UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ - UNIFAP
PRÓ REITORIA DE PÓS GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Rosely Rodrigues Rego Bitencourt

APLICAÇÕES DO CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE A PARTIR DA ENGENHARIA DIDÁTICA

MACAPÁ-AP
2017

Rosely Rodrigues Rego Bitencourt

APLICAÇÕES DO CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE A PARTIR DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Dissertação apresentado ao colegiado do curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT da Universidade Federal do Amapá, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, orientado pelo Prof. Dr. Guzmán Eulalio Isla Chamilco.

MACAPÁ-AP
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

Rosely Rodrigues Rego Bitencourt APLICAÇÕES DO CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE A PARTIR DA ENGENHARIA DIDÁTICA/ Rosely Rodrigues Rego Bitencourt. – Macapá, Amapá, 2017- 76 p. : il.(alguma color.); 30 cm.
Orientador:Prof. Dr. Guzmán Eulalio Isla Chamilco
– , 2017.
1. . 2. . 3. . 4. . 5. . 6. . I. Orientador: Guzmán Eulalio Isla Chamilco. II. Universidade Federal do Amapá. III. Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática. IV. CDU 02:141:005.7

Rosely Rodrigues Rego Bitencourt

APLICAÇÕES DO CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE A PARTIR DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, na Universidade Federal do Amapá - UNIFAP, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática, submetida à aprovação da banca examindora composta pelos seguintes membros:

AVALIADORES

Orientador Dr. Guzmán Eulalio
Isla Chamilco
UNIFAP

Dr. Dilberto da Silva Almeida Junior
UFPA

Dr. Jose Walter Cardenas Sotil
UNIFAP

Dr. Erasmo Senger
UNIFAP

MACAPÁ-AP
2017

À Deus pelo dom da vida e pela oportunidade de recomeçar a cada dia.

Aos meus pais, Sebastião e Raimunda, (in memoriam), pela educação baseada no amor e no respeito, alicerces da minha formação.

À meu esposo Paulo e à minha filha Maria, pelo incentivo, paciência e compreensão durante a elaboração deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Ao professor e orientador Dr. Guzmán Eulalio Isla Chamilco, pela paciência, experiência e conhecimentos transmitidos durante a orientação deste trabalho.

Aos professores da Universidade Federal do Amapá, sobretudo aos que ministraram o curso de Mestrado Profissional de Matemática para a turma PROFMAT 2014.

Aos colegas de turma, pela experiência e conhecimentos compartilhados durante as aulas do curso de mestrado profissional.

RESUMO

O conceito de proporcionalidade pode ser abordado como conteúdo interligado com diversos outros assuntos de matemática, tornando o processo ensino-aprendizagem mais dinâmico, interativo, motivador e contextualizado no cotidiano escolar. Neste sentido, o presente trabalho tem o objetivo de apresentar a aplicação do conceito de proporcionalidade a partir da Engenharia Didática, para uma turma de 2º ano do Ensino Médio, em uma Escola Pública da Rede Estadual, no Município de Macapá. A metodologia utilizada baseou-se na aplicação de uma seqüência didática seguindo os princípios da Engenharia Didática. Foi aplicado um teste inicial objetivando verificar o nível de conhecimento prévio dos alunos e a partir da análise dos resultados verificou-se a necessidade de revisão dos conteúdos relacionados a proporcionalidade. Em seguida, foi elaborada e aplicada uma seqüência didática composta de 5 atividades, relacionando teoria e prática, com abordagem no cotidiano dos alunos. Após a aplicação da seqüência didática, para validar a eficácia da metodologia utilizada, foi aplicado um teste final para verificar o nível de desempenho dos alunos. Da análise comparativa dos resultados obtidos nos testes inicial e final, constatou-se uma melhora relativa de desempenho dos alunos, uma vez que no teste inicial, a turma apresentou, em média, um percentual de 24% de acertos; 50% de erros e 26% de respostas em branco, enquanto que no teste final, os percentuais médios foram de 42% de acertos; 40% de erros e 18% de questões em branco. Assim, conclui-se que a utilização da metodologia da engenharia didática trouxe uma melhora significativa para o processo de ensino-aprendizagem do conceito de proporcionalidade para os alunos pesquisados.

Palavras Chaves: Engenharia Didática.Função Afim. Geometria. Proporcionalidade.Trigonometria.

ABSTRACT

The concept of proportionality can be approached as a concept intertwined with other mathematical subjects, making the teaching-learning process more dynamic, interactive, motivating, and contextualized in the school life. In this regard, this piece of work aims to present the application of the concept of proportionality after the Didactic Engineering to the 2nd year of Medium Degree at a state school, in Macapá municipality. The methodology adopted was based in the application of a didactic sequence following the Didactic Engineering principles. A starting test was applied to stablish the previous knowledge level of the students and from that the need to review the proportionality related contents. It was then elaborated and applied a 5 activities didactic sequence, relating theory and practices, approaching the students' daily routine. After that, to support the efficiency of the method, a final test was applied to verify their performance. From the comparative analysis of the tests results obtained, the students' performance was found to relatively improve, given that, in the initial test, the class performed on average 24% correct answers, 50% wrong ones, and 26% of answers left empty, while the final test presented a average of 42% correct, 40% wrong and 18% empty answers. On this basis, it was therefore concluded that the application of the Didactic Engineering method brought a significant teaching-learning improvement in the proportionality concept to students and teachers.

Keywords: Didactic Engineering, Linear Function. Geometry. Proportionality. Trigonometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

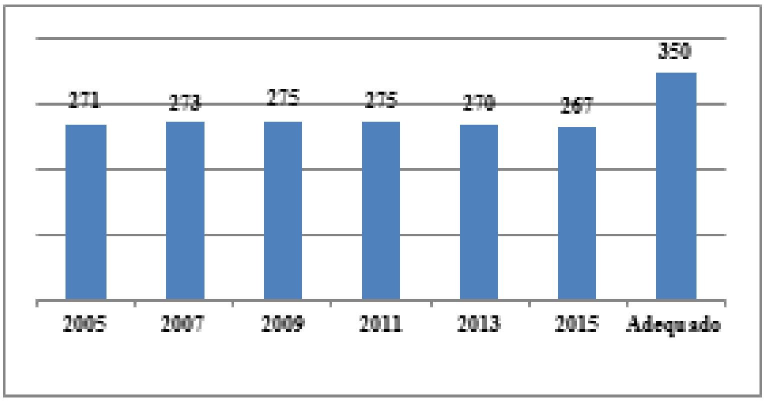
1.1 Problematização e apresentação da pesquisa

O nível de aprendizado dos alunos brasileiros no Ensino Médio piorou em Matemática e chegou, em 2015, ao pior resultado desde 2005, início da série histórica do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica). A situação mais grave é em Matemática, tendo uma segunda queda consecutiva.

A queda nos índices de desempenho na disciplina Matemática, demonstrados nas avaliações externas, vem causando muita discussão entre educadores, motivo pelo qual estão sendo realizadas inúmeras pesquisas na área educacional, sobretudo em Matemática.

Pesquisas recentes apontam que as causas do baixo desempenho do ensino da Matemática, em sala de aula, quase sempre estão relacionadas a utilização de abordagens superficiais, mecanizadas e descontextualizadas do cotidiano dos alunos. Somado a isso, a falta de formação continuada dos docentes e o uso excessivo de algoritmização dos conteúdos ministrados, podem ser fatores do baixo desempenho dos alunos nos diferentes assuntos abordados em Matemática.

Figura 1 – Evolução das notas dos alunos de Ensino Médio no SAEB.



Fonte: Sistema de Avaliação da Educação Básica - SEAB, 2016

A Figura 1 mostra queda no rendimento do ensino de Matemática no Ensino Médio regular nas escolas brasileiras. Segundo o Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB, enquanto o índice adequado é 350, os estudantes brasileiros alcançaram, na média, a nota 267. Em 2013, o resultado havia ficado em 270.

O indicador do Amapá para o ensino médio não foi nada bom. Em matemática, o aprendizado com bom desempenho ficou para apenas 2,6% dos estudantes, enquanto a meta era atingir 25,6%. De acordo com a Organização Não Governamental Todos Pela Educação, é considerado como aprendizado adequado o aluno que atinge ou supera a pontuação de 350 para matemática, no 3º ano do ensino médio. As avaliações são com base em resultados da Prova Brasil e do SAEB (2015).

Neste contexto, o presente trabalho apresenta uma proposta de aplicação do conceito de proporcionalidade para alunos do 2º ano do Ensino Médio, através de uma seqüência didática de ensino baseada na metodologia da Engenharia Didática.

A proporcionalidade apresenta-se como um dos conceitos matemáticos mais importantes e aplicados desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio. As suas inúmeras aplicações no cotidiano, bem como em diversas disciplinas como (Matemática, Física, Biologia, Química, dentre outras), desempenham um papel vital no processo de ensino-aprendizagem dos alunos.

Para o desenvolvimento da pesquisa, foram priorizados alguns aspectos do conceito de proporcionalidade, tais como: razão, proporção, constante de proporcionalidade, proporcionalidade entre duas grandezas (direta e inversa) e aplicações destes em outros ramos da Matemática.

Desta forma, a proposta para o desenvolvimento da pesquisa, baseou-se na construção de uma seqüência didática de ensino com o intuito de facilitar o processo de ensino-aprendizagem dos alunos.

As motivações para a escolha do tema proposto se sustentam nas seguintes justificativas:

- A diversidade de aplicações cotidianas do conceito de proporcionalidade, no âmbito do Ensino Básico. O conceito de proporcionalidade é abordado ou contextualizado na maioria dos conteúdos de Matemática em todos os ciclos do Ensino Fundamental e no Ensino Médio;
- A queda dos índices de aproveitamento do ensino de Matemática, havendo a necessidade de serem buscadas novas alternativas de ensino;
- A Engenharia Didática possibilita uma sistematização metodológica organizada no contexto de sala de aula para a realização da pesquisa, levando em consideração as relações de dependência entre teoria e prática.

1.2 Objetivos da pesquisa

1.2.1 Objetivo Geral

- A presente pesquisa tem por objetivo geral aplicar o conceito de proporcionalidade, para alunos do 2º ano do Ensino Médio, através de uma seqüência didática de ensino baseada na metodologia da Engenharia Didática.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Analisar se alunos da turma pesquisada conseguem identificar a aplicação do conceito de proporcionalidade e resolver problemas presentes em diferentes conteúdos de matemática;

- Descrever as principais estratégias de resolução e dificuldades de aprendizagem, apresentadas pelos alunos, relativas a aplicação do conceito de proporcionalidade na resolução de problemas;

1.3 Delimitação da pesquisa

A pesquisa delimita-se a aplicações do conceito de proporcionalidade a partir da engenharia didática para uma turma de 30 alunos do 2º ano de Ensino Médio de uma escola pública da rede estadual de ensino, localizada no município de Macapá - Estado do Amapá.

1.4 Organização da pesquisa

A presente dissertação está organizada em 5 (cinco) capítulos assim distribuídos:

No capítulo 1 é descrita a introdução da pesquisa, onde são abordados a problematização, apresentação, justificativa, importância, objetivos e delimitação do tema proposto. O capítulo 2 está destinado à fundamentação teórica básica para sustentação argumentativa do tema proposto. Parte de uma contextualização histórica, descrição das principais definições, assim como discorre sobre aspectos de ensino nas escolas públicas, dificuldades de aprendizagem, estratégias de ensino e aplicação de metodologias didáticas relacionadas a temática proporcionalidade.

No capítulo 3 é descrita a metodologia utilizada na pesquisa, sendo consideradas, a descrição do local e da turma escolhida, a carga horária estimada para aplicação da seqüência didática proposta, bem como a descrição dos instrumentos de coleta de dados. No capítulo 4 é feita a apresentação e análise dos resultados obtidos através da aplicação das atividades práticas, analisando-os na perspectiva de responder aos objetivos propostos. Por fim, no capítulo 5, são realizadas as considerações finais conforme as evidências a que chegou este estudo e a necessidade de estudos futuros para que mais reflexões contribuam para o desenvolvimento do tema.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Os pressupostos teóricos, que direcionaram esta investigação, com foco no estudo de proporcionalidade, estão fundamentados nos princípios da Engenharia Didática. Este capítulo foi dividido em cinco subseções: Proporcionalidade (contextualização histórica e definições); O ensino de proporcionalidade nas escolas públicas; Dificuldades de aprendizagem no ensino de proporcionalidade; Estratégias eficientes para o ensino de proporcionalidade e a Engenharia didática aplicada ao ensino de proporcionalidade.

2.1 PROPORCIONALIDADE

2.1.1 Contextualização histórica

A idéia de proporcionalidade matemática ajudou no desenvolvimento das grandes civilizações antigas e continua acompanhando e auxiliando no crescimento das sociedades modernas nos dias de hoje.

O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade deve-se a sua simplicidade e a facilidade da sua aplicação nas várias situações cotidianas. O conceito de proporcionalidade tem aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento como na Física, Química, Geografia, Biologia, entre outros.

No sentido de se compreender o conceito de proporcionalidade, o qual é mobilizado durante a resolução de situações-problema, será realizada uma contextualização histórica sobre o conceito de proporção sem, contudo, se aprofundar nos detalhes dos acontecimentos ocorridos na história da Matemática no período analisado. A intenção é simplesmente procurar compreender como o conceito de proporcionalidade surgiu e como o raciocínio proporcional vem sendo utilizado no decorrer do processo de construção e desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

Segundo Eves (2004), na história antiga da Matemática, há registros relacionados a proporções no Papiro de Rhind, um texto matemático datado de 1650 a.C., publicado em 1927 e que trazia informações referentes à matemática egípcia antiga.

A história antiga da Matemática ainda aponta aplicações da teoria das proporções na Geometria. Eves (2004, p.61) relata que há mais de mil anos da era cristã, os babilônios "tinham conhecimento de que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais".

Acredita-se também que o estudo da proporcionalidade tenha se desenvolvido na Grécia antiga com Tales de Mileto (625 a 558 a.C.). Pode-se dizer que Tales deu a matemática uma característica que se conserva até hoje, o conceito de demonstração ou prova.

O Filósofo e Matemático Eudoxo (408 - 355 a.C) foi o descobridor da brilhante Teoria das Proporções (360 a.C.) entre grandezas de mesma espécie, descrita no Livro V de Os Elementos de Euclides (325 - 265 a.C), resolvendo a questão das proporções envolvendo incomensuráveis, em um raciocínio tão brilhante que, em essência, foi o mesmo utilizado dois milênios mais tarde por Dedekind e Weiertrass na elaboração da teoria dos números reais.

Encontra-se no Livro VI dos Elementos de Euclides, a aplicação das proporções eudoxianas à geometria plana. São apresentados nesse livro, os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos; construções de terceiras, quartas e médias proporcionais; a proposição que afirma que a bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos outros dois lados, entre outras afirmações.

Tradicionalmente os problemas que envolvem proporções, nos quais são conhecidos três valores e deseja-se determinar um quarto valor, são resolvidos por um processo prático denominado *Regra de Três* e que, supostamente, surge das noções apresentadas na proposição 19 do Livro VII dos Elementos de Euclides. No entanto, a regra de três só veio a ser associada às proporções no final do século XIV.(EVES, 2004). Anteriormente a regra era puramente verbal, não sendo expressa por nenhum tipo de fórmulas ou equações.

Eves (2004) ainda relata que a regra de três chegou até a Arábia por meio da Índia, recebendo de Brahmagupta e Bháskara a mesma nomeação. Brahmagupta considerava que "Na regra de três, os nomes dos termos são *argumento*, *fruto* e *requisito*. O primeiro e o último termos devem ser semelhantes. *Requisito* multiplicado por *fruto* e dividido por *argumento* é o *produto*".

Inspirado na teoria das Proporções de Eudoxo, R. Dedekind (1831 - 1916) concebeu a noção de corte como uma maneira de identificar cada elemento de Q e também cada "furo"de Q com um elemento bem determinado de um novo conjunto, que então é R.

Dedekind, no século XIX, baseando-se no princípio da completude ou da continuidade define um número real como um "corte"dos números racionais.

2.1.2 Principais definições

Tendo em vista sua localização no currículo escolar, uma primeira forma adequada de se apresentar a proporcionalidade é trabalhar a proporção como igualdade de duas frações (caso simples) e usar as definições de grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.

Diversos autores contemporâneos pesquisaram a respeito do ensino de proporcionalidade na escola básica. Segundo Ávila (1986) proporcionalidade pode ser definida considerando os seguintes aspectos:

Definição 2.1.2.1: Tratamento por meio de proporções

1. Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são proporcionais - mais especificamente, diretamente proporcionais - se estiverem relacionadas: $y = k \cdot x$ ou $\frac{y}{x} = k$, onde k é uma constante positiva chamada constante de proporcionalidade.

2. Diz-se que as variáveis x e y são inversamente proporcionais se $y = \frac{k}{x}$ ou $x \cdot y = k$, onde k é uma constante positiva (constante de proporcionalidade).

3. Se várias variáveis, digamos, x; y; z; w; r e s estão relacionadas por uma equação do tipo $z = k \cdot \frac{(x \cdot y \cdot z)}{r \cdot s}$, onde k é uma constante, então dizemos que z é diretamente proporcional a x, a y e a w; e inversamente proporcional a r e a s.

Para Bianchini (2013, p. 199), os números x, y e z são diretamente proporcionais aos números não nulos a, b e c quando: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, ou seja, duas grandezas são diretamente proporcionais quando a razão entre dois valores da primeira é igual à razão entre os valores correspondentes da segunda e assim por diante.

Segundo Silveira e Marques (2013, p.206) duas grandezas são inversamente proporcionais quando a razão entre os valores da primeira é igual ao inverso da razão entre os valores correspondentes da segunda, ou seja, os números não nulos x e y são inversamente proporcionais aos números não nulos a e b quando: $x \cdot a = y \cdot b$ ou $\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}}$.

Outra consideração a ser feita é que existem várias formas de se abordar o tema de proporcionalidade, mas todos eles exigem que o aluno tenha uma certa maturidade e um mínimo de conhecimento algébrico, além de um bom senso lógico e capacidade de análise. A melhor forma de se abordar o tema, dentro das condições e do nível de conhecimento matemático apresentados pelos alunos participantes da pesquisa, seria um tratamento funcional.

Definição 2.1.2.2: Tratamento funcional

Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando existe uma correspondência $x \to y$, que associa a cada valor x de uma delas um valor y bem definido da outra, de tal modo que sejam cumpridas as seguintes condições:

- Quanto maior for x, maior será y. Matematicamente falando, se $x \to y$ e $x' \to y'$ então $x < x' \Rightarrow y < y'$

- Se dobrarmos, triplicarmos etc, o valor de x então o valor correspondente de y será, respectivamente dobrado, triplicado etc. Na linguagem matemática: se $x \to y$ então $nx \to ny$ para $n \in \mathbb{N}$.

Cumpridas ambas as condições, dizemos que a correspondência $x \to y$ é uma proporcionalidade.

Observe que a relação deve ser bem definida, ou seja, que y deve ser dado em função de x, portanto, a proporcionalidade é, na verdade uma função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, sendo $\mathbb{R}^+ = x \in \mathbb{R} : x > 0$ com as seguintes propriedades:

1. f é uma função crescente, isto é $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$ para quaisquer $x; x' \in \mathbb{R}^+$
2. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $f(nx) = n \cdot f(x)$.

A propriedade 2 acima, assumida apenas para $n \in \mathbb{N}$ vale, na verdade, para qualquer número real positivo. Isso é o que afirma o teorema a seguir:

Teorema 1. Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. Se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função crescente tal que $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $f(cx) = c \cdot f(x)$ para todo x; $c \in \mathbb{R}^+$

Demonstração: Primeiramente, para todo número racional $r = \dfrac{m}{n}$, com $m; n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$ vale

$$n \cdot f(rx) = f(n \cdot rx) = f(mx) = m \cdot f(x);$$

pela propriedade 2. Logo, $f(rx) = \dfrac{m}{n} f(x) = r \cdot f(x)$. Assim, é válida a igualdade $f(cx) = c \cdot f(x)$ quando c é racional.

Suponhamos, por absurdo, que exista $c > 0$ irracional tal que $f(cx) \neq c \cdot f(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}^+$. Então, ou $f(cx) < c \cdot f(x)$ ou $f(cx) > c \cdot f(x)$.

Consideremos o primeiro caso:

Se $f(cx) < c \cdot f(x)$ então $f(cx)/f(x) < c$. Seja r um valor racional aproximado de c, de modo que $\dfrac{f(cx)}{(f(x)} < r < c$, logo $f(cx) < r \cdot f(x) < c \cdot f(x)$. Como r é racional, podemos afirmar que $r \cdot f(x) = f(rx)$. Mas, como escolhemos $r < c$, temos $rx < cx$ e, pela propriedade 1, isso obriga $f(rx) < f(cx)$, o que é uma contradição. Portanto, não se pode ter $f(cx) < c \cdot f(x)$

A demonstração da impossibilidade de termos $f(cx) > c \cdot f(x)$ é análoga à apresentada. Com isso, conclui-se que $f(cx) = c \cdot f(x)$ para todo x; $c \in \mathbb{R}^+$

Este Teorema motiva a definição de proporcionalidade direta e inversa da seguinte maneira:

Definição 2.1.2.3: Dada uma função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que, para quaisquer números reais positivos c e x tem-se $f(cx) = c \cdot f(x)$, é uma proporcionalidade direta, o que é equivalente a dizer que as grandezas x e $f(x)$ são diretamente proporcionais.

Se $f(cx) = \dfrac{f(x))}{c}$ para quaisquer números reais positivos c e x, diremos que f é uma proporcionalidade inversa, que é equivalente a dizer que as grandezas x e $f(x)$ são inversamente proporcionais.

O teorema acima exprime de forma clara quando temos uma proporcionalidade e essa é a forma ideal para ser tratado o conteúdo. Entretanto, na grade curricular, proporcionalidade consta como conteúdo do 7º ano do Ensino Fundamental e introdução a funções acontece normalmente apenas a partir do 1º ano do Ensino Médio. Portanto, é claro que quando foi construído o currículo atual, a idéia não era apresentar o conteúdo utilizando função, ainda que essa seja a forma mais adequada de se apresentar proporcionalidade.

Notemos que se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma proporcionalidade direta, então dado $x \in \mathbb{R}^+$, temos que $f(x) = f(1.x) = x \cdot f(1)$. Assim, denotando $a = f(1)$, obtemos que $f(x) = ax; \forall x \in \mathbb{R}^+$. Por outro lado, se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma proporcionalidade inversa, então $f(x) = f(1.x) = \dfrac{f(1)}{x}$. Assim, denotando $b = f(1)$, temos que $f(x) = \dfrac{b}{x}; \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Neste contexto, Ávila (1986) sugere que para resolver problemas que envolvem proporcionalidade, seria necessário que os alunos trabalhassem no sentido de identificar no conteúdo curricular como é a relação entre essas grandezas para decidir se elas são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou se não são proporcionais.

Segundo Ávila (1986), uma razão não é o quociente de dois números e uma proporção não é a igualdade de duas razões, daí o surgimento das palavras "antecedente"e "conseqüente". Da mesma forma que para a notação A : B :: C : D e a maneira de dizer "A está para B assim como C está para D", são terminologias que já foram superadas há pelo menos um século.

Castro (2015) em seu estudo sobre a relação da proporcionalidade com outros temas matemáticos, comenta que o conceito de proporcionalidade é muitas vezes ensinado de forma mecânica, privilegiando o algoritmo e não o entendimento do mesmo, o que dificulta sua aplicação não somente em conteúdos matemáticos, mas em outras disciplinas também.

Souza (2014) quando propõe uma abordagem de conceitos de proporcionalidade sob a ótica da resolução de problemas, comenta que a técnica de resolução de problemas é uma alternativa à forma tradicional de ensino dos conteúdos curriculares e que esta metodologia auxilia professores na abordagem dos conceitos de proporcionalidade.

Ferreira (2013), através de uma proposta de ensino-aprendizagem do conceito de proporcionalidade para alunos de 7º ano do ensino fundamental, comenta sua conclusão sob dois aspectos. O primeiro é a constatação do baixo nível de conhecimento do conceito de proporcionalidade por parte dos alunos tanto do ensino fundamental quanto médio. O segundo é a constatação que o uso de uma seqüência didática com objetos de aprendizagem, em situações de sala de aula, pode contribuir para desenvolver e melhorar a qualidade da aprendizagem dos conteúdos relacionados com o conceito de proporcionalidade.

Júnior (2016) comenta no estudo de diferentes abordagens do ensino da proporcionalidade que é importante conhecer diferentes métodos, sendo indiferente qual o melhor, pois os utilizamos em diferentes momentos e diferentes situações, as quais abordam um mesmo conceito, por se adaptarem melhor a situação A ou situação B.

A abordagem de um único método limita o desenvolvimento dos alunos a situações práticas de proporcionalidade, por apresentar dificuldades de adaptação para determinada situação prática, levando a deficiência de aprendizagens significativas sobre o conceito. Muitas vezes se capacita o professor a resolver problemas de proporcionalidade, mas não o prepara para reconhecer e interpretar tais situações.

2.2 O ENSINO DE PROPORCIONALIDADE NAS ESCOLAS PÚBLICAS

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's (1998), propõem para o Ensino Fundamental e Médio, o estudo da proporcionalidade. Esse documento apresenta como objetivos a serem atingidos no ensino da Matemática:

- desenvolver o raciocínio que envolva a proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que leve o aluno a observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade (BRASIL, 1998, p. 65).

- representar em um sistema de coordenadas cartesianas a variação de grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não-proporcional;

- resolver situações-problema que envolvem a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais, como as regras de três (BRASIL, 1998, p.82).

Por reconhecer a aplicabilidade do conceito de proporcionalidade em problemas reais no cotidiano, os PCN's (1998, p.67) reforçam que deva-se dar ênfase ao desenvolvimento do raciocínio proporcional, afirmando que este tipo de raciocínio "é útil na interpretação de fenômenos do mundo real".

Quanto à metodologia para o ensino da proporcionalidade, os PCN's sugerem que esta seja baseada na resolução de problemas que estimulem os alunos a utilizarem procedimentos não-convencionais e a realizarem questionamentos que envolvam o pensamento quantitativo e qualitativo.

Uma das preocupações destacada nos PCN's, diz respeito às relações que devem ser estabelecidas entre os diversos conteúdos matemáticos para que os alunos compreendam que não estão estudando conceitos isolados uns dos outros. Em relação à proporcionalidade, por exemplo, sugerem que se devam mostrar-lhes as conexões existentes entre esse conceito e os diversos problemas, entre eles, os multiplicativos, os que envolvem porcentagem, semelhança de figuras, geometria, entre outros.

Em relação aos conceitos e procedimentos para o ensino de proporcionalidade, os PCN's (1998, p. 87) sugerem a:

- identificação da natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não-proporcionais (afim ou quadrática), expressando a relação existente por meio de uma sentença algébrica e representando-a no plano cartesiano.
- resolução de problemas que envolvem grandezas diretamente ou inversamente proporcionais por meio de estratégias variadas, incluindo a regra de três.

A noção de proporcionalidade aparece associada à comparação entre razões; apresentam exemplos que ilustram a idéia de proporcionalidade em problemas de multiplicação e divisão. As soluções apresentadas mostram a utilização de estratégias diversificadas e sugerem que estas devem ser empregadas antes dos procedimentos convencionais como a regra de três. Apresentam, ainda, orientações para o ensino da proporcionalidade relacionada com a Geometria.

Mesmo com as diretrizes de ensino propostas pelos PCN's, o ensino de proporcionalidade nas escolas públicas normalmente se resume à aplicações de regras de três simples e composta, realizadas com pouco ou nenhum fundamento teórico. Em geral, identifica-se as duas grandezas envolvidas no problema, verifica-se se são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais analisando o que o aumento no valor de uma delas ocasiona ao valor da outra.

Se o aumento de uma indicar o aumento da outra, classifica-se as grandezas como diretamente proporcionais. Efetua-se a multiplicação "cruzada", ou seja, o numerador de uma fração pelo denominador da outra, iguala-se os resultados e obtem-se o valor desconhecido. Caso o aumento de uma delas indique uma diminuição da outra, então as classifica-se como inversamente proporcionais. Nesse caso iguala-se o produto dos numeradores ao produto dos denominadores e assim obtem-se o valor desconhecido.

Ainda que alguns livros tragam toda uma preparação para se chegar à resolução de problemas desse tipo, chamados de regra de três, o excesso de conteúdos a ser trabalhado faz com que muitas vezes os temas sejam tratados superficialmente, sem conexões, eliminando-se etapas essenciais a um claro entendimento da Matemática envolvida no problema.

Ao analisar como o conteúdo é tratado por alguns livros didáticos, constata-se que a abordagem é muito intuitiva e prática. Não encontra-se livros que definam com clareza o que significa matematicamente, duas grandezas serem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais.

Quando o livro traz esse tópico, a teoria nada mais é que a resolução de dois ou três exemplos de problemas de regra de três. Praticamente descarta-se toda a teoria e ensina-se truques e macetes que funcionam em alguns casos, mas não enriquecem e nem preparam o aluno para dar continuidade aos estudos.

Segundo Nunes (2005), infelizmente o ensino de matemática no Brasil enfatiza muito as contas e não os conceitos que estão por traz das contas.

Para Ávila (1986) a regra de três não possui justificativa lógica e apresenta casos onde a regra de três se mostra inadequada. O autor critica a mecanização do uso da regra de três, dizendo que em livros americanos modernos a regra de três não é mais utilizada.

Ávila (1986) também critica professores e livros didáticos que tratam a propriedade fundamental das proporções como exclusiva de razões e proporções, quando ela deveria ser propriedade das igualdades, podendo ser aplicadas nas frações e em equações.

Percebe-se então, que a mecanização do processo resolutivo ajuda em certo aspecto a chegar à solução do problema, porém, ao se aprofundar o assunto, ela produz resultados insatisfatórios em cadeia. Isso explica, de certo modo, porque os alunos vão tão mal em Matemática, já que essa cultura tem raízes profundas na educação brasileira. Há um valor excessivo às regras em detrimento à análise precisa do problema e do seu resultado, pois essa é muito mais demorada e difícil de ser explicada. Requer um melhor planejamento e preparo do professor.

2.3 DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM NO ENSINO DE PROPORCIONALIDADE

Considerando a importância da aplicação do raciocínio de proporcionalidade, pesquisas têm sido realizadas com o objetivo de melhor compreender esse tipo de raciocínio e de contribuir com alternativas que possam minimizar as dificuldades, tanto de quem aprende quanto de quem ensina.

As dificuldades dos alunos na utilização do conceito de proporcionalidade na Matemática e em outras áreas do conhecimento, em alguns casos, parece ter suas origens no ensino deste conteúdo. A falta ou o pouco conhecimento de alguns professores em relação à estrutura do raciocínio proporcional tem limitado o desenvolvimento desse tipo de raciocínio nos discentes.

Na concepção de Spinillo (1997), conhecer a natureza do raciocínio proporcional implica, além do domínio do conteúdo a ser ensinado, ter compreensão das relações envolvidas nesse tipo de pensamento e ressalta que o ensino de proporções tem se limitado à prática do uso de algoritmos e memorização de técnicas.

Martins (2007) afirma que, em muitas das observações que realizou, as práticas docentes "encaixam-se no método da cópia e repetição, sendo uma das mais recorrentes o professor trazer para os alunos listagens de exercícios parecidos e de resolução mecanizada, onde os alunos memorizam técnicas de resolução, que aplicam nos exercícios". Neste estudo, observou-se que o algoritmo da regra de três foi utilizado como a principal estratégia de resolução dos exercícios.

Para Pontes (2009), em relação ao ensino de proporcionalidade no Ensino Fundamental, a autora verificou um ensino conduzido por regras e um discurso narrativo monopolizado pelo professor. Apesar de o professor manifestar algumas atitudes que evidenciavam sua preocupação com a aprendizagem do aluno (ritmo da aula e interligação entre os conteúdos estudados), o mesmo adotava uma metodologia que desprezava os conhecimentos prévios dos alunos adquiridos na vivência fora da escola.

Essa metodologia não permite ao aluno participar do processo de construção do conceito em estudo, nem criar suas próprias estratégias para resolver os problemas propostos, indo de encontro com as propostas de ensino de matemática que permitam ao aluno ser o protagonista no processo de construção de seu conhecimento.

Neste contexto, verifica-se em diversas escolhas metodológicas adotadas por alguns professores, uma negação das orientações de ensino propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) que preconizam, para o Ensino Fundamental, um estudo da proporcionalidade que promova o desenvolvimento do raciocínio proporcional, com estímulos à autonomia de estratégias de resolução de problemas, sem a utilização de procedimentos convencionais como a regra de três.

Outro motivo pelo qual alunos do ensino fundamental e médio apresentam dificuldades em matemática e em outras disciplinas vem do fato que nos livros didáticos, muitas vezes, os assuntos são apresentados como se fossem sempre novidade, sem correlação com os conteúdos já ensinados (CASTRO, 2015).

Se os conteúdos fossem apresentados dentro de um eixo temático onde, a partir de um conceito, conseguissem aplicá-lo em várias áreas do conhecimento, o aluno provavelmente sentir-se-ia mais seguro no estudo, não pensando que a cada capítulo teria que aprender um conteúdo novo.

O conteúdo proporcionalidade é apresentado nos livros didáticos de forma mecânica, abusando-se do uso da regra de três, e muitas vezes sem o entendimento do conceito e a sua relação com situações do cotidiano. O grande problema desta abordagem é que, em muitos casos, os alunos memorizam a regra sem entender o porquê da mesma.

Tal condição leva a dificuldade de compreensão ao trabalhar com a regra de três composta e, mesmo com a regra de três simples, quando essa envolve grandezas inversamente proporcionais. Quando o aluno compreende o conceito de proporcionalidade ele consegue identificar entre duas grandezas a existência da proporcionalidade, se ela é direta ou inversamente proporcional e, aplicar esse conceito na resolução de problemas matemáticos e de outras disciplinas.

A aplicação do raciocínio proporcional torna-se mais difícil quando desacompanhada do efeito material, por exemplo: é mais fácil o aluno entender a relação entre comprimento de um bastão e o tamanho de sua sombra que entender simples relações numéricas com a aplicação do teorema de Tales.

Para Castro (2015) o conceito de proporcionalidade é muitas vezes ensinado de forma mecânica, privilegiando o algoritmo e não o entendimento do mesmo, o que dificulta sua aplicação em outros conteúdos matemáticos e em outras disciplinas.

Outro aspecto está relacionado à forma de como o conceito proporcionalidade é apresentado, muitas vezes, dissocia-se da realidade, isto é, o aluno não compreende o "porque"de se estudar um conteúdo que ele acredita que não ira utilizar na sua vida prática.

Observa-se também que muitos livros didáticos representam essa mesma realidade e estão dissociados do que é recomendado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN'S) e a matriz de referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

2.4 ESTRATÉGIAS EFICIENTES PARA O ENSINO DE PROPORCIONALIDADE

O raciocínio que envolve o conceito de proporcionalidade, como apresentado por diversos autores, é muito mais do que simplesmente a habilidade em resolver um problema que envolva proporções por meio do uso de um algoritmo (regra de três). Este raciocínio se caracteriza pela compreensão das relações existentes entre as grandezas de uma proporção. A compreensão dessas relações pode se manifestar por meio das estratégias de resolução que são utilizadas para resolver os problemas que envolvem proporcionalidade.

Vergnaud (*apud* SCHLIEMANN e CARRAHER, 1997) considera que é possível determinar a solução de um problema de proporcionalidade utilizando-se uma das seguintes estratégias: estratégia escalar, estratégia funcional ou regra de três.

Segundo Vergnaud (1983), a estratégia escalar consiste em encontrar a solução para um problema de proporcionalidade, observando as relações estabelecidas entre os valores de uma mesma grandeza. Neste procedimento as grandezas permanecem independentes uma da outra e operações são realizadas em cada uma, conservando-se a relação proporcional.

Schliemann e Carraher (1997) comentam dentro da estratégia escalar, a que emprega adições sucessivas, é a mais utilizada por alunos que não estudaram os conceitos de proporcionalidade formalmente, ou por alunos que possuem pouca escolaridade.

A estratégia funcional na concepção de Vergnaud (*apud* SCHLIEMANN e CARRAHER, 1997), é o tipo de estratégia que estabelece relações entre duas grandezas, determinando a razão entre elas, ou seja, encontrando a constante que possibilita relacionar os valores de uma grandeza aos valores correspondentes na outra grandeza (constante de proporcionalidade).

A regra de três, por sua vez, é uma estratégia que consiste, segundo Vergnaud (*apud* SCHLIEMANN e CARRAHER, 1997), em comparar duas razões equivalentes. Dessa forma, dadas duas razões equivalentes, a/b e c/x, sendo conhecidos os valores de a, b, c e desconhecido o valor de x, tem-se que $a/b = c/x$, o que implica que $a \cdot x = b \cdot c$, donde resulta que $x = b \cdot c/a$.

Entretanto, a experiência profissional permite fazer restrições quanto à utilização dessa regra, pois a regra de três representa um "processo mecânico" e que não possibilita uma compreensão dos problemas do cotidiano que envolve proporcionalidade. A aplicação do algoritmo da regra de três é importante na resolução de problemas, contudo esta estratégia resolutiva só deva ocorrer após o aluno compreender plenamente o conceito de proporcionalidade.

De acordo com Soares e Nehring (2013), na maioria dos livros didático, o conceito de proporcionalidade não é explorado de forma explicita, ou seja, é valorizada a aplicação da regra de três em detrimento ao uso de estratégias não-convencionais, por exemplo estratégia escalar e/ou funcional.

Ainda segundo as mesmas autoras, o conceito de proporcionalidade está relacionado a muitos outros conceitos matemáticos como porcentagem, número racional, função (principalmente, função linear), entre outros. Portanto, requer a mobilização de outros conceitos, em especial, conceito de função para a sua apropriação.

Considerando que o livro didático é o principal recurso utilizado pela maioria dos professores torna-se imprescindível que os autores proponham atividades com maior ênfase na relação entre os vários conceitos do que apenas na manipulação de fórmulas.

O uso de materiais manipuláveis, favorecem a participação ativa de todos os alunos e, além disso, formam uma base concreta para a formação do conceito de proporcionalidade e facilitam a interação do grupo. Evitar técnicas algorítmicas como, por exemplo, a igualdade entre os produtos dos meios e dos extremos.

Ávila (1986) diz que os problemas de proporcionalidade podem ser resolvidos no contexto algébrico, sem o uso de regra de três, de forma a simplificar e unificar o ensino de matemática na educação básica.

É importante que o ensino de proporcionalidade vise, basicamente, ao entendimento do aluno. O entendimento não pode dar lugar à memorização, geralmente buscada em Matemática através de grande quantidade de treinamento repetitivo. A maior parte da Matemática abstrata pode ser desenvolvida com o uso de materiais concretos, facilitando assim o entendimento e a retenção.

Outro aspecto significativo, é a necessidade do aluno ter modelos para servirem de suporte na formação de conceitos. Dentro dessa concepção, no estudo de proporcionalidade, um exemplo prático é do fenômeno objeto vertical-sombra, como um modelo rico em alternativas a serem exploradas, englobando uma grande série de possibilidades para atividades referentes a proporcionalidade, destinadas a alunos tanto do ensino fundamental quanto do ensino médio.

A importância desse exemplo de modelo é que a altura de um objeto colocado verticalmente e a sua sombra, num determinado momento, se relacionam de forma constante, constituindo-se num ótimo suporte para o desenvolvimento de idéias de proporcionalidade. Esse exemplo pode servir como modelo de invariância de proporções - a função linear.

Para Silva (2008) a escolha pela resolução de problemas como indicador na investigação do ensino-aprendizagem de proporcionalidade dá-se por entender que as características contidas em cada problema devem ser analisadas minuciosamente. Isso nem sempre e levado em consideração por parte dos professores, que muitas vezes se limitam simplesmente a usar o algoritmo para obter a solução imediata.

Na prática docente percebe-se que dentre as diversas formas eficientes que envolvem os alunos na construção de conceitos matemáticos e que produzem aprendizagens significativas está a resolução de problemas.

Silva (2008), comenta em seu estudo sobre pensamento proporcional e regra de três, que a analise dos resultados mostra que houve tentativa dos alunos em buscar estratégias variadas para resolver os problemas. A preferência pelos alunos recaiu sobre a utilização de estratégias próprias, provenientes de conhecimentos acumulados de series anteriores, embora muitas vezes tolhidos pelas limitações na aritmética necessária para a solução dos problemas, ou ainda, por dificuldades conceituais e algorítmicas.

A experiência da prática profissional evidencia que a maioria dos alunos, a partir do 7º ano do Ensino Fundamental, utilizam o algoritmo da regra de três, manipulando os dados do problema e relacionando-o com a aplicação da técnica, sem, no entanto, estabelecer uma relação significativa com o enunciado do problema, a resolução do problema se dá de forma mecanizada.

Da prática profissional também se observa que, muitas vezes, ao utilizarem as fórmulas para a resolução de atividades e problemas, os estudantes não conseguem entender como chegaram àquele resultado. Simplesmente aplicam um procedimento de uma regra estabelecida pelo professor em sala de aula.

Nesse contexto, conclui-se que não adianta ensinar o conteúdo de proporção somente por meio do algoritmo da regra de três. Convém sim ensinar o aluno a pensar sobre formas alternativas de resolver um problema de modo que ele consiga aproveitar conhecimentos que já possui e construir novos conhecimentos.

Faz-se necessário, portanto, abordar situações cuja representação possibilite ao aluno resolver o problema, compreendendo o modelo matemático para obter a solução e ao mesmo tempo percebendo o conceito de proporção que esta implícito. O conceito de proporcionalidade se consolidará quando se unir a representação com a prova. Isto é, se aliar um significado ao uso do algoritmo.

A variedade de estratégias utilizadas na resolução dos problemas mostra que cada aluno possui um determinado nível de competência e habilidade cognitiva geral, necessitando de estimulação diferenciada para seu desenvolvimento, o que nem sempre acontece nas atividades adotadas para ensinar.

É importante para a aprendizagem do conteúdo de proporcionalidade dar mais ênfase ao raciocínio proporcional, incentivando o aluno a desenvolver estratégias próprias orientadas e apoiadas em situações que façam parte de sua realidade. Com isso, ele será capaz de estabelecer um elo entre o que aprende na escola e o que vivencia fora do ambiente escolar pela sua interação com o meio externo.

Pelo exposto, pode-se descrever alguns aspectos que parecem ser fundamentais para a definição de estratégias objetivando o ensino de proporcionalidade, dentre os quais pode-se citar:

- utilizar as noções que o aluno já possui sobre o assunto, por mais elementares que sejam;
- privilegiar o uso de idéias gerais, buscando uma maior utilização de conceitos que apresentem relação próxima aos conceitos de proporcionalidade;
- evitar a ênfase da algoritmização precoce dos conceitos de proporcionalidade, sobretudo ao algoritmo dos produtos cruzados;
- utilizar metodologia que não se prenda a transmitir técnicas, mas que aborde uma seqüência de idéias, possibilitando ao aluno sua aplicação em diferentes contextos;

- dispensar muita atenção à formação do conceito de proporcionalidade. A formação conceitual nunca pode ser substituída por um conjunto de regras ou fórmulas;
- utilizar materiais concretos, como jogos, desafios, mapas, gráficos, tabelas, objetivando tornar mais acessível aos alunos a construção mental do conceito de proporcionalidade, favorecendo a participação e a interação coletiva dos alunos.

Dentre as estratégias utilizadas para resolução de problemas de proporcionalidade, identificadas em diferentes estudos, as mais freqüentes são:

- Estratégia aditiva: os alunos resolvem o problema adicionando várias vezes a relação estabelecida no problema, até que eles encontrem o valor solicitado;
- Busca do valor unitário: os alunos resolvem o problema buscando o valor que indica a unidade. Em seguida, eles usam esse valor para responder à questão do problema;
- Estratégia escalar: os alunos resolvem o problema através do estabelecimento do fator de proporcionalidade entre as grandezas homogêneas do problema;
- Estratégia funcional: os alunos resolvem o problema através do estabelecimento do fator de proporcionalidade entre as grandezas não homogêneas do problema;
- Estratégia linear: os alunos resolvem o problema utilizando uma combinação entre uma estratégia aditiva e uma estratégia multiplicativa;
- Busca de uma grandeza intermediária: os alunos resolvem o problema passando por uma grandeza intermediária para em seguida utilizar o valor encontrado para responder o problema.

2.5 A ENGENHARIA DIDÁTICA APLICADA AO ENSINO DE PROPORCIONALIDADE

A engenharia didática é uma metodologia de pesquisa e teoria educacional elaborada no início da década de 1980 para o desenvolvimento de trabalhos de Educação Matemática. Concebe o trabalho do pesquisador similar ao de um engenheiro subdividindo os componentes em sala de aula, com o uso das seqüências didáticas.

O termo pode, também, ser usado para designar a aplicação planejada de uma seqüência didática em um grupo de alunos. Entre os estudiosos do tema, se destaca a pesquisadora francesa Michèle Artigue.

Para Artigue (1996), a Engenharia Didática é um processo empírico que objetiva conceber, realizar, observar e analisar as situações didáticas. A autora pondera que a Engenharia Didática possui dupla função, a qual pode ser compreendida como uma produção para o ensino tanto como uma metodologia de pesquisa qualitativa.

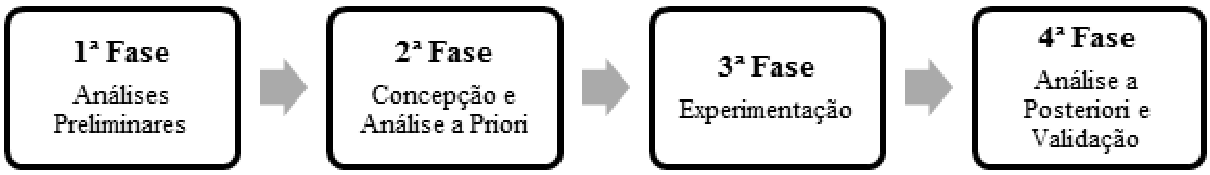
Nessa perspectiva, pode ser utilizada como metodologia qualitativa de pesquisa na área de Matemática, mas também é extremante útil para a elaboração de situações didáticas que configurem um quadro de aprendizagem significativa em sala de aula.

Segundo Machado (2002), a Engenharia Didática se caracteriza por propor uma seqüência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma constante, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor.

A Metodologia representa um caminho adequado para se alcançar determinada meta ou objetivo. A função da metodologia é mostrar como trilhar no 'caminho das pedras' para a prática de sala de aula, com a pretensão de ajudar o professor a refletir e instigar um novo olhar sobre o mundo, um olhar que seja organizador, dedutivo, curioso, indagador e criativo.

A metodologia da Engenharia Didática, compreende quatro fases: a 1ª fase, das ***análises preliminares***, a 2ª fase, da ***concepção*** e da ***análise a priori***, a 3ª fase, da ***experimentação*** e a 4ª e última fase, da ***análise a posteriori e validação***, conforme mostra a figura 2.

Figura 2 – As quatro fases ou etapas da Engenharia Didática



Fonte: Adaptado de Artigue (1988)

É importante salientar que as quatro fases não ocorrem, geralmente, de forma linear e estanque. A elaboração da Engenharia Didática necessita, em alguns momentos, da articulação, da antecipação e até da superposição dos elementos caracterizadores destas quatro fases.

A primeira fase é a das **análises preliminares**. Nesta fase o professor se baseia em um referencial teórico já adquirido e analisa como se encaminha aquele conhecimento no aluno, como se dá o ensino atual em relação àquele domínio, as concepções dos alunos, as dificuldades e obstáculos que marcam a evolução.(ARTIGUE, 1988)

A segunda fase é a da **concepção** e **análise a priori** das situações didáticas nas quais o pesquisador definirá as variáveis que estarão sob controle, "comporta uma parte descritiva e outra preditiva" (ARTIGUE, 1988), onde o comportamento esperado do aluno é o foco principal da análise.

A terceira fase é a da **experimentação** que é ida a campo para aplicação da seqüência didática com uma certa população de alunos e os registros de observações realizadas durante a mesma (ARTIGUE, 1988)

A quarta e última fase é a **análise a posteriori** e **validação** que "se apóia no conjunto de dados recolhidos quando da experimentação, mas também nas produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. Esses dados são geralmente completados por dados obtidos pela utilização de metodologias externas: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizados em diversos momentos do ensino ou a partir dele".(ARTIGUE, 1988)

As principais diferenças entre as pesquisas realizadas dentro de uma Metodologia da Engenharia Didática e outras, na área da didática da matemática que não são desenvolvidas por meio desta metodologia, são observadas na profundidade das análises preliminares, e também no fato da validação das hipóteses realizadas sobre o problema da pesquisa serem validadas no confronto entre análise a priori e a posteriori. Neste cenário, a ida do pesquisador a campo, busca um confronto das análises iniciais com os dados sobre os procedimentos e desempenhos dos alunos, analisados posteriormente, validando assim as hipóteses da pesquisa.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

No cotidiano de um professor, um dos pressupostos fundamentais para o desenvolvimento de práticas educacionais adequadas dentro de sala de aula, consiste na elaboração e aplicação de roteiros de ensino, de modo que o próprio aluno se sinta inserido numa dinâmica iterativa e autônoma de forma a conquistar e promover a sua própria aprendizagem.

Para Pommer (2013), a utilização de situações de aprendizagem onde os alunos são colocados em ação diante de jogos e situações-problema, de modo a mobilizar estratégias de base e conhecimentos anteriores para que sejam capazes de realizar as operações de seleção, organização e interpretação de informações, representando-as de diferentes formas e tomando decisões, de modo que o processo de construção do conhecimento matemático efetivamente ocorra e, como conseqüência, haja a formação de sentido para o aluno.

Para a utilização de situações-problema, o tema proporcionalidade propicia a articulação de diversas linguagens matemáticas, perpassando os enfoques aritmético, gráfico, algébrico e funcional. A exploração desses vários quadros pode fomentar o desenvolvimento de competências essenciais para os alunos do ensino básico e médio, desde que inserida numa metodologia de situações-problema.

Para a realização deste estudo, propôs-se uma pesquisa de abordagens quantitativa e qualitativa. Em relação a abordagem qualitativa, Moresi (2003) comenta que a interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. É descritiva. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem.

Neste contexto, pretende-se analisar a relação entre os alunos e seus processos de aprendizagem, intermediada pelo professor com o uso de seqüências didáticas de ensino. A investigação foi baseada na Engenharia Didática, tratando-se, neste sentido, de um estudo qualitativo. Entretanto, também ocorreu o uso da abordagem quantitativa para comparar os resultados decorrentes dos testes inicial e final realizados com os alunos. Logo, as duas abordagens estão presentes nesta pesquisa.

Ainda com relação à abordagem quantitativa, seu uso, neste estudo, também foi utilizado para fins de apresentação gráfica e comparação de resultados dos testes a priori e posteriori da Engenharia Didática. Tal uso é justificado por Moreira (2003), quando afirma que a pesquisa quantitativa "procura estudar os fenômenos de interesse da pesquisa em educação, geralmente através de estudos experimentais ou correlacionais caracterizados primordialmente por medições objetivas "e, por consequência, as análises quantitativas.

Os sujeitos de pesquisa deste estudo foram os alunos do 2º ano de uma Escola da rede estadual de ensino, localizada na cidade de Macapá/AP. A Escola é uma instituição de médio porte, com aproximadamente mil e duzentos alunos matriculados, funciona nos três turnos, com quinze salas de aula e atende somente a modalidade de Ensino Médio Regular. Faz parte da sua administração institucional um diretor, um diretor adjunto, um secretário escolar. Trabalham, ainda, em cada turno, três coordenadores pedagógicos e vinte e quatro professores das disciplinas do Ensino Médio. Sua estrutura física é composta por uma biblioteca, um laboratório de informática, uma quadra coberta, um auditório com capacidade para cinqüenta pessoas, um sala TV escola e uma sala para educação especial. O período de aplicação das práticas pedagógicas de ensino se estendeu por 3 (três) meses consecutivos.

A turma escolhida para a realização da intervenção pedagógica possui 30 (trinta) alunos matriculados, sendo quatorze meninos e dezesseis meninas, com idade variando de quinze a vinte anos. Na turma havia realidades variadas, pois os alunos, em sua maioria, residem no Bairro Pedrinhas, nas proximidades da Escola. Em relação ao conteúdo de Matemática, muitos alunos possuíam dificuldades na compreensão de conceitos, significados e sistematização de cálculos envolvendo a idéia de proporcionalidade. Além disso, não conseguiam perceber a aplicação do conceito proporcional em problemas do seu cotidiano.

A duração do período escolar diário era de cinco horas e vinte minutos, distribuídas em seis aulas de cinqüenta minutos, mais vinte minutos de intervalo. A carga horária de Matemática para o Ensino Médio correspondia a três aulas semanais. Nessa Escola, foram desenvolvidos muitos projetos, dos quais destacam-se: Projeto Pré-Enem, Projeto de Artes, Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP, Projeto sobre Cultura Africana, sendo uma referência na rede de ensino estadual.

Cabe mencionar que, foi solicitada a direção da escola, a permissão para a realização desta pesquisa por meio do Termo de Concordância da Direção da Instituição de Ensino (APÊNDICE A) e, aos alunos, a assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (APÊNDICE B) para que eles tivessem ciência da participação na presente investigação.

Para alcançar os objetivos propostos e efetivar esta intervenção pedagógica, foi elaborada uma seqüência didática de ensino, conforme consta na Tabela 1. Para a seqüência didática, foi utilizada a metodologia da Engenharia Didática, com aplicação de teste inicial, atividades da intervenção pedagógica e teste final para análise da aprendizagem. E, como instrumentos de pesquisa, a aplicação de testes inicial e final; exploração de uma seqüência didática.

Tabela 1 – Atividades planejadas para intervenção pedagógica

Encontro	Nº de Horas-Aulas	Atividade Proposta
1	2	• Apresentação do Projeto: Comentários sobre a escolha do tema, sua importância e dos instrumentos de coleta de dados; • Aplicação do teste inicial para os alunos.
2	1	• Revisão do conteúdo de proporcionalidade e exposição das soluções no quadro.
3	2	• Quebra-cabeça da proporcionalidade
4	1	• Discussões e socialização das estratégias de solução
5	2	• Aplicação do conceito de proporcionalidade entre altura versus sombra projetada de um objeto
6	1	• Discussões e socialização das estratégias de solução
7	2	• A aplicação do conceito de proporcionalidade na função afim
8	1	• Discussões e socialização das estratégias de solução
9	2	• A aplicação do conceito de proporcionalidade na trigonometria
10	1	• Discussões e socialização das estratégias de solução
11	2	• Aplicação do conceito de proporcionalidade inversa
12	1	• Discussões e socialização das estratégias de solução
13	2	• Aplicação do teste final

Fonte: da autora (2017)

Os testes inicial e final foram constituídos de questões que versaram sobre problemas envolvendo proporcionalidade. Ambos os instrumentos apresentaram algumas questões semelhantes, envolvendo situações-problema do cotidiano e questões formais relacionadas ao tema proporcionalidade. As semelhanças verificadas nas questões se justificaram, pois, ao utilizar a Engenharia Didática, um dos pressupostos era identificar indícios de melhoria na aprendizagem dos alunos.

A seqüência didática de ensino, elaborada de acordo com a teoria da Engenharia Didática, contemplou os seguintes conteúdos: conceitos de grandeza, razão, razão de mesma natureza, e de naturezas diferentes, proporção, constante de proporcionalidade, propriedades, proporcionalidade entre grandezas, grandezas diretamente proporcionais, grandezas inversamente proporcionais, regra de três simples e composta, aplicações de proporcionalidade nas seqüências matemáticas, na geometria plana, na trigonometria, na função afim. A estratégia de ensino para tais conteúdos envolveu atividades dentro e fora de sala de aula e que após essa etapa a seqüência didática foi elaborada definitivamente.

Em relação à seqüência didática, é importante destacar que, em cada encontro, foi apresentado o objetivo; o que se esperava alcançar e estratégias de resolução para cada atividade proposta, considerados passos importantes na metodologia escolhida para esta investigação. Além disso, quando possível, era descrita uma situação-problema com o intuito de que o aluno percebesse a aplicação do conceito de proporcionalidade.

A pesquisa ocorreu durante as aulas de Matemática e teve a duração de quinze horas aulas. O desenvolvimento das atividades em sala de aula aconteceu da seguintes forma: os testes inicial (diagnóstico) e final, os alunos os resolveram individualmente; na seqüência didática, foram formados seis grupos de cinco alunos, cujos participantes mantiveram-se no decorrer de todo o estudo. No levantamento dos dados, cada aluno foi identificado por um número de 1 a 30 para a preservação da identidade.

No capítulo seguinte é realizada a apresentação, a descrição do desenvolvimento das atividades propostas e a análise e discussão dos resultados obtidos da pesquisa.

4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo, são descritas as atividades realizadas em sala de aula, seguindo as fases conforme a metodologia da Engenharia Didática. Também são apresentados os dados obtidos da seqüência didática proposta, bem como a discussão e a análise dos resultados decorrentes em cada fase.

4.1 Primeira Fase: análise preliminar

Na análise preliminar, Machado (1999) sugere que o professor pesquisador faça ponderações entre o tema da pesquisa e o quadro teórico geral, buscando conhecer os objetos de estudo.

Segundo Machado (1999), considerações sobre: o quadro teórico didático geral, os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão, passando por análises epistemológica de conteúdos, do ensino atual, da concepção dos alunos, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução e dos possíveis entraves, que vão se situar a efetiva realização didática.

Para verificar os conhecimentos dos alunos em relação a ao conceito de proporcionalidade, foi utilizado como instrumento de coleta de dados um teste inicial, realizado em sala de aula.

Conforme Artigue (1988), é na primeira fase que as "análises prévias ou preliminares" são realizadas; e, na qual é analisado o conteúdo a ser trabalhado, bem como as formas de desenvolvê-lo. Ademais, investigam-se dificuldades e obstáculos observados durante os processos de ensino e de aprendizagem.

Sendo assim, o encontro inicial teve a duração de duas horas aulas e foi dividido em dois momentos. No primeiro, a professora apresentou a pesquisa aos alunos, comentou a importância do trabalho que seria desenvolvido e a contribuição para os processos de ensino e de aprendizagem de matemática.

Explicou que tinha como finalidade verificar a aplicação de uma seqüência didática relacionada ao tema de proporcionalidade e que o estudo envolveria os seguintes conceitos: grandezas, razão, razão de mesma natureza, e de naturezas diferentes, proporção, constante de proporcionalidade, propriedades, proporcionalidade entre grandezas, diretamente proporcionais, inversamente proporcionais, aplicações de regra de três simples e composta, proporcionalidade nas seqüência matemáticas, na geometria plana, na trigonometria e na função afim, por tratarem-se de assuntos abordados no 2º ano do Ensino Médio.

Também foi explicado, que por se tratar de uma pesquisa, precisaria mostrar um resultado final. E, para alcançar os objetivos, utilizaria alguns instrumentos para a coleta dos dados, tais como, aplicação de um teste inicial (diagnóstico) com a finalidade de verificar o nível de conhecimento matemático dos alunos em relação ao conceito de proporcionalidade; aplicação de uma seqüência didática de ensino para constatar os possíveis problemas de compreensão apresentados referentes ao conceito de proporcionalidade; aplicação de um teste final para averiguar a aprendizagem.

Quanto à seqüência didática que seria desenvolvida, explicou que constaria de atividades envolvendo conceitos de proporcionalidade, desenvolvidos por meio de encontros nas aulas de matemática, cujos resultados serviriam para descrição e análise dos dados.

No segundo momento da primeira aula, houve a aplicação do teste inicial para investigar quais os conhecimentos de matemática que os alunos possuíam referentes o conceito de proporcionalidade, bem como verificar o nível de interesse pelos conteúdos matemáticos ministrados no 2 º ano. O teste constou de cinco questões; as duas primeiras, com perguntas abertas, e as demais, de forma dissertativa, necessitando da resolução de cálculos matemáticos. O teste inicial foi aplicado de forma individual com duração de uma hora aula de cinqüenta minutos e utilizou conteúdos diversos envolvendo o conceito de proporcionalidade.

Inicialmente, quando foi mencionado que seria aplicado um teste de matemática, muitos alunos reclamaram porque não sabiam que haveria prova. Então, foi explicado que se tratava de um teste de sondagem e não de uma avaliação formal.

Ao lerem as primeiras questões, acharam estranho, comentando: "Não tem cálculo professora? É para responder com minhas próprias palavras?" Foi respondido que sim e enfim, a turma acalmou-se e começaram a responder às questões do teste inicial.

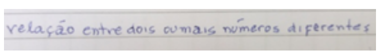
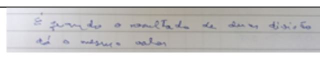
A seguir, apresentam-se as atividades do teste inicial, as respostas dos alunos e a análise dos dados obtidos.

Quadro 4.1: Teste Inicial 1

O que você entende por proporcionalidade?
____
____

Fonte: O autor

Quadro 4.2: Comentários dos alunos entrevistados

Aluno/Professor	**Comentários do teste inicial 1**
Aluno 5	
Aluno 4	

Fonte: O autor (2017)

Analisando os comentários do teste inicial 1, percebe-se que a maioria dos alunos possui um conhecimento muito vago sobre o conceito de proporcionalidade, conforme pode ser observado nas respostas dos alunos 4 e 5. Ressalta-se que apenas 20% da turma, ou seja, seis alunos, responderam de forma coerente o conceito de proporcionalidade, entretanto usando linguagem própria, baseada na sua realidade escolar.

Quadro 4.3: Quadro 3

O que são grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais?
____
____

Fonte: O autor (2017)

A aplicação do teste inicial 2 objetivou verificar o nível de entendimento prévio dos alunos em relação aos conceitos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Os quadros 4 e 5 mostram os comentários de alguns alunos entrevistados durante a pesquisa.

Quadro 4.4: Comentários dos alunos entrevistados

Aluno/Professor	Comentários sobre grandezas diretamente proporcionais
Aluno 11	Proporções que crescem ou decrescem na mesma medida.
Aluno 17	NÃO LEMBRO DESSE ASSUNTO.
Aluno 13	quando uma aumenta a outra também aumenta

Fonte: O autor (2017)

Analisando os comentários dos alunos 11 e 13, em relação a definição de grandezas diretamente proporcionais, observou-se que os alunos compreendem parcialmente este conceito, visto que conseguem perceber uma relação entre duas grandezas, entretanto não mencionam que deva existir uma razão (constante de proporcionalidade) entre ambas.

Quadro 4.5: Comentários dos alunos entrevistados

Aluno/Professor	Comentários sobre grandezas inversamente proporcionais
Aluno 2	São grandezas que vão diferentes
Aluno 30	Eu acho que quando uma aumenta a outra diminui.
Aluno 20	São números com valores invertidos

Fonte: O autor (2017)

Analisando os comentários dos alunos no quadro 5, em relação a definição de grandezas inversamente proporcionais, constatou-se que os alunos possuem parcialmente o entendimento deste conceito, uma vez que conseguem mencionar nas respostas aumento e diminuição de grandezas.

Vale destacar que 50% da turma, ou seja, 15 alunos, responderam de forma incorreta os conceitos de grandezas direta e inversas. Já 20% da turma, não conseguiram sequer responder e, apenas 30% da turma foi capaz de responder de maneira coerente o teste 2, porém de forma incompleta.

Analisando as respostas nos teste 1 e 2 (questões abertas), percebeu-se que os alunos apresentaram dificuldades em respondê-los, demonstrando uma lacuna na aprendizagem dos conceitos em matemática, sobretudo em proporcionalidade.

Segundo a Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Gerard Vergnaud (1983), estudar um campo conceitual ao invés de um conceito, em uma situação problema dada, o conceito não aparece isolado e muitos conceitos matemáticos traçam seus sentidos utilizando uma variedade de situações e cada situação tem vários conceitos a serem analisados.

Quadro 4.6: Teste

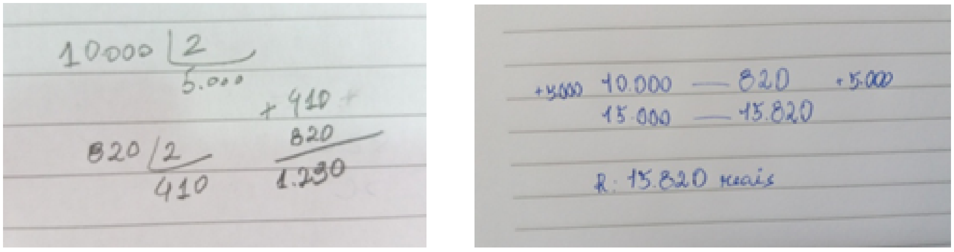
(PAPMEM/IMPA, 2013) - A quantia de R$ 10.000,00 aplicada na poupança por um certo período rendeu R$ 820,00. Qual será o rendimento se a quantia aplicada fosse R$ 15.000,00?
Quantia aplicada (R$) e rendimento são grandezas de qual tipo? ( ) Diretamente proporcionais; ( ) Inversamente proporcionais; ( ) Não proporcionais. Justifique sua resposta.

Fonte: O autor (2017)

O quadro 6 mostra o teste inicial 3, o qual teve o objetivo de verificar se os alunos conseguiam identificar se duas grandezas são diretamente proporcionais ou não. Foi apresentada uma situação-problema retirada de uma vídeo aula (PAPMEM/IMPA-Julho/2013), do Professor Paulo Cezar. O problema retrata uma situação cotidiana que envolve quantia aplicada e rendimento (matemática financeira).

A Figura 3 mostra a resolução correta do aluno 23 e a resolução incorreta do aluno 7, para o teste 3, envolvendo o conceito de grandezas diretamente proporcionais.

Figura 3 – Resoluções correta do aluno 23 e incorreta do aluno 7, para o teste 3



(a) Resolução correta do aluno 23 (b) Resolução incorreta do aluno 7

Fonte: O aoutor (2017)

Analisando as resoluções apresentadas na Figura 3, observou-se que o aluno 23 percebeu que havia uma correspondência direta entre a quantia aplicada de R$ 10.000,00 e o rendimento de R$ 820,00, a partir da informação do possível valor de R$ 15.000,00 a ser futuramente aplicado.

O aluno percebeu que a quantia de R$ 15.000,00, correspondia a soma das quantias R$ 10.000,00 + R$ 5.000,00 e que R$ 5.000,00 representam a metade da quantia de R$ 10.000,00. Então, utilizou o mesmo raciocínio a partir do valor do rendimento de R$ 820,00, dividindo-o por dois, encontrando o valor de R$ 410,00. Finalizando com a soma do rendimento inicial de R$ 820,00 com o acréscimo de R$ 410,00, resultando no valor encontrado de R$ 1.230,00.

Com relação a resolução incorreta apresentada na figura 3, observou-se que o aluno 7 usou a estratégia aditiva de forma equivocada, uma vez que utilizou o mesmo raciocínio do acréscimo de R$ 5.000,00, referente a quantia inicialmente aplicada de R$ 10.000,00, para o acréscimo do rendimento de R$ 820,00, confundindo os valores de aplicação com os valores de rendimento.

Vale destacar que 60% da turma, ou seja, 18 alunos, desenvolveram de forma incorreta o cálculo envolvendo a proporcionalidade direta proposta no teste 3, onde a maioria destes alunos utilizou a estratégia aditiva de forma equivocada.

Quadro 4.7: Teste Inicial 4

(Adaptado de Marques e Silveira, 2013) - Um ciclista faz um treino para a prova de "1000 metros contra o relógio". Mantendo em cada volta uma velocidade constante, ele obtém um tempo correspondente, conforme a tabela 2 a seguir: Velocidade e tempo são grandezas de qual tipo? ( ) Diretamente proporcionais; ( ) Inversamente proporcionais; ( ) Não proporcionais. Justifique sua resposta.

Fonte: O autor (2017)

Tabela 2 – Valores de velocidade e tempo do teste inicial 4

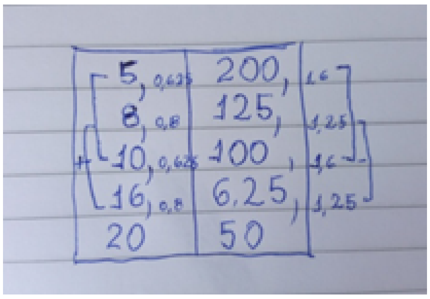
Grandezas	
Velocidade (m/s)	**Tempo (s)**
5	200
8	125
10	100
16	62,5
20	50

Fonte: Adaptado de Marques e Silveira, 7ª ed. 2013, p. 206

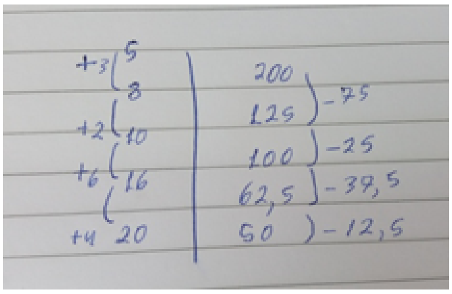
O quadro 7 apresenta o teste inicial 4, o qual teve o propósito de verificar se os alunos conseguiam identificar se duas grandezas são inversamente proporcionais ou não. Foi apresentada uma situação-problema adaptada do livro didático Matemática: Compreensão e Prática, de Marques e Silveira, 2013 . O problema retrata uma situação cotidiana que envolve a relação das grandezas velocidade e tempo.

A Figura 4 mostra a resolução correta do aluno 12 e resolução incorreta do aluno 16, para o teste 4, envolvendo o conceito de grandezas inversamente proporcionais.

Figura 4 – Resoluções correta do aluno 12 e incorreta do aluno 16, para o teste 4



(a) Resolução parcialmente correta do aluno 12



(b) Resolução incorreta do aluno 16

Fonte: O autor (2017)

Analisando as resoluções apresentadas na figura 4, constatou-se que o aluno 12 utilizou uma estratégia parcialmente correta, entretanto não conseguiu demonstrá-la de forma muito clara, onde dividiu entre si os valores das velocidades, 5/8; 8/10; 10/16 e 16/20, encontrando as respectivas razões, da mesma forma que dividiu entre si os valores dos tempos, 200/125; 125/100; 100/62,5 e 62,5/50, encontrando as respectivas razões.

Em seguida, tentou demonstrar a igualdade existente entre as razões 5/8 e 10/16 ; 8/10 e 16/20, bem como 200/125 e 100/62,5; 125/100 e 62,5/50, contudo não conseguiu perceber que 0,625 representava a razão inversa de 1,6, assim como 0,8 representava a razão inversa de 1,25 e vice-versa, respondendo parcialmente o teste 4, contudo sem conseguir expressar adequadamente qual tipo de relação existia entre as grandezas velocidade e tempo.

Em relação a resolução apresentada pelo aluno 16, observou-se a aplicação de estratégia equivocada, onde o aluno optou por demonstrar as diferenças existentes entre os valores das velocidades e dos tempos, não encontrando nenhuma relação de proporcionalidade entre as grandezas, não conseguindo responder adequadamente o teste 4.

Cabe mencionar que apenas 20% da turma desenvolveu parcialmente o teste inicial 4, entretanto, não conseguiram perceber numericamente a relação inversa existente entre as grandezas velocidade e tempo, não demonstrando corretamente as resoluções.

Quadro 4.8: Teste Inicial 5

(Bianchini, 2015) Observe a tabela 3 abaixo, a relação entre a idade e a altura média dos alunos de 1 a 6 anos na Escola Pequeninos. A idade e a altura média são grandezas de qual tipo? ( ) Diretamente proporcionais; ( ) Inversamente proporcionais; ( ) Não proporcionais. Justifique sua resposta.

Fonte: O autor (2017)

Tabela 3 – Relação entre idade x altura média dos alunos na Escola Pequeninos

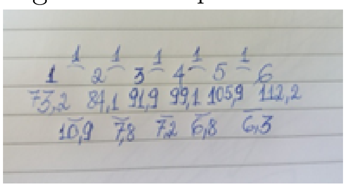
Idade (em anos)	1	2	3	4	5	6
Altura média dos alunos (em cm)	73,2	84,1	91,1	91,1	105,9	112,2

Fonte: Adaptado de Bianchini, 8ª ed. (2015). p, 196

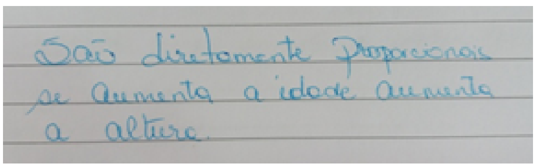
O quadro 8 apresenta o teste inicial 5, o qual teve o objetivo de verificar se os alunos conseguiam identificar a não proporcionalidade entre grandezas. Sendo assim, foi apresentada uma situação-problema adaptada do livro didático: Matemática, de Bianchini, 2015. O problema retrata uma situação cotidiana que envolve a relação das grandezas idade e altura média dos alunos de uma escola.

A Figura 5 mostra a resolução parcialmente correta do aluno 29 e a resolução incorreta do aluno 14, para o teste 5, envolvendo o conceito de grandezas não proporcionais.

Figura 5 – Respostas correta do aluno 29 e incorreta do aluno 14, para o teste 5



(a) Resposta parcialmente correta do aluno 29



(b) Resposta incorreta do aluno 14

Fonte: O autor (2017)

Pela análise das respostas da figura 5, observou-se que o aluno 29 tentou encontrar uma relação de proporcionalidade entre as grandezas idade e altura. O aluno efetuou diferenças sucessivas entre os valores das grandezas de mesma espécie (idade e altura), porém, teve dificuldade em concluir sua análise, visto que não respondeu sobre a não proporcionalidade das grandezas.

Quanto a resposta do aluno 14, demonstra-se que este percebeu que aumentando-se a grandeza idade, a grandeza altura também aumentava e baseado nisso concluiu que havia uma proporcionalidade direta entre ambas. Entretanto, não avaliou que ao se duplicar a idade, a altura não dobrava, nem reduzia à metade, e que portanto, não havia proporcionalidade entre essas grandezas.

Salienta-se que apenas seis alunos, ou seja, 20% da turma, responderam que não havia proporcionalidade entre as grandezas idade e altura, enquanto que 40% da turma, não conseguiram responder ao teste, bem como os 40% restantes, responderam de forma incorreta.

4.2 Segunda Fase: concepção e análise a priori

Na fase de concepção e análise a priori, Pommer (2013) comenta que a seqüência metodológica é mais dinâmica, pois são definidas as variáveis didáticas do estudo em questão,ou seja, estratégias de ensino e resolução de atividades que têm o intuito de possibilitar a evolução do desempenho dos alunos envolvidos na pesquisa.

Envolve o planejamento, em que o professor elabora suas estratégias didáticas considerando as variáveis globais e locais. Ressalta-se que, nela, o planejamento de pesquisa é focado no aluno.

A partir dos dados coletados e diante das dificuldades observadas e registradas pela professora no decorrer da aplicação do teste inicial, houve a necessidade da realização de revisão de alguns conceitos-chaves para o melhor entendimento do conceito de proporcionalidade.

Em decorrência disso, conceitos, como grandeza, razão, proporção, constante de proporcionalidade, simplificação de frações, multiplicação e divisão com números decimais, divisão proporcional (direta e inversa) e equações do 1º grau, conceitos estes abordados no ensino fundamental, ainda não dominados por parte da turma, foram revisados com o propósito de complementar o déficit de aprendizagem existente.

Os conceitos foram revisados, de forma interativa entre alunos e professora, por meio das atividades do teste inicial, de forma oral, com exposição e discussão das soluções no quadro.

Segundo Artigue (1996), a análise a priori, tem como objetivo determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. A análise a priori fundamenta-se em hipóteses, onde a validação destas hipóteses estará, em princípio, indiretamente confrontando-se, na quarta fase, entre a análise a priori e a análise a posteriori.

Logo após a aplicação da segunda fase, elaborou-se uma seqüência de atividades, que foi aplicada aos alunos, cujos resultados estão descritos na fase seguinte, que é da experimentação.

4.3 Terceira Fase: experimentação

A terceira fase consiste na aplicação da seqüência didática junto aos alunos com objetivo de verificar as ponderações levantadas na análise a priori. A fase da experimentação é a da prática, em que o professor pesquisador coloca em ação tudo o que foi planejado nas anteriores, e seu foco é a seqüência didática. Para essa fase, foram colocadas em prática as atividades propostas na concepção da análise a priori. (MACHADO, 2002).

A fase da experimentação foi desenvolvida através das aulas práticas no próprio horário de aula da turma, ou seja, em três manhãs. Ressalta-se que, para a realização de três atividades, a turma foi dividida em seis equipes de cinco alunos e nomeados da seguinte forma: E1, E2, E3, E4, E5 e E6. As outras duas atividades foram aplicadas de forma individual, denominadas I1 e I2, para identificação, objetivando a não identificação dos alunos.

Para Machado (2002), a fase de experimentação pressupõe os seguintes aspectos:

- a exposição dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;
- o estabelecimento do contrato didático;
- a aplicação do instrumento de pesquisa;
- o registro das observações feitas durante a experimentação.

Diante do exposto, segue a seqüência de atividades que envolveram o conceito de proporcionalidade, bem como as resoluções propostas pelos alunos e respectivos comentários. Após cada atividade, encontra-se o objetivo, o alcance esperado, algumas estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das situações-problema e a análise realizada dos dados obtidos.

4.3.1 Atividade Prática 1: Quebra-cabeça da proporcionalidade

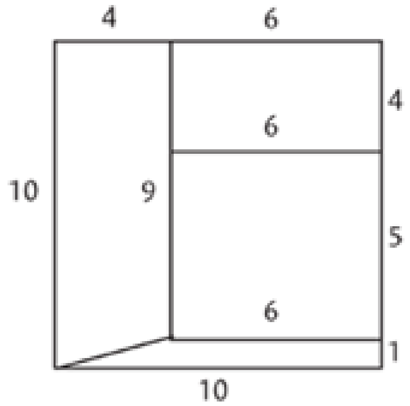
A aplicação dos jogos em sala de aula surge como uma oportunidade de socializar os alunos, busca a cooperação mútua, participação da equipe na busca incessante de elucidar o problema proposto pelo professor. Mas para que isso aconteça, o professor precisa de um planejamento organizado e um jogo que incite o aluno a buscar o resultado, ele precisa ser interessante, desafiador.

O uso de jogos e curiosidades no ensino da Matemática tem o objetivo de fazer com que os alunos gostem de aprender essa disciplina, mudando a rotina da classe e despertando o interesse do aluno envolvido. Há três aspectos que por si só justificam a incorporação do jogo na sala de aula: o caráter lúdico, o desenvolvimento de técnicas intelectuais e a formação de relações sociais.

Neste sentido, pensou-se na elaboração de atividades que levassem em consideração situações envolvendo o cotidiano dos alunos. Como exemplo, é apresentado o seguinte problema.

Atividade proposta: Fabrique outra figura nos mesmos moldes da Figura 7, porém maior: o lado que mede 4 deve medir 7.

Figura 6 – Atividade do quebra-cabeça da proporcionalidade



Fonte: O autor (2017)

Objetivo: Encontrar a constante de proporcionalidade em um problema.

Alcance esperado: que os alunos discutissem a situação-problema em equipe e resolvessem o problema, aplicando os conteúdos já estudados utilizando uma estratégia própria.

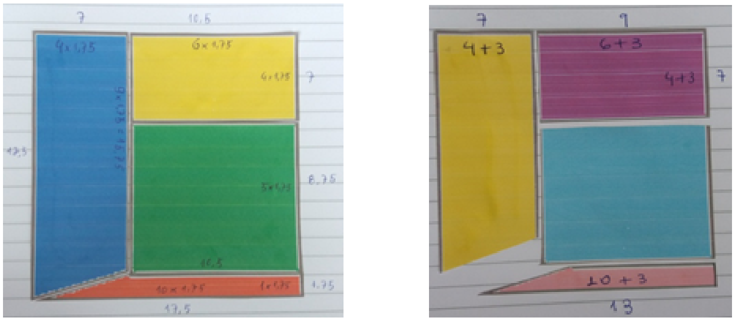
Material utilizado: papel, régua, tesoura, quebra-cabeça (conforme a Figura 6 acima)

Três equipes (E1, E3 e E5) optaram por adicionar 3 a cada um dos lados da figura, baseados na informação de que entre 4 e 7 foi necessário somar 3. Entretanto, quando tentaram encaixar as peças novamente, não conseguiram. Então foi orientado que refizessem a atividade, questionando os colegas sobre quais novas estratégias usar. A professora acompanhou as discussões nos grupos.

Outra estratégia usada pelas equipes (E2 e E6), consistiu em duplicar a medida 4 e subtrair 1, encontrando o resultado 7, bem como duplicar 6 e subtrair 1, encontrando o resultado 11. Porém, utilizando esta estratégia, as peças do quebra-cabeça não se encaixaram novamente.

Nesse momento, a professora auxiliou as equipes, comentando que era necessário utilizar o conceito de razão de uma proporcionalidade direta. A partir da orientação da professora, a equipe (E4) percebeu que ao dividir 7 por 4 estaria encontrando a constante de proporcionalidade igual a 1,75. De posse desse fator, bastaria multiplicá-lo pelas demais medidas do quebra-cabeça. Por exemplo: 9 x 1,75 = 15,75 ou 5 x 1,75 = 8,75 e assim sucessivamente, até que fossem obtidas todas as novas medidas do quebra-cabeça, formando um novo quadrado.

Figura 7 – Soluções para a atividade 1



(a) Solução correta da equipe E4

(b) Solução incorreta da equipe E3

Fonte: O autor (2017)

4.3.2 Atividade Prática 2: Aplicação do conceito de proporcionalidade na semelhança entre triângulos

Atividade proposta: Medir as alturas dos alunos e as respectivas sombras projetadas e identificar alguma regularidade entre tais medidas.

Objetivo: Verificar que a razão entre os comprimentos reais entre alturas e suas respectivas sombras, medidas num dado momento, representam o mesmo número.

Alcance esperado: que os alunos discutissem a situação-problema em equipe e resolvessem o problema, aplicando os conteúdos já estudados, utilizando uma estratégia própria.

Material utilizado: cada dupla de alunos deverá utilizar fita métrica ou trena graduada, uma calculadora (opcional) e folha de papel.

A turma foi dividida em quinze duplas ainda na sala de aula. Cada aluno escolheu seu parceiro e em seguida, com o auxílio de uma trena, mediu a altura real do seu par e anotou as medidas em uma folha de papel, conforme mostra a Figura 8.

Após todas as duplas cumprirem esta etapa, os alunos se dirigiram para a área externa da escola, localizada à direita do refeitório, com a tarefa de medir o comprimento da sombra do seu respectivo par. Os alunos adoraram sair do ambiente restrito da sala de aula e comentaram o quanto é interessante estudar em outros lugares da escola. Era visível a satisfação da turma em relação à aplicação da atividade prática 2. Pareciam crianças se divertindo, mesmo tendo idades entre 15 e 20 anos.

A turma foi orientada pela professora para que todos os alunos fizessem as medições nas mesmas posições, de maneira padronizada: ou todos de frente para o sol ou todos de costa. E em seguida foi discutido o porquê de tal padronização. A professora comentou que Tales de Mileto foi um importante filósofo, astrônomo e matemático grego que viveu antes de Cristo. Ele usou seus conhecimentos sobre Geometria e Proporcionalidade para determinar a altura de uma pirâmide. Tales observou que os raios solares que chegavam à Terra estavam na posição inclinada e eram paralelos, dessa forma, ele concluiu que havia uma proporcionalidade entre as medidas da sombra e da altura dos objetos.

Assim, as duplas executaram com sucesso a etapa de medição dos comprimentos das respectivas sombras, registrando os valores na folha de papel. O aluno A2, registrou altura e o comprimento da sombra do aluno A25, encontrando como valores 158 cm e 90 cm, respectivamente. Enquanto o aluno A25 encontrou, respectivamente, os valores 174 cm e 99 cm para a altura e comprimento da sombra do aluno A2.

Todos os alunos da turma retornaram para a sala de aula e de posse das anotações feitas, cada dupla calculou a razão entre altura do colega e o comprimento da respectiva sombra. Os alunos A25 e A2, efetuaram as divisões e encontraram, respectivamente, razões iguais a 1,7555555556 e 1,7575757576. A professora solicitou que os alunos aproximassem os resultados das divisões para duas casas decimais. Os alunos A25 e A2 arredondaram suas razões para 1,76.

Os resultados das divisões foram socializados na sala de aula para que os alunos percebessem alguma regularidade entre os dados coletados. O aluno A7, foi o primeiro a perceber que algumas razões eram numericamente iguais e as demais com resultado muito próximos.

Os resultados das divisões foram socializados na sala de aula para que os alunos percebessem alguma regularidade entre os dados coletados. O aluno A7, foi o primeiro a perceber que algumas razões eram numericamente iguais e as demais com resultado muito próximos.

A Figura 8 a seguir mostra a aplicação do conceito de proporcionalidade utilizando o Teorema de Tales para a atividade prática 2.

Figura 8 – Aplicação do conceito de proporcionalidade no Teorema de Tales

(a) Medição das alturas dos alunos

(b) Medição das sombras projetadas dos alunos

Fonte: O autor (2017)

4.3.3 Atividade Prática 3: Aplicação do conceito de proporcionalidade na função afim

Atividade proposta: Deposite certa quantidade de bolinhas de gude idênticas num recipiente cilíndrico graduado e transparente contendo determinado volume de água e meça as variações ocorridas no nível de água.

Objetivo:Identificar a relação proporcional existente entre o nível de água e o número de bolinhas de gude.

Alcance esperado: que os alunos discutissem a situação-problema em equipe e resolvessem o problema, aplicando os conteúdos já estudados, utilizando uma estratégia própria.

Material utilizado: recipiente cilíndrico transparente e graduado, água, bolinha de gude, régua, lápis (caneta) e folha de papel milimetrado.

A atividade 3 buscou trabalhar o conceito de proporcionalidade na função afim. Foram utilizados 5 recipientes cilíndricos, transparentes, graduados e com água. Também foram utilizadas bolinhas de gude de formato esférico e 5 tabelas para fazer os registros das observações feitas e dos dados coletados.

A Figura 9 a seguir apresenta a aplicação do conceito de proporcionalidade na função afim para a atividade prática 3.

Figura 9 – Aplicação do conceito de proporcionalidade na função afim

Fonte: O autor (2017)

A turma foi dividida em 6 equipes com 5 membros cada uma. Os alunos estavam ansiosos para conhecerem a próxima atividade a ser aplicada, visto que a última foi muito divertida.

A professora apresentou os materiais a serem utilizados na atividade 3: recipiente cilíndrico graduado e transparente, bolinhas de gude idênticas e folha de papel com tabela e malha quadriculada. Quando os meninos visualizaram as bolinhas de gude vibraram e perguntaram se podiam ficar com estas no final da atividade.

Foi distribuído um recipiente cilíndrico para cada equipe e uma certa quantidade de bolinhas de gude idênticas. Cada equipe teria que encher o recipiente cilíndrico com uma certa quantidade de água e anotar, o nível de água escolhido, na tabela fornecida pela professora.

Cada equipe saiu da sala de aula, encheu o seu recipiente com a quantidade de água desejada e retornou para dar seqüência a atividade proposta. A equipe E1 colocou água no recipiente até o nível identificado por 50 ml, enquanto, a equipe E2 encheu o recipiente com água até o nível de 75 ml, conforme ilustrado na figura 9.

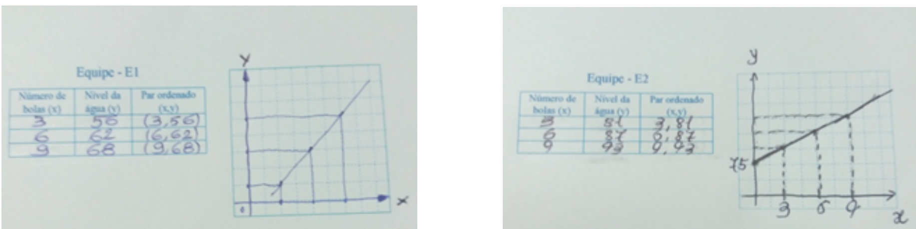
Em seguida, cada equipe deveria colocar uma certa quantidade de bolinhas de gude no recipiente cilíndrico com água e registrar na tabela o número de bolinhas colocadas e o nível de água atingido. A equipe E2 colocou 3 bolinhas de gude e percebeu que o nível de água subiu 6 ml, passando de 75 ml(nível inicial) para 81 ml, depois colocou mais 3 bolinhas e registrou um nível de água igual a 87 ml. A equipe E1 também colocou 3 bolinhas de gude no recipiente e observou que o nível de água subiu 6 ml, passando de 50 ml para 56 ml, e registrou as informações na tabela, como mostra a Figura 10.

Depois que todas as equipes cumpriram esta etapa da atividade, a professora perguntou se elas haviam percebido alguma relação entre as informações registradas. A equipe E4 respondeu que sim. "A medida que colocamos 3 bolinhas no recipiente o nível de água sobre 6 ml", disse a aluna A11.

Assim, a professora viu que os alunos haviam atingido o objetivo da atividade 3, que era perceber a relação proporcional entre o nível de água do recipiente e o número de bolinhas de gude. Desse modo, a professora pediu que os alunos completassem a tabela usando o conceito proporcional, sem acrescentar as bolinhas, o que ocorreu com tranqüilidade e êxito. Era o momento ideal para a professora explicar que a atividade 3, além de representar uma aplicação do conceito de proporcionalidade, também se tratava de um caso de função afim, pois, para cada (x) quantidades de bolinhas colocadas no recipiente cilíndrico, o nível de água (y) subia. Comentou que as bolinhas de gude tinham formato esférico e o mesmo volume, portanto, a água subiria exatamente a mesma quantidade para cada bolinha.

Assim, a resultante desta atividade seria escrever uma expressão que permitisse calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x). A idéia seria encontrar uma função afim para cada equipe, de acordo com os dados de cada tabela. A professora utilizou os dados coletados pelas seis equipes, e pediu para que cada uma delas observassem suas respectivas colunas: número de bolinhas e nível de água. Pediu que as equipes efetuassem diferenças entre as quantidades de bolinhas, entre um termo e o seu antecessor. Todas as equipes encontraram como resultado o número três. Em seguida, pediu que os alunos efetuassem diferenças entre os valores da coluna nível de água, novamente entre um termo e o seu antecessor. E todas as equipes encontraram o número seis como resultado. Dividindo-se esses dois valores encontrou-se a constante de proporcionalidade, também chamada coeficiente angular (a) da função afim, representada por $f(x) = a \cdot x + b$. O coeficiente (b) seria a quantidade inicial de água colocada no recipiente. Como exemplo, podemos citar a função afim descrita pela equipe E2, $f(x) = 2 \cdot x + 75$. Para finalizar a atividade cada equipe fez um esboço do gráfico da sua respectiva função afim, na malha quadriculada, ao lado da respectiva tabela, conforme mostrado na Figura 10.

Figura 10 – Soluções da atividade prática 3 apresentada pelas equipes E1 e E2



Fonte: O autor (2017)

4.3.4 Atividade Prática 4: Aplicação do conceito de proporcionalidade na trigonometria

Atividade proposta: Calcular a largura (X) do Igarapé das Pedrinhas

Objetivos: Identificar a relação proporcional existente entre a medida do lado de um triângulo e a medida do seno do ângulo oposto a ele.

Alcance esperado: que o aluno interpreta-se e resolvesse a situação problema, aplicando os conteúdos já estudados, utilizando uma estratégia própria.

Material utilizado: trena graduada, teodolito, haste com prisma, GPS, piquetes de madeira, martelo, papel e caneta para desenho de croqui e demais anotações.

A atividade prática 4 ocorreu em duas etapas: a primeira aconteceu fora ambiente escolar, porém no mesmo bairro, num lugar chamado Igarapé das Pedrinhas; e, a segunda ocorreu no Laboratório de Informática da Escola (LIED). A atividade foi marcada por um diferencial, a não participação efetiva de todos os alunos da turma, pois tornou-se inviável o deslocamento dos trinta alunos até o local do Igarapé.

Cada uma das seis equipes escolheram dois representantes, os quais tinham o papel de desenvolverem a atividade "in loco", assim como, socializarem todas as experiências e os conhecimentos adquiridos durante a atividade com o restante do grupo.

A professora pesquisadora levou os alunos escolhidos, juntamente com um Técnico em Topografia até o Canal das Pedrinhas, também denominado Igarapé das Pedrinhas. Este canal localizado ao sul da cidade de Macapá, inicia na Avenida Ataíde Teive no Bairro Santa Rita, atravessa vários bairros e deságua no Rio Amazonas.

Na margem esquerda do Igarapé, seis alunos fixaram dois marcos (piquetes) de referência, identificando os pontos A e B. Mediram a distância entre os pontos (A e B) com o auxílio de uma trena graduada, encontrando um valor de 43,93 metros, conforme mostra os itens b e c da Figura 11. Enquanto, o restante do grupo se dirigiu à margem direita do Igarapé, onde também fizeram a marcação de um ponto C de referência.

O topógrafo explicou para os alunos a metodologia para nivelamento e leitura das medidas no teodolito, bem como seus diversos campos de aplicação nas engenharias. A professora explicou também que o teodolito é um instrumento óptico utilizado para realizar medidas de ângulos verticais e horizontais, sendo montado sobre um tripé devidamente nivelado. Este aparelho é muito utilizado em topografia, na navegação e em meteorologia.

Depois do nivelamento do teodolito, os alunos visualizaram os marcos referenciais, ou seja, os pontos A, B e C, com o auxílio da haste metálica com prisma no topo e registraram os valores dos ângulos no ponto (A) igual a 44 e no ponto (C) igual a 46 º. Em seguida, foi registrado num aparelho portátil de GPS (Global Positioning System) as coordenadas geográficas SW e EW dos respectivos pontos de referência.

No Laboratório de Informática da Escola, os representantes das equipes socializaram as informações com o restante da turma e a partir dos dados obtidos a professora revisou os conteúdos de trigonometria referentes a Lei dos Senos aplicada em um triângulo qualquer.

De posse das coordenadas obtidas no GPS, os alunos visualizaram no software Google Earth as imagens de satélite do local escolhido para a medição no Igarapé das Pedrinhas, conforme mostra a Figura 12. Em seguida, tentaram calcular a largura aproximada (x) do Igarapé a partir do local escolhido.

Figura 11 – Aplicação prática do conceito de proporcionalidade na trigonometria

(a) Vista do Canal do Igarapé das Pedrinhas

(b) Locação dos marcos de referência (piquetes)

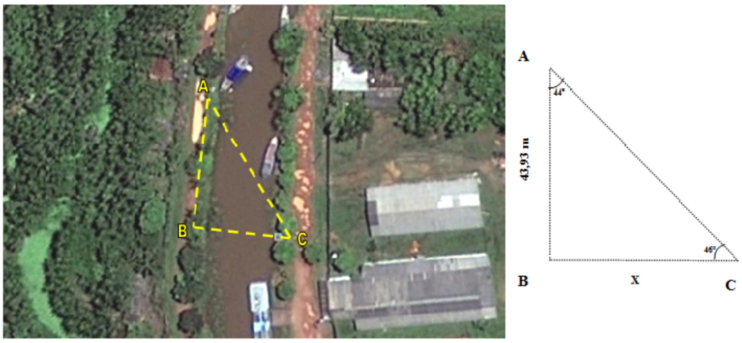
(c) Medição da distância entre os marcos de referência

(d) Leitura das distâncias dos marcos de referência e dos respectivos ângulos internos no teodolito (triangulação)

Fonte: O autor (2017)

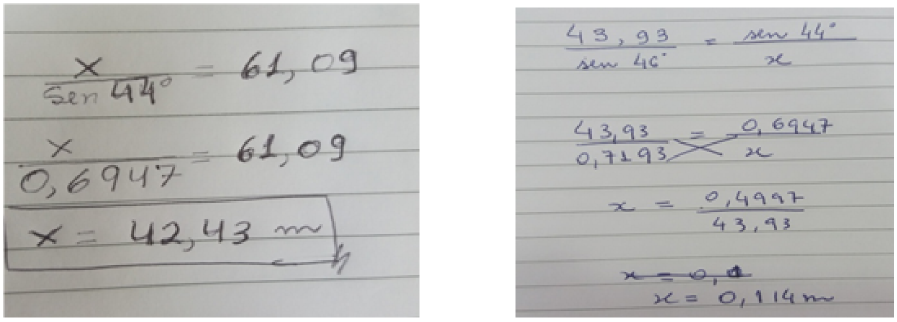
Observe a Figura 12 a seguir, no qual mostra um trecho do Igarapé das Pedrinhas. Nela mascou-se três pontos A, B e C. Os pontos A e B distam 43,93 m um do outro e ambos situados do mesmo lado do Igarapé. O ponto C marcou-se na outra margem do Igarapé. Usando equipamentos apropriados, verificou-se que o ângulo $\hat{A}$ mede 44º e o ângulo C, 46º. Determine, aproximadamente, a largura (x) do Igarapé. (Dados: $44 \cong 0,6947$ e $sen46 \cong 0,7193$).

Figura 12 – Vista superior de satélite e desenho esquemático da atividade 4



Fonte: Google Earth (Coordenadas: SW 00° 00' 12,1"; EW 51° 03' 49,8")

Figura 13 – Imagens lado a lado



Fonte: O autor (2017)

A equipe E5 utilizou como resolução a estratégia funcional, encontrando o quociente entre grandezas diferentes, medida do lado e seno do ângulo oposto a ele, no valor de 61,09, e em seguida utilizaram esse valor para descobrirem a largura aproximada do Igarapé (x), conforme mostra a Figura 13. Já a equipe E3 teve dificuldades em escrever a proporcionalidade correta, invertendo a razão entre lado e do ângulo oposto, encontrando o resultado incorreto de 0,114 metros, mostrando que esta equipe não analisou o resultado encontrado, pois seria improvável a largura do Igarapé ter menos de meio metro de largura, visto que nele velejam embarcações de pequeno e médio porte.

4.3.5 Atividade Prática 5: Aplicação do conceito de proporcionalidade inversa

Atividade proposta: Completar a Tabela 4 a seguir, com os comprimentos adequados para cada altura. Verificar o que acontece com o comprimento da altura do retângulo, se for aumentada o comprimento da base da figura.

Objetivos: Construir retângulos diferentes, mas todos com a mesma área igual a 12 unidades.

Alcance esperado: que o aluno interprete, discuta com os colegas e resolva a situação problema, aplicando os conteúdos já estudados, utilizando uma estratégia própria.

Material utilizado: cartolina colorida, régua, tesoura, lápis (caneta) e tabela para registros dos valores.

Tabela 4 – Aplicação da atividade prática 5

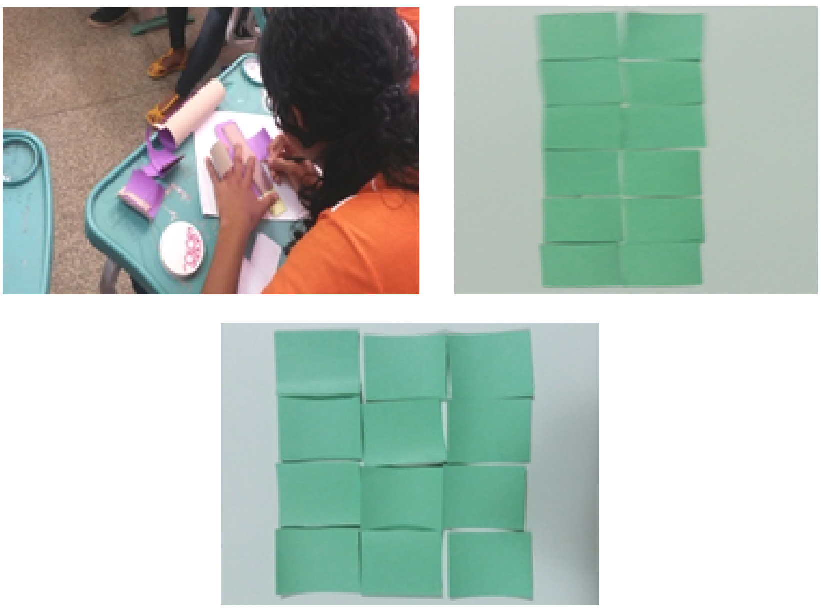
Base (B)	**Altura (H)**	**Área (A)**
1		
2		
3		
4		
6		
12		

Fonte: O autor (2017)

Para a atividade 5 a turma foi dividida em duplas. Cada dupla desenhou e recortou, em cartolina, doze quadrados, conforme mostra a figura 14. Em seguida, as duplas deveriam preencher a Tabela 4 fornecida pela professora e para facilitar este processo, foi lançado o desafio: quantos retângulos podem ser construídos com doze quadrados de uma unidade de lado?

Com o material concreto foi mais prazeroso resolver a atividade prática 5. As duplas manipularam os quadrados montando os respectivos retângulos. Para exemplificar, a dupla formada pelos alunos A15 e A26, montou inicialmente os retângulos considerando 2 e 3 unidades de base, encontrando, respectivamente, 6 e 4 unidades de altura, conforme mostra a Figura 14. Já a dupla formada pelos alunos A9 e A18 montou retângulos considerando 6 e 12 unidades de base, com medidas 2 e 1 unidades pra altura, respectivamente.

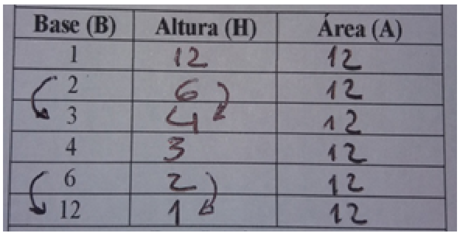
Figura 14 – Aplicação prática do conceito de proporcionalidade inversa



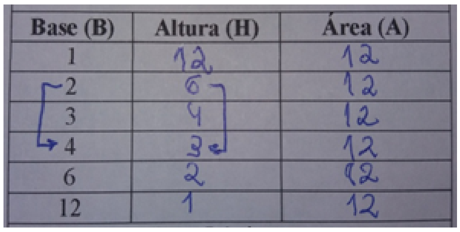
Fonte: O autor (2017)

Neste momento a professora parabenizou a turma pela participação e confirmou que todos os retângulos apresentavam 12 unidades de área. Em seguida, perguntou se as duplas estavam percebendo alguma relação entre os valores da base e da altura dos retângulos. A dupla formada pelos alunos A4 e A16, percebeu que aumentando os valores das bases dos retângulos, os valores das alturas diminuíam. E a dupla formada pelos alunos A2 e A27 foi além, ao afirmar que a relação aumento/diminuição se dava inversamente e na mesma medida, pois, aumentando as bases 2 para 3, as alturas diminuíam na razão inversa de 6 para 4. Enquanto, que a dupla A1 e A8 percebeu que duplicando de 6 para 12 as medidas das bases dos retângulos, as respectivas alturas diminuíam na metade de 2 para 1. Entretanto, nem todas as duplas perceberam que a altura é inversamente proporcional a base, quando se mantém constante a área do retângulo, momento oportuno para esclarecer este ponto com a turma.

Figura 15 – Soluções da atividade prática 5 envolvendo o conceito de proporcionalidade inversa



Base (B)	Altura (H)	Área (A)
1	12	12
2	6	12
3	4	12
4	3	12
6	2	12
12	1	12



Base (B)	Altura (H)	Área (A)
1	12	12
2	6	12
3	4	12
4	3	12
6	2	12
12	1	12

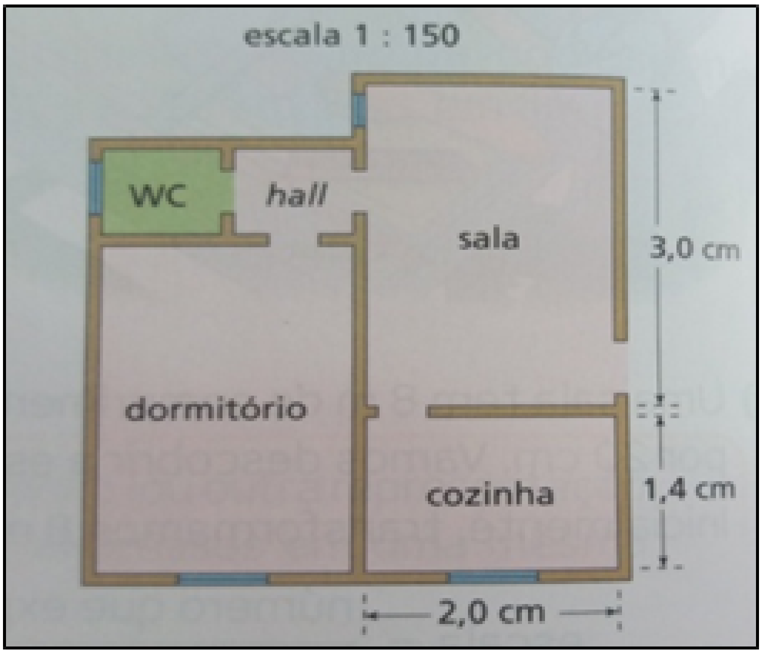
Fonte: O autor (2017)

4.4 Teste final

O teste final foi realizado individualmente e teve duração de duas horas aulas, sendo composto de cinco atividades, contendo problemas envolvendo o conceito de proporcionalidade (APÊNDICE C). O resultado permitiu analisar o desempenho dos alunos após todas as etapas da seqüência de aulas. A seguir, as questões com descrição e análise dos resultados.

Teste Final 1: Observe a planta de um apartamento.

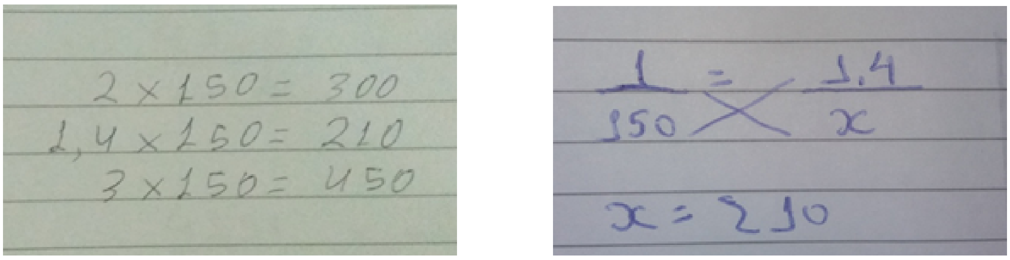
Figura 16 – Desenho proposto para o Teste Final 1



Fonte: O autor (2017)

Quais são as medidas reais da cozinha e da sala do apartamento?

Figura 17 – Resoluções do Teste Final 1 apresentadas pelos alunos 19 e 28



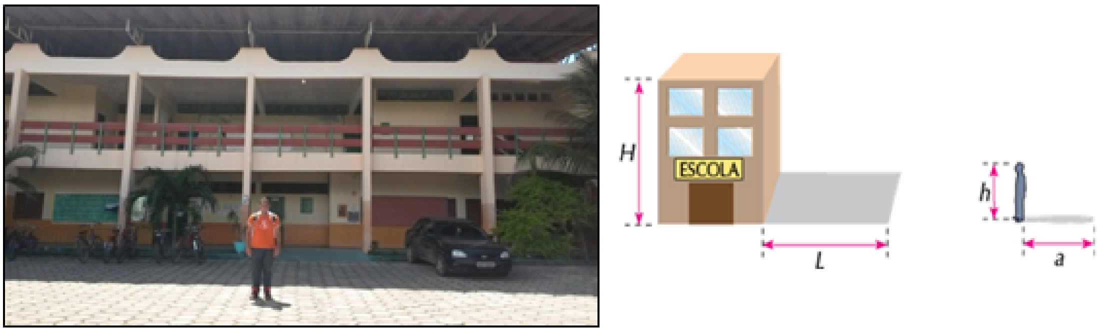
Fonte: Dados do teste final (Apêndice C)

Analisando a resolução do aluno 28, percebe-se que foi utilizada a estratégia multiplicativa para encontrar as medidas reais da sala e da cozinha. A partir do conhecimento de escala, revisado pela professora pesquisadora, na fase 2 da engenharia didática, o aluno percebeu que o tamanho real seria cento e cinqüenta vezes maior que o tamanho do desenho, portanto, multiplicou as medidas por 150.

O aluno 19 utilizou a propriedade fundamental das proporções para resolver este problema, escrevendo uma proporção para cada medida, encontrando as medidas reais da sala e da cozinha. Entretanto, estas resoluções não refletem o desempenho de toda a turma, visto que, 50% dos alunos calcularam erroneamente o teste final 1, outros 20% da turma deixaram o teste em branco e o restante 30% procederam o cálculo correto.

Teste Final 2: O intervalo das aulas na Escola Raimunda Virgolino, no turno da tarde, ocorre exatamente às 14:00 horas. Neste exato momento, a sombra projetada no chão de um aluno mede 0,92 metros de comprimento, no mesmo instante em que a sombra do prédio da Escola mede 4,30 metros. Sabendo que a altura do aluno é de 1,70 metros, qual a altura do prédio da Escola Estadual Profª. Raimunda Virgolino?

Figura 18 – Imagem de referência e desenho esquemático para o teste final 2

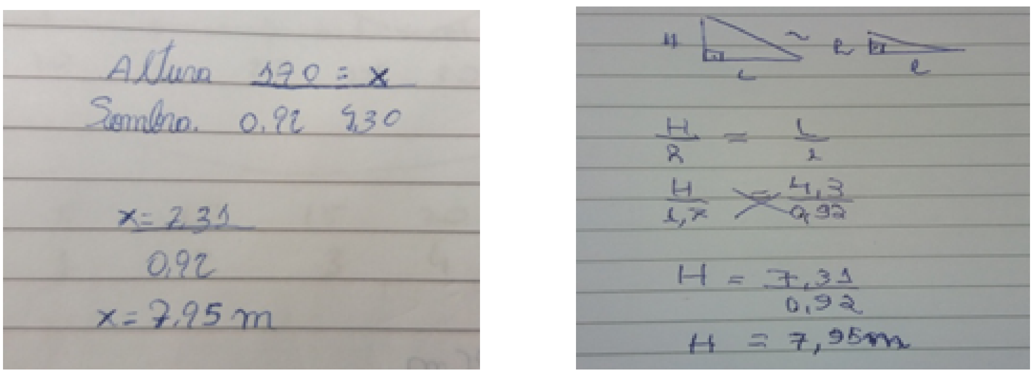


Fonte: O autor (2017)

Ao analisar a resposta do aluno 21, verificou-se que foi usada como estratégia de resolução, a relação proporcional entre altura e sombra, em seguida, o aluno aplicou a propriedade fundamental das proporções, encontrando a altura aproximada da escola Raimunda Virgolino igual a 7,95 metros. Quanto ao aluno 3, percebeu-se que ele utilizou o desenho esquemático do teste final 2, conforme mostra a Figura 18, aplicando a semelhança de triângulos, utilizada no Teorema de Tales, para calcular a altura (H) da escola, conforme mostra a Figura 19.

Para o teste final 2, observou-se um aumento de 10% de acertos quando comparado ao teste final 1. Esse aumento de rendimento pode está associado ao modelo de abordagem prática escolhida pela professora, com maior participação direta dos alunos na resolução do problema.

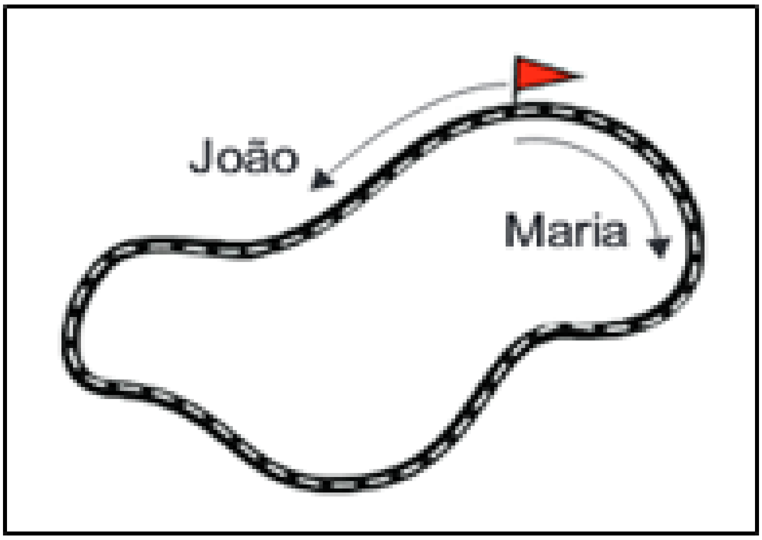
Figura 19 – Resoluções do Teste Final 2 pelos alunos 21 e 03



Fonte: Dados do teste final (Apêndice C)

Teste Final 3: (OBMEP/2016 - Nível 2) João e Maria correm com velocidades constantes e em sentidos contrários a partir de um mesmo ponto da pista de 3.000 metros representada na figura. Depois de correr 1.200 metros, João encontra Maria pela primeira vez. Quando ele terminar a primeira volta, quantos metros ela terá corrido?

Figura 20 – Figura do Teste Final 3



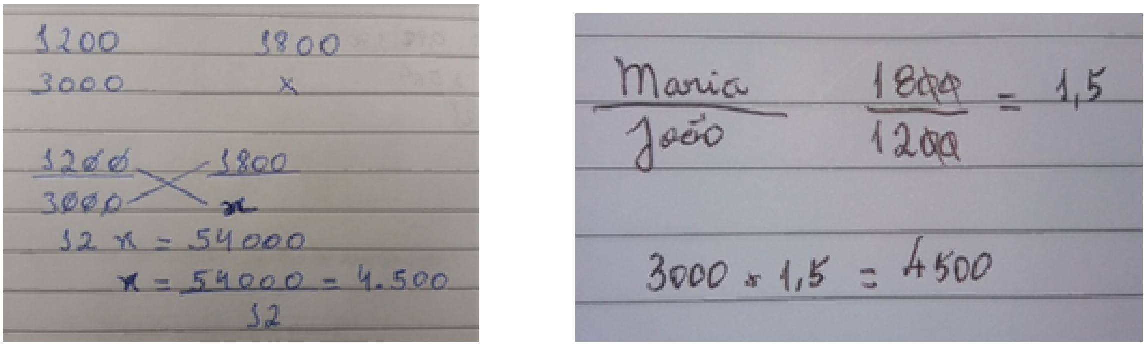
Fonte: OBMEP (2016)

O teste final 3 revela o quanto os alunos, da turma pesquisada, estão distantes do perfil delineado pela Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Somente 10% da turma, ou seja, 3 alunos resolveram corretamente à questão.

O aluno 9 relacionou as distâncias percorridas, em sentidos contrários, por João e Maria. Enquanto João percorreu 1.200 m, Maria percorreu o restante, 1.800 m, ocorrendo o primeiro encontro entre eles. Então, quando João terminasse a primeira volta de 3.000 m, Maria teria que percorrer 4.500 m para encontrá-lo pela segunda vez.

Outra resolução interessante foi a do aluno 10, que encontrou uma razão entre as distâncias percorridas por Maria e João para o primeiro encontro. Em seguida, utilizou este fator para descobrir quantos metros Maria teria que percorrer para encontrá-lo novamente, quando João tivesse terminado a primeira volta, conforme mostra a Figura 21.

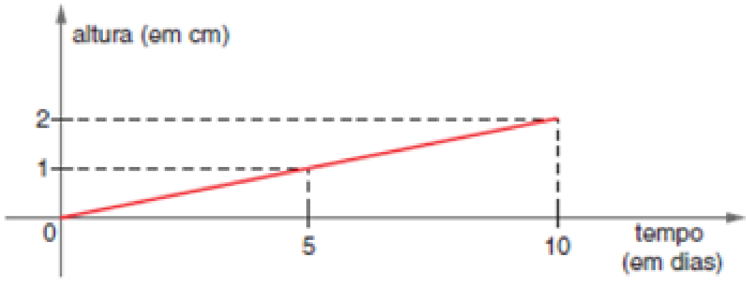
Figura 21 – Resolução do Teste Final 3 pelos alunos 09 e 10



Fonte: Dados do teste final (Apêndice C)

Teste Final 4: (UERN/2015) Um botânico mede o crescimento de uma planta, em centímetros, todos os dias. Ligando os pontos, colocados por ele, num gráfico, resulta a figura abaixo.

Figura 22 – Figura do Teste Final 4



Fonte: Vestibular da Universidade Estadual do Rio Grande do Norte, 2015

Se mantida sempre essa relação entre tempo e altura, qual a altura da planta no trigésimo dia?

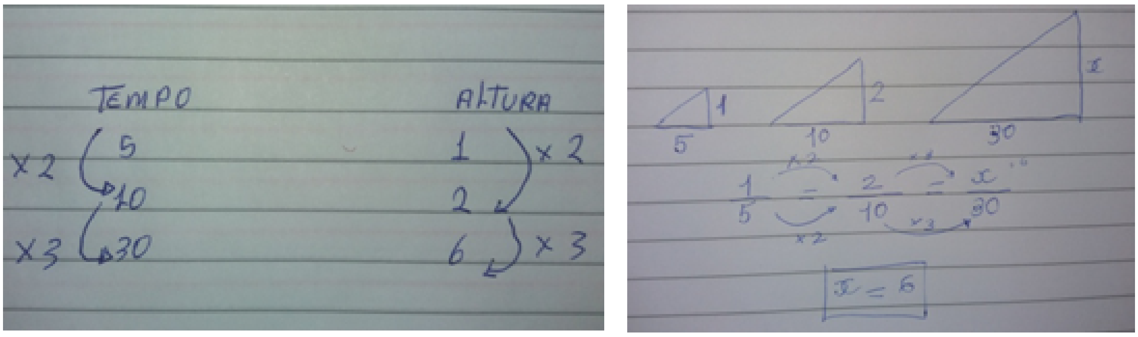
No teste final 4 abordou-se o conceito de proporcionalidade na função afim, relacionando o crescimento de uma planta (em centímetros), em função do tempo (em dias). Este crescimento foi informado através da linguagem gráfica, conforme mostra a Figura 22.

O aluno 7 observou o gráfico do teste final 4 e percebeu que em 5 dias o crescimento da planta foi de 1 cm, em 10 dias foi de 2 cm. Assim, mantendo-se esse crescimento proporcional, e aplicando-se o princípio multiplicativo, concluiu que no trigésimo dia o crescimento seria de 6 cm, conforme mostra a Figura 23.

O aluno 17 também observou as informações contidas no gráfico da Figura 22, porém utilizou outra abordagem. Este apresentou uma resolução criativa e bem coerente com o que já fora trabalhado com a turma. Percebeu que o gráfico da figura, que relaciona o crescimento da planta com o tempo, revela triângulos semelhantes, conforme mostra sua a resolução na Figura 23. Assim, escreveu a razão entre altura e tempo, encontrando razões equivalentes até obter a relação entre o trigésimo e a respectiva altura desejada de 6 centímetros.

Neste teste, a turma melhorou o seu desempenho, conseguindo 60% de acertos. Dos 40% restantes da turma, 30% resolveram de forma incorreta o teste final 4 e os 10% da turma, ou seja, 3 alunos, deixaram a questão em branco.

Figura 23 – Resoluções do Teste Final 4 pelos alunos 07 e 17



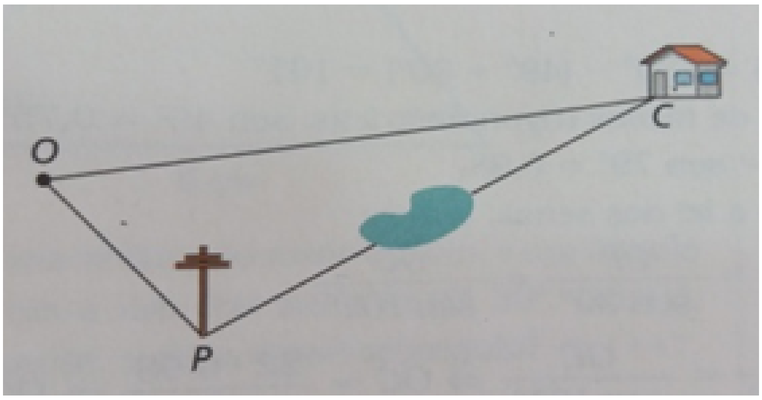
Fonte: Dados do teste final (Apêndice C)

Teste Final 5: (Adaptado de Matemática: Construção e Significado, 2013. p, 33).

Em algumas situações, por exemplo, na demarcação de terras ou no cálculo da altura de uma montanha, precisamos determinar distâncias cuja medição direta não é possível. É comum, então, recorrermos ao teodolito, um instrumento que mede ângulos, e às relações fornecidas pela trigonometria.

Considere que um fio elétrico será instalado entre um poste P e uma casa C, separados por um lago em um terreno plano. Observe o esquema que representa a situação:

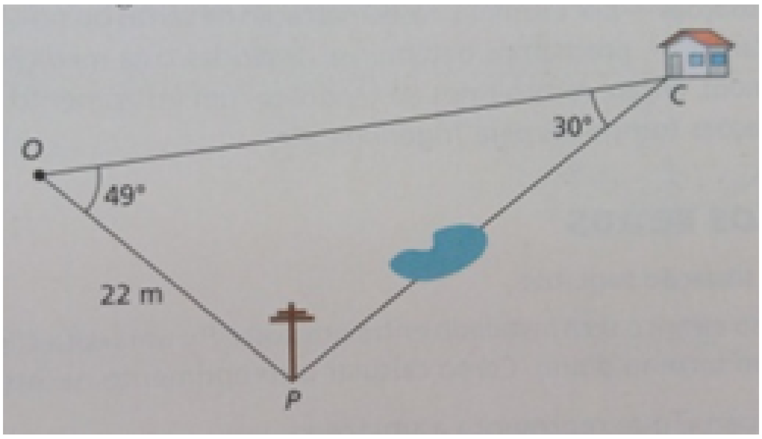
Figura 24 – Aplicação da proporcionalidade na trigonometria de um triângulo qualquer



Fonte: Adaptado de Matemática: Construção e Significado, 2013

Posicionando um teodolito nos pontos O e C, foram medidos os ângulos $P\hat{O}C$ e OCP. Com uma trena, mediu-se a distância OP, conforme ilustra a Figura 14 a seguir. Determine o comprimento necessário de fio CP. (Dados: $49^{o} \cong 0,75$ e $30^{o} = 0,5$).

Figura 25 – Aplicação da proporcionalidade na trigonometria de um triângulo qualquer



Fonte: Adaptado de Matemática: Construção e Significado, 2013

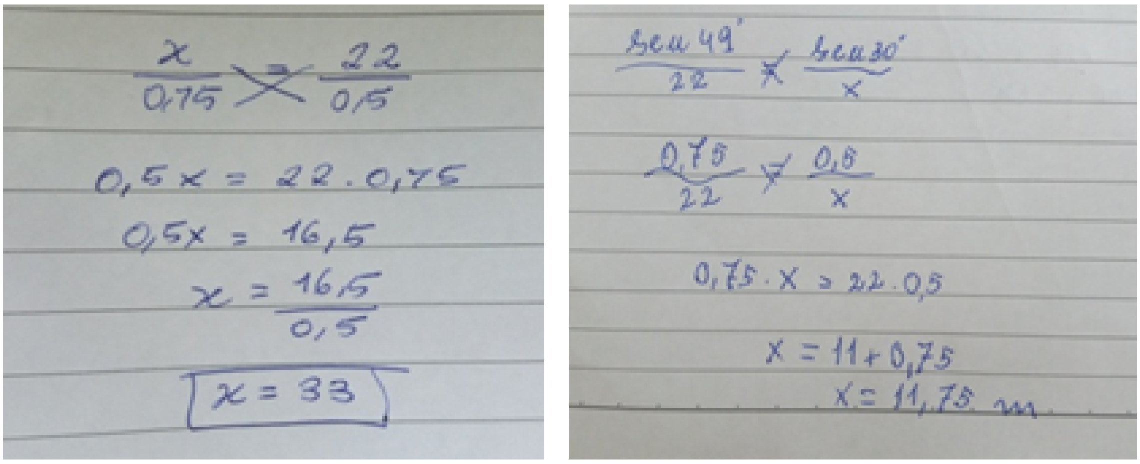
O teste final 5 teve como enfoque a proporcionalidade na trigonometria, mais precisamente, na lei dos senos aplicada à um triângulo qualquer. O texto da questão aborda uma situação problema semelhante à atividade prática 4, vivenciada anteriormente pelos alunos. Neste teste, o aluno deveria calcular o comprimento do fio CP (x).

O aluno 13 observou o desenho esquemático, como ilustra a Figura 25. Percebeu que se tratava de um triângulo qualquer e utilizou como estratégia de resolução a lei dos senos. Escreveu a razão existente entre a medida do lado CP (x) e o do ângulo de 49º oposto a ele, ou seja, $\dfrac{x}{0,75}$. Em seguida, escreveu outra razão entre a medida do lado OP e do ângulo de 30º oposto a ele, isto é, $\dfrac{22}{0,5}$. Igualando essas duas razões e aplicando a propriedade fundamental das proporções, encontrou como comprimento do fio OP, o valor correto de 33 metros.

Para resolver o teste final 5, o aluno 20 também escreveu uma igualdade entre duas razões (proporção), entretanto, a razão escrita foi entre o seno de um ângulo e o lado adjacente a ele e não o lado oposto a ele, como mostra a Figura 26. Assim, este aluno encontrou como solução incorreta, o comprimento do fio OP igual a 11,75 metros. Este aluno faz parte dos 20% da turma que erraram a resposta do teste final 5.

O teste final 5 apresentou o melhor desempenho da turma quando comparado aos outros testes, uma vez que, 70% da turma, ou seja, 21 alunos, conseguiram responder corretamente esta questão. Já 10% dos alunos deixaram o teste final 5 em branco.

Figura 26 – Resolução correta do aluno 13 e resolução incorreta do aluno 20 para o Teste Final 5



Fonte: O autor (2017)

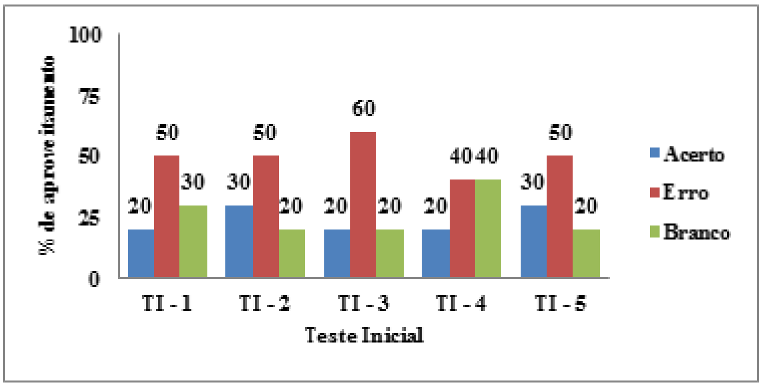
4.5 Quarta Fase: Validação

Na fase da validação, é fundamental que se verifique, após o levantamento dos dados obtidos da análise a priori e da aplicação da seqüência didática, o que realmente o aluno produziu, a forma como desenvolveu seu raciocínio e organizou o pensamento matemático para chegar à solução das questões propostas.

A professora, ao finalizar a aplicação da seqüência didática, que foi desenvolvida seguindo os preceitos da Engenharia Didática, aplicou um teste final, coletou os dados a fim de verificar a validação da seqüência aplicada. Para a comprovação dessa fase, realizou-se uma análise comparativa entre o teste inicial e o final.

A análise dos resultados da aplicação da seqüência didática mostrou melhora no desempenho dos alunos, o que pode ser observado comparativamente nos gráficos das Figuras 27 e 28 a seguir.

Figura 27 – Variação de desempenho dos alunos no Teste Inicial



Fonte: O autor (2017)

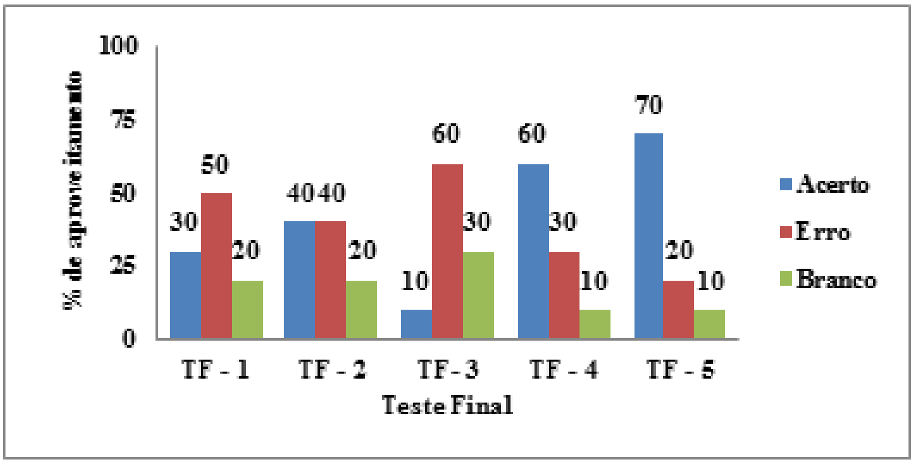
Da análise de desempenho entre os testes iniciais e finais, observa-se na Figura 27, que no teste inicial aplicado aos alunos, o percentual de acertos apresentou variação entre

20% e 30%, demonstrando um baixo aproveitamento dos alunos. Em relação ao número de resoluções incorretas, o gráfico demonstra uma variação de 40% a 60% das questões.

Esta variação percentual mostrou-se preocupante, pois revelou deficiências no processo de ensino-aprendizagem de matemática desse alunos, sobretudo em relação a aplicação dos conceitos de proporcionalidade no cotidiano e também em outras áreas do conhecimento.

Quanto ao número de questões em branco, a Figura 27 demonstra também uma variação de 20% a 30%, denotando uma elevada ausência de participação e desinteresse da turma, tendo em vista a abordagem do teste inicial ter sido apenas de forma teórica.

Figura 28 – Variação de desempenho dos alunos no Teste Final



Fonte: O autor (2017)

Da análise do teste final, observa-se na Figura 28, que o percentual médio de acertos das questões variou de 10% a 70%, demonstrando um crescimento de aproveitamento dos alunos. Esta melhora pode está relacionada a mudança de abordagem utilizada pela professora no processo ensino-aprendizagem com os alunos.

A professora utilizou como metodologia os princípios da engenharia didática, proporcionando a construção de um saber matemático reflexivo e participativo, diagnosticando, de forma planejada, deficiências e propostas de aplicação de questões-problemas, que relacionam a teoria com a prática no contexto do cotidiano dos alunos, incentivando-os a participar na construção do conhecimento matemático, motivando-os a tornarem-se sujeitos ativos e autores no processo educativo.

Em relação ao número de questões incorretas, a Figura 28 também demonstra, com exceção do teste final 3, que houve uma redução de 50% para 20% de questões erradas apresentadas pelos alunos, demonstrando um melhor rendimento na aplicação do teste final. Outro aspecto relevante, refere-se à redução de 10% no percentual de questões em branco, demonstrando maior participação e interesse da turma pesquisa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As causas do baixo desempenho dos alunos nos diferentes assuntos abordados em Matemática podem estar relacionadas a utilização do uso excessivo de algoritmização dos conteúdos ministrados, com abordagens superficiais, mecanizadas e descontextualizadas do cotidiano dos alunos.

Dentre os diversos conteúdos de matemática que podem ser trabalhados em sala de aula com uma abordagem prática, participativa, estimulante, inter-relacionada com diversos conteúdos matemáticos, bem como de outras ciências e sobretudo associada ao cotidiano do aluno, está o conceito de proporcionalidade.

A proporcionalidade apresenta-se como um dos conceitos matemáticos mais importantes e aplicados desde o Ensino Básico até o Ensino Médio. As suas inúmeras aplicações no cotidiano, bem como em diversas outras ciências, desempenham um papel vital no processo de ensino-aprendizagem dos alunos.

A aplicação do conceito de proporcionalidade pode ser trabalhado através da metodologia da engenharia didática, pois possibilita uma sistematização metodológica organizada no contexto de sala de aula, levando em consideração as relações de dependência entre teoria e prática na vida cotidiana dos alunos.

Da análise dos resultados obtidos no presente trabalho, foi possível constatar que os alunos da turma pesquisada foram capazes tanto de identificar a aplicação do conceito de proporcionalidade como de resolver situações-problemas abordando diferentes conteúdos de matemática. Assim, como foi possível descrever a partir da análise das resoluções dos testes propostos, as principais estratégias de resolução e dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos.

O presente trabalho foi realizado com uma turma de 30 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de ensino, localizada no Município de Macapá, no qual objetivou avaliar a aplicação do conceito de proporcionalidade a partir de uma seqüência didática baseada na metodologia da Engenharia Didática.

A finalidade foi observar e analisar como ocorria o processo de aprendizagem dos alunos. Durante o processo, procurou-se relacionar o assunto matemático com o cotidiano dos alunos, mostrando a importância e a aplicabilidade do conceito de proporcionalidade, facilitando, assim, a compreensão dos conceitos envolvidos.

A pesquisa propôs uma intervenção pedagógica a partir da metodologia da Engenharia Didática. Foram abordados conteúdos de proporcionalidade, tais como: razão, proporção, constante de proporcionalidade, grandezas proporcionais e regra de três.

Para a realização do trabalho, aplicou-se um teste inicial com o objetivo de verificar quais as dificuldades e o nível de conhecimento que os alunos possuíam em relação ao conceito de proporcionalidade. Pela análise dos dados, constatou-se que a maioria dos alunos ainda apresentavam dificuldades na aprendizagem, sobretudo a aspectos relacionados tanto a constante de proporcionalidade, como a diferença entre grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

Após a aplicação do teste inicial, elaborou-se uma seqüência didática baseada nos princípios da Engenharia Didática para a aplicação dos conceitos de proporcionalidade. A seqüência contou com cinco atividades práticas utilizando raciocínio de proporcionalidade, envolvendo desde o planejamento e realização das aulas expositivas, passando pela simulação prática das atividades com os alunos, até a resolução propriamente das atividades propostas.

Para o desenvolvimento das atividades práticas foram explorados conteúdos abordando: quebra-cabeça utilizando ampliação de figuras planas; medição de altura e sombra projetada de alunos, abordando o conceito de razão, coeficiente de proporcionalidade e semelhança de triângulos; medição entre quantidade de bolas de gude e altura do nível d'água, utilizando o conceito de função afim; medição de ângulos e lados de um triângulo qualquer, abordando a proporcionalidade direta e constante de proporcionalidade, através da lei dos senos e construção de retângulos diferentes com mesma área, a partir do conceito de proporcionalidade inversa.

No período de aplicação das atividades práticas, foram encontradas algumas dificuldades tais como: a falta de recursos materiais na escola, a dificuldade de acesso a internet no laboratório de informática da escola, a falta de transporte escolar para o deslocamento de todos os alunos da turma até o local de medição de uma das atividades práticas. Tais fatores comprometeram o término da pesquisa no tempo previsto, além de interferir num melhor desempenho dos alunos.

Nas observações efetuadas em sala de aula, constataram-se algumas dificuldades dos alunos em relação a aplicação dos conceitos de proporcionalidade, tais como: realizar operações de multiplicação e divisão com números decimais e fracionários; simplificar frações e obter frações equivalentes; interpretar os textos dos testes propostos; escrever e resolver equações do 1º grau; conceituar função afim e representar relações trigonométricas num triângulo qualquer.

Entretanto, o desenvolvimento do trabalho, apoiado nos pressupostos da Engenharia Didática através das seqüências didáticas, possibilitou investigar a problemática envolvendo os processos de ensino e aprendizagem de proporcionalidade, bem como os aspectos que ocorriam na construção e aquisição do conhecimento dos alunos.

A utilização da metodologia da Engenharia Didática também contribuiu para o aprendizado dos alunos em relação ao tema proposto, o que pôde ser constatado nos resultados encontrados e demonstrados no teste final. Foi possível constatar uma melhora relativa de desempenho dos alunos, uma vez que no teste inicial, a turma apresentou, em média, um percentual de 24% de acertos; 50% de erros e 26% de respostas em branco, enquanto que no teste final, os percentuais médios foram de 42% de acertos; 40% de erros e 18% de questões em branco. Vale ressaltar que este comparativo refere-se à testes com níveis de dificuldades diferentes.

Observou-se também que, após a intervenção pedagógica, os alunos tiveram melhor rendimento nos testes finais 2, 4 e 5, os quais abordavam os conceitos de proporcionalidade em semelhança de triângulos, na função afim e na trigonometria em um triângulo qualquer. Diante da análise dos resultados obtidos, percebeu-se uma evolução positiva de aprendizagem dos conteúdos trabalhados. Entretanto, é necessário reforçar alguns conceitos básicos de funções do 1º grau, bem como de razões trigonométricas.

Ressalta-se que a seqüência didática foi desenvolvida através de atividades práticas em duplas e em 6 grupos de 5 alunos, estimulando o processo interativo, a participação, o trabalho em equipe, bem como o desenvolvimento da capacidade de argumentação, tornando o ambiente propício para a consolidação da aplicação do conceito de proporcionalidade.

Vale destacar também, que a utilização de materiais concretos manipuláveis propostos pela professora, tais como: jogos, tabelas, gráficos e desafios, além de terem favorecidos a participação e a interação coletiva dos alunos, tornaram mais fáceis a construção do raciocínio proporcional, do que buscar entender simples relações numéricas.

Importa mencionar que para a aprendizagem do conceito de proporcionalidade, foi dado ênfase ao raciocínio proporcional, o que incentivou os alunos a desenvolverem estratégias próprias, apoiadas nas atividades práticas propostas pela professora.

Outro fator a ser considerado foi a diversidade de estratégias utilizadas nas resoluções dos problemas, mostrando que cada aluno possui determinado nível de competência e habilidade, necessitando de estimulação diferenciada para o seu desenvolvimento.

A realização das atividades práticas, dentro e fora do ambiente escolar, bem como a visualização da relação teoria x prática dos conteúdos abordados em diversas situações do cotidiano, proporcionou um estudo mais interessante para os alunos e a professora, aumentando a vontade de conhecer e aprender coisas novas.

A aplicação da metodologia da engenharia didática permitiu aos alunos participarem ativamente do processo de construção do conceito de proporcionalidade. A seqüência didática propiciou a criação de estratégias próprias, a partir de conhecimentos já adquiridos pelos alunos, para a resolução dos problemas propostos pela professora, tornando-os protagonistas no processo de construção dos seus próprios conhecimentos.

Ao final desta dissertação, a professora constatou que, ao utilizar a metodologia da Engenharia Didática em sala de aula, com o objetivo de investigar como se dava o processo de aprendizagem do conceito de proporcionalidade, foi possível analisar e compreender as dificuldades que os alunos apresentavam durante as resoluções dos testes propostos.

Também foi percebido pela professora, que atividades planejadas com objetivos bem definidos, permitem identificar mais facilmente os pontos em que a turma tem mais dificuldades e obstáculos a vencer. O diagnóstico prévio de possíveis lacunas no processo ensino-aprendizagem, podem ser supridas através da aplicação de novas estratégias dentro da própria seqüência didática.

A aplicação da metodologia da engenharia didática, através de uma seqüência didática planejada, organizada e articulada, incentivou a professora a adotar uma nova abordagem diante do processo de ensino da disciplina Matemática. Observou-se a partir do desenvolvimento da metodologia, que a análise deste processo atingiu os dois sujeitos da relação ensino-aprendizagem: a professora e os alunos. À medida que se identificava as dificuldades dos alunos, a professora buscava novas soluções para supri-las.

Neste sentido, concluiu-se que a Engenharia Didática torna-se, de acordo com suas fases, um processo contínuo de construção de conhecimento e investigação metodológica, favorecendo a construção e aquisição do conhecimento dos alunos e o aperfeiçoamento da experiência profissional da professora.

Apesar do conceito de proporcionalidade já ter sido abordado em diversos trabalhos científicos, o tema continua atual e interessante, pois fornece um raciocínio coerente, indutivo, proporcionando uma conexão entre diversos conteúdos da matemática, bem como outras áreas do conhecimento.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. *Didática das Matemáticas*. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4. p. 193-217.

ARTIGUE, M. (1988): “Ingénierie Didactique”. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, 281-308.

ÁVILA, G. Razões, proporções e regra de três. Revista do Professor de Matemática n 8, São Paulo, p. 1-8, 1986.

ÁVILA, G. Ainda sobre regra de três. Revista do Professor de Matemática n 9, São Paulo, p. 1-10, 1986.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Parâmetros Curriculares Nacionais de 6º ao 9º ano - Matemática. Brasília, 2016. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Guia de Livros Didáticos PNLD 2016 - Matemática. Brasília, 2016. Disponível em: <ftp://ftp.fnde.gov.br/web/livro_didatico/guias_pnld_2016_matematica.pdf>. Acesso em: 11 nov. 2016.

BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática*. 7 ano. 7ª ed. São Paulo: Moderna, 2013.

______. Matemática. 7 ano. 7ª ed. São Paulo: Moderna, 2015.

CARVALHO, A. M. P. e RUIZ, A. R. *O conceito de proporcionalidade*. (Artigo Científico) Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo,1990.

CASTRO, F. A. *A Relação da Proporcionalidade com Outros Temas Matemáticos*. Viçosa, 147 p. (Dissertação de Mestrado) - Universidade Federal de Viçosa - MG, 2015.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Editora da UNICAMP, 2004.

FERREIRA, R. C. *Conceito de Proporcionalidade: Uma proposta para o processo ensino-aprendizagem do 7º ano do ensino fundamental*. 65 p. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática. Universidade Federal do Maranhão - UFMA: 2013.

GONÇALVES, M.J.S.V. *Raciocínio Proporcional: Estratégias Mobilizadas por Alunos a partir de uma abordagem envolvendo a oralidade*. 193 p. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul - UFMS: 2010.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP. Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica - SAEB. Brasília. 2016. Resultado da

Prova Brasil 2015. Disponível em: <http://www.brasil.gov.br/educacao/2016/09/inep-apresenta-resultados-da-prova-brasil-2015>. Acesso em 12 out.2016.

JUNIOR, H. L. *As Diferentes Abordagens do Ensino da Proporcionalidade.* Curitiba, 29 p. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática. Universidade Federal do Paraná - UFPR: 2016.

MACHADO, S. D. A. (2008). ≪Engenharia Didática≫. In: MACHADO, S. D. A. (org). Educação Matemática: Uma (nova) introdução. EDUC 3ª ed. (São Paulo). pp. 233–247.

MARTINS, L. C. *Abstração Reflexionante e Aprendizagem de Proporção: Ensino de Matemática na sexta série.* 2007. 124 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

MARQUES, Cláudio e SILVEIRA. Ênio. *Matemática. compreensão e prática.* 7 ano. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2013.

BARROSO, J. M. et all. *MATEMÁTICA. construção e significado.* Org. Editora Moderna. São Paulo (2013)

MORESI, E. (Org). *Metodologia da Pesquisa.* Brasília: UNB. 2003. Disponível em: <http://www.inf.ufes.br/∼falbo/files/MetodologiaPesquisa-Moresi2003.pdf>. Acesso em: 14 out. 2016.

MOREIRA, M. A. *Pesquisa em Ensino: Aspectos Metodológicos.* Programa Internacional de Doutorado em Ensino de Ciências. Porto Alegre, 2003.

NUNES, T. *É hora de ensinar proporção.* Revista Nova Escola, São Paulo, n. 161, abr. 2005.

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP. Brasília, 2016. Disponível em: <http:// www.obmep.org.br>. Acesso em 15 out. 2016.

Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio - PAPMEM. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA. Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: <http://video.impa.br/index.php?page=papmem-julho-de-2013>.Acesso em 19 ago. 2016.

POMMER, Wagner Marcelo. *A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as equações lineares*, 2013. 72p.

PONTES, M. G. O. *Medidas e proporcionalidade na escola e no mundo do trabalho.* João Pessoa: ed. Ideia, 2009.v

Revista Nova Escola. São Paulo. ed. n. 234. ago. 2010. *quebra-cabeça da proporcionalidade.* Disponível em: <http://rede.novaescolaclube.org.br/planos-de-aula/quebra-cabeca-da-proporcionalidade. Acesso em 14 out.2016>

SOARES, M. A. da S e NEHRING. C. M. *Proporcionalidade: uma análise de livros* *didáticos do ensino fundamental - Artigo Científico.* VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Canoas - Rio Grande do Sul: 2013.

SOUZA, J. M. *A abordagem de conceitos de proporcionalidade sob a ótica da resolução de problemas.* Campo Grande, 94 p. (Dissertação de Mestrado). Instituto de Matemática. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2014.

SILVA, D. M. L. *Uma análise do ensino de proporcionalidade no ensino fundamental: realidade e perspectivas.* Dissertação de Mestrado. São Carlos, UFSCar: 2015. 88 p.

SILVA, A. E. *Pensamento Proporcional e Regra de Três: Estratégias utilizadas por alunos do ensino fundamental na resolução de problemas.* Curitiba, 210 p. (Dissertação de Mestrado). Universidade Tuiuti - Paraná, 2008

SCHLIEMANN, A. L. D., CARRAHER, D. *Razões e proporções na vida diária e na escola.* In: SCHLIEMANN, A. et al. Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife: UFPE. p.13-39, 1997.

SPINILLO, A. G. *Proporções nas séries iniciais do primeiro grau.* In: SCHLIEMANN, A. et al. Estudos em Psicologia da Educação Matemática.
Recife: UFPE. p.40-61, 1997.

VERGNAUD, G. *Multiplicative structures.* New York: Academic Press, 1983 apud SCHLIEMANN, A. et al.,1997.

APÊNDICE A – TERMO DE AUTORIZAÇÃO DA DIREÇÃO DA ESCOLA

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DA DIREÇÃO DA ESCOLA

À senhora Diretora da Escola Estadual Profª. Raimunda Virgolino – Macapá - Amapá.

Autorizo a mestranda **Rosely Rodrigues Rego Bitencourt**, aluna regularmente matriculada no Curso de Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade Federal do Amapá - UNIFAP/AP, para coletar dados neste Estabelecimento de Ensino, com vista a realização de sua Pesquisa de Mestrado, intitulada: "APLICAÇÕES DO CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE A PARTIR DA ENGENHARIA DIDÁTICA". O objetivo geral desta pesquisa é investigar processos de ensino-aprendizagem do conceito de proporcionalidade para alunos do 2º ano do Ensino Médio.

O presente estudo se justifica pela necessidade constante de se produzir conhecimento na área de ensino e aprendizagem em Matemática. Da mesma forma, os conhecimentos produzidos podem ser utilizados no dia-a-dia pelo professor no sentido de melhorar sua prática, levando o aluno a aprender os conteúdos de forma efetiva.

Tenho ciência que a coleta de dados pretende ser realizadas por meio de observações, questionários, bem como de atividades práticas e teóricas junto aos alunos do 2º ano do Ensino Médio do turno da manhã, nesta Instituição.

Pelo presente termo, declaro que autorizo a realização da pesquisa prevista na Escola Estadual Profª. Raimunda Virgolino – Macapá - Estado do Amapá.

Data:_____/_____/_____

____

Direção da Escola

____

Rosely Rodrigues Rego Bitencourt
Mestranda PROFMAT/UNIFAP

APÊNDICE B – TERMO DE AUTORIZAÇÃO DO ALUNO

Com o objetivo proposto de: “ aplicar o conceito de proporcionalidade a partir da Engenharia Didática com vistas ao aprendizado de alunos 2º ano do Ensino Médio, nos processos de ensino e de aprendizagem” que será desenvolvido na Escola Estadual Profª. Raimunda Virgolino – Macapá, Estado do Amapá, venho por meio deste, convidar-lhe a participar da pesquisa que faz parte da dissertação de mestrado desenvolvida no Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amapá - UNIFAP, tendo como Orientador o Professor Dr. Guzmán Eulalio Isla Chamilco.

Deste modo, no caso de concordância em participar desta pesquisa ou deixar participar (alunos menores), ficará ciente de que a partir da presente data:

- Os direitos da entrevista respondida (questionários), dos apontamentos registrados no diário de campo e das fotos realizadas em sala de aula pelo pesquisador, serão utilizados integral ou parcialmente, sem restrições.
- Estará assegurado o anonimato nos resultados dos dados obtidos, sendo que todos os registros ficarão de posse do pesquisador por cinco anos e após esse período serão extintos.

Será garantido também:

- Receber a resposta e/ou esclarecimento de qualquer pergunta e dúvida a respeito da pesquisa.
- Poderá retirar seu consentimento a qualquer momento, deixando de participar do estudo, sem que isso traga qualquer tipo de prejuízo.

Assim, mediante termo de Consentimento Livre e Esclarecido, declaro que autorizo minha participação nesta pesquisa, por estar esclarecido e não me oferecer nenhum risco de qualquer natureza. Declaro ainda, que as informações fornecidas nesta pesquisa podem ser usadas e divulgadas neste curso de Mestrado Profissional em Matemática da UNIFAP, bem como nos meios científicos, publicações eletrônicas e apresentações profissionais.

Rosely Rodrigues Rego Bitencourt Professora	Aluno(a) participante

Macapá-AP, Outubro de 2016.

APÊNDICE C – TESTE INICIAL

Teste 1 - O que você entende por proporcionalidade?

Quadro X: Comentários dos alunos entrevistados

Aluno/Professor	**Comentários**

Fonte: da autora (2017)

Teste 2 - O que são grandezas diretamente e inversamente proporcionais?

Quadro X: Comentários dos alunos entrevistados

Aluno/Professor	**Comentários**

Fonte: da autora (2017)

Teste 3: (PAPMEM/IMPA, 2013) - A quantia de R$ 10.000,00 aplicada na poupança por um certo período rendeu R$ 820,00. Qual será o rendimento se a quantia aplicada fosse R$ 15.000,00?

Quantia aplicada (R$) e rendimento são grandezas:

( ) Diretamente proporcionais

( ) Inversamente proporcionais

( ) Não proporcionais

Justifique sua resposta.

Teste 4 - (Silveira e Marques, 2013) - Um ciclista faz um treino para a prova de "1000 metros contra o relógio". Mantendo em cada volta uma velocidade constante, ele obtém um tempo correspondente, conforme a tabela a seguir:

Grandezas	
Velocidade (m/s)	**Tempo (s)**
5	200
8	125
10	100
16	62,5
20	50

Velocidade e tempo são grandezas:

( ) Diretamente proporcionais

( ) Inversamente proporcionais

( ) Não proporcionais

Justifique sua resposta.

Teste 5 - (Bianchini, 2013) Observe a tabela abaixo, a relação entre a idade e a altura média dos alunos de 1 a 6 anos na Escola Pequeninos.

Idade (em anos)	1	2	3	4	5	6
Altura média dos alunos (em cm)	73,2	84,1	91,9	99,1	105,9	112,2

A idade e a altura média são grandezas:

( ) Diretamente proporcionais

( ) Inversamente proporcionais

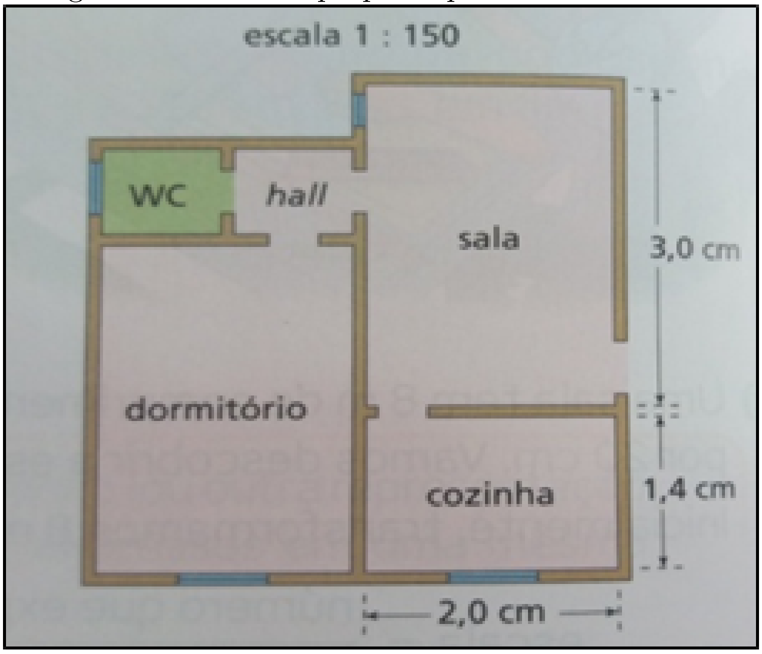
( ) Não proporcionais

Justifique sua resposta.

APÊNDICE D – TESTE FINAL

Teste 1: Observe a planta de um apartamento.

Figura 16: Desenho proposto para o Teste Final 1

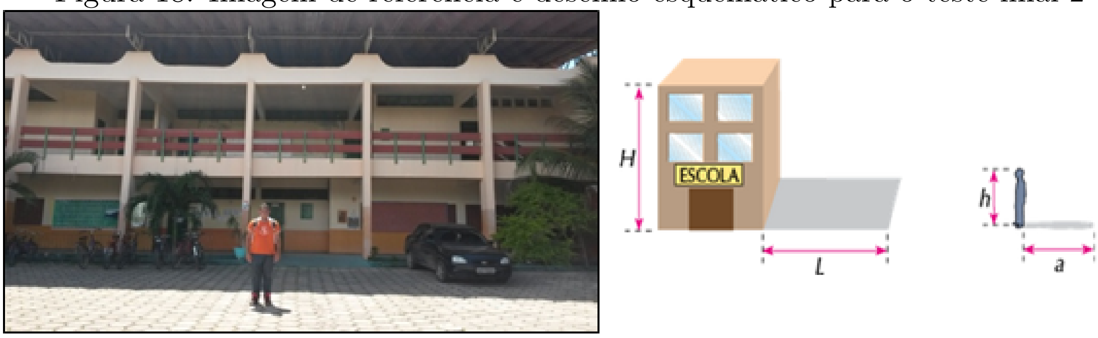


Fonte: Bianchini, 2013

Quais são as medidas reais da cozinha e da sala do apartamento?

Teste 2: O intervalo das aulas na Escola Raimunda Virgolino, no turno da manhã, ocorre exatamente às 10:00 horas. Neste momento, a sombra projetada no chão de um aluno mede 2,0 metros de comprimento, no mesmo instante que a sombra de um dos postes de iluminação do estacionamento da Escola mede 10,0 metros. Sabendo que a altura do aluno é de 1,70 metros, qual a altura do poste?

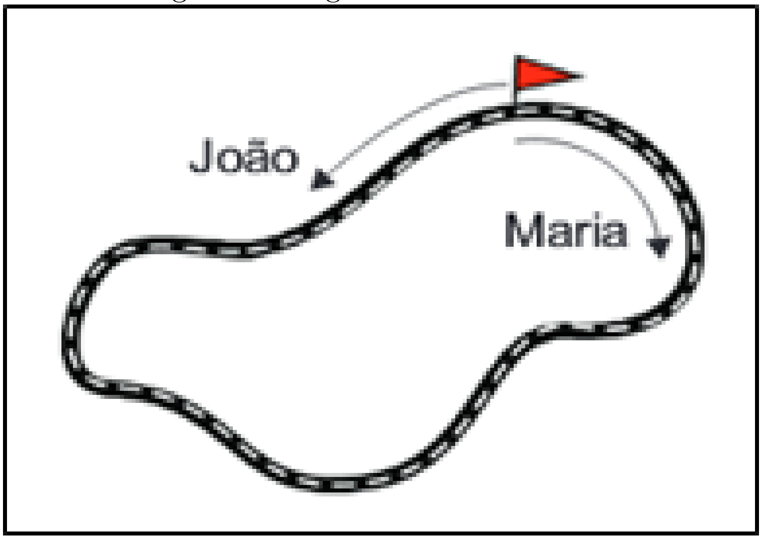
Figura 18: Imagem de referência e desenho esquemático para o teste final 2



Fonte: O autor (2017)

Teste 3: (OBMEP/2016 - Nível 2) João e Maria correm com velocidades constantes e em sentidos contrários a partir de um mesmo ponto da pista de 3.000 metros representada na figura. Depois de correr 1.200 metros, João encontra Maria pela primeira vez. Quando ele terminar a primeira volta, quantos metros ela terá corrido?

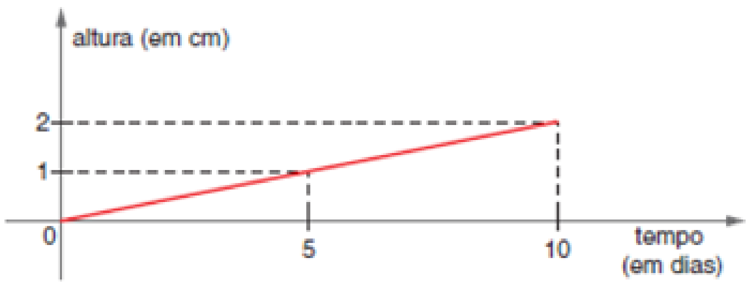
Figura 20: Figura do Teste Final 3



Fonte: OBMEP (2016)

Teste 4: (UERN/2015) Um botânico mede o crescimento de uma planta, em centímetros, todos os dias. Ligando os pontos, colocados por ele, num gráfico, resulta a figura abaixo.

Figura 22: Figura do Teste Final 4



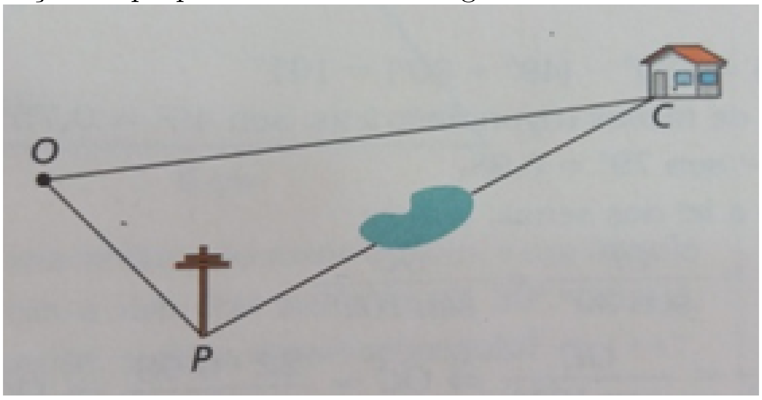
Fonte: Vestibular da Universidade Estadual do Rio Grande do Norte, 2015

Se mantida sempre essa relação entre tempo e altura, qual a altura da planta no trigésimo dia?

Teste Final 5: (Adaptado de Matemática: Construção e Significado, 2013. p, 33). Em algumas situações, por exemplo, na demarcação de terras ou no cálculo da altura de uma montanha, precisamos determinar distâncias cuja medição direta não é possível. É comum, então, recorrermos ao teodolito, um instrumento que mede ângulos, e às relações fornecidas pela trigonometria.

Considere que um fio elétrico será instalado entre um poste P e uma casa C, separados por um lago em um terreno plano. Observe o esquema que representa a situação

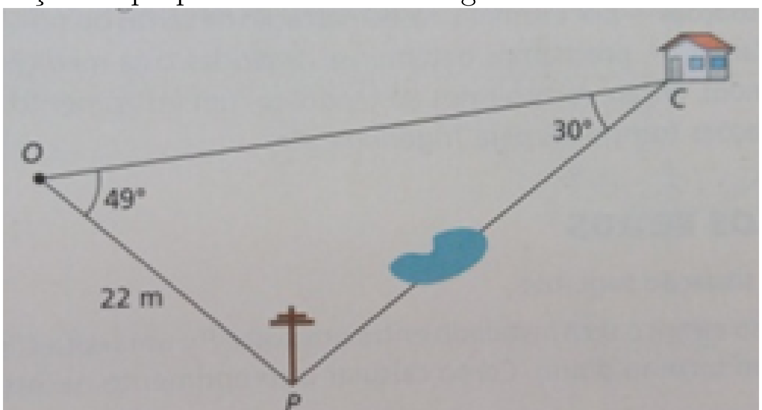
Figura 24: Aplicação da proporcionalidade na trigonometria de um triângulo qualquer



Fonte: Adaptado de Matemática: Construção e Significado, 2013

Posicionando um teodolito nos pontos O e C, foram medidos os ângulos PÔC e OCP. Com uma trena, mediu-se a distância OP, conforme ilustra a Figura 14 a seguir. Determine o comprimento necessário de fio CP. (Dados: $49^{o} \cong 0,75$ e $30^{o} = 0,5$).

Figura 25: Aplicação da proporcionalidade na trigonometria de um triângulo qualquer



Fonte: Adaptado de Matemática: Construção e Significado, 2013