UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MARIBENE CONCEIÇÃO DOS SANTOS CAVALCANTE

UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DO NÚMERO ÁUREO NA EDUCAÇÃO BÁSICA ATRAVÉS DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

MACAPÁ
2017

MARIBENE CONCEIÇÃO DOS SANTOS CAVALCANTE

UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DO NÚMERO ÁUREO NA EDUCAÇÃO BÁSICA ATRAVÉS DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Dissertação apresentada para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática, do Curso de Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT / UNIFAP

Orientador:

Prof. Dr. Guzmán Isla Chamilco.

MACAPÁ

2017

FICHA CATALOGRÁFICA

.... Cavalcante, Maribene Conceição dos Santos

Uma Proposta Pedagógica para o ensino do Número Áureo na Educação Básica através das Construções Geométricas / Maribene Conceição dos Santos Cavalcante – Macapá-AP, 2017.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Amapá – UNIFAP, 2017.

1.Aspectos Históricos da Razão Áurea. 2. O uso das Construções Geométricas para o ensino da Matemática na Educação Básica. 3. As construções Geométricas com Régua e Compasso.

I. Título.

109 p. .

MARIBENE CONCEIÇÃO DOS SANTOS CAVALCANTE

UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DO NÚMERO ÁUREO NA EDUCAÇÃO BÁSICA ATRAVÉS DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Dissertação apresentada para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática do Curso de Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT / UNIFAP.

Banca Examinadora

Prof. Dr.__________________________________
Orientador

Prof. Dr.__________________________________
Examinador:

Prof. Dr. __________________________________
Examinador:

Macapá-AP, ____ de ____________ de 2017.

Dedico este trabalho a Deus e aos meus pais Benedito Gomes dos Santos e Maria Livramento dos Santos (in memoriam), com eterna gratidão.

AGRADECIMENTOS

Começo meus agradecimentos por DEUS, pois, todos os dias da minha vida me deu forças para nunca desistir e, também por ter colocado pessoas tão especiais ao meu lado, sem as quais certamente não teria dado conta!

Aos meus pais Benedito e Maria Santos (in memoriam), infinito agradecimento, pois, sempre acreditaram em minha capacidade e me acharam A MELHOR de todas, mesmo não sendo. Isso só me fortaleceu e me fez tentar, não ser A MELHOR, mas a fazer o melhor de mim. Obrigada pelo amor incondicional!

Ao meu esposo Edson, nossos filhos Thiara, Edson Junior e Luccas que vibraram comigo, desde a aprovação na prova e, apesar de se sentirem incomodados pela minha mudança de foco, sempre fizeram "propaganda" positiva a meu respeito. Obrigada pela força!

Aos meus irmãos e irmã, agradecimentos especiais, pois, a seus modos, sempre se orgulharam de mim e confiaram em meu trabalho. Obrigada pela confiança!

A minha tia Lucimar, minha amiga Waldecir Amaral e à Irmã Rute que sempre rezaram por mim, me apoiaram e acreditaram em meu potencial!

Aos meus amigos que me incentivaram, apoiaram e acreditaram em minha competência, em especial ao amigo Astrogecildo Ubaiara!

Ao Professor Gúzman Isla Chamilco, é claro, que acreditou em meu potencial de uma forma que eu não acreditava ser capaz de corresponder. Sempre disponível e disposto a me ajudar, querendo que eu aproveitasse cada segundo dentro do mestrado para absorver algum tipo de conhecimento. Fez-me enxergar que existe mais que pesquisadora e resultados por trás de uma dissertação, existem vidas humanas... Você não foi somente orientador e co-orientador, mas você foi e será referência profissional e pessoal para meu crescimento. Obrigada por seu lado simples e paciente, por estar a meu lado e acreditar tanto em mim!

Ao coordenador do curso, Erasmo, e em especial a todos os meus professores, Simone, Gilberlândio e Walter, que com ensinamentos, orientações e amizade, me ajudaram ativa ou passivamente neste projeto. Vocês também foram referenciais para mim!

Agradeço também à CAPES pelo apoio financeiro!

Finalmente, gostaria de agradecer à Universidade Federal do Amapá por abrir as portas para que eu pudesse realizar este sonho que é o meu título de mestrado. Proporcionaram-me mais que a busca de conhecimento técnico e científico, mas uma LIÇÃO DE VIDA.

Ninguém vence sozinho...

OBRIGADA A TODOS!

"O saber "entra" pelos sentidos e não
somente pelo intelecto".

Frei Betto

RESUMO: Este trabalho é o resultado de uma pesquisa bibliográfica, realizada sobre “Uma Proposta Pedagógica para o Ensino do Número Áureo na Educação Básica através das Construções Geométricas”, com o objetivo de proporcionar melhoria no ensino da Matemática. Está organizado em três capítulos, tendo como referencial, teóricos da área de Matemática, como: Boyer (2005), Gundlach (1992), Eves (1992), Crespo (1996), Huntley (1985), Livio (2006), Wagner (1998), Valente (2007), Giongo (2001) e outros citados, que deram fundamentação. O primeiro capítulo começa a partir dos aspectos históricos da Razão Áurea, dissertando desde os tempos mais remotos da antiguidade, a Matemática Áurea na Grécia Antiga e no Egito, a origem da proporção na Matemática grega, Leonardo de Fibonacci e a razão áurea, a sequência de Fibonacci e a proporção áurea, os conceitos matemáticos por traz do número de ouro, um pouco sobre razão e proporção, razão de dois números, proporção, a razão áurea através da divisão de segmentos geométricos, o retângulo áureo, a espiral logarítmica, o pentágono, o pentagrama e o triângulo áureo, a incomensurabilidade do pentágono regular, onde encontrar a razão áurea, a proporção áurea na natureza, a música e a secção dourada, o homem de Vitrúvio e o modulor (a razão áurea na arquitetura). O segundo capítulo aborda a história das Construções Geométricas desde a Pré-História e seus percursos por séculos até chegar ao Brasil no final do século XVII, com toda a sua trajetória até aos dias atuais. O terceiro capítulo é dedicado às construções geométricas, ilustrando vários tipos de figuras e como utilizar a régua e o compasso, como ferramentas úteis e de fácil acesso, facilitando o ensino e a aprendizagem dos alunos.

Palavras-chave: Matemática. Construção Geométrica. Educação Básica.

RÉSUMÉ: Ce travail est le résultat d'une étude bibliographique réalisée sur « Une Proposition Pédagogique pour l'enseignement de le Nombre Aureo dans l'Éducation Basiquée à travers de les Constructions Géométriques », avec l'objectif de fournir l'amélioration de l'enseignement des mathématiques. Il est organisé en troisième chapitres, base sur le domaine des mathématiques, tels que: Boyer (2005), Gundlach (1992), Eves (1992), Crespo (1996), Huntley (1985), (1985), Livio (2006), Wagner (1998), Valente (2007), Giongo (2001) et d'autres ont mentionné, qui a donné base théorique. Le premier chapitre a commencé à partir de Raison Áurea, en discourant depuis les temps passé de l’antiquité; la Mathématiques Áurea en Grèce Antiquée et dans l’Égypte; l’origine de la proportion dans la Mathématiques grec; Leonardo de Fibonacci et la raison áurea; une séquence de Fibonacci et la proportion áurea; les conceptes mathématiciens par derrière de le nombre de l’or; un peu sur raison et proportion; raison de deux nombres; proportion; la raison áurea parmi de la division des segments géométriques; le rectangle áureo; une spiral logaritmique; le pentgone, le pentagrame et le triangle áureo; l’incommensurabilidé de le pentagone reguilier; oú trouver la raison áurea; la proportion áurea dans la nature; une musique et une suite dourada; l’homme de Vitrúvio; le moduler (la raison áurea dans l’architecture). Le deuxième chapitre traite de l'histoire des constructions géométriques depuis les temps préhistoriques et leurs routes pendant des siècles pour arriver au Brésil à la fin du XVIIe siècle, avec toute son histoire jusqu'à les jours courants. Le troisième chapitre est consacré aux constructions géométriques, illustrant différentes types de figures et comment utiliser une règle et un compas, ce qui facilite l'enseignement et l'apprentissage, comme outillages utiles et de facile accès, en facilitant l’enseignement et l’apprentissage des élèves.

Mots-clés: Mathématiques. Construction Géométrique. Éducation Basiquée.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho é de pesquisa bibliográfica, e traz como tema “Uma proposta pedagógica para o ensino do número áureo na educação básica através das construções geométricas”, fundamentado a partir de teóricos que abordam sobre o assunto em questão. Tem como objetivo, contribuir com o ensino da Matemática, mas em especial, utilizar as Construções Geométricas para aplicação ao ensino e aprendizagem dos alunos do Ensino Fundamental e Médio. Devido a isso, o trabalho foi organizado em três capítulos.

Sendo que o primeiro capítulo busca explicar os aspectos históricos da Razão Áurea, que são fundamentais para as razões de tudo que está em volta do ser humano. A resposta a tal questionamento foi encontrado na Matemática, a partir de estudos que começaram pelos gregos na Antiguidade. Mas a descoberta do Número Áureo foi atribuída a um discípulo de Pitágoras, chamado Hipasus de Metapontum, matemático grego, nascido em Metapontum, que viveu de (470-425 a. C). Também aborda-se o número áureo na Grécia Antiga e no Egito, com destaque na Babilônia. Assim como a origem da proporção áurea, citando Leonardo de Fibonacci com a sequência de Fibonacci, conceitos matemáticos por traz do número de ouro, a demonstração de suas fórmulas e divisões de segmentos geométricos, mostrando onde se pode observar a razão áurea na natureza, na música, nos instrumentos musicais e no corpo humano, exemplificado principalmente pelas medidas geométricas do homem de Vitrúvio, assim como na arquitetura e outras teorias necessárias para melhor compreender.

O segundo capítulo apresenta o uso das construções geométricas para o ensino da Matemática na Educação Básica como ferramenta auxiliar para os professores no desempenho do ensino aprendizado dos alunos nesta modalidade de ensino, visto que, alguns teóricos como Marmo e Marmo (1994), Queiroz (2010) e Wagner (1998) da área da Matemática defendem o uso das Construções Geométricas como mediações entre abordagem, compreensão e conteúdos vinculados na sala de aula, através de construções geométricas, atrelado a uma ação pedagógica, que possibilita trabalhar de forma dinâmica em todos os níveis da educação básica. Também, relata-se a origem das construções geométricas, ensino do desenho geométrico no Brasil, que começou no final do século VII por interesse de Portugal, com o objetivo de desenhar projetos para a fortificação e defesa do país, contra ataques de inimigos, que passou a ser obrigatório para os oficiais militares.

O terceiro capítulo mostra como utilizar régua e compasso, como ferramentas para a construção de figuras geométricas, envolvendo a razão áurea nas suas diferentes formas. Inicialmente a ideia é introduzir aos alunos os conceitos básicos sobre a razão áurea e como realizar as etapas de construção, envolvendo atividades matemáticas conhecidas pelos alunos como: cálculo de razões, aplicação da semelhança de triângulos, uso do Teorema de Pitágoras, solução de equação do 2º grau, aproximações numéricas e vários outros assuntos.

Desta forma o trabalho buscou explicar a construção do número áureo, sua presença na natureza, sua aplicação em obras criadas pelo homem e como utilizar na sala de aula com os alunos do Ensino Fundamental e Médio da Educação Básica através das construções geométricas com a régua e compasso de forma simples e acessível, com destaque para a melhoria do ensino e aprendizagem da matemática, com anseios e perspectivas para facilitar a construção de conhecimento dos alunos.

1 ASPECTOS HISTÓRICOS DA RAZÃO ÁUREA

Durante toda sua existência o homem buscou explicar e encontrar razões para tudo que o cerca, foi na matemática que ele encontrou sua ferramenta mais importante nesta sua busca por respostas, pois, é através dela que homem procura compreender o mundo que está em sua volta.

Esse tema foi estudado pelos gregos antes do tempo de Euclides de Alexandria. Para os Pitagóricos era um artigo de fé fundamental que a essência de tudo estava na geometria, como nas questões práticas e teóricas da vida do homem, podiam ser explicadas em termos de números, ou das propriedades intrínsecas dos inteiros e suas razões.

Os diálogos de Platão (427 – 347 a. C) mostram, porém, que a comunidade matemática grega fora assombrada por uma descoberta que praticamente demolia a base da fé pitagórica nos números inteiros. Era uma descoberta que na própria história da geometria, os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmo, simples propriedades básicas, pois, não bastava fazer comparações da diagonal de quadrado ou de pentágono com seu lado. Os segmentos eram incomensuráveis, por quanto pequena que a unidade de medida se tornasse.

> A descoberta dos incomensuráveis tinha ameaçado a matemática de uma crise lógica, lançando dúvidas sobre provas que usassem proporcionalidade, mas a crise foi enfrentada com sucesso, graças aos princípios enunciados por Eudoxo. Mesmo assim a matemática grega tendia a evitar as proporções (BOYER, 2005, p. 77).

Segundo Boyer (2005), essa descoberta é geralmente atribuída aos pitagóricos mais especificamente a Hipasus de Metapontum[1], porém, ainda não se sabe onde, nem quando essa descoberta ocorreu. Há ainda argumentos antigos a favor de uma origem hindu da descoberta, mas não têm base e parece improvável que o próprio Pitágoras conhecesse o problema de incomensurabilidade.

De acordo com Gundlach (1992), faltam detalhes a respeito da descoberta da existência de quantidades incomensuráveis, mas é visível que para os gregos antigos foi tão difícil aceitar as quantidades incomensuráveis quanto descobri-las.

---

[1]Hipasus de Metapontum, matemático grego, nascido em Metapontum, cidade grega do sul da Itália. Viveu em 470 - 425 a. C. Hipasus foi o descobridor dos números incomensuráveis, foi também o responsável por mudanças significativas na matemática grega do século V a. C.

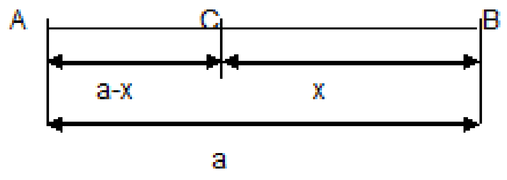
> Dois segmentos de reta são comensuráveis quando há um segmento que "mede" cada um deles – isto é, que está contido exatamente um número inteiro de vezes em cada um dos segmentos. O fato de haver pares de segmentos para os quais tal medida não existe constitui o caso incomensurável. Isso se refletiu na matemática posterior no conceito de número irracional, um número que não pode ser expresso como razão de dois inteiros (GUNDLACH, 1992, p. 54 - 55).

O número de ouro é representado pela letra grega Φ (Phi), em homenagem ao Escultor e Arquiteto grego Phidias, nascido por volta de (490 - 430 a. C.), que foi o responsável pela construção do Templo de Parthenon em Atena. Phidias fez muito uso da proporção áurea em suas obras. O número de ouro simboliza desde os tempos antigos, o equilíbrio e a harmonia, estando intimamente ligado à arte até os dias atuais.

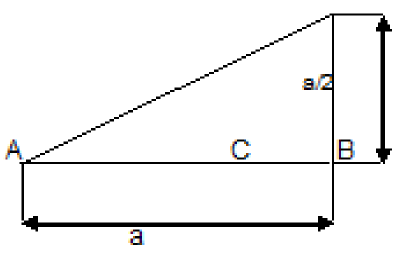
Embora haja registros de que a razão áurea já vinha sendo utilizada no Egito antigo há vários séculos, antes de ter sido descoberta pelos gregos. No entanto, foi um matemático grego o primeiro a escrever oficialmente sobre o assunto. Euclides de Alexandria[2], em "Os Elementos", a obra mais influente de toda a história da matemática, descreveu esta secção em sua proposição. (Fig. 01).

> Euclides se refere ainda em Teoremas: Proposição 4 do Livro Décimo Terceiro de Os elementos à divisão de um segmento em média e extrema, mostrando que o quadrado da reta inteira e o do segmento menor juntos são o triplo do quadrado do segmento maior. (wwwinstitutomathesianocombr/sobre-os-elementos-de-euclides).

Como podemos observar abaixo:



ou



$$\frac{\mathbf{x}}{(\mathbf{a}-\mathbf{x})}=\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{x}}$$

Figura 01: Construção gráfica da secção áurea. AC = segmento áureo de AB.

---

[2] Euclides de Alexandria – Matemático grego que ficou conhecido pelo seu mais famoso trabalho "Os Elementos", obra que compunha 13 volumes. Pouco se sabe sobre sua vida, apenas que ensinou na escola fundada por Ptolomeu em Alexandria (306 – 283 a. C), não se sabe ao certo nem seu nome, pois, nem o local de seu nascimento é associado a ele, é conhecido como Euclides de Alexandria, porque foi chamado por Ptolomeu para ensinar matemática, nesta cidade grega.

O número de ouro é considerado como sendo a “proporção divina” e foi utilizado ao longo do tempo, em vários contextos, tais como: na grande pirâmide de Gizé, razão entre a altura de uma face e a metade do lado da base é quase $1,618$. Na razão entre o número de abelhas macho e abelhas fêmeas de qualquer colmeia do mundo, vai ser sempre igual $1,618$, e em vários outros segmentos da natureza que estudaremos ao longo deste trabalho.

É possível o homem compreender a harmonia existente na natureza após séculos de observações e de teorias. Apesar da descoberta do número áureo ter sido atribuída a Hipasus de Metapontum, discípulo de Pitágoras, foi só muito tempo depois, acerca de muitas investigações sobre o assunto que a razão áurea ganhou forma conhecida com a sequência de Fibonacci, a qual será abordada posteriormente.

Baseado em Boyer (2005), não há registros de uma época certa em que tenha ocorrido a descoberta da incomensurabilidade, pois, as circunstâncias que cercavam estas primeiras percepções de segmentos incomensuráveis são todas imprecisas, há quem estabeleça uma conexão do teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo isósceles. Há indícios de uma prova da incomensurabilidade da diagonal de um quadrado com seu lado, indicando que se baseava na distinção entre pares e impares. Porém, há outras maneiras pelas quais a descoberta pode ter sido feita.

Uma delas poderia ter sido por meio da observação das cinco diagonais traçadas de um pentágono regular, que formam um pentágono ainda menor. Esse processo pode continuar infinitamente, dando origem a novos pentágonos regulares tão pequenos quanto se deseja, nos levando a concluir que a razão entre a diagonal e lado de um pentágono regular é um número irracional (Fig. 02).

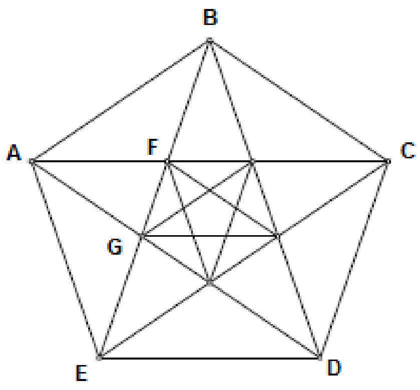


Figura 02: Pentágono regular com o pentagrama circunscrito

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC}{FC} = \frac{FC}{AF} = \frac{AF}{FG} = \frac{DB}{DE} \quad e \quad \frac{AB}{GF} = \Phi^2$$

1.1 A MATEMÁTICA ÁUREA NA GRÉCIA ANTIGA E EGITO

A Grécia foi o berço de muitas ciências e, não foi diferente com a matemática. Da Grécia saíram os grandes nomes da matemática que são consagrados até os dias atuais no mundo inteiro, porém, não foi apenas na Grécia que a matemática se desenvolveu. Ela teve destaque também na Babilônia e Antigo Egito, mas a matemática grega se diferenciava das anteriores, pois, contrário a estas, os gregos criaram uma ciência propriamente dita, sem se preocuparem com as aplicações práticas.

> Os gregos não hesitavam nada em absorver elementos de outras culturas, de outra forma não teriam aprendido tão depressa como passar à frente de seus predecessores, mas a tudo que tocavam davam mais vida (BOYER, 2005, p. 31).

A matemática grega se distingue das outras, por ter levado em conta problemas relacionados com processos infinitos, movimento e continuidade, dando assim origem ao método axiomático, devido às diversas tentativas de solucionar tais problemas. Método este, que admite como verdadeiras certas proposições, ditas axiomas (evidências), até que se chegue à proposições mais gerais.

Não são certos os motivos pelos quais os gregos desviaram-se da Álgebra e caminharam rumo a geometria, é provável que tenha sido pelas dificuldades encontradas justamente em estudarem problemas relativos a processos infinitos, principalmente sobre os números irracionais, quanto à geometria, pode-se dizer que teve origem com as medições de terra no Antigo Egito.

Os sumérios conheciam geometria, a raiz quadrada e a cúbica. Porém, não é certo se usavam a proporção áurea. É possível que Pitágoras a tenha conhecido durante sua longa estada no Egito. Já na Grécia, foi muito utilizada na arquitetura e na arte por escultores. É certo que o próprio Pitágoras fazia uso dos símbolos da escola pitagórica. Símbolos estes que até hoje são usados no mundo inteiro, como por exemplo, o pentagrama, que é a estrela de cinco pontas formadas pelas diagonais do pentágono regular, como pode ser observado na (Fig. 03).

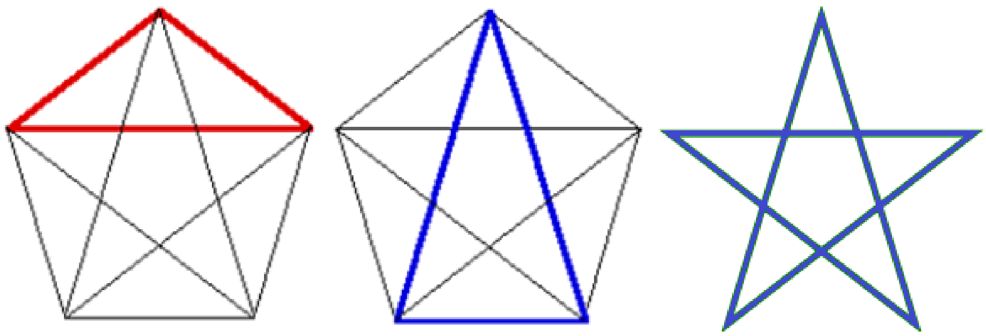


Figura 03: Diagonais do Pentágono Regular; o Triangulo e Pentagrama Áureo

O pentagrama talvez seja hoje o símbolo mais usado em todo o mundo, ele compõe o símbolo do islamismo, religião aderida por cerca de 20% da população mundial, e compõe principalmente as bandeiras dos países mais influentes do mundo, tendo diversos significados. É usado inclusive nas moedas de vários países, como no Real, que trazem 5 pentagramas, o Dólar, o Euro, o Franco suíço e muitos outros que trazem esta marca.

O número mais famoso e misterioso da natureza está presente para onde quer que olhemos. Aparecem em obras de arte, em galáxias, flores e vôos de aves. A arquitetura grega está repleta dele por todos os lados inclusive nas esculturas. Segundo Eves (1992), "as propriedades estéticas e artísticas dessa razão são mostradas no retângulo áureo – um retângulo, cujos lados estão na razão de 1 para phi ou/e phi para 1. Esse retângulo, entre todos os possíveis é considerado por alguns o mais agradável aos olhos [...]". Phidias usou a divisão áurea em todo o Parthenon: na fachada frontal, na lateral e na projeção.

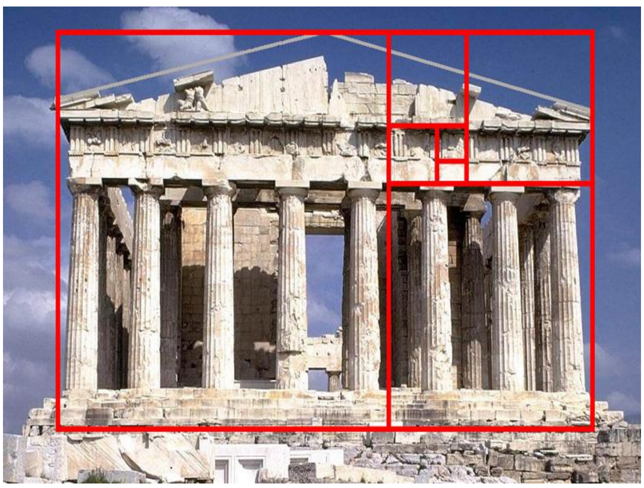


Figura 04: Frente do Templo "Parthenon" – Grécia

O Parthenon é uma das mais conhecidas construção da Grécia Antiga, que resistiu até os dias atuais. Sua construção foi uma homenagem à deusa Atena, patrona da cidade. É o maior templo de todo o continente e o mais admirado entre eles. Fora erguido em 447 - 408 a. C., em substituição ao que havia sido destruído durante saque persa. Há vários exemplos sobre o modo como o retângulo áureo se ajusta à construção do Parthenon, como podemos observar na figura 04.

Euclides (360-295 a.C.), escreveu em seu trabalho mais famoso “Os Elementos”, que havia encontrado uma proporção que é contínua na natureza. Ele a chamou de “média e extrema razão”. Euclides fez uso do teorema de Pitágoras para construir geometricamente a proporção áurea, como mostra a figura 01.

A proporção áurea também foi muito estudada e utilizada no Antigo Egito. Há indícios de que até mesmos bem antes dos gregos terem descoberto os segmentos incomensuráveis. Desde a antiguidade os egípcios têm usado a proporção áurea, como cânone arquitetônico, encontrado na tumba de Khesi-Ra, sábio egípcio que viveu por volta de 2.700 a. C., era chefe dos arquitetos do faraó. É incrível que este sábio já tivesse o conhecimento da proporção áurea e do teorema de Pitágoras.

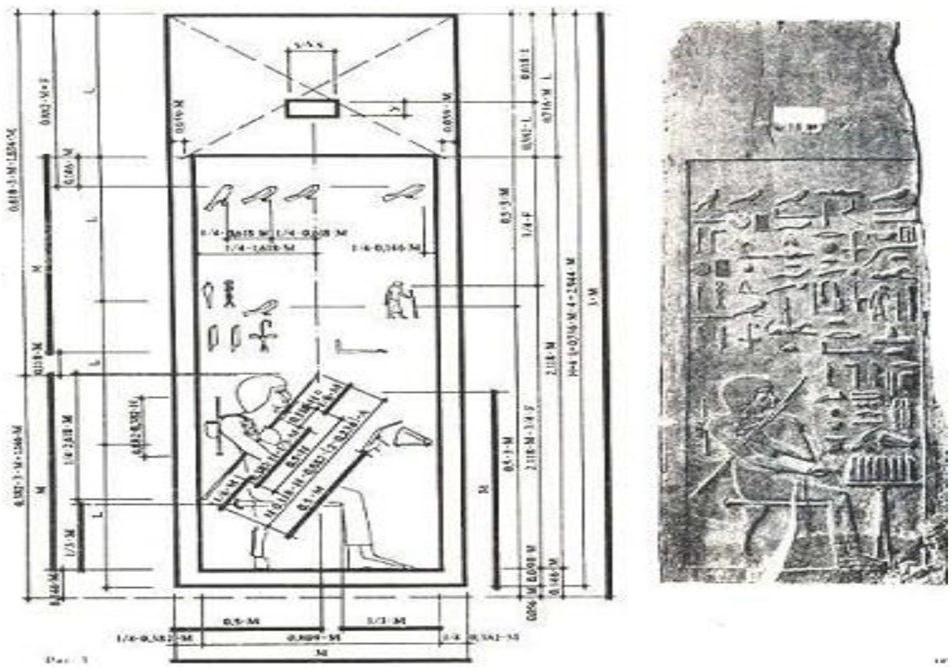


Figura 05: O cânone de Khesi-Ra

Há outros registros do uso da proporção áurea na antiguidade egípcia, como é o caso do papiro de Rhind ou de Ahmes, escriba egípcio que viveu por volta de 1650 a. C., o papiro encontra-se hoje no museu britânico, medindo 5,5 metros de comprimento e 0,32 metros de largura, onde consta um texto matemático na forma de um manual prático contendo 85 problemas copiados em escrita hierática, pelo matemático Ahmes. No qual se refere a uma “razão sagrada” que se crê ser o número de ouro.

> A Razão Áurea pode ter sido conhecida mesmo antes da época dos gregos. O historiador grego Heródoto relata que os sacerdotes egípcios disseram que na pirâmide de Giseh, a razão entre suas dimensões é Phi (EVES, 1997, p. 44).

A razão áurea se faz presente também, na construção das pirâmides de Gizé no Egito. Ao longo de muito tempo o cálculo original da altura da pirâmide de Quéops foi causa de polêmica entre diferentes matemáticos e arqueólogos de todas as partes do mundo. Nos dias atuais a razão que é encontrada não chega a 1,6. É provável que na antiguidade este quociente tenha sido $\Phi = 1,618033989 \ldots$,pois, muitos séculos se passaram e a altura da pirâmide diminuiu com o tempo medindo atualmente 137 metros.

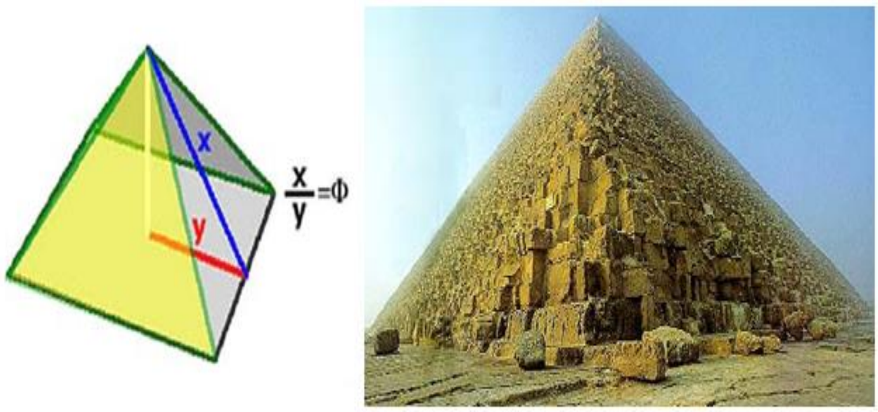


Figura 06: Pirâmide de Quéops

Inicialmente as medidas originais da pirâmide de Quéops eram 230 metros de lado da base e altura de $146{,}6$ metros, com estas informações é possível chegar a um valor aproximado de phi, aplicando o teorema de Pitágoras. Como podemos ver na figura 07.

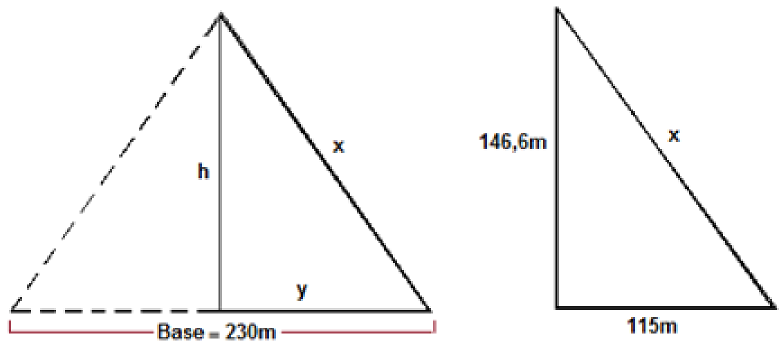


Figura 07: O teorema de Pitágoras e a pirâmide Quéops.

Temos que:

$$x^2 = h^2 + y^2$$

$$x^2 = 146{,}6^2 + 115^2$$

$$x^2 = 21491{,}56 + 13225$$

$$x^2 = 34716{,}56$$

$$x = \sqrt{34716{,}56}$$

$$x = 186{,}32$$

Agora podemos encontrar o quociente entre a altura de uma das faces e a metade do lado da base da grande pirâmide:

$$\frac{x}{y} = \frac{186{,}32}{115} = 1{,}6201739 \ldots$$

1.2 A ORIGEM DA PROPORÇÃO NA MATEMÁTICA GREGA

Nas civilizações da antiguidade, a arquitetura, a arte e a filosofia sempre estiveram ligadas a conceitos religiosos, de vida e morte, sendo comum haver vínculo entre política e religião. Foi na Grécia Antiga que o homem encontrou a liberdade necessária para expressar seus pensamentos, sem que fosse necessário restringir-se a uma verdade oficial. Assim surgiram na Grécia as origens do pensamento matemático como ciência teórica. Foi em meio a este cenário com um misto de política e religiosidade que Pitágoras fundou sua escola, berço de muitas descobertas matemáticas aclamadas até os dias atuais.

Ao longo de séculos de observação e estudo, o homem se indaga e busca explicações que justifiquem a regularidade do que o rodeia. Durante essas buscas incessantes, por essas explicações a procura de respostas para o “porque” da infinidade de elementos existentes na natureza e, de estes estarem em constante harmonia, podem ser obtidas através de ordem e relações entre números e combinações, na tentativa de explicar a perfeição existente entre os mesmos.

Segundo Gundlach (1922), os estudos desenvolvidos por Pitágoras e seus seguidores eram fundamentais à geometria, à aritmética, à música e à astronomia. O elemento básico de todos era o número – não em seus aspectos práticos, computacionais, mas como a própria essência de sua natureza. Como já mencionado anteriormente, com a descoberta da incomensurabilidade, que foi atribuída ao matemático grego discípulo da escola Pitagórica, Hipasus Metapontum ou Hipasos Metaponto (470-400 a. C.), nascido na cidade grega de Metapontum sul da Itália, marcou a origem das proporções áureas na Grécia Antiga, embora haja indícios de que esta razão já vinha sendo muito usada no Antigo Egito desde a antiguidade.

Há indícios de que a descoberta destas grandezas incomensuráveis ou ditas irracionais tenha sido a causa do afastamento de Hipasus da escola de Pitágoras, pois, provocou mudanças devastadoras no pensamento filosófico da escola pitagórica, que defendia a ideia de que tudo no universo podia ser reduzido somente a números racionais comensuráveis, ou suas razões. Hipasus demonstrou matematicamente sua descoberta, como por exemplo, o número raiz quadrada de dois, jamais poderia se expresso como um número racional. Além de fazer a demonstração, ele divulgou a notícia para pessoas que não eram membros da irmandade pitagórica. Essa descoberta irreversível na matemática praticamente demoliu a crença que os pitagóricos tinham nos números inteiros, os obrigando a abandonar esta filosofia, abrindo-se portas para que os matemáticos gregos desenvolvessem novas teorias.

> Tratava-se de uma descoberta que na própria geometria os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmos simples propriedades básicas. Não bastam, por exemplo, para comparar a diagonal de um quadrado ou de um cubo ou de pentágono com seus lados (BOYER, 2005, p. 50).

Hipasus fez uso do teorema de Pitágoras para demonstrar a questão da incomensurabilidade no triângulo isósceles retangular. Ele provou que existe número incomensurável que corresponda a um ponto C da reta, no caso em que o segmento AC seja igual à base.

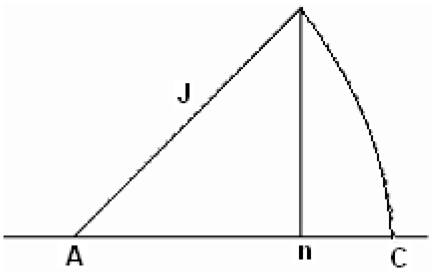


Figura 08: Triângulo Retângulo Isósceles de lado unitário.

1.3 LEONARDO DE FIBONACCI E A RAZÃO ÁUREA

É impossível falar de razão e proporção áurea e não mencionar Leonardo de Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa, matemático e comerciante da idade média que escreveu seu nome na história, nascido em Pisa na Itália, por volta de 1.175.

Fibonacci ficou conhecido com a publicação do livro Líber Abacci (Livro do Ábaco), no ano de 1.202. Essa obra trazia problema envolvendo a população de coelhos. Ele foi o primeiro a introduzir por meio deste livro o sistema de numeração Hindu-arábico na Europa da Idade Média.

O Líber Abacci, foi de fundamental importância para a transmissão do sistema de numeração hindu-arábico na Europa, pois, devido ao seu conteúdo teórico ser praticamente todo ilustrado com muitos problemas que representam grande parte do livro, porém, não alcançou as massas populares.

> O Líber Abacci trata muito mais de números que de geometria. Descreve primeiro “as nove cifras indianas”, juntamente com símbolo 0, “chamado zephirum em árabe”. Incidentalmente é de zephirum e suas variantes que derivam nossas palavras. “cifra” e “zero”. A exposição de Fibonacci da numeração indo-arábico foi importante no processo de transmissão; mas, como vimos, não foi à primeira dessas exposições, nem alcançou a popularidade (BOYER, 2005, p. 173).

1.3.1 A Sequência de Fibonacci e a Proporção Áurea

O problema com a criação de coelhos consistia em saber quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir de segundo mês. Esse problema deu origem à famosa sequência de Fibonacci, onde os dois primeiros termos iguais a 1 e então cada termo seguinte é igual à soma dos dois termos anteriores:

Assim temos:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

Segundo Gundlach (1992), em 1611 o matemático Johann Kepler observou o que certamente Fibonacci já sabia, que: $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$.

Onde temos: f_n como o enésimo número de Fibonacci ($f_0 = 0$, $f_1 = 1$).

O número de ouro é encontrado na sequência de Fibonacci, no quociente da divisão de seus termos, de modo que este quociente a cada divisão realizada tenda infinitamente para o quociente áureo perfeito.

Assim temos: $0 + 1 = 1$

$1 + 1 = 2$.. $\frac{2}{1} = 2$

$1 + 2 = 3$,... $\frac{3}{2} = 1{,}5$

$2 + 3 = 5$,.. $\frac{5}{3} = 1{,}6666.$

$3 + 5 = 8$,.. $\frac{8}{5} = 1{,}6$

$5 + 8 = 13$,.. $\frac{13}{8} = 1{,}625$

$8 + 13 = 21$,... $\frac{21}{13} = 1{,}615384\dots$

$13 + 21 = 34$,.. $\frac{34}{21} = 1{,}619047..$

$21 + 34 = 55$,.. $\frac{55}{34} = 1{,}617647..$

$34 + 55 = 89$.. $\frac{89}{55} = 1{,}618181\dots$

$$55 + 89 = 144 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{144}{89} = 1{,}617977\ldots$$

$$89 + 144 = 233 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{233}{144} = 1{,}618055\ldots$$

Assim sucessivamente sempre tendendo para o infinito:

> A notável relação entre a sequência de Fibonacci e a "razão áurea" foi estabelecida pela primeira vez pelo matemático escocês Robert Simon, em 1753. Simon provou que: $\Phi = \lim_{n\to\infty} \frac{fn+1}{fn} = 1{,}61803398874985\ldots$ (GUNDLACH, 1992, p. 62).

Desta forma, se continuássemos com a sequência, determinando o termo seguinte, mediante a adição dos termos anteriores, por exemplo, após o número 610, que é a soma de 233 e 377, teríamos 987, que é a soma de 377 e 610, esse processo poderia se continuar infinitamente, do seguinte modo: $377, 610, 987, 1597, \ldots, 4181, \ldots, 10946, \ldots$ Essa série recebeu o nome de sequência de Fibonacci, pois foi este matemático da Idade Média quem a estudou a fundo e, foi ainda quem propôs o famoso e clássico problema da reprodução dos coelhos.

A razão áurea e a sequência de Fibonacci estão relacionadas justamente neste ponto, pois, se prosseguíssemos indefinidamente com a série, o quociente da divisão do termo seguinte pelo anterior seria cada vez mais próximo ou exatamente igual a Φ.

1.4 OS CONCEITOS MATEMÁTICOS POR TRAZ DO NÚMERO DE OURO

1.4.1 Um pouco sobre Razão e Proporção

Frequentemente empregamos proporções em nosso dia-a-dia, embora sem utilizar símbolos matemáticos. Segundo Crespo (1996), ao criticarmos uma estátua, dizendo que "ela tem uma cabeça muito grande", não estamos nos referindo à medida absoluta da cabeça. Em uma estátua, a cabeça pode ser "muito grande", mesmo medindo a metade, um quarto do décimo da cabeça verdadeira; é "muito grande" proporcionalmente ao conjunto da própria estátua.

1.4.2 Razão de dois Números

Razão de um número **a** para um número **b** (diferente de zero) é o quociente de **a** para **b**. De modo geral temos:

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} \text{ ou } \mathrm{a} : \mathrm{b} \text{ (lemos: } \mathbf{a} \text{ para } \mathbf{b}\text{)}$$

Sendo assim os números **a** e **b** são os termos da razão; onde **a** é chamado de antecedente e **b** de consequente da razão. Assim temos: a razão de 3 para 12 é:

$$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

De acordo com as ideias de Crespo (1996), a razão é muito usada quando queremos comparar unidades entre si. É importante se saber que tipos de grandezas estão sendo comparadas. A razão entre duas grandezas, dadas em uma certa ordem, é a razão entre a medida da primeira grandeza e a medida da segunda. Assim temos que: A razão de $2\mathrm{m}$ para $3\mathrm{m}$ é: Quando as grandezas são da mesma espécie, suas medidas devem ser expressas na mesma unidade. Neste caso, a razão é um número puro.

$$\frac{2\mathrm{m}}{3\mathrm{m}} = \frac{2}{3}$$

Esse tipo de razão é muito utilizada em escalas, por exemplo, num mapa, a escala é a razão entre a distância no mapa e a distância real correspondente.

1.4.3 Proporção

Consideremos quatro números ($15,\ 3,\ 20 \text{ e } 4$), como a razão entre os dois primeiros números ($15 \text{ e } 3$) é igual à razão entre os dois últimos ($20 \text{ e } 4$), logo:

$$\frac{15}{3} = 5 \text{ e } \frac{20}{4} = 5;$$

Dizemos que os números 15, 3, 20 e 4, nesta ordem, formam uma proporção, que é possível expressar mediante a igualdade das duas razões. Assim:

$$\frac{15}{3} = \frac{20}{4}$$

Em uma certa ordem, quatro números (**a**, **b**, **c** e **d**) diferentes de zero, dizemos que formam uma proporção quando, a razão entre os dois primeiros (**a** e **b**) é igual à razão entre os dois últimos (**c** e **d**).

1.5 A RAZÃO ÁUREA ATRAVÉS DA DIVISÃO DE SEGMENTOS GEOMÉTRICOS

A razão áurea é tão enigmática que está presente para onde quer que olhemos. Também está repleta de conceitos matemáticos, os quais serão estudados a partir de agora.

> A teoria das proporções claramente se ajusta ao esquema de interesses matemáticos dos Gregos antigos, e não é difícil achar uma provável fonte de inspiração. Conta-se que Pitágoras soube na Mesopotâmia das três médias, aritmética, geométrica e a subcontrária (mais tarde chamada harmônica) – e da “proporção áurea” que relaciona duas delas: o primeiro de dois números está para sua média aritmética como a média harmônica está para o segundo número (BOYER, 2005 p. 38).

Dizemos que o ponto $\mathbf{C}$ divide o segmento $\mathbf{AB}$ em média e extrema razão se o quociente entre os segmentos menor e o maior é igual ao quociente entre a maior e o segmento todo.

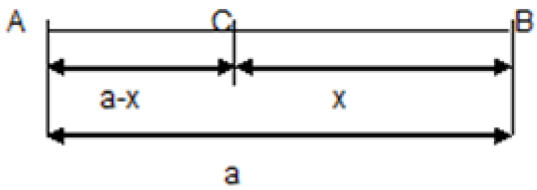


Figura 09: Divisão de Segmento Geométrico

$$\frac{\mathbf{x}}{(\mathbf{a}-\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{x}}$$

Assim temos:

$$\frac{parte\ maior}{parte\ menor} = \frac{segmento\ todo}{parte\ maior}$$

Por definição encontramos o número de ouro, quando é satisfeita a equação:

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}, \mathrm{logo}\ (\mathrm{BC})^2 = \mathrm{AC} \,.\, \mathrm{AB}$$

Tomando $AB = 1$, e sabendo que:

$$AC + BC = AB \text{ , temos que:}$$

$$AC + BC = 1 \text{ e também } (BC)^2 = AC.1$$

$$\text{Assim, } (BC)^2 = AC \text{ e } AC = 1 - BC$$

$$\text{Logo, } (BC)^2 = 1 - BC \text{ e portanto à: } (BC)^2 + BC - 1 = 0.$$

Fazendo $BC = x$, temos $x^2 + x - 1 = 0$

Resolvendo a equação, onde: $a = 1;\ b = 1 \text{ e } c = -1.$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = 1^2 - 4.1.(-1)$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = x' = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Como:

$$AC = 1 - BC, \text{ temos:}$$

$$AC = 1 - \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1 + 1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Fazendo o **m.m.c**. encontramos:

$$AC = \frac{2 + 1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad ; \quad \text{logo: } AC = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Dividindo-se estes dois segmentos encontraremos:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi = 1{,}618033\ldots = \frac{BC}{AB}$$

1.6 O RETÂNGULO ÁUREO

Chamamos de retângulo áureo, qualquer retângulo $ABCD$, onde o quociente entre a divisão de seus lados diferentes seja igual à Phi. O retângulo de ouro pode ser determinado a partir de um quadrado de medida qualquer.

$$\frac{medida\ do\ lado\ maior}{medida\ do\ lado\ menor} = 1,618033\ldots$$

O retângulo áureo exerceu grande influência na Grécia Antiga, principalmente na arquitetura, ele foi também o objeto que mais se fez presente nas artes tanto na Antiguidade como na Idade Média. Tal influência pode ser observada em uma das construções mais conhecidas em todo o mundo, o Parthenon, construído em Atenas na Grécia pelo arquiteto e escultor grego Phidias por volta de 447 e 408 a. C., e nas obras de artes que escreverem os nomes de artistas como, Piet Mondrian, Cândido Portinari, Michelangelo, Salvador Dali, Leonardo da Vinci, para sempre na história da humanidade.

A razão áurea é considerada por muitos como sendo uma “proporção divina” uma “dádiva de Deus”, e foi utilizada ao longo de séculos em vários contextos.

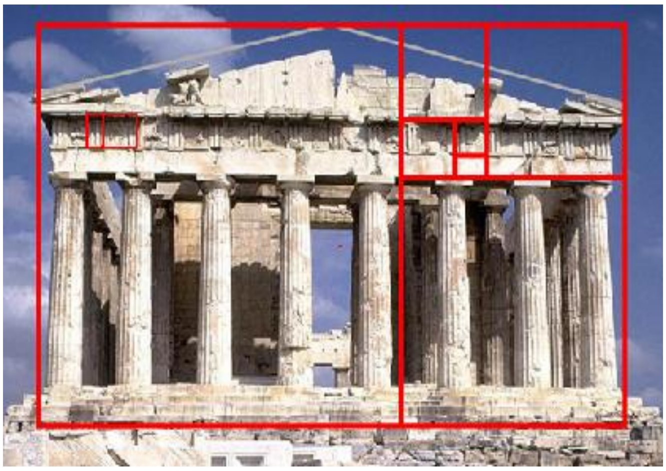


Figura 10: Frente do Templo “Parthenon” – Grécia

O Parthenon, quando seu frontão ainda estava intacto, suas dimensões podiam se encaixar quase exatamente em um retângulo áureo (HUNTLEY, 1985).

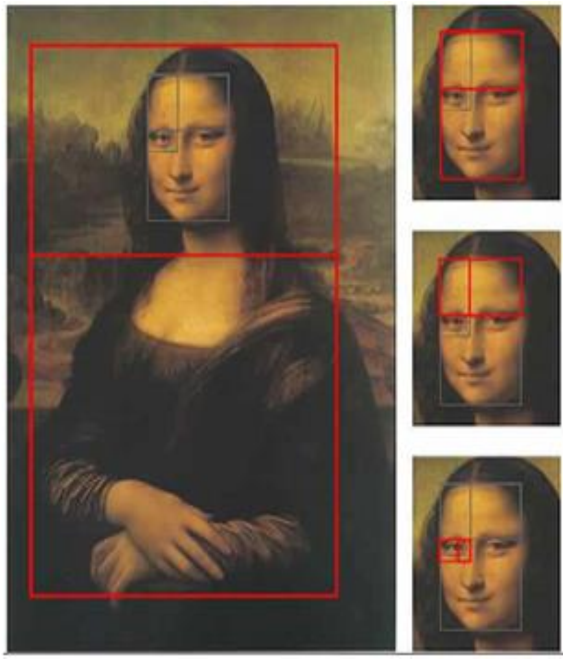


Figura 11: “Mona Lisa” de Leonardo da Vinci

Em Mona Lisa, de Leonardo da Vinci, as dimensões do retângulo áureo podem ser observadas em uma das obras mais conhecidas do pintor francês, tanto na pintura quanto no próprio formato do quadro.

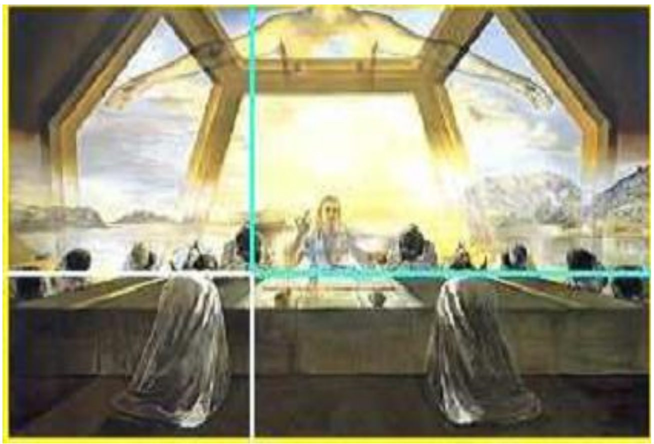


Figura 12: “Última Ceia” de Salvador Dali

O quadro “A Última Ceia” do Artista Catalão, Salvador Domingo Felipe Jacinto Dalí i Domènech, é uma obra com dimensões áureas, $270 \text{ cm} \times 167 \text{ cm}$, a razão entre estes segmentos gera $1,6180339\ldots$, que vem ser o número de ouro.

Com base nas ideias de Huntley (1985), a construção de um retângulo áureo não há mistérios. Como podemos observar na figura 13, tomemos um quadrado ABCD, sendo E o ponto médio do lado AB. Com centro no ponto E e raio EC, traça-se um arco de círculo que intercepte AB prolongado até o ponto F, posteriormente desenha-se o FG perpendicular a AF encontrando DC prolongado até o ponto G. Dessa forma, encontramos o retângulo áureo AFGD.

A prova é análoga à razão áurea, através da divisão de segmento. Neste caso, só temos que tomar AB = 2 unidades de comprimento. Logo:

$$\mathrm{EC} = \mathrm{EF} = \sqrt{5} \text{ und.}$$

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FG}} = \frac{(\mathrm{AE}+\mathrm{EF})}{\mathrm{FG}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi.$$

O segmento AF está sendo divido por B na secção áurea. O ponto B é chamado por alguns autores de “corte áureo”, sendo ele associado à ideia de “média proporcional”: Neste caso, AB é a média proporcional de AF e BF.

Assim temos:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BF}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AB}} \Rightarrow (\mathrm{AB})^2 = \mathrm{AF}.\mathrm{BF}$$

Para alguns é questionável o fato de a razão áurea estar relacionada ou não com as proporções esteticamente mais agradáveis aos olhos do ser humano, porém, fica difícil afirmar, por exemplo, que Leonardo Da Vinci tenha feito uso desta enigmática razão ao acaso.

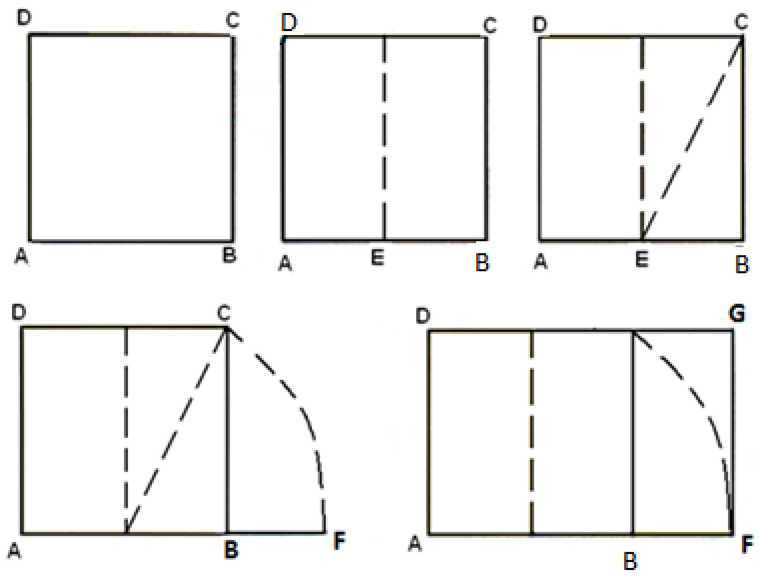


Figura 13: Construção de um Retângulo Áureo.

Segundo Huntley (1985), a primeira pesquisa séria realizada sobre as pretensões do retângulo áureo de possuir um interesse estético especial foi realizada em 1876, pelo psicólogo alemão Gustav Fechner[3]. Dados desta pesquisa apontam para uma evidente preferência popular por um retângulo de formato e dimensões bastante próximas do retângulo de ouro. Outra pesquisa delimitou-se em obras feitas pelo homem, tomando as medidas de inúmeros objetos de formas retangulares como: prédios, jornais, caixas, livros etc. Chegando à conclusão que a maioria das pessoas tinham preferência por retângulos que obedecem a proporção áurea e $1{:}1,618$, pois, tais medidas eram mais agradáveis visivelmente.

1.7 A ESPIRAL LOGARÍTMICA

Examinaremos agora com maiores detalhes a bela curva, que tem sido estudada pelos matemáticos por centenas de anos e que está representada na natureza há milhares de séculos, tanto na flora quanto na fauna. Também pode ser encontrada na arquitetura, nas artes, no corpo humano e praticamente em todos os segmentos da natureza que nos rodeiam. Esse tipo de curva foi designada pelo

---

[3] **Gustav Fechner**, Psicofísico que viveu entre 1801 e 1887, em 1860 publicou sua mais célebre obra *Elemente Der Psychophsic,* que exerceu grande influência no ramo da psicologia. Fechner é considerado o precursor da psicologia cientifica por ter desenvolvido investigações sistemáticas rigorosas e por ter expressado em linguagem matemática uma relação entre fenômenos físicos e psicológicos.

Matemático francês René Descartes, como espiral equiangular que também é chamada de espiral logarítmica.

A origem do nome espiral logarítmica é devida à forma como o raio R cresce quando nos movemos ao longo da curva equiangular e, se determinamos um ponto em qualquer parte da curva, o ângulo será sempre o mesmo.

Dado o ponto O, a espiral logarítmica é uma curva tal que a amplitude do ângulo formado pela tangente em qualquer dos seus pontos P com a semi-reta OP é uma constante, ou seja, α é constante durante toda trajetória da espiral. Temos como a equação genérica da espiral a equação polar $r(\theta) = R.e^{\theta\cot(\alpha)}$, onde r é o raio da espiral e R é o raio associado para θ = 0 , tal que θ, variável independente, é o ângulo em radianos formado entre r e o eixo x e $-\infty < \theta < +\infty$ fazendo com que a curva tenha comprimento ilimitado. Para o ângulo de α= 90°, a curva formará uma circunferência.

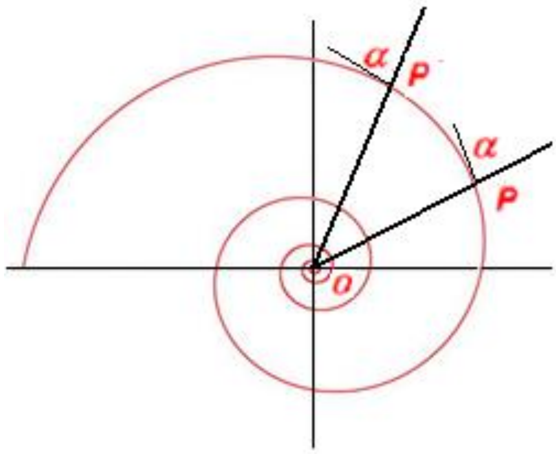


Figura 14: Planificação de uma espiral equiangular.

> A espiral possui outra propriedade interessante digna de nota. Por mais diferente que dois segmentos da curva possam ser em tamanho eles não são diferentes em formato. Suponhamos que, com ajuda de um microscópio, fosse tirada uma fotografia das convulções próximas ao O, pequenas demais para serem vistas a olho nu. Se fosse adequadamente ampliada essa cópia poderia ser encaixada exatamente em uma espiral do tamanho da figura acima. A espiral não possui ponto terminal ela pode crescer para fora ou para dentro indefinidamente, mas seu formato não se altera (HUNTLEY, 1985, p. 101).

Há várias formas de se construir uma espiral logarítmica, algumas delas são a partir do retângulo áureo ou pela sequência de Fibonacci. A espiral equiangular é encontrada com muita frequência na natureza. Segundo Leonardo de Pisa, essa série ocorre quando os objetos e seres possuem formatos curvos, levando em conta o Macrocosmo, como as galáxias de estrelas e Microcosmo, nas espirais em frutas, flores, animais e seres microscópicos. Assim, podemos obter uma espiral dourada a partir de retângulos áureos justapostos com medidas da série de Fibonacci.

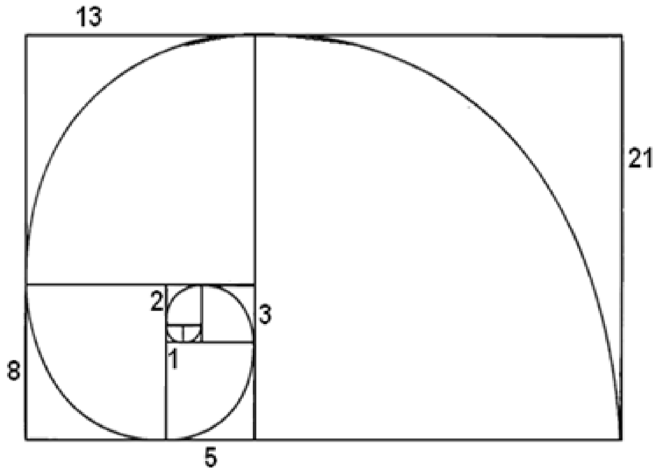


Figura 15: Espiral logarítmica e números de Fibonacci no retângulo áureo.

Os números de Fibonacci podem ser encontrados frequentemente na natureza, através da espiral dourada. A proporção áurea não se restringe basicamente às preferências estéticas do homem, está também inteiramente relacionada com os padrões de crescimento de seres vivos, como animais e plantas. Um típico exemplo de espiral logarítmica pode ser encontrado na concha Nautilus, onde é possível observar cada estágio consecutivo de expansão é contido um retângulo áureo que é um quadrado maior que o anterior.

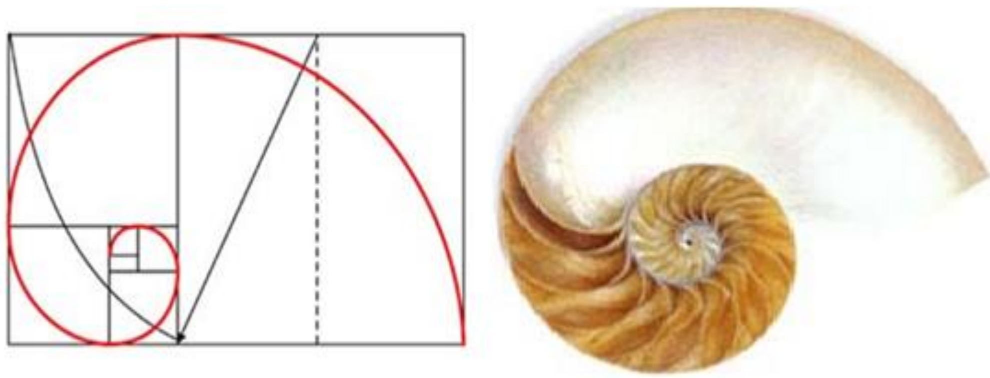


Figura 16: Planificação da espiral logarítmica, na concha de Nautilus.

O Nautilus é um molusco marinho, composto por uma concha de estrutura espiralada, sua concha segue exatamente aquele padrão de crescimento que mostram como elas se abrem em espirais logarítmicas caracterizadas pelas proporções da seção áurea, esse padrão de crescimento pode ser observado também com abundância em outros seres na natureza, por exemplo: as espirais de uma pinha e de um girassol, são similares. As sementes de cada uma crescem com duas espirais que se interceptam e movem-se em direções opostas e, cada semente pertence a ambos os pares de espirais.

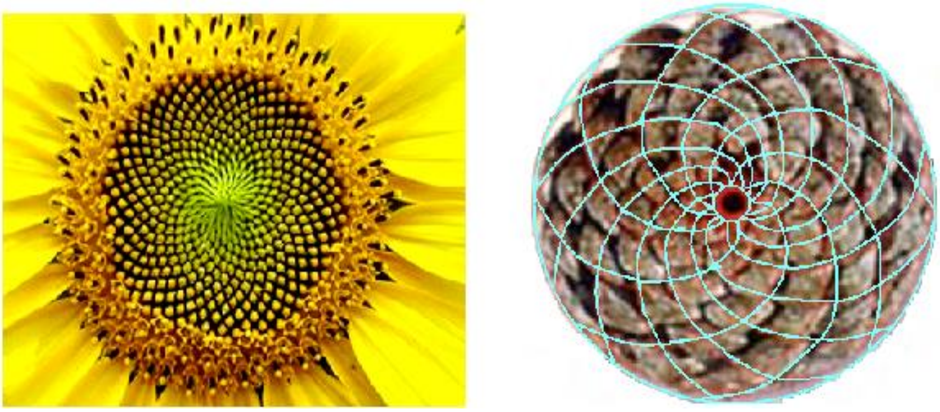


Figura 17: Girassol e Pinha.

Além das espirais que podem ser observadas imediatamente, a proporção áurea também está presente na razão entre o número de espirais que se direcionam em um sentido e as espirais que estão em sentido oposto, sendo que: examinando as espirais da pinha, percebe-se que 8 delas movem-se em sentido horário, e 13 em direção contrária, numa razão muito próxima da áurea. No caso do girassol, há 21 espirais em um sentido e 34 em sentido oposto, também em proporções muita próximas à áurea.

Assim temos:

$$\text{Espirais da Pinha} = \frac{13}{8} = 1,625\ldots$$

$$\text{Espirais do Girassol} = \frac{34}{21} = 1,619\ldots$$

A espiral logarítmica também pode ser encontrada a partir das subdivisões de um triângulo áureo, que pode ser divido em uma série de triângulos áureos menores, da mesma maneira como fizemos com o retângulo, estas divisões podem se estender infinitamente, usando os comprimentos dos lados dos triângulos que foram subdivididos, como raios de um círculo. Ver figura 18:

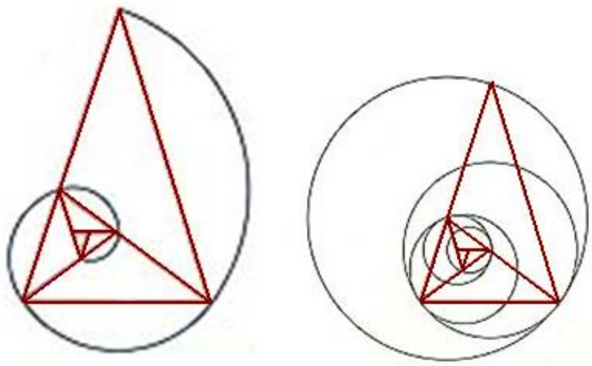


Figura 18: Espiral logarítmica, na subdivisão de um triângulo áureo.

A espiral logarítmica é também conhecida como a espiral do crescimento ou ainda Spira Mirabilis, denotou Jacob Bernoulli (1654 -1705), como já foi mencionado, a bela curva está naturalmente ligada aos números de Fibonacci, ao retângulo dourado e a razão áurea. Podemos chamar este padrão de crescimento de “Lei da Natureza”. Estando presente na maioria dos cosmos dos animais, as garras, os caracóis, entre outros exemplos que já vimos e alguns que veremos a seguir, são também basicamente espirais equiangulares.

Figura 19: Espiral Dourada nas Galáxias e nos Chifres dos Carneiros.

O mais intrigante sobre a espiral equiangular, é que ela não está presente somente nas plantas, aparece também no corpo humano, nos animais, de uma maneira geral em toda a natureza, como veremos no decorrer deste trabalho.

1.8 O PENTÁGONO, O PENTAGRAMA E O TRIÂNGULO ÁUREO

> A Geometria tem dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; o segundo podemos chamar de joia preciosa (KLEPER, 1571–1630; HUNTLEY, 1985, p. 35).

A descoberta da razão áurea, por muito tempo foi ignorada por grandes matemáticos da Antiguidade. Uma descoberta que ao mesmo tempo em que causava medo e dúvidas aos estudiosos da área, os fascinava, deixando-os encantados com sua perfeição.

Apesar de haver registros da utilização desta fascinante razão no Egito Antigo, séculos antes de ter sido descoberta pelos gregos, foi na Grécia onde ela foi divulgada através da escola pitagórica, fundada pelo matemático e filósofo grego Pitágoras, responsável também por inúmeras descobertas matemáticas, principalmente no campo da geometria. Os gregos enxergavam a secção áurea como sendo a expressão da perfeição geométrica. Por este motivo foi muito utilizada pelos arquitetos e escultores da época em suas obras.

Dentre todas as figuras geométricas, o pentágono é uma das mais extraordinárias, devido à todas as suas relações de forma e medida estarem em proporção áurea recíproca. Estando ele só, com o círculo, inscrito ou circunscrito, dentro do quadrado ou do retângulo, enriquece e estabiliza as possibilidades compositivas. As figuras geométricas que surgem a partir das subdivisões do pentágono regular, mantêm suas propriedades e proporções áureas. Foi a partir destas subdivisões que os gregos chegaram ao pentagrama, às diagonais do pentágono se cruzam dando origem a estrela de cinco pontas, onde todas as suas medidas são áureas. Como é possível observar na figura 20.

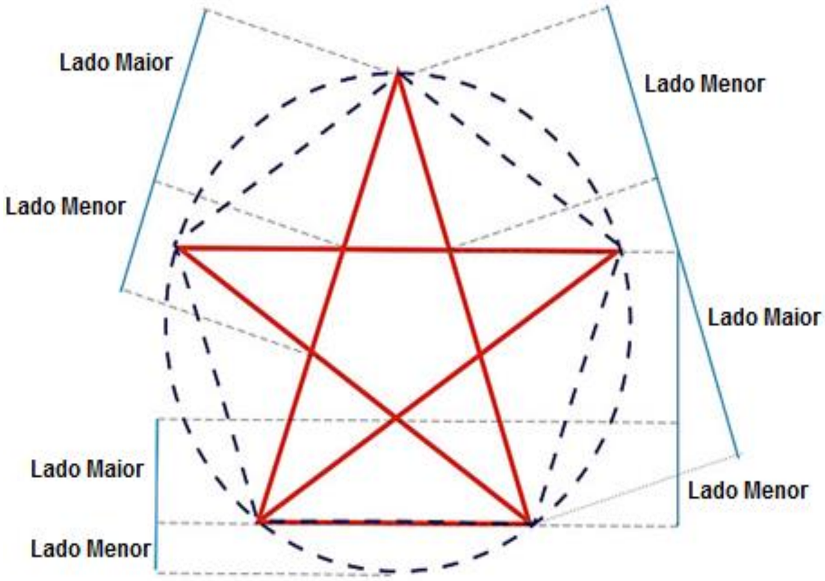


Figura 20: Construção do Pentagrama.

Considerando um pentágono regular abaixo podemos partindo de um de seus vértices, traçar duas diagonais, obtendo assim um triângulo onde a base é um dos lados do pentágono.

Observando a figura 21, temos três triângulos isósceles, ABC, ACD e ADE. Além disso, os triângulos ABC e ADE são congruentes.

Notemos que a soma dos ângulos internos de um polígono é dada por $\mathrm{S} = (\mathrm{n} - 2)180°$, onde n é o número de lados do polígono. Logo observando a figura 21, teremos que a soma dos ângulos internos desse polígono é igual a $540°$, e sendo este um pentágono regular todos os seus ângulos são iguais, logo teremos cada ângulo igual a $108°$. Considerando que:

$$\mathrm{ADE} = \mathrm{EAD} = 36°$$

$$\mathrm{ACB} = \mathrm{CAB} = 36°$$

$$\mathrm{CAD} = 36° \ \mathrm{E}$$

$$\mathrm{ACD} = \mathrm{ADC} = 72°$$

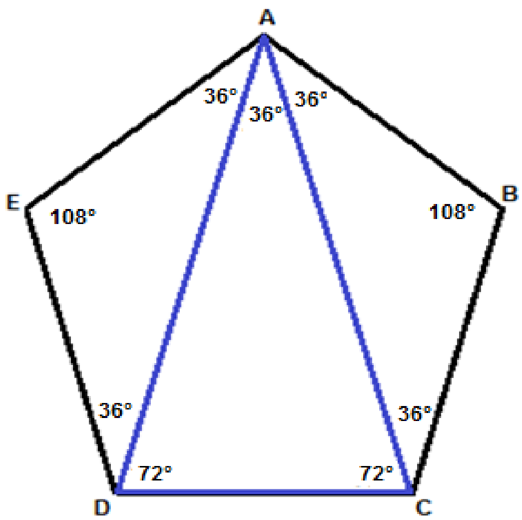


Figura 21: Pentágono e Triângulo Áureo.

Essas informações nos levam à construção de um pentágono áureo a partir de um triângulo isósceles em que cada ângulo da base é o dobro do ângulo do vértice. Para isso, tomemos um dado triângulo, com bissetrizes de seus dois ângulos congruentes devidamente traçadas. Construa uma circunferência de modo que ela passe pelos três vértices do triângulo (e o centro da circunferência seja também o ponto de encontro da mediatriz do triângulo). Se prolongarmos as duas bissetrizes do triangulo isósceles até que crie dois novos pontos de interseção com circunferência, onde traçando os demais segmentos encontraremos o pentágono áureo e o pentagrama (estrela de cinco pontas), (Fig. 22)

O pentagrama é uma figura que está ligada ao misticismo. Na Grécia Antiga era usada como emblema da Irmandade Pitagórica, pois, segundo os membros desta escola, o pentágono áureo e o pentagrama estavam na divina proporção, pois, todas as suas subdivisões sempre davam origem a novos pentágonos regulares menores e, consequentes novos pentagramas, um processo que poderia se repetir infinitamente e sempre mantendo as mesmas proporções áureas. Por isso, era considerado o símbolo da perfeição, que ainda é muito utilizado nos dias atuais.

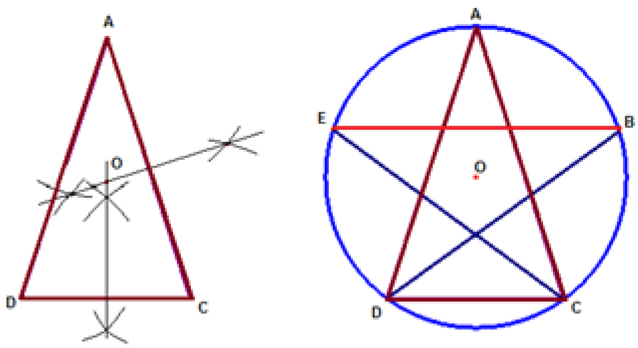


Figura 22: Triângulo Áureo e o Pentagrama .

Por isso, era considerado o símbolo da perfeição, que ainda é muito utilizado nos dias atuais.

1.8.1 A Incomensurabilidade do Pentágono Regular

Para Boyer (1996, p. 34), uma das questões tantalizantes quanto à geometria pitagórica diz respeito à construção do pentagrama ou pentágono estrelado. Se começarmos com um polígono regular ABCDE e traçarmos as cinco diagonais, essas diagonais se cortam em pontos A`B`C`D’E`, que formam outro pentágono regular.

As diagonais de um pentágono regular determinam um novo pentágono regular e também um novo pentagrama, cuja parte central é outro pentágono, esse processo pode se repetir infinitamente e, o mais surpreendente é, que por mais contínuo que seja este processo, as subdivisões permanecem na proporção áurea.

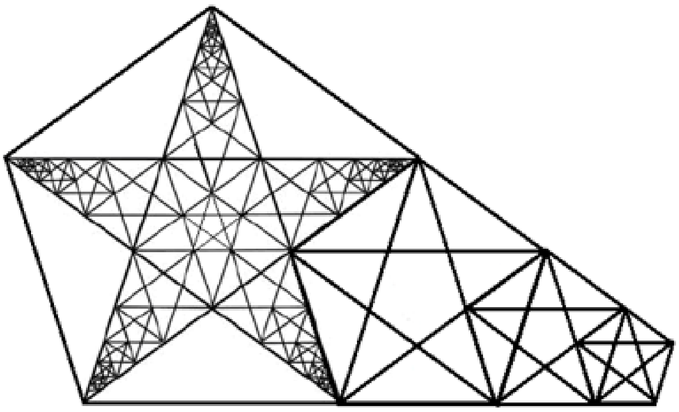


Figura 23: Pentágono Regular e suas infinitas diagonais.

O pentágono regular e o pentagrama foram muito utilizados pelos matemáticos na escola pitagórica. Foram os pitagóricos também que descobriram as notáveis propriedades desta figura geométrica, que para eles era considerada o símbolo da perfeição, onde suas diagonais dividiam umas às outras, segundo Euclides de Alexandria, em média e extrema razão. Tendo em mãos essa propriedade, o matemático grego Hípasus, concluiu que o quociente entre as medidas do segmento todo pela maior parte é igual ao quociente entre as medidas dessa parte maior com a parte menor.

1. 9 ONDE PODEMOS ENCONTRAR A RAZÃO ÁUREA

No decorrer deste trabalho observou-se que o homem utilizou a razão áurea para construir determinadas obras. No entanto, devemos nos perguntar: será que estes números podem ser encontrados na natureza? Quem pode identifica-lo? Onde mais podemos encontra-lo?

Os gregos acreditavam que a razão áurea era um presente dos deuses, tamanho era sua perfeição, por isso, hoje é conhecida como “Divina Proporção”. Era de uma perfeição que só um deus seria capaz de ter, estando presente nos mínimos detalhes da natureza. O que muitas vezes eles custavam a compreender, é que a natureza segue padrões que nem a própria matemática pode explicar.

> Algumas das referências mais antigas dos prazeres da matemática estão ligadas ao nome do filósofo grego Pitágoras (569 – 500 a. C.), que observou a ocorrência, na natureza de certas combinações e relações entre números [...] Para Pitágoras, a explicação da ordem da natureza iria ser encontrada na ciência dos números (HUNTLEY, 1985, p.35).

A proporção divina, como foi definida por vários matemáticos já citados, pode ser observada com maior facilidade na natureza, desde que a pessoa não seja totalmente leiga no assunto. Podemos encontrá-la também na moda, no design, na arquitetura, na música, no corpo humano, e em diversos outros segmentos.

1.9.1 A Proporção Áurea na Natureza.

A secção áurea pode ser observada com muita frequência na natureza, através do retângulo áureo, pois, suas propriedades se aplicam com muita facilidade a vários segmentos da natureza como as plantas e os animais. Devido a esse retângulo conter a presença da espiral dourada, a qual já foi estudada anteriormente. Essa espiral pode ser encontrada no formato de conchas marinhas, na organização das sementes do girassol, na distribuição das pétalas de uma rosa, na maneira como estão dispostas as folhas de um galho.

> É importante ter em mente que a beleza superficial da natureza não faz mais que sugerir o encanto oculto por dentro. A matemática não está a flor de sua pele, ela tem de ser descoberta. O que significa trabalho (HUNTLEY, 1985, p. 149).

Como foi exposto anteriormente, o problema com a criação dos coelhos, foi que deu origem a sequência de Fibonacci, porém há outras situações na natureza, nas quais ela se faz presente. É possível constatar isso, observando o número de pétalas em algumas flores comuns.

Figura 24: Jasmim Manga com 05 pétalas e a Margarida com 34 pétalas.

Estes números não ficaram restritos apenas nos números de pétalas das flores, estão presentes também na disposição das folhas e galhos de algumas plantas (Filotaxia)[4].

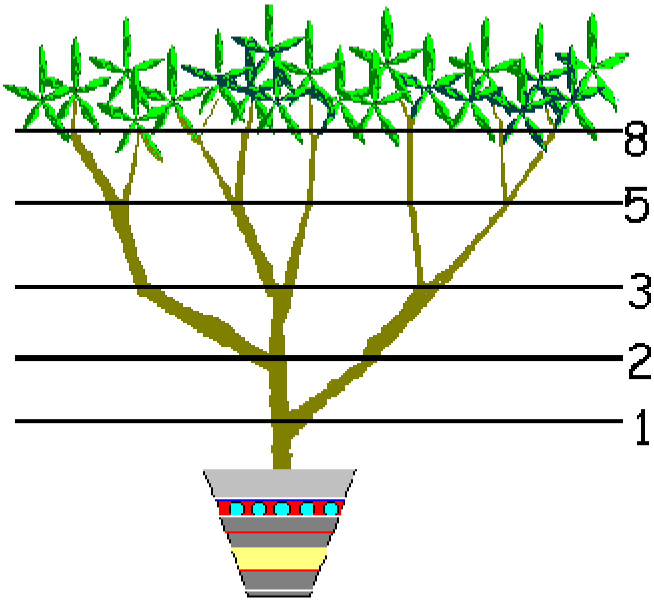


Figura 25: Disposição dos galhos de uma planta.

Considere um ramo de uma planta qualquer que cresça verticalmente e que deste ramo tenha brotado uma folha. As folhas deste ramo continuarão a crescer verticalmente e, acima da única folha inicial, brotarão as outras.

Cada nova folha gerada no ramo vai fazendo um ângulo de 222° com a folha que fica embaixo. Sendo este preservado a cada nova folha que surgir. Assim, o ramo que cresce na vertical torna possível a todas as folhas que capturarem a cada raio de sol e cada gota de chuva, não prejudicando seu desenvolvimento.

[4] Filotaxia, termo da botânica que inclui a disposição de folhas nos ramos das plantas.

Podemos considerar p, como sendo o número de voltas da espiral e q o número de bases de folhas pela qual a espiral passou, desconsiderando a base da primeira folha, então temos: $\frac{p}{q}$, sendo uma fração característica da planta; logo é a divergência necessária das folhas. Vemos que o numerador e o denominador desta fração seguem para a sequência de Fibonacci, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}; \ldots$ e assim sucessivamente. Logo os quocientes destas frações tendem infinitamente para Φ, isto é $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \Phi$, onde f_n é um numero de Fibonacci.

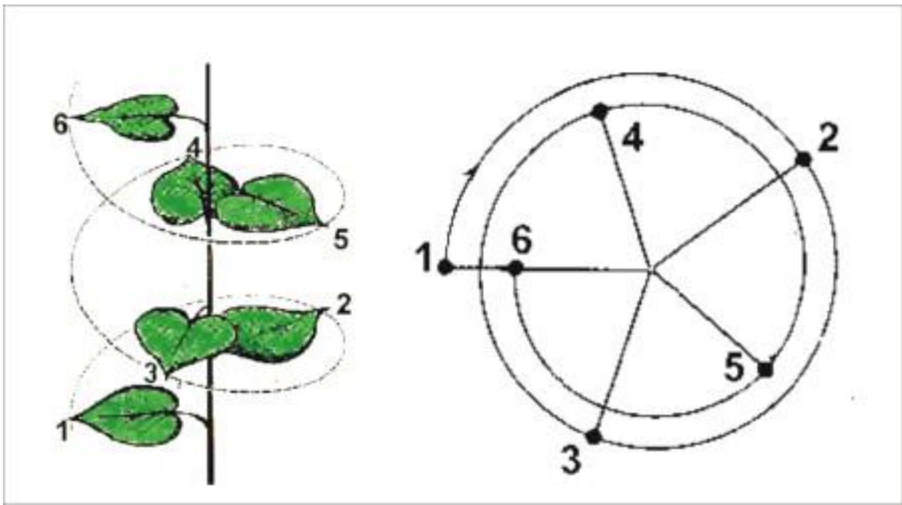


Figura 26: Estrutura do movimento espiral de crescimento.

De um modo geral, é válido dizer que os números de Fibonacci estão presentes em muitas plantas, nos ramos e galhos que crescem em quantidades baseadas nesta série.

1.9.2 A Música e o Número de Ouro

Para Boyer (2005), era um artigo de fé fundamental do pitagorismo que a essência de tudo, tanto na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem, podia ser explicada em termos de *arithmos*, ou das propriedades intrínsecas dos inteiros e suas razões.

De acordo com o dicionário, a música é uma sucessão de sons agradáveis ao ouvido. Também podemos dizer que a música é “ritmo e som”, ou seja, é uma combinação do sons executados em determinada cadência. Para que a música seja agradável, precisa de uma harmonia entre os acordes e isto é obtido usando a matemática.

Pitágoras de Samos (582-497 a.C.) é considerado o fundador da geometria teórica. Em seus pensamentos sobre a estrutura do universo, razões e proporções, ele elaborou uma teoria que vinculava a música, o espaço e os números (Belucci, 2008).

Em duas cordas de mesmo material, sob a mesma tensão e sendo a primeira o dobro do comprimento da segunda, quando tocadas, a corda mais curta irá emitir um tom uma oitava acima da corda mais longa, devido a sua frequência ter o dobro do valor. Ou seja, a relação de 1:2 compreende a relação sonora de uma oitava (Belucci,2008).

Dessa forma Pitágoras elaborou relações entre sons, o tamanho das cordas e as razões 1:2:3:4.

Assim, chegamos às seguintes relações: $\frac{1}{2}$, compreende a relação sonora de uma oitava e dividindo a corda menor pela metade, obtemos a relação de $\frac{2}{4}$, nesse caso o tom será de duas oitavas acima da corda inicial. Já a relação $\frac{3}{4}$ nos dá um tom, uma quarta acima do tom inicial, e a relação de $\frac{2}{3}$ mostra um tom, uma quinta acima.

De posse destas informações, Pitágoras desenvolveu as relações entre os sons, o tamanho das cordas e as razões de $\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$.

Com base nos estudos de Pitágoras podemos assim obter três tipos de proporções:

*A proporção geométrica estabelecida entre oitavas de um tom, isto é, $\frac{1}{2} : 4$ o tom uma oitava acima e duas oitavas acima;

*A proporção aritmética, pois, usando a relação $\frac{2}{3} : 4$ se estabelece ao trabalhar o som de uma oitava em uma quinta e uma quarta.

*A proporção harmônica relaciona a diferença dos valores das frações medianas, assim na relação de $\frac{6}{8}:12$, onde 8 excede 6 em um terço da mesma forma que 12 excede 8 também em um terço.

A proporção harmônica pode ser considerada uma subversão da proporção aritmética, trabalhando o som de uma oitava em uma quarta e uma quinta. Na música, existem vários artigos que relacionam as composições de Mozart, Bethoveen (Quinta Sinfonia) e outros com a razão áurea.

Mas, a razão áurea não está presente apenas na composição das notas musicais, ela vai mais além. Podemos percebê-la até mesmos na construção dos instrumentos musicais. Podemos observar na figura 30, a razão áurea na estrutura do violino, entre o tamanho do braço e o comprimento total do instrumento, assim como a voluta que obedece a mesma relação das conchas nautilus em forma de uma espiral equiangular.

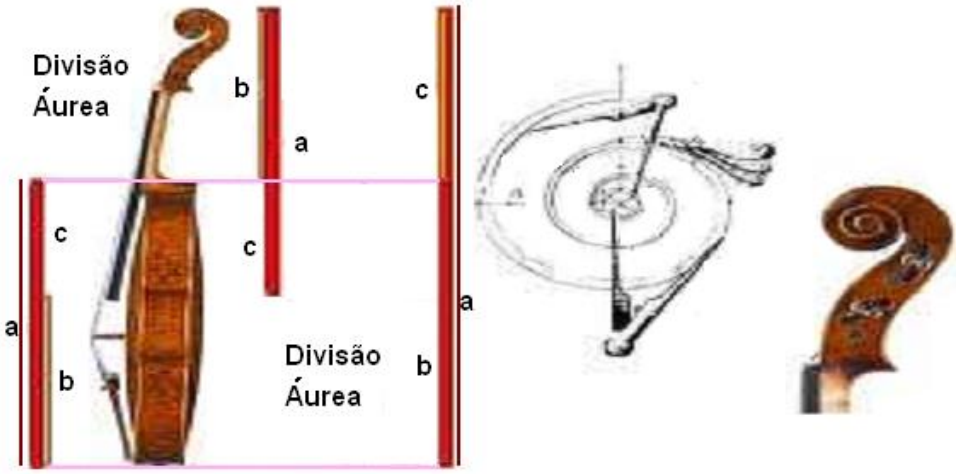


Figura 27: Divisão Áurea no Violino.

Portanto, conclui-se que o número de ouro está presente na música de um modo geral, apesar desta abordagem não citar todos os casos ou situações em que ele se mostra, foi possível observar que foi e ainda é componente crucial, no processo de construção da música.

1.9.3 O Homem de Vitrúvio

Da mesma forma que as plantas e os animais apresentam as proporções áureas, não ocorre diferente com os seres humanos. Talvez seja este fenômeno a explicação para a preferência cognitiva pela razão: veremos a partir de agora que a face e o corpo humano possuem as mesmas relações matemáticas presentes em outros seres vivos. Segundo Marcus Vitruvius[5], o corpo humano possui como ponto central o umbigo, pois, se um homem for colocado deitado de costas, com seus membros superiores e inferiores estendidos e sendo um compasso centrado em seu umbigo, aos dedos de suas mãos, os pés tocarão a circunferência criada a partir deste centro. Pode-se extrair uma segunda figura geométrica, a partir do homem vitruviano, medindo sua altura, da sola dos pés até o topo da cabeça, observa-se que a medida dos braços estirados horizontalmente, criando assim a forma quadrada. Marcus Vitrúvio, acreditava que arquitetura dos templos da época deveria adotar como base a analogia do corpo humano, devido ele ser harmônico em todas as suas partes.

Mas só foi no período da Renascença, na Idade Média, que Leonardo da Vinci, baseando-se nos fundamentos de Vitrúvio, quem ilustrou sua ideia.

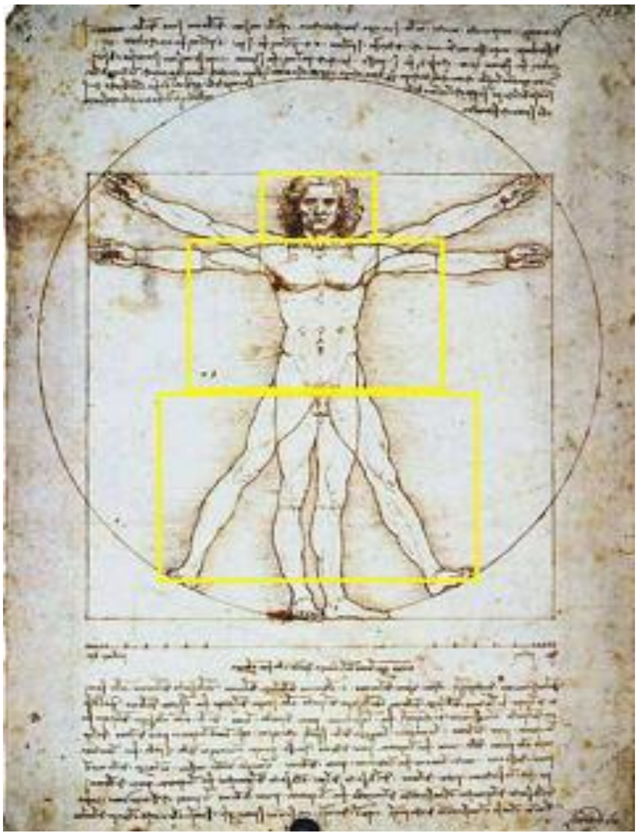


Figura 28: O Homem de Vitrúvio por Leonardo da Vinci.

Segundo Boyer (2005), apesar de Leonardo da Vinci, muitas vezes ser lembrado como um matemático renascentista, ele não se fixou na aritmética, na

[5] Marcus Vitruvius Pollio; arquiteto e engenheiro romano viveu no século I a. C., publicou um grande manual de arquitetura, dividido em 10 volumes, onde desenhou a figura de homem de braços abertos, chamado atualmente de homem vitruviano em sua homenagem.

geometria ou na álgebra por tempo suficiente para fazer uma contribuição significativa. Da Vinci mostra, através de seus desenhos, seus conhecimentos matemáticos, adotando a razão áurea como garantia de perfeição, beleza e harmonia em suas obras, como já foi visto em sua mais famosa obra: o quadro de Mona Lisa.

O estudo de Da Vinci, sobre o corpo humano ser considerado perfeito, possui beleza e hamonia, deve respeitar uma proporção, sendo para ele, a razão áurea a representação do que é perfeito. Então, o corpo humano deve seguir esse mesmo padrão.

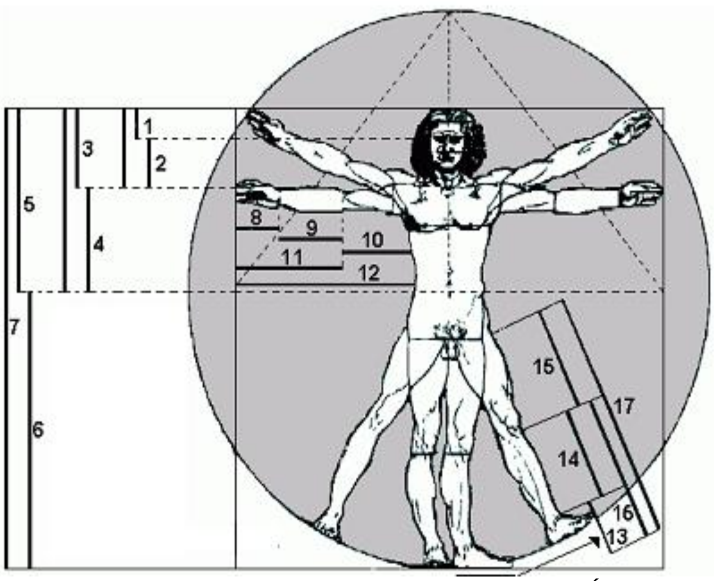


Figura 29: O Corpo Humano e as Proporções Áureas.

Onde, se adotarmos as devidas medidas para os segmentos indicados na figura, chegaremos cada vez mais próximo de Φ.

$$1 : 2 = 2 : 3$$

$$3 : 4 = 4 : 5$$

$$5 : 6 = 6 : 7$$

$$8 : 9 = 9 : 10$$

$$10 : 11 = 11 : 12$$

$$13 : 14 = 14 : 15$$

$$15 : 16 = 16 : 17 \ = 0,618\ldots$$

Para Da Vinci, o homem perfeito, deveria ter as razões entre suas medidas, como por exemplo, sua altura e a distância de umbigo até o chão, deveria ser aproximadamente igual a Φ. Tais proporções também são encontradas na face humana. A ciência já constatou que o rosto humano é inteiramente baseado na razão aurea, pois, ele está repletao de exemplos da secção dourada, começando pela cabeça que forma um retângulo áureo.

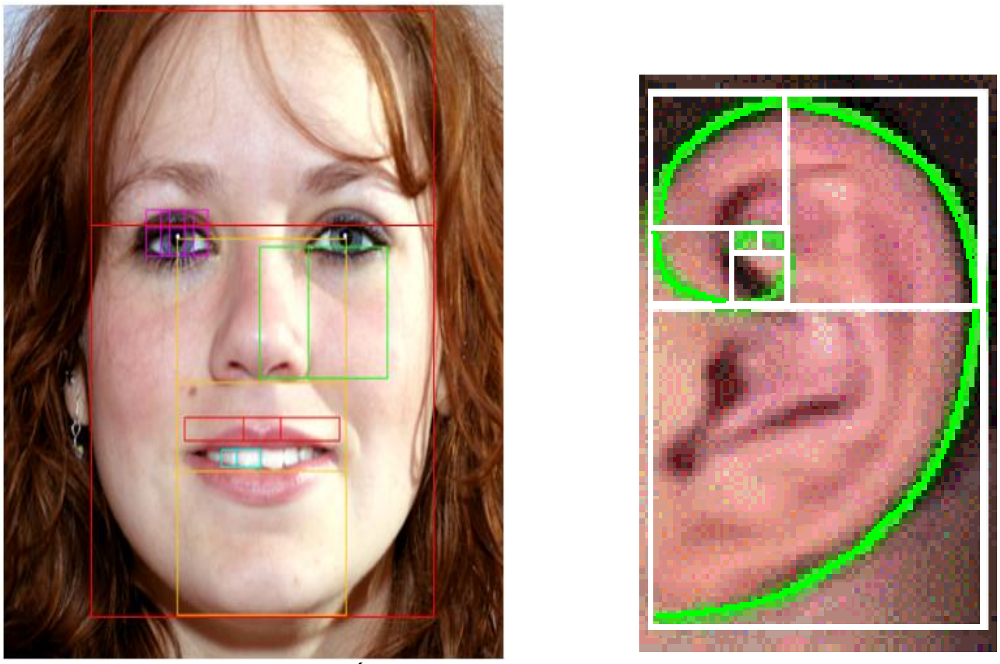


Figura 30: Proporção Áurea na Face e a Espiral Dourada e a Orelha.

A figura 33 mostra claramente as relações áureas na face do ser humano, o retângulo áureo que se encaixa perfeiratamente no formato do rosto, mantém as mesmas relações com os demais. Podemos observar que a boca e nariz são posicionados em secções de ouro da distânica entre os olhos e a parte inferior do queixo.

Do ponto de vista da matemática, a orelha perfeita seria aquela que se encaixasse em uma espiral logarítmica, seguindo as proporções do número de ouro, como mostra a figura 33. Além de estar presente em diversos segmentos do corpo humano, na face e na orelha do ser humano, há diversos estudos que demonstram que regra de ouro se mostra também na harmonia do sorriso e da dentição.

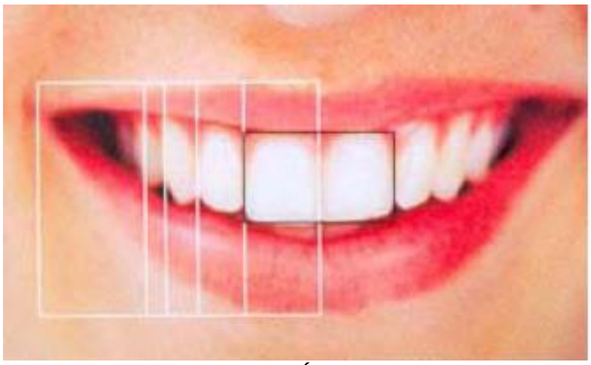


Figura 31: Secção Áurea nos Dentes.

Analisando a figura 34, podemos observar que os dentes vistos frontalmente estão dispostos na proporção áurea um em relação ao outro. Esta proporção se estende desde o incisivo central até o primeiro pré-molar. É perceptível também a partir das marcações feitas na imagem, que o segmento “incisivo central até o primeiro pré-molar”, preservam a mesma relação com o canto da boca.

Além de estudar as proporções do corpo humano, Vitrúvio que era arquiteto, estudou as proporções arquitetônicas harmoniosas. Ele defendia a ideia de que a arquitetura de um templo devia se basear num corpo humano perfeitamente proporcional, que apresentasse harmonia entre todas suas partes.

1.9.4 O Modulor (a razão áurea na arquitetura).

Não podemos dizer apenas, que a razão áurea está aplicada em vários segmentos da natureza e que o homem simplesmente a aplica em suas obras. A razão áurea faz parte da vida da natureza e da vida do homem e o homem usa este presente divino para expressar sua criatividade nas mais belas obras.

> [...] uma das propriedades que contribuem para essa efetividade é a proporção – a relação de tamanho das partes entre si e com o todo. A história da arte mostra que, na longa busca pelo elusivo cânone da proporção perfeita a que poderia de algum modo conferir automaticamente qualidades estéticas agradáveis a todas as obras artísticas, a Razão Áurea provou ser a mais dourada (LIVIO, 2006, p. 69).

Depois da arquitetura clássica da antiguidade, surgiu uma arquitetura que fez uso de formas puras da geometria, onde a questão da proporção passou a ser tratada de forma particular.

Le Corbusier é um dos responsáveis por uma forma de arquitetura moderna. Viajou o mundo, porém, foi na Grécia que encontrou sua maior fonte de inspiração, nas obras do também arquiteto Phidias. Foi baseado nos estudos das obras gregas e também no homem de Vitrúvio, que o arquiteto francês desenvolveu seu cânone arquitetônico "O Modulor".

O Modulor foi desenvolvido pelo pintor e arquiteto francês Charles-Edouard Jeanneret-Gris, mais conhecido como Le Corbusier[6], por volta de 1945. Nele fica estabelecida uma relação de medidas baseadas na divisibilidade do corpo humano em proporção harmônica, sendo baseada também nos números de Fibonacci. O primeiro Modulor foi publicado em 1950 com estatura média do homem europeu de 1,75 m e com um de seus braços estendidos, chegando a uma altura total de 2,16 m (altura máxima de ocupação do corpo humano). Já em 1955, o arquiteto francês publicou outro Modulor, com uma estatura de 1,83 m de altura. Le Corbusier criou duas séries de valores em relação áurea. O objetivo era conseguir uma escala humana universal para ser aplicada na arquitetura e na mecânica.

As duas séries representam o Modulor 2, pois, segundo Le Corbusier, é a perfeita ocupação do homem no espaço, devendo considerar que a série vermelha representa a altura média do homem e a azul a altura do homem com o braço estendido.

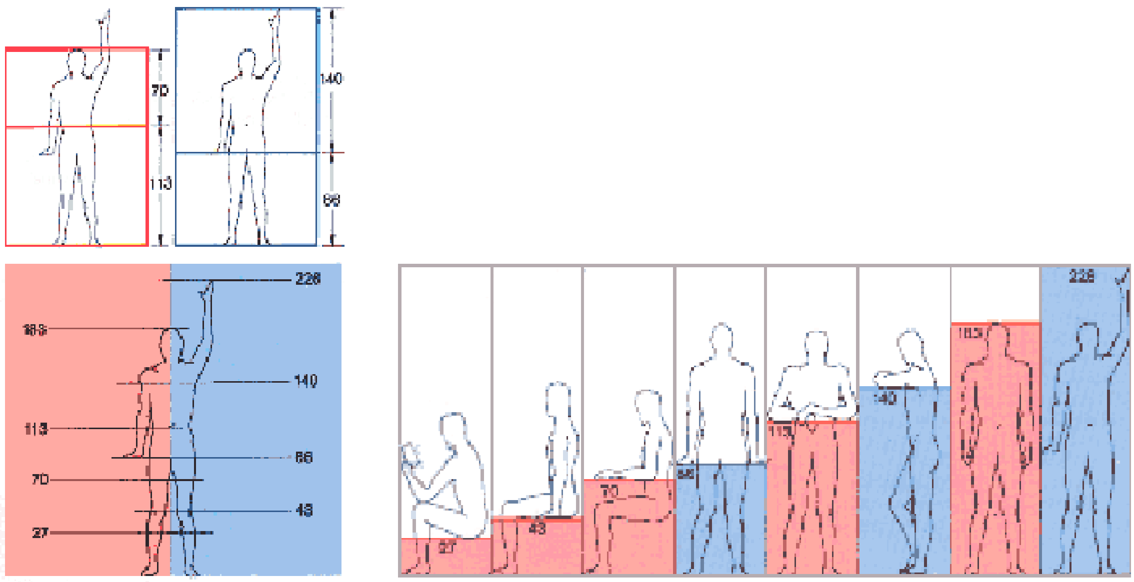


Figura 32: As séries do Modulor.

O estudo realizado pelo arquiteto é utilizado até os dias atuais em diversos projetos, tanto em construções de edifícios como até mesmo de mobiliário. Não faltam exemplos de obras do próprio Le Corbusier, a Torre de Tatlin, a unidade de

---

[6] Le Corbusier – nascido em La Chaux-de-Fonds, na Suíça, onde estudou arte e gravuras. Foi um dos defensores da utilização da Proporção Áurea na arte e na arquitetura.

habitação de Merseilles em especial a Chapel de Notre Dame Du Haut, construídas a partir do sistema de medidas harmônicas do Modulor.

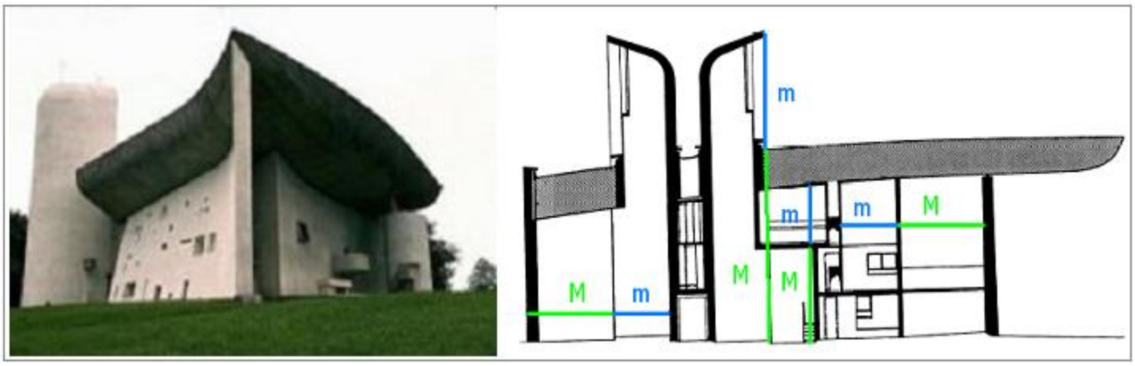


Figura 33: Chapel de Notre Dame Du Haut e
Esquema da aplicação da razão áurea na estrutura do edifício.

Onde: $$\frac{\mathrm{M}+\mathrm{m}}{\mathrm{m}}=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{m}}=1{,}618$$

Muitas obras de Corbusier eram projetadas tomando como base os retângulos áureos, seu objeto de estudo. O Modulor narrava seu sistema de proporções baseado na matemática de seção áurea e a proporção do corpo humano.

2. O USO DAS CONSTRUCÕES GEOMÉTRICAS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

É de conhecimento geral que as avaliações, quanto ao conhecimento matemático de nossos estudantes não são satisfatórias. O fraco desempenho mostra muito mais do que a fragilidade na formação de uma geração de professores e estudantes, evidenciando o pouco valor dado ao conhecimento matemático e a ignorância em que se encontra a esmagadora maioria da população no que tange à matemática.

Devido a imagem que a matemática passa para os alunos de ser um “bicho de sete cabeças” que pesquisadores e professores da matemática devem buscar inúmeras formas de se ensinar matemática, dentre elas pode-se citar a utilização da informática na Educação e o uso das construções geométricas, que constitui uma ferramenta importante para a compreensão da geometria, pois, disponibiliza técnicas construtivas que demonstram as propriedades geométricas e a correta utilização e manuseio dos equipamentos, como os esquadros e o compasso.

2. 1 ORIGEM DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Como linguagem de comunicação e expressão, a arte do desenho é anterior em muito a da escrita. Por meio de gravuras traçadas nas paredes das cavernas, o homem pré-histórico registrou fatos relacionados ao seu cotidiano, deixando indicadores importantes para os pesquisadores modernos estudarem os ancestrais de nossa espécie.

Não se sabe quando, ou onde, alguém formulou pela primeira vez, em forma de desenho, um problema que pretendia resolver – talvez tivesse sido um “projeto” de moradia ou templo, ou algo semelhante. Mas esse passo representou um avanço fundamental na capacidade de raciocínio abstrato, pois, esse desenho representava algo que ainda não existia, que ainda viria a se concretizar. Essa ferramenta, gradativamente aprimorada, foi muito importante para o desenvolvimento de civilizações, como a dos babilônios e a dos egípcios, as quais, como sabemos, realizaram verdadeiras façanhas arquitetônicas.

Mas foram os gregos se destacaram, pois, em todas as áreas do pensamento humano que se propuseram a trabalhar, realizaram feitos que marcaram definitivamente a história da humanidade. Foram os gregos que deram um molde dedutivo à Matemática. A obra Elementos, de Euclides (± 300 a.C.), é um marco de valor inestimável, na qual a Geometria é desenvolvida de modo bastante elaborado. É na Geometria grega que nasce o Desenho Geométrico que aqui vamos estudar.

De acordo com (http://www.ebah.com.br/content/ABAAABeh4AJ/licenciatura-matematica-desenho-geometrico), vale lembrar que, entre os gregos não havia diferença entre Desenho Geométrico e Geometria. O primeiro aparecia simplesmente na forma de problemas de construções geométricas, após a exposição de um item teórico dos textos de Geometria. Essa conduta euclidiana é seguida até hoje em países como a França, Suíça, Espanha, etc., mas, infelizmente, os problemas de construção foram há muito banidos dos nossos livros de Geometria. Assim, pode-se dizer que o Desenho Geométrico é um capítulo da Geometria que, com o auxílio de dois instrumentos, a régua e o compasso, se propõe a resolver graficamente problemas de natureza teórica e prática.

2. 2 BREVE HISTÓRIA DO ENSINO DO DESENHO GEOMÉTRICO NO BRASIL

De acordo com Machado (2012), inicialmente, é importante relatar quando a disciplina Desenho Geométrico começou a ser estudada no Brasil. Dessa maneira, de acordo com os resultados dos estudos conduzidos por autores como Nascimento (1999), Zuin (2001), Machado (2012) e Costa (2013), mostram que o ensino do desenho geométrico no Brasil começou no final do século XVII por causa do interesse de Portugal em proteger e defender a terra conquistada. Assim, deu-se início às "primeiras iniciativas de um ensino de ciências, especialmente de matemática e desenho, a fim de formar pessoal capacitado para trabalhos com fortificações militares (p. 53)". Por exemplo, Machado (2012) relata que em 1699 foi criada a Aula de Fortificações no Rio de Janeiro, cujo objetivo era ensinar a desenhar projetos e a fortificar a defesa do país contra os inimigos. Com isto, nas primeiras décadas do século XVIII, o ensino do desenho geométrico tornou-se obrigatório para os oficiais militares. Então, a partir de 1738, os cursos de formação das Academias Militares começaram a oferecer aulas de fortificação, que incluía o estudo dos conteúdos do Desenho Geométrico.

De acordo com Valente (2007), nesse sentido o ensino proposto por essas academias visava formar engenheiros militares, cartógrafos e matemáticos "capazes de levar a cabo o levantamento de mapas com latitudes determinadas pelos novos métodos empregados na Inglaterra e na França e, habilitar engenheiros a construir fortificações para a defesa dos domínios ultramarinos (p. 46)".

Segundo Nascimento (1999), no início do século XIX, em 1808, D. João VI e a corte portuguesa se transferiu para o Brasil, provocando alterações no sistema educacional da colônia. Com a transferência da família real, algumas iniciativas educacionais mais formalizadas começaram a se destacar no cenário nacional. Segundo Zuin (2001), em 1811, foi instituída a Academia Real Militar que solidificou "o ensino sistemático das matemáticas, das ciências e da técnica no Brasil no início do século XIX".

> [...] necessidade de se estabelecerem as profissões técnicas e científicas faz com que sejam criados cursos de Desenho no país. Para começar a reverter este quadro, em 1816, a Missão Francesa composta por 18 integrantes chega ao Rio de Janeiro, a convite de D. João VI, para organizar e criar a Escola Real de Ciências, Artes e Ofícios no Brasil. Em 1817, é criado o curso de Desenho em Vila Rica. No entanto, apenas após abolição da escravatura, as artes e os trabalhos manuais começam a ser mais valorizados (ZUIN, 2001, p. 64).

Ainda no século XVIII, aconteceram na Europa a Revolução Francesa e o início da Revolução Industrial que provocaram mudanças tecnológicas, que tiveram impacto no processo produtivo mundial em nível econômico, tecnológico e social. Esse cenário possibilitou que o ensino das ciências se tornasse primordial. De acordo com Machado (2012), o Desenho Geométrico era considerado como um saber essencial que possibilitava a modernização das máquinas industriais.

De acordo com Zuin (2001), no final do século XVIII, o ensino brasileiro busca uma adequação às novas ideias educacionais circulantes na Europa. Assim, no início do século XIX, a "educação brasileira se espelha no ensino da França, adotando seus métodos e livros pedagógicos (p. 64)". Segundo Machado (2012), no entanto, o objetivo da Missão Francesa no Brasil era a implantação de um modelo educacional nos moldes da educação oferecida na França, por meio da qual o ensino do Desenho Geométrico possuía uma característica artística, bem distinta daquela estudada anteriormente nas escolas militares brasileiras, A partir do século

XIX, a revolução industrial expandiu-se mundialmente, sendo que no Brasil houve a urgência em formar mão de obra especializada para as novas demandas do processo de industrialização. Esse fato possibilitou a criação das Escolas Normais e dos Liceus Provinciais em 1835 e do Colégio Pedro II em 1837. Assim, a criação dessas instituições permitiu que o ensino do Desenho Geométrico se expandisse, sendo desvinculado da:

> [...] esfera privada dos ateliês e das Escolas Militares, e [se tornasse] parte da cultura escolar geral. Isso, por conta dos professores militares convocados para o ensino nos preparatórios, o que acabou difundindo a escolarização técnica-militar desenvolvida nas Academias para a esfera pública (MACHADO, 2012, p. 60).

De acordo com Zuin (2001), nas primeiras décadas do século XIX, aconteceram algumas mudanças sociais, políticas e econômicas, modificando de maneira lenta o cenário brasileiro. Então, o início da modernização brasileira destaca a urgência da construção de fábricas, de portos e estradas, bem como da urbanização das cidades Nesse sentido, Silva (1998), também argumenta que foram realizadas modificações nos Estatutos da Escola Militar e, dentre estas modificações, foram criadas disciplinas de engenharia civil no sétimo ano do curso daquela instituição de ensino. Esta mudança pode ser considerada como o ponto de partida para a criação de escolas de Engenharia Civil separadas das instituições militares. Nessa perspectiva, a criação de um curso de Engenharia Civil destacava o ensino das construções geométricas na matriz curricular, pois, era essencial para a formação dos engenheiros civis Assim, naquele momento, acontece “uma maior valorização do ensino das construções geométricas estritamente ligadas ao progresso e à necessidade de se capacitarem, de uma maneira mais efetiva, categorias profissionais imprescindíveis ao avanço técnico-científico e o mesmo econômico-social (p. 67)”.

Segundo Machado (2012), no final do século XIX, o projeto de modernização do Brasil chamou a atenção de Rui Barbosa, um importante parlamentar brasileiro, para a criação de um sistema nacional de ensino gratuito, obrigatório e laico do jardim de infância à universidade. Em 1882, para a elaboração do seu projeto de reforma do ensino, Rui Barbosa inspirou-se em países como a Alemanha, Áustria, Estados Unidos, França e a Inglaterra, que estavam em um nível de desenvolvimento econômico e educacional superior ao brasileiro. Nesse projeto houve a determinação de que o Desenho Geométrico fosse considerado como um “saber escolar necessário para o desenvolvimento industrial brasileiro (p. 63)”.

É importante ressaltar que até a década de 1950, o Desenho Geométrico foi um componente curricular importante, permanecendo oficialmente nas matrizes curriculares das escolas brasileiras. Assim, no decorrer desse período, esse campo de conhecimento estava:

> [...] plenamente instituído enquanto disciplina escolar no currículo brasileiro. Pode-se inferir, inclusive, que as décadas de 1930 a 1950 constituíram os anos de ouro dessa disciplina em nosso país, dada sua visibilidade em meio aos documentos educacionais oficiais (MACHADO, 2012, p. 68).

De acordo com Wielewski (2008), entre o final da década de 1950 e o começo da década de 1960, inicia-se o Movimento da Matemática Moderna (MMM) que tinha por objetivo a renovação do ensino da Matemática. Esse movimento visava aproximar os conteúdos matemáticos trabalhados na escola básica com o conhecimento matemático produzido pelos pesquisadores dessa área do conhecimento. Assim, esse movimento buscava preparar os alunos para trabalhar com a tecnologia utilizada naquela época por meio da aprendizagem de conteúdos matemáticos específicos que pudessem auxiliar o desenvolvimento tecnológico que emergia no Brasil.

Segundo Zuin (2002), nessa perspectiva, foram incluídos no currículo da disciplina de Matemática, os conteúdos referentes a teoria de conjuntos, a topologia e as estruturas algébricas. Assim, esse movimento facilitou a redução e, em alguns casos, excluiu o ensino da Geometria Euclidiana em alguns países do mundo, incluindo o Brasil. Sendo assim, a ausência da geometria no currículo matemático também foi repercutida no ensino do Desenho Geométrico, pois, por meio dessa disciplina podem-se estudar as aplicações dos conhecimentos geométricos de uma maneira gráfica.

Ressalta-se que em 1961, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB 4.024/61 (BRASIL, 1961) determinou novos rumos para o ensino do Desenho Geométrico, tornando-o uma disciplina curricular optativa. Esse fato ampliou o desprestígio do Desenho Geométrico nos meios acadêmicos, pois, nessa época os documentos oficiais elaborados pela academia desvalorizaram esse componente curricular. É importante enfatizar que na década de 1960, o Desenho Geométrico tornou-se uma disciplina curricular complementar que compunha a parte diversificada do currículo escolar. Então, após a desconsideração do Desenho Geométrico como uma disciplina curricular obrigatória, o seu ensino foi excluído da matriz curricular da maioria das escolas brasileiras enquanto o seu conteúdo foi retirado da programação dos principais vestibulares do Brasil.

Similarmente, apesar das potencialidades apresentadas pelo estudo da disciplina de Desenho Geométrico, em 1971, com a promulgação da Lei 5.692 de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 1971), o ensino desse campo de estudo foi excluído do currículo escolar brasileiro. Esse fato associado à exclusão do Desenho Geométrico dos vestibulares de Arquitetura e Engenharia tornou essa disciplina praticamente abandonada na matriz curricular do Ensino Fundamental e Médio, da maioria das escolas, que tinham autonomia para elaborar a parte diversificada do currículo. Nesse contexto, muitas escolas.

Segundo Zuin (2002), na década de 1980, apesar de não integrar o currículo da maioria das escolas, o ensino do Desenho Geométrico recebe um novo incentivo com a publicação de novas coleções de livros didáticos por editoras importantes como a Scipione, a Ática e a FTD. Porém, o resgate dessa disciplina no currículo escolar não se concretizou, pois o:

> [...] lançamento de novos livros não despertou os dirigentes da educação para que a disciplina retornasse ao ensino básico em âmbito nacional. Embora muitas escolas voltassem a incluir o Desenho Geométrico em seus currículos, existiam instituições que continuaram não abordando as construções geométricas (ZUIN, 2002, p. 6).

Diante dessa perspectiva, com a eliminação do Desenho Geométrico do currículo escolar e do vestibular, alguns professores ligados à disciplina começaram o movimento pelo seu retorno, sem sucesso.

No final da década de 1990, a necessidade do estudo das construções geométricas ressurge nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN), que reforçaram a importância das construções geométricas no currículo matemático com o emprego de “régua e compasso e a utilização de outros instrumentos, como, por exemplo, esquadro e transferidor” (BRASIL, 1998, p. 68) para o desenvolvimento de conteúdos matemáticos desenvolvidos na escola básica. Bongiovanni, Savietto e

Moreira (2007), ressaltam que existem outros processos e instrumentos que podem ser utilizados para o trabalho com essas construções, como, por exemplo, régua graduada, régua T, transferidor, esquadros, compasso e a curva francesa. Atualmente, o Desenho Geométrico é considerado como uma disciplina independente, sendo que poucas escolas mantém esse campo do conhecimento em sua matriz curricular dos dois últimos anos do Ensino Fundamental. Segundo Zuin (2001), é importante destacar que existem escolas que:

> [...] mantêm a disciplina Desenho Geométrico; escolas que tratam das construções geométricas dentro da disciplina [de] Artes; escolas que não possuem a disciplina Desenho Geométrico em suas grades curriculares e não abordam as construções geométricas em nenhum momento, nem mesmo dentro do conteúdo de Geometria, desenvolvido em Matemática; e uma outra classe de escolas que trazem a disciplina em questão em sua grade curricular, mas o conteúdo não é cumprido, sendo estas aulas preenchidas com o conteúdo de Matemática, sem nem sequer se mencionarem as construções geométricas (ZUIN, 2001, p. 99).

Após esse breve histórico do desenvolvimento do ensino do Desenho Geométrico no Brasil percebemos a necessidade de que a aprendizagem das construções e demonstrações ensinadas nessa disciplina continue sendo um conhecimento viabilizado pelas matrizes curriculares da disciplina de Matemática e acessível a todos os alunos da educação básica.

2. 3 IMPORTÂNCIA DAS CONSTRUCOES GEOMÉTRICAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Para Costa (2013), o Desenho Geométrico é uma linguagem gráfica que exerce um elo entre a geometria e a álgebra contribuindo com o aprendizado dos alunos em relação às propriedades e demonstrações desses saberes Nesse direcionamento, existe uma “relação perfeita entre o Desenho Geométrico e a geometria, pois ambas estudam as figuras geométricas com seus conceitos e suas propriedades. Para Marmo e Marmo (1994, p. 12), o desenho é a geometria gráfica”. Segundo Queiroz (2010), nessa perspectiva, a Geometria e o Desenho Geométrico “são conceitos que estão relacionados diretamente à matemática numa relação de interdependência, por isso, é inquestionável a importância de uma abordagem articulada desses conhecimentos (p. 9-10)”.

O Desenho Geométrico pode também proporcionar a capacidade e promover o entendimento de outros conhecimentos; sua exatidão e a precisão exigidas ao desenho geométrico torna-o aliado importante na aplicação de conceitos da geometria em áreas significativas do conhecimento humano, como a arquitetura, a engenharia, o desenho industrial, entre outros. Também ajudará a desenvolver o raciocínio lógico, o pensamento divergente, a organização e a criatividade. Sua exatidão e a precisão exigidas ao desenho geométrico torna-o aliado importante na aplicação de conceitos da geometria.

Segundo a enciclopédia Wikipédia, para os matemáticos da antiguidade, a geometria não poderia prescindir dos métodos de construções geométricas, necessários ao entendimento, enriquecimento teórico e à solução de problemas.

Dessa maneira, é interessante notar que existem prejuízos pedagógicos, pelo fato do Desenho Geométrico ser uma linguagem gráfica da Matemática, que afetam o aprendizado dos alunos quando privados dos conhecimentos proporcionados pelo ensino das construções geométricas no aprendizado de conceitos e demonstrações realizadas no ensino da Geometria Plana, na Geometria Espacial, na Matemática do Ensino Fundamental ao superior e também nas “disciplinas que dependem da visão espacial e das demais competências aprimoradas pelo Desenho Geométrico (p. 108)”.

De acordo com Wagner (1998), estando as construções geométricas cada vez mais ausentes dos currículos escolares, deve-se ajudar a resgatar o assunto do esquecimento e mostrar a sua importância como instrumento auxiliar no aprendizado da geometria, pois, as construções com régua e compasso já aparecem no século V a. C, época dos Pitagóricos e, tiveram enorme importância no desenvolvimento da matemática grega.

Para Giongo (2001), a importância histórica da régua e do compasso como instrumentos na solução de problemas geométricos, leva muitos autores a limitarem o próprio Desenho Geométrico apenas à representação e solução de figuras geométricas no plano.

Segundo Costa (2013), atualmente por meio de uma pesquisa das matrizes curriculares do Ensino Fundamental das escolas brasileiras, verifica-se um tímido retorno do ensino dos conteúdos do Desenho Geométrico. Contudo, é importante a conscientização de que o ensino dessa disciplina deve ser significativo para promover o entendimento e a compreensão dos traçados geométricos. Por outro lado, o Desenho Geométrico não deve ser notado simplesmente como um auxiliar da Matemática e sim como um auxiliar das ciências, pois, é um “instrumento artístico, científico e tecnológico, e assim, de desenvolvimento do próprio homem” (RAYMUNDO, 2010, p. 110).

Mandarino (2007) afirma que, com o desenvolvimento dos programas de desenho ajudado por computador (CAD - do inglês: computer aided design - é o nome genérico de sistemas computacionais (software) utilizados pela engenharia, geologia, geografia, arquitetura e design para facilitar o projeto e desenho técnicos), o desenho geométrico passou a ter mais importância nos processos de ensino-aprendizagem (desenvolvimento das faculdades espaciais) do que no traçado impreciso que a régua e o compasso oferecem, ao levar-se em conta a imensa precisão dos sistemas computacionais.

Conforme Mandarino (2007), para realizar as atividades sugeridas, o aluno necessitará apenas de lápis, régua e compasso. Em algumas atividades, ele poderá usar esquadros e transferidor, mas estes não serão efetivos na resolução. Poderia ainda usar algum software de geometria dinâmica, mas como nem toda escola dispõe de laboratório de informática, nos restringiremos apenas a estes materiais, pois, são de fácil acesso ao discente.

Assim, percebemos que as construções geométricas contribuem para o processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos por estimular o desenvolvimento da criatividade, da organização, além de estimular a utilização de estratégias inovadoras para a resolução de problemas.

3 AS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM A RÉGUA E O COMPASSO

Este capítulo tem como objetivo apresentar algumas construções geométricas com régua e compasso que envolve a razão áurea e analisá-las junto à beleza da divina proporção nas suas diferentes formas.

3.1 RAZÃO ÁUREA OU SEGMENTO ÁUREO

A razão áurea, também chamada Segmento Áureo, Número Áureo, Proporção Áurea, Número de Ouro, Proporção de Ouro, Seção Áurea, Razão de Ouro ou Divina Proporção, representa a mais agradável proporção entre duas medidas. Os gregos antigos a designavam como “divisão de um segmento em média e extrema razão” ou simplesmente “secção”.

Iniciemos por construir com régua e compasso um segmento dividido em média e extrema razão, chamado segmento áureo. Para isso, sigamos os passos de construção a seguir:

Passo 1: Trace um segmento $\overline{AB}$ com qualquer medida.

Figura 34: Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 1

Passo 2: Construa a circunferência C_1 de centro B e raio igual ao comprimento do segmento $\overline{AB}$ e a circunferência C_2 de centro A e raio de medida do segmento $\overline{AB}$. Marque os pontos C e D que são as interseções entre as circunferências C_1 e C_2. Trace o segmento $\overline{CD}$ e marque M, que será a interseção entre o segmento $\overline{CD}$ e o segmento $\overline{AB}$. O ponto M é o ponto médio de $\overline{AB}$.

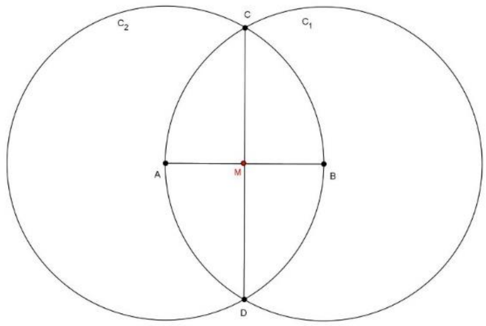


Figura 35: Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 2

Passo 3: Trace uma reta r perpendicular a $\overline{AB}$, passando por B.

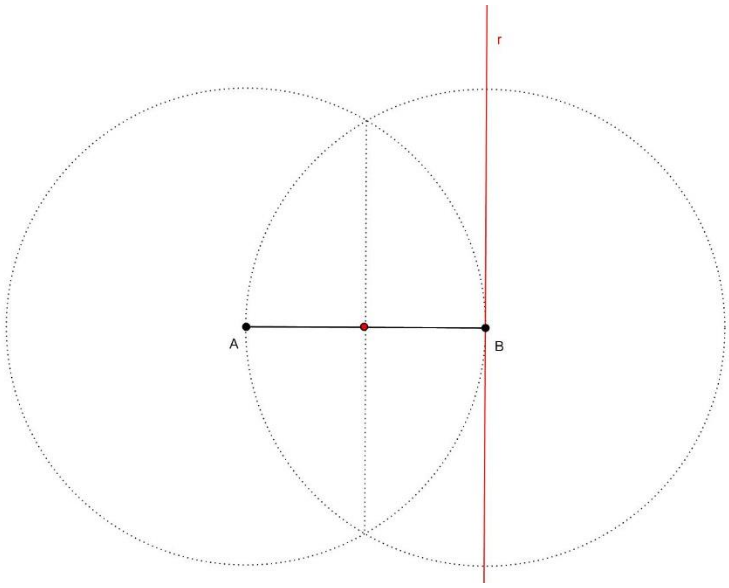


Figura 36: Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 3

Passo 4: Construa a circunferência C_3 de centro B e raio igual ao comprimento do segmento $\overline{BM}$ e marque o ponto E, que será a interseção entre a circunferência C_3 e a reta r.

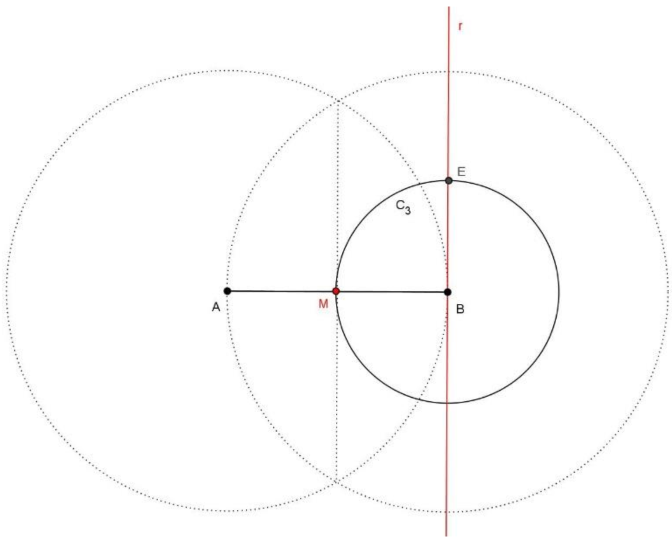


Figura 37: C**on**strução do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 4

Passo 5: Trace o segmento $\overline{AE}$.

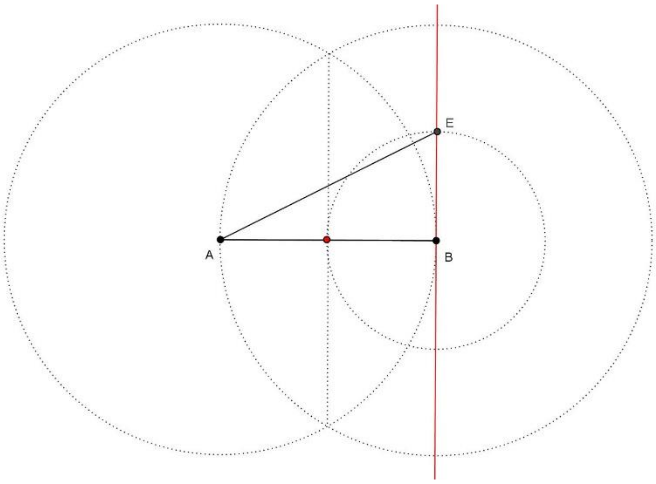


Fig.38: Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 5

Passo 6: Construa a circunferência C_4 de centro E e raio igual a medida do segmento $\overline{EB}$ e marque o ponto F que será a interseção de C_4 com o segmento $\overline{AE}$.

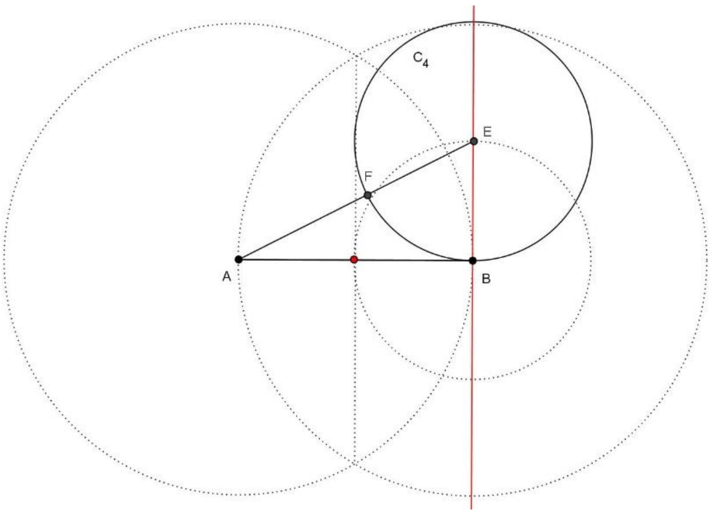


Figura 39: Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Pass

Passo 7: Construa a circunferência C_5 de centro A e raio igual a medida do segmento $\overline{AF}$ e marque o ponto G que será a interseção de C_5 com o segmento $\overline{AB}$.

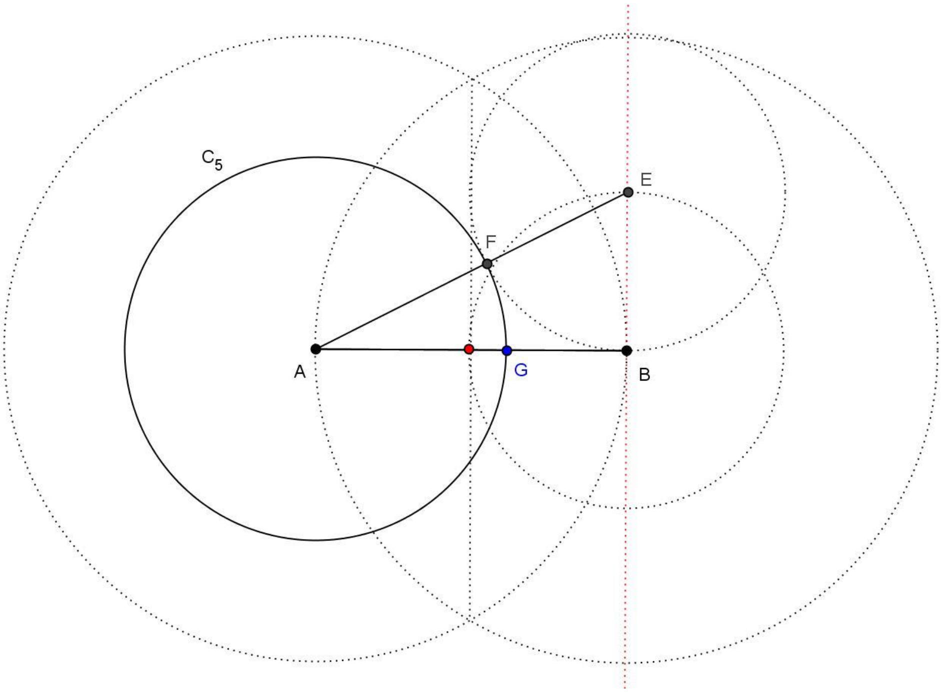


Figura 40: Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 7

Passo 8: O ponto G divide o segmento AB na razão áurea, onde $\frac{m(\overline{AG})}{m(\overline{GB})} = \Phi$.

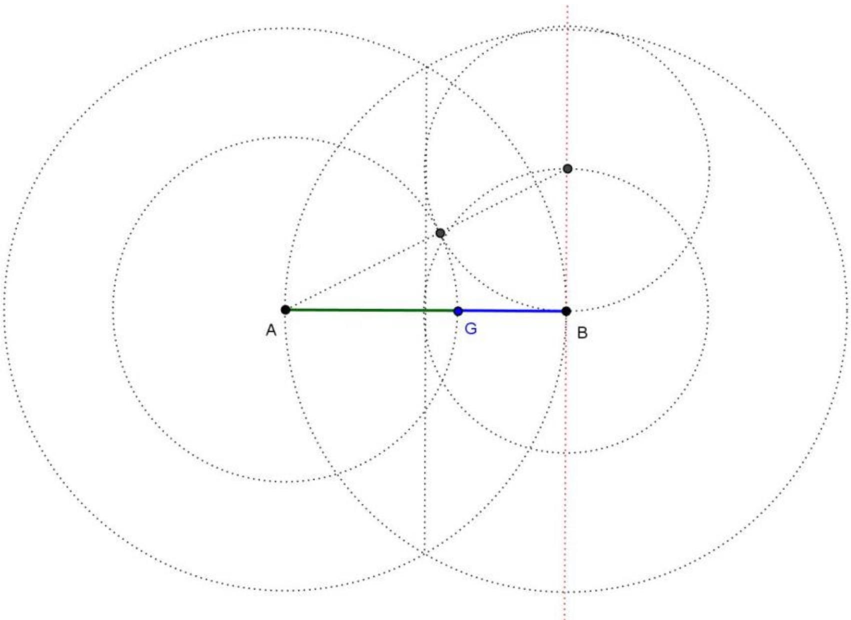


Figura 41: Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 8

A seguir vamos mostrar algebricamente que o ponto G divide o segmento AB na razão áurea.

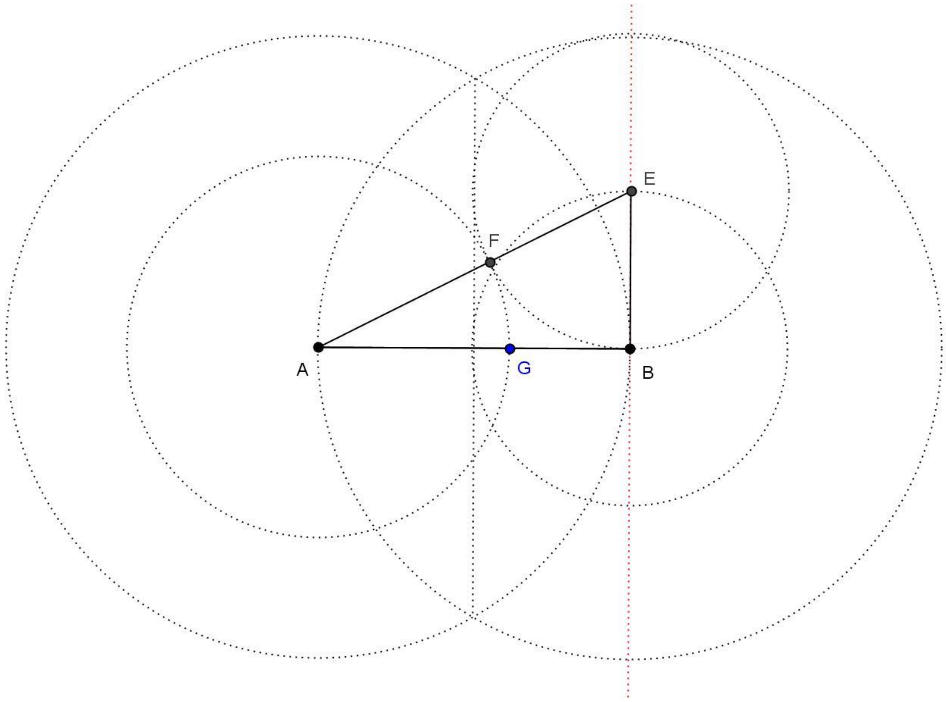


Figura 42: Prova que o ponto G divide o segmento AB na razão áurea

Seja x unidades o tamanho do segmento $\overline{AB}$. Por construção, temos que a medida do segmento $\overline{BE}$ será igual a $\frac{x}{2}$ unidades. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABE temos que $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2$. Logo, $\overline{AE}^2 = x^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{5x^2}{4}$ e assim $\overline{AE} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$.

Como $\overline{EF} = \overline{BE}$ por construção e sabendo que $\overline{BE} = \frac{x}{2}$, e ainda $\overline{AE} = \overline{AF} + \overline{FE}$ temos que $\frac{x\sqrt{5}}{2} = \overline{AF} + \frac{x}{2}$, logo $\overline{AF} = \frac{x\sqrt{5}}{2} - \frac{x}{2} = \frac{x(\sqrt{5}-1)}{2}$.

Como $\overline{AF} = \overline{AG}$, por construção e sabendo que $\overline{AF} = \frac{x(\sqrt{5}-1)}{2}$, e ainda $\overline{AB} = \overline{AG} + \overline{GB}$ temos que $x = \frac{x(\sqrt{5}-1)}{2} + \overline{GB}$, logo $\overline{GB} = x - \frac{x(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{x(3-\sqrt{5})}{2}$.

Assim temos que $\overline{AG} = \frac{x(\sqrt{5}-1)}{2}$ e $\overline{GB} = \frac{x(3-\sqrt{5})}{2}$. Logo $\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}} = \frac{\frac{x(\sqrt{5}-1)}{2}}{\frac{x(3-\sqrt{5})}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}+5-3-\sqrt{5}}{9-5} = \frac{2\sqrt{5}+2}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,6108033989... = \Phi$.

Além do segmento áureo, existem outros elementos geométricos que apresentam a proporção áurea. Elementos esses, que estão relacionados ao número de ouro tanto em figuras geométricas quanto na natureza, como vimos no primeiro capítulo. Temos a presença da razão áurea nas figuras geométricas: triângulo áureo, retângulo áureo, pentagrama, em algumas espirais e em outros problemas geométricos cuja solução depende de Φ.

As construções utilizam ferramentas matemáticas conhecidas pelos alunos: cálculo de razões, aplicação da semelhança de triângulos, uso do Teorema de Pitágoras, solução de equação do 2º grau, aproximações numéricas e vários outros assuntos. Inicialmente a ideia é introduzir aos alunos os conceitos básicos sobre a razão áurea e como realizar as etapas de construção.

Nos próximos itens faremos construções geométricas áureas detalhadas e justificadas. Ao final de cada construção são estabelecidas relações entre os padrões numéricos e os padrões geométricos. Será construído ainda o triângulo áureo, o retângulo áureo, o pentágono regular e as espirais logarítmicas.

3. 2 TRIÂNGULOS ÁUREOS

Os triângulos podem ser classificados segundo seus ângulos da seguinte forma: acutângulo, obtusângulo e retângulo.

3. 2. 1 Triângulo Acutângulo

Um triângulo acutângulo é dito áureo quando este triângulo é isósceles e a razão do tamanho de um dos seus lados congruentes pelo lado não congruente for o número de ouro.

Mostraremos que este fato ocorre se, e somente se, os ângulos deste triângulo acutângulo medirem 36º, 72º e 72º.

De fato, seja, o triângulo ABC isósceles com a razão entre seu lado congruente pelo lado não congruente igual ao Número de Ouro. Seja $\overline{AC}$ = $\overline{BC}$ = r, $\overline{AB}$ = l e o ângulo $A\hat{C}B$ = θ.

Temos que $\frac{r}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que é o Número de Ouro.

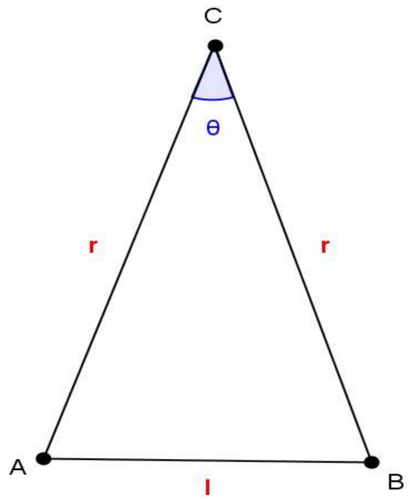


Figura 43: Demonstração 1 - Triângulo Acutângulo Áureo

Pela lei dos cossenos temos que:

$$l^2 = r^2 + r^2 - 2 . r . r . \cos\theta$$

$$l^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos\theta$$

$$l^2 = r^2(2 - 2\cos\theta)$$

$$\frac{l^2}{r^2} = (2 - 2\cos\theta)$$

$$\left(\frac{l}{r}\right)^2 = (2 - 2\cos\theta)$$

$$\left(\frac{l}{r}\right)^2 = 2(1 - \cos\theta)$$

$$\left(\frac{r}{l}\right)^2 = \frac{1}{2(1-\cos\theta)}$$

Como $\frac{r}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ temos:

$$\frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2(1-\cos\theta)}$$

$$1 - \cos\theta = \frac{1}{3+\sqrt{5}} . \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$

$$1 - \cos\theta = \frac{3-\sqrt{5}}{9-5}$$

$$1 - \cos\theta = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2(1-\cos\theta)}$

$3 + \sqrt{5} = \frac{1}{(1-\cos\theta)}$

$1 - \cos\theta = \frac{1}{3+\sqrt{5}}$

$1 - \cos\theta = \frac{1}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$

$1 - \cos\theta = \frac{3-\sqrt{5}}{9-5}$

$1 - \cos\theta = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$

$\cos\theta = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4}$

$\cos\theta = \frac{4-3+\sqrt{5}}{4}$

$\cos\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\theta = \arccos\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$

$\theta =$ 36º

E como o triângulo ABC é isósceles, temos que os ângulos $C\widehat{A}B = A\widehat{B}C =$ 72º, como queremos demonstrar

Agora seja o triângulo ABC, isósceles com seus ângulos medindo 36º, 72º e 72º. Demonstraremos que a razão entre seu lado congruente pelo lado não congruente será igual ao Número de Ouro.

De fato seja, o triângulo ABC isósceles com seus ângulos medindo 36º, 72º e 72º, como podemos ver na figura abaixo.

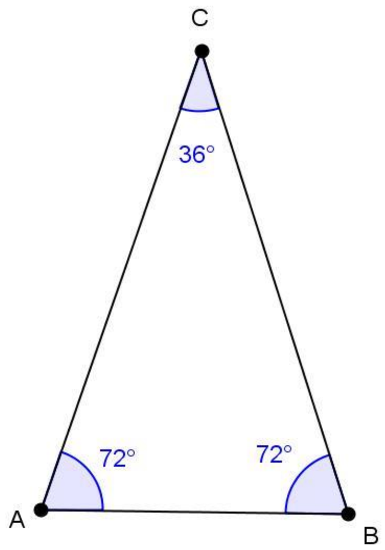


Figura 44: Demonstração 2 - Triângulo Acutângulo Áureo - Passo 1

Tracemos a bissetriz do ângulo $B\widehat{A}C$, e chamemos de D o ponto de interseção da bissetriz com o lado $\overline{BC}$.

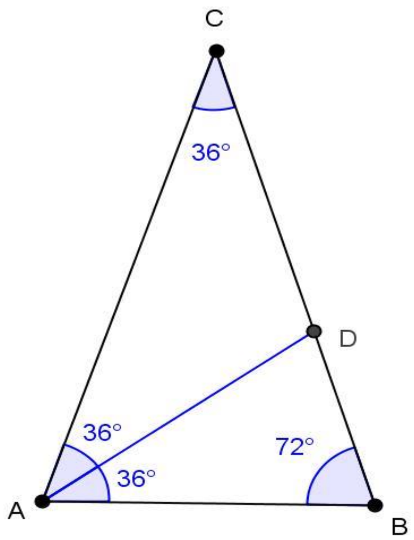


Figura 45: Demonstração 2 - Triângulo Acutângulo Áureo – Passo 2.

Analisando o triângulo ADC, temos que o ângulo $A\hat{D}C$ mede 108º. Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180º e temos que

$D\hat{A}C$ = $A\hat{C}D$ = 36º. E como $A\hat{D}C$ e $A\hat{D}B$ são ângulos suplementares, teremos que $A\hat{D}B$ medirá 72º.

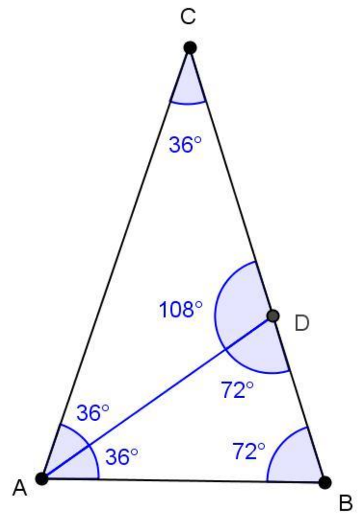


Figura 46: Demonstração 2 - Triângulo Acutângulo Áureo - Passo 3

Observemos agora que os triângulos ACB e BAD são semelhantes pelo caso AAA (ângulo, ângulo, ângulo), já que $B\hat{A}D$ = $D\hat{B}A$ = 72º, $A\hat{C}B$ = $B\hat{A}D$ = 36º e $C\hat{B}A$ = $A\hat{D}B$ = 72º.

Chamemos a medida do lado $\overline{AC}$ de r e a medida de $\overline{AB}$ de l, por construção temos que $\overline{AC}$ = $\overline{BC}$ = r. Como o triângulo BAD é isósceles temos que $\overline{AB}$ = $\overline{AD}$ = l. Analogamente, no triângulo ADC temos que $\overline{AD}$ = $\overline{DC}$ = l. Sabendo que $\overline{BC}$ = $\overline{CD}$ + $\overline{DB}$ temos:

r = l + $\overline{DB}$, e assim $\overline{DB}$ = r -

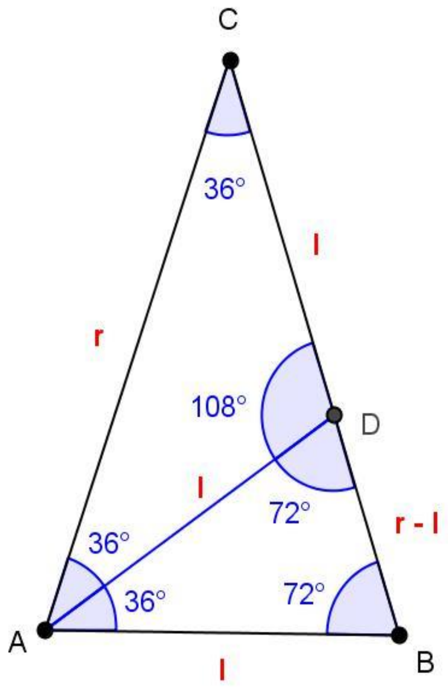


Figura 47: Demonstração 2 - Triângulo Acutângulo Áureo - Passo 4

Utilizando a semelhança dos triângulos ACB e BAD teremos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$$

$$\frac{l}{r-l} = \frac{r}{l}$$

E como foi visto na seção 2.1, teremos que:

$$\frac{r}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{r}{l} = 1{,}618033988\ldots$$

Como queríamos demonstrar.

3. 2. 2 Triângulo Obtusângulo

Um triângulo obtusângulo é dito áureo quando este triângulo é isósceles e a divisão do tamanho do seu lado não congruente por um dos seus lados congruentes for o número de ouro.

Este fato só ocorre se, e somente se, os ângulos deste triângulo obtusângulo medirem 36º, 36º e 108º.

Para provar esta afirmação, dado o triângulo obtusângulo ABC, com a razão entre seu lado não congruente pelo lado congruente igual ao número de ouro vamos demonstrar que seus ângulos medem 36º, 36º e 108º.

De fato, seja o triângulo ABC isósceles com a razão entre seu lado não congruente pelo lado congruente igual ao número de ouro. Seja $\overline{AC}$ = $\overline{BC}$ = l, $\overline{AB}$ = r

e o ângulo $A\hat{C}B$ = θ. Temos que $\frac{r}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que é o número de ouro.

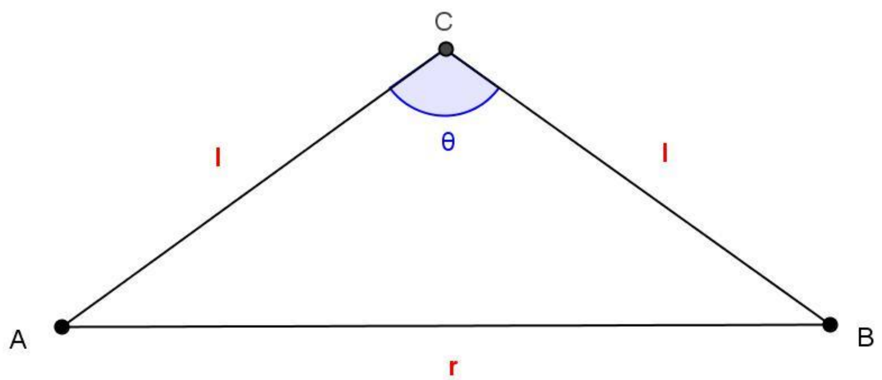


Figura 48: Demonstração 1 - Triângulo Obtusângulo Áureo

Pela lei dos cossenos temos que:

$$r^2 = l^2 + l^2 - 2.l.l.\cos\theta$$

$$r = 2\,l^2 - 2\,l^2\cos\theta$$

$$r^2 = l^2(2 - 2\cos\theta)$$

$$\frac{r^2}{l^2} = (2 - 2\cos\theta)$$

$$\left(\frac{r}{l}\right)^2 = (2 - 2\cos\theta)$$

$$\left(\frac{r}{l}\right)^2 = 2(1 - \cos\theta)$$

Como $\frac{r}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ teremos:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = 2(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{6+2\sqrt{5}}{8} = 1 - \cos\theta$$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{4} = 1 - \cos\theta$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{4-3-\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$\theta = 108^{\circ}$$

E como o triângulo ABC é isósceles temos que os ângulos $C\hat{A}B = A\hat{B}C =$ 36º, como queremos demonstrar.

Agora, seja o triângulo ABC, isósceles com seus ângulos medindo 36º, 36º e 108º. Vamos demonstrar que a razão entre seu lado não congruente pelo lado congruente será igual ao número de ouro.

De fato, seja o triângulo ABC isósceles com seus ângulos medindo 36º, 36º e 108º.

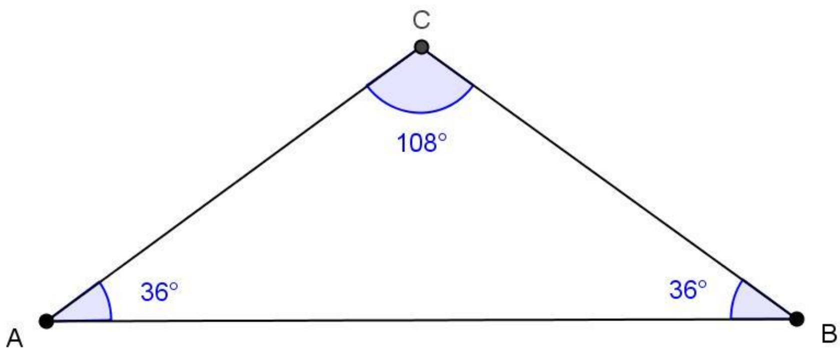


Figura 49: Demonstração 2 - Triângulo Obtusângulo Áureo - Passo 1

Marquemos um ponto D pertencente ao segmento $\overline{AB}$ de tal forma que o ângulo $A\hat{C}D$ seja igual a 36º e o ângulo $B\hat{C}D$ seja igual a 72º.

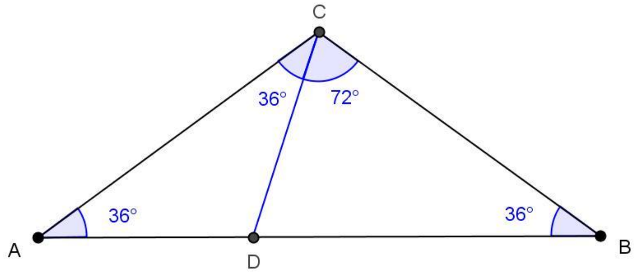


Figura 50: Demonstração 2 - Triângulo Obtusângulo Áureo - Passo 2

Analisando o triângulo ADC temos que o ângulo $A\hat{D}C$ mede 108º. Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180º, e como $A\hat{D}C$ e $C\hat{D}B$ são ângulos suplementares, temos que $C\hat{D}B$ medirá 72º.

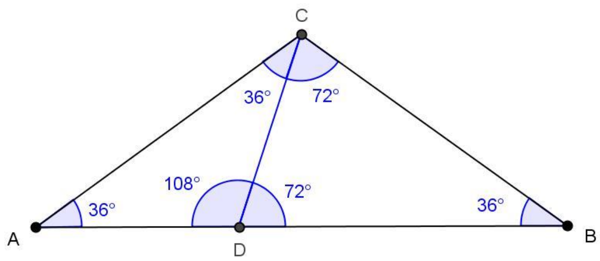


Figura 51: Demonstração 2 - Triângulo Obtusângulo Áureo - Passo 3

Chamemos a medida do lado $\overline{AB}$ de r e a medida de $\overline{AC}$ de l. Por construção temos que $\overline{AC}$ = $\overline{BC}$ = l.

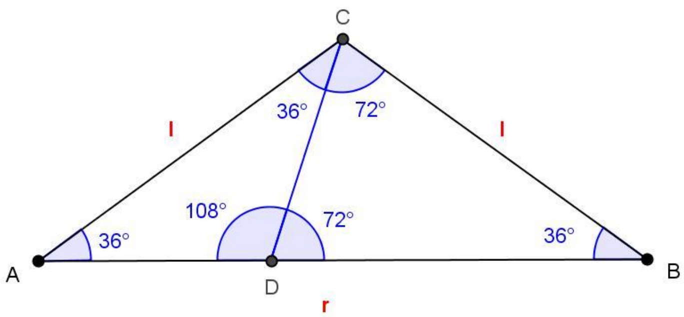


Figura 52: Demonstração 2 - Triângulo Obtusângulo Áureo - Passo 4

Ao construirmos o segmento $\overline{CD}$, criamos o triângulo CBD que é isósceles, logo, a medida de $\overline{BC}$ é igual a medida de $\overline{BD}$, que vale l. Como $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$, temos que

r $= \overline{AD} + 1$, e assim $\overline{AD} = r - 1$. E finalmente, como o triângulo ADC também é isósceles, temos que a medida de $\overline{AD}$ é igual a medida de $\overline{DC}$, que vale $r - 1$.

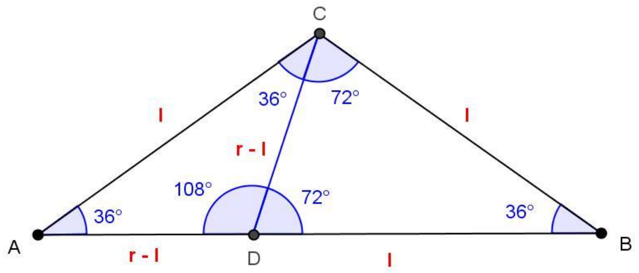


Figura 53: Demonstração 2 - Triângulo Obtusângulo Áureo - Passo 5

Podemos observar que os triângulos ACB e ADC são semelhantes pelo caso AAA (ângulo, ângulo, ângulo), já que $A\hat{C}B$ = $A\hat{D}C$ = 108º, $B\hat{A}C$ = $D\hat{A}C$ = 36º e $C\hat{B}A$ = $A\hat{C}D$ = 36º.

Utilizando a semelhança dos triângulos ACB e ADC, temos que:

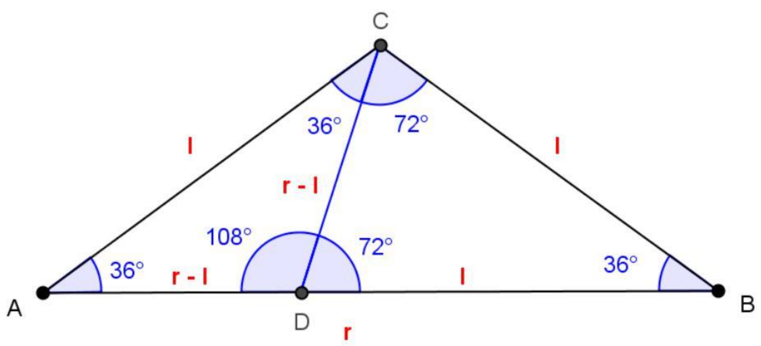


Figura 54: Demonstração 2 - Triângulo Obtusângulo Áureo - Passo 6

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$\frac{1}{r-1} = \frac{r}{1}$$

E como visto no capítulo anterior:

$\frac{r}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{r}{l} = 1{,}618033988\ldots$

Como queríamos demonstrar.

3. 2. 3 Triângulo Retângulo Áureo

Um triângulo retângulo é dito áureo se for semelhante a um triângulo retângulo com hipotenusa igual a ϕ e catetos iguais a $\sqrt{\Phi}$ e 1. Este fato ocorre se, e somente se, os ângulos deste triângulo retângulo medirem 38º, 52º e 90º.

Seja o triângulo ABC, retângulo em A, semelhante ao triângulo retângulo A'B'C', com ângulo reto em A', hipotenusa igual a Φ e catetos iguais a $\sqrt{\Phi}$ e 1.

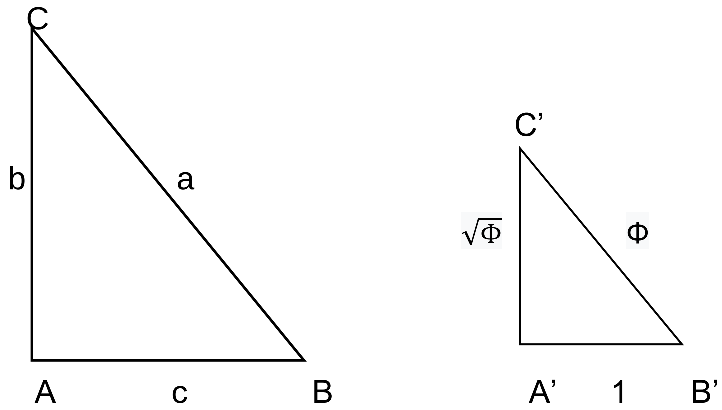


Figura 55: Semelhança 1 - Triângulo Retângulo Áureo

Sejam $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Como ABC é semelhante a A'B'C' termos que a= k Φ, b = k$\sqrt{\Phi}$ e c= k, para alguns k ϵ IR^{*}_{+}.

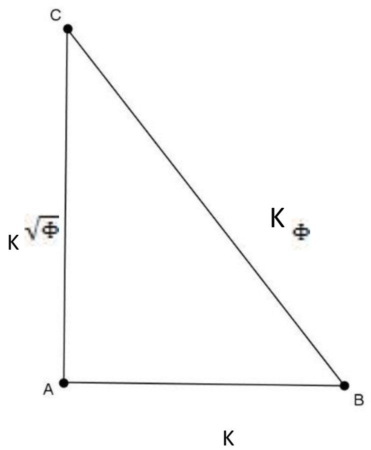


Figura 56: Semelhança 2 - Triângulo Retângulo Áureo

Vamos demonstrar que, se um triângulo retângulo é semelhante a um triângulo retângulo com hipotenusa igual a Φ e catetos iguais a $\sqrt{\Phi}$ e 1, sendo assim classificado como áureo, os ângulos deste triângulo retângulo irão medir 38º, 52º e 90º.

De fato, sejam $B\hat{A}C$ = 90º , $A\hat{B}C$ = α e $B\hat{C}A$ = β.

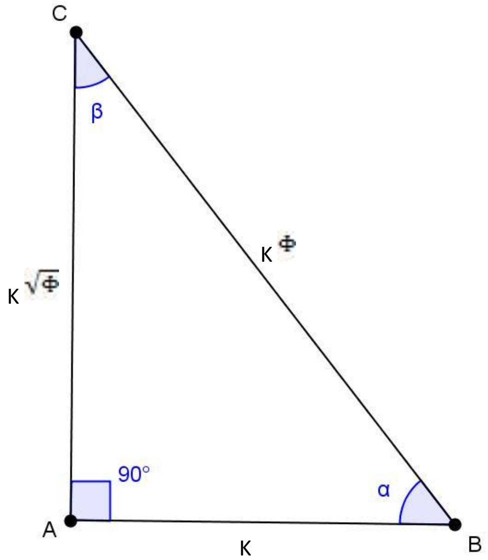


Figura 57: Demonstração 1 - Triângulo Retângulo Áureo

Temos que:

$$\cos\alpha = \frac{k}{k\Phi}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\Phi}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2\,(1-\sqrt{5}\,)}{1-5}$$

$$\cos\alpha = \frac{2\,(1-\sqrt{5}\,)}{-4}$$

e sendo assim teremos que: α = 52º.

E como $\alpha + \beta = 90$º, teremos que β = 38º, como queríamos demonstrar.

Demonstraremos agora que, se os ângulos de um triângulo retângulo medem 38º, 52º e 90º, este triângulo retângulo é semelhante a um triângulo retângulo com hipotenusa igual a Φ e catetos iguais a $\sqrt{\Phi}$ e 1 e, sendo assim, classificado como triângulo retângulo áureo.

De fato, seja o triângulo ABC com $B\widehat{A}C$ = 90º, $A\widehat{B}C$ = 52º, $B\widehat{C}A$ = 38º e ainda que $\overline{AB}$ = c, $\overline{AC}$ = b e $\overline{BC}$ = a.

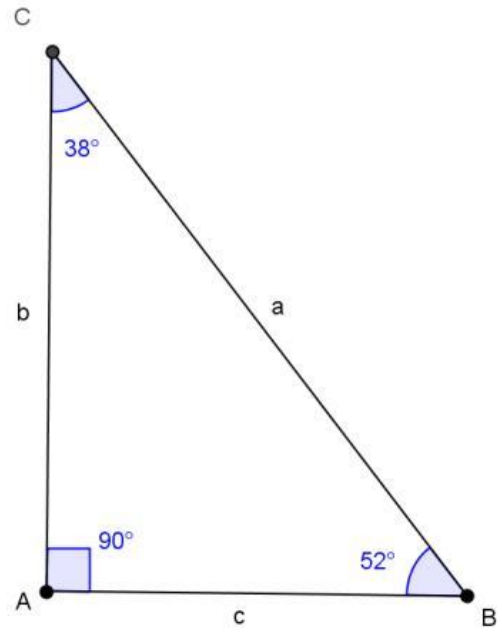


Figura 58: Demonstração 2 - Triângulo Retângulo Áureo

Teremos que:

cos 52º = $\frac{c}{a}$

$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{c}{a}$

$\frac{a}{c} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$

$\frac{a}{c} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5}+1)}{5-1}$

$\frac{a}{c} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5}+1)}{4}$

$\frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\frac{a}{c} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\frac{a}{c} = \Phi$ e $\frac{c}{a} = \frac{1}{\Phi}$

Logo, $\cos^2 52º = \left(\frac{1}{\Phi}\right)^2$.

Como $\text{sen}^2\, 52º + \cos^2 52º = 1$, temos que: $\text{sen}^2\, 52º + \left(\frac{1}{\Phi}\right)^2 = 1$

$\text{sen}^2\, 52º = 1 - \left(\frac{1}{\Phi}\right)^2$

Como $\text{sen}^2\, 52º = \left(\frac{b}{a}\right)^2$, teremos que:

$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{\Phi}\right)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \frac{1}{\Phi^2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 =$

$\frac{b}{a}\ \frac{\Phi^2-1}{\Phi^2} = \frac{\sqrt{\Phi^2-1}}{\Phi}\frac{a}{b} = \frac{\Phi}{\sqrt{\Phi^2-1}}$

Observe que:

$\Phi^2 - 1 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{5+2\sqrt{5}+1}{4} - 1 = \frac{6+2\sqrt{5}-4}{4} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$. Logo,

$\frac{a}{b} = \frac{\Phi}{\sqrt{\Phi}} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{\Phi}$.

Assim, temos que $\frac{a}{c} = \Phi$ e $\frac{a}{b} = \sqrt{\Phi}$, logo este triângulo retângulo é semelhante a um triângulo retângulo com hipotenusa igual a Φ e catetos iguais a $\sqrt{\Phi}$ e 1 e, sendo assim, classificado como triângulo retângulo áureo, como queríamos demonstrar

3. 3. RETÂNGULOS ÁUREOS

Todo retângulo será classificado como áureo se dele ao extrairmos um quadrado de lado igual ao menor lado do retângulo, o retângulo restante for semelhante ao retângulo inicial.

Para ilustrar como identificar um retângulo áureo, observemos o retângulo ABCD abaixo:

Seja um retângulo de lados a, b, com a < b.

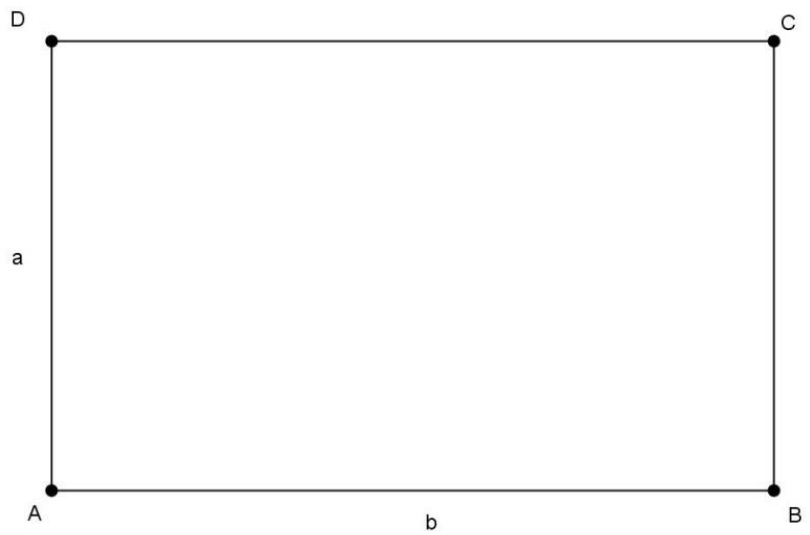


Figura 59: Como identificar um retângulo áureo - Passo 1

Retiremos um quadrado de lado a do retângulo acima:

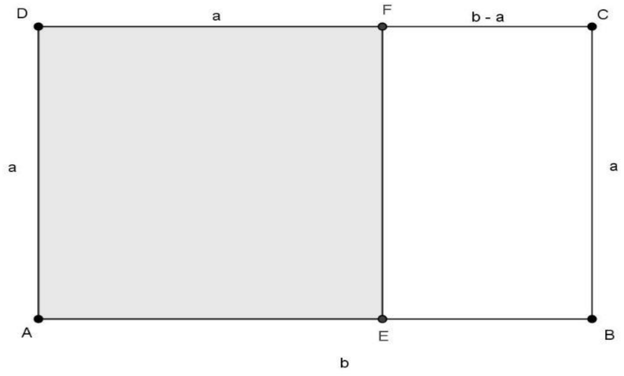


Figura 60: Como identificar um retângulo áureo - Passo 2

Caso o retângulo de lados b e a, e o retângulo de lados a e b – a sejam semelhantes, o retângulo inicial de lados b e a será classificado como sendo um retângulo áureo.

Observe que caso os retângulos de lados b e a e o retângulo de lados a e b - a sejam semelhantes, teremos:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a}$$

$$a^2 = b^2 - ab$$

$$b^2 - ab - a^2 = 0$$

$$b = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4.1.(-a^2)}}{2.1}$$

$$b = \frac{a \pm \sqrt{5a^2}}{2}$$

$$b = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2}$$

$$b = \frac{a\,(1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

Como a e b representam os comprimentos dos lados do retângulo ABCD a razão entre estes valores nunca será um número negativo, por este motivo descartaremos a solução negativa da equação.

Assim,

$$\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Onde, encontramos a razão áurea.

Do exposto acima, concluímos que outra definição para retângulo áureo é: todo retângulo será classificado como retângulo áureo quando a razão entre o seu maior e menor lado for igual ao número de ouro.

Podemos observar que se do retângulo restante (EBCF), extrairmos um quadrado (GHCF) de lado igual ao menor lado do retângulo, o novo retângulo (EBHG) será semelhante ao retângulo EBCF e, sendo assim o retângulo EBHG também será classificado como um retângulo áureo.

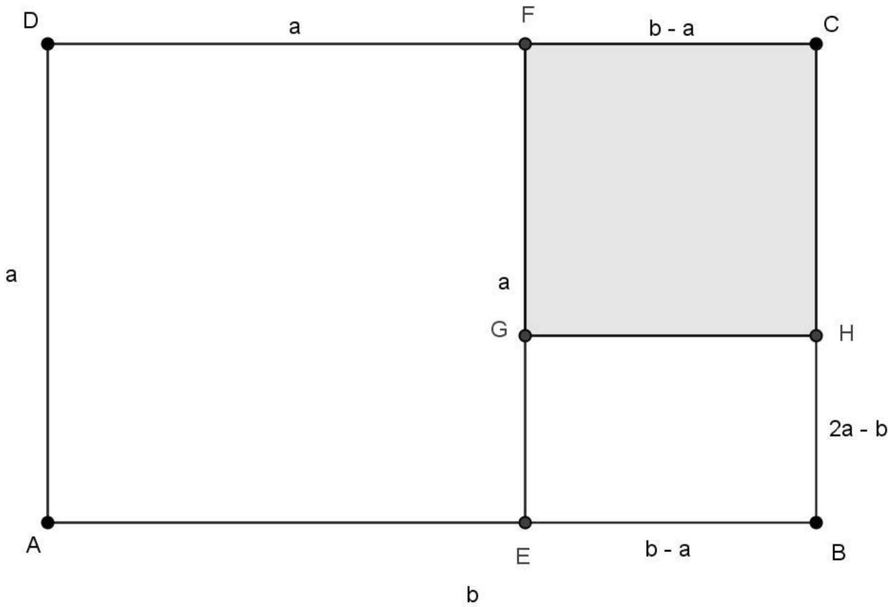


Figura 61: Como identificar um retângulo áureo - Passo 3

Vejamos que:

$$\frac{a}{b-a} = \frac{b-a}{2a-b}$$

$$2a^2 - ab = b^2 - 2ab + a^2$$

$$b^2 - ab - a^2 = 0$$

E como visto anteriormente teremos que $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Provaremos agora que este processo pode ser repetido infinitamente sempre nos dando um novo retângulo áureo.

Sabemos do estudo de relações entre proporções que: $\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a} = \frac{b-a}{2a-b}$, ou seja, $\frac{b}{a} = \frac{b-a}{2a-b}$. Assim, podemos afirmar que se o retângulo de lados b e a for áureo, os retângulo de lados a e b - a e lados b - a e 2a - b também serão áureos.

Sendo assim, dada a sequência: b, a, b - a, 2a - b, 2b - 3a, 5a - 3b,... cujo termo geral será $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$ teremos pelo raciocínio de relações entre proporções que quaisquer dois valores consecutivos desta sequência serão os lados de um retângulo áureo se em nosso retângulo inicial $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Fecha-se este capítulo mostrando como é possível construir um retângulo áureo utilizando apenas régua e compasso.

Para isto, inicialmente, deve-se construir o quadrado AEFD de lado a.

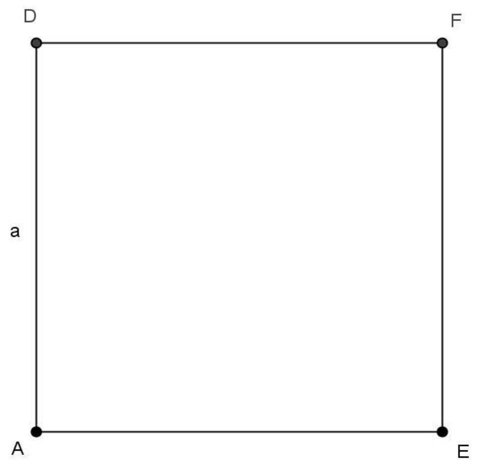


Figura 62: Construção de retângulo áureo usando régua e compasso - Passo 1

Marque M, o ponto médio do segmento $\overline{AE}$.

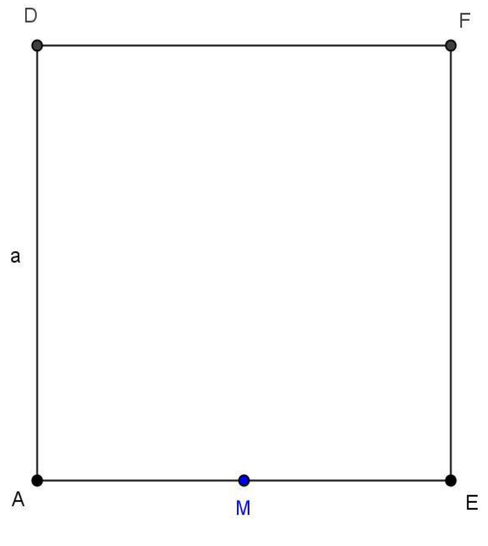


Figura 63: Construção de retângulo áureo usando régua compasso - Passo 2

Trace o segmento . $\overline{MF}$

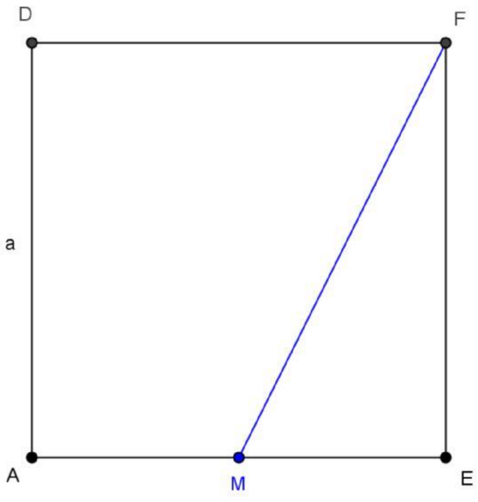


Figura 64: Construção de retângulo áureo usando régua e compasso - Passo 3

Desenhe a reta $\overleftrightarrow{AE}$ e o círculo de centro M e raio $\overline{MF}$. Chame de B a interseção da reta $\overleftrightarrow{AE}$ com o círculo de centro M e raio $\overline{MF}$.

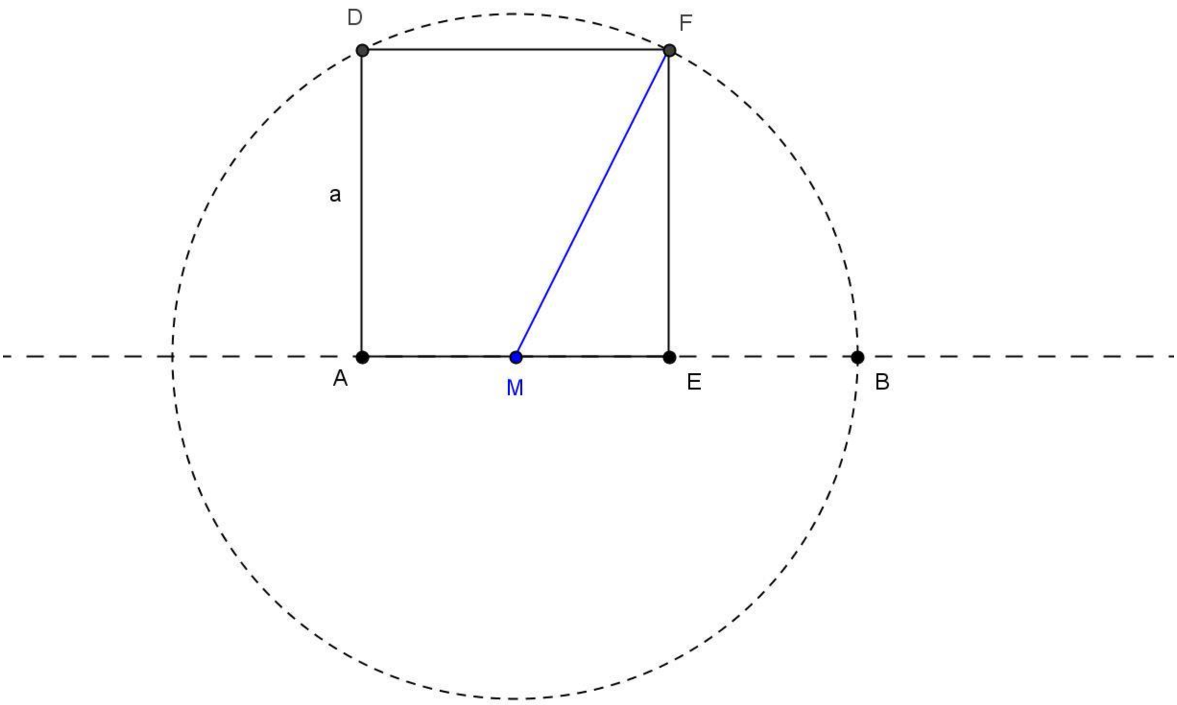


Figura 65: Construção de retângulo áureo usando régua e compasso - Passo 4

Trace uma reta perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AE}$ que passe por B. Trace a reta $\overleftrightarrow{DF}$. Chame de C a interseção entre essas duas retas.

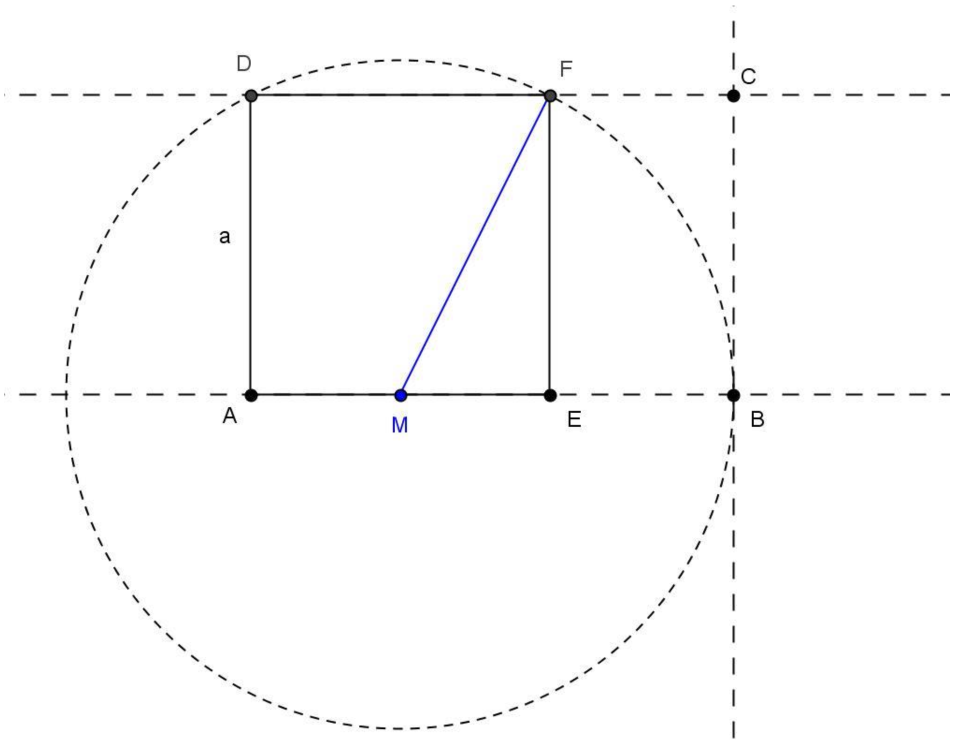


Figura 66: Construção de retângulo áureo usando régua e compasso - Passo 5

O retângulo ABCD é um retângulo áureo.

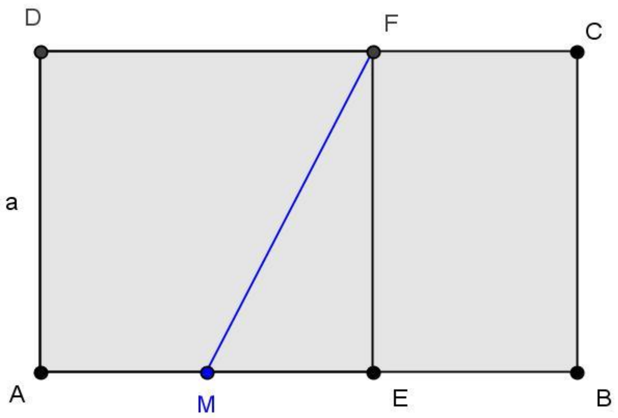


Figura 67: Prova que o retângulo ABCD é Áureo - Passo 1

De fato, como $\overline{ME} = \frac{a}{2}$ e $\overline{FE} = a$, por Pitágoras temos que:

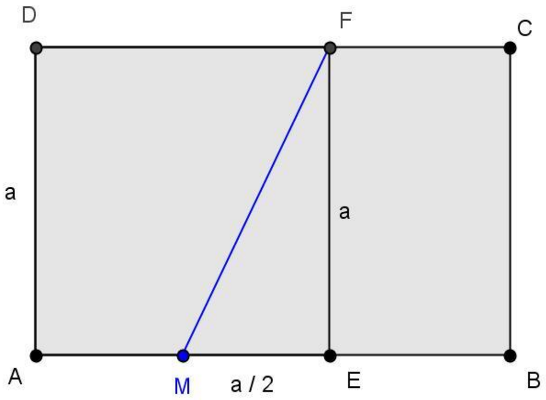


Figura 68: Prova que o retângulo ABCD é Áureo - Passo 2

$$\overline{MF}^2 = \overline{ME}^2 + \overline{EF}^2$$

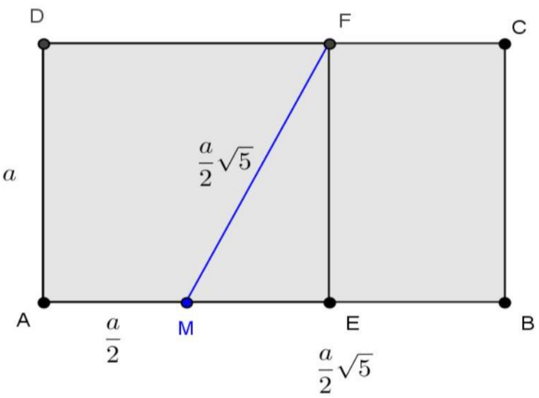
$$\overline{MF}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2$$

$$\overline{MF}^2 = \frac{a^2}{4} + a^2$$

$$\overline{MF}^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$\overline{MF} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$$

$$\overline{MF} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$



$$\overline{AB} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

Figura 69: Prova que o retângulo ABCD é Áureo - Passo 3

Como $\overline{MF} = \overline{MB}$, $\overline{AM} = \frac{a}{2}$ e $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB}$ teremos que: $\overline{AB} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5}$, ou seja

Sendo assim: $\overline{AB} = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{a}$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$.

Portanto, ABCD é um retângulo áureo

3. 4. PENTÁGONO REGULAR

Em um pentágono regular podemos encontrar diversas vezes a razão áurea. Vamos mostrar como encontrar algumas dessas razões utilizando o pentágono regular ABCDE de lado l.

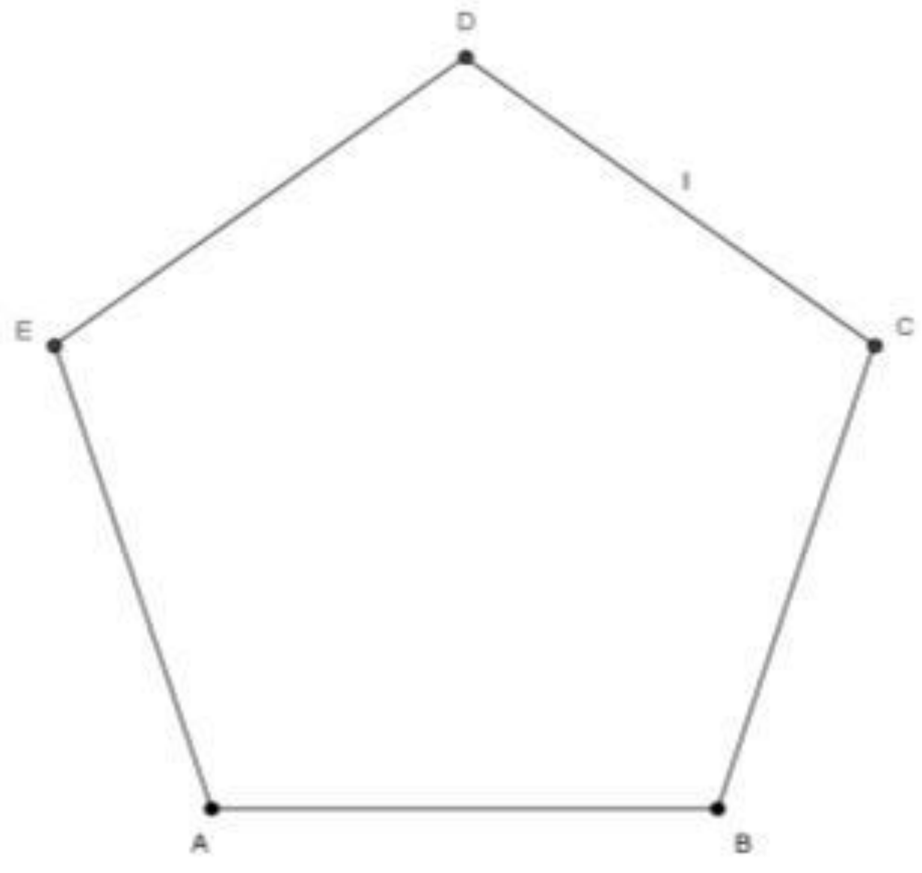


Figura70:Pentágo

<u>Caso 1:</u> Trace o segmento $\overline{EC}$ e definamos que $\overline{EC} = r$.

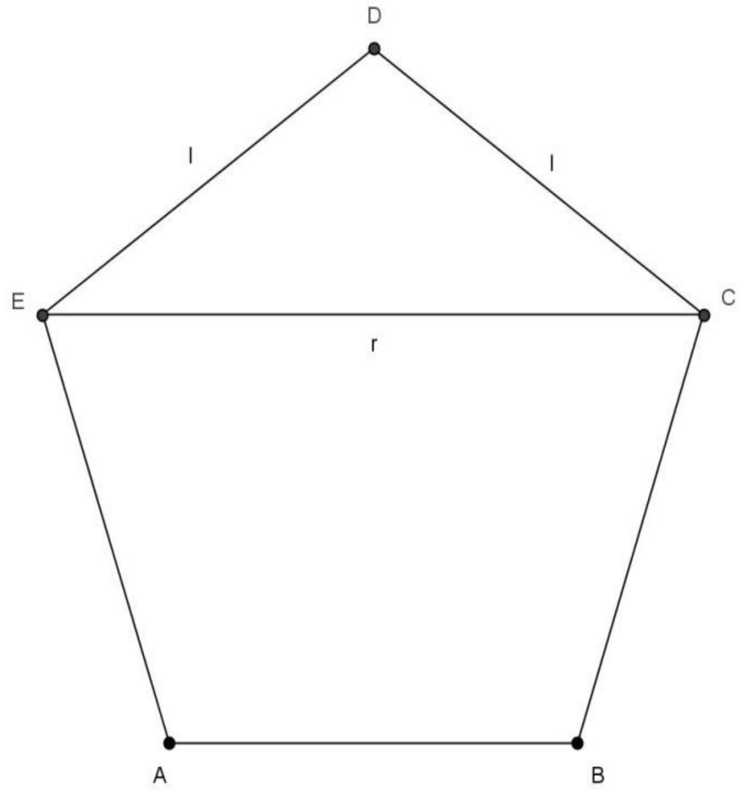


Figura71:Pentágono-Caso1-Passo

Como ABCDE é um pentágono regular temos que $E\widehat{D}C = 108$ º. Temos ainda, que o triângulo EDC é isósceles e, com isso, $D\hat{E}C = D\hat{C}E = 36$ º.

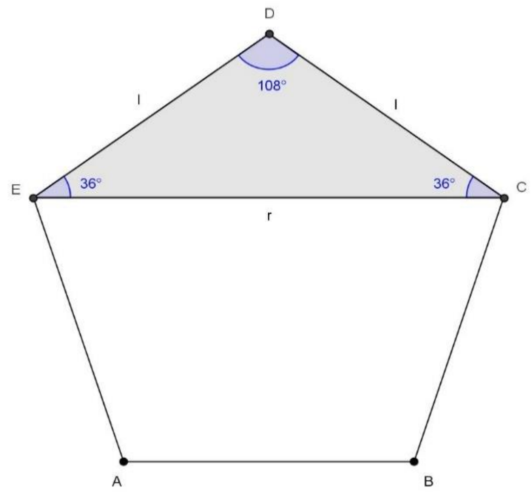


Figura 72: Pentágono - Caso 1 - Passo 2

E como demonstrado na seção 4.2.1, teremos que a razão entre $\frac{r}{l}$ será igual ao número de ouro.

<u>Caso 2:</u> Ainda utilizando o pentágono regular ABCDE tracemos a diagonal $\overline{AD}$.

Como ABCDE é um pentágono regular temos que $A\hat{E}D = 108$ º. Temos ainda, que o triângulo EDA é isósceles e, com isso, $E\widehat{D}A = E\hat{A}D = 36$ º.

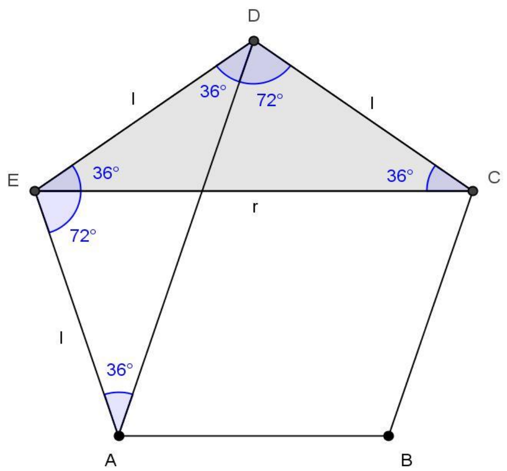


Figura 73: Pentágono - Caso 2 - Passo 1

Seja P o ponto de interseção entre os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{CE}$. No triângulo CDP teremos que o ângulo $C\hat{P}D = 72$ º, logo $\overline{CP} = \overline{CD} =$ l. E como $\overline{EC} = \overline{EP} + \overline{PC}$, teremos que $\overline{EP} =$ r - l.

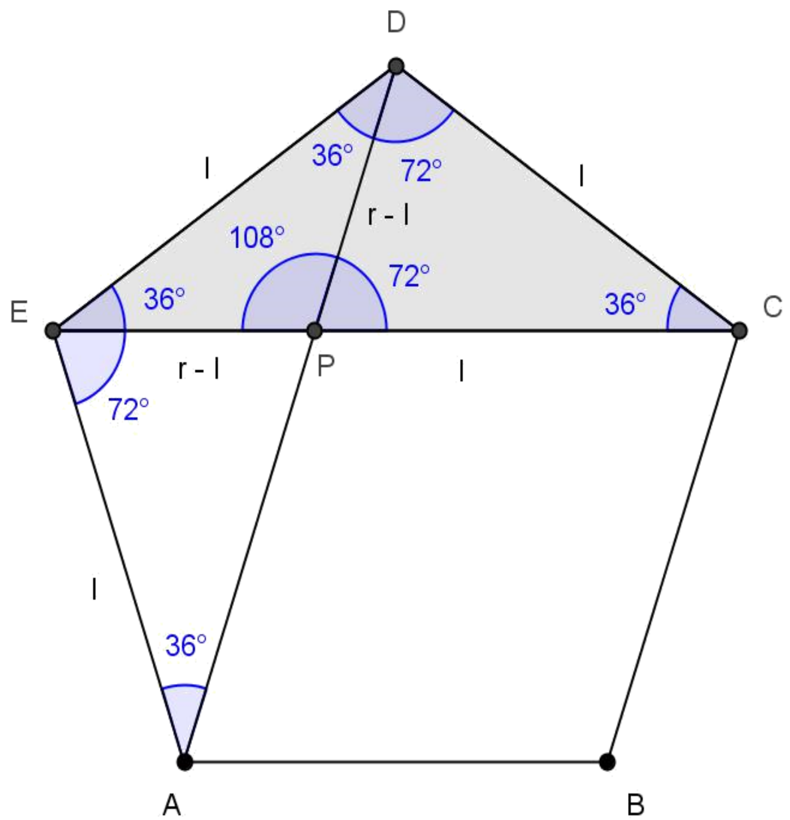


Figura 74: Pentágono - Caso 2 - Passo 2

No triângulo EPD temos que $E\hat{P}D = 108$ º, assim teremos um triângulo com os ângulos iguais a 36º, 36º e 108º, e como demonstrado na seção 4.2.2., teremos que a razão entre $\frac{l}{r-l}$ será igual ao número de ouro.

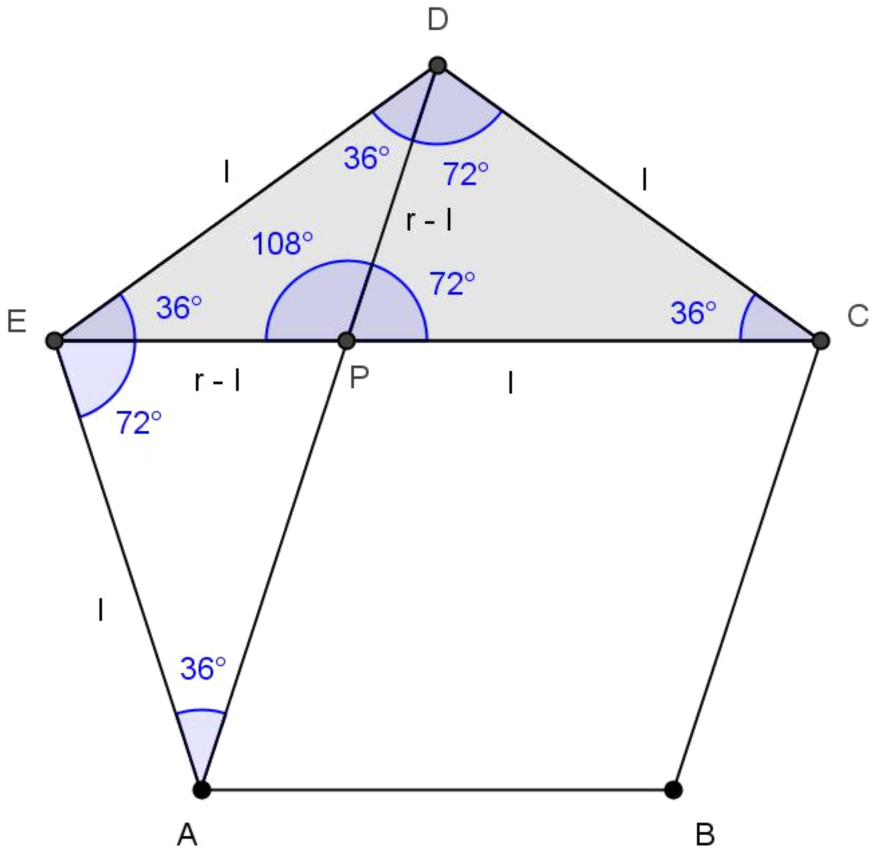


Figura 75: Pentágono - Caso 2 - Passo 3

<u>Caso 3: </u>Vemos que o triângulo EPD é isósceles, logo $\overline{EP} = \overline{DP} =$ r - l.

E como demonstrado na seção 4.2.2., teremos que a razão entre $\frac{l}{r-l}$ será igual ao número de ouro.

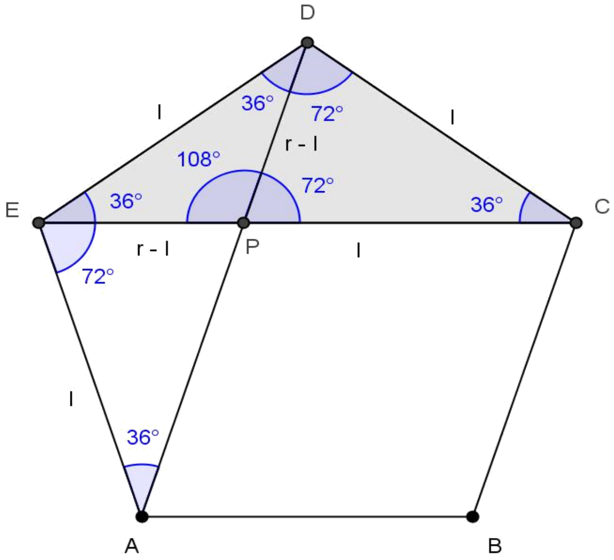


Figura 76: Pentágono - Caso 3

Caso 4: Como demonstrado no Caso 2 sabemos que a razão entre $\frac{l}{r-l}$ será igual ao

número de ouro logo, podemos observar que a interseção de duas diagonais no pentágono regular, as divide de tal forma que podemos encontrar o número áureo ao fazermos a razão entre o maior e o menor comprimento.

Como exemplo, ainda utilizando o pentágono regular ABCDE, podemos citar que $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PE}} = \frac{l}{r-l}$ que será igual ao número de ouro.

Caso 5: Como demonstrado no Caso 1 sabemos que a razão entre $\frac{r}{l}$ será igual ao

número de ouro logo, podemos observar que a interseção de duas diagonais no pentágono regular, as divide de tal forma que podemos encontrar o número áureo ao fazermos a razão entre a diagonal de um pentágono e o maior comprimento obtido após realizarmos a divisão da diagonal.

Como exemplo, ainda utilizando o pentágono regular ABCDE, podemos citar que $\frac{\overline{EC}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AP}} = \frac{r}{l}$ que será igual ao número de ouro.

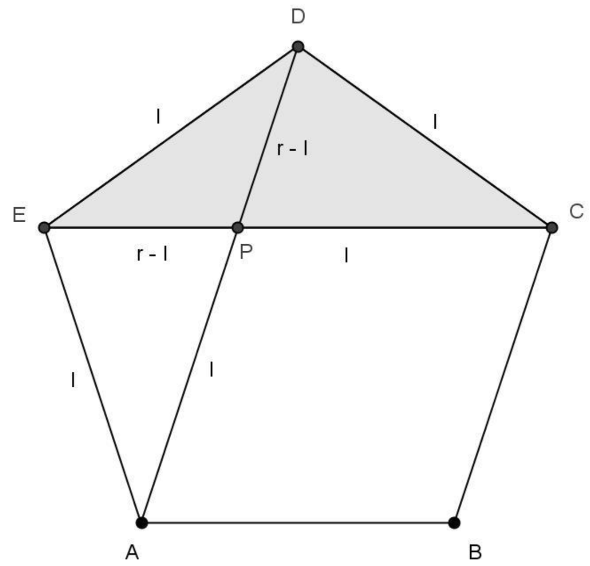


Figura 77: Pentágono – Caso 5

3.5 ESPIRAL ÁUREA

No item 4.2, descreveu-se uma maneira de se obter o retângulo áureo. Sabe-se que uma das propriedades desse retângulo é que ele sempre poderá ser dividido em um quadrado e um outro retângulo semelhante a ele. Esse outro retângulo terá essa mesma propriedade, que vai sendo transmitida aos próximos numa sucessão infinita.

A espiral áurea é a curva formada pelos infinitos arcos de 90° inscritos em cada um dos quadrados e concordantes entre si. Os centros desses arcos são sempre vértices dos quadrados.

Vamos mostrar como construir uma espiral áurea utilizando apenas régua e compasso.

Passo 1: Construa o quadrado ABCD de lado igual a uma unidade.

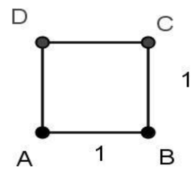


Figura 78: Construção Espiral Áurea - Passo 1

Passo 2: Construa um novo quadrado CDEF utilizando o lado CD, com tamanho igual a 1 unidade, pegando o primeiro quadrado como base para esta construção.

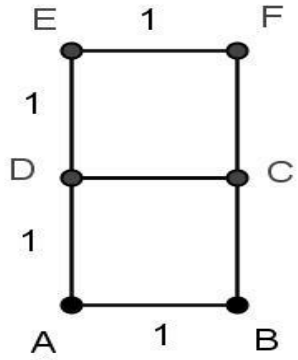


Figura 79: Construção Espiral Áurea - Passo 2

Usaremos agora o lado FB como base, com tamanho igual a 2 unidades, para construirmos um novo quadrado. Este novo quadrado será o BFHG.

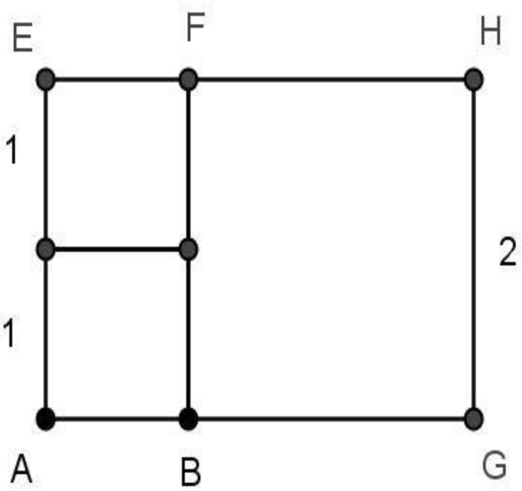


Figura 80: Construção Espiral Áurea - Passo 3

O novo quadrado que iremos construir será o AGJI e terá como base o lado AG, de tamanho igual a 3 unidade.

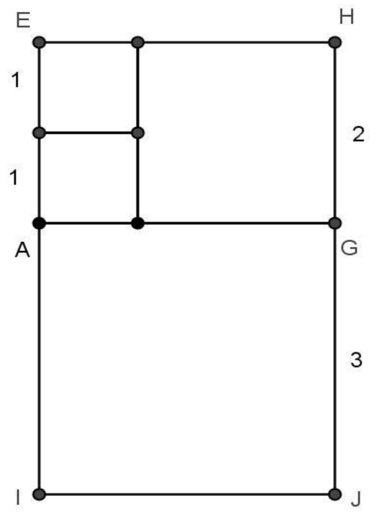


Figura 81: Construção Espiral Áurea - Passo 4

Continuando com o mesmo processo construa o quadrado EILK, com lado medindo 5 unidade.

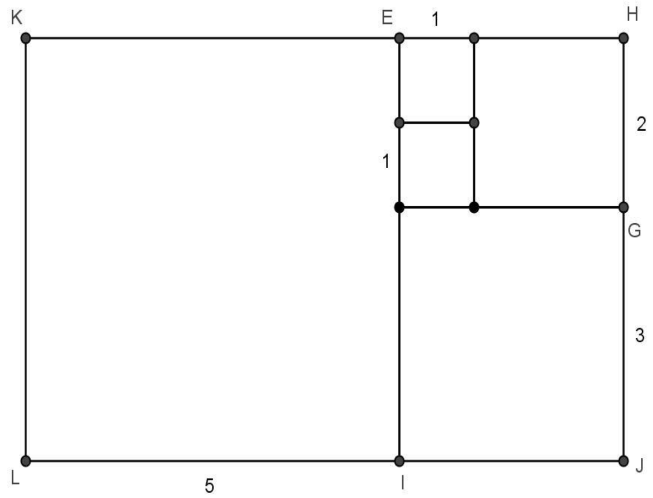


Figura 82: Construção Espiral Áurea - Passo 5

O próximo passo será construir o quadrado de lado 8, HKMN utilizando o lado HK de base.

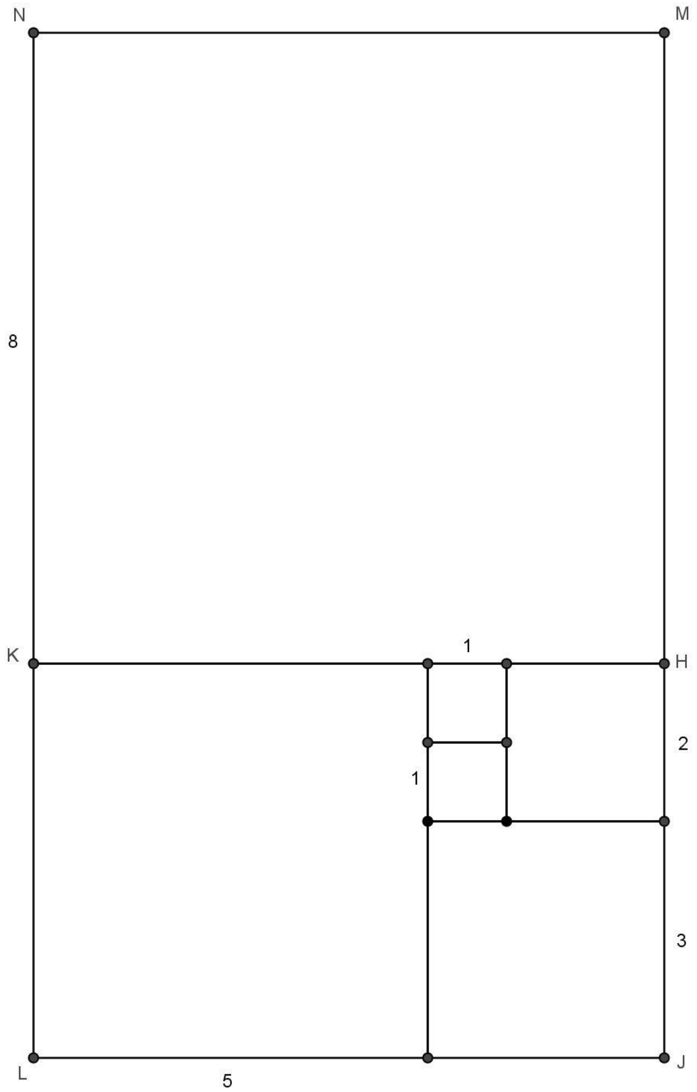


Figura 83: Construção Espiral Áurea - Passo 6

Observe que o processo pode ser repetido indefinidamente, sempre utilizando o maior lado do último retângulo como base para um novo quadrado.

Podemos observar também que os quadrados formados possuem lados iguais a 1,1, 2, 3, 5, 8,... , ou seja, possuem medidas iguais a sequência de Fibonacci.

Observe na figura a seguir que repetimos este mesmo processo até avançarmos alguns passos e construirmos o quadrado de lado 34.

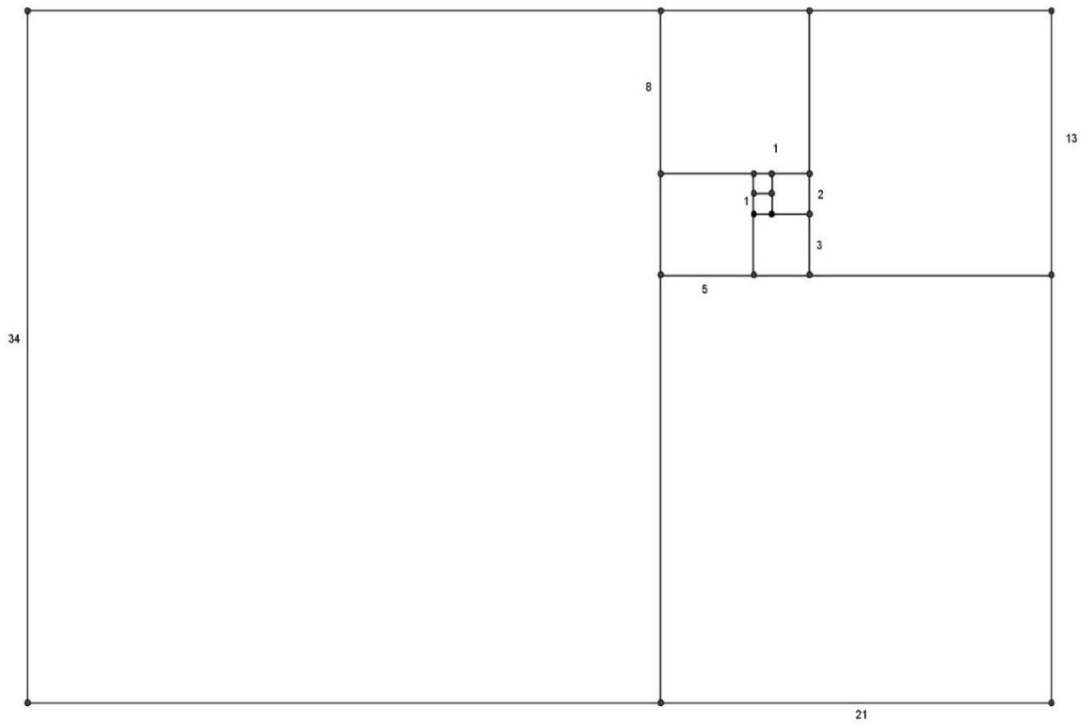


Figura 84: Construção Espiral Áurea - Passo 7

Para construirmos a espiral áurea iremos traçar um quarto de circunferência em cada quadrado feito anteriormente de maneira a termos uma linha curva que estará girando em torno de um ponto central, começando pelo ponto B.

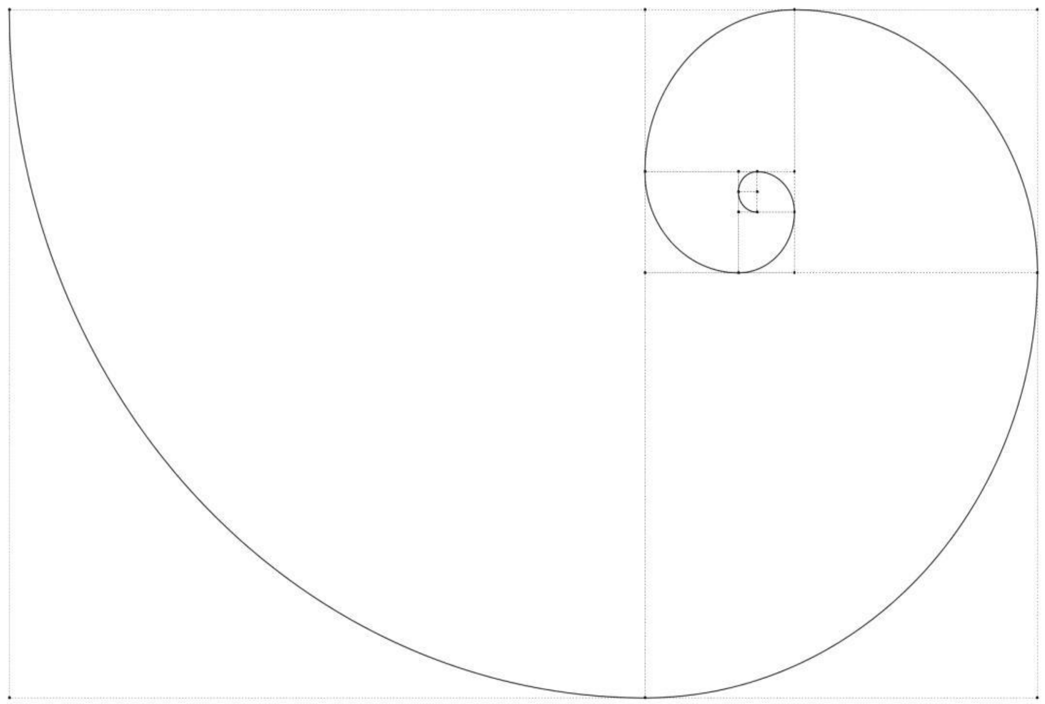


Figura 85: Construção Espiral Áurea - Passo 8

O ponto central da espiral áurea pode ser achado como o limite dos pontos de interseção das diagonais dos dois maiores retângulos, que não são quadrados.

Abaixo temos um desenho de uma espiral áurea.

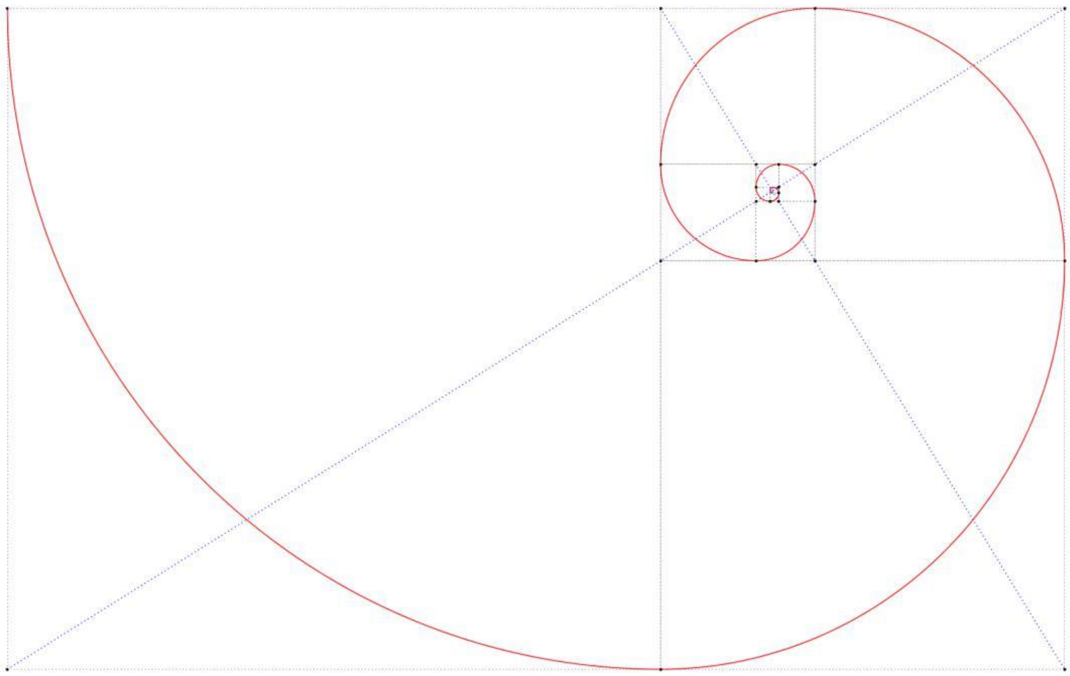


Figura 86: Espiral Áurea

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Razão Áurea é um tema que chamou atenção, não apenas por sua perfeição, beleza e uma grande harmonia, mas, sobretudo, por favorecer uma interligação de várias áreas da matemática com outras disciplinas. Acredita-se que o trabalho com a Razão Áurea pode ser bastante rico, pois, permite ao professor rever, ampliar e aprofundar diversos conceitos e procedimentos ligados a números irracionais, razão, proporção, semelhança de figuras planas, construções geométricas e demonstrações. Parece que, o número de ouro foi um presente de Deus para a humanidade, pois, não se pode estimar a quantidade de aplicações possíveis para o número de ouro. Desde um simples girassol na natureza, até à estética corporal humana, passando por uma infinidade de elementos que o homem vem estudando e que muitos não conhecem e não compreendem. O Número de Ouro também pode ser encontrado em flores, plantas diversas, obras de arte, construções, em diversos elementos da natureza e também em triângulos e retângulos. Enfim, em tantas outras coisas que o homem ainda não conseguiu acompanhar.

É claro que o uso dos computadores na educação não pode mais ser questionado, porém, não se deve adotá-lo como uma única solução para os problemas no ensino da matemática. Se a realidade atual mostra grandes transformações em todas as áreas da vida humana, os movimentos e as práticas educacionais não estão, e nem poderiam estar, alheios a esses fatos. Porém, diante do quadro em que se encontra a maioria das escolas de Macapá, servindo às comunidades carentes, sem computadores, o ensino do Desenho Geométrico é de fundamental importância para o desempenho do ensino e aprendizagem dos alunos, visto que, o ensino utilizando construções geométricas com régua e compasso tem sido valorizado por possibilitar a visualização, auxiliando nas conjecturas e provas de geometria, além do custo para aquisição do material ser bem menor. Suprimir o Desenho Geométrico na Educação Básica, traz como consequência, alunos que apresentam extrema dificuldade quando se trata de percepção visual.

Por fim, reforça-se que é importante que se produza e divulgue programas informáticos educativos ajustados às necessidades dos currículos, assim como a inclusão da disciplina Desenho Geométrico com Régua e Compasso no currículo do Ensino Básico e que eles sejam interativos para que promovam uma aprendizagem cognitiva. Mas sem o restante dos elementos que constituem o círculo escola - professores, equipamentos, novas atitudes de ensino - não valerão de nada.

Apesar das dificuldades encontradas, espera-se que este trabalho auxilie o professor a estimular as suas aulas, ou simplesmente para um aluno, seja uma fonte agradável para adquirir e aprimorar o conhecimento sobre Razão Áurea e outros assuntos abordados ao longo deste trabalho.

REFERÊNCIAS

BONGIOVANNI, V. SAVIETTO, E.; MOREIRA, L. **Desenho geométrico para o 2º grau**. São Paulo - SP: Ática, 2007.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** Trad. Elza F. Gomide: São Paulo - SP: Edgard Blucher, 2005.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/ Secretaria de Educação. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática/ Secretaria de Educação. Brasília - DF: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Lei nº 5692. **Lei de Diretrizes e Bases de Educação Nacional.** Brasília, DF: Congresso Nacional, 1971.

CARVALHO, Lucas Santos de. **Número Áureo e o ensino Básico**. Ilhéus - BA.

COSTA, E. A. S. **Analisando algumas potencialidades pedagógicas da história da matemática no ensino e aprendizagem da disciplina desenho geométrico por meio da teoria fundamentada**. (242 fls.) – Dissertação.

CRESPO, Antônio Arnot**. Estatistica Fácil**. São Paulo: Saraiva, 1996.

EVES, Howard. **História da Geometria**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

__________. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas - SP: UNICAMP, 1997.

GIONGO, Affonso da Rocha. **Curso de Desenho Geométrico**, p. 54, editora Nobel [s.d.].

GUNDLACH, Bernard H. **História dos Números e Numerais.** Trad. Hygino H. Domingues. - São Paulo - SP: Atual, 1992. - (Tópicos da História da Matemática para uso em sala de aula).

HUNTLEY, H. E. **A Divina Proporção**. Trad. Luis Carlos Ascêncio Nunes. Brasília - DF: UNB, 1985.

LIVIO, Mario, 1945- **Razão Áurea: a história de FI**, um número surpreendente. Trad. Marco Shinobu Matsumura. 2º Edição Rio de Janeiro, 2006.
.
MACHADO, R. B. **Entre vida e morte:** cenas de um ensino de desenho. - Dissertação de Mestrado. Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica. Florianópolis - SC: Universidade Federal de Santa Catarina, 2012.

MARMO, Carlos e MARMO, Nicolau; **Desenho Geométrico**. 2ª ed. -, Rio de Janeiro - RJ: Scipione, 1994.168p. Disponível também em http://www.profcardy.com/geodina/exercicios.php. Acesso em junho de 2005.

__________. **Desenho geométrico**. Rio de Janeiro - RJ: Scipione, 1994.

MANDARINO, Denis - **Desenho Geométrico, construções com régua e compasso.** São Paulo: Plêiade, 2007.

Mestrado Profissional em Educação Matemática. Departamento de Matemática. Ouro Preto - MG: Universidade Federal de Ouro Preto, 2013.

NASCIMENTO, R. A. **A função do desenho na educação**. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade de São Paulo, 1999.

NETO, Pablo Roberto de Sousa. **Bit profmat – sbm.org.br**: aplicação do número de ouro como recurso metodológico no processo de ensino-aprendizagem. In Belucci, 2008. Visitado em 17.04. 2017.

PERRENOUD, Philipe. **Novas Competências para ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 2000.

PETRINI, Carla. disponível em http://www.gama7.com.br/dicas.asp. Acesso em junho de 2005.

QUEIROZ, J. C. S. **A Geometria e o Desenho Geométrico nas escolas do Brasil do século XX.** X Encontro Nacional de Educação Matemática, Cultura e Diversidade. - Salvador – BA, 2010.

RAYMUNDO, M. F. S. M. **Construção de conceitos geométricos**: investigando a importância do ensino do desenho geométrico nos anos finais do ensino fundamental; (120 fls.); Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Vassouras - RJ: Universidade Severino Sombra, 2010.

SILVA, C. P. **A Matemática no Brasil**. Uma história de seu desenvolvimento. - 2ª. ed. Bogotá: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1998.

Site: http://www.ebah.com.br/content/ABAAABeh4AJ/licenciatura-matematica-desenho-geometrico. Enviado por Maurilio Gomes Cassilha. Arquivado no curso de Matemática na FAFIPAR. Visualizado em 02/03/2017.

UESC. **Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Ciências Exatas** - Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2013.

WAGNER, E. **Construções geométricas**. - 2. ed. Rio de Janeiro - RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

WIELEWSKI, G. D. **O Movimento da matemática moderna e a formação de grupos de professores de matemática no Brasil**. Lisboa - Portugal: Associação de Professores de Matemática, 2008.

VALENTE; W. R. **Uma História da Matemática escolar no Brasil, 1730 – 1930**. - 2ª edição. - São Paulo –SP: FAFESP, 2007.

ZUIN, E. S. L. **Da régua e do compasso:** as construções geométricas como um saber escolar no Brasil. 2001. 211 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais - Belo Horizonte, 2001.

__________. **Parâmetros curriculares nacionais de matemática para o 3º e 4o ciclos do ensino fundamental e o ensino das construções geométricas, entre outras considerações**. Associação Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Educação. Caxambu - MG: ANPED, 2002.

Site:http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/FAEC-85DGQB/zuin_elenice_disserta_nopw.pdf?sequence=1 **- DA RÉGUA E DO COMPASSO: AS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COMO UM SABER ESCOLAR NO BRASIL**, por ELENICE DE SOUZA LODRON ZUIN. Programa de Pós-Graduação em Educação Universidade Federal de Minas Gerais.- Belo Horizonte – MG, 2001. Lido na internet em 01/03/17, às 14 h.