UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANA PAULA GOMES CASTRO

UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DO NÚMERO DE OURO ATRAVÉS DO SOFTWARE GEOGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

MACAPÁ

2017

ANA PAULA GOMES CASTRO

UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DO NÚMERO DE OURO ATRAVÉS DO SOFTWARE GEOGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática do Curso de Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT / UNIFAP.

Orientador:
Prof. Dr. Guzmán Isla Chamilco.

MACAPÁ
2017

FICHA CATALOGRÁFICA

.... Castro, Ana Paula Gomes.

Uma proposta pedagógica para o Ensino do Número de ouro através do software Geogebra na Educação Básica / Ana Paula Gomes Castro – Macapá-AP, 2017.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Amapá – UNIFAP, 2017.

1.Aspectos Históricos da Razão Áurea. 2. O uso da Informática 3. A Proporção Áurea e algumas Construções no Software Geogebra.

I. Título.

106 p.

4

ANA PAULA GOMES CASTRO

UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DO NÚMERO DE OURO ATRAVÉS DO SOFTWARE GEOGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática do Curso de Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT / UNIFAP

Banca Examinadora

Prof. Dr.______________________________
Orientador: Guzmán Eulalio Isla Chamilco - UNIFAP

Prof. Dr.______________________________
Examinador: Anderson David de Souza Campelo - UFPA

Prof. Dr. ______________________________
Examinador:José Walter Cardenas Sotil – UNIFAP

Prof. Dr. ______________________________
Examinador: Erasmo Senger - UNIFAP

Macapá-AP, 05 de maio de 2017.

Dedico este trabalho às pessoas mais importantes de minha vida: a minha mãe Maria Eunice e as minhas filhas Ana Sophia e Ana Carolina.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos:

A DEUS.

Aos meus pais, especialmente a minha mão Maria Eunice, que está presente em todos os momentos importantes de minha vida, que não mede esforços para me ajudar em tudo que preciso.

A minha querida irmã Ana Carla.

Ao meu esposo Alfredo.

As minhas filhas Ana Sophia e Ana Carolina.

Aos meus professores.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Guzmán Isla Chamilco.

Aos meus colegas, em especial a minha amiga Maribene, que me incentivou e esteve comigo nas horas mais difíceis deste curso.

À CAPES e ao SBM pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

Muito obrigada!

"O saber "entra" pelos sentidos e não somente pelo intelecto".

Frei Betto

RESUMO: Este trabalho foi um estudo bibliográfico realizado sobre a importância e a aplicação do Software Geogebra na Educação Básica, para o Ensino Fundamental e Médio, com o objetivo de proporcionar melhoria no ensino da Matemática, no que se refere à Geometria e a Álgebra. Está organizado em três capítulos, embasados em teóricos da área de Matemática, como: Boyer (2005); Gundlach (1992); Eves (1992); Crespo (1996); Huntley (1985) e outros citados, que deram fundamentação teórica. O primeiro capítulo começa a partir dos aspectos históricos da Razão Áurea, dissertando desde os tempos mais remotos da antiguidade, a Matemática Áurea na Grécia Antiga e no Egito, a origem da proporção na Matemática grega, Leonardo de Fibonacci e a razão áurea, a sequência de Fibonacci e a proporção áurea, os conceitos matemáticos por trás do número de ouro, um pouco sobre razão e proporção, razão de dois números, proporção, a razão áurea através da divisão de segmentos geométricos, o retângulo áureo, a espiral logarítmica, o pentágono, o pentagrama e o triângulo áureo, a incomensurabilidade do pentágono regular, onde encontrar a razão áurea, a proporção áurea na natureza, a música e a secção dourada, o homem de Vitrúvio e o modulor (a razão áurea na arquitetura). Também o segundo capítulo, aborda sobre o uso da Informática, como ferramenta auxiliar com importante contribuição tecnológica para o ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Básica, visto que, está mencionado nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's, nos ciclos terceiro quarto do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, a adesão à utilização do Software educativo Geogebra, que possibilita realizar estudos de diversas figuras geométricas, assim como resolver problemas inerentes à Álgebra. O Software Geogebra na versão livre é simples, dinâmico e de fácil manuseio, que permite aos alunos, descobrirem infinitas possibilidades de exploração e criação de novos conhecimentos sem limites para a criatividade. Sendo isso, uma das razões que justifica a escolha para o desenvolvimento deste trabalho. O terceiro capítulo é sobre a proporção áurea e algumas construções no Software Geogebra, desenvolvido pelo professor Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburgna da Áustria. Também é feita a descrição dos comandos do Software Geogebra, a partir da tela inicial, formada pela barra de menus, barra de ferramentas, janela da Álgebra, janela da Geometria e barra de comandos. Em seguida foi proposto três blocos de atividades com instruções para manuseio, conforme demonstração nas figuras que acompanham.

Palavras-chave: Ensino Básico. Geogebra. Matemática.

RÉSUMÉ: Ce travail est un étude bibliographique réalisée sur l'importance et l'application du Logiciel Geogebra dans l'Éducation Basiquée, à l'intention des écoles primaires et secondaires, avec l'objective de fournir de l'amélioration dans l'enseignement des mathématiques, par rapport à la géométrie et l'algèbre. Il est organisé en troisième chapitres, base sur le domaine des mathématiques, tels que: Boyer (2005); Gundlach (1992); Eves (1992); Crespo (1996); Huntley (1985) et d'autres ont mentionné, qui a donné une base théorique. Le premier chapitre a commencé à partir de la Raison Áurea, en discourant depuis les temps passé de l'antiquité; la Mathématiques Áurea en Grèce Antiquée et dans l'Égypte; l'origine de la proportion dans la Mathématiques grec; Leonardo de Fibonacci et la raison áurea; une séquence de Fibonacci et la proportion áurea; les conceptes mathématiciens par derrière de le nombre de l'or; un peu sur raison et proportion, la raison de deux nombres, proportion, la raison áurea parmi de la division des segments géométriques, le rectangle áureo, une spiral logaritmique, le pentgone, le pentagrame et le triangle áureo, l'incommensurabilidé de le pentagone reguilier, oú trouver la raison aurea, la proportion áurea dans la nature, la musique et une suite dourada, l'homme de Vitrúvio et le moduler (la raison áurea dans l'architecture). Aussi le deuxième chapitre, fait attention au usage de l'Informatique comme outillage auxiliaire avec important contribution técnologique pour l'enseignement et apprantissage de la Mathématiques dans l'Éducation Basique, vu que, est mencione dans le Paramètres Curruculares Nationalles – PCN'S, dans les cicles troisième et quatrième dans l'Ensigne Primaire et dans l'Ensigne Sécundaire, l'adhésion à l'application de logiciel éducatif Geogebra, qui permet de réaliser des études de divers figures géométriques, assimilées, résoudre des problèmes inhérente à Álgebra. Le Logiciel Geogebra en version libre est simple, dynamique et de facile maniement, qui permettent aux élèves, découvert infinités possibilités d'exploration et création de nouveaux savoirs sans limites pour la créativité. En étant celui-ci, une dans les raisons que justifie une choix pour le développement celui-ci travail. Le troisième chapitre est relatif à la proportion áurea et quelques constructions dans le Logiciel Geogebra, développement par le professeur Markus Hohenwarter, de l'Université de Salzburgna de l'Austria. Aussi est fait la description des commandes de le Logiciel Geogebra, à partir de la tele initial, formée par la barre de menus, barre d'outillage, la fenêtre de l'Algebra, la fenêtre de la Géométrie et la barre de le commandes. Ensuite, a été propose trois blocs d'activités, avec instructions pour maniement, selon démonstration dans les figures qui accompagnent.

Mots-clés: Enseignement Basiquée. Geogebra. Mathématiques.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No mundo atual, na chamada sociedade da informação, diante de tanta tecnologia e mudanças sociais, políticas, econômicas, mudança de valores, crenças, costumes e outros, percebe-se que o processo ensino-aprendizagem não conseguiu acompanhar no mesmo ritmo, principalmente em relação a disciplina Matemática.

Neste processo, uma questão relevante, que merece atenção, é a relação entre os conteúdos teóricos e a aplicação nas diferentes disciplinas exigidas pelo currículo do ensino básico e também no cotidiano do aluno. Essa relação não está bem definida na prática do professor em sala de aula. Em consequência, quando analisamos as avaliações feitas em sala e também as principais avaliações do Brasil e do mundo, percebemos que muitos educandos demonstram dificuldades não somente no aprendizado, mas principalmente, na ligação do conteúdo teórico com a sua função prática no cotidiano. Esses resultados desmotivam o aluno levando-o ao desinteresse em estudar conteúdos matemáticos. Neste contexto, o professor sente a necessidade de implementação de mudanças nos métodos educacionais evidenciando a utilização de recursos metodológicos fazendo com que a aprendizagem se torne mais significativa para o aluno.

O trabalho do docente necessita ter por alicerce não somente a teoria, mas também a prática, como recurso inovador, motivador e satisfatório, onde se admita o envolvimento direto do aluno, sendo ele um agente ativo na construção do processo de ensino-aprendizagem.

Diante deste cenário sobre o ensino da matemática, propomos o estudo da Razão Áurea na Educação Básica tendo em vista que este assunto possui várias aplicações em outras áreas além da Matemática como na arte, na arquitetura, na música, literatura, entre outros campos e também envolve vários conceitos matemáticos, como razão, proporção, semelhança e recorrência. O primeiro capítulo deste trabalho parte de aspectos históricos da Razão Áurea e envolve consequentemente o número Phi ($\emptyset$) ou Número de Ouro, procurando motivar os alunos a se interessarem pelo estudo de matemática por meio da curiosidade que estes números apresentam. Também aborda-se a origem do número de ouro, citando Leonardo de Fibonacci e sua sequência de números, conceitos matemáticos por traz do número de ouro e também onde se pode observar a razão áurea na natureza exemplificado principalmente pelas medidas geométricas do homem de

Vitrúvio. O segundo capítulo busca apresentar o uso da informática, como ferramenta auxiliar para o desempenho do ensino aprendizado de professores e alunos nesta modalidade de ensino, visto que, alguns teóricos como Moreira (2003); Borba e Penteado (2007), da área da matemática, defendem o uso das novas tecnologias na educação, como mediações entre abordagem, compreensão e conteúdo veiculado na sala de aula, através de softwares matemático educativo, vinculado a uma ação pedagógica, como é o caso do Geogebra, que possibilita trabalhar de forma dinâmica em todos os níveis da Educação Matemática, pois, esta modalidade já está com respaldo nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's, terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, podendo com o software Geogebra, realizar o estudo de Figuras Planas, Perímetros, Áreas, Medida de Ângulos, os Teorema de Tales e Pitágoras, Razão e Proporção, Definição de: Ponto Médio, Mediatriz, Segmento de Reta, Reta Perpendicular, Teorema Fundamental da Semelhança, Eixos coordenados e Plano Cartesiano.

Procede-se também as sugestões para aplicação do *software Geogebra* no Ensino Médio da seguinte maneira: a) No primeiro ano: noções de funções, trigonometria do triângulo retângulo. Geometria plana (semelhança, congruência e representações de figuras planas); b) no segundo ano: funções trigonométricas. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta. Comprimentos, perímetros e áreas; c) no terceiro ano: geometria analítica: representações do plano cartesiano; equações; interseção e posições relativas às figuras planas e números irracionais.

O Software Geogebra com versão livre pode ser utilizado tanto na Geometria como na Álgebra, pois, o mesmo possui um manuseio simples e dinâmico, que permite aos alunos, descobrirem possibilidades de exploração e criação de novos conhecimentos sem limites para a criatividade.

O terceiro capítulo discute sobre a proporção áurea e algumas construções no Software Geogebra, que inclui Geometria, Álgebra e cálculo, desenvolvido pelo professor Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburgna da Áustria, para ser aplicado na educação matemática nas escolas. Também é feita a descrição dos comandos do Software Geogebra, a partir da tela inicial, formada pela barra de menus, barra de ferramentas, janela da Álgebra, janela da Geometria e barra de comandos, identificado pela figura 37, assim como todos os botões da barra de comando, que aparecem na janela da Álgebra, como na janela da Geometria, identificadas por figuras numeradas na sequência de 37 a 100, com três blocos de atividades, que somam 57 exercícios com instruções para manuseio, conforme demonstrado nas figuras citadas.

Desta forma o trabalho buscou explicar a construção do número de ouro, sua importância e como utilizar na sala de aula com os alunos do Ensino Fundamental e Médio da Educação Básica, através do software Geogebra com destaque para a melhoria do ensino e aprendizagem da matemática.

1 ASPECTOS HISTÓRICOS DA RAZÃO ÁUREA

Durante toda sua existência o homem buscou explicar e encontrar razões para tudo que o cerca, foi na matemática que ele encontrou sua ferramenta mais importante nesta sua busca por respostas, pois, é através dela que homem procura compreender o mundo que está em sua volta. Para os Pitagóricos era um artigo de fé fundamental que a essência de tudo estava na geometria. As questões práticas e teóricas da vida do homem podiam ser explicadas em termos de números, ou das propriedades intrínsecas dos inteiros e suas razões.

Os diálogos de Platão (427 – 347 a. C) mostram, porém, que a comunidade matemática grega fora assombrada por uma descoberta que praticamente demolia a base da fé pitagórica nos números inteiros. Era uma descoberta que na própria história da geometria, os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmo, simples propriedades básicas, pois, não bastava fazer comparações da diagonal de quadrado ou de pentágono com seu lado. Os segmentos eram incomensuráveis, por quanto pequena que a unidade de medida se tornasse.

> A descoberta dos incomensuráveis tinha ameaçado a matemática de uma crise lógica, lançando dúvidas sobre provas que usassem proporcionalidade, mas a crise foi enfrentada com sucesso, graças aos princípios enunciados por Eudoxo. Mesmo assim a matemática grega tendia a evitar as proporções (BOYER, 2005, p. 77).

Segundo Boyer (2005), essa descoberta é geralmente atribuída aos pitagóricos mais especificamente a Hipasus de Metapontum[1], porém ainda não se sabe onde, nem quando essa descoberta ocorreu. Há ainda argumentos antigos a favor de uma origem hindu da descoberta, mas não têm base e parece improvável que o próprio Pitágoras conhecesse o problema de incomensurabilidade.

De acordo com Gundlach (1992), faltam detalhes a respeito da descoberta da existência de quantidades incomensuráveis, mas é visível que para os gregos antigos foi tão difícil aceitar as quantidades incomensuráveis quanto descobri-las.

O conceito de incomensurabilidade é correspondente ao de número irracional na nomenclatura da Matemática Contemporânea. Sempre que dois segmentos de

---

[1]Hipasus de Metapontum ou Hípaso Metaponto, matemático grego, nascido em Metapontum, cidade grega do sul da Itália. Viveu em 470 - 425 a. C. Hipasus foi o descobridor dos números incomensuráveis, foi também o responsável por mudanças significativas na matemática grega do século V a. C.

reta estão na situação de incomensurabilidade, o que quer dizer que não têm medida comum, dizemos que esta medida é representada por um número irracional. É o caso do número de ouro, que é um número irracional e seu reconhecimento é muito remoto. Ele existe há tanto tempo quanto nossos registros históricos conseguem alcançar. Há vários escritos desde a antiguidade em que é possível mostrar a presença desse número.

O número de ouro é representado pela letra grega ∅ (Phi), em homenagem ao Escultor e Arquiteto grego Phidias (490 - 430 a. C.), que foi o responsável pela construção do Templo de Parthenon em Atena. Segundo Livio (2006), foi o Matemático americano Mark Barr que, numa homenagem póstuma a Fídias, decidiu homenagear o escultor. Barr o fez porque alguns historiadores da arte sustentavam que Fídias fazia uso frequente e meticuloso da Razão Áurea nas suas esculturas. De fato, a Razão Áurea pode ser encontrada nas maiores realizações de Fídias: o "Partenon de Atenas" e "Zeus" no templo de Olímpia. As designações "razões áureas' e "número de ouro" aparecem pela primeira vez em meados do século XX em trabalhos alemães.

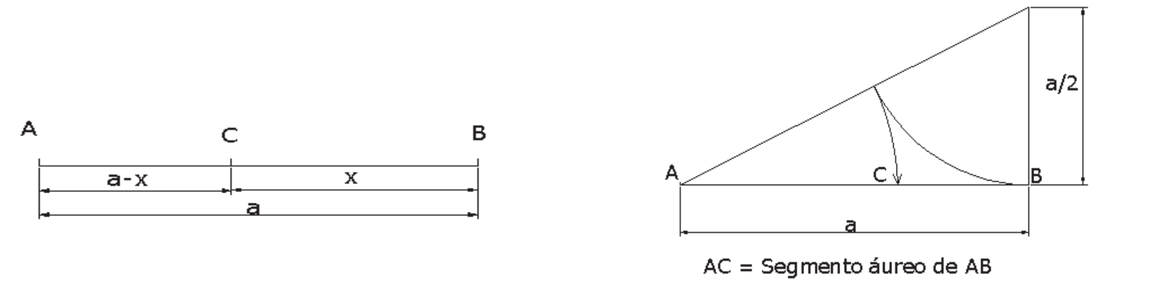
O número de ouro simboliza, desde os tempos antigos, o equilíbrio e a harmonia, estando intimamente ligado à arte até os dias atuais. Embora haja registros de que a razão áurea já vinha sendo utilizada no Egito antigo há vários séculos antes de ter sido descoberta pelos gregos, foi um matemático grego o primeiro a escrever oficialmente sobre o assunto. Euclides de Alexandria[2] (360–295 a.C.) em "Os Elementos", a obra mais influente de toda a história da matemática, descreveu a secção áurea em sua proposição 4 do Livro Décimo Terceiro. (Fig. 01).

> Se se corta uma linha reta em extrema e média razão, o quadrado da reta inteira e o do segmento menor juntos são o triplo do quadrado do segmento maior. (www.institutomathesiano.com.br/sobre-os-elementos-de-euclides).

Como podemos observar a seguir, onde $\overline{AC} < \overline{BC}$, $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = x$:

[2] Euclides de Alexandria – Matemático grego que ficou conhecido pelo seu mais famoso trabalho "Os Elementos", obra que compunha 13 volumes. Pouco se sabe sobre sua vida, apenas que ensinou na escola fundada por Ptolomeu em Alexandria (306 – 283 a. C), não se sabe ao certo nem seu nome, pois, nem o local de seu nascimento é associado a ele, é conhecido como Euclides de Alexandria, porque foi chamado por Ptolomeu para ensinar matemática, nesta cidade grega.

Figura 01: Construção gráfica da secção áurea



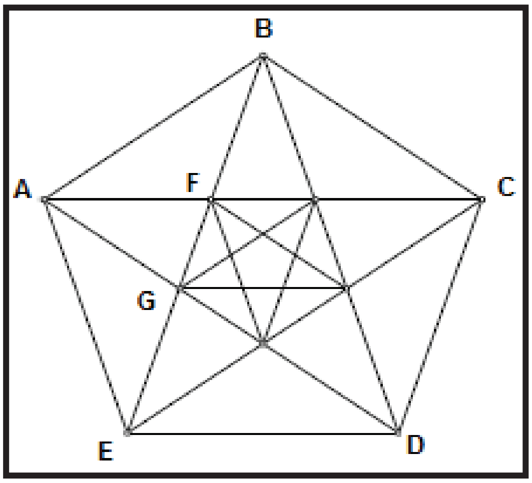
$a^2 + (a\text{-}x) = 3x^2$, o que resulta: $\frac{x}{(a-x)} = \frac{a}{x}$

Fonte: http://geometriabomd.blogspot.com.br/2011/03/seccao-aurea-tambem-chamada-de-razao.html.

O número de ouro é considerado como sendo a "proporção divina" e foi utilizado ao longo do tempo, em vários contextos, tais como: na grande pirâmide de Gizé, onde a razão entre a altura de uma face e a metade do lado da base é quase 1, 618. No número de abelhas macho e abelhas fêmeas de qualquer colmeia do mundo, em que a razão vai ser sempre igual 1, 618, e em vários outros segmentos da natureza que estudaremos ao longo deste trabalho. É possível o homem compreender a harmonia existente na natureza após séculos de observações e de teorias. Apesar da descoberta do número áureo ter sido atribuída a Hipasus de Metapontum, discípulo de Pitágoras, foi só muito tempo depois, acerca de muitas investigações sobre o assunto que a razão áurea ganhou forma conhecida extraída da sequência de Fibonacci, a qual será abordada posteriormente.

Não se sabe ao certo como Hípaso de Metaponto observou os irracionais pela primeira vez, mas há quem estabeleça uma conexão do teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo isósceles. Há também indícios de uma prova da incomensurabilidade da diagonal de um quadrado com seu lado, cuja demonstração se baseava na distinção entre números pares e impares. Porém, há outras maneiras pelas quais a descoberta pode ter sido feita. Uma delas poderia ter sido por meio da observação das cinco diagonais traçadas de um pentágono regular, onde as diagonais estão na proporção áurea dos lados; as diagonais se seccionam mutuamente na proporção áurea; são áureos os cinco pequenos triângulos correspondentes às 5 pontas do pentagrama; a razão entre o lado do pentágono externo e o lado do pentágono interno é igual a $\emptyset^2$. (Fig. 02).

Figura 02: Pentágono regular com o pentagrama circunscrito



Fonte: http://docslide.com.br/documents/a-proporcao-aurea-eng-fidencio-maciel-de-freitas.html.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DE}} \ e \ \frac{\overline{AB}}{\overline{GF}} = \emptyset^2$$

1.1 A MATEMÁTICA ÁUREA NA GRECIA ANTIGA E EGITO

A Grécia foi o berço de muitas ciências e, não foi diferente com a matemática. Da Grécia saíram os grandes nomes da matemática que são consagrados até os dias atuais no mundo inteiro, porém, não foi apenas na Grécia que a matemática se desenvolveu. Ela teve destaque também na Babilônia e Antigo Egito, mas a matemática grega se diferenciava das anteriores, pois, contrário a estas, os gregos criaram uma ciência propriamente dita, sem se preocuparem com as aplicações práticas.

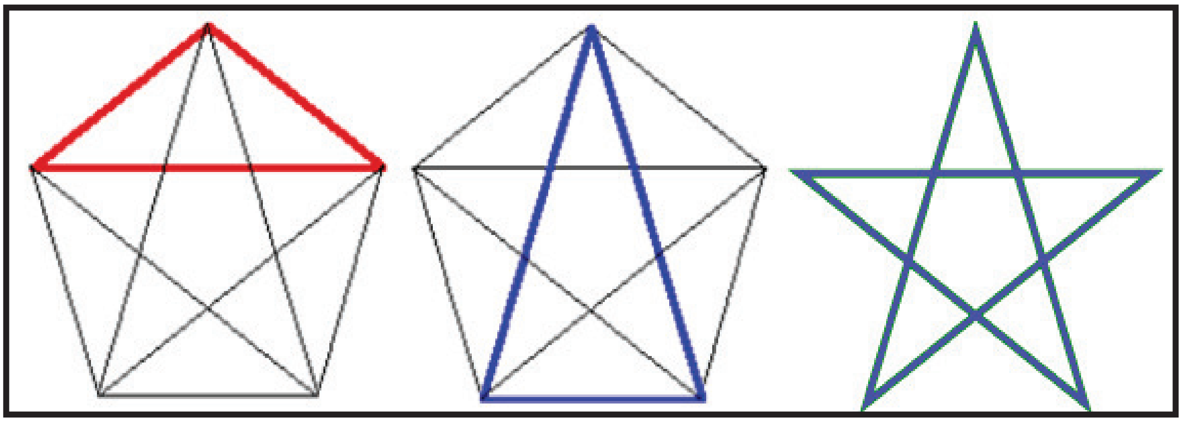
> Os gregos não hesitavam nada em absorver elementos de outras culturas, de outra forma não teriam aprendido tão depressa como passar à frente de seus predecessores, mas a tudo que tocavam davam mais vida (BOYER, 2005, p. 31).

A matemática grega se distingue das outras, por ter levado em conta problemas relacionados com processos infinitos, movimento e continuidade, dando assim origem ao método axiomático, devido às diversas tentativas de solucionar tais problemas. Método este, que admite como verdadeiras certas proposições, ditas axiomas (evidências), até que se chegue a proposições mais gerais.

Não são certos os motivos pelos quais os gregos desviaram-se da Álgebra e caminharam rumo a geometria, é provável que tenha sido pelas dificuldades encontradas justamente em estudarem problemas relativos a processos infinitos, principalmente sobre os números irracionais; quanto à geometria, pode-se dizer que teve origem com as medições de terra no Antigo Egito.

Os sumérios conheciam geometria, a raiz quadrada e a cúbica. Porém, não é certo se usavam a proporção áurea. Já na Grécia, foi muito utilizada na arquitetura e na arte por escultores. É possível que Pitágoras a tenha conhecido durante sua longa estada no Egito. É certo que o próprio Pitágoras fazia uso dos símbolos da escola pitagórica. Símbolos estes que até hoje são usados no mundo inteiro, como por exemplo, o pentagrama, que é a estrela de cinco pontas formadas pelas diagonais do pentágono regular, como pode ser observado na figura 03.

Figura 03: Diagonais do Pentágono Regular; o Triangulo e Pentagrama Áureo.



Fonte: http://docslide.com.br/documents/a-proporcao-aurea-eng-fidencio-maciel-de-freitas.html

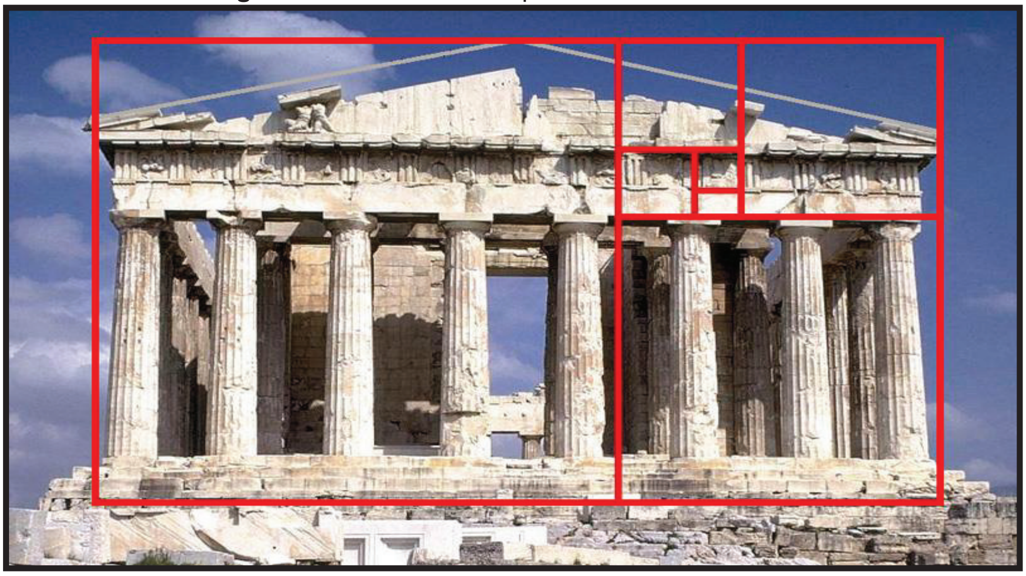
O pentagrama compõe o símbolo do islamismo, religião aderida por cerca de 20% da população mundial, e compõe principalmente as bandeiras dos países mais influentes do mundo, tendo diversos significados. É usado inclusive nas moedas de vários países, como no Real, que trazem 5 pentagramas, o Dólar, o Euro, o Franco suíço e muitos outros que trazem esta marca. A maçonaria também tomou emprestado o simbolismo da Proporção Dourada em seus ensinamentos.

O número mais famoso e misterioso da natureza está presente para onde quer que olhemos. Aparecem em obras de arte, em galáxias, flores e voos de aves. A arquitetura grega está repleta dele por todos os lados inclusive nas esculturas.

Segundo Eves (1992), “as propriedades estéticas e artísticas dessa razão são mostradas no retângulo áureo – um retângulo, cujos lados estão na razão de 1 para phi ou/e phi para 1. Esse retângulo, entre todos os possíveis é considerado por alguns o mais agradável aos olhos [...]”. Phidias usou a divisão áurea em todo o Parthenon: na fachada frontal, na lateral e na projeção.

O Parthenon é uma das mais conhecidas construção da Grécia Antiga, que resistiu até os dias atuais. Sua ideia é atribuída a Péricles, um dos principais líderes democráticos de Atenas, que iniciou uma série de obras públicas (entre elas, a construção do Partenon) após um saque à cidade feito por tropas persas. Sua construção foi uma homenagem à deusa Atena, patrona da cidade. É o maior templo de todo o continente e o mais admirado entre eles. Fora erguido em 447 - 408 a. C., em substituição ao que havia sido destruído durante saque persa. Há vários exemplos sobre o modo como o retângulo áureo se ajusta à construção do Parthenon, como podemos observar na figura 04.

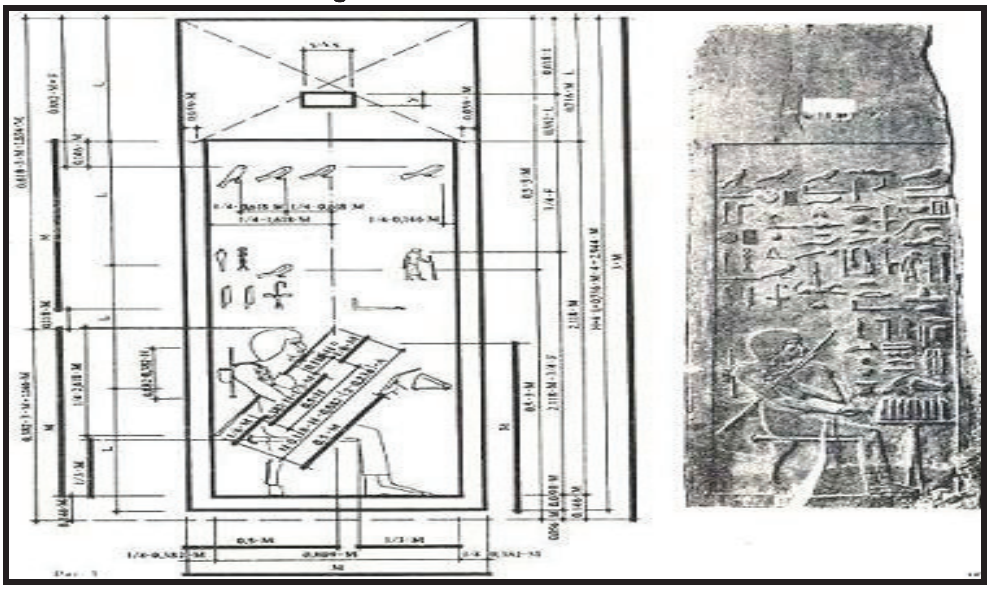
Figura 04: Frente do Templo “Parthenon” – Grécia



Fonte: http://ximene.net/home/research-topics/religion/earlier-religions/chi-rho/

A proporção áurea também foi muito estudada e utilizada no Antigo Egito. Há indícios de que até mesmo bem antes dos gregos terem descoberto os segmentos incomensuráveis. Como cânone arquitetônico, foi encontrada na tumba de Khesi-Ra, sábio egípcio que viveu por volta de 2700 a.C.. É incrível que este sábio, naquela época, já tivesse o conhecimento da proporção áurea e do teorema de Pitágoras.

Figura 05: O cânone de Khesi-R



a

Fonte: http://docslide.com.br/documents/a-proporcao-aurea-eng-fidencio-maciel-de-freitas.html

Há outros registros do uso da proporção áurea na antiguidade egípcia**.** Um dos primeiros registros que se tem conhecimento sobre a Razão Áurea data aproximadamente1650 a.C., no papiro de Rhind, um documento em escrita hierática, no qual constam um texto matemático na forma de manual prático contendo 85 problemas copiados por um escriba egípcio chamado Ahmes de um trabalho ainda mais antigo. Neste documento é citada uma “razão sagrada”, que acredita tratar-se da Razão Áurea. O papiro encontra-se hoje no museu britânico, medindo 5,5 metros de comprimento e 0,32 metros de largura.

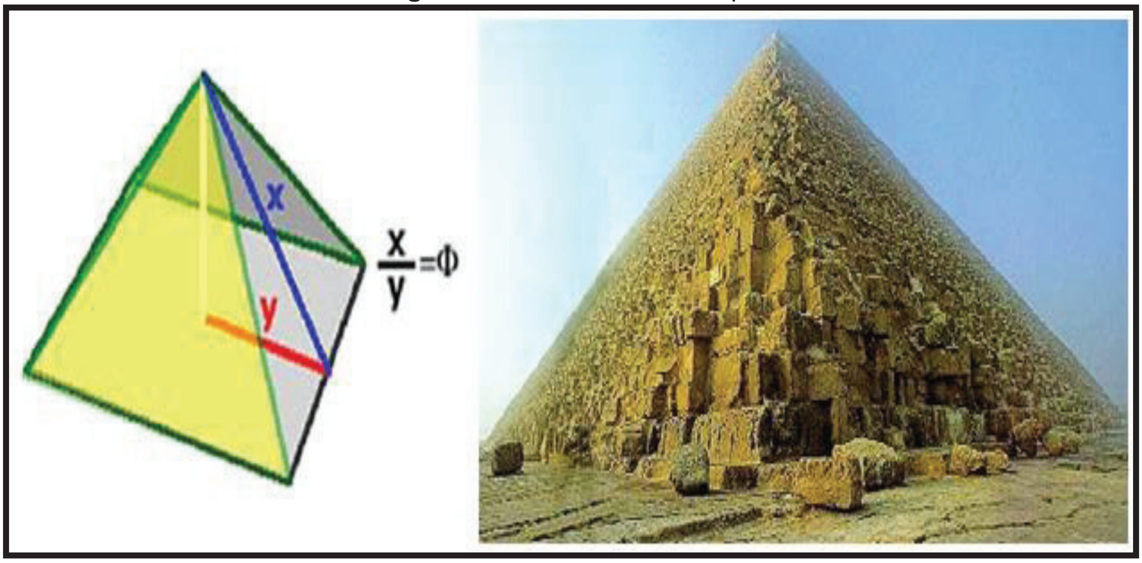
A razão áurea se faz presente também, na construção das pirâmides de Gizé no Egito. A Pirâmide de Quéops, também conhecida como a Grande Pirâmide de Gizé ou simplesmente Grande Pirâmide, é a mais antiga e a maior das três pirâmides na Necrópole de Gizé, na fronteira de Gizé, no Egito. É uma das Sete Maravilhas Antigas do Mundo, ao mesmo tempo é a mais completa e perfeita no Antigo Egito. Foi construída por volta de 2.600 a.C. para ser a tumba do Faraó Quéops ou Khufu. Um dos mistérios ainda não completamente resolvidos sobre a pirâmide de Gizé diz respeito à sua própria construção. Como os egípcios levantavam aqueles pesados blocos de pedra que, em média, pesavam cerca de três toneladas? Para responder essa questão, os cientistas trabalham com duas teorias. A primeira sugere que cada pedra era deslocada com o uso de embarcações ao longo do rio Nilo. Outra teoria cogita que os blocos tivessem sido construídos pelos próprios egípcios com o uso de um tipo de cimento. Embora de natureza mística, para a construção dessas pirâmides, usou-se uma série de conhecimentos de trigonometria voltados às dimensões da terra redonda e projeções celestiais.

Ao longo de muito tempo o cálculo original da altura da pirâmide de Quéops foi causa de polêmica entre diferentes matemáticos e arqueólogos de todas as partes do mundo.

> O historiador grego Heródoto relata que os sacerdotes egípcios disseram que na pirâmide de Giseh, a razão entre suas dimensões é Phi (EVES, 1997, p. 44).

Nos dias atuais a razão que é encontrada não chega a 1,6. É provável que na antiguidade este quociente tenha sido ∅ = 1, 6180339887... pois, muitos séculos se passaram e a altura da pirâmide diminuiu com o tempo medindo atualmente 137 metros.

Figura 06: Pirâmide de Quéops



Fonte: http://docslide.com.br/documents/a-proporcao-aurea-eng-fidencio-maciel-de-freitas.html

Inicialmente as medidas originais da pirâmide de Quéops eram 230 metros de lado da base e altura de 146,6 metros, com estas informações é possível chegar a um valor aproximado de phi, aplicando o teorema de Pitágoras. Assim, de acordo com a figura 07, temos que:

$$x^2 = h^2 + y^2$$

$$x^2 = 146{,}6^2 + 115^2$$

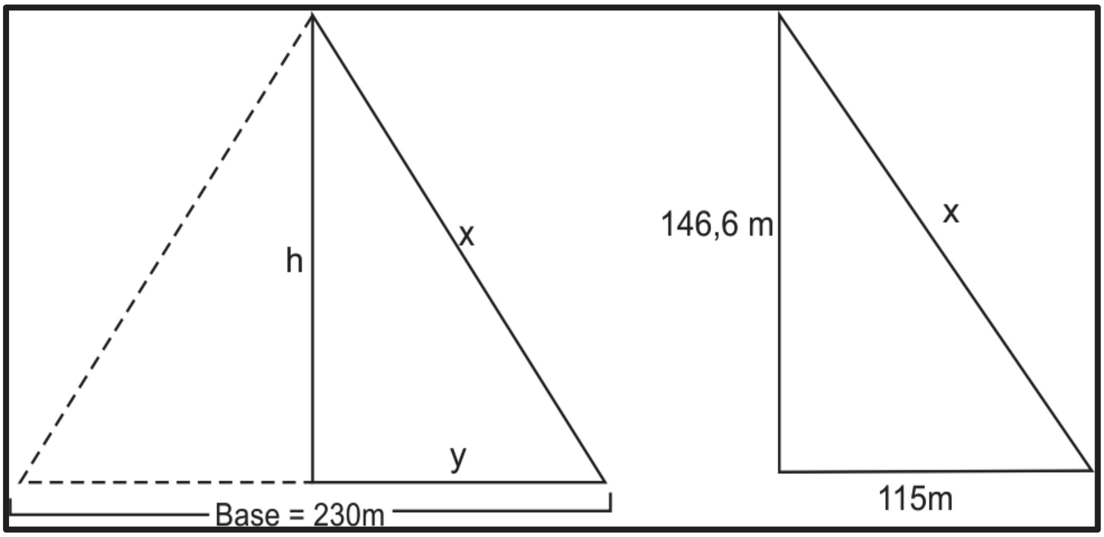
$$x^2 = 21491{,}56 + 13225$$

$$x^2 = 34716{,}56$$

$$x = \sqrt{34716{,}56}$$

$$x = 186{,}32$$

Figura 07: O teorema de Pitágoras e a pirâmide Quéops.



Fonte: Construção do próprio autor

Agora podemos encontrar o quociente entre a altura de uma das faces e a metade do lado da base da grande pirâmide:

$$\frac{x}{y} = \frac{186{,}32}{115}$$

$$\frac{x}{y} = 1{,}6201739\ldots$$

1.2 A ORIGEM DA PROPORÇÃO NA MATEMÁTICA GREGA

Nas civilizações da antiguidade, a arquitetura, a arte e a filosofia sempre estiveram ligadas a conceitos religiosos, de vida e morte, sendo comum haver vínculo entre política e religião. Foi na Grécia Antiga que o homem encontrou a liberdade necessária para expressar seus pensamentos, sem que fosse necessário restringir-se a uma verdade oficial. Assim surgiram na Grécia as origens do pensamento matemático como ciência teórica. Foi em meio a este cenário com um misto de política e religiosidade que Pitágoras fundou sua escola, berço de muitas descobertas matemáticas aclamadas até os dias atuais.

As buscas incessantes do porquê do homem e da infinidade de elementos existentes na natureza serem tão harmônicos, podem ser obtidas através de ordem e relações entre números e combinações, na tentativa de explicar a perfeição existente entre os mesmos. Neste contexto, o número de ouro, através da razão áurea, é fator determinante no que cabe a esta questão.

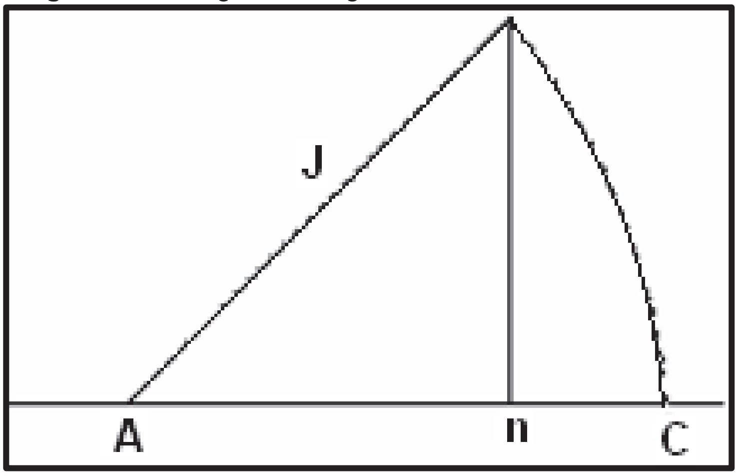
Segundo Gundlach (1922), na escola pitagórica, os estudos desenvolvidos por Pitágoras e seus seguidores eram fundamentais à geometria, à aritmética, à música e à astronomia. O elemento básico de todos era o número – não em seus aspectos práticos, computacionais, mas como a própria essência de sua natureza.

Não se sabe ao certo se a descoberta das grandezas incomensuráveis ou ditas irracionais foi a causa do afastamento de Hipasus da escola de Pitágoras, já que a escola pitagórica era extremamente conservadora, tendo no bojo um código de conduta rígido e inflexível. O que se tem certeza é que Hipasus confirmou matematicamente sua descoberta demonstrando que o número raiz quadrada de dois ou raiz quadrada de cinco, jamais poderia ser expresso como um número racional. Além de fazer a demonstração, ele divulgou a notícia para pessoas que não eram membros da irmandade pitagórica. Essa descoberta irreversível na matemática praticamente demoliu a crença que os pitagóricos tinham nos números inteiros, os obrigando a abandonar esta filosofia, abrindo-se portas para que os matemáticos gregos desenvolvessem novas teorias.

> Tratava-se de uma descoberta que na própria geometria os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmos simples propriedades básicas. Não bastam, por exemplo, para comparar a diagonal de um quadrado ou de um cubo ou de pentágono com seus lados (BOYER, 2005, p. 50).

Aceitando ou não essa afirmação, é notável que os pitagóricos desempenharam um papel importante, talvez imprescindível, na história da matemática. Hipasus fez uso do teorema de Pitágoras para demonstrar a questão da incomensurabilidade no triângulo isósceles retangular. Ele provou que não existe número comensurável que corresponda a um ponto C da reta, no caso em que o segmento $\overline{AC}$ seja igual à base.

Figura 08: Triângulo Retângulo Isósceles de lado unitário.



Fonte: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_IV/numero_de_ouro.pdf

1.2 LEONARDO DE FIBONACCI E A RAZÃO ÁUREA

É impossível falar de razão e proporção áurea e não mencionar Leonardo de Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa, matemático e comerciante da idade média que escreveu seu nome na história, nascido em Pisa na Itália, por volta de 1175. Fibonacci ficou conhecido com a publicação do livro Líber Abacci (Livro do Ábaco), no ano de 1202. Essa obra trazia problema envolvendo a população de coelhos. Ele foi o primeiro a introduzir por meio deste livro o sistema de numeração Hindu-arábico na Europa da Idade Média.

O Líber Abacci, foi de fundamental importância para a transmissão do sistema de numeração hindu-arábico na Europa, pois, devido ao seu conteúdo teórico ser praticamente todo ilustrado com muitos problemas que representam grande parte do livro, porém, não alcançou as massas populares.

> O Líber Abacci trata muito mais de números que de geometria. Descreve primeiro "as nove cifras indianas", juntamente com símbolo 0, "chamado zephirum em árabe". Incidentalmente é de zephirum e suas variantes que derivam nossas palavras. "cifra" e "zero". A exposição de Fibonacci da numeração indo-arábico foi importante no processo de transmissão; mas, como vimos, não foi à primeira dessas exposições, nem alcançou a popularidade (BOYER, 2005, p. 173)

1.2.1 A Sequência de Fibonacci e a Proporção Áurea

O problema com a criação de coelhos, proposto por Fibonacci, consistia em saber quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir de segundo mês. Esse problema deu origem à famosa sequência de Fibonacci, matemático da Idade Média, que a estudou a fundo observando que, nesta sequência os dois primeiros termos são iguais a 1 e cada termo é igual à soma dos dois termos imediatamente anteriores:

Assim, a sequência de Fibonacci é da forma:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Segundo Gundlach (1992), em 1611 o matemático Johann Kepler observou o que certamente Fibonacci já sabia, que: $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$., Onde f_n é o enésimo número de Fibonacci e $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$.

O número de ouro é encontrado no quociente da divisão dos termos da sequência de Fibonacci, de modo que a cada divisão realizada, o quociente tende infinitamente para o quociente áureo perfeito. Assim temos:

Números de Fibonacci	Razão entre os números
0 + 1 = 1	$\frac{1}{1} = 1$
1 + 1 = 2	$\frac{2}{1} = 2$
1 + 2 = 3	$\frac{3}{2} = 1{,}5$
2 + 3 = 5	$\frac{5}{3} = 1{,}666\ldots$
3 + 5 = 8	$\frac{8}{5} = 1{,}6$
5 + 8 = 13	$\frac{13}{8} = 1{,}625$
8 + 13 = 21	$\frac{21}{13} = 1{,}615384\ldots$

13 + 21 = 34	$\frac{34}{21} = 1{,}619047\ldots$
21 + 34 = 55	$\frac{55}{34} = 1{,}617647\ldots$
34 + 55 = 89	$\frac{89}{55} = 1{,}618181\ldots$
55 + 89 = 144	$\frac{144}{89} = 1{,}617977\ldots$
89 + 144 = 233	$\frac{233}{144} = 1{,}618055\ldots$
. . .	. . .

Assim sucessivamente, sempre tendendo para o infinito:

> A notável relação entre a sequência de Fibonacci e a “razão áurea” foi estabelecida pela primeira vez pelo matemático escocês Robert Simon, em 1753. Simon provou que: $\emptyset = \lim_{n\to\infty} \frac{fn+1}{fn}$ =1,61803398874985... (GUNDLACH, 1992, p. 62).

A razão áurea e a sequência de Fibonacci estão relacionadas justamente neste ponto, pois, se prosseguíssemos indefinidamente com a série, o quociente da divisão do termo seguinte pelo anterior seria cada vez mais próximo ou exatamente igual a $\emptyset$.

1.3 OS CONCEITOS MATEMÁTICOS POR TRAZ DO NÚMERO DE OURO

1.4.1 Um pouco sobre Razão e Proporção

Frequentemente empregamos proporções em nosso dia-a-dia, embora sem utilizar símbolos matemáticos. Segundo Crespo (1996), ao criticarmos uma estátua, dizendo que “ela tem uma cabeça muito grande”, não estamos nos referindo à medida absoluta da cabeça. Em uma estátua, a cabeça pode ser “muito grande”, mesmo medindo a metade, um quarto do décimo da cabeça verdadeira; é “muito grande” proporcionalmente ao conjunto da própria estátua.

1.4.2 Razão de dois Números

Razão de um número **a** para um número **b** (diferente de zero) é o quociente de **a** para **b**. De modo geral temos:

$$\frac{a}{b} \text{ ou } a : b \text{ (lemos: } \mathbf{a} \text{ para } \mathbf{b}\text{)}$$

Sendo assim os números **a** e **b** são os termos da razão; onde **a** é chamado de antecedente e **b** de consequente. Assim temos que a razão de 3 para 12 é:

$$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

De acordo com as ideias de Crespo (1996), a razão é muito usada quando queremos comparar unidades entre si. É importante se saber que tipos de grandezas estão sendo comparadas. A razão entre duas grandezas, dadas em uma certa ordem, é a razão entre a medida da primeira grandeza e a medida da segunda.

Determina-se a razão entre duas grandezas quando as grandezas são da mesma espécie e suas medidas estão expressas na mesma unidade. Assim, a razão é um número puro.

Por exemplo: a razão entre 200 cm e 3m é:

$$\frac{2\text{m}}{3\text{m}} = \frac{2}{3}$$

Esse tipo de razão é muito utilizada em escalas, por exemplo, num mapa, a escala é a razão entre a distância no mapa e a distância real correspondente.

1.4.3 Proporção

Consideremos quatro números (15, 3, 20 e 4). Como a razão entre os dois primeiros números (15 e 3) é igual à razão entre os dois últimos (20 e 4),

$$\frac{15}{3} = 5 \text{ e } \frac{20}{4} = 5$$

dizemos que os números 15, 3, 20 e 4, nesta ordem, formam uma proporção, e é possível expressá-la mediante a igualdade das duas razões. Assim:

$$\frac{15}{3} = \frac{20}{4}$$

Portanto, em uma certa ordem, quatro números (**a**, **b**, **c** e **d**) diferentes de zero, formam uma proporção quando, a razão entre os dois primeiros (**a** e **b**) é igual à razão entre os dois últimos (**c** e **d**).

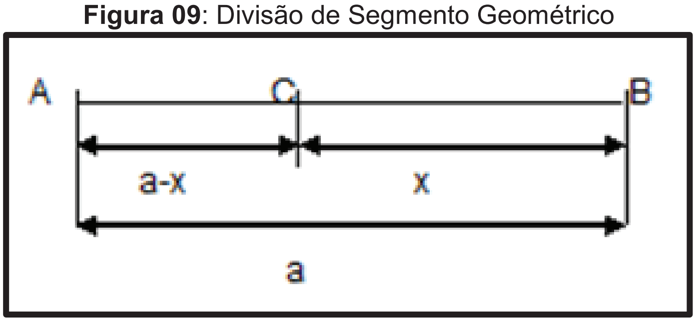
1.5 A RAZÃO ÁUREA ATRAVÉS DA DIVISÃO DE SEGMENTOS GEOMÉTRICOS

A razão áurea é tão enigmática que está presente onde quer que olhemos. Também está repleta de conceitos matemáticos, os quais serão estudados a partir de agora.

> A teoria das proporções claramente se ajusta ao esquema de interesses matemáticos dos Gregos antigos, e não é difícil achar uma provável fonte de inspiração. Conta-se que Pitágoras soube na Mesopotâmia das três médias, aritmética, geométrica e a subcontrária (mais tarde chamada harmônica) – e da "proporção áurea" que relaciona duas delas: o primeiro de dois números está para sua média aritmética como a média harmônica está para o segundo número (BOYER, 2005 p. 38).

Dizemos que o ponto C divide o segmento AB em média e extrema razão se o quociente entre os segmentos maior e o menor é igual ao quociente entre o todo e o segmento maior.

Figura 09: Divisão de Segmento Geométrico



Fonte:http://geometriabomd.blogspot.com.br/2011/03/seccao-aurea-tambem-chamada-de-razao.html

$$\frac{\mathbf{x}}{(\mathbf{a}-\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{x}}$$

Assim temos:

$$\frac{parte\ maior}{parte\ menor} = \frac{segmento\ todo}{parte\ maior}$$

Por definição encontramos o número de ouro, quando é satisfeita a equação:

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}}, \text{logo } (\overline{\mathrm{BC}})^2 = \overline{\mathrm{AC}} \,.\, \overline{\mathrm{AB}}$$

Tomando $\mathrm{AB} = 1$, e sabendo que $\mathrm{AC} + \mathrm{BC} = \mathrm{AB}$, temos que: $\overline{AC} + \overline{\mathrm{BC}} = 1$ e também $(\overline{\mathrm{BC}})^2 = \overline{\mathrm{AC}}.\,1$

Assim, $(\overline{BC})^2 = \overline{AC}$ e $\overline{AC} = 1 - \overline{BC}$

Logo, $(\overline{BC})^2 = 1 - \overline{BC}$ e portanto $(\overline{BC})^2 + \overline{BC} - 1 = 0$.

Fazendo $\overline{BC} = x$, temos: $x^2 + x - 1 = 0$

Resolvendo a equação acima, onde: a = 1; b = 1 e c = -1 , $\Delta = b^2 - 4.a.c$ e

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Obtemos $\quad x' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad$ e $\quad x'' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Como, $\overline{AC} = 1 - \overline{BC}$ e $x = \overline{BC} > 0$, pois representa segmento, temos que:

$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Assim, $\overline{AC} = 1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Fazendo o m.m.c. encontra-se:

$\overline{AC} = \frac{2+1-\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Dividindo-se estes dois segmentos encontra-se:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = 1{,}6180339887...$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \emptyset$$

1.6 O RETÂNGULO ÁUREO

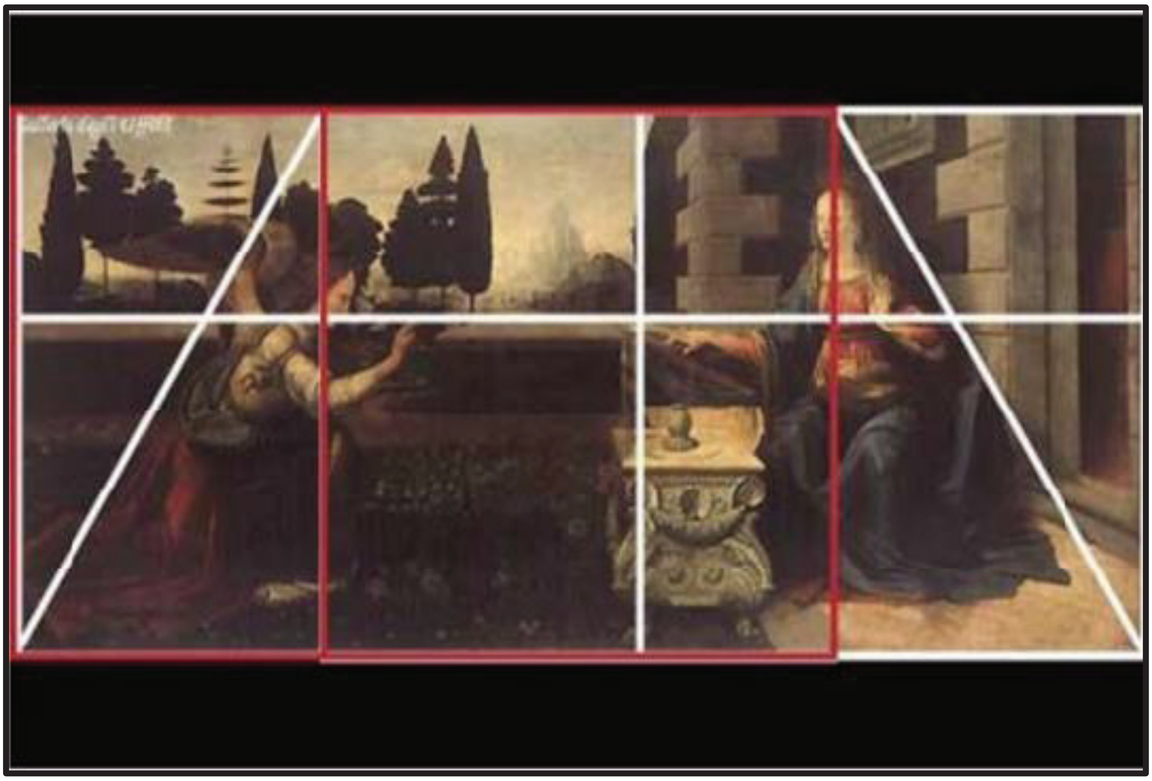
Chamamos de retângulo áureo, qualquer retângulo ABCD, onde o quociente entre a divisão de seus lados diferentes seja igual à Phi. O retângulo de ouro pode ser determinado a partir de um quadrado de medida qualquer.

$$\frac{medida\ do\ lado\ maior}{medida\ do\ lado\ menor} = 1,618033\ ...$$

A razão áurea é considerada por muitos como sendo uma “dádiva de Deus”, e foi utilizada ao longo de séculos em vários contextos. O retângulo áureo exerceu grande influência na Grécia Antiga, principalmente na arquitetura, mas também se fez presente nas artes na Idade Média. Tal influência pode ser observada nas obras de artes que escreverem os nomes de artistas como, Piet Mondrian, Cândido Portinari, Michelangelo, Salvador Dali, Leonardo da Vinci, para sempre na história da humanidade.

Da Vinci relacionou matemática à sua obra na pintura A Anunciação, de 1472. A obra representa o anjo Gabriel no momento que anunciava a Maria que fora escolhida pelo Senhor para ser a mãe de Jesus, seu filho, de acordo com o evangelho de Lucas 1:26. Combinando precisão e inteligência, da Vinci fez o quadro com dimensões nas quais o mesmo pode ser decomposto em um retângulo e um quadrado, aquele, possuindo as proporções divinas.

Figura 10: – Pintura “A Anunciação”, de Leonardo da Vinci.

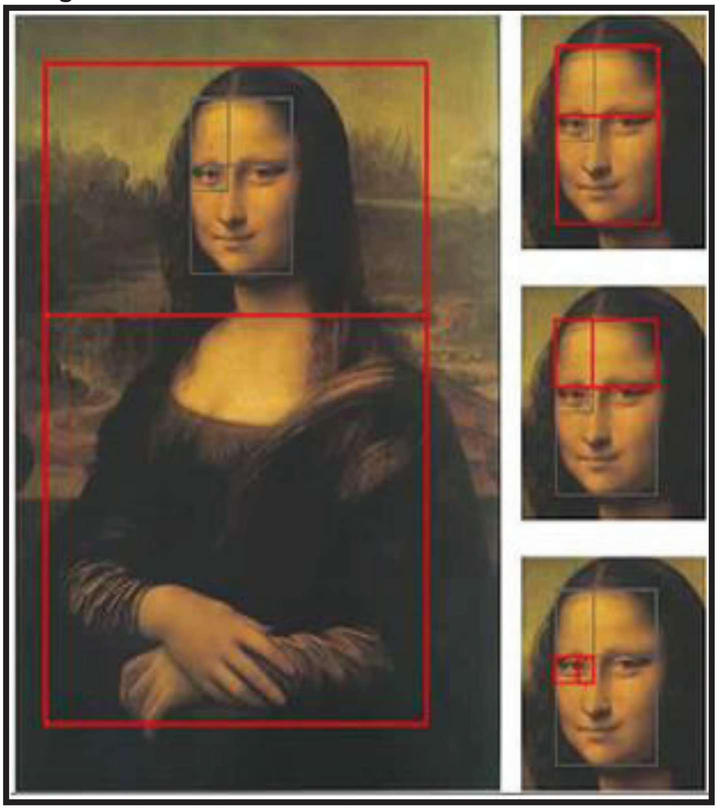


Fonte: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_IV/numero_de_ouro.pdf

O quadro Mona Lisa, também chamado de La Gioconda, feito por Leonardo da Vinci, retrata a figura de uma mulher com um sorriso tímido e uma expressão introspectiva. Leonardo começou o retrato em 1503 e terminou-o três ou quatro anos mais tarde. Objetivando sempre a perfeição em seus quadros, da Vinci não poupou harmonia através de retângulos áureos a sua mais famosa criação. Ao observar atentamente o retângulo inserido em torno do seu rosto, com dimensões 4,1 cm por 2,533 cm na figura 11, obteremos como razão o número 1,618, sendo, portanto, um retângulo áureo.

Ainda no mesmo retângulo, podemos traçar uma linha horizontal na altura do eixo dos olhos da imagem, subdividindo-a em um quadrado e um retângulo áureo. Podemos perceber proporções áureas em outras partes do corpo de Mona Lisa, como da altura do pescoço até o final do busto, e da altura deste, até o umbigo, além das próprias dimensões da tela, que também formam um retângulo de ouro.

Figura 11: “Mona Lisa” de Leonardo da Vinci.



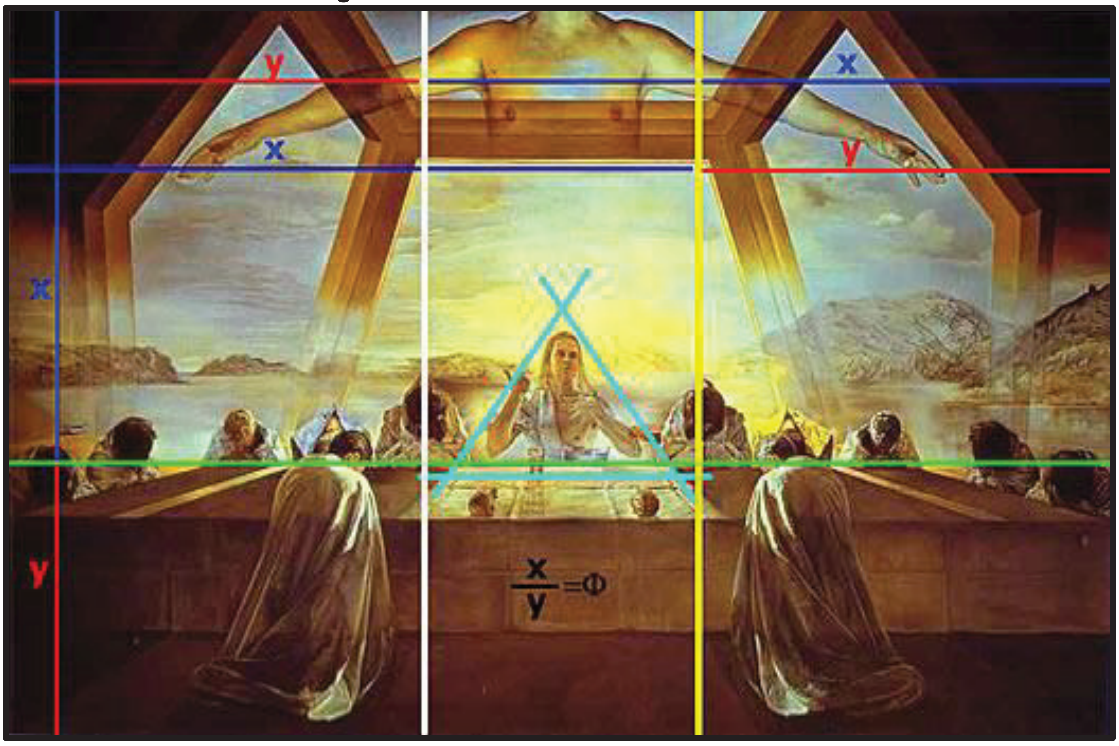
Fonte: http://algarve-saibamais.blogspot.com.br/2010/01/o-numero-de-ouro.html

O quadro “A Última Ceia” do Artista Catalão, Salvador Domingo Felipe Jacinto Dalí i Domènech, é uma obra com dimensões áureas, 270 cm x 167 cm, a razão entre estes segmentos gera 1, 6180339..., que vem ser o número de ouro.

Repare nas linhas verde, branca e amarela que cortam o quadro. Todas elas dividem a figura na razão Áurea conforme mostrado pelos segmentos azuis e vermelhos. A primeira, horizontal, passa exatamente sobre o tampo da mesa, um dos pontos mais salientes da imagem. As outras duas passam, cada uma delas, exatamente sobre a cabeça dos apóstolos situados imediatamente à direita e esquerda de Jesus Cristo.

A própria figura de Cristo, embora em posição diferente da pintada por Leonardo da Vinci (Dali pintou Cristo com os braços dobrados) se inscreve perfeitamente em um triângulo Áureo obtusângulo. E, finalmente, toda a sala está contida em uma estrutura da qual aparecem apenas parcialmente quatro pentágonos, mas que indiscutivelmente é um dodecaedro.

Figura 12: “Última Ceia” de Salvador Dali



Fonte: https://www.bpiropo.com.br/fpc20070226.htm

Com base nas ideias de Huntley (1985), a construção de um retângulo áureo não há mistérios. Como podemos observar na figura 13, tomemos um quadrado ABCD, sendo E o ponto médio do lado AB. Com centro no ponto E e raio EC, traça-se um arco de círculo que intercepte AB prolongado até o ponto F, posteriormente desenha-se o FG perpendicular a AF encontrando DC prolongado até o ponto G. Dessa forma, encontramos o retângulo áureo AFGD.

A prova é análoga à razão áurea, através da divisão de segmento. Neste caso, só temos que tomar AB = 2 unidades de comprimento. Logo:

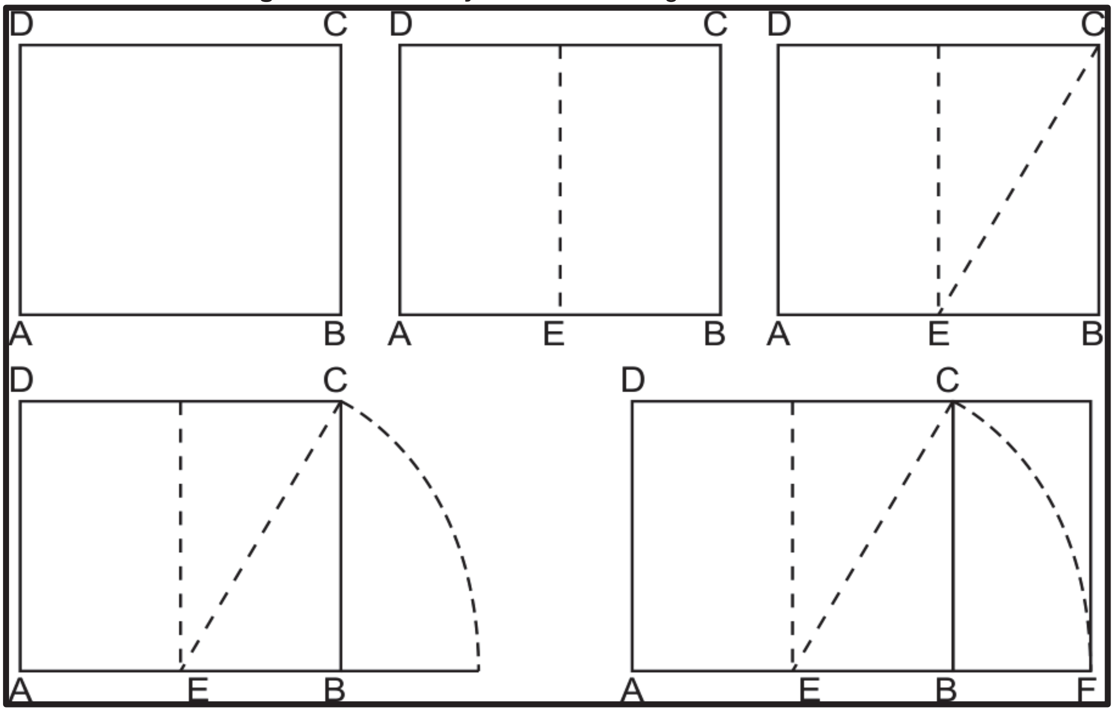
$\mathrm{EC} = \mathrm{EF} = \sqrt{5}$ unidades e $\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FG}} = \frac{(\mathrm{AE}+\mathrm{EF})}{\mathrm{FG}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \emptyset$.

O segmento AF está sendo divido por B na secção áurea. O ponto B é chamado por alguns autores de “corte áureo”, sendo ele associado à ideia de “média proporcional”: Neste caso, AB é a média proporcional de AF e BF.

Assim temos: $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BF}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AB}} \Rightarrow (\mathrm{AB})^2 = \mathrm{AF}.\mathrm{BF}$

Para alguns é questionável o fato de a razão áurea estar relacionada ou não com as proporções esteticamente mais agradáveis aos olhos do ser humano, porém, fica difícil afirmar, por exemplo, que Leonardo Da Vinci tenha feito uso desta enigmática razão ao acaso.

Figura 13: Construção de um Retângulo Áureo.



Fonte: Construção do próprio autor

Segundo Huntley (1985), a primeira pesquisa séria realizada sobre as pretensões do retângulo áureo de possuir um interesse estético especial foi realizada em 1876, pelo psicólogo alemão Gustav Fechner[3]. Dados desta pesquisa apontam para uma evidente preferência popular por um retângulo de formato e dimensões bastante próximas do retângulo de ouro. Outra pesquisa delimitou-se em obras feitas pelo homem, tomando as medidas de inúmeros objetos de formas retangulares como: prédios, jornais, caixas, livros etc. Chegando à conclusão que a maioria das pessoas tinham preferência por retângulos que obedecem a proporção áurea e 1:1, 618, pois, tais medidas eram mais agradáveis visivelmente.

[3] **Gustav Fechner**, Psicofísico que viveu entre 1801 e 1887, em 1860 publicou sua mais célebre obra *Elemente Der Psychophsic,* que exerceu grande influência no ramo da psicologia. Fechner é considerado o precursor da psicologia cientifica por ter desenvolvido investigações sistemáticas rigorosas e por ter expressado em linguagem matemática uma relação entre fenômenos físicos e psicológicos.

1.7 A ESPIRAL LOGARÍTMICA

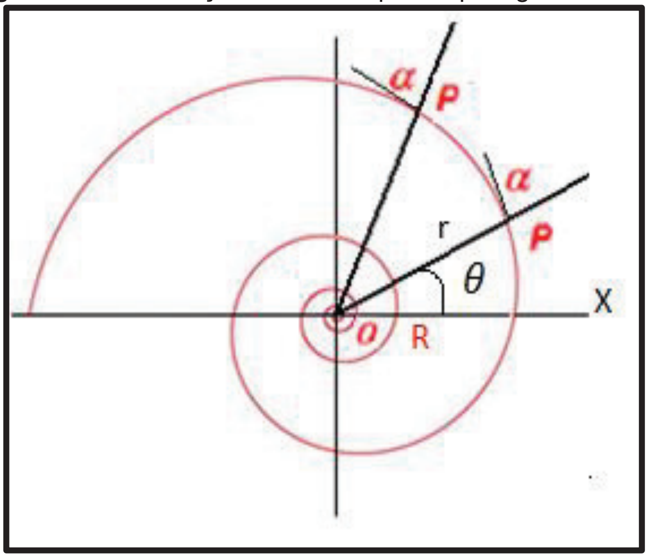
Examinaremos agora com maiores detalhes a bela curva, que tem sido estudada pelos matemáticos por centenas de anos e que está representada na natureza há milhares de séculos, tanto na flora quanto na fauna. Também pode ser encontrada na arquitetura, nas artes, no corpo humano e praticamente em todos os segmentos da natureza que nos rodeiam. Esse tipo de curva foi designada pelo Matemático francês René Descartes, como espiral equiangular que também é chamada de espiral logarítmica.

A origem do nome espiral logarítmica é devida à forma como o raio R cresce quando nos movemos ao longo da curva equiangular e, se determinamos um ponto em qualquer parte da curva, o ângulo será sempre o mesmo.

Dado o ponto O, a espiral logarítmica é uma curva tal que a amplitude do ângulo formado pela tangente em qualquer dos seus pontos P com a semi-reta OP é uma constante, ou seja, α é constante durante toda trajetória da espiral. Temos como a equação genérica da espiral a equação polar $r(\theta) = R.e^{\theta\cot(\alpha)}$, onde r é o raio da espiral e R é o raio associado para θ = 0 , tal que θ, variável independente, é o ângulo em radianos formado entre r e o eixo x e $-\infty < \theta < +\infty$ fazendo com que a curva tenha comprimento ilimitado. Para o ângulo de α= 90°, a curva formará uma circunferência. Quando α = 85,62042395, a espiral será chamada Espiral Áurea, pois a cada giro de 360 graus o raio vetor cresce na proporção geométrica do Número de Ouro.

> A espiral possui outra propriedade interessante digna de nota. Por mais diferente que dois segmentos da curva possam ser em tamanho eles não são diferentes em formato. Suponhamos que, com ajuda de um microscópio, fosse tirada uma fotografia das convulções próximas ao O, pequenas demais para serem vistas a olho nu. Se fosse adequadamente ampliada essa cópia poderia ser encaixada exatamente em uma espiral do tamanho da figura abaixo. A espiral não possui ponto terminal ela pode crescer para fora ou para dentro indefinidamente, mas seu formato não se altera (HUNTLEY, 1985, p. 101).

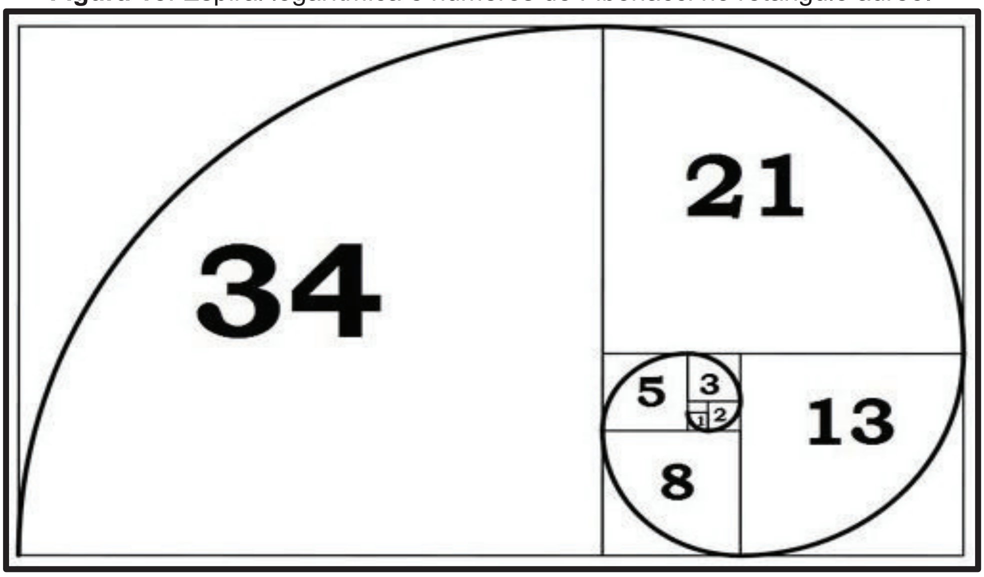
Figura 14: Planificação de uma espiral equiangular.



Fonte: http://docslide.com.br/documents/a-proporcao-aurea-eng-fidencio-maciel-de-freitas.html-adaptada

Há várias formas de se construir uma espiral logarítmica, algumas delas são a partir do retângulo áureo ou pela sequência de Fibonacci. A espiral equiangular é encontrada com muita frequência na natureza. Segundo Leonardo de Pisa, essa série ocorre quando os objetos e seres possuem formatos curvos, levando em conta o Macrocosmo, como as galáxias de estrelas e Microcosmo, nas espirais em frutas, flores, animais e seres microscópicos. Assim, podemos obter uma espiral dourada a partir de retângulos áureos justapostos com medidas da série de Fibonacci.

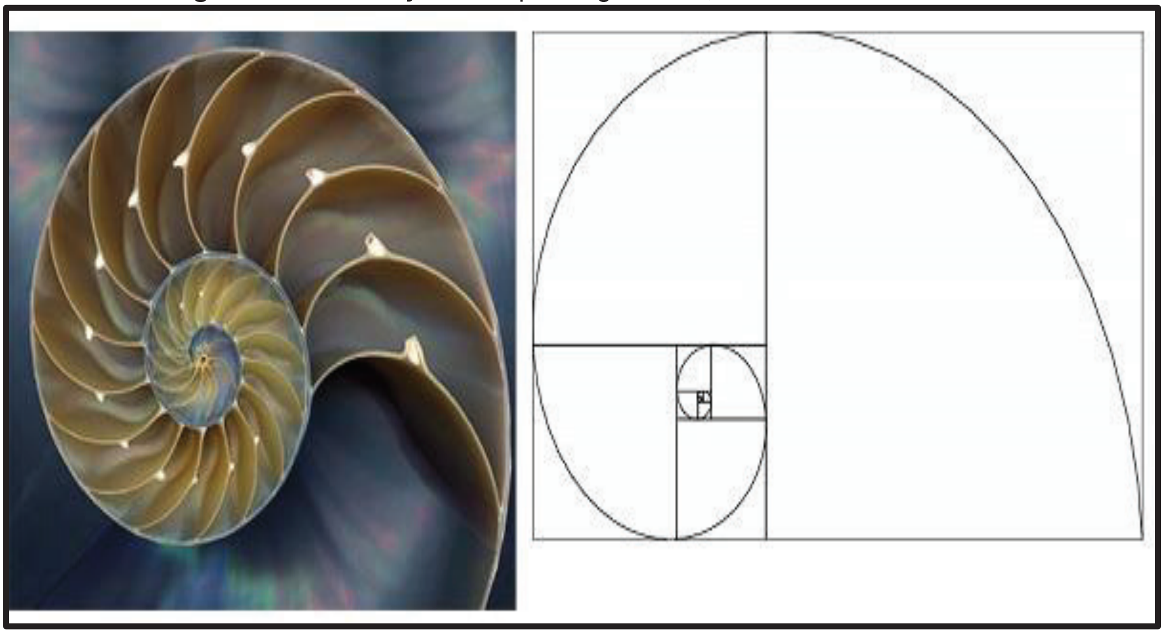
Figura 15: Espiral logarítmica e números de Fibonacci no retângulo áureo.



Fonte: http://www.raciociniocristao.com.br/2014/05/digitais-criador/

Os números de Fibonacci podem ser encontrados frequentemente na natureza, através da espiral dourada. A proporção áurea não se restringe basicamente às preferências estéticas do homem, está também inteiramente relacionada com os padrões de crescimento de seres vivos, como animais e plantas. Um típico exemplo de espiral logarítmica pode ser encontrado na concha Nautilus, onde é possível observar cada estágio consecutivo de expansão é contido um retângulo áureo que é um quadrado maior que o anterior.

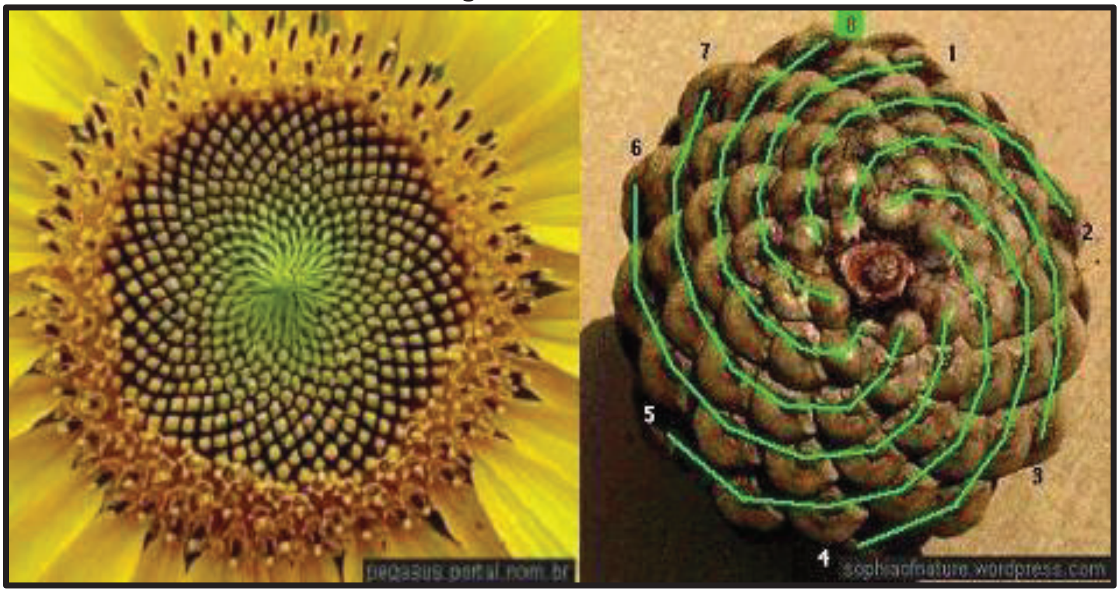
Figura 16: Planificação da espiral logarítmica, na concha de Nautilus.



Fonte: http://arthrmacademy.blog66.fc2.com/blog-entry-34.html

O Nautilus é um molusco marinho, composto por uma concha de estrutura espiralada, sua concha segue exatamente aquele padrão de crescimento que mostram como elas se abrem em espirais logarítmicas caracterizadas pelas proporções da seção áurea, esse padrão de crescimento pode ser observado também com abundância em outros seres na natureza, por exemplo: as espirais de uma pinha e de um girassol, são similares. As sementes de cada uma crescem com duas espirais que se interceptam e movem-se em direções opostas e, cada semente pertence a ambos os pares de espirais.

Figura 17: Girassol e Pinha.



Fonte: http://alea.blogs.sapo.pt/fibonacci-e-o-numero-fi-31618

Além das espirais que podem ser observadas imediatamente, a proporção áurea também está presente na razão entre o número de espirais que se direcionam em um sentido e as espirais que estão em sentido oposto, sendo que: examinando as espirais da pinha, percebe-se que 8 delas movem-se em sentido horário, e 13 em direção contrária, numa razão muito próxima da áurea. No caso do girassol, há 21 espirais em um sentido e 34 em sentido oposto, também em proporções muito próximas à áurea.

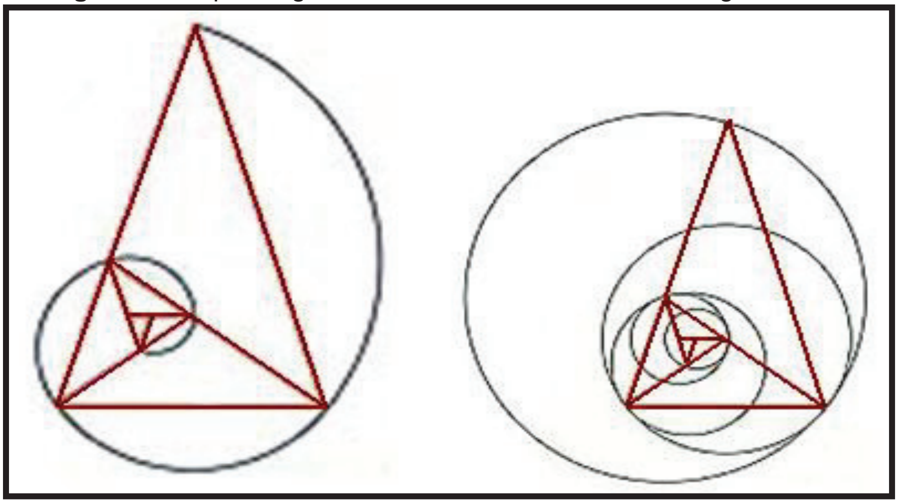
Assim temos:

$$\text{Espirais da Pinha} = \frac{13}{8} = 1,625\ldots$$

$$\text{Espirais do Girassol} = \frac{34}{21} = 1,619\ldots$$

A espiral logarítmica também pode ser encontrada a partir das subdivisões de um triângulo áureo, que pode ser divido em uma série de triângulos áureos menores, da mesma maneira como fizemos com o retângulo, estas divisões podem se estender infinitamente, usando os comprimentos dos lados dos triângulos que foram subdivididos, como raios de um círculo. Ver figura 18:

Figura 18: Espiral logarítmica, na subdivisão de um triângulo áureo.



Fonte: https://pt.slideshare.net/jackelinegmenezes/design-41079993

A espiral logarítmica é também conhecida como a espiral do crescimento ou ainda Spira Mirabilis, denotou Jacob Bernoulli (1654 -1705). Como já foi mencionado, a bela curva está naturalmente ligada aos números de Fibonacci, ao retângulo dourado e a razão áurea. Podemos chamar este padrão de crescimento de "Lei da Natureza". Estando presente na maioria dos cornos dos animais, nas conchas, nos búzios marinhos, entre outros exemplos que já vimos.

Figura 19: Espiral nos Chifres dos Carneiros

Fonte: http://www.cienciahoje.org.br

O mais intrigante sobre a espiral equiangular, é que ela não está presente somente nas plantas, aparece também no corpo humano, nos animais, de uma maneira geral em toda a natureza, como veremos no decorrer deste trabalho.

1.8 O PENTÁGONO, O PENTAGRAMA E O TRIÂNGULO ÁUREO

A descoberta da razão áurea, por muito tempo foi ignorada por grandes matemáticos da Antiguidade. Uma descoberta que ao mesmo tempo em que causava medo e dúvidas aos estudiosos da área, os fascinava, deixando-os encantados com sua perfeição.

Apesar de haver registros da utilização desta fascinante razão no Egito Antigo, séculos antes de ter sido descoberta pelos gregos, foi na Grécia onde ela foi divulgada através da escola pitagórica, fundada pelo matemático e filósofo grego Pitágoras, responsável também por inúmeras descobertas matemáticas, principalmente no campo da geometria.

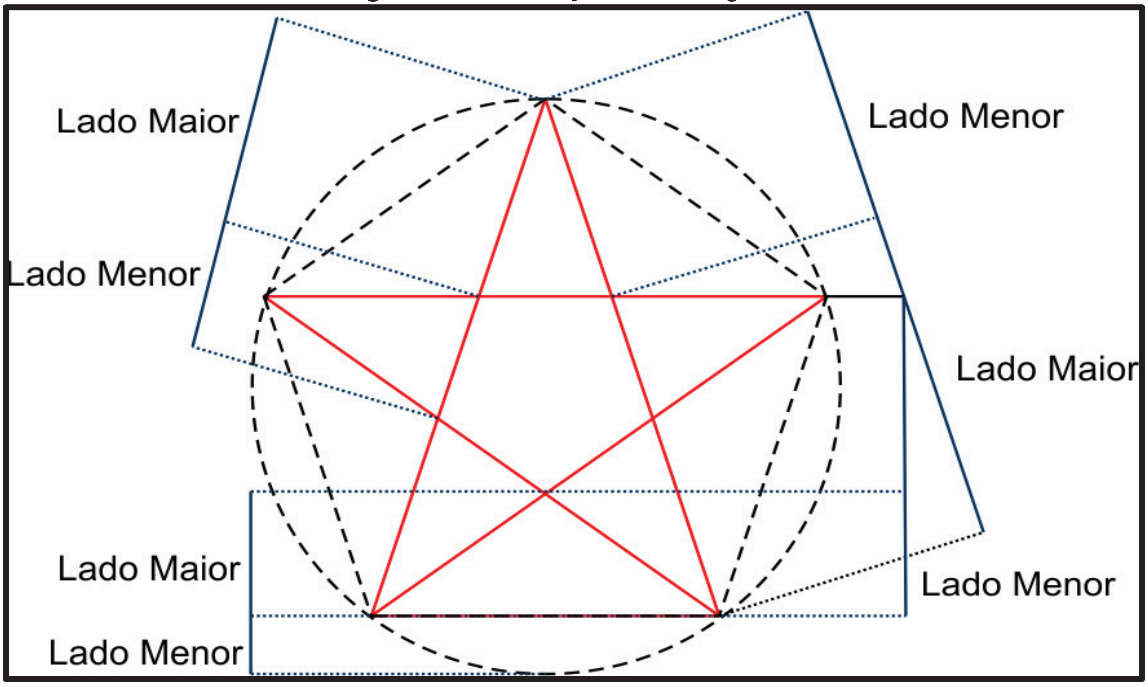
Os gregos enxergavam a secção áurea como sendo a expressão da perfeição geométrica. Por este motivo foi muito utilizada pelos arquitetos e escultores da época em suas obras.

> A Geometria tem dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; o segundo podemos chamar de joia preciosa (KLEPER, 1571–1630; HUNTLEY, 1985, p. 35).

Dentre todas as figuras geométricas, o pentágono é uma das mais extraordinárias, devido à todas as suas relações de forma e medida estarem em proporção áurea recíproca. Estando ele só, com o círculo, inscrito ou circunscrito, dentro do quadrado ou do retângulo, enriquece e estabiliza as possibilidades compositivas.

As figuras geométricas que surgem a partir das subdivisões do pentágono regular, mantêm suas propriedades e proporções áureas. Foi a partir destas subdivisões que os gregos chegaram ao pentagrama, às diagonais do pentágono se cruzam dando origem a estrela de cinco pontas, onde todas as suas medidas são áureas. Como é possível observar na figura 20.

Figura 20: Construção do Pentagrama.



Fonte: Construção do próprio autor

Considerando o pentágono regular da figura 21, podemos, partindo de um de seus vértices, traçar duas diagonais, obtendo assim um triângulo onde a base é um dos lados do pentágono e também três triângulos isósceles, ABC, ACD e ADE. Além disso, os triângulos ABC e ADE são congruentes.

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono é dada pela relação

S = (n - 2)180°, onde n é o número de lados do polígono. Logo, observando ainda a figura 21, temos que a soma dos ângulos internos desse polígono é igual a 540°, e sendo este um pentágono regular, todos os seus ângulos são iguais, logo teremos cada ângulo igual a 108°.

Com as informações:

ADE = EAD = 36°

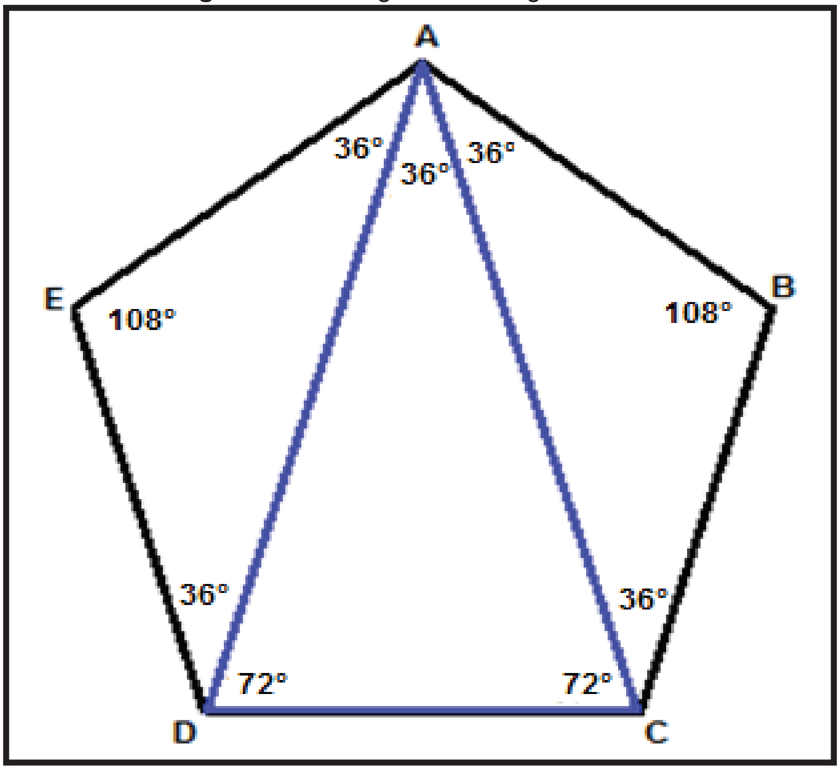
ACB = CAB = 36°

CAD = 36° e

ACD = ADC = 72°

Podemos construir um pentágono áureo a partir de um triângulo isósceles em que cada ângulo da base é o dobro do ângulo do vértice.

Figura 21: Pentágono e Triângulo Áureo.

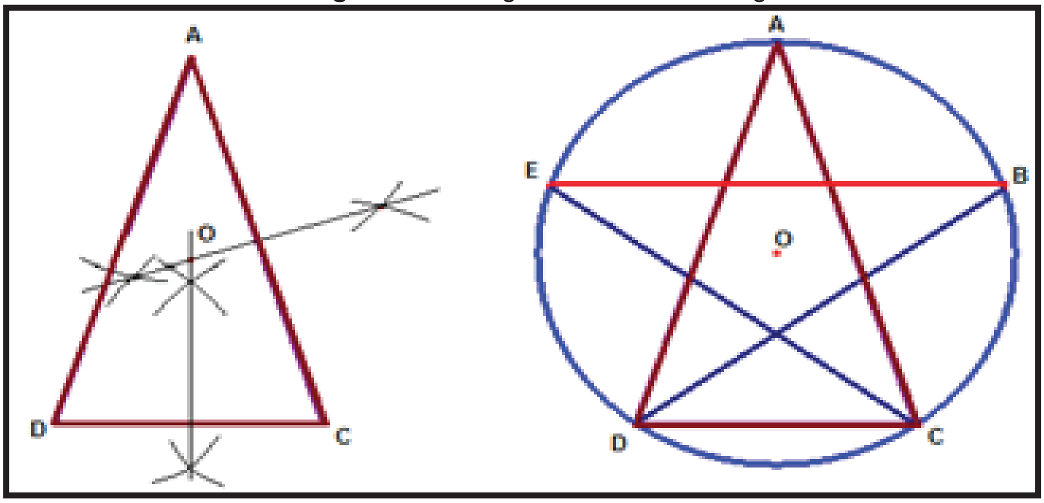


Fonte: http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pde/rosania-razao-aurea.pdf

Para isso, tomemos um dado triângulo, com bissetrizes de seus dois ângulos congruentes devidamente traçadas. Construa uma circunferência de modo que ela passe pelos três vértices do triângulo (e o centro da circunferência seja também o ponto de encontro da mediatriz do triângulo). Se prolongarmos as duas bissetrizes do triangulo isósceles até que crie dois novos pontos de interseção com circunferência, onde traçando os demais segmentos encontraremos o pentágono áureo e o pentagrama (estrela de cinco pontas), (Fig. 22)

O pentagrama é uma figura que está ligada ao misticismo. Na Grécia Antiga era usada como emblema da Irmandade Pitagórica, pois, segundo os membros desta escola, o pentágono áureo e o pentagrama estavam na divina proporção, pois, todas as suas subdivisões sempre davam origem a novos pentágonos regulares menores e, consequentes novos pentagramas, um processo que poderia se repetir infinitamente e sempre mantendo as mesmas proporções áureas. Por isso, era considerado o símbolo da perfeição, que ainda é muito utilizado nos dias atuais.

Figura 22: Triângulo Áureo e o Pentagrama



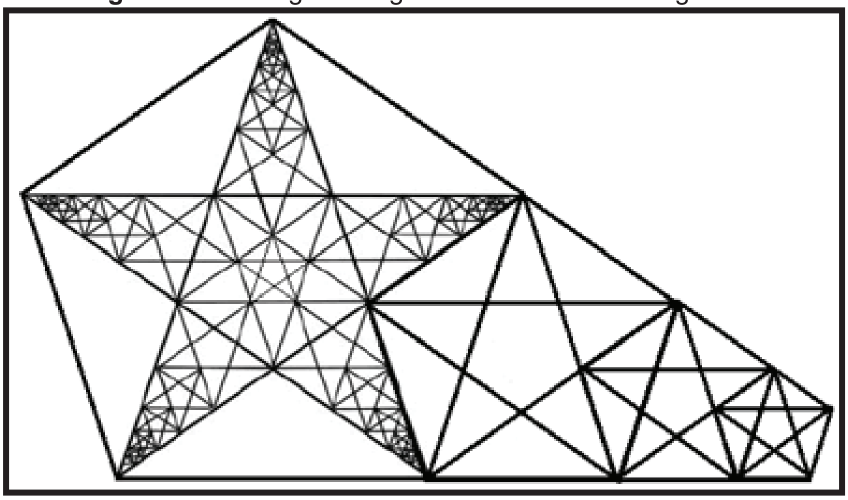
Fonte: https://www.bpiropo.com.br/fpc20070122.htm

1.8.1 A Incomensurabilidade do Pentágono Regular

Para Boyer (1996, p. 34), uma das questões tantalizantes quanto à geometria pitagórica diz respeito à construção do pentagrama ou pentágono estrelado. Se começarmos com um polígono regular ABCDE e traçarmos as cinco diagonais, essas diagonais se cortam em pontos A`B`C`D’E`, que formam outro pentágono regular.

As diagonais de um pentágono regular determinam um novo pentágono regular e também um novo pentagrama, cuja parte central é outro pentágono, esse processo pode se repetir infinitamente e, o mais surpreendente é, que por mais contínuo que seja este processo, as subdivisões permanecem na proporção áurea.

Figura 23: Pentágono Regular e suas infinitas diagonais.



Fonte: https://pt.slideshare.net/jackelinegmenezes/design-41079993

O pentágono regular e o pentagrama foram muito utilizados pelos matemáticos na escola pitagórica. Foram os pitagóricos também que descobriram as notáveis propriedades desta figura geométrica, que para eles era considerada o símbolo da perfeição, onde suas diagonais dividiam umas às outras, segundo Euclides de Alexandria, em média e extrema razão. Tendo em mãos essa propriedade, o matemático grego Hípasus, concluiu que o quociente entre as medidas do segmento todo pela maior parte é igual ao quociente entre as medidas dessa parte maior com a parte menor.

1.9 ONDE PODEMOS ENCONTRAR A RAZÃO ÁUREA

No decorrer deste trabalho observou-se que o homem utilizou a razão áurea para construir determinadas obras. No entanto, devemos nos perguntar: será que estes números podem ser encontrados na natureza? Quem pode identifica-lo? Onde podemos usá-lo?

Os gregos acreditavam que a razão áurea era um presente dos deuses, tamanho era sua perfeição, por isso, hoje é conhecida como “Divina Proporção”. Era de uma perfeição que só um deus seria capaz de ter, estando presente nos mínimos detalhes da natureza. O que muitas vezes eles custavam a compreender, é que a natureza segue padrões que nem a própria matemática pode explicar.

> Algumas das referências mais antigas dos prazeres da matemática estão ligadas ao nome do filósofo grego Pitágoras (569 – 500 a. C.), que observou a ocorrência, na natureza de certas combinações e relações entre números [...] Para Pitágoras, a explicação da ordem da natureza iria ser encontrada na ciência dos números (HUNTLEY, 1985, p.35).

A proporção divina, como foi definida por vários matemáticos já citados, pode ser observada com maior facilidade na natureza, desde que a pessoa não seja totalmente leiga no assunto. Podemos encontrá-la também na moda, no design, na arquitetura, na música, no corpo humano, e em diversos outros segmentos.

1.9.1 A Proporção Áurea na Natureza.

Segundo Huntley (1985), a secção áurea pode ser observada com muita frequência na natureza, através do retângulo áureo, pois, suas propriedades se aplicam com muita facilidade a vários segmentos da natureza como as plantas e os animais. Devido a esse retângulo conter a presença da espiral dourada, a qual já foi estudada anteriormente. Essa espiral pode ser encontrada no formato de conchas marinhas, na organização das sementes do girassol, na distribuição das pétalas de uma rosa, na maneira como estão dispostas as folhas de um galho. “É importante ter em mente que a beleza superficial da natureza não faz mais que sugerir o encanto oculto por dentro. A matemática não está a flor de sua pele, ela tem de ser descoberta. O que significa trabalho (p. 149)”.

Como foi exposto anteriormente, o problema com a criação dos coelhos, foi que deu origem a sequência de Fibonacci, porém há outras situações na natureza, nas quais ela se faz presente. É possível constatar isso, observando o número de pétalas em algumas flores comuns.

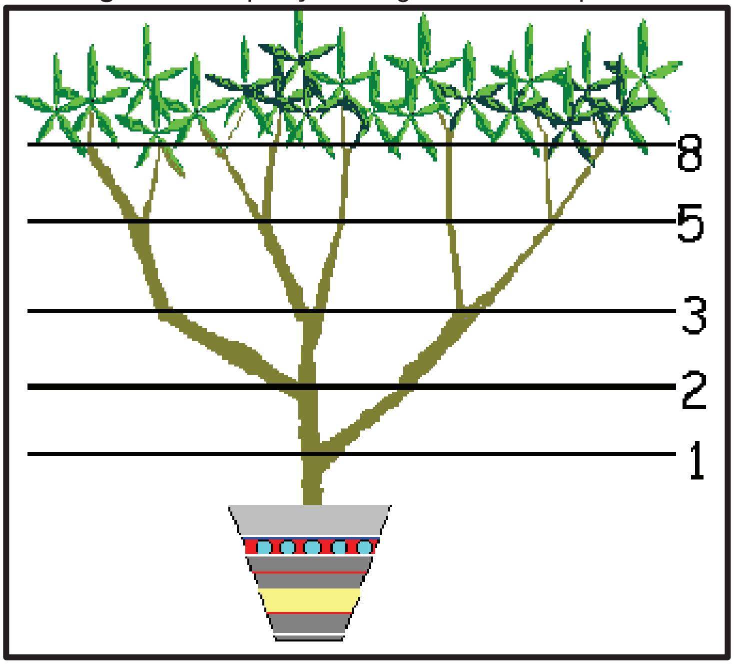
Figura 24: Jasmim Manga com 05 pétalas e a Margarida com 34 pétalas.

Fonte: http://slideplayer.com.br/slide/1583517/

Estes números não ficaram restritos apenas nos números de pétalas das flores, estão presentes também na disposição das folhas e galhos de algumas plantas (Filotaxia)[4].

[4] Filotaxia, termo da botânica que inclui a disposição de folhas nos ramos das plantas.

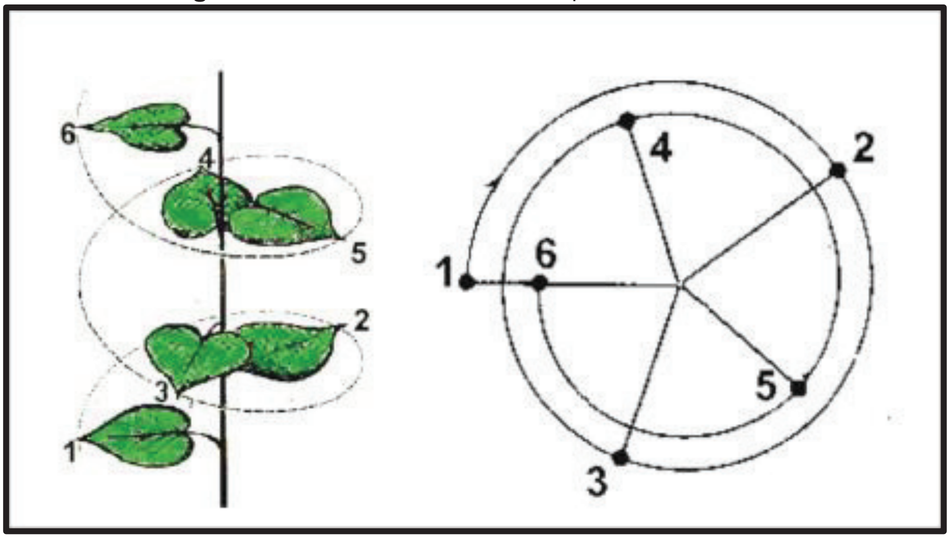
Figura 25: Disposição dos galhos de uma planta.



Fonte: http://www.mat.uel.br/matessencial/geometria/geometria.htm

Na figura 26, podemos observar que o padrão com cinco folhas é repetido após duas voltas completas da espiral. Cada volta completa corresponde a 360°. Se temos duas voltas completas, multiplicamos 360° por 2 o que resulta 720°. Se em cada período temos 5 folhas, basta dividirmos 720° por 5, obtendo assim, 120°. Esse resultado obtido, significa que a separação angular das bases de duas folhas sucessivas é 120°. Podemos indicar por p o número de voltas da espiral até nascer uma nova folha que se sobreponha a primeira e por q o número de bases de folhas contidas em cada período. Então $\frac{p}{q}$ é uma fração característica da planta. O termo técnico utilizado para representar esta fração é "Divergência" das folhas. Por exemplo, nas roseiras a fração que representa a divergência das folhas é $\frac{2}{5}$**.** Nas gramíneas comuns, a fração que representa a divergência de folhas é $\frac{1}{2}$: uma volta da espiral, contendo duas bases de folhas, quando então nasce uma folha que se sobrepõe à primeira. Segundo estudos realizados, a divergência das folhas nas várias plantas geralmente é representada pelas seguintes frações: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}; \ldots$ Como se pode perceber, tanto o numerador quanto o denominador destas frações, que representam a divergência das folhas nas várias plantas, tendem a ser elementos da sequência de Fibonacci. Logo os quocientes destas frações tendem infinitamente para $\emptyset$, isto é $\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} = \emptyset$, onde f_n é um número de Fibonacci.

Figura 26: Estrutura do movimento espiral de crescimento.



Fonte: http://www.mat.uel.br/matessencial/geometria/geometria.htm

De um modo geral, é válido dizer que os números de Fibonacci estão presentes em muitas plantas, nos ramos e galhos que crescem em quantidades baseadas nesta série.

1.9.2 A Música e o Número de Ouro

Para Boyer (2005), era um artigo de fé fundamental do pitagorismo que a essência de tudo, tanto na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem, podia ser explicada em termos de *arithmos*, ou das propriedades intrínsecas dos inteiros e suas razões.

De acordo com o dicionário, a música é uma sucessão de sons agradáveis ao ouvido. Também podemos dizer que a música é "ritmo e som", ou seja, é uma combinação de sons executados em determinada cadência. Para que a música seja agradável, precisa de uma harmonia entre os acordes e isto é obtido usando a matemática. Pitágoras de Samos (582-497 a.C.) é considerado o fundador da geometria teórica. Em seus pensamentos sobre a estrutura do universo, razões e proporções, ele elaborou uma teoria que vinculava a música, o espaço e os números (Belucci, 2008).

Em duas cordas de mesmo material, sob a mesma tensão e sendo a primeira o dobro do comprimento da segunda, quando tocadas, a corda mais curta irá emitir um tom uma oitava acima da corda mais longa, devido a sua frequência ter o dobro do valor. Ou seja, a relação de 1:2 compreende a relação sonora de uma oitava (Belucci,2008).

Dessa forma Pitágoras elaborou relações entre sons, o tamanho das cordas e as razões 1:2:3:4.

Assim, chegamos às seguintes relações: $\frac{1}{2}$, compreende a relação sonora de uma oitava e dividindo a corda menor pela metade, obtemos a relação de $\frac{2}{4}$, nesse caso o tom será de duas oitavas acima da corda inicial. Já a relação $\frac{3}{4}$ nos dá um tom, uma quarta acima do tom inicial, e a relação de $\frac{2}{3}$ mostra um tom, uma quinta acima.

De posse destas informações, Pitágoras desenvolveu as relações entre os sons, o tamanho das cordas e as razões de $\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$.

Com base nos estudos de Pitágoras podemos assim obter três tipos de proporções:

*A proporção geométrica estabelecida entre oitavas de um tom, isto é, $\frac{1}{2} : 4$ o tom uma oitava acima e duas oitavas acima;

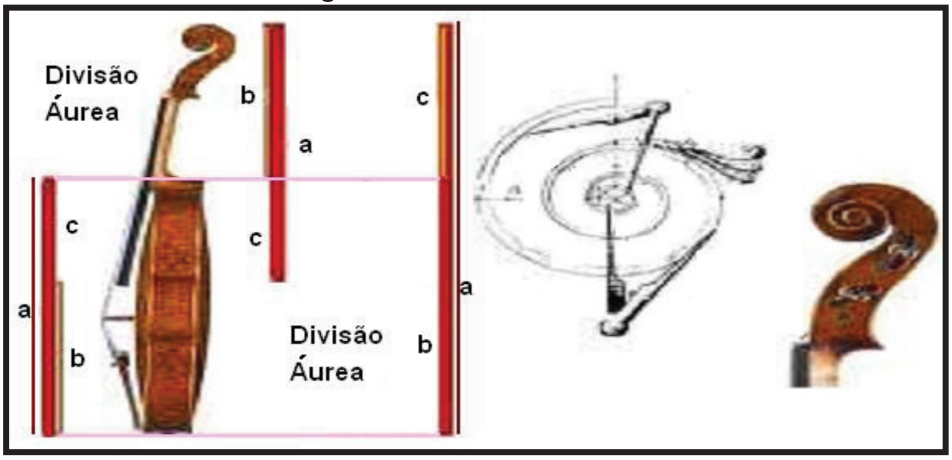
*A proporção aritmética, pois, usando a relação $\frac{2}{3} : 4$ se estabelece ao trabalhar o som de uma oitava em uma quinta e uma quarta.

*A proporção harmônica relaciona a diferença dos valores das frações medianas, assim na relação de $\frac{6}{8} : 12$, onde 8 excede 6 em um terço da mesma forma que 12 excede 8 também em um terço.

A proporção harmônica pode ser considerada uma subversão da proporção aritmética, trabalhando o som de uma oitava em uma quarta e uma quinta. Na música, existem vários artigos que relacionam as composições de Mozart, Bethoveen (Quinta Sinfonia) e outros com a razão áurea.

Mas, a razão áurea não está presente apenas na composição das notas musicais, ela vai mais além. Podemos percebê-la até mesmos na construção dos instrumentos musicais. Podemos observar na figura 30, a razão áurea na estrutura do violino, entre o tamanho do braço e o comprimento total do instrumento, assim como a voluta que obedece a mesma relação das conchas nautilus em forma de uma espiral equiangular.

Figura 27: Divisão Áurea no Violino.



Fonte: https://aidobonsai.com/2009/09/06/a-harmonia-da-solidao/

Portanto, conclui-se que o número de ouro está presente na música de um modo geral, apesar desta abordagem não citar todos os casos ou situações em que ele se mostra, foi possível observar que foi e ainda é componente crucial, no processo de construção da música.

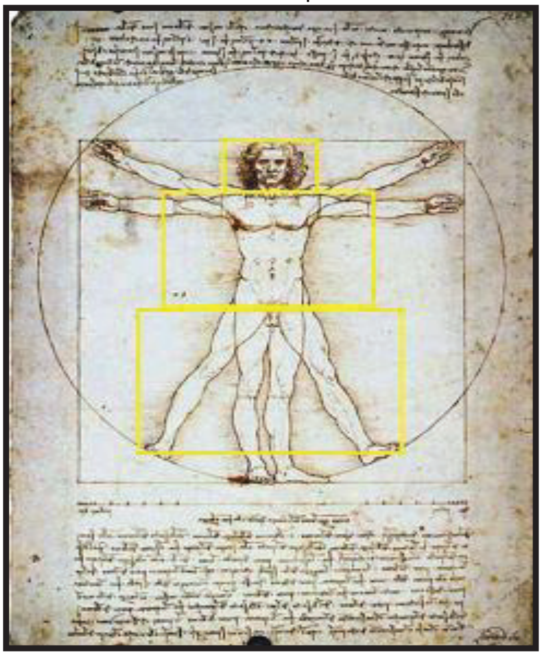
1.9.3 O Homem de Vitrúvio

Da mesma forma que as plantas e os animais apresentam as proporções áureas, não ocorre diferente com os seres humanos. Para mostrar as proporções perfeitas em um ser-humano, Leonardo da Vince usou a Proporção Áurea na obra o Homem Vitruviano. O Homem Vitruviano é um desenho famoso que acompanhava as notas que Leonardo da Vinci fez ao redor do ano 1490 num dos seus diários. Descreve uma figura masculina desnuda separadamente e simultaneamente em duas posições sobrepostas com os braços inscritos num círculo e num quadrado. A cabeça é calculada como sendo um décimo da altura total. Às vezes, o desenho e o texto são chamados de Cânone das Proporções.

O nome “homem vitruviano ou o homem de vitruvio” deriva de um trabalho realizado pelo arquiteto romano chamado **Marcus Vitruvius Pollio** que apresentou um estudo matemático no século I a. C. Nesse estudo Vitruvius descreve, num Tratado de Arquitetura, as proporções ideais do corpo humano. Segundo Marcus Vitruvius[5], o corpo humano possui como ponto central o umbigo, pois, se um homem for colocado deitado de costas, com seus membros superiores e inferiores estendidos e sendo um compasso centrado em seu umbigo, aos dedos de suas mãos, os pés tocarão a circunferência criada a partir deste centro. Pode-se extrair uma segunda figura geométrica, a partir do homem vitruviano, medindo sua altura, da sola dos pés até o topo da cabeça, observa-se que a medida dos braços estirados horizontalmente, criando assim a forma quadrada.

Marcus Vitrúvio, acreditava que a arquitetura dos templos da época deveria adotar como base a analogia do corpo humano, devido ele ser harmônico em todas as suas partes. Mas só foi no período da Renascença, na Idade Média, que Leonardo da Vinci, baseando-se nos fundamentos de Vitrúvio, quem ilustrou sua ideia. Segundo Leonardo da Vinci, o corpo humano para ter beleza e harmonia deve respeitar uma proporção, e como o número áureo representa esta beleza, então o corpo humano deve seguir esse mesmo padrão.

Figura 28: O homem de Vitrúvio por Leonardo da Vinci.

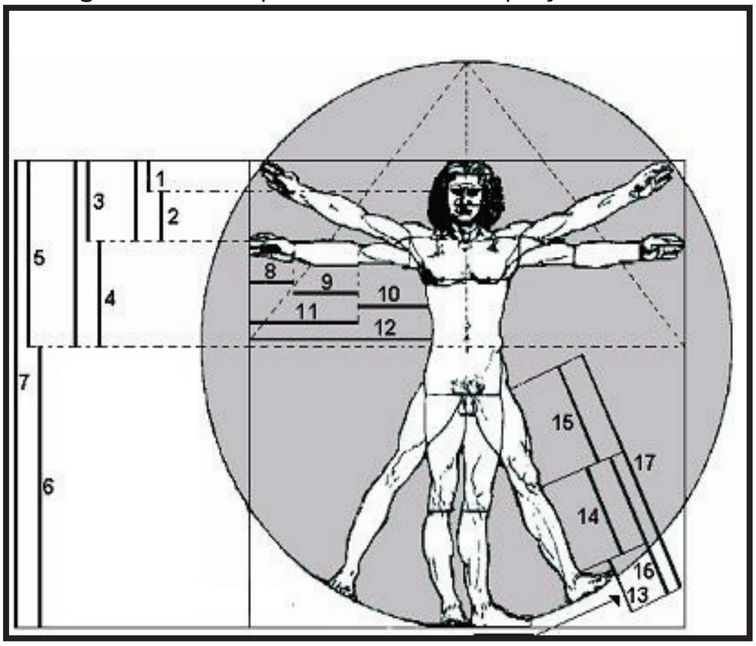


Fonte: https://aidobonsai.com/2009/09/06/a-harmonia-da-solidao.

[5] Marcus Vitruvius Pollio; arquiteto e engenheiro romano viveu no século I a. C., publicou um grande manual de arquitetura, dividido em 10 volumes, onde desenhou a figura de homem de braços abertos, chamado atualmente de homem vitruviano em sua homenagem.

Segundo Boyer (2005), apesar de Leonardo da Vinci, muitas vezes ser lembrado como um matemático renascentista, ele não se fixou na aritmética, na geometria ou na álgebra por tempo suficiente para fazer uma contribuição significativa. Da Vinci mostra através de seus desenhos, seus conhecimentos matemáticos, adotando a razão áurea como garantia de perfeição, beleza e harmonia em suas obras.

Figura 29: O Corpo Humano e as Proporções Áureas.



Fonte: http://designculture.com.br/2-a-regra-de-ouro-proporcao-aurea/

Se adotarmos as devidas medidas para os segmentos indicados na figura, chegaremos cada vez mais próximo de Φ e consequentemente, ao homem perfeito.

$$2 : 1 = 3 : 2$$

$$4 : 3 = 5 : 4$$

$$6 : 5 = 7 : 6$$

$$9 : 8 = 10 : 9$$

$$11 : 10 = 12 : 11$$

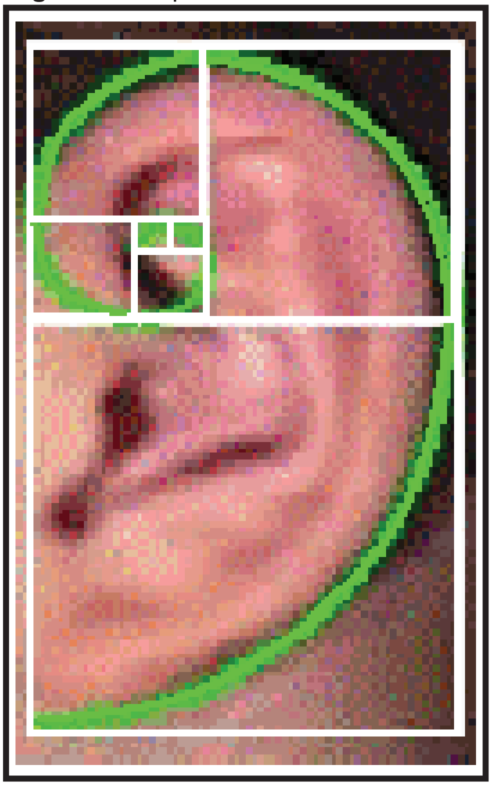
$$14 : 13 = 15 : 14$$

$$16 : 15 = 17 : 16 = 1,618...$$

Para Da Vinci, o homem perfeito, deveria ter as razões entre suas medidas, como por exemplo, sua altura e a distância de umbigo até o chão, aproximadamente igual a ∅. Tais proporções também são encontradas em várias partes do corpo humano.

Do ponto de vista da matemática, a orelha perfeita seria aquela que se encaixasse em uma espiral logarítmica, seguindo as proporções do número de ouro, como mostra a figura 30.

Figura 30: Espiral Dourada e a Orelha

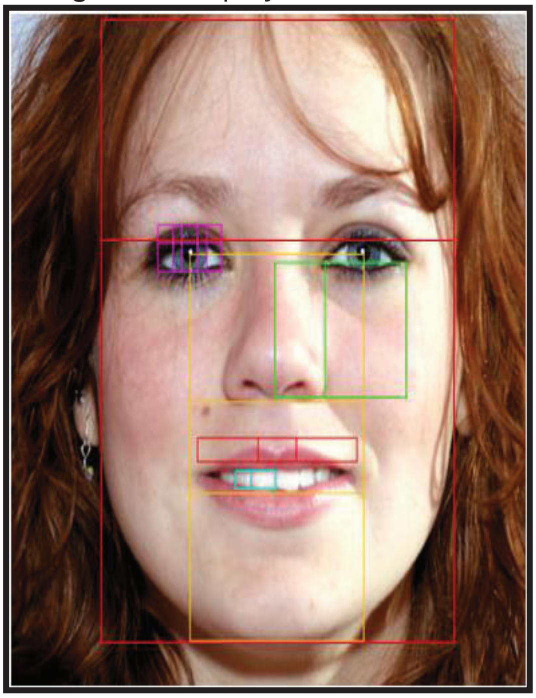


Fonte: https://br.pinterest.com/rgrego/phi/

A ciência já constatou que o rosto humano é inteiramente baseado na razão aurea, pois, ele está repleto de exemplos da secção dourada.

A figura 31 mostra claramente as relações áureas na face do ser humano, o retângulo áureo que se encaixa perfeiratamente no formato do rosto, mantém as mesmas relações com os demais. Podemos observar que a boca e nariz são posicionados em secções de ouro da distânica entre os olhos e a parte inferior do queixo.

Figura 31: Proporção Áurea na Face

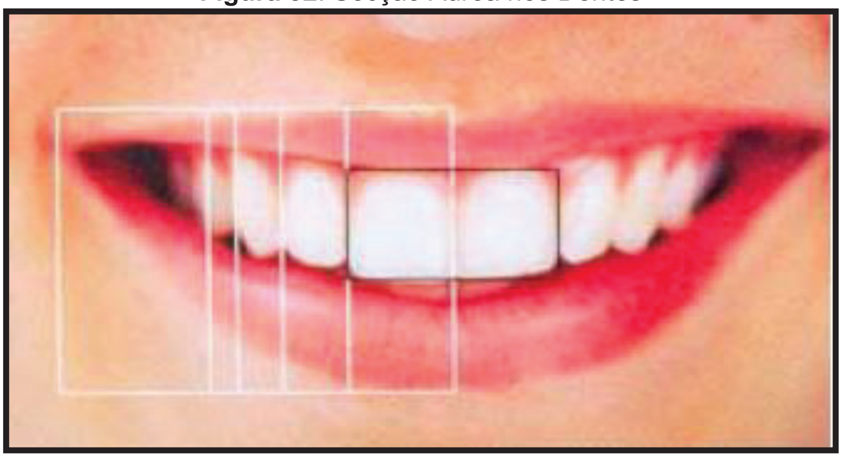


Fonte: https://pt.slideshare.net/HerlanRibeirodeSouza/razo-urea-33963618

Além de estar presente em diversos segmentos do corpo humano, como observado na face e na orelha, há diversos estudos que demonstram que a razão áurea se mostra também na harmonia do sorriso e da dentição.

Analisando a figura 34, podemos observar que os dentes vistos frontalmente estão dispostos na proporção áurea um em relação ao outro. Esta proporção se estende desde o incisivo central até o primeiro pré-molar. É perceptível também a partir das marcações feitas na imagem, que o segmento “incisivo central até o primeiro pré-molar”, preservam a mesma relação com o canto da boca.

Figura 32: Secção Áurea nos Dentes



Fonte: www.labordental.com.br/GOLDENSECTION.htm

Além de estudar as proporções do corpo humano, Vitrúvio que era arquiteto, estudou as proporções arquitetônicas harmoniosas. Ele defendia a ideia de que a arquitetura de um templo devia se basear num corpo humano perfeitamente proporcional, que apresentasse harmonia entre todas suas partes.

1.9.4 O Modulor (a razão áurea na arquitetura).

Não podemos dizer apenas, que a razão áurea está aplicada em vários segmentos da natureza e que o homem simplesmente a aplica em suas obras. A razão áurea faz parte da vida da natureza e da vida do homem e o homem usa este presente divino para expressar sua criatividade nas mais belas obras.

> [...] uma das propriedades que contribuem para essa efetividade é a proporção – a relação de tamanho das partes entre si e com o todo. A história da arte mostra que, na longa busca pelo elusivo cânone da proporção perfeita a que poderia de algum modo conferir automaticamente qualidades estéticas agradáveis a todas as obras artísticas, a Razão Áurea provou ser a mais dourada (LIVIO, 2006, p. 69).

Depois da arquitetura clássica da antiguidade, surgiu uma arquitetura que fez uso de formas puras da geometria, onde a questão da proporção passou a ser tratada de forma particular. Le Corbusier é um dos responsáveis por uma forma de arquitetura moderna. Viajou o mundo, porém, foi na Grécia que encontrou sua maior fonte de inspiração, nas obras do também arquiteto Phidias. Foi baseado nos estudos das obras gregas e também no homem de Vitrúvio, que o arquiteto francês desenvolveu seu cânone arquitetônico “O Modulor”.

O Modulor foi desenvolvido pelo pintor e arquiteto francês Charles-Edouard Jeanneret-Gris, mais conhecido como Le Corbusier[6], por volta de 1945. Nele fica estabelecida uma relação de medidas baseadas na divisibilidade do corpo humano em proporção harmônica, sendo baseada também nos números de Fibonacci. O primeiro Modulor foi publicado em 1950 com estatura média do homem europeu de 1,75 m e com um de seus braços estendidos, chegando a uma altura total de 2,16 m (altura máxima de ocupação do corpo humano). Já em 1955, o arquiteto francês publicou outro Modulor, com uma estatura de 1,83 m de altura. Le Corbusier criou

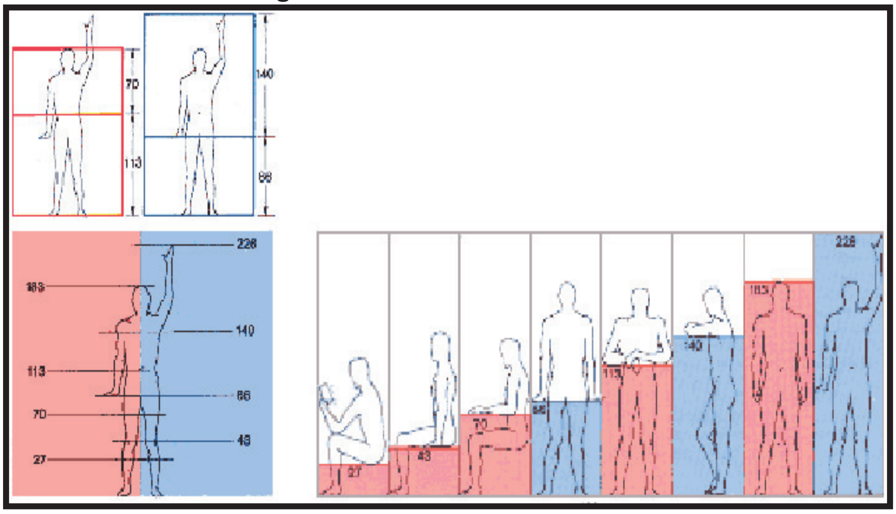
---

[6] Le Corbusier – nascido em La Chaux-de-Fonds, na Suíça, onde estudou arte e gravuras. Foi um dos defensores da utilização da Proporção Áurea na arte e na arquitetura.

duas séries de valores em relação áurea. O objetivo era conseguir uma escala humana universal para ser aplicada na arquitetura e na mecânica.

As duas séries representam o Modulor 2, pois, segundo Le Corbusier, é a perfeita ocupação do homem no espaço, devendo considerar que a série vermelha representa a altura média do homem e a azul a altura do homem com o braço estendido.

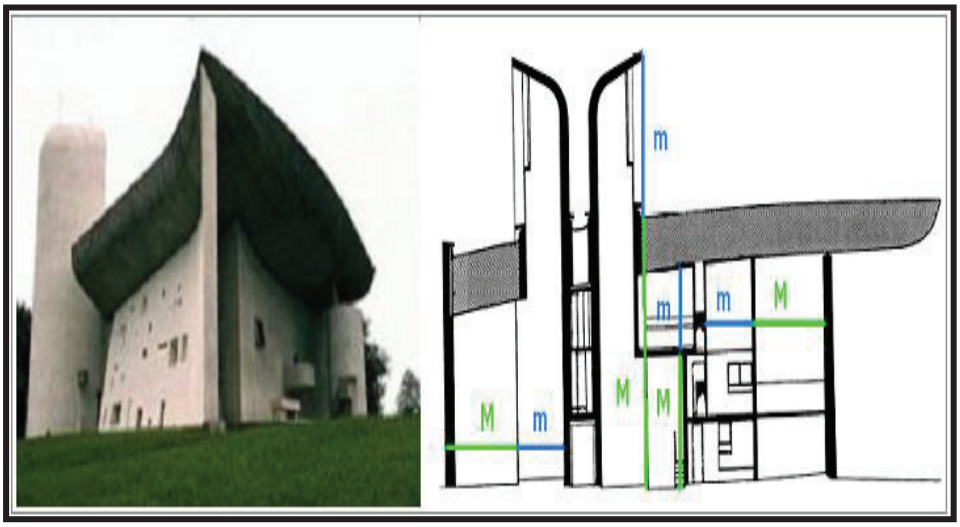
Figura 33: As séries do Modulor.



Fonte: https://coisasdaarquitetura.wordpress.com/2010/06/30/quem-acredita-no-modulor/

O estudo realizado pelo arquiteto é utilizado até os dias atuais em diversos projetos, tanto em construções de edifícios como até mesmo de mobiliário. Não faltam exemplos de obras do próprio Le Corbusier, a Torre de Tatlin, a unidade de habitação de Merseilles em especial a Chapel de Notre Dame Du Haut, construídas a partir do sistema de medidas harmônicas do Modulor.

Figura 34: Chapel de Notre Dame Du Haut e Esquema da aplicação da razão áurea na estrutura do edifício.



Fonte: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_IV/numero_de_ouro.pdf

Onde: $$\frac{M + m}{M} = \frac{M}{m} = 1{,}618$$

Muitas obras de Corbusier eram projetadas tomando como base os retângulos áureos, seu objeto de estudo. O Modulor narrava seu sistema de proporções baseado na matemática de seção áurea e a proporção do corpo humano.

2 O USO DA INFORMÁTICA

É de conhecimento geral que as avaliações, quanto ao conhecimento matemático de nossos estudantes não são satisfatórias. O fraco desempenho mostra muito mais do que a fragilidade na formação de uma geração de professores e estudantes, evidenciando o pouco valor dado ao conhecimento matemático e a ignorância em que se encontra a esmagadora maioria da população no que tange à matemática.

Devido a imagem que a matemática passa para os alunos de ser um “bicho de sete cabeças” que pesquisadores e professores da matemática devem buscar inúmeras formas de se ensinar matemática, dentre elas pode-se citar a utilização da informática na Educação e o uso das construções geométricas, que constitui uma ferramenta importante para a compreensão da geometria, pois, disponibiliza técnicas construtivas que demonstram as propriedades geométricas e a correta utilização e manuseio dos equipamentos, como os esquadros e o compasso.

2.1 O USO DA INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Estudiosos como Moreira (2003); Borba e Penteado (2007), da área da educação matemática, defendem a uso da informática nas aulas de matemática como uma opção pedagógica relevante, entretanto sua utilização deve estar relacionada a um bom planejamento estratégico por parte do docente. “O uso de tecnologias, como a informática, possibilita de forma diferenciada entender o próprio conhecimento, e que é possível haver uma sintonia entre uma dada pedagogia, uma mídia e uma visão do conhecimento.” (BORBA E PENTEADO, 2007, p. 45). Relativo a isso, Kenski (2008, p. 45), afirma que:

> As novas tecnologias de comunicação (TIC’s), sobre tudo a televisão e o computador, movimentaram a educação e provaram novas mediações entre a abordagem do professor, a compreensão do aluno e o conteúdo veiculado. A imagem, o som e o movimento oferecem informações mais realista em relação ao que se está sendo ensinado. Quando bem utilizadas, provocam a alteração dos comportamentos de professores e de alunos, levando-os ao melhor conhecimento e maior aprofundamento do conteúdo estudado.

Moreira (2003) chama a atenção para o modo como a informática é aplicada, pois, uma utilização desvinculada de uma ação pedagógica pouco contribuirá para a educação dos estudantes. Outro aspecto relevante é o fato de que o uso indiscriminado dos laboratórios de informática nas aulas de Matemática não é garantia de qualidade de ensino. O fato de um professor utilizar os recursos tecnológicos disponíveis não quer dizer que suas aulas não sejam tradicionais, se o aluno somente reproduzir, de forma mecânica e desvinculada de significados, como aquelas aulas em ambientes não virtuais. A simples utilização do computador não é garantia de aprendizagem significativa.

> É preciso entender que a aprendizagem é significativa quando novos conhecimentos (conceitos, ideias, proposições, modelos, fórmulas) passam a significar algo para o aprendiz, quando ele ou ela é capaz de explicar situações com suas próprias palavras, quando é capaz de resolver problemas novos, enfim, quando compreende (MOREIRA, 2003, p. 2).

Para Borba e Penteado (2001), o uso da informática na educação matemática deve ser vista como um direito. Direito este, que inclui a alfabetização tecnológica que, para os autores, não é um simples curso de informática, mas sim um aprender e interpretar a nova mídia a ser inserida nas atividades essenciais do

Aluno. Em suma, a informática na educação tem duas justificativas: alfabetização tecnológica e o direito ao acesso. Para os professores, entretanto, é necessário, segundo os mesmo autores, assumir que a incorporação das novas mídias em sua prática é um objetivo a ser alcançado, o que implica em fugir de certa “zona de conforto” na qual, muitos docentes se colocam, aceitando os riscos de mudar, de aprender e de assumir uma nova prática. Neste aspecto.

> [...] Esses estudos teóricos podem servir de orientação para que o computador não seja utilizado somente como um instrumento para melhorar resultados em um dado teste racional, regional ou local. É preciso que a chegada de uma mídia qualitativamente deferente, como a informática, contribua para modificar as práticas de ensinos tradicionais vigentes (BORBA E PENTEADO, 2001, p. 51).

Borba e Penteado (2001) ressaltam a importância em adotar discussões teóricas nas pesquisas como meio de fortalecer a compreensão das experiências vividas, a fim de tornar público os resultados. As calculadoras gráficas e computadores modificam coletivamente a maneira de pensar do homem em sua relação com a mídia. Na perspectiva destes autores, "os computadores não substituem ou apenas completam os seres humanos. Os computadores reorganizam o pensamento (p. 46-47)".

Assim, a educação matemática com o uso das tecnologias digitais no ambiente escolar é uma linha de trabalho que precisa se fortalecer, na medida em que há uma distância evidente entre os avanços tecnológicos na produção de softwares educacionais livres ou proprietários e a aceitação, compreensão e utilização desses recursos nas aulas, pelos professores.

Embora as tecnologias digitais venham influenciando fortemente o cenário da educação matemática, sua utilização no momento das aulas, não corresponde ao esperado e nesse contexto, a escola precisa redescobrir seu papel social como parte integrante do processo de crescimento e de ampliação da visão de mundo daqueles que a utilizam.

2. 2 A IMPORTÂNCIA DOS SOFTWARES EDUCATIVOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Segundo Medeiros (2002), existem inúmeros software que prometem a aprendizagem de determinados conteúdos matemáticos, entretanto, muitas vezes, não atinge o objetivo para o qual se destina. Cabe ao profissional da matemática oportunizar condições de reflexão que permita ao educando analisar e experimentar situações novas a partir da utilização de um software matemático.

> É preciso ter em conta que a educação não é algo que envolve apenas a informação. Educar consiste, igualmente, em fazer as pessoas pensarem sobre a informação e a refletirem criticamente. A educação vista de uma forma holística, lida com a compreensão, com o conhecimento e com a sabedoria. É preciso estimular as mentes dos estudantes e não apenas abarrotá-las de informações enlatadas (MEDEIROS, 2002. P. 84).

Assim sendo, cabem aos professores possuir uma concepção, organização e acompanhamento ao trabalhar com software educativo. Segundo Perrenoud (2000), a principal competência de um professor nesse domínio é ser:

> [...] - um usuário alerta, crítico, seletivo do que propõe os especialistas dos softwares educativos; da Aplicação Concebida para o Ensino e da Aprendizagem Assistida por Computador; - um conhecedor dos softwares que facilitam o trabalho intelectual, em geral, em uma disciplina, em particular, com familiaridade pessoa e fértil imaginação didática, para evitar que esses instrumentos se desviem de seu uso profissional (PERRENOUD, 2000, p.134).

Contudo, alerta o autor, a exigência em ser especialista em softwares educativos, não significa que o professor não deva ter um conhecimento básico e domínio das ferramentas: "a facilidade pessoal no manejo de diversos softwares não garante uma correta aplicação para fins didáticos, mas o torna isso possível (PERRENORD, 2000, p.134)". Mesmo admitindo que um software poderia favorecer maior interatividade do aluno com o conhecimento matemático, os professores ainda não conseguiram perceber como administrar o conteúdo do que seria abordado na sala de aula convencional, com aquela a ser realizada no LIED.

O planejamento das aulas foi fundamental para minimizar essa angústia. Refazer e adaptar o currículo para o uso dos recursos tecnológicos mostrou-se tarefa árdua, mas necessária e ajudou aos professores a perceber que o currículo, na realidade é apenas um parâmetro que pode e deve ser mudado sempre que isso representar uma aquisição positiva para o ensino e a aprendizagem.

Nesse sentido, entendemos que, ao pretender utilizar softwares educativos de matemática, o professor desenvolva fluência no manuseio do computador e, ao lidar com o programa em si, compreenda as vantagens de sua utilização para a organização do pensamento e a socialização do aluno.

2. 3 O SOFTWARE GEOGEBRA E OS PCN'S

O Geogebra possibilita trabalhar de forma dinâmica em todos os níveis da Educação Matemática. A abordagem que apresentamos está embasada nas exigências dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio.

Apresentamos a seguir sugestões de temas tendo como referência os conteúdos abordados em cada nível. Lembrando que o leque de possibilidades e de aplicações está em constante estudo e desenvolvimento por pesquisadores e estudantes que utilizam o software Geogebra como forma de aprendizagem mais significativa de seus discentes.

2.3.1 Tópicos do Ensino Fundamental

Vários conteúdos matemáticos que estão presentes nos PCN's terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, podem ser abordados de forma dinâmica em sala de aula com a utilização do Geogebra. São exemplos: o estudo de Figuras Planas, Perímetros, Áreas, Medida de Ângulos, os Teorema de Tales e Pitágoras, Razão e Proporção, Definição de: Ponto Médio, Mediatriz, Segmento de Reta, Reta Perpendicular, Teorema Fundamental da Semelhança, Eixos coordenados e Plano Cartesiano.

2.3.2 Tópicos do Ensino Médio

Da mesma forma as sugestões para aplicação do *software* no Ensino Médio são: a) no primeiro ano: noções de funções, trigonometria do triângulo retângulo. Geometria plana (semelhança, congruência e representações de figuras planas); b) no segundo ano: funções trigonométricas. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta. Comprimentos, perímetros e áreas; c) no terceiro ano: geometria analítica: representações do plano cartesiano, equações, interseção e posições relativas de figuras planas e números irracionais.

2. 4 O SOFTWARE GEOGEBRA E SUA UTILIZAÇÃO EM SALA DE AULA.

Por ser um software com versão livre, o Geogebra possibilita o seu uso em ambientes educacionais sem custo, o que no caso da escola pública passa a ser um grande facilitador. Sua interface mostra-se muito agradável e suas aplicações encaixaram-se perfeitamente ao ensino de vários conceitos matemáticos.

O software Geogebra foi escolhido para o desenvolvimento deste trabalho, pois o mesmo possui um manuseio simples e dinâmico que permite aos alunos a possibilidade de explorar, visualizar, elaborar, conjecturar, analisar, verificar ideias, redescobrir e construir novos conhecimentos sem limites para sua curiosidade e criatividade.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) salientam em seus textos a importância da utilização de softwares no ensino da Matemática como facilitador na compreensão de conceitos, seja na Geometria como na Álgebra.

Indo ao encontro das concepções acima, o software educacional Geogebra dá condições ao professor de criar situações de reflexão e análise, com um olhar mais investigativo com seus alunos, de forma a contribuir significativamente na aprendizagem, devido ao mesmo possuir uma variedade de ferramentas que permitem manipular construções geométricas, expressões numéricas e algébricas e descobrir relações e propriedades matemáticas, o que gera motivação para investigar e aprofundar as suas aplicações.

O software Geogebra traz diversas possibilidades de análise tanto no aspecto geométrico como no aspecto algébrico. Sob a ótica da Álgebra, pode-se exemplificar o estudo de funções de uma forma acessível aos alunos, pois, as alterações realizadas nas funções construídas por meio de comandos do software Geogebra podem ser visualizadas simultaneamente no gráfico resultante na tela. Dessa forma, o aluno percebe o resultado das ações que o conduz a um determinado gráfico e permite-o refletir sobre cada situação apresentada, fazendo perguntas para gerar reflexão sobre os resultados alcançados, compartilhar e justificar as conclusões.

3 A PROPORÇÃO ÁUREA E ALGUMAS CONSTRUÇÕES NO SOFTWARE GEOGEBRA

3.1 O SOFTWARE GEOGEBRA

O Geogebra é um software gratuito de matemática dinâmica, que reúne GEOmetria, álGEBRA e cálculo. Ele foi desenvolvido pelo professor Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburgna da Áustria, para a educação matemática nas escolas. Recebeu muitos prêmios internacionais, incluindo o prêmio de Software Educacional Alemão e Europeu. Esse software permite a realização de construções geométricas utilizando régua e compasso digitais mantendo passos e características fundamentais à construção convencional. Entretanto, comparando a forma convencional de construções geométricas e a auxiliada pelo computador, destacamos a diferença:

I. Estática e única — depois de feito um desenho, o mesmo não pode ser modificado para análise de algumas propriedades.

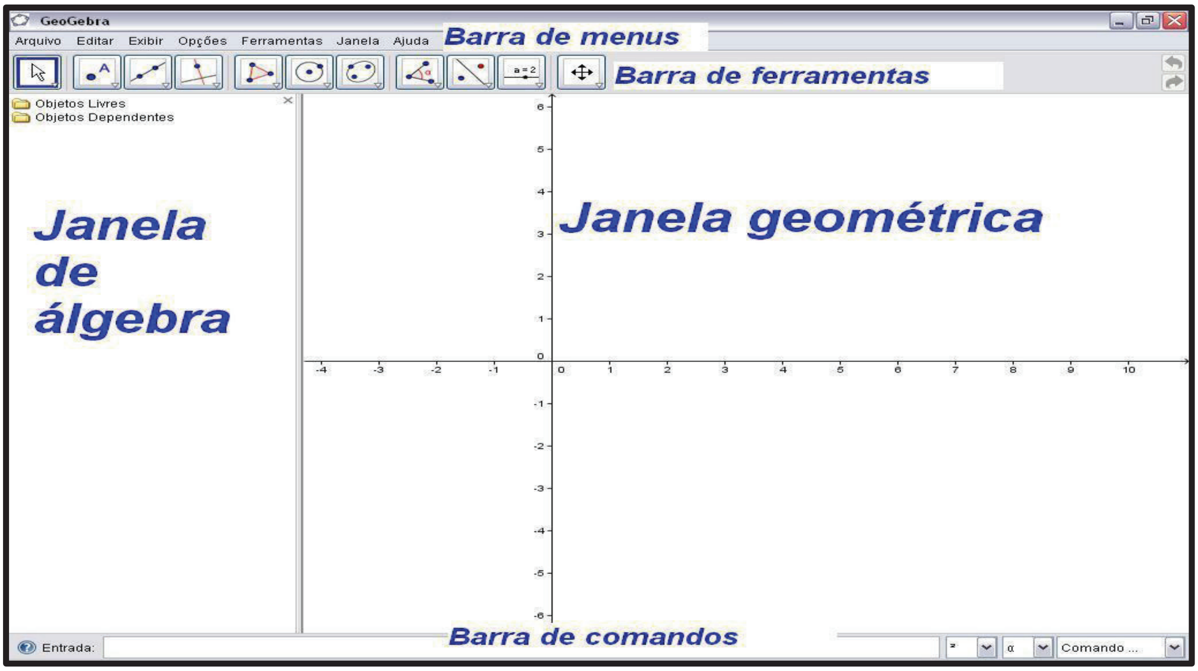
II. Múltipla — com um único desenho é possível explorar as propriedades através de alterações que são realizadas através do computador sem modificar as propriedades geométricas.

Por essa principal característica de um único desenho se transformar em várias opções, sem perder suas propriedades geométricas, é que o Geogebra foi considerado um software de Geometria Dinâmica. Se por um lado, o Geogebra é um sistema de geometria dinâmica, permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas como com funções que podem se modificar posteriormente de forma dinâmica. Por outro lado, equações e coordenadas podem estar interligadas diretamente através do Geogebra. Assim, o software tem a capacidade de trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos; permite achar derivadas e integrais de funções e oferece comandos, como raízes e extremos.

Essas duas visões são características do Geogebra: uma expressão em álgebra corresponde a um objeto concreto na geometria e vice-versa. Por ter sido escrito em Java roda em qualquer plataforma (Microsoft Windows, Linux, Macintosh, etc.). O Geogebra pode ser baixado através do link: http://www.geogebra.org/.

Agora faremos uma breve descrição dos comandos do software Geogebra. Vamos começar explorando a tela inicial. O programa abre em uma tela, onde na parte superior estão apresentadas a barra de menus e a barra de ferramentas de acesso rápido; a esquerda está à janela de álgebra, que pode ser fechada se necessário; a direita está à janela geométrica, onde mostra a parte gráfica e;
em baixo está à barra de comandos. Observe a figura abaixo:

Figura 35: Tela inicial do Geogebra



Fonte: Construção do próprio autor

À medida que os objetos são construídos, as suas coordenadas e equações são mostradas na janela de álgebra. Além disso, com o mouse podemos modificar as propriedades dos objetos construídos e, ao mesmo tempo, observar dinamicamente a mudança nas suas coordenadas ou equações.
Agora, vamos “conhecer” a barra de ferramentas de uma forma detalhada, bem como os principais botões ilustrados nas figuras a seguir.

Figura 36: 1º botão da barra de ferramenta.

Fonte: Construção do próprio autor

Mover – selecionando essa ferramenta e pressionando o botão esquerdo do mouse sobre um objeto, é possível arrastá-lo por toda a janela geométrica.

Girar em torno de um ponto fixo - pressionando o botão esquerdo do mouse sobre um objeto é possível girar esse objeto ao redor de um ponto que permanece fixo.

Figura 37: 2º botão da barra de ferramentas

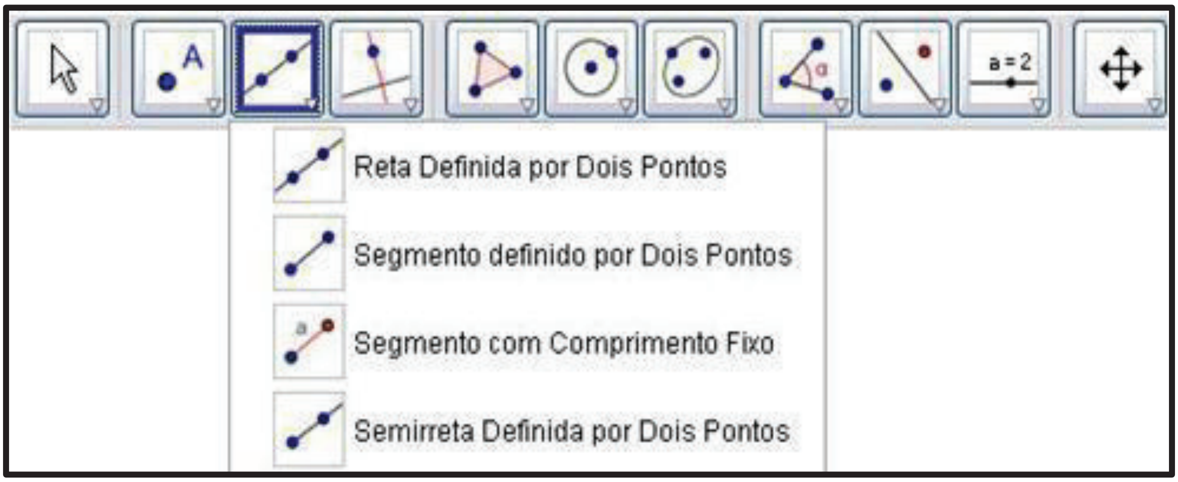
Fonte: Construção do próprio autor

Novo ponto - selecionando esta ferramenta e clicando na janela geométrica, com o botão esquerdo do mouse, cria-se um novo ponto.

Interseção de dois objetos - o ponto de interseção entre dois objetos pode ser criado selecionando os objetos, dessa forma todas as interseções existentes são marcadas.

Ponto médio ou centro – para utilizar essa ferramenta, clique, com o botão esquerdo do mouse, em dois pontos para obter seu ponto médio; ou em um segmento para obter seu ponto médio.

Figura 38: 3º botão da barra de ferramentas



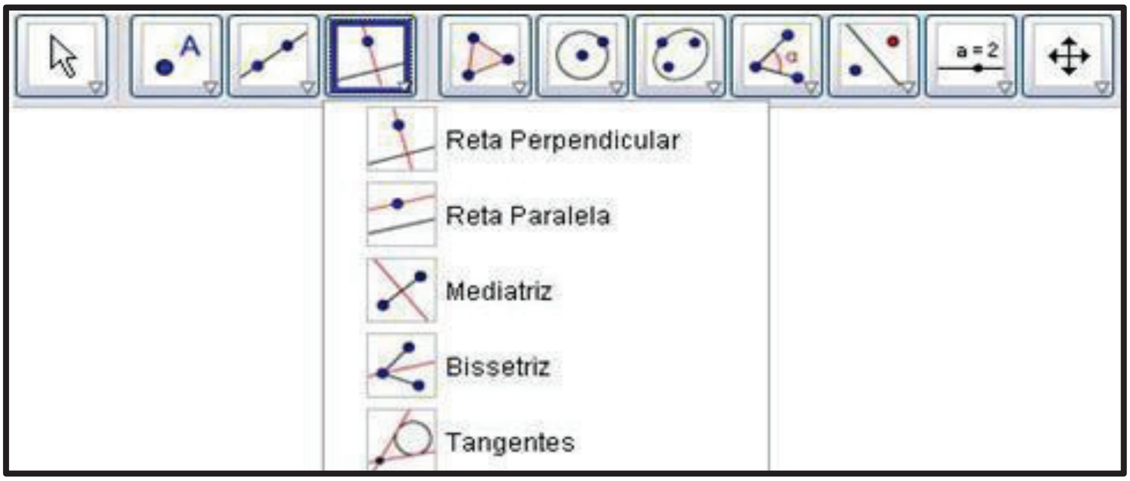
Fonte: Construção do próprio autor

Reta definida por Dois Pontos – marcando-se dois pontos, traça-se a reta definida por eles.

Segmento definido por Dois Pontos – marcando-se dois pontos, determinam-se as extremidades do segmento a ser traçado.
Segmento com Comprimento Fixo– marca-se a origem do segmento e digita-se a medida desejada para o mesmo, em uma janela que se abre automaticamente.

Semirreta Definida por dois pontos – traça-se uma semirreta a partir do primeiro ponto marcado contendo o segundo ponto.

Figura 39: 4º botão da barra de ferramenta.



Fonte: Construção do próprio autor

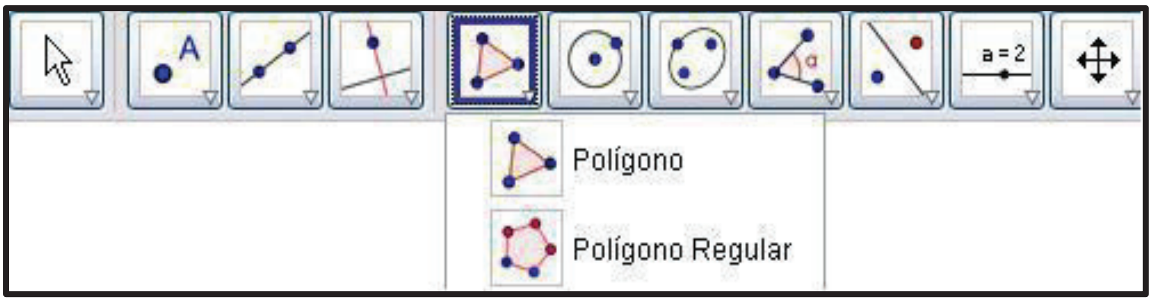
Reta Perpendicular – clicando-se com o botão esquerdo do mouse em uma reta e em um ponto, constrói-se uma reta perpendicular à reta considerada, passando pelo referido ponto. O mesmo pode ser feito considerando-se um segmento de reta ou semirreta.

Reta Paralela – clicando-se com o botão esquerdo do mouse em uma reta e em um ponto fora dela, constrói-se uma reta paralela à reta considerada, passando pelo referido ponto.

Mediatriz – clicando-se com o botão esquerdo do mouse nas extremidades de um segmento de reta, constrói-se uma reta perpendicular a este, passando pelo seu ponto médio.

Bissetriz – Clicando-se, com o botão esquerdo do mouse, sobre duas retas concorrentes, já traçadas constroem-se as bissetrizes dos ângulos determinados pelas retas.

Figura 40: 5º botão da barra de ferramentas

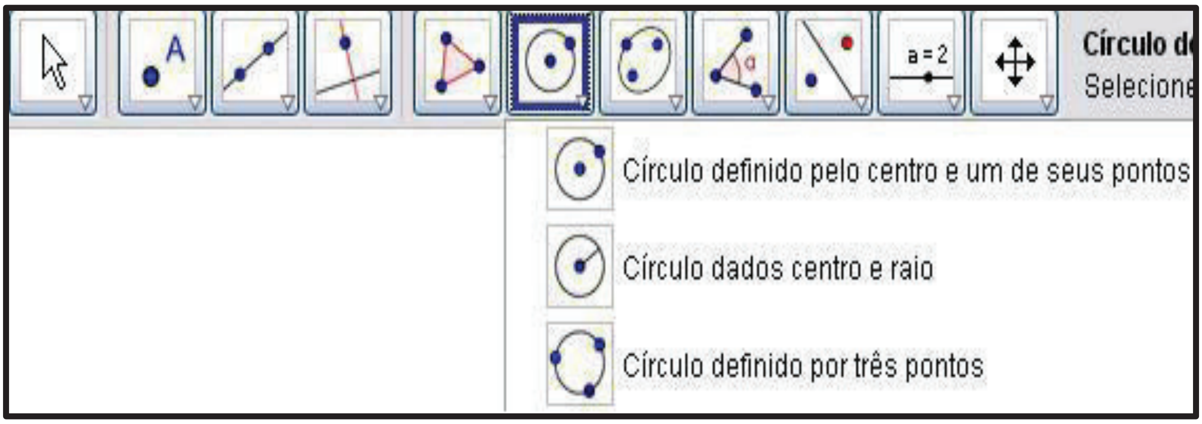


Fonte: Construção do próprio autor.

Polígono – para construir um polígono, marca-se ao menos três pontos e clica-se, com o botão esquerdo do mouse, no primeiro ponto novamente (para “fechar” o polígono).

Polígono Regular - é possível construir polígonos regulares usando o comando no qual é necessário digitar o número de lados na janela de álgebra que aparece no centro da tela.

Figura 41: 6º botão da barra de ferramentas

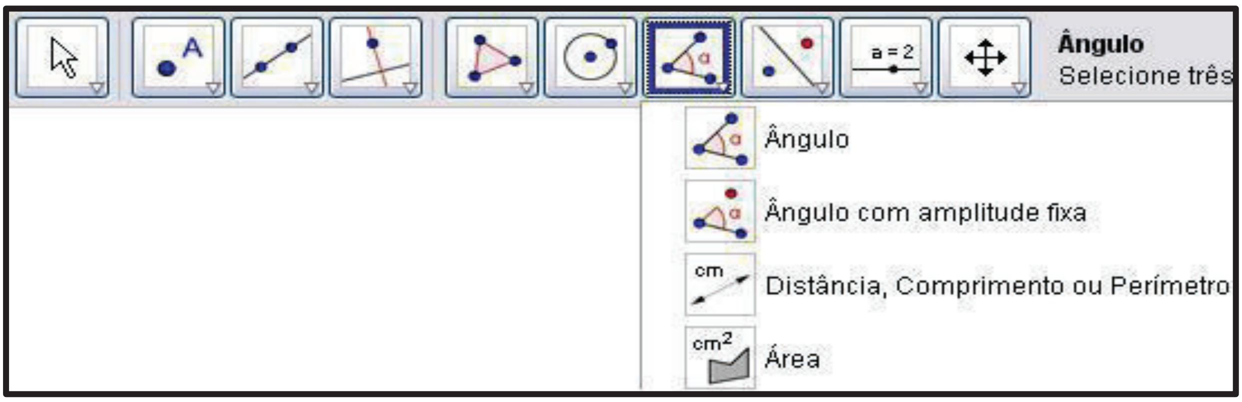


Fonte: Construção do próprio autor.

Círculo definido pelo centro e um de seus pontos – marcando-se um ponto A e um ponto B, traça-se o círculo com centro A, passando por B.

Círculo dados centro e raio – marca-se o centro A e digita-se a medida desejada para o raio, em uma janela que se abre automaticamente.
Círculo definido por três pontos – marcando-se três pontos não colineares, traça-se o círculo que passa por eles

Figura 42: 7º botão da barra de ferramentas



Fonte: Construção do próprio autor.

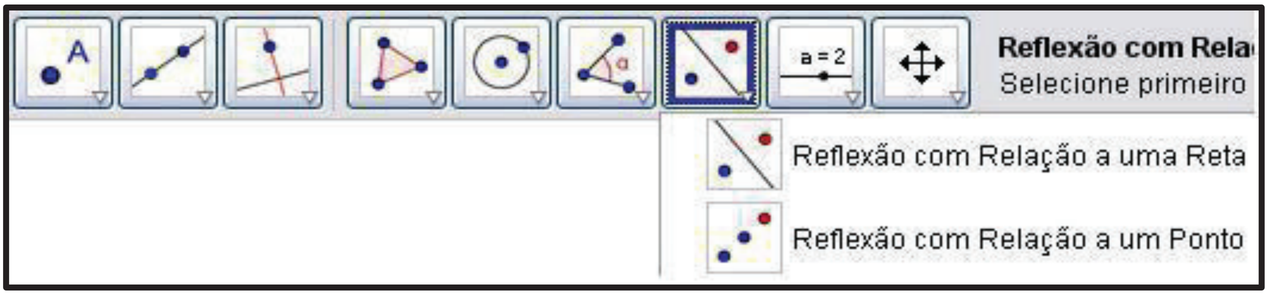
Ângulo – com essa ferramenta traçam-se ângulos: entre três pontos; entre dois segmentos; entre duas retas (ou semirretas); interior de um polígono.

Ângulo com amplitude fixa – marcam-se dois pontos e digita-se a medida desejada para o ângulo, em uma janela que se abre automaticamente.

Distância, Comprimento ou Perímetro– essa ferramenta fornece na janela algébrica, a distância entre: dois pontos; duas linhas; ou um ponto e uma linha.

Área - essa ferramenta fornece a área de um polígono, na janela geométrica.

Figura 43: 8º botão da barra de ferramentas

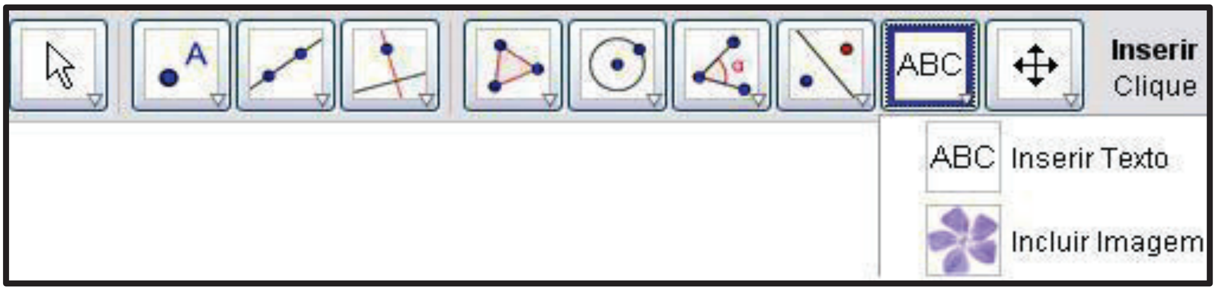


Fonte: Construção do próprio autor.

Reflexão com Relação a uma Reta - essa ferramenta desenha um objeto refletido em relação a uma reta. Clique no objeto a ser refletido, com o botão esquerdo do mouse e, a seguir, clique na reta através da qual ocorrerá a reflexão.

Reflexão com Relação a um Ponto - essa ferramenta desenha um objeto refletido em relação a um ponto. Clique, com o botão esquerdo do mouse, no objeto a ser refletido e, a seguir, clique no ponto através do qual ocorrerá a reflexão.

Figura 44: 9º botão da barra de ferramentas

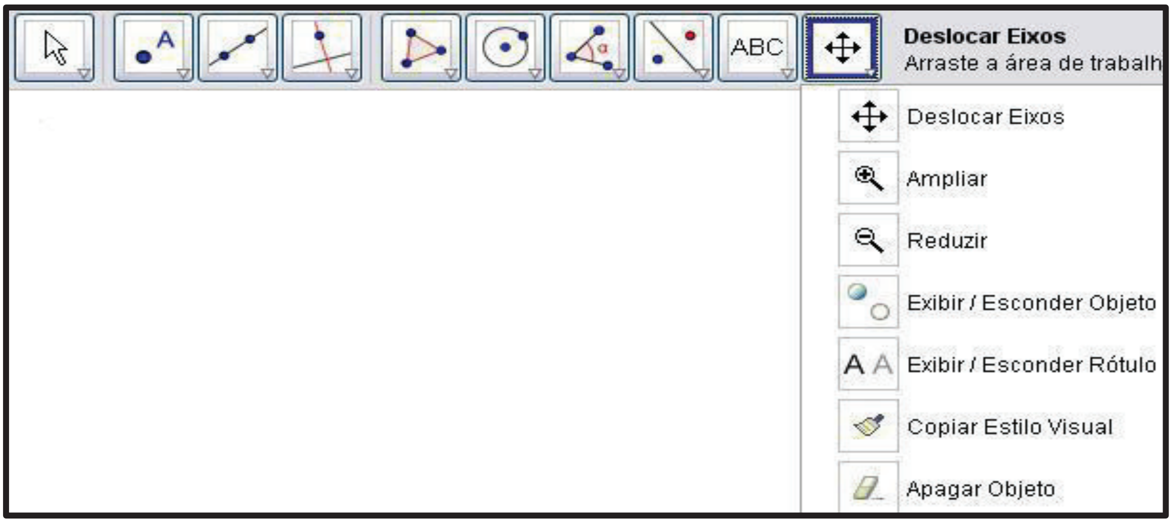


Fonte: Construção do próprio autor.

Inserir Texto – clicando, com o botão esquerdo do mouse, na área de trabalho, o texto que você digitar, na janela que será aberta, aparecerá neste local.

Incluir Imagem – essa ferramenta permite acrescentar uma imagem numa construção. O ponto onde você clicar, com o botão esquerdo do mouse, será o vértice inferior esquerdo da imagem. Após o clique na tela uma caixa de diálogo será aberta na qual você selecionará a imagem a ser inserida.

Figura 45: 10º botão da barra de ferramentas



Fonte: Construção do próprio autor.

Deslocar eixos – essa ferramenta permite arrastar a área de trabalho ou os eixos.

Ampliar – ao clicar, com o botão esquerdo do mouse, sobre qualquer lugar da área de trabalho, essa ferramenta produz um zoom de aproximação.

Reduzir – ao clicar, com o botão esquerdo do mouse, sobre qualquer lugar da área de trabalho, essa ferramenta produz um zoom de afastamento.

Exibir/esconder objeto – ao selecionar essa ferramenta e clicar, com o botão esquerdo do mouse, sobre um objeto ou mais, você o(s) estará selecionando para ser (em) escondido(s). Porém, isso só ocorrerá, de fato, quando você selecionar outra ferramenta qualquer. Você poderá voltar a exibir os objetos ocultos, selecionando novamente a ferramenta, mas ao mudar de ferramenta os objetos voltarão a ficar ocultos. Caso deseje exibir, de fato, um objeto, clique com o botão direito do mouse, na janela algébrica, sobre este objeto e selecione a opção **exibir objeto**.

Exibir/esconder rótulo – clique, com o botão esquerdo do mouse, no rótulo do objeto para escondê-lo e no objeto para voltar a exibi-lo.

Copiar estilo visual – essa ferramenta permite copiar as propriedades visuais como cor, dimensão, estilo de reta, etc., a partir de um objeto, para vários outros objetos. Escolha o objeto cujas propriedades você quer copiar. A seguir clique em todos os outros objetos que devem adotar essas propriedades.

Apagar objetos - clique com o botão esquerdo do mouse, sobre qualquer objeto que ele será apagado.

Assim como em outros softwares de geometria dinâmica, o Geogebra possui uma caixa de ferramentas destinada a realizar transformações geométricas, mas também transformações algébricas, que é o que diferencia dos outros softwares de geometria dinâmica.

O uso do software Geogebra, poderá propiciar por meio de suas ferramentas, a execução de atividades matemáticas, dando condições necessárias para que diminua a distância do professor com o computador de modo que se sinta à vontade no manuseio e não ameaçado por esta tecnologia, abordando possibilidades e limitações do uso deste software no ensino da matemática, estimulando a utilização dos computadores na prática docente para enriquecer ambientes de aprendizagem e auxiliar o professor e o aluno no processo de construção do conhecimento.

Neste capítulo apresentaremos três atividades envolvendo a proporção áurea. E para a construção destas atividades utilizaremos o software gratuito Geogebra na versão 4.0.41.0, que considero muito útil e simples de usar, e pelo fato de ser um software gratuito facilita desenvolver atividades tanto no ambiente escolar como em casa. A demonstração das afirmações fica a carga do leitor, não sendo este o principal objetivo deste capítulo. São demonstrações fácies de serem descritas, pois utilizam conceitos básicos de matemática, tais como, desigualdade triangular e Teorema de Pitágoras. Não é um curso de Geogebra detalhado, mais penso que a forma como as atividades foram descritas possibilita qualquer estudante do Ensino médio que tenha acesso a Informática e um conhecimento básico do software consiga desenvolver as atividades propostas neste capítulo.

3.2 ATIVIDAES PROPOSTAS

3.2.1 Atividade 1- PONTO ÁUREO

Preparação:

- Abra uma nova janela, para isso selecione ARQUIVO em seguida NOVA JANELA.
- Com o botão direito do mouse desmarque a opção eixos
- No Menu principal, clique em opções. Depois, ARREDONDAMENTO. Marque a opção 5 casas decimais.

Referencial Teórico

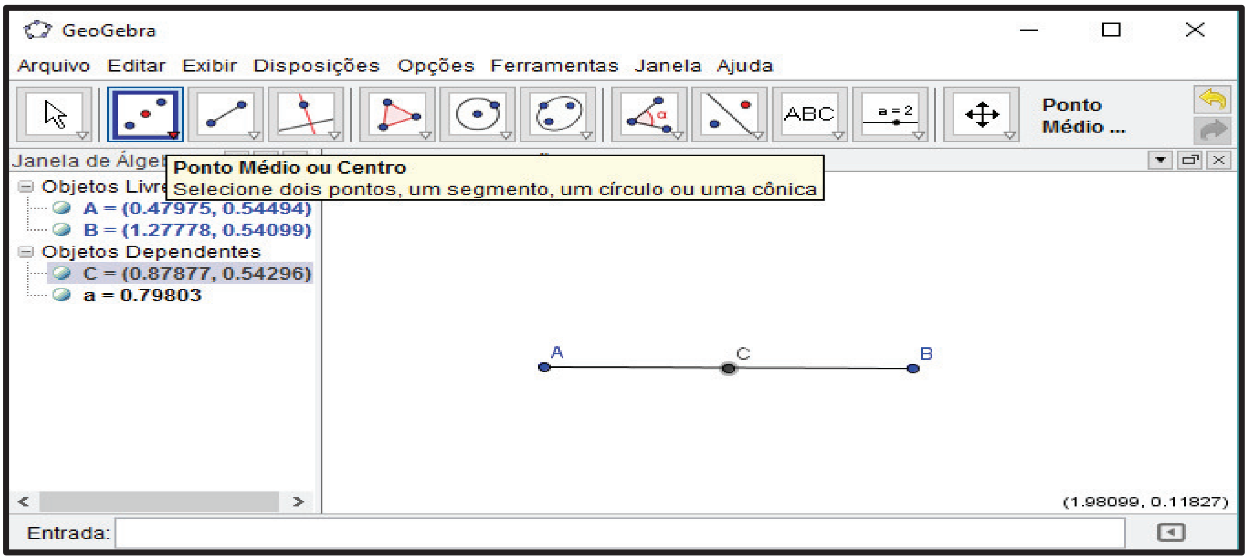
Um ponto áureo de um segmento AB é um ponto C que divide o segmento AB de forma que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$$

Etapas da Construção:

1) Construa um segmento horizontal AB de medida qualquer, ativando a ferramenta (Janela 3) SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS.

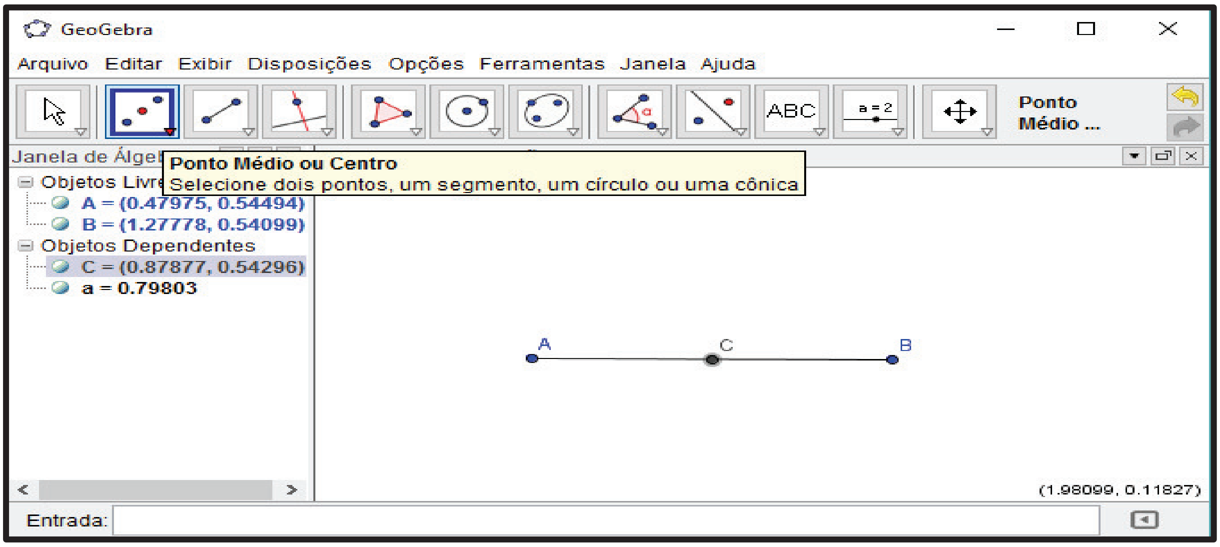
Figura 46: Segmento definido por dois pontos



Fonte: Construção do próprio autor.

2) Acione a ferramenta (Janela 2) PONTO MÉDIO OU CENTRO e clique sobre o segmento AB. Um ponto médio **C** será criado.

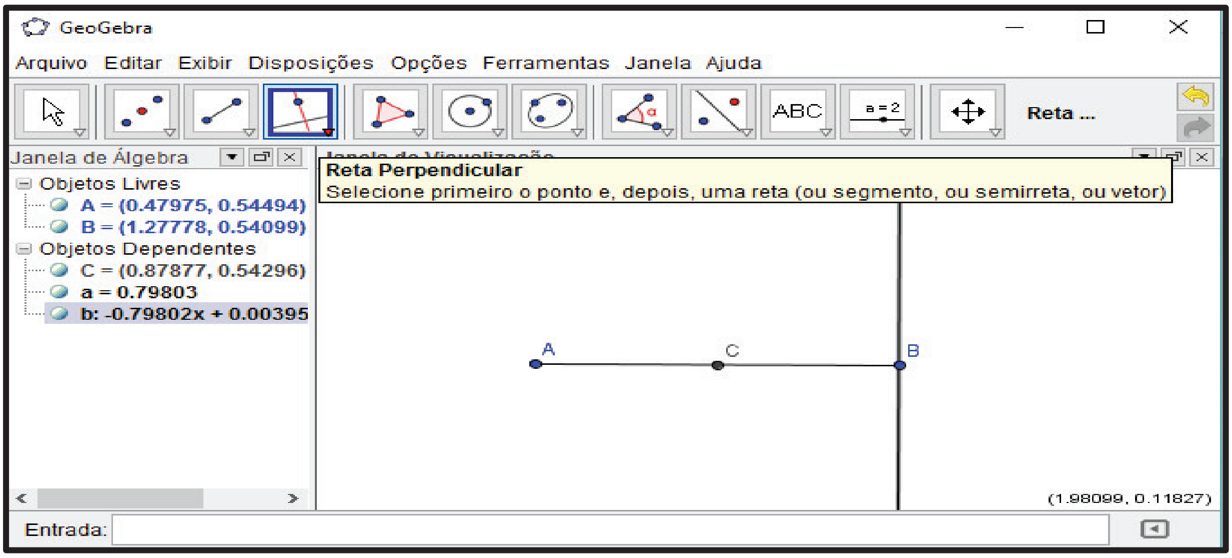
Figura 47: Ponto médio C



Fonte: Construção do próprio autor.

3) Acione a ferramenta (Janela 4) RETA PERPENDICULAR, clique sobre o ponto **B** e, em seguida, sobre o segmento AB. Uma reta perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto **B** será criada.

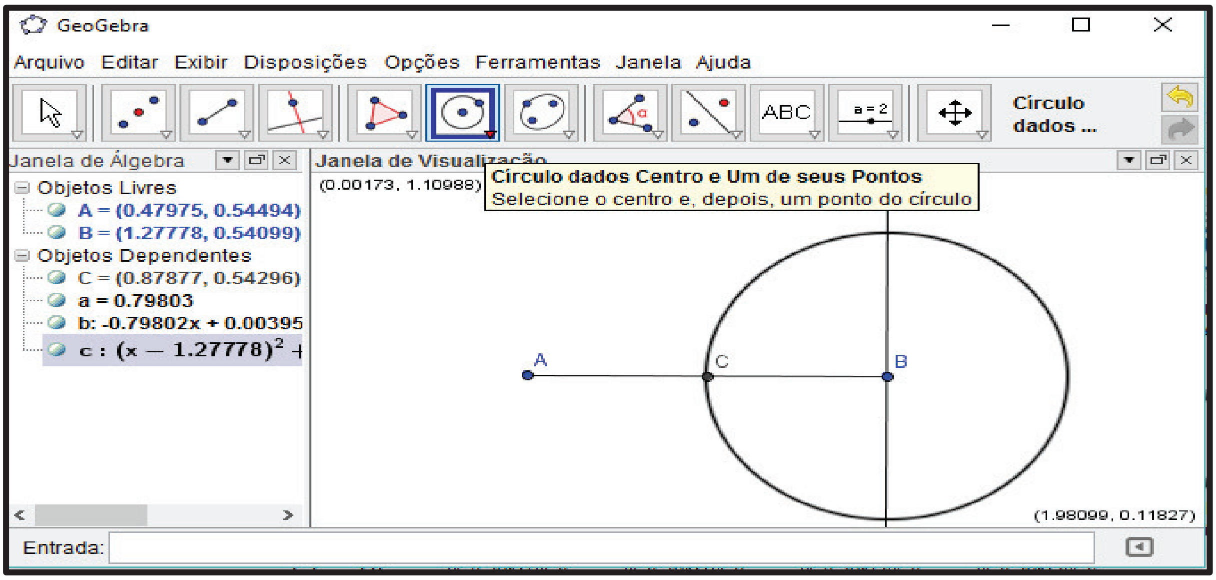
Figura 48: Reta perpendicular



Fonte: Construção do próprio autor.

4) Acione a ferramenta (Janela 6) CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS, clique no ponto **B** e, em seguida, sobre o ponto **C**. Uma circunferência com centro em **B** e raio BC será criada.

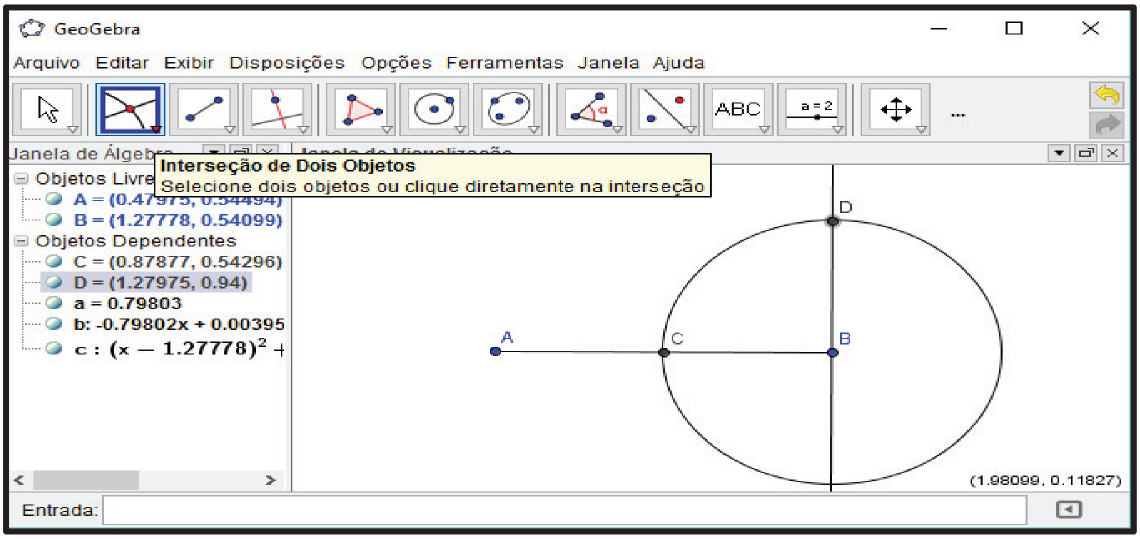
Figura 49: Circunferência com centro em B e raio BC



Fonte: Construção do próprio autor.

5) Acione a ferramenta (Janela 2) INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS, marque a interseção superior da circunferência com a reta perpendicular. Um ponto **D** será criado.

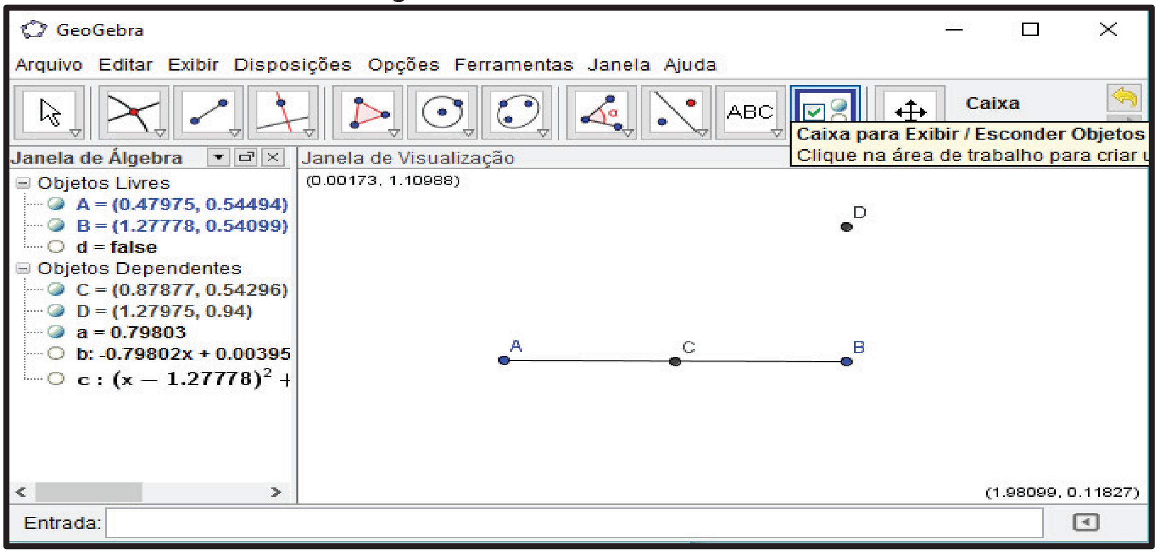
Figura 50: Interseção de dois objetos



Fonte: Construção do próprio autor.

6) Acione a ferramenta (Janela 11) EXIBIR/ESCONDER OBJETO e clique sobre a circunferência e sobre a reta perpendicular e, em seguida, aperte ESC. A circunferência e a reta perpendicular ficarão oculta.

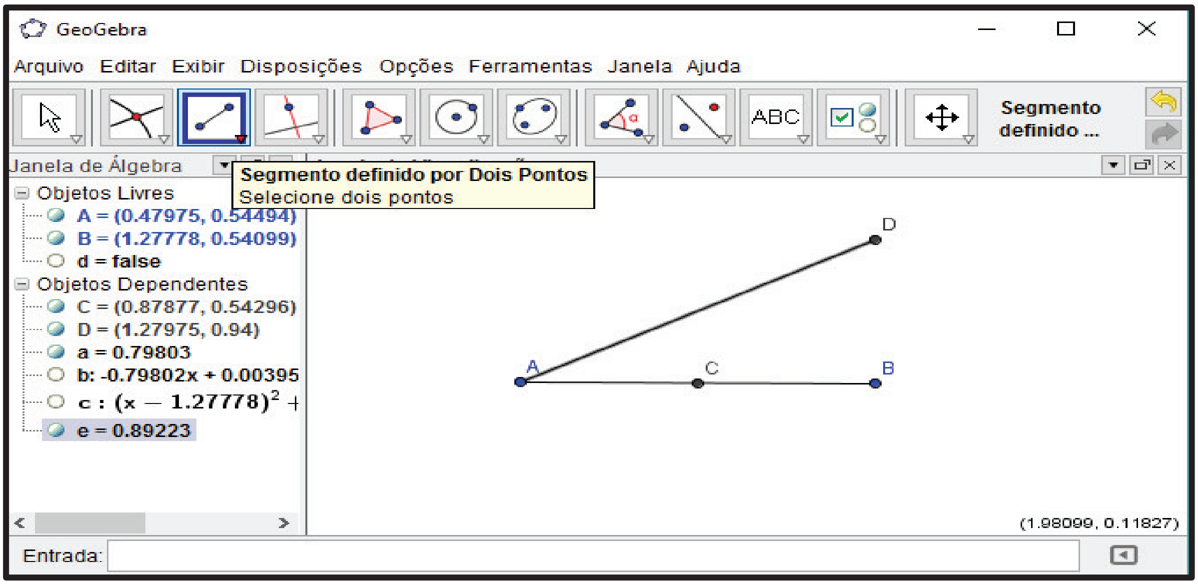
Figura 51: Esconder a reta e a circunferência



Fonte: Construção do próprio autor.

7) Acione a ferramenta (Janela 3) SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS, clique no ponto **A** e, em seguida, no ponto **D**. Um segmento AD será criado.

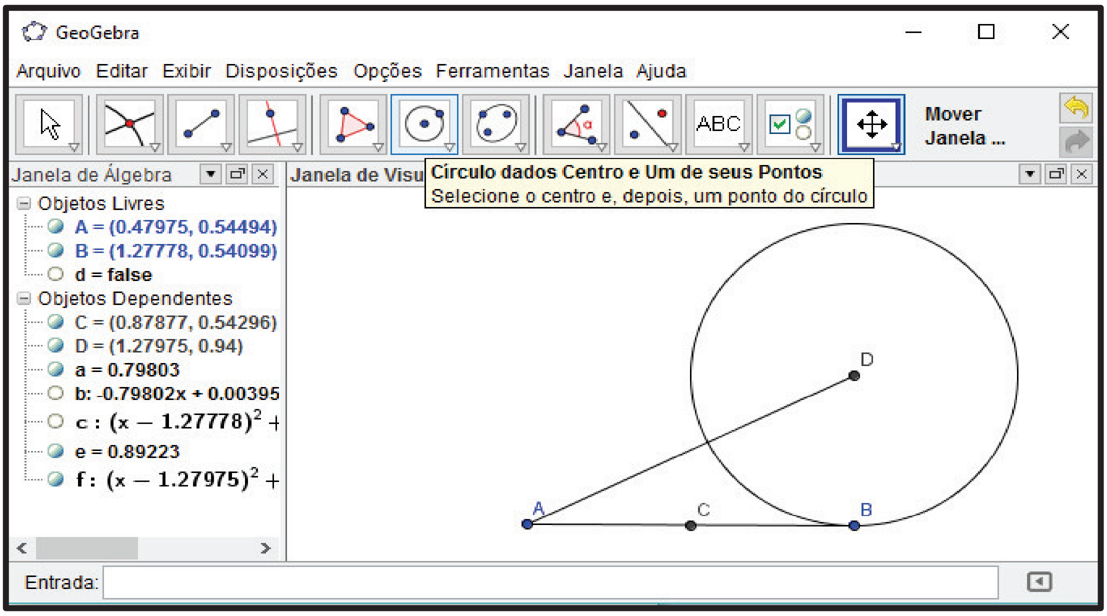
Figura 52: Segmento definido por dois pontos



Fonte: Construção do próprio autor.

8) Acione a ferramenta (Janela 6) CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS, clique no ponto **D** e, em seguida, sobre o ponto **B**. Uma circunferência com centro em **D** e raio DC será criada.

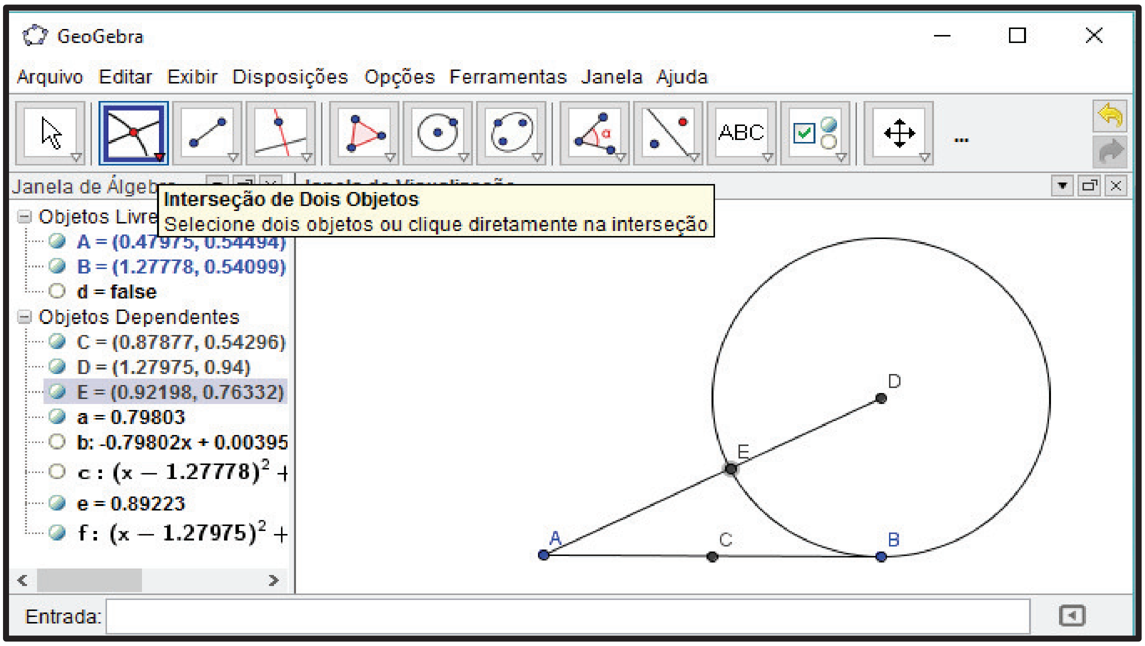
Figura 53: Círculo definido pelo centro e um de seus pontos



Fonte: Construção do próprio autor.

9) Acione a ferramenta (Janela 2) INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS, clique sobre a circunferência e, em seguida, sobre o segmento AD. Um ponto **E** será criado.

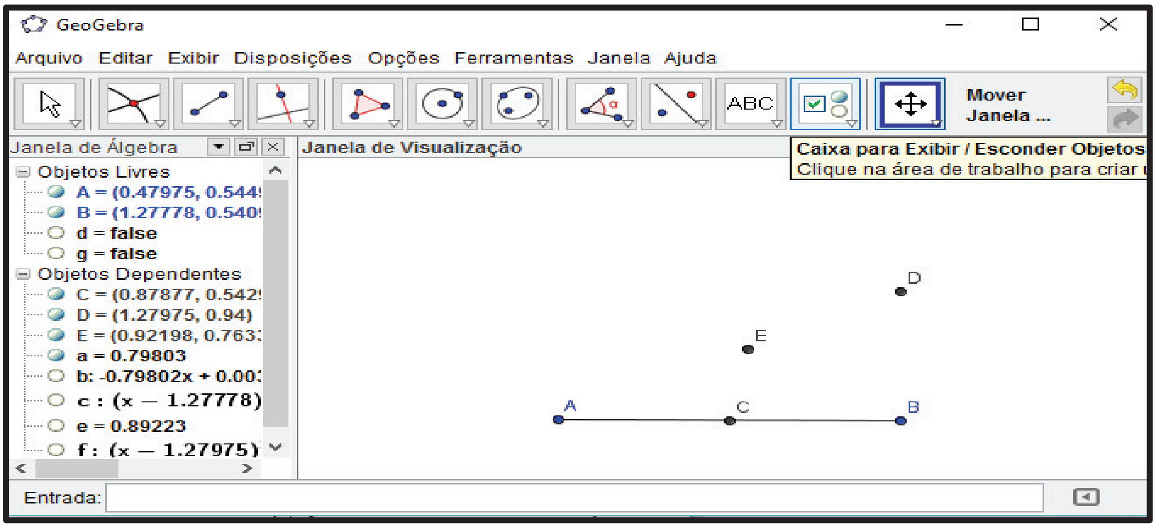
Figura 54: Interseção de dois objetos



Fonte: Construção do próprio autor.

10) Acione a ferramenta (Janela 11) EXIBIR/ESCONDER OBJETO e clique sobre a circunferência criada anteriormente e sobre o segmento AD e, em seguida, aperte ESC. A circunferência e o segmento AD ficarão oculta.

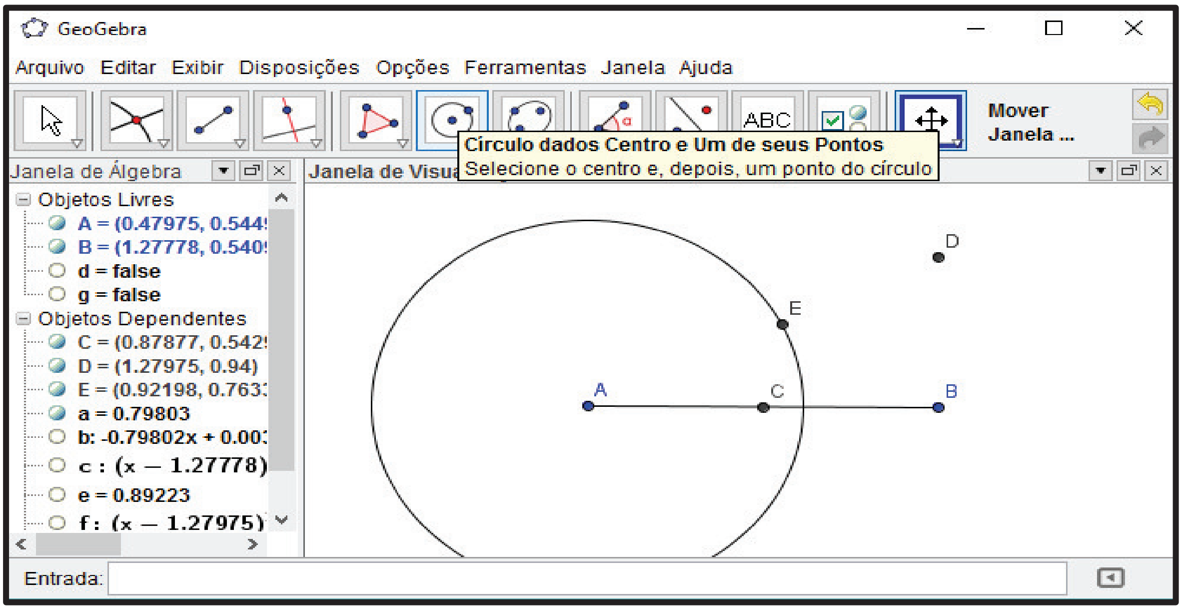
Figura 55: Esconder a circunferência e o segmento AD



Fonte: Construção do próprio autor.

11) Acione a ferramenta (Janela 6) CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS, clique no ponto **A** e, em seguida, sobre o ponto **E**. Uma circunferência com centro em **A** e raio AE será criada.

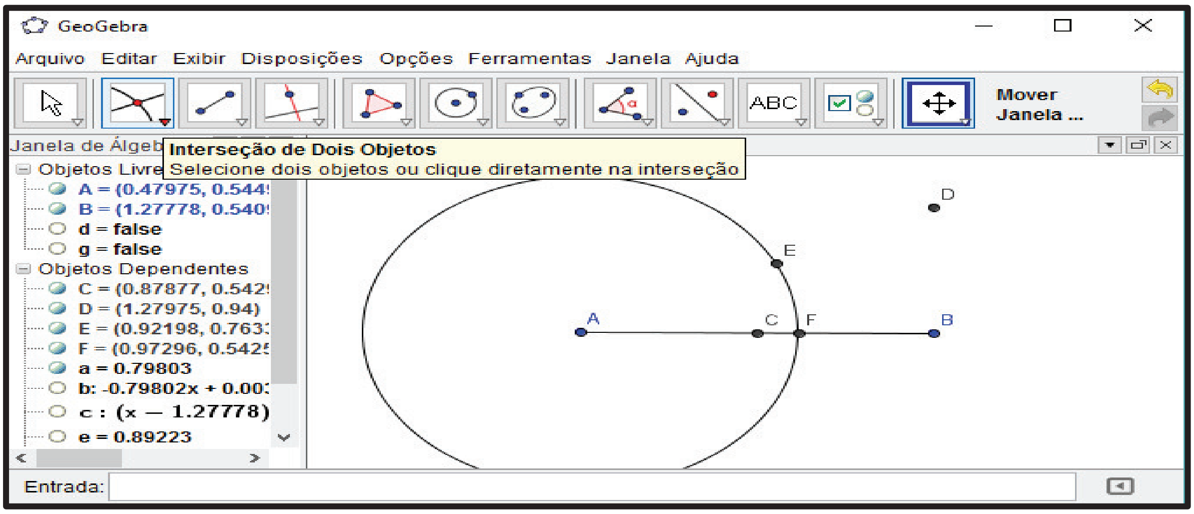
Figura: 56: Círculo definido pelo centro e um de seus pontos.



Fonte: Construção do próprio autor.

12)Acione a ferramenta (Janela 2) INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS, clique sobre a circunferência e, em seguida, sobre o segmento AB. Um ponto **F** será criado.

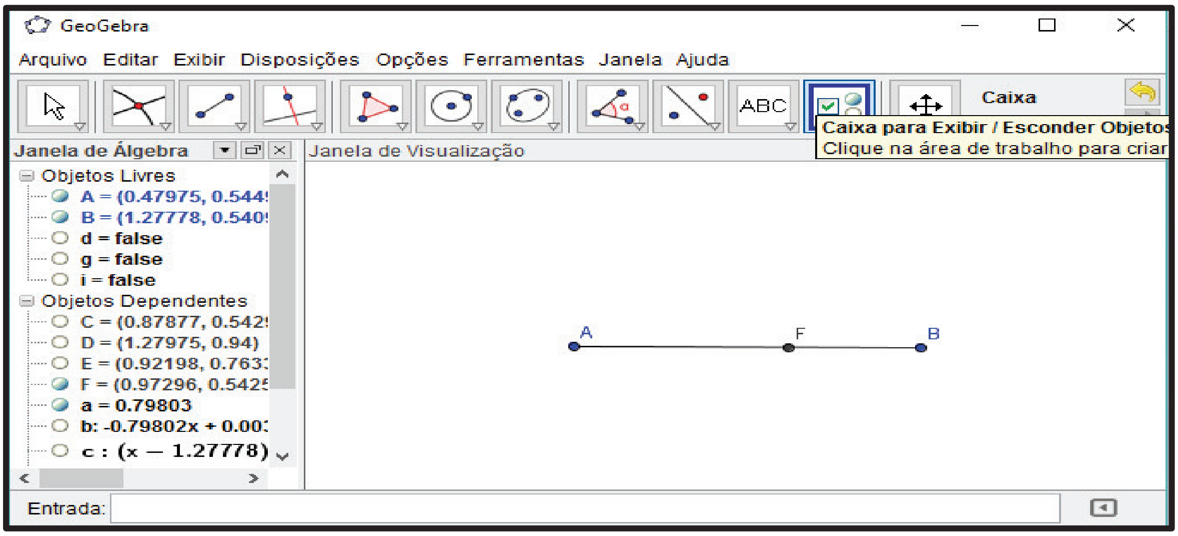
Figura 57: Interseção entre a circunferência e o segmento AB



Fonte: Construção do próprio autor.

13) Acione a ferramenta (Janela 11) EXIBIR/ESCONDER OBJETO e clique sobre a circunferência criada anteriormente e sobre os pontos **C**, **E** e **D** e, em seguida, aperte ESC. O ponto **F** é o que divide o segmento AB na razão áurea.

Figura 58: Esconder a circunferência e os pontos C,D e E

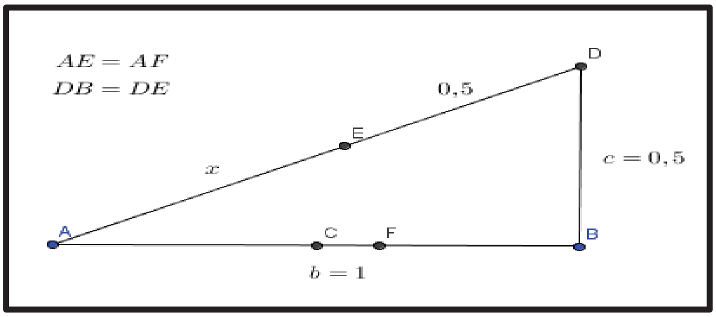


Fonte: Construção do próprio autor.

Justificativa da Construção

Sem perda de generalidade podemos considerar AB um segmento unitário e x a medida de AE, sabendo que AE é igual a AF por construção e que C é ponto médio de AB. Podemos criar o seguinte triângulo ΔABD com essas características:

Figura 59: Triângulo ABD



Fonte: Construção do próprio autor.

Por construção, temos um triângulo retângulo com um cateto medindo 1, um outro cateto medindo $\frac{1}{2}$ e hipotenusa medindo $x + \frac{1}{2}$. Aplicando o teorema de Pitágoras temos,

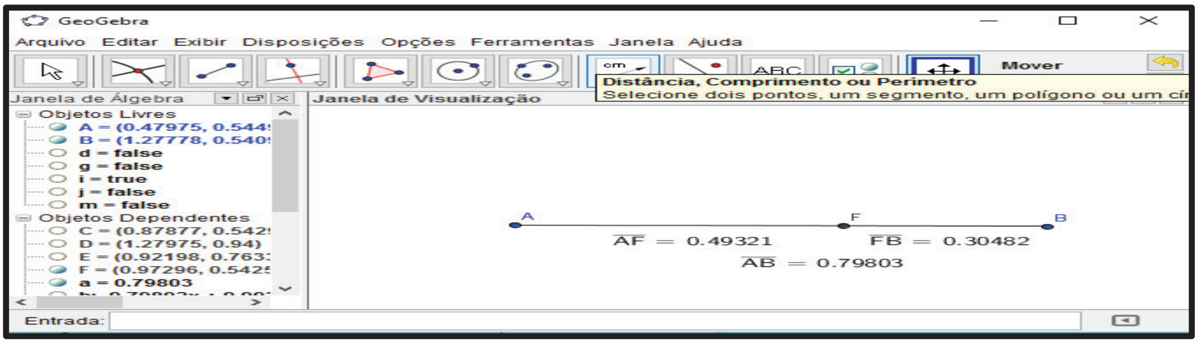
$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ e assim, $x^2 + 2.x.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Logo, $x^2 + x - 1 = 0$.(as raízes desta equação gera o número áureo), e por isso, que a construção gera um ponto áureo (o ponto **F**).

Ilustração

O ponto F é o ponto que divide o segmento na razão áurea.

1) Acione a ferramenta (Janela 8) DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO e, em seguida, meça as distâncias dos segmentos **AB**, **AF** e **FB.**

Figura 60: Segmentos



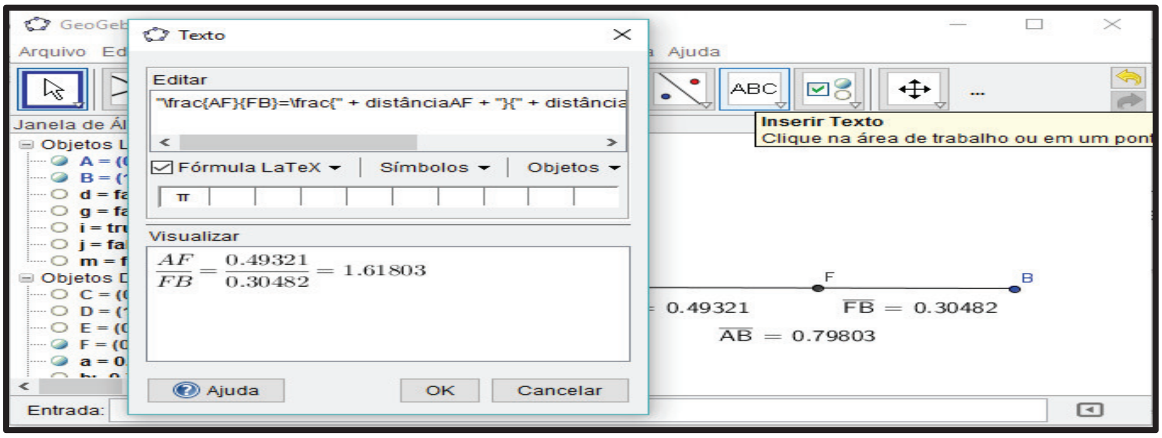
Fonte: Construção do próprio autor.

2) Acione a ferramenta (Janela 10) INSERIR TEXTO e clique no lugar onde quer que o texto apareça. E digite o seguinte texto:

"\frac{AF}{FB}=\frac{" + distânciaAF + "}{" + distânciaFB + "}=" + (distânciaAF / distânciaFB)

3) Ative a caixa LATEX e clique OK.

Figura 61: Texto Latex 1



Fonte: Construção do próprio autor.

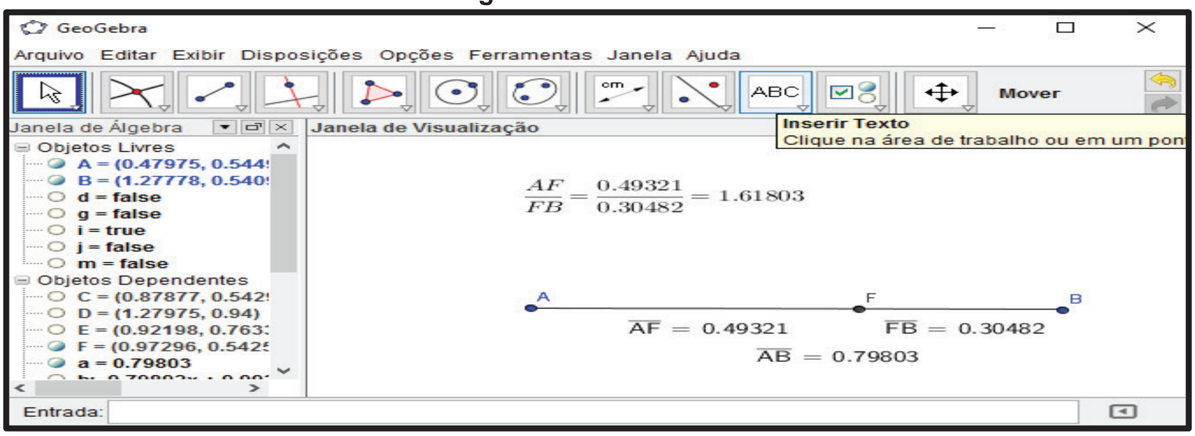
4) Acione a ferramenta (Janela 10) INSERIR TEXTO e clique no lugar onde quer que o texto apareça. E digite o seguinte texto:

“\frac{AB}{AF}=\frac{“ + distânciaAB + “}{“ + distânciaAF + “}=” + (distânciaAB / distânciaAF)

5) Ative a caixa LATEX e clique OK.

A ilustração obtida deverá ser semelhante ao que aparece na figura seguinte.

Figura 62: Texto Latex 2



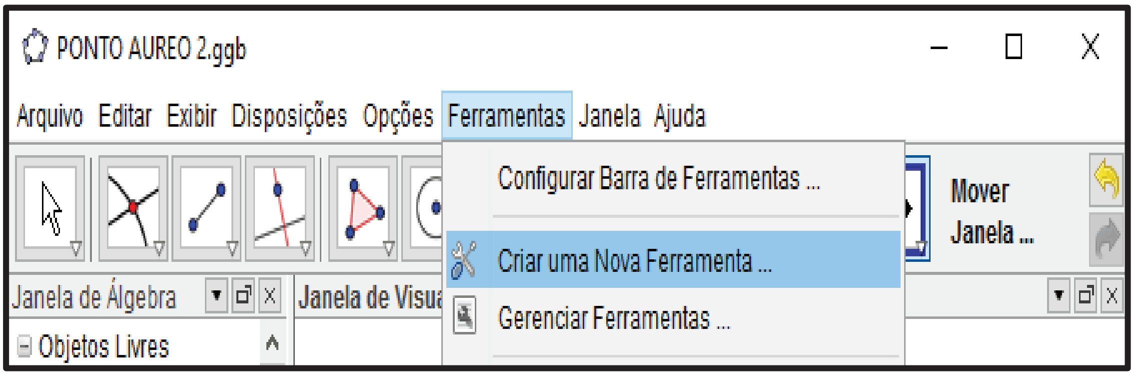
Fonte: Construção do próprio autor.

3. 2.1.1 Gerando uma Ferramenta para criar um Ponto Áureo

A criação desta ferramenta acarretará que dado dois pontos, a mesma encontrará o ponto que divide o segmento na razão áurea.

1) No Menu Principal, clique em FERRAMENTAS e, posteriormente, clique em “Criar uma nova ferramenta...”.

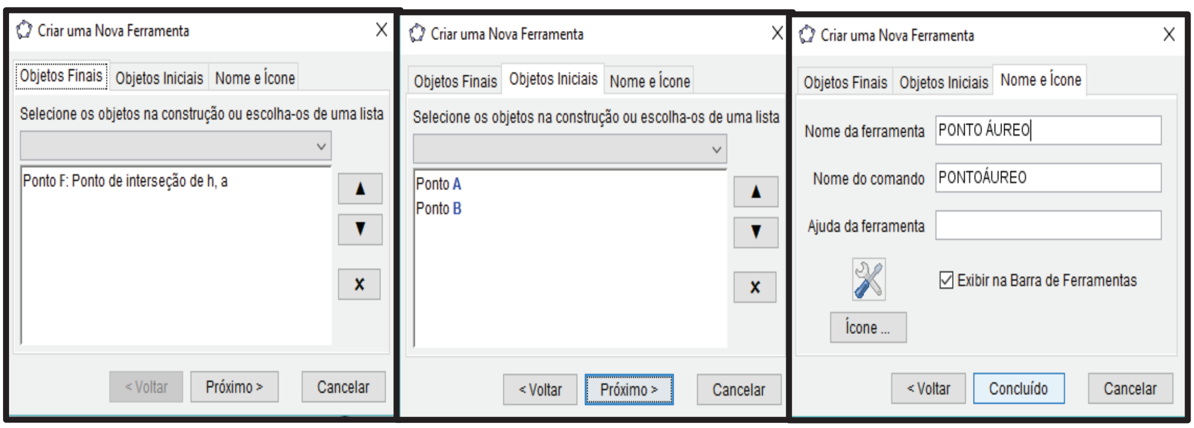
Figura 63: Criar nova ferramenta



Fonte: Construção do próprio autor.

2) Clique na janela que abriu e selecione “Ponto F: ponto de interseção de h, a” e, posteriormente, clique em “Próximo”. Abrirá uma opção “Objetos iniciais” e selecione os pontos A e B e, em seguida, “Próximo”. Aparecerá uma opção para dar um nome para ferramenta. Nomeie a ferramenta de “PONTO ÁUREO” e, posteriormente, clique em “Concluído”.

Figura 64: Ponto Áureo



Fonte: Construção do próprio autor.

INTERESSANTE: no Menu Principal clique em OPÇÕES e, em seguida, em GRAVAR CONFIGURAÇÕES. Com isso a ferramenta criada não irá desaparecer quando abrir uma nova janela.

Figura 65: Ferramenta Ponto Áureo

Fonte: Construção do próprio autor.

3. 2. 2 Atividade 2- RETÂNGULO ÁUREO

Preparação:

- Abra uma nova janela, para isso selecione ARQUIVO em seguida NOVA JANELA.
- Com o botão direito do mouse desmarque a opção eixos

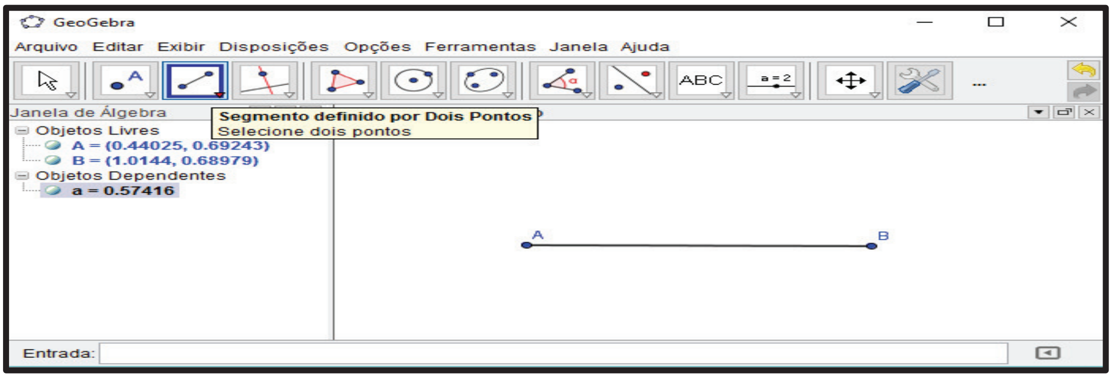
Referencial Teórico

Um retângulo áureo é o retângulo cuja a razão entre o seu maior lado e o menor lado é igual ao número de ouro $\emptyset = 1{,}618$ ...

Etapas da Construção:

1) Construa um segmento horizontal AB de medida qualquer, ativando a ferramenta (Janela 3) SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS.

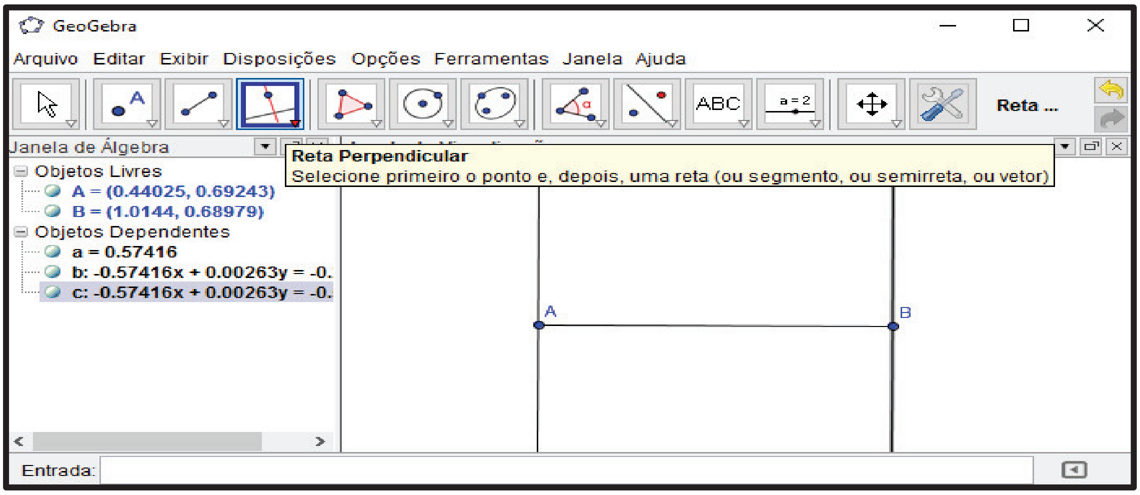
Figura 66: Segmento definido por dois pontos



Fonte: Construção do próprio autor.

2) Acione a ferramenta (Janela 4) RETA PERPENDICULAR, e pelo segmento AB trace duas retas perpendiculares: uma passando pelo ponto A e outra pelo ponto B.

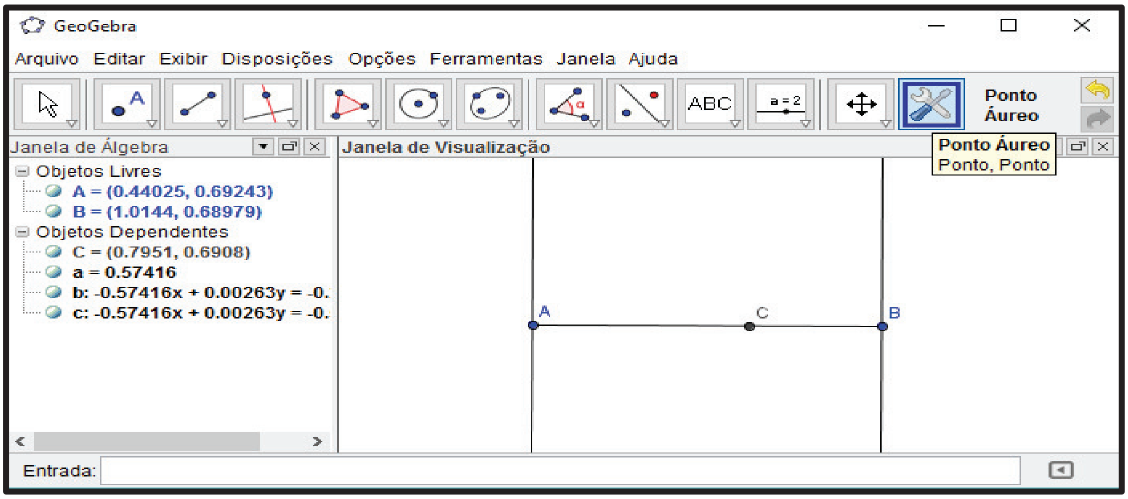
Figura 67: Reta Perpendicular



Fonte: Construção do próprio autor.

3) Acione a ferramenta (Janela 12) criada anteriormente na atividade 1, PONTO ÁUREO e clique sobre as extremidades de A e B. Um ponto C que divide segmento na razão áurea será criado.

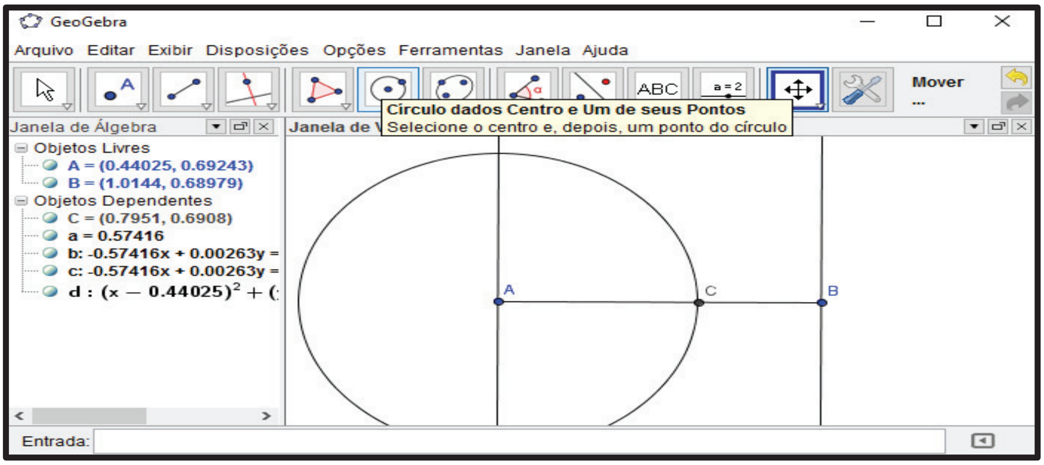
Figura 68: Ferramenta Ponto Áureo



Fonte: Construção do próprio autor.

4) Acione a ferramenta (Janela 6) CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS, clique no ponto **A** e, em seguida, sobre o ponto **C**. Uma circunferência com centro em **A** e raio AC será criada.

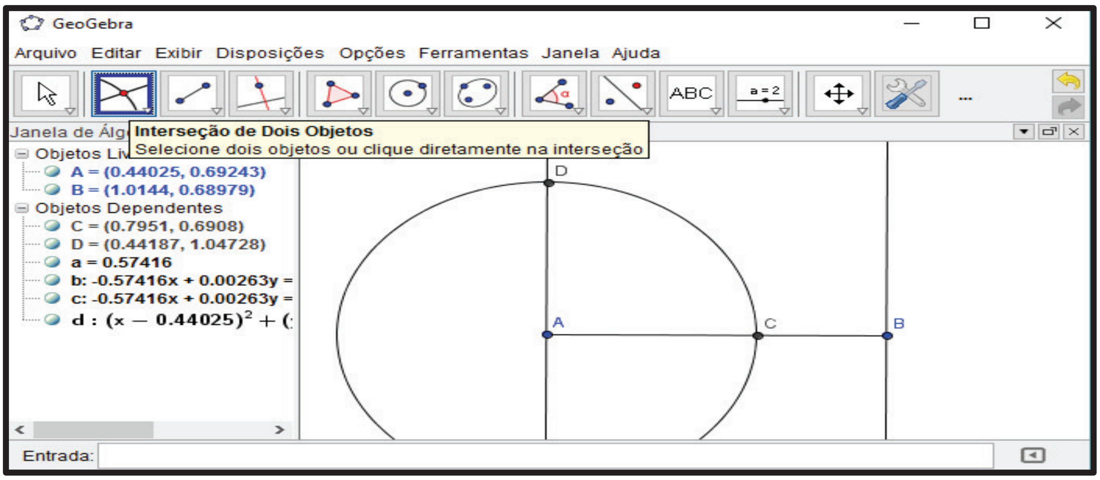
Figura 69: Círculo definido pelo centro e um de seus pontos



Fonte: Construção do próprio autor.

5) Acione a ferramenta (Janela 2) INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS, marque a interseção superior da circunferência com a reta perpendicular. Um ponto **D** será criado.

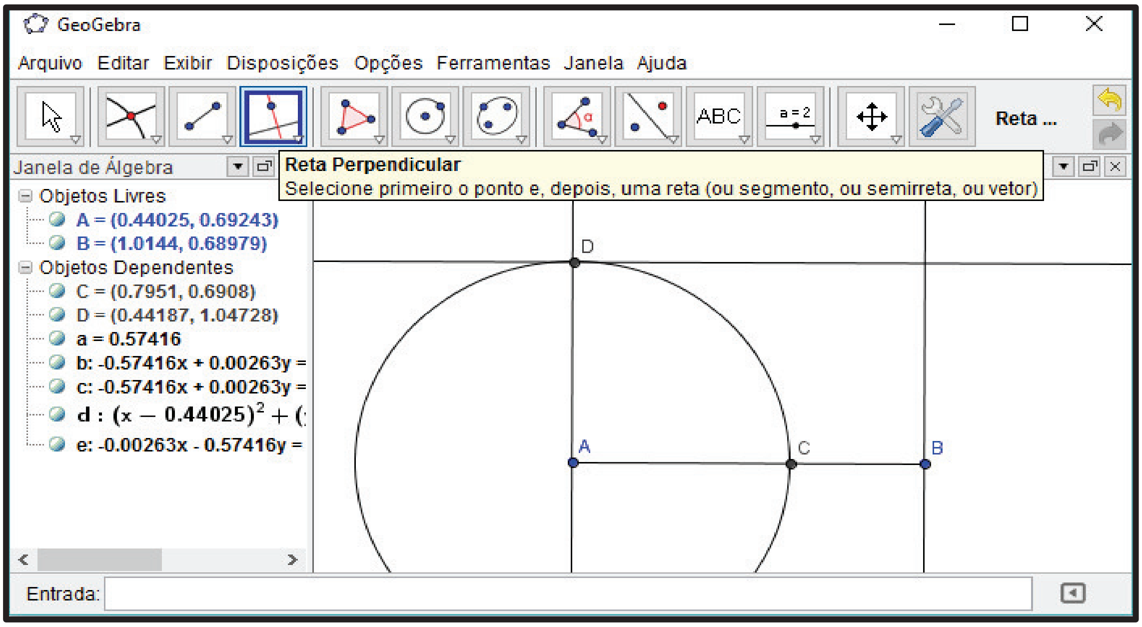
Figura 70: Interseção da circunferência com a reta perpendicular



Fonte: Construção do próprio autor.

6) Acione a ferramenta (Janela 4) RETA PERPENDICULAR e trace uma reta perpendicular “b”, passando por D.

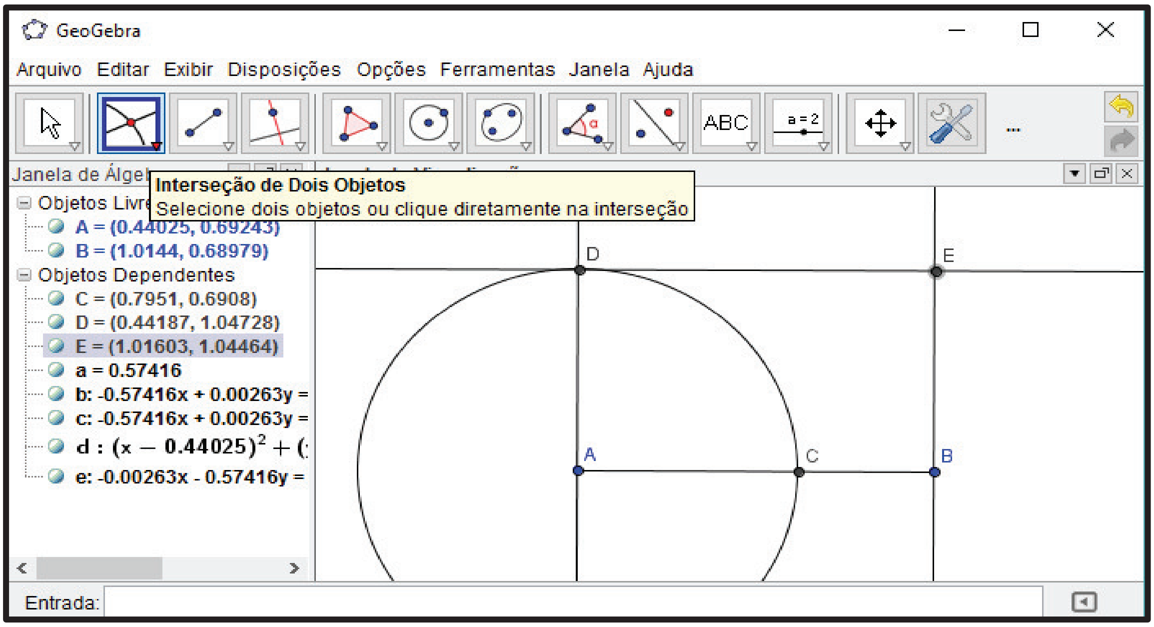
Figura 71: Reta perpendicular “b” passando por D



Fonte: Construção do próprio autor.

7) Acione a ferramenta (Janela 2) INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS e marque a interseção das retas perpendiculares “c” e “e”. Um ponto **E** será criado.

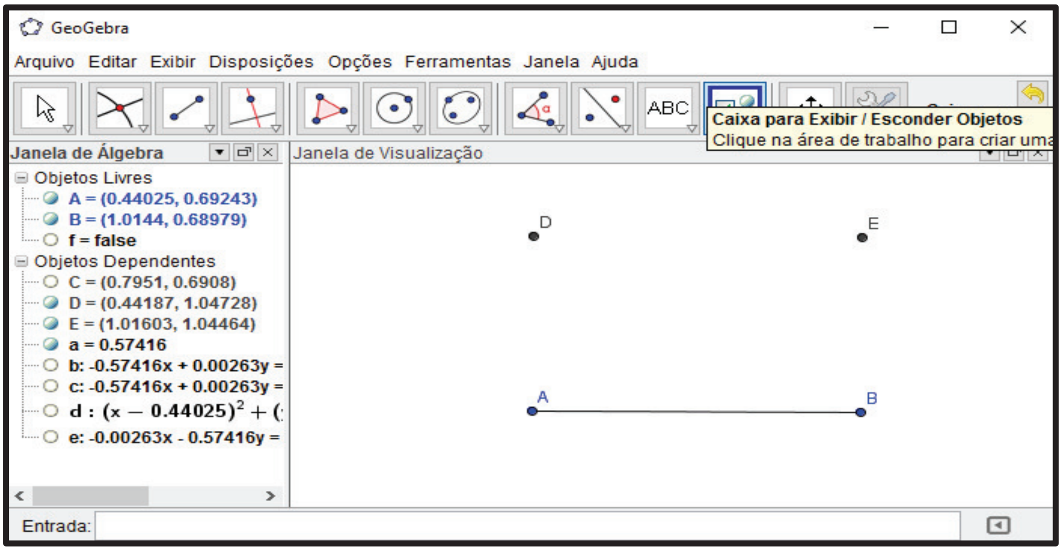
Figura 72: Interseção de retas perpendiculares



Fonte: Construção do próprio autor.

8) Acione a ferramenta (Janela 11) EXIBIR/ESCONDER OBJETO e clique sobre a circunferência, sobre o ponto C e sobre todas as retas, em seguida, aperte ESC. Com isso, só devem estar visíveis os vértices do retângulo (A, B, E, D) e o segmento AB.

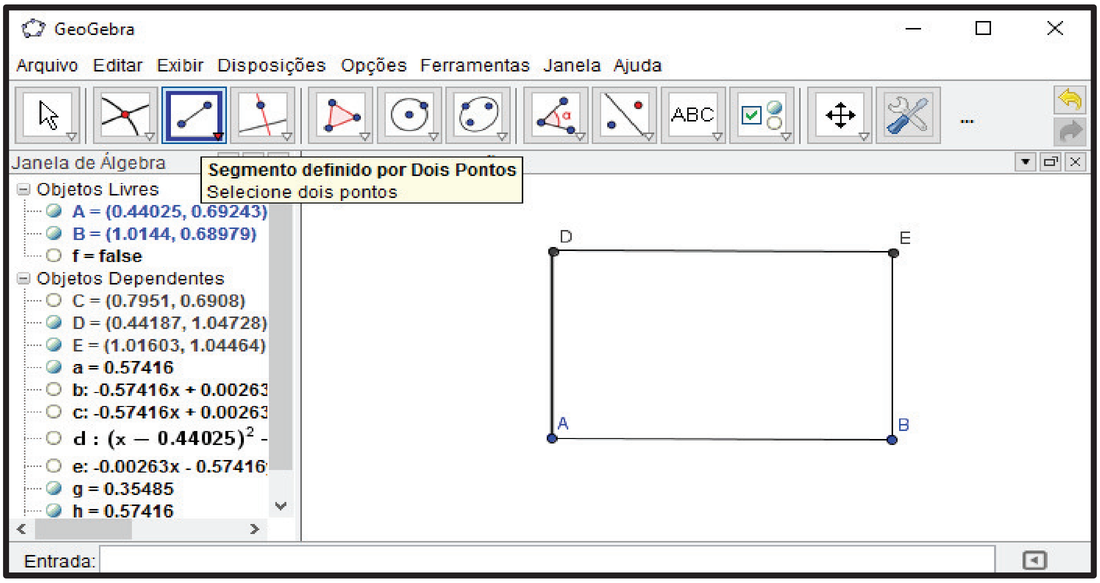
Figura 73: Esconder a circunferência, ponto C e as retas.



Fonte: Construção do próprio autor.

9) Construa os segmentos BE, ED e DA, ativando a ferramenta (Janela 3) SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS.

Figura 74: Segmento definido por dois pontos

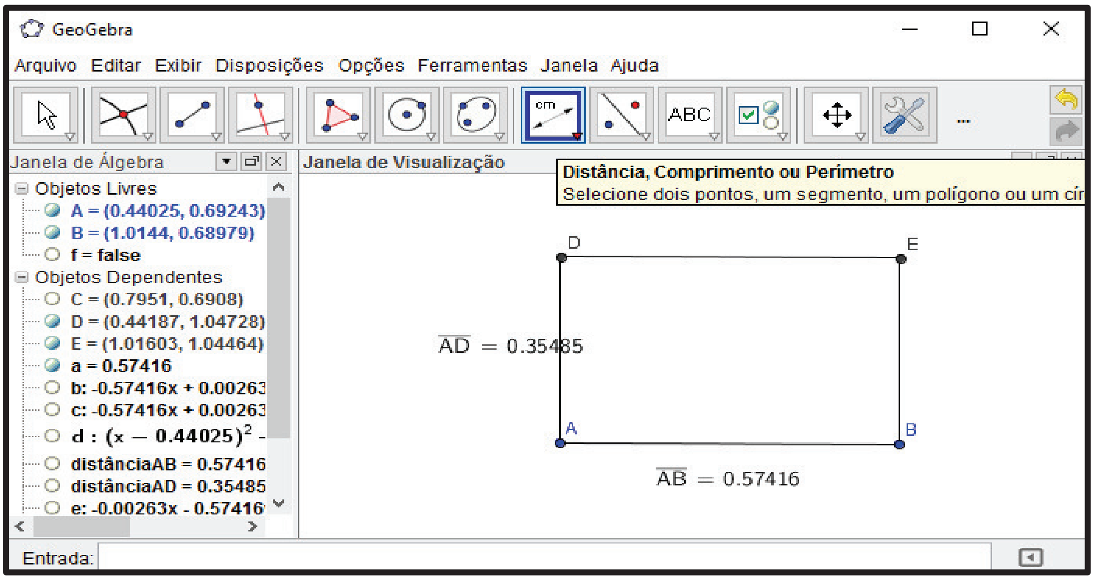


Fonte: Construção do próprio autor.

O retângulo criado é áureo? Verifique executando os comandos seguintes:

1) Acione a ferramenta (Janela 8) DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO e meça as distâncias dos segmentos **AB** e **AD** (clique sobre **A** e **B** e, em seguida, **A** e **D**).

Figura 75: Distâncias dos segmentos AB e AD

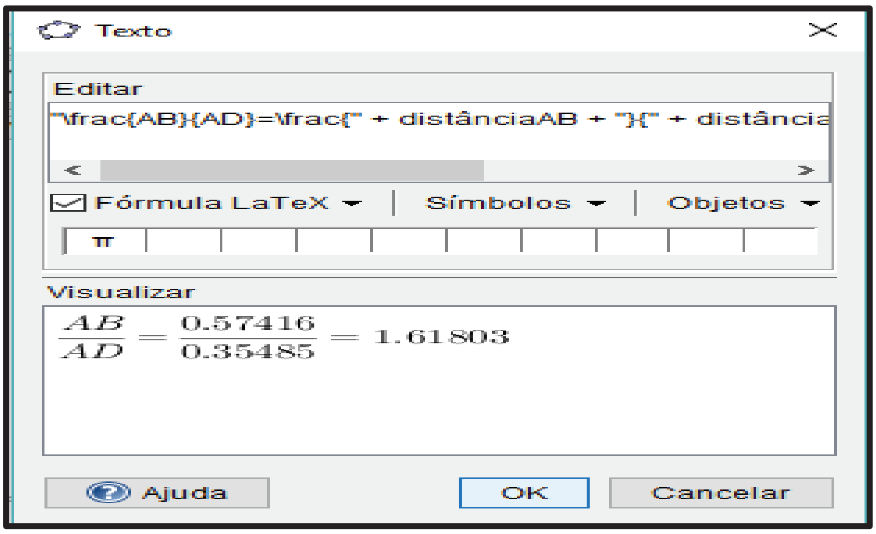


Fonte: Construção do próprio autor.

2) Acione a ferramenta (Janela 10) INSERIR TEXTO e clique no lugar onde quer que o texto apareça. E digite o seguinte texto:

"\frac{AB}{AD}=\frac{" + distânciaAB + "}{" + distânciaAD + "}=" + (distânciaAB / distânciaAD)

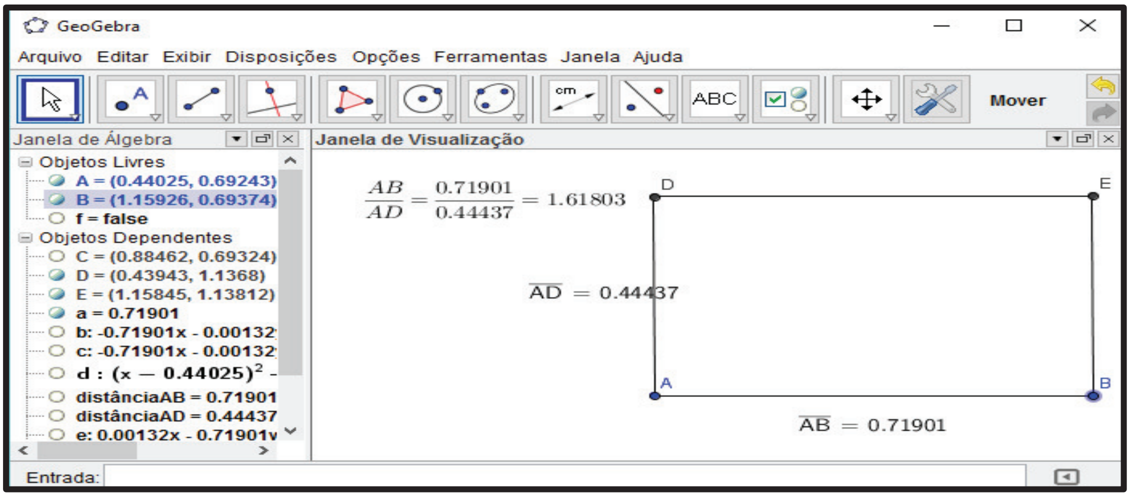
Figura76: Texto Latex 3



Fonte: Construção do próprio autor.

Portanto o retângulo é áureo, pois a razão entre o seu maior lado e o menor lado é igual ao número de ouro $\emptyset = 1{,}618 \ldots$

Figura 77: Retângulo Áureo



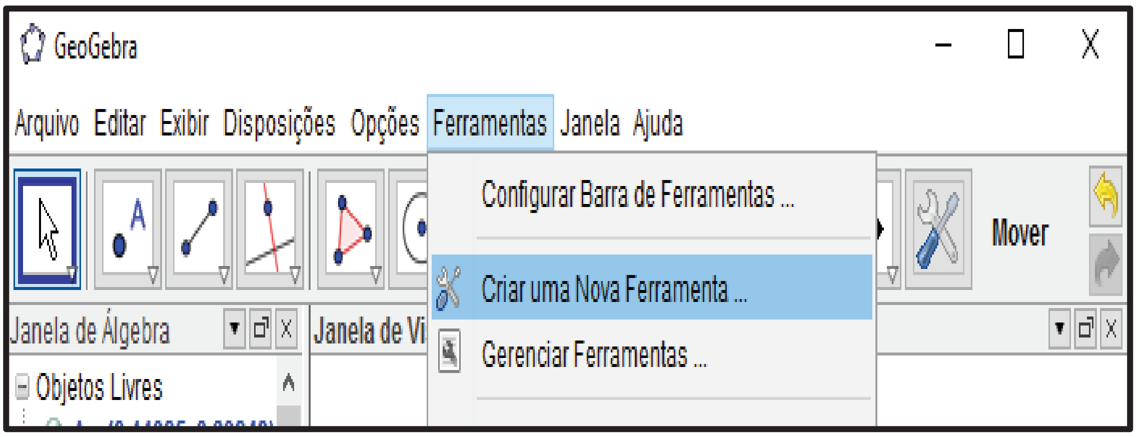
Fonte: Construção do próprio autor.

3. 2. 2.1 Gerando uma ferramenta para criar um retângulo áureo

A criação desta ferramenta acarretará que dado dois pontos, a mesma criará um retângulo áureo a partir dos pontos dados.

1) No Menu Principal, clique em FERRAMENTAS e, posteriormente, clique em "Criar uma nova ferramenta...".

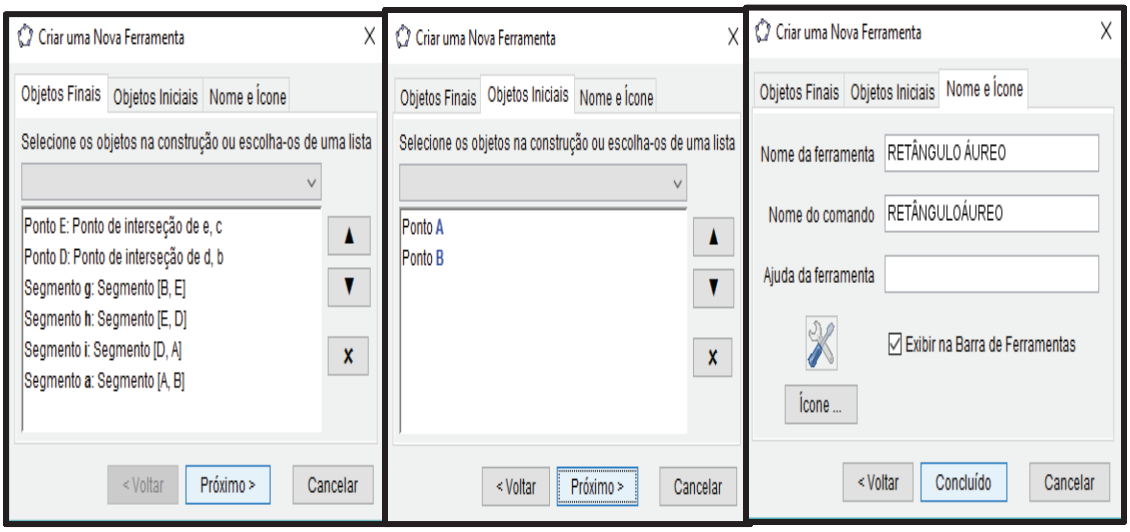
Figura 78: Criar uma nova ferramenta



Fonte: Construção do próprio autor.

2) Clique na janela que abriu e selecione: o ponto E, ponto D, segmento BE, segmento ED, segmento DA e segmento AB e, posteriormente, clique em “Próximo”. Abrirá uma opção “Objetos iniciais” e selecione os pontos A e B e, em seguida, “Próximo”. Aparecerá uma opção para dar um nome para ferramenta. Nomeie a ferramenta de “RETÂNGULO ÁUREO” e, posteriormente, clique em “Concluído”.

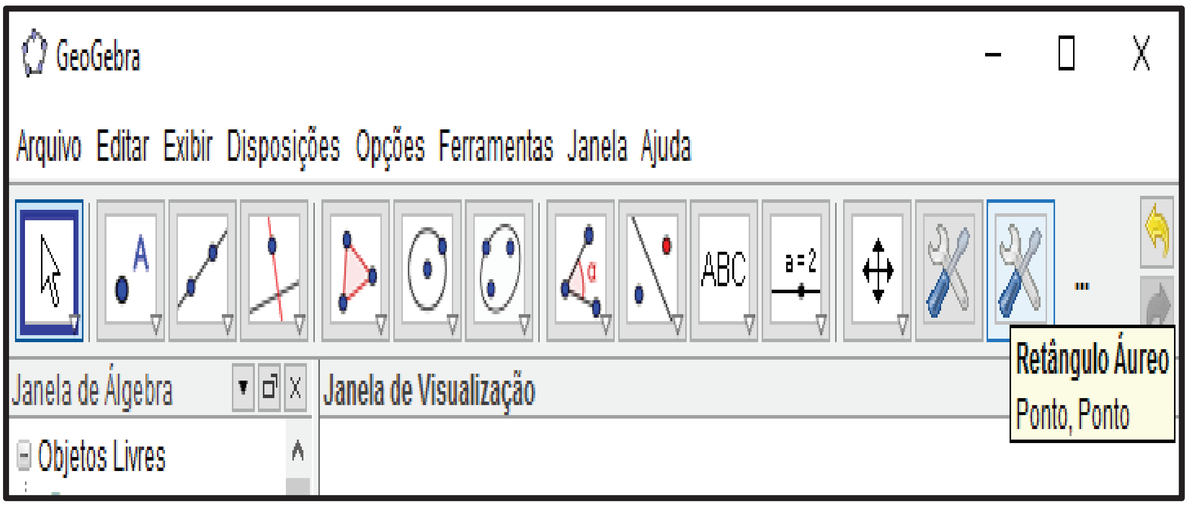
Figura 79: Criar um retângulo áureo



Fonte: Construção do próprio autor.

INTERESSANTE: no Menu Principal clique em OPÇÕES e, em seguida, em GRAVAR CONFIGURAÇÕES. Com isso a ferramenta criada não irá desaparecer quando abrir uma nova janela.

Figura 80: Ferramenta Retângulo Áureo



Fonte: Construção do próprio autor.

3. 2. 3 Atividade 3 - ESPIRAL ÁUREA OU LOGARÍTMICA

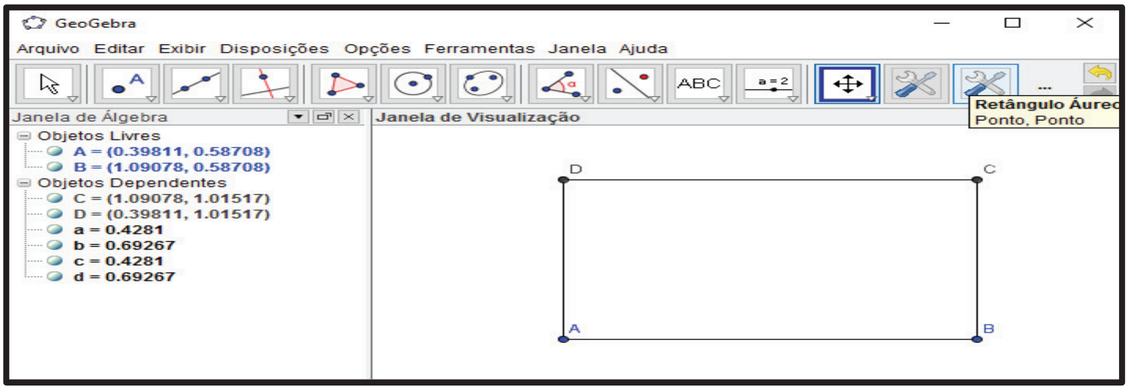
Preparação:

- Abra uma nova janela, para isso selecione ARQUIVO em seguida NOVA JANELA.
- Com o botão direito do mouse desmarque a opção eixos.

Etapas da Construção:

1) Acione a ferramenta (Janela 13) criada anteriormente na atividade 2, RETÂNGULO ÁUREO e clique, na janela de visualização, sobre dois lugares diferentes. Um retângulo ABCD áureo será criado.

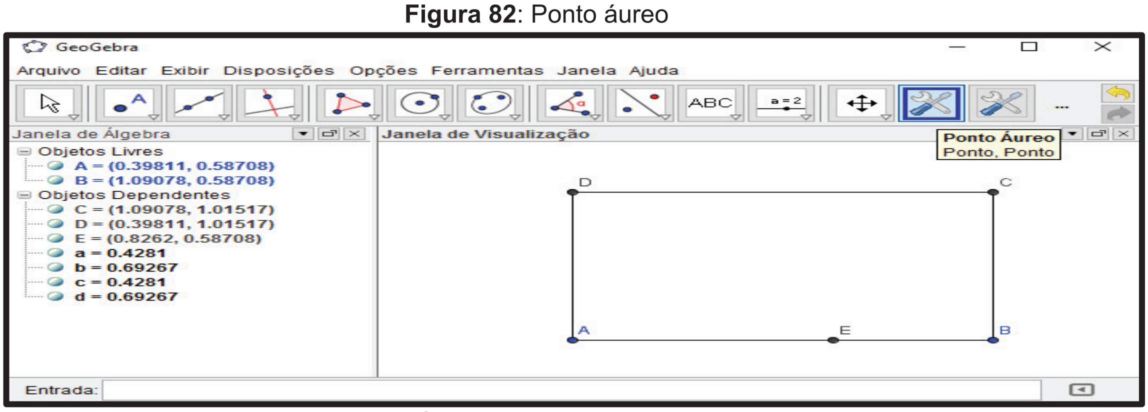
Figura 81: Retângulo áureo ABCD



Fonte: Construção do próprio autor.

2) Acione a ferramenta (Janela 12) criada anteriormente na atividade 1, PONTO ÁUREO e clique sobre as extremidades de A e B. Um ponto E que divide o segmento na razão áurea será criado.

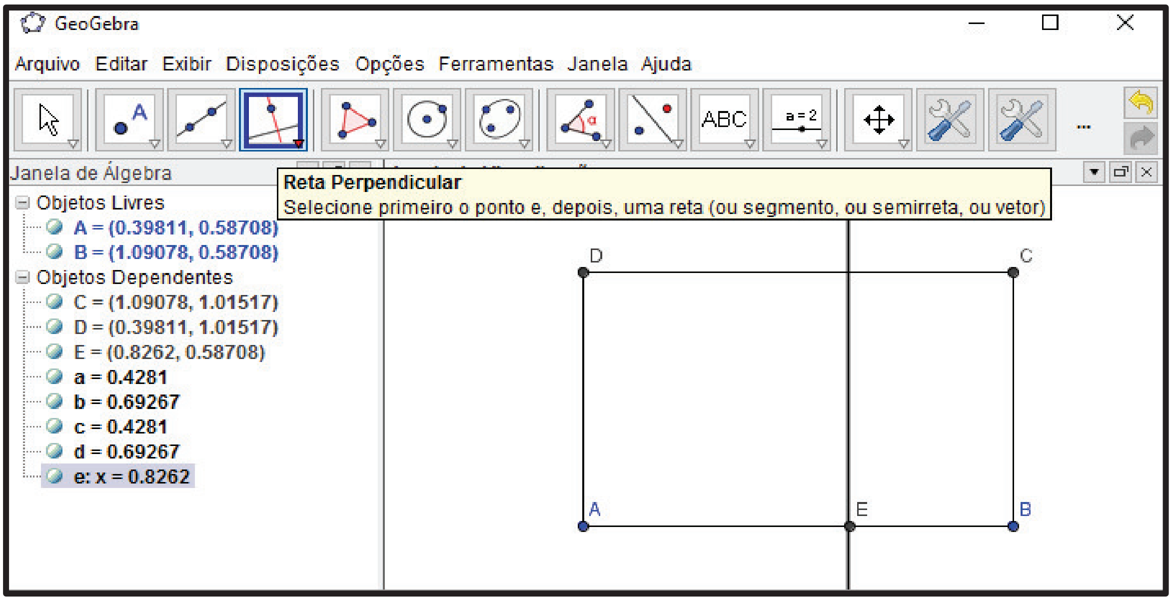
Figura 82: Ponto áureo



Fonte: Construção do próprio autor.

3) Acione a ferramenta (Janela 4) RETA PERPENDICULAR, trace uma reta perpendicular ao segmento AB, passando pelo ponto E.

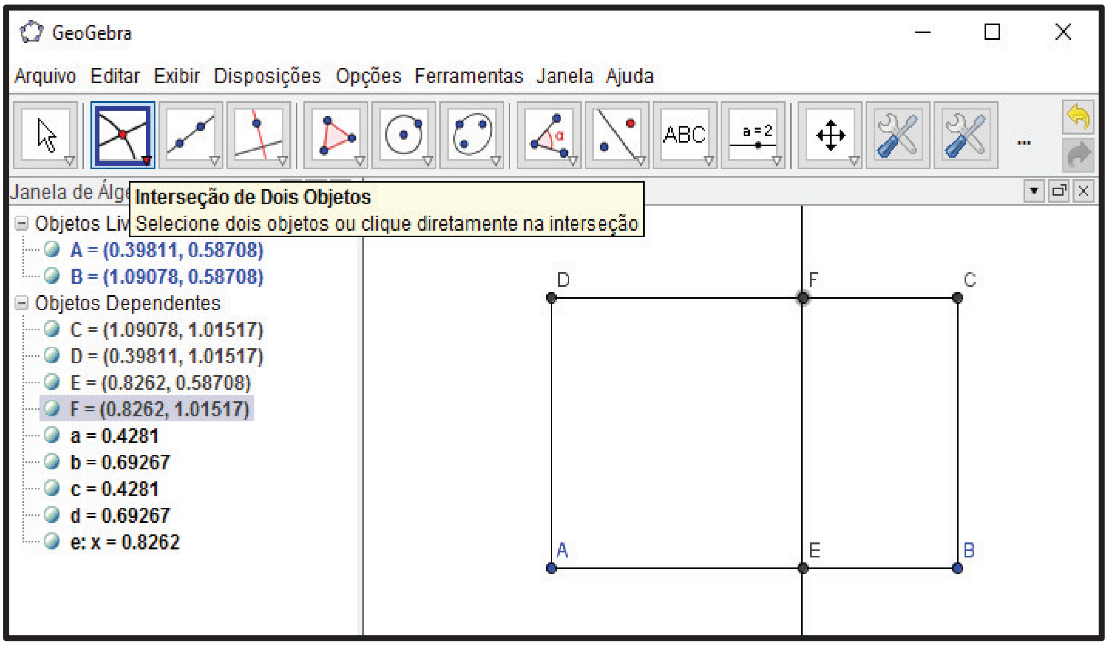
Figura 83: Reta perpendicular



Fonte: Construção do próprio autor.

4) Acione a ferramenta (Janela 2) INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS, marque a interseção da reta perpendicular com o segmento CD. Um ponto **F** será criado.

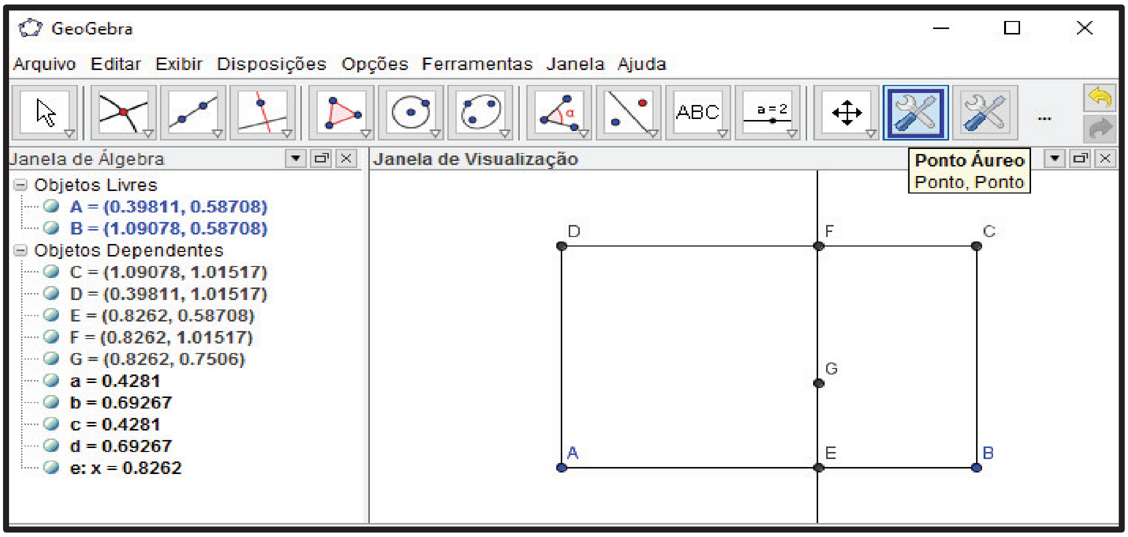
Figura 84: Interseção da reta perpendicular com o segmento CD



Fonte: Construção do próprio autor.

5) Acione a ferramenta (Janela 12) criada anteriormente na atividade 1, PONTO ÁUREO e clique sobre as extremidades de F e E. Um ponto G que divide o segmento na razão áurea será criado.

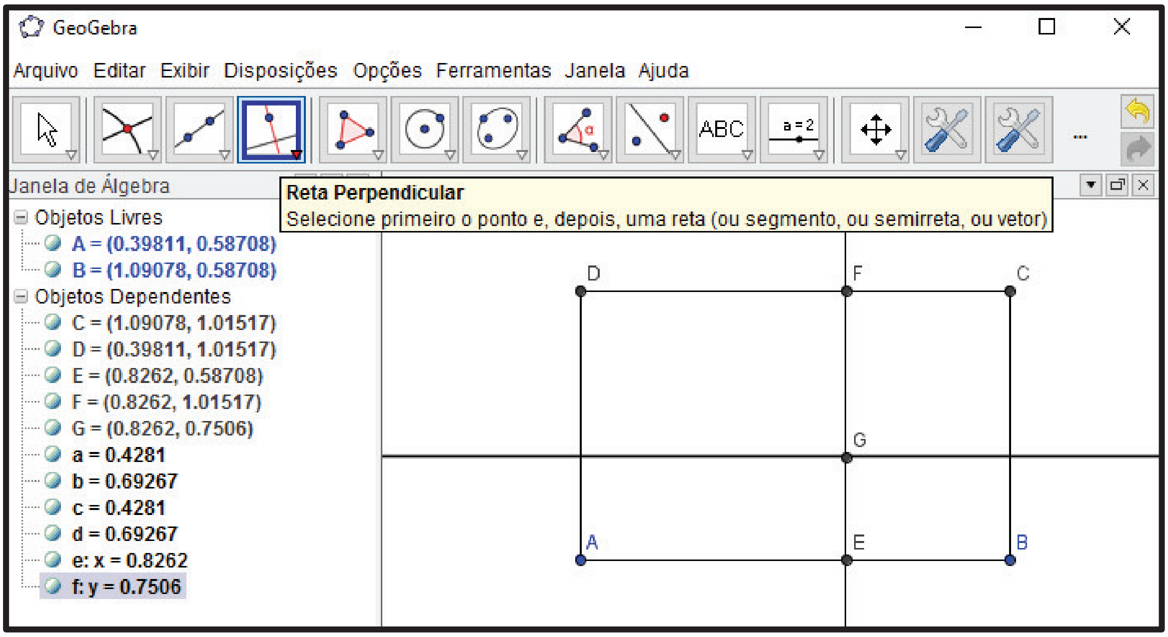
Figura 85: Ponto áureo sobre o segmento EF



Fonte: Construção do próprio autor.

6) Acione a ferramenta (Janela 4) RETA PERPENDICULAR, trace uma reta perpendicular ao segmento BC, passando pelo ponto G.

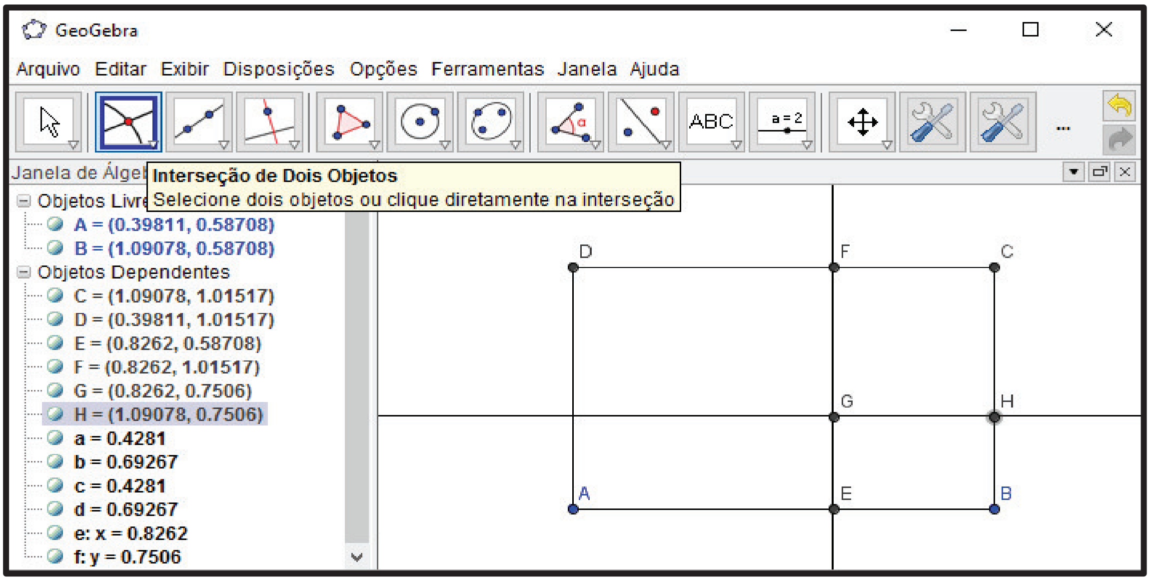
Figura 86: Reta perpendicular



Fonte: Construção do próprio autor.

7) Acione a ferramenta (Janela 2) INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS, marque a interseção da reta perpendicular com o segmento BC. Um ponto **H** será criado.

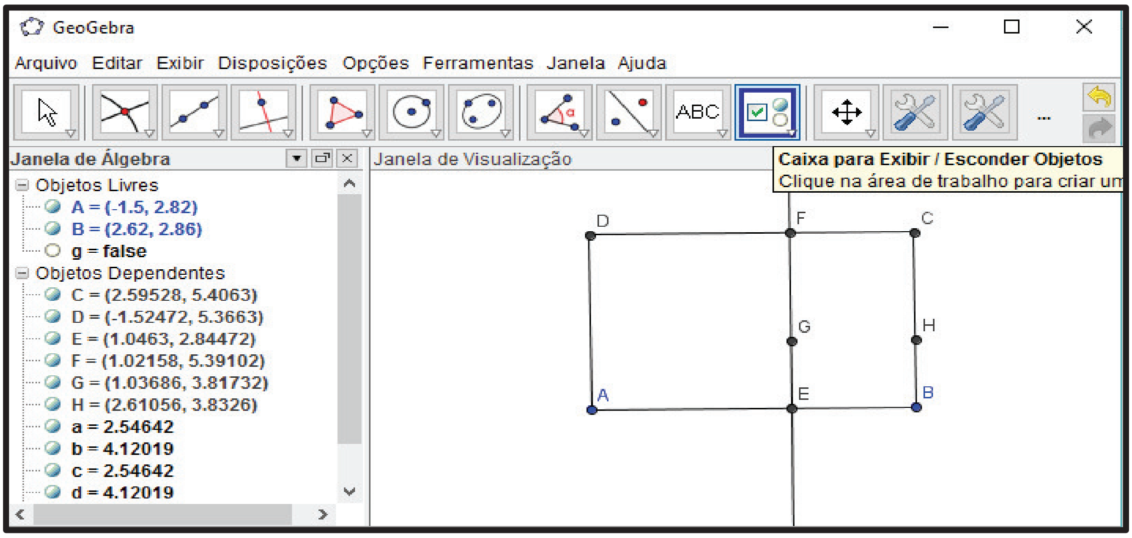
Figura 87: Interseção da reta perpendicular com o segmento BC



Fonte: Construção do próprio autor.

8) Acione a ferramenta (Janela 11) EXIBIR/ESCONDER OBJETO e clique sobre a última perpendicular criada e, em seguida, aperte ESC. A perpendicular ficará oculta.

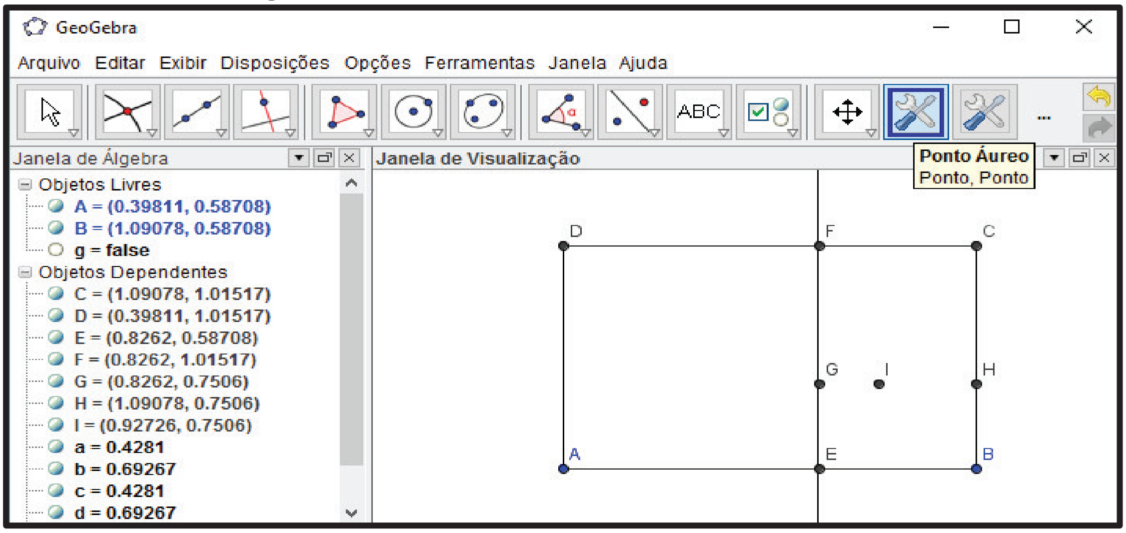
Figura 88: Esconder a perpendicular



Fonte: Construção do próprio autor.

9) Acione a ferramenta (Janela 12) criada anteriormente na atividade 1, PONTO ÁUREO e clique sobre as extremidades de H e G. Um ponto **I** que divide o segmento na razão áurea será criado.

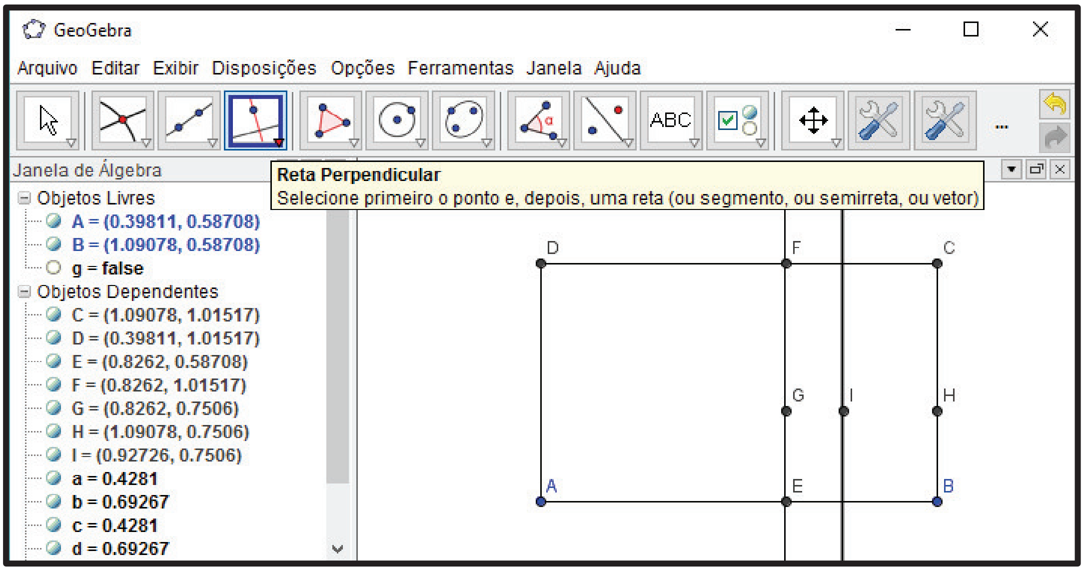
Figura 89: Ponto áureo sobre as extremidades H e G



Fonte: Construção do próprio autor.

10) Acione a ferramenta (Janela 4) RETA PERPENDICULAR, trace uma reta perpendicular ao segmento AB, passando pelo ponto I.

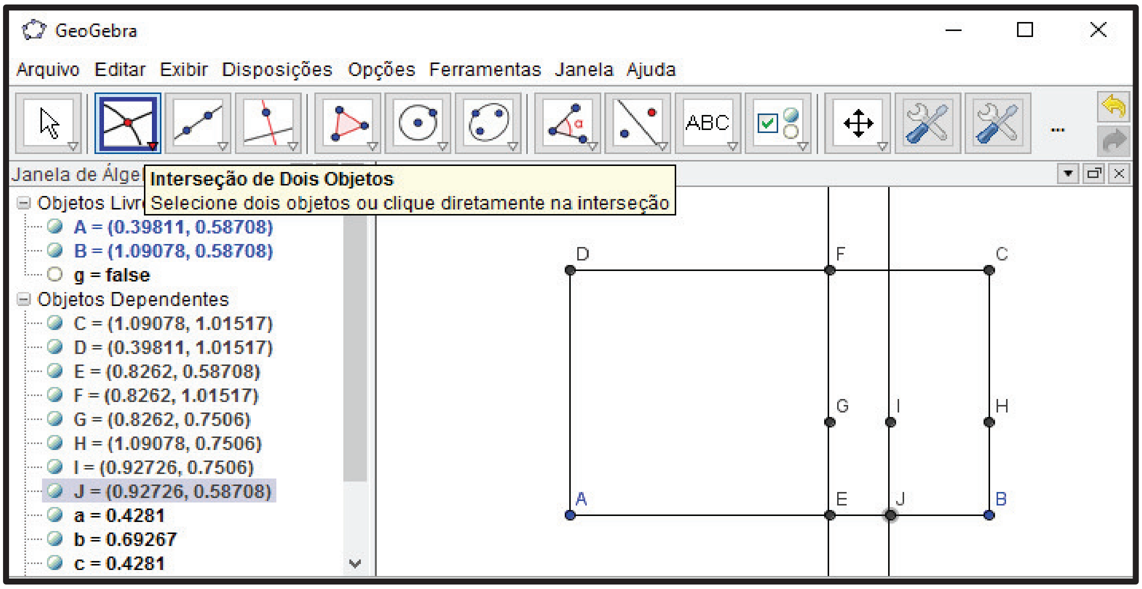
Figura 90: Reta perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto I



Fonte: Construção do próprio autor.

11) Acione a ferramenta (Janela 2) INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS, marque a interseção da última reta perpendicular criada com o segmento AB. Um ponto **J** será criado.

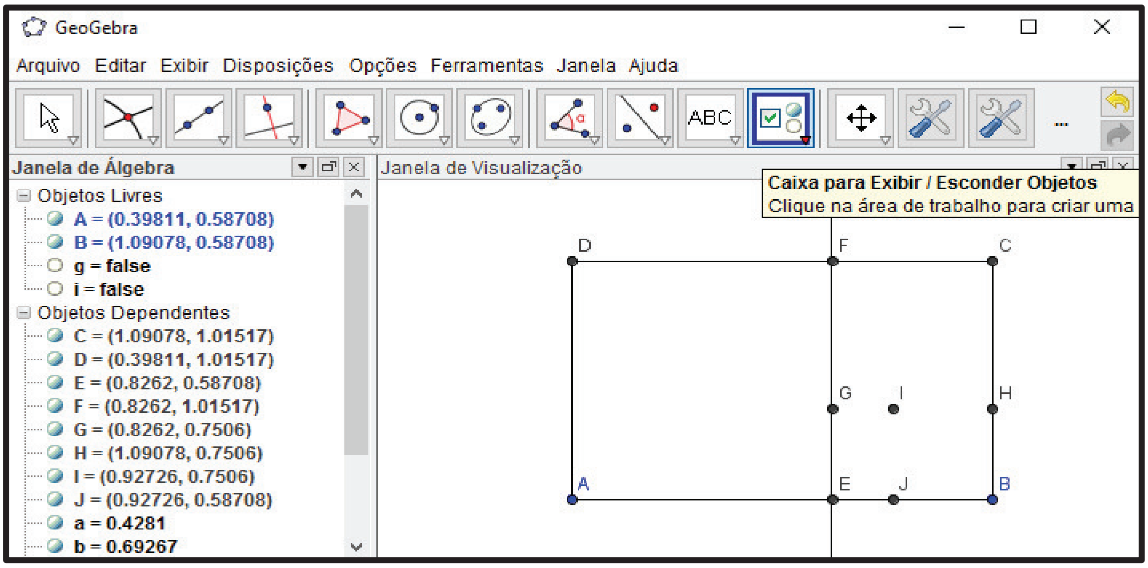
Figura 91: Interseção da reta perpendicular com o segmento AB



Fonte: Construção do próprio autor.

12)Acione a ferramenta (Janela 11) EXIBIR/ESCONDER OBJETO e clique sobre a última perpendicular criada e, em seguida, aperte ESC. A perpendicular ficará oculta.

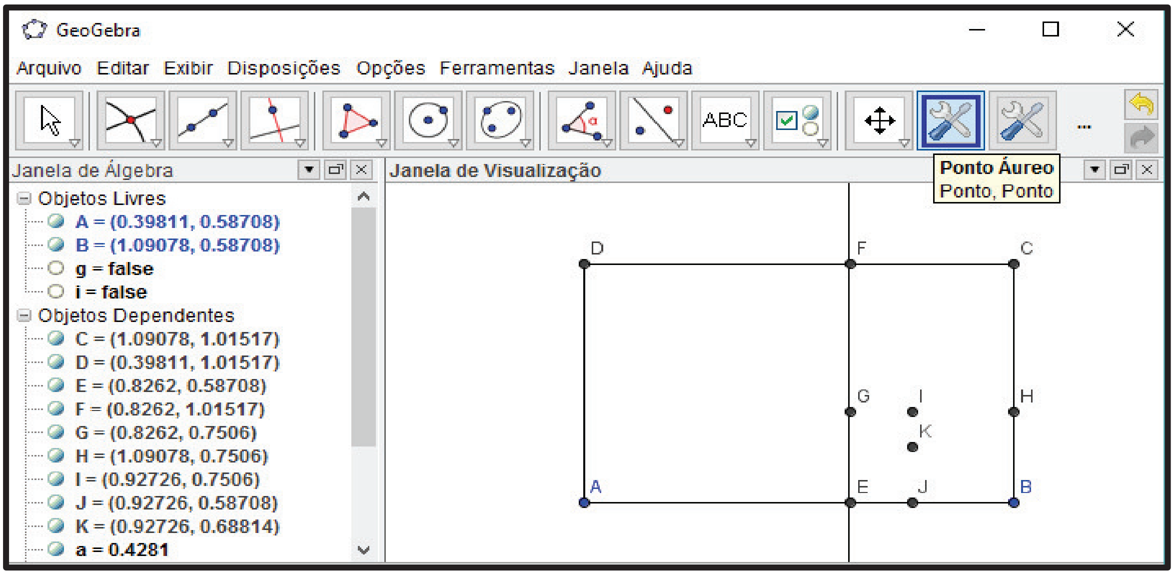
Figura 92: Esconder a perpendicular



Fonte: Construção do próprio autor.

13) Acione a ferramenta (Janela 12) criada anteriormente na atividade 1, PONTO ÁUREO e clique sobre as extremidades de J e I. Um ponto K que divide o segmento na razão áurea será criado.

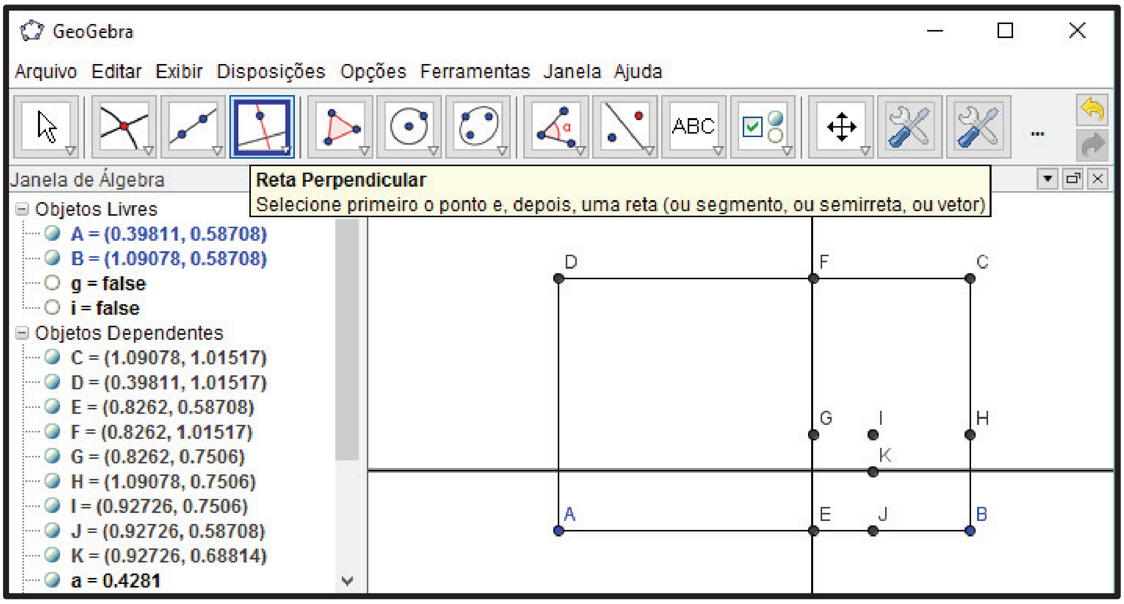
Figura 93: Ponto áureo sobre as extremidades de J e I



Fonte: Construção do próprio autor.

14) Acione a ferramenta (Janela 4) RETA PERPENDICULAR, trace uma reta perpendicular ao segmento BC, passando pelo ponto K.

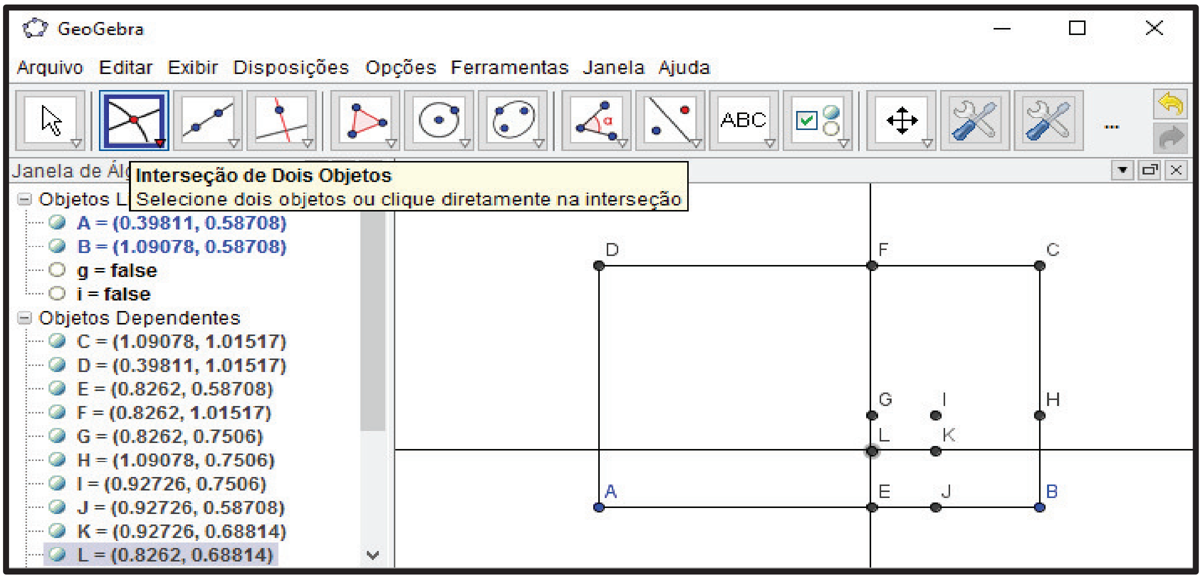
Figura 94: Perpendicular ao segmento BC passando pelo ponto K



Fonte: Construção do próprio autor.

15) Acione a ferramenta (Janela 2) INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS, marque a interseção da reta que passa por K com a reta que passa por E e F. Um ponto **L** será criado.

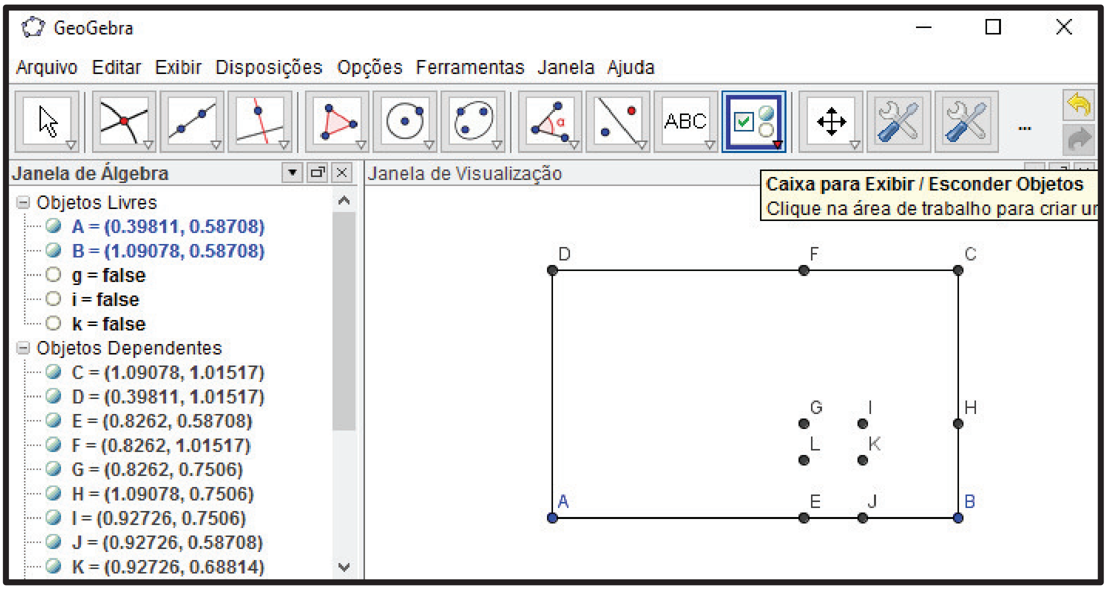
Figura 95: Interseção da reta que passa por K com a reta que passa por E e F



Fonte: Construção do próprio autor.

16)Acione a ferramenta (Janela 11) EXIBIR/ESCONDER OBJETO e clique sobre as perpendiculares e, em seguida, aperte ESC. As perpendiculares ficarão ocultas.

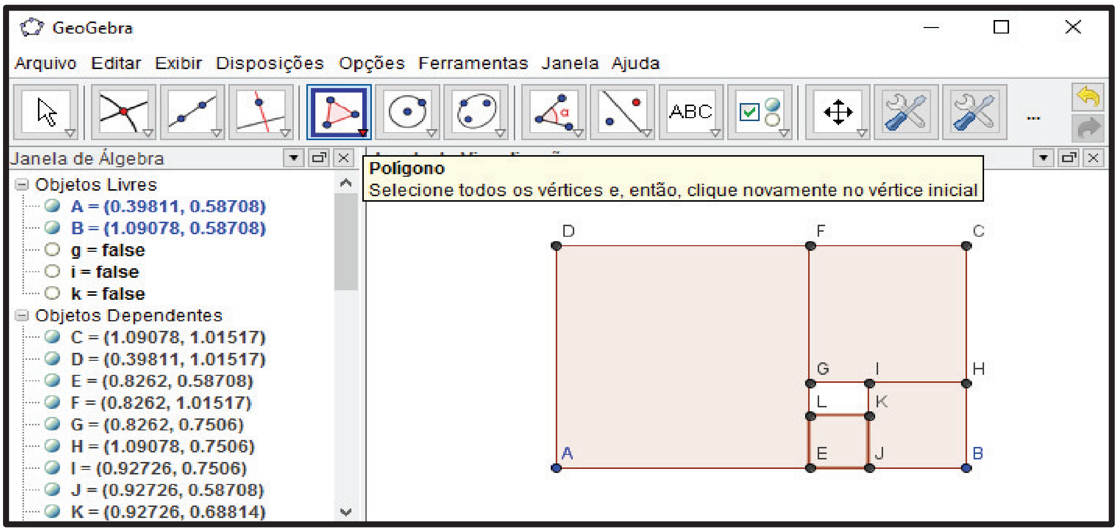
Figura 96: Esconder perpendiculares



Fonte: Construção do próprio autor.

17)Acione a ferramenta (Janela 5) POLÍGONO e construa os polígonos ADFE, FCHG, HBJI e EJKL.

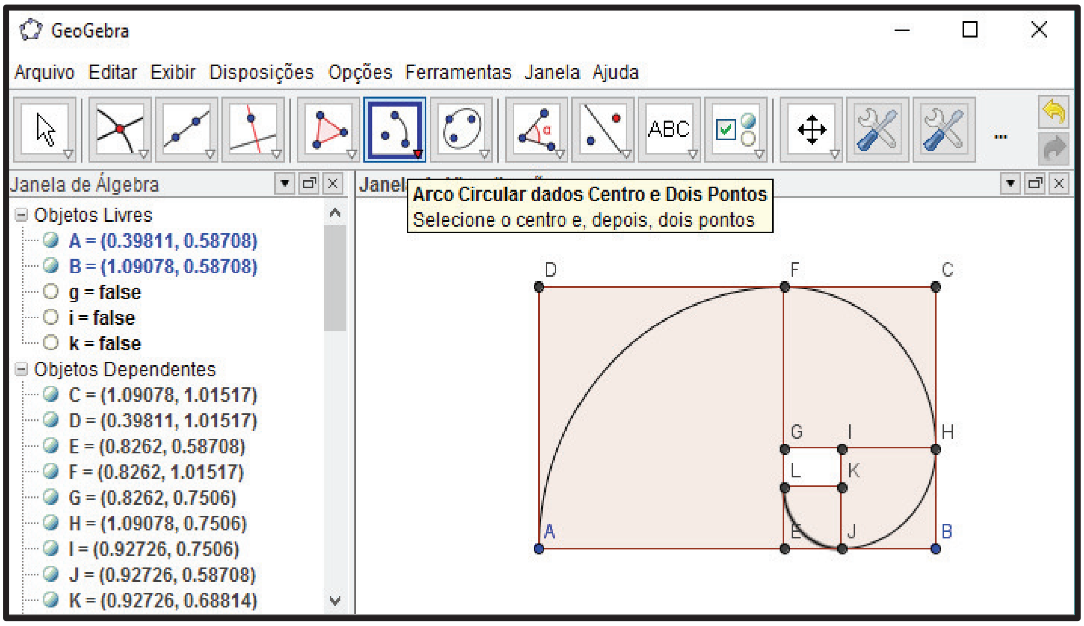
Figura 97: Polígonos



Fonte: Construção do próprio autor.

18) Acione a ferramenta (Janela 6) ARCO CIRCULAR DADOS O CENTRO E DOIS PONTOS. Clique sobre os pontos E, F e A (nessa ordem), clique sobre os pontos G, H e F (nessa ordem), clique sobre os pontos I, J e H (nessa ordem), e finalmente, clique sobre os pontos K, L e J (nessa ordem).

Figura 98: Arco circular dados o centro e dois pontos



Fonte: Construção do próprio autor.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Percebe-se que falar sobre um número irracional tão relevante na matemática e na natureza, como é o Número Áureo, implica em uma matemática recheada de geometria e álgebra, que ultrapassa um conceito matemático puro por si só. O número áureo muita das vezes é pouco trabalhado nos cursos de licenciatura em Matemática, isto faz com os alunos do Ensino Médio tenha pouco contato ou quase nenhum com os números irracionais, deixando está falta em sua formação. Desta forma, acredito ser relevante o trabalho deste número a alunos desse nível de formação.

Nota-se também a presença de vários estímulos à interdisciplinaridade, quando se fala da influência do número áureo na natureza (Espiral de ouro em molusco, a quantidade de pétalas de uma flor associados a termos da sequencia de Fibonacci) e o reconhecimento de retângulos áureos na arte, na arquitetura, na música, entre outros.

Com base na teoria sobre o número de ouro e tendo consciência que é necessário a busca de novos recursos que motivem e promovam a aprendizagem dos alunos que utilizei o software Geogebra, que é um software dinâmico e gratuito que possibilita ao educando uma grande percepção e assimilação dos conceitos matemáticos trabalhados.

A utilização de um software educacional como proposta pedagógica para o desenvolvimento deste trabalho deu-se principalmente por observar que o educando de hoje faz parte de uma sociedade bem diferente da de outrora, visto que, este educando carrega o “mundo” em uma de suas mãos através de um pequeno aparelho eletrônico. Diante disso, é necessário buscar outras metodologias que desperte o interesse pela aprendizagem, fazendo uso desses recursos eletrônicos, transformando a sala de aula em um ambiente mais prazeroso e propício a aquisição de conhecimento.

Durante o desenvolvimento deste trabalho até a sua finalização, não foi possível a aplicação das atividades elaboradas no Capítulo III com alunos do Ensino Médio. Acredito que se houvera feito, enriqueceria de forma significativa essa pesquisa. No entanto tenho pretensões futuras de executar as atividades propostas neste trabalho com o uso do software Geogebra aos alunos do ensino médio para coletar reações e resultados.

Utilizar a ideia do número de ouro no ensino médio não é uma tarefa muito fácil, visto que existe todo um conteúdo programático a ser cumprindo nesta etapa da educação básica, além de acesso a informática, um preparo em termos puramente matemáticos e no contexto da utilização do software. No entanto, este desafio é válido principalmente quando se deseja redimensionar a sua prática pedagógica através de novas abordagens, não somente para transmitir os conteúdos, mas também para buscar aplicação real na vida cotidiana do educando, de forma que, o mesmo tenha prazer e motivação em realizar as atividades propostas, ocorrendo assim a tão sonhada aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes de; NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. **Aprendendo matemática com o Geogebra**. São Paulo: Exato, 2010.

BORBA, Marcelo de Carvalho e PENTEADO, Mirim Godoy. **Informática e educação Matemática.** Belo Horizonte - MG: Autêntica, 2001.

BORBA, Marcelo de Carvalho et al. **Fases das Tecnologias digitais em Educação Matemática**: Sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte - MG: Autentica, 2015.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** Trad. Elza F. Gomide: São Paulo: Edgard Blucher, 2005.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/ Secretaria de Educação. Brasília: MEC/SEF, 1997.142 p.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática/ Secretaria de Educação. Brasília: MEC/SEF, 1998,148 p.

BRASIL. Lei nº 5692. **Lei de Diretrizes e Bases de Educação Nacional.** Brasília, DF: Congresso Nacional, 1971.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais** - terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

CARVALHO, Lucas Santos de. **Número Áureo e o ensino Básico**. Ilhéus, BA.

CRESPO, Antônio Arnot**. Estatística Fácil**. São Paulo: Saraiva, 1996.

EVES, Howard. **História da Geometria**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Editora da UNICAMP, 2004.

GUNDLACH, Bernard H. **História dos Números e Numerais.** Trad. Hygino H. Domingues. - São Paulo: Atual, 1992. - (Tópicos da História da Matemática para uso em sala de aula).

HUNTLEY, H. E. **A Divina Proporção**. Trad. Luis Carlos Ascêncio Nunes. Brasília: UNB, 1985.

KENSKI, V.M. **Educação e Tecnologias**: O novo ritmo da informação. São Paulo: Papirus, 2008.

LIVIO, Mario, 1945- **Razão Áurea: a história de FI**, um número surpreendente. Trad. Marco Shinobu Matsumura – 2ª ed. - Rio de Janeiro, 2006.

NETO, Pablo Roberto de Sousa. **Bit profmat – sbm.org.br**: aplicação do número de ouro como recurso metodológico no processo de ensino-aprendizagem. In Belucci, 2008. Visitado em 17.04. 2017.

PERRENOUD, Philipe. **Novas Competências para ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 2000.