_i}$ com $k_i \in \mathbb{K}_{i-1}$ e $\sqrt{k_i} \notin \mathbb{K}_{i-1}$. Um número é dito **construível** se está em \mathbb{K}_i , para algum $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Assim, por exemplo, o número

$$\sqrt{6} + \sqrt{\sqrt{\sqrt{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 5}}}$$

é construível. Podemos ver isso tomando $k_1 = 2$ e daí temos que $1 + \sqrt{2} \in \mathbb{K}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Note que $k_2 = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \notin \mathbb{K}_1$ pois, caso contrário existiriam a e b em \mathbb{Q} tais que

$$\sqrt{1 + \sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}.$$

Elevando ao quadrado temos

$$1 + \sqrt{2} = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}.$$

Comparando as partes dependentes e independentes de $\sqrt{2}$ nos lados da equação chegamos ao sistema

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 1 \\ 2ab = 1. \end{cases}$$

Subtraindo as equações obtemos $(a - b)^2 = -b^2$, o que é uma contradição. Consideramos então uma segunda extensão $\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_1(\sqrt{1 + \sqrt{2}})$ e ainda assim não alcançamos o número $\sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3}$, pois $\sqrt{3} \notin \mathbb{K}_2$. Tomamos então uma terceira extensão por $k_3 = 3$. Note que $3 \in \mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$ e, portanto, *a fortiori*, $3 \in \mathbb{K}_2$; daí chegamos a $\sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3}$. Tomamos uma quarta extensão por $k_4 = \sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3}$ e chegamos a $\sqrt{\sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3}} + 5$. Por fim, tomamos uma quinta extensão por $k_5 = \sqrt{\sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3}} + 5$ e chegamos ao número desejado pois $\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3} \in \mathbb{K}_5$.

Agora considere o número construível $x = \sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{2}}$. Podemos reescrevê-lo como $x - \sqrt{2} = \sqrt{3 + \sqrt{2}}$. Elevando ao quadrado obtemos

$$(x - \sqrt{2})^2 = 3 + \sqrt{2},$$

ou seja

$$x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 = 3 + \sqrt{2},$$

ou seja,

$$x^2 - 1 = (2x + 1)\sqrt{2},$$

ou seja

$$(x^2 - 1)^2 = 2(2x + 1)^2,$$

ou seja,

$$x^4 - 10x^2 - 8x - 1 = 0.$$

Vemos que x é a raiz de uma equação algébrica com coeficientes em \mathbb{Z} . Dizemos que um número é **algébrico** se ele é raiz de uma equação algébrica com coeficientes inteiros, isto é, se ele satisfaz uma equação do tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

em que a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 são números inteiros, $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$.

Proposição 3. *Todo número construível é algébrico.*

Dem. É claro que o processo acima pode ser levado a cabo para todo número construível. \square

Respondendo a uma pergunta que talvez já apoquente o leitor curioso: nem todo número algébrico é construível! Por exemplo $\sqrt[3]{2}$ é algébrico, pois é solução de $x^3 - 2 = 0$, mas não é construível conforme veremos no próximo capítulo.

Capítulo 2

Alguns Problemas Célebres da Antiguidade

Neste capítulo vamos estudar alguns problemas clássicos sobre construção com régua e compasso euclidianos. Mais precisamente, investigaremos a construção de polígonos regulares e mostraremos que os três problemas clássicos da antiguidade, a saber, a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo, são insolúveis com a utilização estrita de ferramentas euclidianas.

2.1 Construções de Polígonos Regulares

Relembramos que os polígonos regulares podem ser inscritos ou circunscritos em uma circunferência. A questão que nos pomos aqui é a seguinte: é possível construir um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio unitário?

Para investigarmos essa questão note que se um ângulo central α correspondente ao lado do polígono é construível, então seu seno e seu cosseno são construíveis. De fato, construído o ângulo α , construa o triângulo retângulo $\triangle ABC$ tal que $\angle BAC = \alpha$ e $\angle ABC$ é reto. Temos que

$$\cos \alpha = \frac{[AB]}{[AC]} \quad \text{e} \quad \text{sen } \alpha = \frac{[BC]}{[AC]}.$$

Essa pequena observação permite concluir o seguinte resultado.

Lema 1. *Dado um círculo unitário, o lado ℓ do polígono regular inscrito nesse círculo, que subtende um ângulo α , é dado por $\ell = \sqrt{2 - 2 \cos \alpha}$. Em particular, o ângulo α pode ser construído com régua e compasso se, e somente se, o polígono é construível.*

Dem. Pela lei dos cossenos [4] temos que

$$\ell^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cos \alpha = 2 - 2 \cos \alpha.$$

□

O resultado acima implica que podemos construir um quadrado inscrito em um círculo unitário, pois os ângulos subtendidos pelos lados desse polígono são retos e, claro, podemos construir ângulos retos com ferramenta Euclidianas.

O mesmo lema permite demonstrar que podemos construir um triângulo equilátero, um hexágono regular e um polígono regular de 12 lados inscritos em um círculo unitário. Para isso, note que podemos construir com o segmento unitário que nos foi dado o triângulo $\triangle ABC$ tal que $[AB] = \sqrt{3}$, $[BC] = 1$, $[AC] = 2$ e $\angle ABC$ é reto. Neste caso, não é difícil mostrar que $\angle BCA = 2\angle BAC$, ou seja, $\angle BAC = 30^\circ$ e $\angle BCA = 60^\circ$. Em particular podemos construir $\cos 30^\circ$ e $\cos 60^\circ$.

Usando a identidade trigonométrica

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1, \tag{2.1}$$

que pode ser demonstrada geometricamente, podemos construir também $\cos 120^\circ$. Construimos, portanto, os lados dos polígonos regulares de 12, 6 e 3 lados, respectivamente.

Observe que a fórmula (2.1) implica que o polígono de n lados é construível com régua e compasso se, e somente se, o polígono de $2n$ lados for construível.

Teorema 2. *Se $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, então são construíveis com ferramentas euclidianas os polígonos de $4 \cdot 2^k$, $3 \cdot 2^k$, $5 \cdot 2^k$ e $3 \cdot 5 \cdot 2^k$ lados.*

Dem. Já vimos como construir os polígonos regulares de 3, 4 e 6 lados. Para construir o decágono regular note que o ângulo subtendido pelo seu lado é de $\angle BAC = \frac{360}{10} = 36^\circ$ e, portanto, $\angle ACB = \angle ABC = 72^\circ$. Veja a figura 2.1.

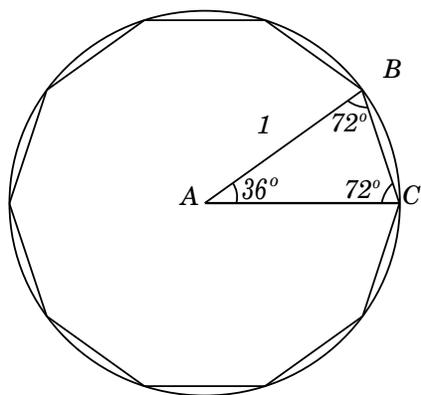


Figura 2.1

Tomando a bissetriz do ângulo $\angle ABC$ obtemos dois outros triângulos, $\triangle ABD$ e $\triangle BDC$, tais que $[AD] = [BD] = [BC] = x$, em que x é o lado do decágono. Veja a figura 2.2

Note que os triângulos em questão são semelhantes, pois têm todos os ângulos correspondentemente iguais. Assim temos que

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}.$$

Simplificando a equação teremos

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

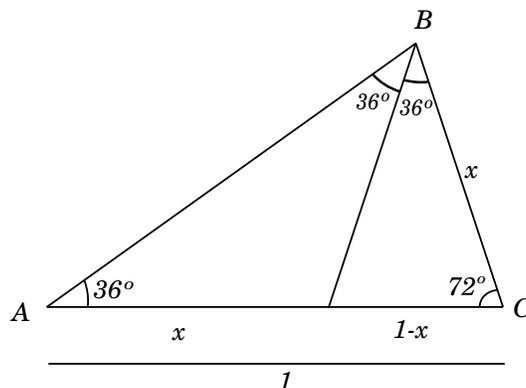


Figura 2.2

que possui raízes $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Desconsiderando a raiz negativa chegamos a $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, o que demonstra que o lado do decágono regular é construível com régua e compasso euclidianos.

A construção do lado do pentágono implica na construção do cosseno do ângulo subtendido por ele. Isso implica que podemos construir $\cos 72^\circ$ e, conseqüentemente, o pentágono regular.

A construção do polígono de 15 lados segue da construção dos polígonos de 3 e 5 lados. Observe o triângulo equilátero e o pentágono regular construídos na circunferência de raio 1 a partir do ponto A da figura 2.3.

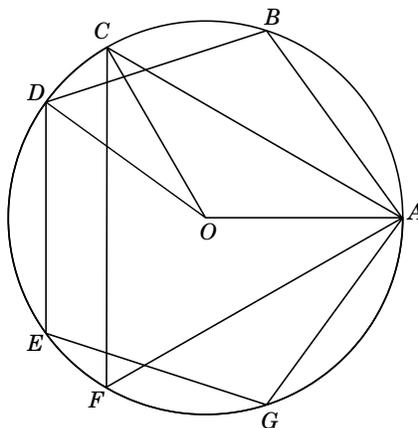


Figura 2.3

Seja $\alpha = \angle COD$, $\beta = \angle AOD$ e $\gamma = \angle AOC$, temos que $\alpha = \beta - \gamma$. Como $\beta = 144^\circ$, pois é o dobro do ângulo subtendido pelo lado do pentágono, e $\gamma = 120^\circ$, pois corresponde ao ângulo subtendido pelo lado do triângulo equilátero, vem que $\alpha = 24^\circ = \frac{360}{15}$ que corresponde ao ângulo correspondente do polígono regular de 15 lados. Portanto, o pentadecágono regular é construível.

Para finalizar a demonstração do teorema note que podemos construir os polígonos regulares com o dobro do número de lados daqueles que construímos até aqui. Isso implica que podemos construir polígonos regulares de $4 \cdot 2^k$, $3 \cdot 2^k$, $5 \cdot 2^k$ e $3 \cdot 5 \cdot 2^k$ lados com $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

□

Até aqui demonstramos que certos polígonos regulares podem ser construídos com régua e compasso euclidianos. Vejamos agora que certos polígonos não podem ser construídos dessa forma. Primeiro, um lema.

Lema 2. *Se uma equação cúbica com coeficientes racionais não possui uma raiz racional, então nenhuma de suas raízes é construível com régua e compasso euclidianos.*

Dem. A equação cúbica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, na forma fatorada, pode ser escrita como $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$. Logo,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

o que implica nas equações

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b \quad \text{e} \quad x_1x_2x_3 = c. \quad (*)$$

Para contradição, suponha que x seja uma raiz construível da equação

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Suponha ainda que $x \in \mathbb{K}_n$ e que nenhuma outra solução construível é elementos de \mathbb{K}_i para algum $0 \leq i < n$. Temos $n > 0$, uma vez que, por hipótese, a equação não possui raízes racionais. Segue que x pode ser escrito da forma

$$x = p + q\sqrt{w}$$

em que p , q e w estão em \mathbb{K}_{n-1} e $\sqrt{w} \notin \mathbb{K}_{n-1}$. Pode-se verificar por substituição direta que $\bar{x} = p - q\sqrt{w}$ também será uma raiz da equação; como $q \neq 0$, senão $x = p \in \mathbb{K}_{n-1}$, segue que $x \neq \bar{x}$. Por outro lado, (*) implica que $x_1 + x_2 + x_3 = -a$, logo a terceira raiz u é dada por

$$u = -a - x - \bar{x} = -a - 2p,$$

isto é, $u \in \mathbb{K}_{n-1}$, o que é uma contradição. □

Com o lema acima podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 3. *Não é possível construir com ferramentas euclidianas o heptágono regular.*

Dem. Para provar a impossibilidade da construção do heptágono regular nas normas da Geometria Euclidiana usaremos os números complexos. Para mais referências sobre esse assunto o leitor pode consultar [5].

Sabe-se que podemos encontrar os vértices do heptágono pelas raízes da equação:

$$z^7 - 1 = 0$$

Assim, as coordenadas (x, y) dos vértices do heptágono correspondem à parte real e imaginária do número complexo $z = x + yi$. Podemos notar que 1 é raiz da equação e as outras vêm da equação

$$\frac{z^7 - 1}{z - 1} = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Dividindo por z^3 temos

$$z^3 + \frac{1}{z^3} + z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0$$

ou seja,

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0$$

Substituindo $z + \frac{1}{z}$ por y , teremos a seguinte equação:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0 \tag{2.2}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi} \\ &= \frac{1}{\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi} \cdot \frac{\cos \phi - i \operatorname{sen} \phi}{\cos \phi - i \operatorname{sen} \phi} \\ &= \frac{\cos \phi - i \operatorname{sen} \phi}{\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi} \\ &= \cos \phi - i \operatorname{sen} \phi, \end{aligned}$$

então $y = z + \frac{1}{z} = \cos \phi + i \operatorname{sen} \phi + (\cos \phi - i \operatorname{sen} \phi) = 2 \cos \phi$ é um número real.

Vamos mostrar que não podemos construir y . Para isso, suponha, por contradição, que $\frac{r}{s}$ é uma raiz racional da equação (2.2), em que r e s não têm fatores comuns. Substituindo em (2.2) vem

$$\left(\frac{r}{s}\right)^3 + \left(\frac{r}{s}\right)^2 - \frac{2r}{s} - 1 = 0,$$

ou seja,

$$r^3 + r^2s - 2rs^2 - s^3 = 0,$$

ou seja,

$$r(r^2 - rs - 2s^2) = s^3.$$

Isso significa que s^3 tem fator r ; como r e s não têm fatores comuns isso é possível apenas no caso que $r = \pm 1$; analogamente temos que $r^3 = s(r^2 + 2rs + s^2)$ e, pelo mesmo raciocínio, $s = \pm 1$. Isso significa que os únicos racionais que poderiam equacionar (2.2) são 1 e -1 . Uma checagem direta mostra que nenhum deles a satisfaz, portanto (2.2) não tem raiz racional. O lema 2 implica que y não é construível com ferramentas euclidianas. Em particular, como $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ é solução de (2.2) temos que o heptágono regular não é construível. \square

Vimos acima que podemos construir polígonos de $3 \cdot 2^k$, $4 \cdot 2^k$, $5 \cdot 2^k$ e $3 \cdot 5 \cdot 2^k$ lados. Durante dois mil anos esses foram os únicos polígonos construíveis que conhecíamos, até que em 1796, aos 19 anos, o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) mostrou que o polígono de 17 lados é construível com régua e compasso euclidianos. Segundo historiadores da ciência, o jovem Gauss ficou tão impressionado e satisfeito com essa descoberta que decidiu deixar estudos de filologia sobre os quais se ocupara até aquele momento e dedicar-se inteiramente à matemática. Mais tarde Gauss pediu que sua lápide fosse construída no formato de um polígono regular de 17 lados, desejo que não foi atendido. Vejamos uma demonstração para esse resultado.

Teorema 4 (Gauss). *É possível construir com ferramentas euclidianas o polígono regular de 17 lados.*

Dem. Seguimos as mesma ideias do Teorema 3. Os vértices de heptadecágono regular são as soluções da equação

$$z^{17} - 1 = 0,$$

ou seja, números complexos da forma

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{17}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{17}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, 16.$$

Note que $z_0 = 1$ é uma solução. Dividindo por $(z - 1)$ obtemos

$$\frac{z^{17} - 1}{z - 1} = z^{16} + z^{15} + \dots + z + 1. \quad (*)$$

Definindo $\xi = z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ considere as seguintes mudanças de variáveis

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi + \frac{1}{\xi}, \\ \beta &= \xi + \xi^4 + \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^4}, \\ \gamma &= \xi + \xi^2 + \xi^4 + \xi^8 + \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\xi^4} + \frac{1}{\xi^8}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right), \\ \beta &= 2 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{17}\right) \right], \\ \gamma &= 2 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{16\pi}{17}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

são números reais. Vamos mostrar que γ é solução de uma equação quadrática com coeficientes em \mathbb{Q} ; em seguida mostraremos que β é solução de uma equação quadrática com coeficientes em $\mathbb{Q}(\gamma)$ e, por fim, mostraremos que α é solução de uma equação quadrática com coeficientes em $\mathbb{Q}(\beta)$. Isso mostra que α é construível com régua e compasso euclidianos e, portanto, o heptadecágono é construível.

Para isso considere

$$\gamma' = \xi^3 + \xi^5 + \xi^6 + \xi^7 + \frac{1}{\xi^3} + \frac{1}{\xi^5} + \frac{1}{\xi^6} + \frac{1}{\xi^7}.$$

Como ξ é solução de (*), lembrando que $\xi^{17} = 1$ vem que

$$\begin{aligned} \gamma + \gamma' &= \xi + \xi^2 + \xi^4 + \xi^8 + \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\xi^4} + \frac{1}{\xi^8} + \xi^3 + \xi^5 + \xi^6 + \xi^7 + \frac{1}{\xi^3} + \frac{1}{\xi^5} + \frac{1}{\xi^6} + \frac{1}{\xi^7} \\ &= \xi + \xi^2 + \xi^4 + \xi^8 + \frac{\xi^{17}}{\xi} + \frac{\xi^{17}}{\xi^2} + \frac{\xi^{17}}{\xi^4} + \frac{\xi^{17}}{\xi^8} + \xi^3 + \xi^5 + \xi^6 + \xi^7 + \frac{\xi^{17}}{\xi^3} + \frac{\xi^{17}}{\xi^5} + \frac{\xi^{17}}{\xi^6} + \frac{\xi^{17}}{\xi^7} \\ &= \xi + \xi^2 + \xi^4 + \xi^8 + \xi^{16} + \xi^{15} + \xi^{13} + \xi^9 + \xi^3 + \xi^5 + \xi^6 + \xi^7 + \xi^{14} + \xi^{12} + \xi^{11} + \xi^{10} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Podemos mostrar que $\gamma\gamma'$ também é um elemento de \mathbb{Q} . Para ver isso, observe a tabela abaixo que dá o produtos dos elementos de γ pelos elementos de γ' .

	ξ^3	ξ^5	ξ^6	ξ^7	ξ^{-3}	ξ^{-5}	ξ^{-6}	ξ^{-7}
ξ	ξ^4	ξ^6	ξ^7	ξ^8	ξ^{-2}	ξ^{-4}	ξ^{-5}	ξ^{-6}
ξ^2	ξ^5	ξ^7	ξ^8	ξ^9	ξ^{-1}	ξ^{-3}	ξ^{-4}	ξ^{-5}
ξ^4	ξ^7	ξ^9	ξ^{10}	ξ^{11}	ξ^1	ξ^{-1}	ξ^{-2}	ξ^{-3}
ξ^8	ξ^{11}	ξ^{13}	ξ^{14}	ξ^{15}	ξ^5	ξ^3	ξ^2	ξ^1
ξ^{-1}	ξ^2	ξ^4	ξ^5	ξ^6	ξ^{-4}	ξ^{-6}	ξ^{-7}	ξ^{-8}
ξ^{-2}	ξ^1	ξ^3	ξ^4	ξ^5	ξ^{-5}	ξ^{-6}	ξ^{-7}	ξ^{-8}
ξ^{-4}	ξ^{-1}	ξ^1	ξ^2	ξ^3	ξ^{-7}	ξ^{-9}	ξ^{-10}	ξ^{-11}
ξ^{-8}	ξ^{-5}	ξ^{-3}	ξ^{-2}	ξ^{-1}	ξ^{-11}	ξ^{-14}	ξ^{-15}	ξ^{-6}

Utilizando $\xi^{17} = 1$ como no cálculo de $\gamma + \gamma'$, observa-se que cada potência de ξ entre 1 e 16 aparece exatamente 4 vezes na tabela acima. Isso implica que

$$\gamma\gamma' = 4(\xi^{16} + \xi^{15} + \dots + \xi^2 + \xi) = -4.$$

Temos, portanto, que γ é uma solução da equação $x^2 - (\gamma + \gamma')x + \gamma\gamma' = 0$, ou seja, da equação

$$x^2 + x - 4 = 0.$$

Pela fórmula de Bhaskara vem

$$x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{17}).$$

Para determinar o sinal correto de γ podemos observar as posições aproximadas de ξ , ξ^2 , ξ^4 , ξ^8 e seus recíprocos $\frac{1}{\xi} = \xi^{16}$, $\frac{1}{\xi^2} = \xi^{15}$, $\frac{1}{\xi^4} = \xi^{13}$ e $\frac{1}{\xi^8} = \xi^9$ no círculo unitário, para concluir que γ é positivo, veja a figura 2.4. Para confirmar nossa escolha, buscamos uma calculadora e comparamos os valores acima com os de (2.3). Concluímos que

$$\gamma = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{17}).$$

Passamos agora à β e definimos

$$\beta' = \xi^2 + \xi^8 + \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\xi^8}.$$

Temos que $\beta + \beta' = \gamma$ e, por um cálculo semelhante aos anteriores, $\beta\beta' = -1$. Assim β é solução da equação quadrática

$$x^2 - \gamma x - 1 = 0,$$

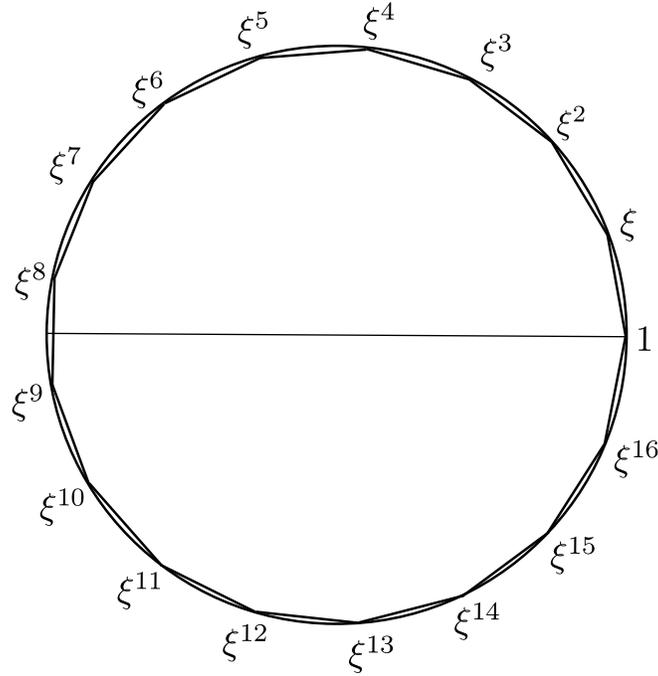


Figura 2.4

cujas raízes são

$$x = \frac{1}{2}(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4}).$$

Como β é positivo temos que

$$\beta = \frac{1}{2}(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4}) = \frac{1}{4} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right).$$

Por fim, defina

$$\alpha' = \xi^4 + \frac{1}{\xi^4}.$$

Então $\alpha + \alpha' = \beta$ e $\alpha\alpha' = \xi^3 + \xi^5 + \frac{1}{\xi^3} + \frac{1}{\xi^5}$. Se definirmos $\alpha\alpha' = \beta''$, seja

$$\beta''' = \xi^6 + \xi^7 + \xi^{-6} + \xi^{-7}.$$

Nesse caso $\beta'' + \beta''' = \gamma'$ e

$$\beta''\beta''' = \xi^{16} + \xi^{15} + \dots + \xi^2 + \xi = -1.$$

Como nos casos anteriores, β'' é raiz de

$$x^2 - \gamma'x - 1 = 0,$$

de onde encontramos

$$\beta'' = \frac{1}{4} \left(-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right).$$

Agora note que α satisfaz a equação

$$x^2 + \beta x + \beta'' = 0,$$

ou seja \mathbb{Q} é uma extensão quadrática sobre $\mathbb{Q}(\beta)$. Escolhendo o sinal correto para α encontramos

$$\alpha = \frac{1}{8} \left(1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - \sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \sqrt{170 - 26\sqrt{17} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}} \right).$$

que é um número construível com régua e compasso. \square

A demonstração acima pode ser encontrada em [11], página 250. Em [10], Richmond mostrou que pode-se simplificar consideravelmente os cálculos de Gauss.

O matemático francês Évariste Galois (1811-1832) elaborou durante sua curta vida uma das mais belas e prolíferas teorias da matemática; essa teoria, hoje amplamente conhecida como teoria de Galois, estabelece condições para que uma dada equação algébrica tenha solução por radicais. Desnecessário dizer a enorme importância que essa teoria tem em questões sobre construções geométricas com régua e compasso. Terminamos essa seção com um resultado que põe fim à questão de determinar quais polígonos regulares são construíveis com régua e compasso euclidianos; esse teorema pode ser demonstrado a partir da Teoria de Galois e o leitor interessado pode consultar [2] ou [11] para maiores detalhes.

Teorema 5. *Um polígono regular de n lados é construível com régua e compasso euclidianos se, e somente se, n é da forma*

$$2^r p_1 p_2 \dots p_s,$$

em que $r \geq 0$, $s \geq 0$ e p_1, p_2, \dots, p_s são primos distintos da forma $2^{2^k} + 1$ para algum $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Particularmente, o teorema acima garante que se $F_k = 2^{2^k} + 1$ é um número primo, então o polígono regular de F_k lados é construível com régua e compasso. Para $k = 0, 1, 2, 3, 4$ temos que $F_k = 3, 5, 17, 257, 65537$ são primos, logo os polígonos com esses números de lados são construíveis. A propósito, os números F_k são conhecidos com *números de Fermat*, pois foram estudados pelo matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665). Por volta de 1690, Fermat conjecturou que a fórmula $2^{2^k} + 1$ gerava apenas números primos, entretanto, em 1792, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) verificou que

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 641 \times 6700417.$$

Em 1880, F. Landry mostrou que

$$2^{2^6} + 1 = 274.177 \times 67.280.421.310.721.$$

Até o momento (junho de 2017) não se sabe se há outros números primos da forma $2^{2^k} + 1$. Sabe-se que F_k é composto para $5 \leq k \leq 23$ e o caso F_{24} continua aberto. Até hoje também não conhecemos nenhuma fórmula simples que gere apenas números primos. Por exemplo, a expressão

$$G_k = k^2 - k + 41$$

gera números primos para $k = 1, 2, \dots, 40$, entretanto $G_{41} = 41^2$ que não é primo. Analogamente, a fórmula

$$H_k = k^2 - 79k + 1601$$

gera primos para $k = 1, 2, \dots, 79$, mas falha para $k = 80$.

2.2 A Duplicação do Cubo e a Trissecção do Ângulo

O problema da duplicação do cubo é o seguinte: dado um cubo de aresta unitária, devemos encontrar um segundo cubo cujo volume é o dobro do cubo que foi dado. Em outras palavras, dado um segmento unitário, devemos construir um segmento de comprimento x tal que

$$x^3 = 2$$

Teorema 6. *Não é possível realizar a duplicação do cubo com ferramentas euclidianas.*

Dem. Devemos encontrar x que satisfaz a equação

$$x^3 - 2 = 0$$

Suponha que $\frac{r}{s}$ é solução da equação em que r e s não têm fatores comuns. Isso implicaria que $r^3 = 2s^3$, logo r^3 é par. Isso significa que r é par, ou seja, é da forma $2n$. Substituindo vem que $8n^3 = 2s^3$, ou seja, $s^3 = 4n^3$. De seu lado, essa última expressão implica que s é par. Concluimos que s e r são pares, contra nossa hipótese inicial de que não havia fatores comuns. Portanto, provamos que a equação $x^3 - 2 = 0$ não tem solução em \mathbb{Q} o que garante, pelo Lema 2, que a duplicação do cubo não é possível com régua e compasso euclidianos. \square

A questão sobre a trissecção de um ângulo, isto é, sobre a divisão de um ângulo em três partes iguais, também depende da solução de uma equação de terceiro grau e pode ser respondida com o auxílio do Lema 2. Vamos a ela.

Teorema 7. *Não é possível realizar a a trissecção do ângulo com ferramentas euclidianas.*

Dem. Existem alguns ângulos que podem ser trissectados, como os ângulos de 90° , 180° e outros mais. O que provaremos agora, é que não há, com régua e compasso euclidianos, um procedimento geral que permita dividir em três partes iguais *qualquer* ângulo que tenha sido dado. Para isso, basta mostrar que existe um ângulo que não pode ser dividido dessa forma; consideraremos aqui o ângulo de 60° .

Temos que

$$\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos(2\alpha) \cos \alpha - \operatorname{sen}(2\alpha) \operatorname{sen} \alpha.$$

Assim

$$\begin{aligned} \cos(3\alpha) &= (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \cos \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \\ &= [\cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)^2] \cos \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha \\ &= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha \\ &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\cos \theta = 4 \cos^3 \left(\frac{\theta}{3} \right) - 3 \cos \left(\frac{\theta}{3} \right).$$

Tomando $\theta = 60^\circ$ e definindo $z = \cos \frac{\theta}{3}$, o problema consiste em resolver a equação

$$4z^3 - 3z - \frac{1}{2} = 0,$$

isto é,

$$8z^3 - 6z = 1.$$

Vamos mostrar que a equação acima não tem raiz racional. Substituindo z por $\frac{v}{2}$, vem

$$8 \left(\frac{v}{2} \right)^3 - 6 \cdot \frac{v}{2} = 1,$$

ou seja

$$v^3 - 3v - 1 = 0. \tag{2.4}$$

Mais uma vez, suponha que $\frac{r}{s}$ é uma solução racional da equação (2.4) em que r e s são inteiros sem fator comum. Substituindo obtemos

$$\left(\frac{r}{s} \right)^3 - \frac{3r}{s} = 1$$

ou seja,

$$r^3 - 3s^2r = s^3,$$

ou seja,

$$r(r^2 - 3s^2) = s^3.$$

Isso significa que s^3 tem fator r ; como, por hipótese, r e s não têm fatores comuns, obtemos que $r = \pm 1$. Da mesma forma temos que $r^3 = s^2(s + 3r)$, de onde concluímos que $s = \pm 1$. Essas observações significam que $\frac{r}{s} = \pm 1$; entretanto, substituindo qualquer um desses valores em (2.4) verifica-se que eles não a equacionam, isto é, (2.4) não tem raízes racionais. Pelo lema 2, (2.4) não tem raízes construíveis, logo, $\cos \left(\frac{60}{3} \right) = \cos 20^\circ$ não é construível com régua e compasso euclidianos. \square

2.3 A Quadratura do Círculo

É possível construir com régua e compasso euclidianos um quadrado com área igual à área de um polígono com qualquer número de lados; esse fato era conhecido desde a época dos pitagóricos. Para ver isso, considere, por exemplo, o polígono $ABCDEF$ na figura 2.5; prolongue o lado AF e considere uma paralela à diagonal DF passando por E . Esta paralela intercepta \overleftrightarrow{AF} em G ; como os triângulos $\triangle DEF$ e $\triangle DEG$ têm a mesma área, pois têm a mesma base DF e a mesma altura, temos que os polígonos $ABCDEF$ e $ABCDG$ têm a mesma área. Repetindo esse processo um número finito de vezes – 3 vezes no nosso exemplo – podemos construir um triângulo com a mesma área do polígono dado; se b e h são as

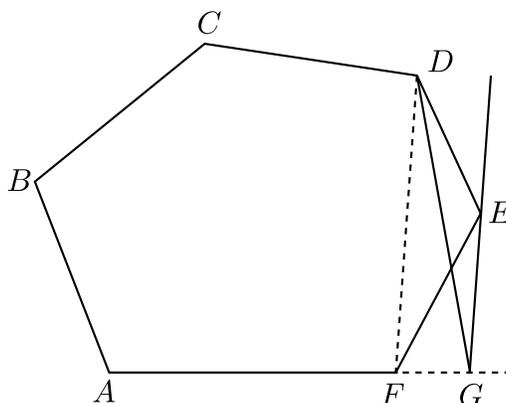


Figura 2.5

medidas da base e da altura desse triângulo, então o quadrado de lado $x = \sqrt{\frac{bh}{2}}$ tem área igual à do polígono dado.

O problema da quadratura do círculo consiste em construir com régua e compasso um quadrado com a mesma área de um círculo de raio 1. Isso significa que devemos construir um segmento com medida x dada por $x^2 = \pi$, ou seja, $x = \sqrt{\pi}$. O que vimos acima implica que podemos construir quadrados com área arbitrariamente próxima à de um círculo dado desde que consideremos polígonos com número suficientemente grande de lados.

Uma solução definitiva para a quadratura do círculo, entretanto, depende da noção de números transcendentais. Números reais que não são algébricos são chamados de **transcendentais**; receberam esse nome do matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783) pois, em suas palavras, eles “transcendem os poderes da álgebra”

É claro que $\sqrt{\pi}$ não será construível se π não for construível. Vimos no capítulo anterior que todo número construível é algébrico. Portanto, a resposta para o problema da quadratura do círculo decorre imediatamente do seguinte resultado fundamental

Teorema 8. *O número π é transcendental.*

O teorema garante, portanto, que é impossível realizar a quadratura do círculo com ferramentas euclidianas, pois sabemos que com elas podemos construir apenas números algébricos. Esse teorema foi provado em 1882 pelo matemático alemão Ferdinand von Lindermann (1852-1939) e as ideias contidas em sua demonstração estão além do nível desse trabalho. A técnica utilizada na demonstração desse resultado foi introduzida pelo matemático francês Charles Hermite (1822–1905) e aperfeiçoada por Lindermann. Além do número π , outros números famosos da matemática são transcendentais, por exemplo e , fato que foi demonstrado por Hermite, e o número de Hilbert $2^{\sqrt{2}}$. Mais informações sobre esses fatos e uma demonstração da transcendentalidade de e podem ser encontradas em [12]

Para finalizar esse capítulo veremos um resultado demonstrado pelo matemático dinamarquês Georg Cantor (1845–1918) que mostra o quão ínfimos são os números construíveis em comparação com a imensidão de números reais. Para tanto, necessitaremos da noção de conjunto enumerável.

Dizemos que $X \subset \mathbb{R}$ é **enumerável** se existe uma aplicação injetiva e sobrejetiva $f: \mathbb{N} \rightarrow X$. Por exemplo, é claro que \mathbb{N} é enumerável bastando tomar f como a função identidade;

também não é difícil verificar que \mathbb{Z} e \mathbb{Q} são conjuntos enumeráveis. De fato, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, definida por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é uma enumeração de \mathbb{Z} . Convidamos o leitor a produzir uma enumeração de \mathbb{Q} . Intuitivamente, um conjunto é enumerável se podemos fazer uma lista com todos os seus elementos: o primeiro, o segundo, o terceiro,...

O conjunto dos números reais, da sua parte, não é enumerável. A maneira mais simples de ver isso consiste em escrever os números reais em sua forma binária, isto é, como uma sequência de 0's e 1's da forma 000101011101010110111... Suponha que uma lista de números reais tenha sido dada

$$\begin{aligned} a_1 &= 01000101110101111100111... \\ a_2 &= 00101010110101111011010... \\ a_3 &= 11101010101110101010101... \\ a_4 &= 00000000000001101010111... \\ a_5 &= 11111111111111111111100... \\ a_6 &= 01010101011101000100100... \\ &\vdots \end{aligned}$$

Seja $a \in \mathbb{R}$ o elemento que obtemos trocando o primeiro dígito de a_1 , o segundo dígito de a_2 , o terceiro dígito de a_3 , et cetera. Obtemos dessa forma um número real que não está na lista dada, pois seu i -ésimo dígito é diferente do i -ésimo dígito de a_i . Esse argumento, chamado argumento diagonal de Cantor, mostra que podemos encontrar um número real que não pertence a qualquer lista que tenha sido prescrita. Isso significa que \mathbb{R} não é enumerável.

Proposição 4 (Cantor). *O conjunto dos números algébricos é enumerável.*

Dem. Rememore que o número $x \in \mathbb{R}$ é algébrico se satisfaz uma equação polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

em que os coeficientes a_k são inteiros, $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$. Agora, para cada equação polinomial P , definimos a sua altura como

$$h(P) = |a_n| + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_0| + n$$

Note que para toda equação P temos que $h(P) \in \mathbb{N}$. Fixado $h \in \mathbb{N}$ existe apenas um número finito de equações algébricas com altura h e, por sua vez, cada uma dessas equações têm um número finito de soluções. Isso significa que temos apenas um número finito de números algébricos com altura 1, um número finito com altura 2, etc. É claro, portanto, que podemos listá-los. \square

Uma paráfrase, um tanto quanto imprecisa, é verdade, do resultado acima é a seguinte: há infinitamente mais números transcendentais do que algébricos no conjunto dos números reais. Como os números construíveis formam um subconjunto do conjunto dos números algébricos, conclui-se que eles formam uma parte ainda menor de \mathbb{R} . Como tornar a afirmação acima mais precisa? Somente com estudo mais elaborado sobre a teoria dos números transfinitos de Cantor.

Capítulo 3

Construções com Régua Marcada

Neste capítulo daremos uma nova funcionalidade à régua. Essa nova característica permite-nos marcar pontos na régua, cuja distância corresponde à de um dado segmento, e deslizá-la pelo plano de maneira que cada um dos pontos permaneça sobre duas retas dadas, ao mesmo tempo em que a régua passe por um ponto dado. Em outras palavras, sejam r e s duas retas dadas, d uma distância dada que corresponde ao segmento marcado na régua e O um ponto dado. Então podemos desenhar a reta $\overleftrightarrow{OA} = \overleftrightarrow{AB}$ tal que $A \in r$, $B \in s$ e $[AB] = d$. Vale salientar que a antiga funcionalidade da régua ainda é preservada.

Uma construção que ilustra bem a nova característica da régua é devida a Arquimedes e mostra um método simples para realizar a trissecção do ângulo. Para isso, considere o ângulo $x = \angle AOB$ e um círculo de raio r com centro em O , conforme é ilustrado na figura 3.1. Com régua marcada, mantendo sua borda pelo ponto B , tome $C \in \overleftrightarrow{OA}$ e D sobre a circunferência de tal forma que $[CD] = r$. Construimos dessa forma o ângulo $y = \angle OCD$ e afirmamos que $y = \frac{x}{3}$.

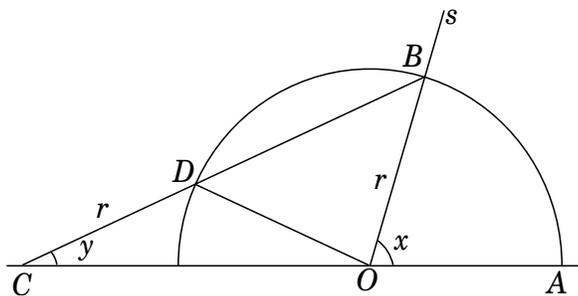


Figura 3.1

De fato, note que o triângulo $\triangle CDO$ é isósceles, logo $\angle OCD = \angle COD = y$. Como $\angle BDO$ é um ângulo externo do triângulo $\triangle CDO$ temos que $\angle ODB = 2y$. Observando que $\triangle DOB$ também é isósceles vem que $\angle DBO = 2y$ e como x é um ângulo externo do triângulo $\triangle CBO$ vem $x = 2y + y = 3y$, como queríamos demonstrar.

Apesar de uma boa ilustração do seu uso, note que o método de trissecção do ângulo de Arquimedes usa a régua marcada entre círculo e reta. No que se segue, entretanto, mostraremos que, além da trissecção do ângulo, podemos realizar a duplicação do cubo e

construir um heptágono regular com a régua marcada apenas *entre retas*. Para finalizar, mostraremos que com compasso e régua marcada podemos resolver equações algébricas de graus 3 e 4. Essa parte do trabalho foi baseada em estudo da seção 30, capítulo 6 de [11].

3.1 Três Problemas Clássicos

Teorema 9. *Com compasso e régua marcada podemos realizar a trissecção de qualquer ângulo dado.*

Dem. Sejam r a reta que contém OC , $\beta = \angle AOB$ e C o pé da perpendicular à \overleftrightarrow{OB} passando por A . Seja ainda s a reta paralela à reta r passando por A . Usando a régua marcada, construa o segmento OE que intercepta r em D e s em E , de forma que $DE = 2OA$. Marque G , o ponto médio de AE , e F , o ponto médio de ED . Veja a figura 3.2 abaixo.

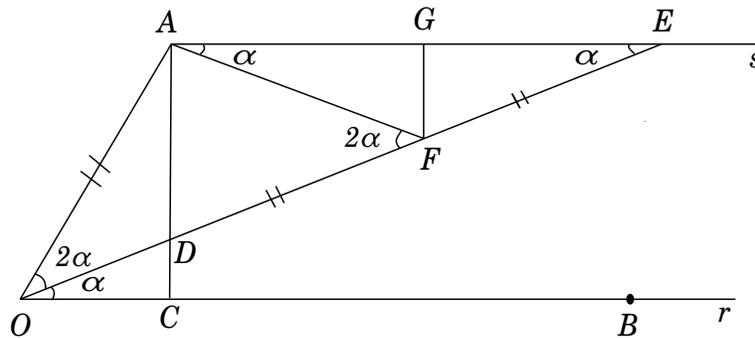


Figura 3.2

Mostraremos que $\alpha = \angle DOC = \frac{\beta}{3}$. Para isso, note que $\triangle ADE$ e $\triangle GFE$ são semelhantes, pois o ângulo $\angle GEF = \angle AED = \alpha$ é comum e

$$\frac{[AE]}{[GE]} = \frac{[DE]}{[EF]} = 2.$$

Isso implica que DA e GF são paralelos e, em particular, que GF é perpendicular à reta s . Pelo esquema de congruência lado-ângulo-lado, os triângulos $\triangle EFG$ e $\triangle AFG$ são congruentes. Como r e s são retas paralelas temos que $\angle FEA = \alpha$ e como o triângulo $\triangle AFE$ é isósceles temos que $\angle EAF = \angle FEA = \alpha$. Concluimos que $\angle AFO = 2\alpha$, pois ele é um ângulo externo do triângulo $\triangle AFE$. Como o triângulo $\triangle AOF$ também é isósceles, pois $OA = FA$, temos que $\angle AOF = 2\alpha$. Sendo assim $\angle AOB = 3\alpha$ e, portanto, $\alpha = \frac{\beta}{3}$. \square

Vejam agora o caso da duplicação do cubo. Para isso usaremos o lema abaixo

Lema 3. *Seja A um ponto no exterior de um círculo e suponha que as semirretas r e s de origem A interceptam o círculo nos pontos B, C e D, E , respectivamente. Então $[AB][AC] = [AD][AE]$*

Dem. Considere os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle ABE$. Temos que $\angle ACD = \angle AEB$, pois subtendem a mesma corda BD . Como os ângulos em A são comuns, os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle ABE$ são semelhantes. Assim,

$$\frac{[AC]}{[AE]} = \frac{[AC]}{[AB]},$$

o que implica o afirmado. Veja a figura 3.3. □

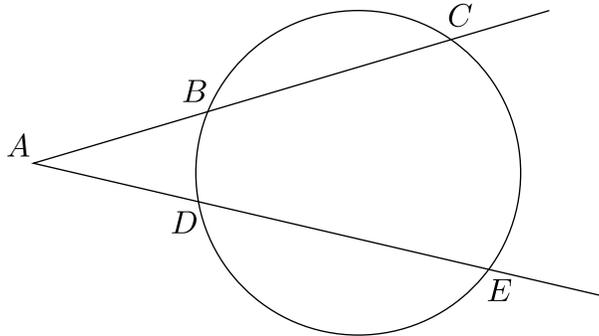


Figura 3.3

Teorema 10. *Dados os segmentos 1 e a , podemos construir com compasso e régua marcada o segmento $\sqrt[3]{a}$. Em particular, pelo que vimos no teorema 6, podemos realizar a duplicação do cubo com compasso e régua marcada.*

Dem. Seja AB um segmento de comprimento a na reta r . Como 2^{3k-1} é ilimitado para $k \in \mathbb{N}$, escolha k_0 de tal forma que $2^{3k_0-1} = b > a$. Construa o triângulo isósceles $\triangle ABC$ com $[CA] = [CB] = b$ e construa a circunferência com centro em C e raio b . Estenda CA e marque D sobre \overrightarrow{CA} com $[AD] = b$. Estenda DB e produza a reta s . Com a régua marcada produza a reta t que passa por C e intercepta s no ponto E e r no ponto F , de forma que $[EF] = b$. Veja a figura 3.4a.

Definindo $x = [CE]$ e $y = [BF]$, pelo teorema de Menelaus, c.f. [11], página 180, temos que

$$\frac{[FE]}{[EC]} \frac{[CD]}{[AD]} \frac{[AB]}{[BF]} = 1,$$

ou seja,

$$\frac{b}{x} \frac{2b}{b} \frac{a}{y} = 1,$$

ou seja,

$$x = \frac{2ab}{y}. \tag{3.1}$$

Tomando o ponto F como vértice e aplicando o lema 3 às cordas FBA e FGH temos

$$[FA][FB] = [FG][FH].$$

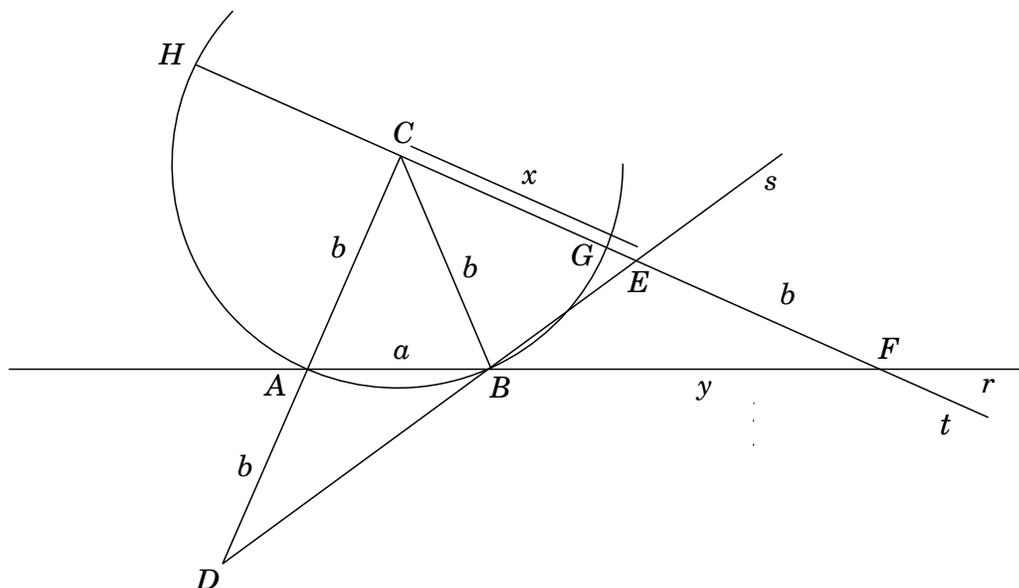


Figura 3.4

Temos que $[FG] = [FC] - [CG] = (b + x) - b = x$, $[FH] = [FG] + [GH] = x + 2b$, $[FB] = y$ e $[FA] = y + a$. Logo

$$y(y + a) = x(x + 2b). \quad (3.2)$$

Substituindo (3.1) em (3.2) vem

$$y(y + a) = \frac{2ab}{y} \left(\frac{2ab}{y} + 2b \right),$$

ou seja,

$$y^3 = \frac{4ab^2(a + y)}{y + a},$$

ou seja,

$$y^3 = 4ab^2.$$

Temos que $b = 2^{3k_0-1}$. Substituindo b , temos

$$y^3 = 4a(2^{3k_0-1})^2 = a2^22^{6k_0-2} = a2^{6k_0-2+2} = a2^{6k_0}.$$

Isso é o mesmo que

$$a = \left(\frac{y}{2^{2k_0}} \right)^3,$$

isto é $\sqrt[3]{a} = \frac{y}{2^{2k_0}}$. Isso mostra que podemos obter $\sqrt[3]{a}$ dividindo o segmento y um número $2k_0$ de vezes. \square

Veremos a seguir a construção do heptágono regular, devida ao grande matemático francês François Viète (1540-1603). Neste caso também recorreremos a alguns lemas.

Lema 4. *Suponha que sejam dados dois triângulos isósceles $\triangle ABC$ e $\triangle CDE$ com bases na mesma reta, e tais que o vértice de um desses triângulos está alinhado com um lado do outro, conforme mostra a figura 3.5. Então $\angle CED = 3\angle BAC$ e se denotarmos as bases $[AB] = x$, $[CE] = b$ e os lados por r temos que*

$$x^3 - 3xr^2 = br^2. \tag{3.3}$$

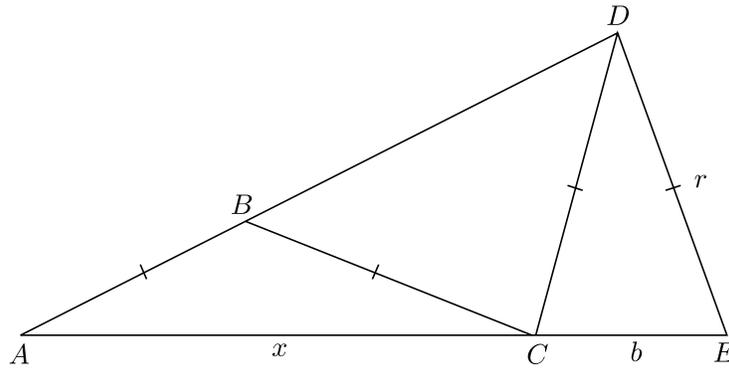


Figura 3.5

Dem. Construa um círculo com centro em C e raio r . Sejam F e G as projeções ortogonais de B e D , respectivamente, sobre a reta \overleftrightarrow{AC} . Assim, $[AF] = \frac{x}{2}$ e $[CG] = \frac{b}{2}$, logo $[FG] = \frac{1}{2}(b+x)$. Veja a figura 3.6.

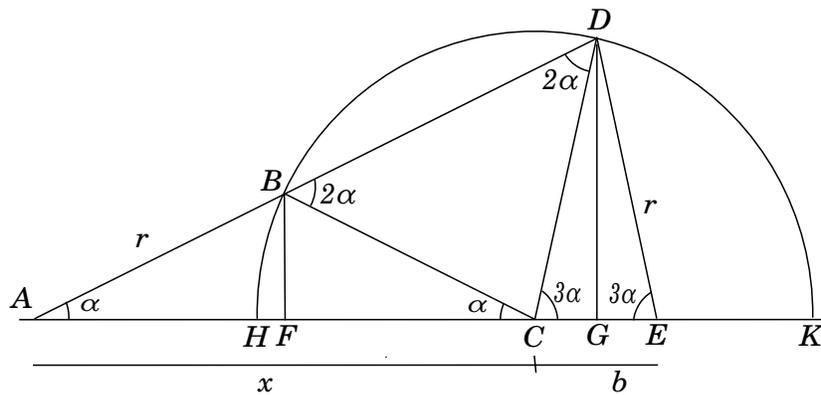


Figura 3.6

Sendo $y = [DB]$, pelo teorema de Tales pode-se dizer que

$$\frac{y}{r} = \frac{\frac{1}{2}(b+x)}{\frac{1}{2}x}, \tag{3.4}$$

isto é, $xy = r(b+x)$. Por outro lado, usando novamente o lema 3 a partir do vértice A , vem que

$$[AB][AD] = [AH][AK],$$

ou seja,

$$r(y + r) = (x - r)(x + r). \quad (3.5)$$

Isolando y em (3.4) e substituindo em (3.5) vem a equação de Viète

$$x^3 - 3r^2x = br^2,$$

como queríamos demonstrar. □

Na figura 3.1 se denotamos $\angle BAC = \angle ACB = \alpha$, então notando que $\angle DBC$ é um ângulo externo do triângulo $\triangle ABC$, obtemos que $\angle DBC = \angle BDC = 2\alpha$. Pelo mesmo raciocínio temos que $\angle ECD = \angle CED = 3\alpha$. Temos que

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\frac{x}{2}}{r} = \frac{x}{2r}, \\ \cos(3\alpha) &= \frac{b}{2r} = \frac{b}{2r}. \end{aligned}$$

Isolando x e b nas equações acima e substituindo na equação de Viète obtemos que

$$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,$$

Pode-se afirmar, portanto, que a equação de Viète é a versão geométrica da fórmula do ângulo triplo da trigonometria.

Lema 5. *Suponha que sejam dados um círculo de centro O e diâmetro AB e um ponto H da reta \overleftrightarrow{AB} e fora de AB , tal que*

$$[HB][HA]^2 = [HO][OA]^2. \quad (3.6)$$

Seja ainda I um ponto sobre o círculo tal que $[HI] = [OA]$. Então BI é o lado do heptágono regular inscrito no círculo.

Dem. A reta HI não pode ser tangente ao círculo em H , caso contrário, c.f. [3], proposição 36 do livro III dos *Elementos*, teríamos que $[HI]^2 = [HA][HB]$ e de (3.6) viria

$$[HI]^2 = \frac{[HO]}{[HA]}[OA]^2$$

e daí $[HI] \neq [OA]$, pois $H \notin AB$. Seja, portanto, Q o outro ponto de intersecção do segmento HI com a circunferência dada. Vamos mostrar que OQ é paralelo a IA . Veja a figura 3.7.

Para isso note que, pelo lema 3 temos que

$$[HQ][HI] = [HB][HA].$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{1}{(HI)^2}$, temos

$$\frac{[HQ]}{[HI]} = \frac{[HB][HA]}{[HI]^2}.$$

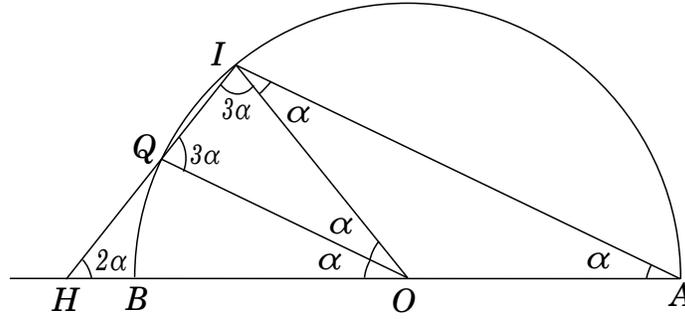


Figura 3.7

Porém, utilizando a relação (3.6) e lembrando que $[HI] = [OA]$ vem que

$$\frac{[HQ]}{[HI]} = \frac{[HO][OA]^2}{[HA][OA]^2} = \frac{[HO]}{[HA]}$$

Como o ângulo em H é comum, os triângulos $\triangle HOQ$ e $\triangle HAI$ são semelhantes, o que garante que OQ e AI são segmentos paralelos.

Se escrevemos $\angle OAI = \alpha$, então a partir do que vimos acima e observando que $\triangle OIA$ é isósceles temos que $\angle OIA = \angle HOQ = \alpha$. Observando que $\angle HOI$ é um ângulo externo de $\triangle OAI$ temos que $\angle HOI = 2\alpha = \angle OHI$. Como

$$2\alpha = \angle HOI = \angle HOQ + \angle QOI = \alpha + \angle QOI,$$

concluimos que $\angle QOI = \alpha$. Por fim, como $\triangle OQI$ é isósceles e $\angle OQI$ é um ângulo externo do triângulo $\triangle HOQ$, temos que $\angle OQI = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$. Chegamos, portanto, ao triângulo $\triangle OQI$ cuja soma dos ângulos é $7\alpha = \pi$ ou seja, $\alpha = \frac{\pi}{7}$. Assim, a corda BI que subtende o ângulo $2\alpha = \frac{2\pi}{7}$ é o lado do heptágono regular inscrito no círculo dado. \square

Teorema 11. *Dado um círculo de raio unitário e seu centro, com compasso e régua marcada podemos construir um heptágono regular inscrito.*

Dem. Seguindo Viète, considere os seguintes passos [entre colchetes damos algumas explicações]:

- 1 Passando uma reta pelo centro do círculo, determine um diâmetro AB .
- 2 Trace o círculo de centro A e raio AO e determine os pontos C e D sobre o círculo [dessa forma obtemos o triângulo equilátero $\triangle OAC$; isso implica que $\angle AOC = 60^\circ$, ou seja, AC é o lado do hexágono regular inscrito no círculo].
- 3 Trace o círculo de centro D e raio DO .
- 4 Trace o círculo de centro em O e raio CD . Seja E a intersecção desse círculo com o desenhado no passo anterior.

- 5 Marque F no encontro da reta CE com o diâmetro da circunferência [neste caso teremos que $[OF] = \frac{[OA]}{3}$, veja o capítulo 4 desse trabalho]
- 6 Trace o círculo de centro F e raio FC .
- 7 Com régua marcada passando por C , faça $GH = FC$ com G na circunferência de raio FC e H na reta r .
- 8 Trace o círculo de centro H com raio OA e marque I e K na circunferência de raio OA .
- 9 Trace o círculo de centro B com raio IK e marque L e M na circunferência de raio OA .
- 10 Trace o círculo de centro B com raio IM e marque N e P na circunferência de raio OA .
- 11 Trace os lados do heptágono $BILNPMK$

Temos então a figura 3.8

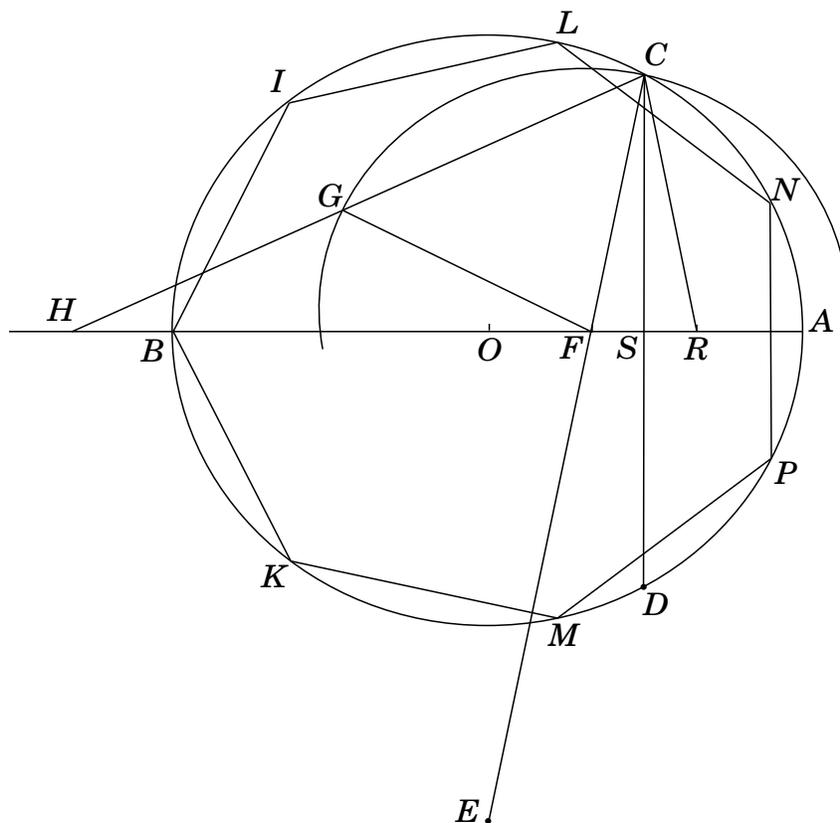


Figura 3.8

Veamos por que a construção acima funciona. Primeiramente, note que se adicionarmos as linhas FG e CR , em que R é o ponto médio de FA , encontramos o mesmo diagrama do lema 4 com

$$[HF] = x, \quad [FR] = b \quad \text{e} \quad [FC] = r.$$

Temos que $[OF] = [FR] = \frac{1}{3}$. Para usar a fórmula (3.3) devemos calcular $[FC]$; para isso note que se S é o ponto médio de FR , então $[CS] = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pois é a altura do triângulo equilátero $\triangle OCA$ de lado 1. Ainda temos que $FS = \frac{[FR]}{2} = \frac{1}{6}$. Usando o Teorema de Pitágoras vem

$$[CF]^2 = [CS]^2 + [FS]^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{36} = \frac{27 + 1}{36} = \frac{7}{9},$$

ou seja $[CF] = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Substituindo em (3.3) com $r = \frac{\sqrt{7}}{3}$ e $b = \frac{1}{3}$ obtemos

$$x^3 - 3x \left(\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^2,$$

ou seja,

$$x^3 - \frac{7}{3}x = \frac{7}{27}.$$

Agora, observando a figura 3.8 acima temos que

$$[HF] = x,$$

$$[HB] = [HF] - [FB] = x - ([OB] + [OF]) = x - \left(1 + \frac{1}{3} \right) = x - \frac{4}{3},$$

$$[HA] = [HB] + [BA] = x - \frac{4}{3} + 2 = x + \frac{2}{3},$$

$$[HO] = [HB] + [BO] = x - \frac{4}{3} + 1 = x - \frac{1}{3}.$$

Calculando $[HB][HA]^2 = [HO][OA]^2$ temos que

$$\left(x - \frac{4}{3} \right) \left(x + \frac{2}{3} \right)^2 = \left(x - \frac{1}{3} \right) 1,$$

ou seja,

$$x^3 - \frac{7x}{3} = \frac{7}{27}.$$

Isso significa que, com o compasso e a régua marcada, construímos o ponto H e o ponto I nas condições do lema 5. Portanto BI é o lado do heptágono regular inscrito no círculo dado. \square

3.2 Equações Cúbicas e Quárticas

Nesta seção investigaremos as raízes de equações cúbicas e quárticas e mostraremos que com compasso e régua marcada podemos encontrar sucessivas raízes reais dessas equações.

Pode-se mostrar que toda equação cúbica e toda equação quártica pode ser resolvida por sucessivas extrações de raízes quadradas e raízes cúbicas de *números complexos*. Entretanto, estamos estudando geometria e interessados no que ocorre no plano cartesiano \mathbb{K}^2 , em que $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$; dessa forma, estudaremos raízes reais dessas equações; mais precisamente, mostraremos que toda raiz real de equações algébricas de grau 3 ou 4 pode ser expressa por apenas três tipos de extensão de um subcorpo $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$.

Começamos com algumas equações que sabemos como resolver. Durante toda a discussão seguinte, consideraremos polinômios com coeficientes em um subcorpo ordenado $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ e trataremos as extensões necessárias para encontrar raízes.

Lema 6. *Considere a equação*

$$x^3 - 3x - b = 0 \tag{*}$$

em que $b \in \mathbb{K}$ e $|b| < 2$. Seja θ um ângulo tal que $\cos \theta = \frac{b}{2}$. Então $\alpha = 2 \cos(\frac{\theta}{3})$ é uma raiz de (*).

Dem. Já encontramos esta equação anteriormente em (3.3) e (2.4), a qual é fruto da identidade trigonométrica

$$\cos(3\psi) = 4 \cos^3 \psi - 3 \cos \psi,$$

em que $\theta = 3\psi$, $x = 2 \cos \psi$, e $b = 2 \cos(3\psi)$. A restrição $|b| < 2$ é necessária para achar um θ com $\cos \theta = \frac{b}{2}$. \square

Para determina as raízes de uma equação cúbica geral

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

seguimos o método de Cardano-Tartaglia. Primeiro fazemos a mudança de variáveis $x = y - \frac{a}{3}$ e obtemos

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a \left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b \left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0,$$

ou seja,

$$y^3 + \left(\frac{3a^3}{9} + b\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ba}{3} + c = 0.$$

Isso prova que qualquer equação do terceiro grau pode se reescrita em uma forma reduzida sem o termo x^2 . Sem perda de generalidade, portanto, podemos considerar a equação

$$x^3 + px + q = 0.$$

No caso em que $p = 0$ obtemos a equação $x^3 = -q$. Se $p \neq 0$, fazemos uma nova mudança de variáveis; nesse caso

$$x = w - \frac{p}{3w}. \tag{*}$$

Então

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 + px + q = \left(w - \frac{p}{3w}\right)^3 + p \left(w - \frac{p}{3w}\right) + q \\ &= w^3 - \frac{3w^2p}{3w} + \frac{3wp^2}{9w^2} - \frac{p^3}{27w^3} + pw - \frac{p^2}{3w} + q \\ &= w^3 - \frac{p^3}{27w^3} + q. \end{aligned}$$

Essa equação pode ser escrita como

$$27(w^3)^2 + 27q(w^3) - p^3 = 0,$$

ou seja, uma equação quadrática em w^3 ! Pela fórmula de Bhaskara vem

$$\begin{aligned} w^3 &= \frac{-27 \pm \sqrt{(27)^2 q^2 + 4 \cdot 27 p^3}}{2 \cdot 27} \\ &= -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \end{aligned}$$

Na realidade, devemos escrever

$$w^3 = -\frac{q}{2} + r,$$

em que r é uma raiz quadrada de $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. Prosseguindo chegamos a

$$w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ou ainda: w é uma raiz cúbica de $-\frac{q}{2} + r$, em que r é uma raiz quadrada de $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. Todo número complexo tem três raízes cúbicas e duas raízes quadradas. Isso dá seis possibilidades para w , porém quando substituímos em (*) dando

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}},$$

obtemos apenas 3 valores diferentes de x ! Um fato ainda mais surpreendente dessas soluções vem à tona quando consideramos cúbicas com todas as soluções em \mathbb{R} , pois mesmo nesse caso a fórmula acima pode envolver números complexos de maneira essencial. Por exemplo, as raízes de

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

são 4 , $-2 = \sqrt{3}$ e $-2 - \sqrt{3}$. Do seu lado, a fórmula obtida a cima com $p = -15$ e $q = -4$ dá que

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} - \frac{-15}{3 \cdot \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}}} \\ &= \sqrt[3]{2 + 11i} + \frac{15}{3 \cdot \sqrt[3]{2 + 11i}}. \end{aligned}$$

em que $i^2 = -1$. Agora

$$\begin{aligned} (2 + i)^3 &= (2 + i)^2(2 + i) \\ &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3 \\ &= 8 + 12i - 6 - i \\ &= 2 + 11i. \end{aligned}$$

Concluimos que $2 + i$ é uma raiz cúbica de $2 + 11i$ e ainda há outras duas em \mathbb{C} . Portanto, para uma solução da equação temos

$$\begin{aligned} x &= 2 + i + \frac{15}{6 + 3i} \\ &= 2 + i + \frac{15}{6 + 3i} \cdot \frac{6 - 3i}{6 - 3i} \\ &= 2 + i + \frac{90 - 45i}{36 + 9} \\ &= 4(!). \end{aligned}$$

As outras raízes podem ser obtidas se calculamos as outras raízes cúbicas de $2 + 11i$, c.f. [5].

Vejamos agora como podemos encontrar as raízes reais de uma equação cúbica com compasso e régua marcada.

Proposição 5. *Se $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 \geq 0$, então as raízes reais da equação $x^3 + px + q = 0$ podem ser encontradas tomando raízes quadradas e raízes cúbicas.*

Dem. Pela fórmula de Cardano-Tartaglia, se $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 \geq 0$ as raízes reais da equação $x^3 + px + q = 0$ podem ser encontradas extraindo a raiz quadradas e a raiz cúbica. \square

Proposição 6. *Se $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 < 0$, então a raiz real da equação $x^3 + px + q = 0$ pode ser encontrada extraindo uma raiz quadrada e trissecando um ângulo.*

Dem. Se $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 < 0$ devemos ter $p < 0$. Fazemos uma extensão do corpo em questão por $\sqrt{-3p}$. A mudança de variáveis $x = \frac{\sqrt{-3p}}{3}y$ em $x^3 + px + q = 0$ nos dá

$$\frac{-3p\sqrt{-3p}}{27}y^3 + \frac{\sqrt{-3p}y}{3} + q = 0,$$

ou seja,

$$-\frac{p\sqrt{-3p}}{9}y^3 + \frac{p\sqrt{-3p}y}{3} + q = 0.$$

Dividindo por $-\frac{p\sqrt{-3p}}{9}$ vem

$$y^3 + \frac{p\sqrt{-3p}}{3} \cdot \frac{27y}{-3p\sqrt{-3p}} + \frac{27q}{-3p\sqrt{-3p}} = 0,$$

ou seja,

$$y^3 - 3y + q\sqrt{-\frac{27}{p^3}} = 0.$$

Nossa hipótese $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 < 0$ implica

$$\frac{q^2}{4} < -\frac{p^3}{27},$$

ou seja,

$$q^2 \left(-\frac{27}{p^3} \right) < 4,$$

ou seja

$$q \sqrt{-\frac{27}{p^3}} < 2.$$

Pelo lema 6 vem que podemos resolver $x^3 + px + q = 0$ realizando a trissecção de um ângulo e tomando raízes quadradas. \square

Agora vejamos as equações quárticas.

Lema 7. *Se α é uma raiz real de uma equação algébrica de quarto grau com coeficientes em \mathbb{K} , então α pode ser obtido pela extensão de \mathbb{K} por uma raiz de uma equação cúbica com coeficientes em \mathbb{K} , seguida de sucessivas extrações de raízes quadradas.*

Dem. Considere a equação quártica em sua forma geral

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Fazendo a mudança de variáveis $x = y - \frac{a}{4}$ e procedendo exatamente como no caso da equação cúbica obtemos uma equação da forma

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0, \tag{*}$$

chamada de quártica reduzida ou suprimida. Suponha que α é uma raiz real de (*); neste caso deve haver uma segunda raiz real β , pois as raízes complexas de um polinômio com coeficientes reais sempre vem em pares de números complexos conjugados entre si¹. Portanto, podemos fatorar (*) como

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + a'x + c) = x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Expandindo o lado direito da equação acima vem que

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + a'x + c) = x^4 + (a + a')x^3 + (c + b + aa')x^2 + (ac + ba')x + cb = x^4 + px^2 + qx + r.$$

¹Suponha que $w \in \mathbb{C}$ é raiz de $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$. Neste caso devemos ter

$$w^n + a_{n-1}w^{n-1} + \dots + a_1w + a_0 = 0.$$

Conjugando vem essa equação vem

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{w^n + a_{n-1}w^{n-1} + \dots + a_1w + a_0} \\ &= \overline{w^n} + \overline{a_{n-1}w^{n-1}} + \dots + \overline{a_1w} + \overline{a_0} \\ &= \overline{w}^n + \overline{a_{n-1}}\overline{w}^{n-1} + \dots + \overline{a_1}\overline{w} + a_0 \\ &= \overline{w}^n + a_{n-1}\overline{w}^{n-1} + \dots + a_1\overline{w} + a_0, \end{aligned}$$

isto é, se w é raiz da equação, então \overline{w} também será.

Comparando os lados direito e esquerdo concluímos que devemos ter

$$\begin{aligned} a &= -a', \\ p &= c + b + aa' = c + b - a^2, \\ q &= ac + ba' = a(c - b), \\ r &= bc, \end{aligned} \tag{3.7}$$

portanto,

$$(x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c) = 0.$$

Eliminando b e c em (3.7) obtém-se

$$b = \frac{1}{2} \left(p + a^2 - \frac{q}{a} \right)$$

e

$$a^6 + 2pa^4 + (p^2 - 4r)a^2 - q^2 = 0.$$

Fazendo-se $y = a^2$ nessa última equação chegamos a

$$y^3 + 2py^2 + (p^2 - 4r)y - q^2 = 0.$$

Uma vez calculado $y = a^2$ podemos determinar a e daí b . Por fim podemos resolver $x^2 + ax + b = 0$ pela aplicação sucessiva de $+$, $-$, \cdot , \div e $\sqrt{\quad}$. \square

Antes de enunciarmos o principal resultado dessa seção precisamos de um último lema, análogo ao teorema de Descartes na pagina 12, para o uso da régua marcada.

Lema 8. *Suponha que tenham sido dados duas retas r e s , um ponto O e um segmento de comprimento d em um plano cartesiano \mathbb{K}^2 sobre um corpo \mathbb{K} . Suponha que OAB é uma reta tal que $A \in r$, $B \in s$ e $[AB] = d$. Então as coordenadas de A e B estão em uma extensão $\mathbb{K}(\alpha)$, em que α é uma raiz de um polinômio quártico com coeficientes em \mathbb{K} .*

Dem. Por uma mudança linear de coordenadas, podemos assumir que $O = (0, 0)$ e r é a reta $y = b$.² Seja X o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano cartesiano tais que \overleftrightarrow{OP} corta r em um ponto Q e $[PQ] = d$; o conjunto X é conhecido desde a antiguidade e é chamado de *conchoide de Nicomedes*. Encontrar a reta OAB da proposição é equivalente a encontrar a interseção da segunda reta s com a conchoide.

Primeiramente devemos encontrar a equação da conchoide. Para fazer isso, tome uma reta arbitrária através da origem com equação $y = ax$; essa reta encontra-se com r no ponto $Q = (\frac{b}{a}, b)$. A condição $[PQ] = d$ dá

$$\left(x - \frac{b}{a} \right)^2 + (y - b)^2 = d^2.$$

Mas P está também sobre a reta $y = ax$ e podemos usar essa equação para eliminarmos a variável a . Substituindo $a = \frac{y}{x}$, obtemos a equação da conchoide ilustrada na figura abaixo

$$(x^2 + y^2)(y - b)^2 = d^2 y^2. \tag{*}$$

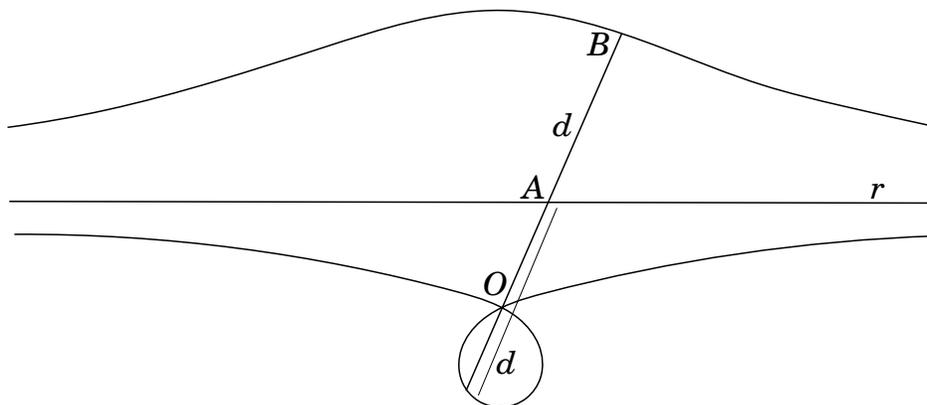


Figura 3.9

Se a reta s tem equação $y = mx + n$, substituindo em (*) obtemos uma equação quártica em x ; se α é uma solução dessa equação então $B = (\alpha, m\alpha + n)$ e daí determinamos a equação da reta \overleftrightarrow{OB} e do ponto A . \square

Finalmente o grande resultado. Para demonstrá-lo basta utilizar os resultados que demonstramos nesse capítulo.

Teorema 12. *Seja \mathbb{K} um subcorpo de \mathbb{R} e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então as seguintes condições são equivalentes*

(i) *Existe uma torre de extensões*

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{K}_n \subseteq \mathbb{R}$$

em que $\alpha \in \mathbb{K}_n$ e, para cada i , \mathbb{K}_i é obtido como a extensão de \mathbb{K}_{i-1} por um elemento $\beta_i = \beta$ satisfazendo uma das condições abaixo

(a) $\beta = \sqrt{a}$ em que $a \in \mathbb{K}_{i-1}$, $a > 0$.

(b) $\beta = \cos(\frac{\theta}{3})$ em que $\cos \theta \in \mathbb{K}_{i-1}$.

(c) $\beta = \sqrt[3]{a}$ em que $a \in \mathbb{K}_{i-1}$.

(ii) *Existe uma torre de extensões*

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{K}_n \subseteq \mathbb{R}$$

em que $\alpha \in \mathbb{K}_n$ e, para cada i , \mathbb{K}_i é obtido como a extensão de \mathbb{K}_{i-1} por uma raiz de uma equação quadrática, cúbica ou quártica.

(iii) *O número α é construível com compasso e régua marcada a partir de pontos com coordenadas em \mathbb{K} .*

²Faça uma translação de maneira que O vá sobre a origem e, em seguida, faça uma rotação.

Dem. Para ver que (i) implica (iii) observe que os três tipos de extensão são construíveis com compasso e régua marcada: no caso de (a) bastam ferramentas euclidianas e nos casos (b) e (c) necessitamos de régua marcada de acordo com os teoremas 9 e 10 da página 30.

Agora vejamos que (iii) implica (ii). Com o compasso e a régua euclidianos podemos resolver equações quadráticas e cada uso da régua marcada corresponde à solução de uma equação quártica, c.f. lema 8 da página 42.

Por fim, (ii) implica (i). Para demonstrar esse fato observe que o problema da determinação das raízes reais de um polinômio quártico reduz-se à resolução de um polinômio cúbico seguido de um polinômio quadrático, de acordo com o lema 7 da página 41; da sua parte, a determinação das raízes reais de polinômio cúbico ou quadrático depende das extensões (a), (b) e (c) pela proposições 5 e 6, na página 40. \square

Finalizamos esse capítulo com um resultado que determina todos os polígonos regulares que podem ser construídos com compasso e régua marcada. Novamente, a ferramenta utilizada para demonstrá-lo é a Teoria de Galois.

Teorema 13. *Um polígono regular de n lados pode ser construído com compasso e régua marcada (entre retas apenas) se, e somente se, n é da forma*

$$2^k 3^l p_1 p_2 \dots p_s$$

em que $k \geq 0$, $l \geq 0$ e p_1, p_2, \dots, p_s são primos distintos da forma $2^a 3^b + 1$ para a e b em $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Capítulo 4

Construções Geométricas com o Compasso Apenas

Neste capítulo mostraremos que toda construção que podemos realizar com a régua e o compasso euclidianos pode ser realizada apenas com o compasso. Esse resultado foi demonstrado pelo matemático italiano Lorenzo Mascheroni (1750-1800) em sua obra "*Geometria del Compasso*". Conforme veremos, uma solução completa do problema depende do estudo de uma importante transformação do plano cartesiano: a inversão em um círculo.

4.1 A Inversão em um Círculo

Seja Γ um círculo com centro em O e de raio r no plano cartesiano \mathbb{K}^2 sobre o corpo ordenado euclidiano \mathbb{K} . Definimos a aplicação $I: \mathbb{K}^2 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{K}^2$ que associa ao ponto P o ponto P' na semirreta \overrightarrow{OP} de origem O e que passa por P , tal que

$$[OP][OP'] = r^2.$$

Note que se P é um ponto do interior de Γ diferente de O , isto é, se $[OP] < r$ temos necessariamente que $[OP'] > r$, ou seja, P' é um ponto do exterior de Γ . Reciprocamente, se P é ponto do exterior de círculo, isto é, se $[OP] > r$, então $[OP'] < r$, o que garante que P' está no interior de Γ . Observe que quanto mais próximo P está de O , mais distante está sua imagem. Note ainda que os pontos de Γ permanecem fixos pela aplicação I . Por esses motivos a aplicação I é chamada de **inversão no círculo**.

Note que se $I(P) = P'$, temos $I(P') = P$, isto é, $I^{-1} = I$. Aliás, dizemos que P' é o inverso de P e reciprocamente. Isso mostra que I é uma aplicação injetiva de $\mathbb{K}^2 \setminus \{O\}$ sobre $\mathbb{K}^2 \setminus \{O\}$. Podemos definir I como uma aplicação injetiva em *todo* o plano cartesiano. Para isso, introduzimos a noção de **ponto no infinito** ∞ . O conjunto $\hat{\mathbb{K}} = \mathbb{K}^2 \cup \{\infty\}$ é chamado de plano estendido. Definimos $I: \hat{\mathbb{K}} \rightarrow \hat{\mathbb{K}}$ de forma que $I(O) = \infty$ e $I(\infty) = O$.

Para verificarmos algumas propriedades importantes da aplicação I precisamos do seguinte lema:

Lema 9. *O ângulo $\angle BCA$ é reto se, e somente se, AB é o diâmetro de um círculo passando por C .*

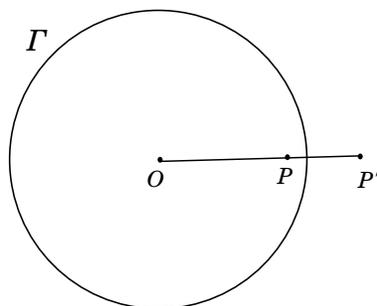


Figura 4.1

Dem. Suponha inicialmente que o triângulo $\triangle ABC$ é circunscrito em um círculo de diâmetro AB . Isso significa que o centro O está sobre AB . O segmento OC divide o triângulo $\triangle ABC$ em dois triângulos isósceles $\triangle AOC$ e $\triangle BOC$, pois $[OA] = [OC] = [OB] =$ raio do círculo. Assim, $\angle OAC = \angle OCA = \alpha$ e $\angle OBC = \angle OCB = \beta$; a soma dos ângulos do triângulo $\triangle ABC$ dá $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, ou seja, $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Reciprocamente, suponha que $\angle BCA$ é reto e seja O o ponto médio de AB . Tome a círculo com centro em O de raio $[OB]$. Se esse círculo não passa por C , suponha à princípio que C está no seu interior. Estendendo o segmento BC obtemos o triângulo $\triangle ABC'$ que, pelo que vimos acima, é reto em C' .

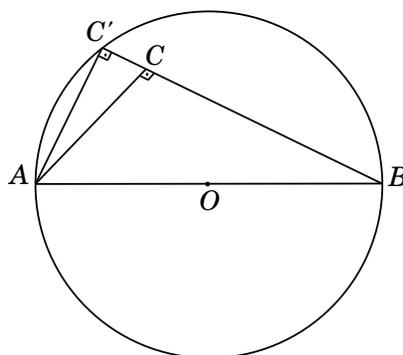


Figura 4.2

Assim, obtemos um triângulo $\triangle ACC'$ que têm um ângulo externo, o $\angle BCA$, igual a um ângulo interno não adjacente, o $\angle CC'A$; uma contradição. Concluimos que C não pode estar no interior do círculo. Um raciocínio análogo mostra que C também não pode estar fora desse círculo. \square

Vejamos agora as propriedades da inversão no círculo.

Proposição 7. *Vale o seguinte:*

- (i) *Uma reta passando por O é levada sobre ela mesma.*
- (ii) *Uma reta que não passa por O é levada em um círculo passando por O .*

(iii) Um círculo passando por O é levado em uma reta que não passa por O .

(iv) Um círculo que não passa por O é levado em um círculo que não passa por O .

Dem. Em cada caso mostraremos que as imagens das retas e círculos estão contidas nas retas e círculos prometidos; a conclusão do resultado seguirá imediatamente da injetividade da aplicação I .

Começamos observando que a propriedade (i) decorre diretamente da definição da aplicação I : os pontos da reta \overleftrightarrow{OP} são levados em pontos P' dessa mesma reta, ou seja, a imagem da reta está contida na própria reta, tais que $[OP][OP'] = r^2$. Para verificar (ii), seja r uma reta que não passa por O . Seja \overleftrightarrow{OA} a reta perpendicular à r passando por O . Dado um ponto $P \in r$ sejam A' e P' os inversos de A e P , respectivamente. Veja a figura 4.3.

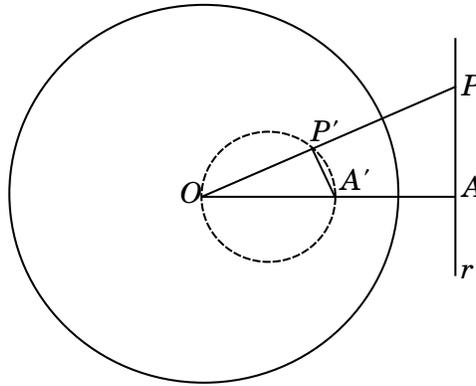


Figura 4.3

Temos que

$$[OA][OA'] = r^2 = [OP][OP'],$$

isto é,

$$\frac{[OA']}{[OP]} = \frac{[OP]}{[OA]}.$$

Então os triângulos $\triangle OP'A'$ e $\triangle OAP$ são semelhantes e o ângulo $\angle OP'A' = \angle OAP$ é um ângulo reto. Usando o lema 9, temos que P' está sobre um círculo Γ' de diâmetro $[OA']$. Temos que $I(r) = \Gamma'$, como queríamos verificar.

O item (iii) segue diretamente de (ii) e da observação que $I^{-1} = I$.

Por fim, o item (iv). Seja Γ' um círculo de centro O' e raio r' que não passa pelo centro O do círculo de inversão Γ . Vamos demonstrar o resultado no caso em que O' está no exterior de Γ . Se uma reta passando por O intercepta Γ' nos pontos A e B , sejam A' e B' as imagens de A e B por I , respectivamente. Se O'' é o ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{OO'}$ com a reta paralela à BO passando por A' , mostraremos que A' e B' estão sobre um círculo de centro em O'' . Veja a figura 4.4.

Para isso, denotemos $[OA] = a$, $[OB] = b$, $[OA'] = a'$, $[OB'] = b'$, $[OO'] = m$. Ainda, se uma reta passando por O é tangente ao círculo Γ em T e denotamos $[OT] = t$, temos c.f.

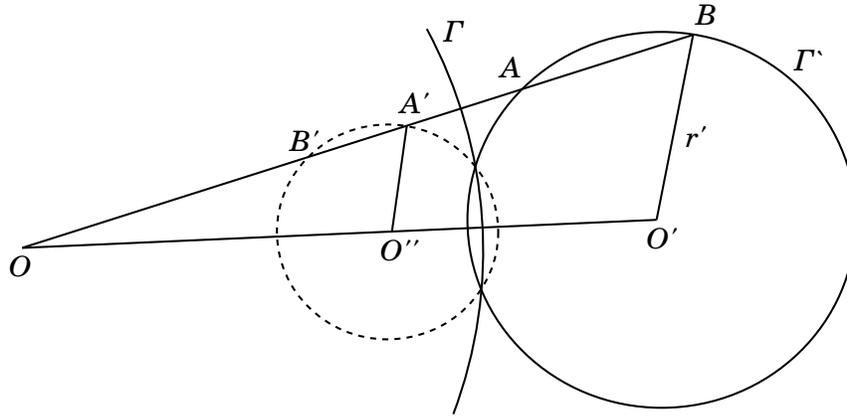


Figura 4.4

[3], proposição 36 do livro III dos *Elementos*, que

$$t^2 = ab,$$

para todos os pontos A e B obtidos pela intersecção do círculo Γ' em uma semirreta de origem O . Como $aa' = bb' = r^2$, se dividirmos essas relações pela anterior temos que

$$\frac{aa'}{ab} = \frac{bb'}{ab} = \frac{r^2}{t^2} = c^2,$$

ou seja,

$$\frac{a'}{b} = \frac{b'}{a} = \frac{r^2}{t^2} = c^2. \quad (*)$$

Note que c^2 é uma constante, pois r e t são constantes. Isso significa que para todos A , B , A' e B' como acima que tomarmos teremos valerá (*). Como $\triangle OA'O''$ e $\triangle OBM$ são semelhantes, temos que

$$\frac{[OO'']}{[OO']} = \frac{[OA']}{[OB]} = \frac{[A'O'']}{[O'B]},$$

ou seja,

$$\frac{[OO'']}{m} = \frac{a'}{b} = \frac{[O''A']}{r'}.$$

Então

$$[OO'] = m \frac{a'}{b} = mc^2 \quad \text{e} \quad [O''A'] = r' \frac{a'}{b} = r'c^2.$$

Isso implica que para todas as posições de A e B sobre Γ' o ponto O'' será o mesmo: o ponto da semirreta $\overrightarrow{OO'}$ a uma distância mc^2 de O ; além disso, o ponto A' estará sempre a uma distância $r'c^2$ de O'' . Como $\frac{a'}{b} = \frac{b'}{a}$ temos que o ponto B' estará à mesma distância de O'' . Concluimos que a imagem de Γ' está contida em um círculo de centro O'' e raio $[O''A']$.

Considere agora o caso em que O está no interior de Γ' . Suponha inicialmente que $O = O'$. Neste caso se, P' é o inverso de $P \in \Gamma'$, temos que

$$r^2 = [OP][OP'] = [O'P][O'P'] = r'[O'P'],$$

ou seja, $[O'P'] = r^2/r$. Portanto a imagem de Γ será um círculo de centro $O = O'$ e raio r^2/r .

Suponha agora que $O \neq O'$. Dados A e B em Γ' sejam A' e B' as imagens de A e B pela aplicação I . As retas \overleftrightarrow{OA} e \overleftrightarrow{OB} interceptam Γ' em outros dois pontos denotados por A'' e B'' , respectivamente. Veja a figura 4.5.

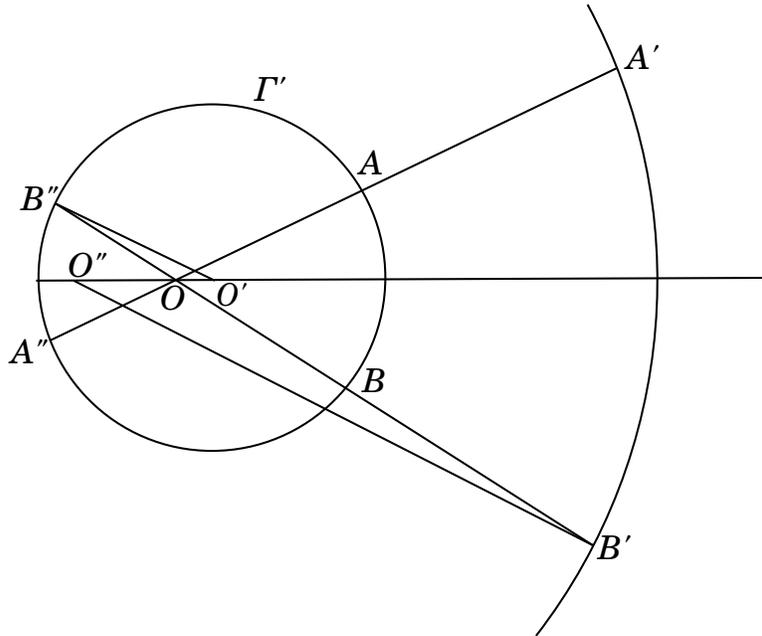


Figura 4.5

Como no caso anterior, denote $[OA] = a$, $[OB] = b$, $[OA'] = a'$, $[OB'] = b'$, $[OA''] = a''$ e $[OB''] = b''$. Como $\angle A''AB = \angle BB''A''$, pois subtendem a mesma corda $A''B$ e $\angle B''OA'' = \angle BOA$, pois são opostos pelo vértice, temos que os triângulos $\triangle OAB$ e $\triangle OA''B''$ são semelhantes. Isso implica que

$$aa'' = bb'' = c,$$

em que c é uma constante independente dos pontos A e B . Temos ainda que $aa' = bb' = r^2$ e daí vem que

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''} = \frac{r^2}{c} = k.$$

O restante da demonstração segue os passos do caso anterior. Seja O'' o ponto em que a reta passando por B' e paralela à $O'B''$ intercepta $\overleftrightarrow{OO'}$; esse ponto será o centro do círculo que é a imagem de Γ' . Para ver isso, note que os triângulos $\triangle O'OB''$ e $\triangle O''OB'$ são semelhantes uma vez que $\angle O''OB = \angle O'OB''$, pois são opostos pelo vértice, e $\angle OO''B' = \angle OO'B''$, pois $B'O''$ e $O'B''$ são paralelos. Assim, denotando $[OO'] = m$, vem que

$$\frac{[O''O]}{m} = \frac{[O''B']}{r'} = \frac{b'}{b''} = k,$$

Isso implica que $[OO''] = km$ e $[O''B'] = kr'$. Isso significa que o ponto está totalmente determinado e a distância de B' até O'' é igual a kr' . Lembrando que $a''/a' = k$, um raciocínio idêntico ao que detalhamos acima garante que $[O''A'] = kr'$, ou seja, A' está sobre o mesmo círculo que está o ponto B' . \square

4.2 A Inversão em um Círculo com o Compasso

Nessa seção veremos que podemos construir a imagem de um ponto P pela inversão em um círculo Γ usando apenas o compasso. Além disso mostraremos como realizar construções geométricas simples somente com o compasso.

Proposição 8. *Seja Γ uma circunferência de centro em O e raio r . Dado P o seu ponto inverso P' em relação à Γ pode ser construído com o uso apenas do compasso.*

Dem. Para provarmos este teorema, consideremos primeiro um ponto P exterior a Γ . Com centro em P , traçamos um círculo de raio PO que intercepta Γ em R e S . Com estes pontos como centro, traçamos o círculo de raio $[RO]$ e $[SO]$; note que $[RO] = [SO] = r$. Esses dois últimos círculos interceptar-se-ão em um ponto P' . Afirmamos que P' é o inverso de P .

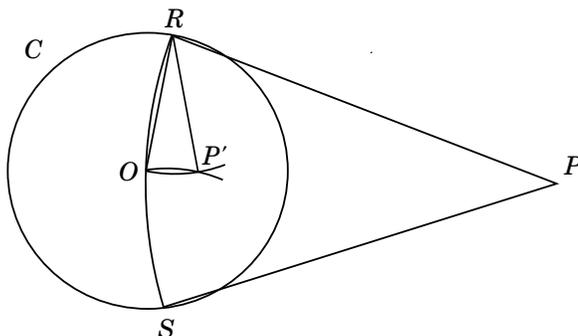


Figura 4.6

Primeiramente, mostremos que P' está sobre a semirreta \overrightarrow{OP} . Para isso note que os triângulos $\triangle ORP$ e $\triangle OSP$ são congruentes por lado-lado-lado; em particular $\angle OPR = \angle OPS$. Se T é o ponto de intersecção de RS com a reta \overleftrightarrow{OP} temos que os triângulos $\triangle PTR$ e $\triangle PTS$ são congruentes, por lado-ângulo-lado. Como $\angle RTP$ e $\angle STP$ são congruentes e suplementares, concluímos que eles são retos. Tudo isso implica que a reta \overleftrightarrow{OP} é a reta perpendicular ao segmento RS passando pelo seu ponto médio T ; portanto, a reta \overleftrightarrow{OP} é o conjunto dos pontos equidistantes de R e S . como $[RP'] = [SP'] = r$, segue que P' está sobre \overleftrightarrow{OP} .

Agora observe que os triângulos isósceles $\triangle OPR$ e $\triangle OP'R$, são semelhantes por ângulo-lado-ângulo pois têm o lado OR em comum e $\angle PRO \equiv \angle POR \equiv \angle P'OR \equiv \angle OP'R$. Portanto vale a razão

$$\frac{[OP]}{[OR]} = \frac{[OR]}{[OP']},$$

ou seja

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

Fica provado que P' é o inverso de P .

Agora suponha que P é um ponto no interior de Γ . Nesse caso, a mesma demonstração acima servirá se o círculo de centro em P e raio $[OP]$ intersectar Γ em dois pontos distintos. Caso isso não ocorra, podemos reduzir a construção do ponto P' , inverso de P , ao caso anterior. Para ver isso, mostremos primeiramente que, dados dois pontos A e O , podemos encontrar um ponto C na semirreta oposta à \overrightarrow{OA} tal que $[AO] = [OC]$. De fato, dado o círculo de centro em O e raio $r = [OA]$, marque nesse círculo, a partir de A , os pontos P , Q e C de maneira que $[AP] = [PQ] = [QC] = r$. Note que C é o ponto prometido pois os triângulos $\triangle AOP$, $\triangle OPQ$ e $\triangle OQC$ são equiláteros, de maneira que OA e OC formam um ângulo de 180° e $[OC] = [OQ] = [AO]$ – aliás, como $[AQ] = r\sqrt{3}$, o que pode ser verificado facilmente, mostramos como construir o segmento de comprimento $\sqrt{3}$ a partir da unidade sem o auxílio da régua.

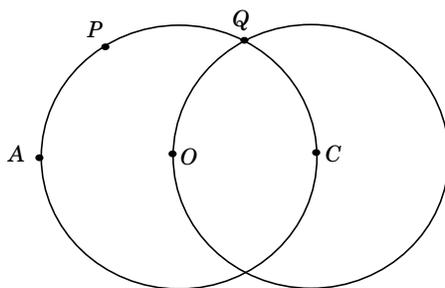


Figura 4.7

Repetindo o processo descrito acima podemos determinar um ponto R na semirreta \overrightarrow{OC} tal que $[OR] = n[AO]$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Para encontrar o ponto inverso de um ponto P no interior do círculo, primeiramente determinamos o ponto R na semirreta oposta à \overrightarrow{PO} tal que $[OR] = n[OP]$ e R está no exterior de Γ ¹. Agora, pelo que vimos anteriormente, podemos construir o inverso R' de R . Nesse caso

$$r^2 = [OR][OR'] = (n[OP])[OR'] = (n[OR'])[OP]$$

Veja a figura 4.8.

Isso significa que o inverso de P é o ponto P' , tal que $[OP'] = n[OR']$. □

Com a proposição acima já estamos prontos para demonstrar o resultado de Mascheroni. Antes disso, porém, vejamos como podemos realizar algumas construções geométricas importantes apenas com o compasso.

Como primeiro exemplo, consideramos o problema de determinar o ponto médio de um segmento AB . Eis a solução: trace um círculo de centro em B e raio AB e marque três pontos sucessivamente nesse círculo partindo de A . Vimos na demonstração da proposição

¹Aqui assumimos tacitamente que nosso corpo é arquimediano, isto é, dados números positivos $a \in \mathbb{K}$ e $b \in \mathbb{K}$, deve existir um número $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

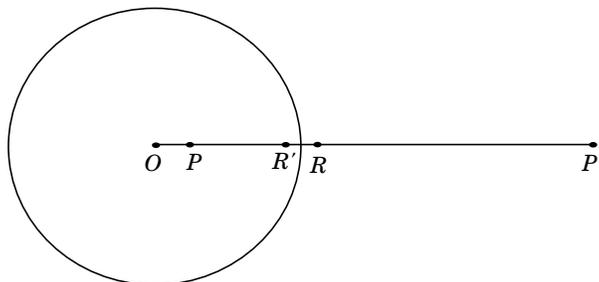


Figura 4.8

acima que C está sobre a reta \overleftrightarrow{AB} e $[AB] = [BC]$, de forma que $[AC] = 2[AB]$. Agora trace o círculo de centro A e raio AB e seja C' o ponto inverso de C em relação a esse círculo. Temos que

$$[AC'][AC] = [AB]^2,$$

ou seja,

$$[AC'](2[AB]) = [AB]^2,$$

ou seja

$$2[AC'] = [AB]$$

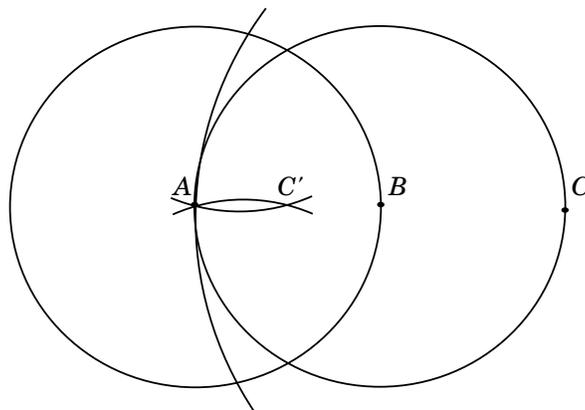


Figura 4.9

Isso mostra que C é o ponto prometido.

Usando apenas o compasso também somos capazes de determinar o centro de um círculo que foi dado. Para isso, tomamos um ponto P sobre esse círculo e traçamos um segundo círculo de centro P , que intercepta o primeiro nos pontos Q e R . Com esses pontos como centros, traçamos novos círculos de raios $[PQ] = [PR]$ que se intersectam em um ponto S . Afirmamos que o ponto S' , inverso de S em relação ao círculo de centro em P , é o centro do círculo inicial. Veja a figura 4.10.

A demonstração dessa afirmação é semelhante à da proposição 8; inicialmente, note que, se S' é o inverso de S em relação ao círculo de centro P , temos

$$[PS][PS'] = [PR]^2,$$

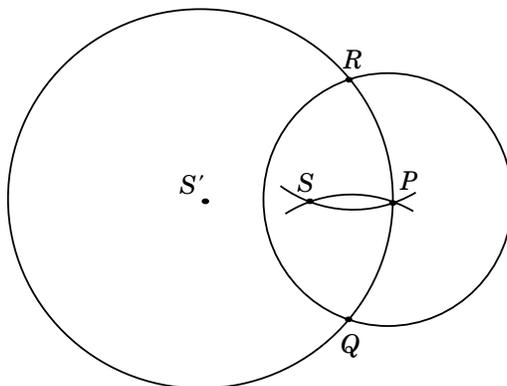


Figura 4.10

ou seja,

$$\frac{[PS]}{[PR]} = \frac{[PR]}{[PS']}.$$

Como $\angle SPR = \angle S'PR$, concluímos que os triângulos $\triangle S'PR$ e $\triangle SPR$ são semelhantes; note ainda que $\triangle SPR$ é isósceles, pois $[RP] = [RS]$. Isso significa que $\triangle S'RP$ é isósceles com

$$\angle S'RP = \angle PSR = \angle SPR = \angle S'PR,$$

ou seja, $[S'R] = [S'P]$. De maneira semelhante podemos mostrar que $[S'P] = [S'Q]$, o que garante que S' é o centro do círculo dado.

4.3 O Resultado de Mascheroni

Deve-se esperar que quanto maiores são os recursos disponíveis para a construção de figuras geométricas, maior é o número de problemas que podemos resolver. No Capítulo 3, quando demos outra utilidade para a régua euclidiana, mostramos que os problemas clássicos da antiguidade, antes insolúveis com ferramentas euclidianas, podiam ser resolvidos nesse caso. No caminho inverso está a descoberta de Mascheroni que, em 1797, mostrou que *todas as construções possíveis com régua e compasso euclidianos podem ser realizadas apenas com o compasso*. Vejamos a demonstração desse resultado.

Teorema 14 (Mascheroni). *Todas as construções possíveis com régua e compasso podem ser executadas apenas por compasso.*

Dem. É claro que não é possível traçar a reta passando por dois pontos dados com o compasso; no contexto das construções de Mascheroni dois pontos dados definem uma reta e, conforme veremos a seguir, não será necessário *traçá-la*² para levar a cabo as construções euclidianas. Com essa convenção, mostraremos que, apenas com o compasso, podemos realizar as seguintes construções:

²Há uma razão para a expressão “traçá-la” em destaque: no fundo, nunca traçamos uma coisa que seja! Apenas nos interessa saber se uma determinada construção é possível teoricamente; a maneira mais prática ou o grau de precisão com que ela pode ser levada a cabo não está em jogo nesse trabalho.

- (i) Traçar um círculo com centro e raio dado;
- (ii) Encontrar os pontos de interseção de dois círculos;
- (iii) Encontrar os pontos de interseção de uma reta e um círculo;
- (iv) Encontrar o ponto de interseção de duas retas.

Conforme definido no capítulo 1, um construção euclidiana qualquer corresponde à aplicação desses passos uma quantidade finita de vezes.

Os itens (i) e (ii) são bastante claros e dispensam demonstração. Vejamos, portanto, os itens (iii) e (iv). Para provar (iii), devemos antes mostrar, usando apenas o compasso, como determinar o ponto médio de um arco AB em um círculo de centro O . A construção é a seguinte: tomando A e B como centros, trace círculos de raio $[OA]$; a partir de O trace arcos OP e OQ iguais à AB ; então construa dois arcos com $[PB]$ e $[QA]$ como raios e centros P e Q , respectivamente, seja R o ponto de intersecção desses arcos, finalmente, tomando $[OR]$ como raio e P (ou Q) como centro, trace um arco até encontrar S , sua intersecção com AB ; esse é o ponto médio procurado.

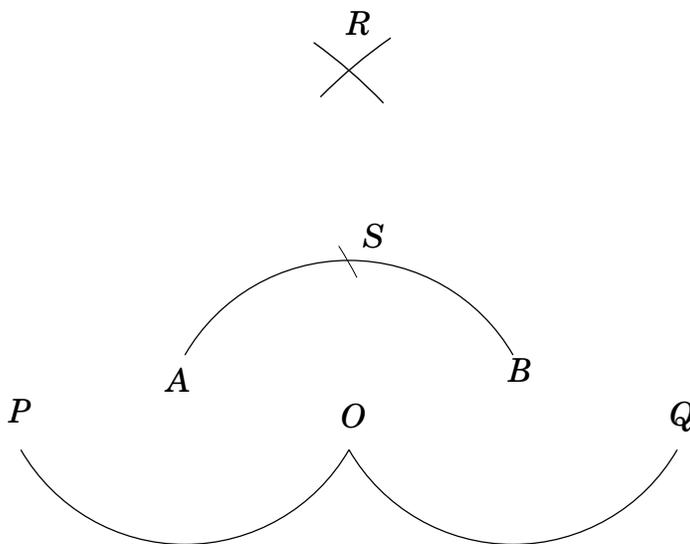


Figura 4.11

Para ver que o ponto obtido a partir dos passos acima é o ponto médio do arco AB note que R e O são equidistantes de P e Q , o que implica que a reta \overleftrightarrow{OR} é perpendicular a PQ . Como, por construção, S é equidistante de P e Q , temos que $S \in \overleftrightarrow{OR}$. Como $[PA] = [AO] = [OB] = [BQ]$ e $[PO] = [AB] = [OQ]$ temos que os triângulos $\triangle PAO$, $\triangle AOB$ e $\triangle OBQ$ são congruentes por lado-lado-lado; assim

$$\angle POA + \angle AOB = 90^\circ = \angle SOB = \angle BOQ.$$

Daí, como $\angle POA = \angle BOQ$, segue que $\angle AOS = \angle SOB$, ou seja, S é o ponto médio do arco AB , conforme queríamos demonstrar.

Agora podemos encontrar com o compasso os pontos de intersecção de uma reta AB e um círculo Γ de centro O . Suponha inicialmente que AB passa por O . Nesse caso podemos encontrar os pontos X e X' como os pontos médios dos arcos de Γ determinados pelos pontos de intersecção de Γ com um círculo de centro em B (ou A , tanto faz).

Suponha agora que a reta AB não passa por O . Comece construindo dois círculos: um de centro A e raio $[OA]$ e outro de centro em B e raio $[OB]$, intersectando-se em P . Seja Q o ponto inverso de P em relação à Γ . Trace o círculo de centro em Q de raio $[OQ]$. Este círculo intercepta Γ nos pontos X e X' . Afirmamos que X e X' são os pontos procurados.

Para verificar isso, mostraremos que

$$[XP] = [XO] \text{ e } [X'P] = [X'O], \quad (*)$$

pois, por construção temos $[OA] = [PA]$ e $[OB] = [PB]$ (nesse ponto convidamos o leitor a verificar que o conjunto dos pontos do plano que são equidistantes de dois pontos dados, A e B , digamos, é a reta perpendicular à AB passando pelo seu ponto médio). Observe que, de acordo com a proposição 8, o ponto inverso de Q , ou seja, P , é tal que sua distância até X e X' é igual ao raio do círculo. Como X e X' estão sobre Γ , segue imediatamente (*).

Incidentalmente mostramos como construir o círculo que é a imagem de AB pela inversão em Γ . De fato, o círculo que passa por X , X' e O é a imagem da reta AB pela inversão em Γ , pois a reta e o círculo têm os pontos X e X' em comum e os pontos de Γ são preservados pela inversão em Γ .

Por último, vamos verificar (iv). Dadas as retas AB e $A'B'$, desenhe um círculo Γ de centro em O . Considere os círculos obtidos como as imagens das retas pela inversão em Γ . Pela proposição 7, esses círculos interceptam-se em O e num segundo ponto Y . O ponto X , inverso de Y em relação à Γ , é o ponto procurado. De fato, Y é o único ponto que é inverso de um ponto em AB e de um ponto em $A'B'$; portanto, o ponto inverso de Y deve estar sobre as duas retas. \square

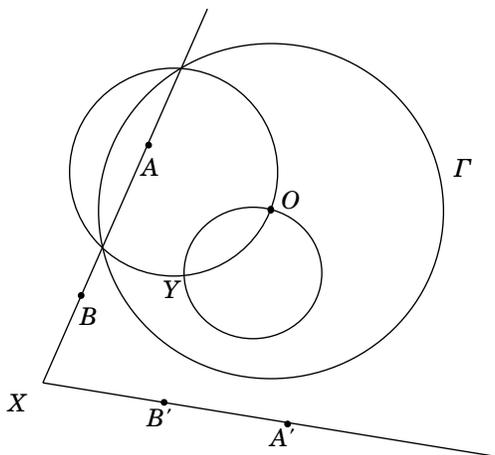


Figura 4.12

Em 1928, o matemático dinamarquês Johannes Hjelmslev encontrou em um sebo de Copenhague uma cópia de um livro intitulado *Euclides Danicus* (Euclides Dinamarquês)

e publicado em 1672 pelo autor, até então completamente desconhecido, Georg Mor. Ao examinar o conteúdo do livro, Hjelmslev descobriu uma demonstração completa para o resultado de Mascheroni publicada mais de 100 anos antes. Escrito em dinamarquês, essa é a provável razão pela qual o livro de Mor passou tanto tempo no degredo.

Inspirado nos resultados obtidos por Mascheroni, o matemático suíço Jacob Steiner (1796-1863) estudou a possibilidade de realizar construções geométricas apenas com a régua. Como vimos no capítulo 2, a régua sozinha não é capaz de nos levar além de \mathbb{Q} , ou seja, não podemos realizar qualquer construção euclidiana somente com esse instrumento. Steiner mostrou, entretanto, que se são dados um círculo e o seu centro, podemos realizar qualquer construção euclidiana somente com a régua. Em outras palavras: pegue o seu compasso e trace um círculo de centro em O ; daí em diante guarde o seu compasso na gaveta e prossiga somente com a régua! Para maiores detalhes sobre o assunto o leitor interessado pode consultar [6], página 197.

Conclusão

A maior parte dos atuais professores de matemática do país certamente tiveram, em algum momento de suas vidas, contato com construções geométricas; seja em disciplinas específicas sobre o assunto, seja por mera curiosidade infantil sobre o funcionamento dos instrumentos geométricos. Quanto a isso há poucas dúvidas. Apesar de tudo, pouquíssimos aprendem, nesses primeiros contatos com o assunto, a sua relevância e profundidade geométricas, suas origens e, em um grau ainda menor, sua relação com a álgebra.

Talvez o maior mérito desse trabalho seja senão o de apresentar ao professor e aluno os velhos problemas sob uma nova luz; mais abrangente e profunda, essa perspectiva permite enxergar a verdadeira natureza geométrica da questão que, de outra forma, permanece escondida ou tem pouco brilho. Aqui, os fundamentos da Geometria entram em jogo; também torna-se clara, sólida e fundamental a relação entre geometria e álgebra, uma em auxílio da outra quando necessário: os problemas geométricos têm soluções algébricas e, reciprocamente, equações algébricas são resolvidas com ferramentas geométricas.

Esperamos ter tornado um pouco mais clara essa relação simbiótica álgebra-geometria e, mais ainda, temos esperança que esse trabalho possa ser útil para o ensino e a aprendizagem em matemática no país. Tópicos mais avançados relacionados ao assunto (e.g. Teoria de Galois) são mencionados incidentalmente como um desafio para a curiosidade de alunos e professores interessados em expandir seus conhecimentos sobre o assunto.

Referências Bibliográficas

- [1] AABOE, A. *Episódios da História Antiga da Matemática*. Sociedade Brasileira de Matemática. 3ª edição. Rio de Janeiro. 2013.
- [2] ARTIN, E. *Galois Theory*. Dover Books. 2ª edição, 1997.
- [3] BICUDO, I. *Os Elementos*. editora UNESP, São Paulo. 2009.
- [4] NETO, A. C. M. *Geometria*. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática. 1ª edição. Rio de Janeiro. 2013.
- [5] VARIÁVEIS COMPLEXAS E APLICAÇÕES, R. V. Churchill, MacGrall Hill do Brasil, 1975.
- [6] COURANT, R., ROBBINS, H. E STEWART I. *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*. Oxford University Press. 1996.
- [7] EVES, H. *An Introduction to the History of Mathematics*. Holt, Rinehart e Winston. 4ª edição. 1976.
- [8] EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução do grego de Irineu Bicudo. Editora Unesp. 2009.
- [9] MONTEIRO, J. *Elementos de Álgebra*. Elementos de Matemática – Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Ao Livro Técnico S.A. 1969.
- [10] RICHMOND H. W. *To construct a polygon of 17 sides*. Mathematische Annalen, **67**. 459-461. 1909.
- [11] HARTSHORNE, R. *Geometry: Euclid and Beyond*. Springer. 2000.
- [12] SPIVAK, M. *Calculus*. Publish or Perish. 4ª edição. 2008.