UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR MESTRADO
PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

SANDRO MARCIO PRIMON

EDUCAÇÃO FINANCEIRA NAS ESCOLAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO

CURITIBA

2017

SANDRO MARCIO PRIMON

EDUCAÇÃO FINANCEIRA NAS ESCOLAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-UTCT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.
Orientador: Prof. Dr. Rubens Robles Ortega Junior

CURITIBA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

P953e Primon, Sandro Marcio
2017 Educação financeira nas escolas : uma proposta de ensino / Sandro Marcio Primon.-- 2017.
87 p.: il.; 30 cm.

Disponível também via World Wide Web.
Texto em português, com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2017.
Bibliografia: p. 87.

1. Educação financeira. 2. Matemática financeira – Estudo e ensino (Ensino médio). 3. Finanças pessoais. 4. Aprendizagem. 5. Prática de ensino. 6. Tecnologia educacional. 7. Tecnologia - Aspectos sociais. 8. Matemática – Estudo e ensino. I. Ortega Junior, Rubens Robles, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 22 – 510

Biblioteca Central do Câmpus Curitiba - UTFPR

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº40/2017

A Dissertação de Mestrado intitulada Educação Financeira nas Escolas: Uma proposta de Ensino, defendida em sessão pública pelo candidato Sandro Marcio Primon, no dia 03 de agosto de 2017, foi julgada para a obtenção do título de Mestre, área de concentração MATEMÁTICA, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Rubens Robles Ortega Junior - Presidente - UTFPR

Prof. Dr. José João Rossetto - UFPR

Prof. Dr. Lauro César Galvão– UTFPR

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, _____de _______________de 20___.

Carimbo e Assinatura do Coordenador do Programa

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida, pela força e coragem durante essa longa caminhada.

A minha família que, mesmo de longe, acredita e torce muito por mim, minha esposa Simone, minhas filhas Sarah e Sofia, pessoas que eu amo partilhar a vida, pela forma carinhosa que me apoiaram nos momentos de dificuldades, compreendendo minhas ausências e me tranquilizando nas angústias do cotidiano.

Aos colegas e professores do PROFMAT pelo convívio, amizade, companheirismo e colaboração em todos os momentos dessa caminhada.

À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.

À Sociedade Brasileira de Matemática, que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

Ao meu orientador, Professor Rubens Robles Ortega Junior, pela valorosa orientação, dedicação e incentivo na conclusão do presente trabalho.

RESUMO

PRIMON, Sandro Marcio. EDUCAÇÃO FINANCEIRA NAS ESCOLAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO. 87 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2017

Este trabalho apresenta uma proposta de sequência didática para o ensino de Educação Financeira, com conteúdos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. A abordagem está alinhada à Estratégia Nacional de Educação Financeira, às tecnologias educacionais e sociais desenvolvidas pela Associação de Educação Financeira do Brasil e às recentes discussões e definições da Base Nacional Comum Curricular, que reconhece definitivamente a Educação Financeira como tema relevante e que deve ser ensinado nas escolas brasileiras. Parte desta sequência didática foi aplicada em um minicurso ministrado pelo autor para estudantes do 3º ano do Ensino Médio, experiência cujos resultados também são relatados.

Palavras-chave: Educação Financeira. Matemática Financeira. Estratégia Nacional de Educação Financeira. Base Nacional Comum Curricular.

ABSTRACT

PRIMON, Sandro Marcio. FINANCIAL EDUCATION IN SCHOOLS: A TEACHING PROPOSAL. 87 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2017

This work presents a proposal for a didactic sequence for the teaching of Financial Education, with contents of Elementary and Secondary Education. The approach is aligned with the National Financial Education Strategy, the educational and social technologies developed by the Brazilian Financial Education Association and the recent discussions and definitions of the National Curricular Common Base, which definitively recognizes Financial Education as a relevant subject and that must be taught in Brazilian schools. Part of this didactic sequence was applied in a mini-course taught by the author to students of the 3rd year of High School, an experiment whose results are also reported.

Keywords: Financial Education. Financial Mathematics. National Financial Education Strategy. National Common Curricular Base.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Educação Financeira é *"o processo mediante o qual os indivíduos e as sociedades melhoram a sua compreensão em relação aos conceitos e produtos financeiros, de maneira que, com informação, formação e orientação, possam desenvolver os valores e as competências necessários para se tornarem mais conscientes das oportunidades e riscos neles envolvidos e, então, poderem fazer escolhas bem informadas, saber onde procurar ajuda e adotar outras ações que melhorem o seu bem-estar. Assim, podem contribuir de modo mais consistente para a formação de indivíduos e sociedades responsáveis, comprometidos com o futuro"*, de acordo com a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE[1]).

A Educação Financeira foi oficializada no Brasil como política de Estado com a publicação do Decreto[2] nº 7.397, de 22 de dezembro de 2010, que criou a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF[3]):

> Art. 1º Fica instituída a Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF com a finalidade de promover a educação financeira e previdenciária e contribuir para o fortalecimento da cidadania, a eficiência e solidez do sistema financeiro nacional e a tomada de decisões conscientes por parte dos consumidores.
>
> Art. 2º A ENEF será implementada em conformidade com as seguintes diretrizes:
>
> I - atuação permanente e em âmbito nacional;
>
> II - gratuidade das ações de educação financeira;
>
> III - prevalência do interesse público;
>
> IV - atuação por meio de informação, formação e orientação;
>
> V - centralização da gestão e descentralização da execução das atividades;
>
> VI - formação de parcerias com órgãos e entidades públicas e instituições privadas; e
>
> VII - avaliação e revisão periódicas e permanentes.
>
> Art. 3º Com o objetivo de definir planos, programas, ações e coordenar a execução da ENEF, é instituído, no âmbito do Ministério da Fazenda, o Comitê Nacional de Educação Financeira - CONEF.
>
> Art. 4º Ao CONEF compete:
>
> I - promover a ENEF, observada a finalidade estabelecida no art. 1º, por meio da elaboração de planos, programas e ações; e
>
> II - estabelecer metas para o planejamento, financiamento, execução, avaliação e revisão da ENEF.

---

[1] Organização internacional integrada por 35 países que aceitam os princípios da democracia representativa e da economia de livre mercado, que procura fornecer uma plataforma para comparar políticas econômicas, solucionar problemas comuns e coordenar políticas domésticas e internacionais.

[2] Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2010/Decreto/D7397.htm>. Acesso em: 26 jun. 2017.

[3] O *site* da ENEF é <http://www.vidaedinheiro.gov.br/>.

Em 2011, por meio de um convênio com o CONEF, foi criada a Associação de Educação Financeira do Brasil (AEF-Brasil[4]), organização responsável pela coordenação e execução dos projetos da ENEF:

> A missão da AEF-Brasil é tornar a Educação Financeira um tema relevante, com atuação nacional e sua forma de cumprir com sua missão é atuar no desenvolvimento de tecnologias sociais e educacionais com o objetivo de que estas sejam colocadas à disposição da sociedade gratuitamente.

Todo este movimento para incorporar a Educação Financeira na cultura da sociedade brasileira, contribuiu para que o tema passasse a integrar a Base Nacional Comum Curricular (BNCC[5]), tanto do Ensino Fundamental (MEC, 2017, p. 225):

> Outro aspecto a ser considerado nessa unidade temática[6] é o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à **Educação Financeira** dos alunos. Assim, podem ser discutidos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos. Essa unidade temática favorece um estudo interdisciplinar envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro. É possível, por exemplo, desenvolver um projeto com a História, visando ao estudo do dinheiro e sua função na sociedade, da relação entre dinheiro e tempo, dos impostos em sociedades diversas, do consumo em diferentes momentos históricos, incluindo estratégias atuais de marketing. Essas questões, além de promover o desenvolvimento de competências pessoais e sociais dos alunos, podem se constituir em excelentes contextos para as aplicações dos conceitos da Matemática Financeira e também proporcionar contextos para ampliar e aprofundar esses conceitos,

quanto do Ensino Médio (MEC, 2016, p. 568):

> É bom sempre lembrar que a construção significativa dos conhecimentos estatísticos ocorre a partir do envolvimento dos estudantes com temas por eles escolhidos para responder a seus questionamentos. Esse temas podem envolver aspectos socioculturais, ambientais ou oriundos de outras disciplinas escolares, o que contribui para uma visão interdisciplinar de diversos aspectos. A análise de dados estatísticos a respeito de aspectos econômicos, junto com a comparação desses dados com outros, de outras mídias ou obtidos pelos próprios estudantes, contribui de modo inequívoco para a formação no campo da **Educação Financeira**, um dos temas especiais. A sustentabilidade é outra rica fonte para a formulação de questões e para a discussão de notícias, proporcionando farto material para o professor de Matemática contribuir para estudos da Geografia, da Economia e do Meio ambiente. A Biologia é também um bom campo de origem de questões para o planejamento de pesquisas estatísticas.

---

[4] O *site* da AEF-Brasil é <http://www.aefbrasil.org.br/>.

[5] A Base Nacional Comum Curricular é um conjunto de orientações que deverão nortear os currículos das escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, em todo o Brasil. A Base estabelecerá direitos e objetivos de aprendizagem, isto é, o que se considera indispensável que todo estudante saiba após completar a Educação Básica. Fará isso estabelecendo os conteúdos essenciais que deverão ser ensinados em todas as escolas, assim como as competências e as habilidades que deverão ser adquiridas pelos alunos. O *site* da BNCC é <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>.

[6] “Números” é a unidade temática a que se refere esta citação. As outras quatro propostas pela BNCC são: Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística.

Alinhado ao exposto anteriormente, este trabalho tem como objetivo principal fornecer uma contribuição ao Ensino de Educação Financeira na escola. Sua proposta é apresentar uma série de exemplos que ocorrem no cotidiano das pessoas, juntamente com a teoria matemática relacionada a eles, para servir, como roteiro, em aulas curriculares e extracurriculares sobre Matemática e Educação Financeira. Por opção do autor, os conteúdos teóricos não foram apresentados na tradicional forma clássica Definição-Teorema-Demonstração, na intenção de tornar a leitura menos formal.

No Capítulo 1 são abordadas diversas questões gerais relativas à Educação Financeira, a nível mundial, no Brasil, na escola e, em particular, na Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

O Capítulo 2 é dedicado à teoria e aos exemplos, sendo a parte principal deste trabalho, que pretende que sirva de referência aos professores que ministram ou ministrarão cursos com temas de Educação Financeira. Problemas do cotidiano, como os relacionados a seguir, são discutidos:

- Compra à vista e compra parcelada;

- Cálculo da prestação de um financiamento;

- IPVA e suas opções de pagamento;

- IPTU e suas opções de pagamento;

- Cálculos para planejamento de aposentadorias;

- Modelos de amortização do sistema de financiamento habitacional brasileiro;

- A Matemática do Imposto de Renda da Pessoa Física.

No Capítulo 3 é relatada uma experiência na qual foi ministrado um minicurso de Educação Financeira a um grupo de jovens estudantes do 3º ano do Ensino Médio.

1 EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Este Capítulo apresenta uma abordagem geral sobre Educação Financeira, suas origens, seu desenvolvimento e seu estado atual, assim como enfatiza sua influência e sua importância no cotidiano das sociedades, particularmente na brasileira.

1.1 RETROSPECTIVA MONETÁRIA E COMERCIAL

Entre os gregos antigos, acreditava-se que Pluto, Deus da Riqueza, deveria distribuir indistintamente os bens a quem melhor os administrasse.

> Cego, Pluto, o deus velho e maltrapilho da Riqueza, foi privado de poder escolher a quem distribuir a dádiva da fartura e da bonança: *"Foi Zeus que me fez isso, por má vontade aos homens. Quando eu era rapaz, ameacei que só me dirigiria aos justos e sábios e honestos. E ele fez-me cego, para que não distinguisse nenhum deles. É assim que ele inveja os bons"* (FéLIX, 2010).

Entretanto, o grego Aristófanes, em sua obra "Pluto – A Riqueza" (388 a.C.), considera que Pluto era na verdade manipulado e subjugava-se a quem o cultuava. Com isso, acabava por ceder aos mais astutos no manejo do dinheiro. Assim, ao se analisar a evolução das relações financeiras através dos tempos, percebe-se que este pensamento perdura e ilustra bem que realmente os astutos se apropriaram e dominaram a arte de administrar o dinheiro.

Ao longo da história muitos artigos foram usados como moeda de troca: os astecas usavam o chocolate, os noruegueses, na Idade Média, utilizavam o bacalhau seco e, no caso dos antigos irlandeses, até mulheres escravizadas. Nas antigas civilizações praticava-se o que se chamava de escambo, método no qual o indivíduo troca o excesso da sua produção sem se preocupar com a equivalência de valor. Porém, esse método começou a ter problemas uma vez que alguns produtos, devido a sua utilidade ou escassez, passavam a ser mais valorizados, dificultando a permuta.

Surgiu então a necessidade de utilizar algo com valor equivalente para continuar a comercialização através da troca. Assim, alguns produtos se tornavam mais valiosos e muitas vezes usados como moeda comparativa no comércio com outras mercadorias. Dois exemplos desse tipo de produto foram o gado (pecus, do latim) e o sal: o primeiro por sua fácil locomoção, reprodução e até prestação de serviço; o segundo por sua difícil obtenção, escassez no interior dos continentes e sua utilidade na conservação de alimentos. Até os dias de hoje se usam termos como salário e pecúlio (dinheiro acumulado).

Entretanto, a partir do momento em que o escambo não deu mais conta das trocas comerciais, por ser muitas vezes mercadoria perecível ou de difícil fracionamento, e por isso dificultar o acúmulo de riquezas, surgiu a necessidade da criação de outro método que suprisse tal lacuna: a moeda.

É sabido que em um dado momento histórico o homem descobriu o metal e começou a utilizá-lo na fabricação de seus utensílios do cotidiano. Percebeu-se então que este material poderia ser utilizado como moeda. A princípio, a ideia da troca continuou, pois era trocado levando em consideração seu peso e composição (pureza). Com o tempo adquiriu forma e peso determinado, o que facilitou nas transações, pois sabia-se exatamente quanto valia, sendo desnecessária nova pesagem ou análise do metal.

> Surgem, então, no século VII a.C., as primeiras moedas com características das atuais: são pequenas peças de metal com peso e valor definidos e com a impressão do cunho oficial, isto é, a marca de quem as emitiu e garante o seu valor. (...) Os primeiros metais utilizados na cunhagem de moedas foram o ouro e a prata. O emprego destes metais se impôs, não só pela sua raridade, beleza, imunidade à corrosão e valor econômico, mas também por antigos costumes religiosos. Nos primórdios da civilização, os sacerdotes da Babilônia, estudiosos de astronomia, ensinavam ao povo a existência de estreita ligação entre o ouro e o Sol, a prata e a Lua. Isto levou à crença no poder mágico destes metais e no dos objetos com eles confeccionados (BRASIL, 2013).

Como explicado, inicialmente as moedas eram cunhadas em ouro, prata e cobre. Apenas na segunda metade do século XVII, com a invenção do cuproníquel (liga metálica de cobre e níquel com até 30% de níquel), as moedas passaram a ser fabricadas neste material e seu valor passou a ser impresso na própria moeda, independendo agora de seu peso e composição.

> As moedas refletem a mentalidade de um povo e de sua época. Nelas podem ser observados aspectos políticos, econômicos, tecnológicos e culturais. É pelas impressões encontradas nas moedas que conhecemos hoje, a efígie de personalidades que viveram há muitos séculos. Provavelmente, a primeira figura histórica a ter sua efígie registrada numa moeda foi Alexandre, o Grande, da Macedônia, por volta do ano 330 a.C. (BRASIL, 1998).

O papel moeda surge na Idade Média, quando o ourives (pessoa responsável por guardar e negociar ouro e prata de outros), ao receber determinada quantidade em ouro de alguém, entregava-lhe como garantia um recibo. Esse recibo, muitas vezes, era repassado como promessa de pagamento, dando origem à moeda de papel.

> Com o tempo, da mesma forma ocorrida com as moedas, os governos passaram a conduzir a emissão de cédulas, controlando as falsificações e garantindo o poder de pagamento. Atualmente quase todos os países possuem seus bancos centrais, encarregados das emissões de cédulas e moedas (BRASIL, 2013).

1.2 EDUCAÇÃO FINANCEIRA: CONCEITO GERAL

Juntamente com o surgimento da moeda, apareceram novos e complexos conceitos de dinheiro e suas variáveis. Percebe-se, como fenômeno desta evolução, que as pessoas têm sentido dificuldade em se adaptar, reconhecendo a importância de saber administrar suas finanças. Sobre isso, Lima & Sá expõem que na hora de tomada de decisões, conhecimento e informação se fazem necessários na vida de todas as pessoas. Destacam ainda que, dessa forma, é muito importante inserir os conceitos financeiros na vida dos jovens e crianças no ensino fundamental, para que eles se sintam preparados para lidar com o dinheiro, ou para que saibam o quanto estão pagando de juros como consumidores, ou ainda para que possam planejar suas vidas, sabendo a influência da inflação, do valor do dinheiro no tempo e para que possam ter uma vida financeira mais estável, sem dívidas e preocupações no final de cada mês (LIMA C. B.; DE Sá, 2010).

Por compreender a pertinência desta questão surge no mundo a ideia de Educação Financeira, como estratégia para adquirir conhecimentos visando uma relação equilibrada com o dinheiro, ou seja, que o indivíduo saiba tomar decisões apropriadas para gerir sua vida patrimonial.

> A Educação Financeira é o processo mediante o qual os indivíduos e as sociedades melhoram sua compreensão em relação aos conceitos e produtos financeiros, de maneira que, com informação, formação e orientação, possam desenvolver os valores e as competências necessários para se tornarem mais conscientes das oportunidades e dos riscos nele envolvidos e, então, poderem fazer escolhas bem informadas, saber onde procurar ajuda, adotar outras ações que melhorem o seu bem-estar. Assim, podem contribuir de modo mais consciente para a formação de indivíduos e sociedades responsáveis, comprometidos com o futuro (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico - OCDE, 2005) (BRASIL, 2013).

1.3 EDUCAÇÃO FINANCEIRA NO MUNDO

Sendo a Educação Financeira uma preocupação mundial, percebe-se que há interesse dos governos de diversos países em instruir sua população neste aspecto. Isso porque a administração das finanças pessoais é desejável em tempos de ascendência comercial, além de ser de extrema importância em tempos de crise econômica.

Em 2014, uma ampla Pesquisa Global sobre Educação Financeira, a S& P Global Finlit Survey[1], verificou que dois em cada três adultos no mundo são analfabetos financeiros. De acordo com artigo publicado no *site* do Insper[2],

> O analfabetismo financeiro é uma barreira para a inclusão financeira. A falta de conhecimento sobre finanças e produtos financeiros faz com que muitas pessoas sejam incapazes de acessar serviços bancários e financeiros. Educação Financeira é, portanto, muito importante para o bem-estar financeiro das pessoas e para a saúde geral da economia de um país.

Retirada desta pesquisa, a Figura 1 mostra as porcentagens de adultos no mundo que possuem conhecimentos adequados de Educação Financeira, onde um de cada três cidadãos

---

[1] Disponível em: <http://gflec.org/initiatives/sp-global-finlit-survey/>. Acesso em: 03 jul. 2017.

[2] Instituição de ensino e pesquisa sem fins lucrativos, que atua nas áreas de Negócios, Economia, Direito e Engenharia. Disponível em: <https://www.insper.edu.br/cefi/parceria-educacao-financeira/>. Acesso em: 03 jul. 2017.

responderam corretamente a pelo menos três de quatro conceitos financeiros abordados.

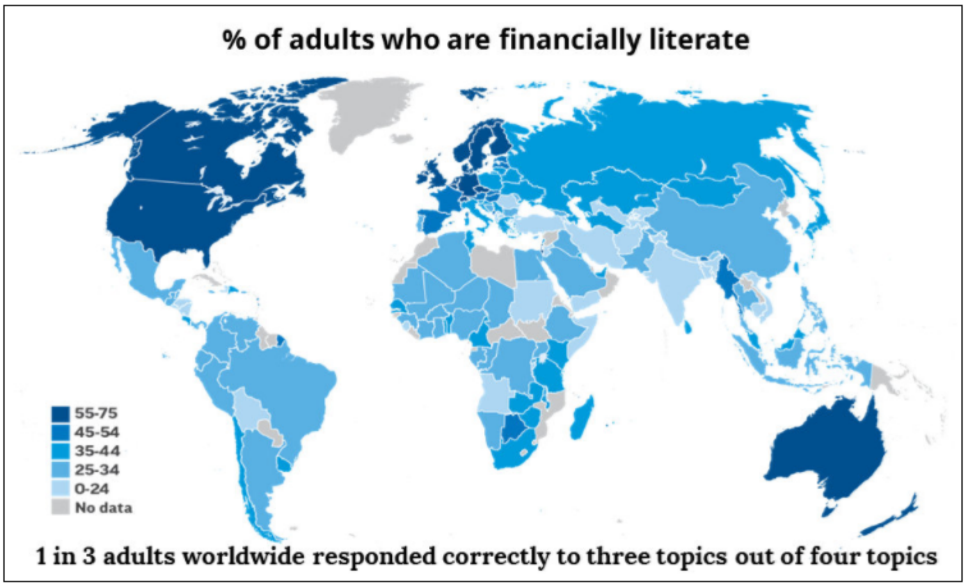


Figura 1 – % de Adultos no Mundo que são Financeiramente Alfabetizados

Fonte: <http://gflec.org/initiatives/sp-global-finlit-survey/>

Ao se considerar essa abordagem, verifica-se que o sucesso ou ascendência pessoal ou profissional está diretamente ligado ao fato de como o indivíduo age perante suas finanças. Tem-se a ciência de que ações tomadas em caráter pessoal ou familiar interferem diretamente na economia de toda uma nação.

1.4 EDUCAÇÃO FINANCEIRA NO BRASIL

Num contexto mundial o Brasil surge como um país em desenvolvimento. Faz parte de sua história a instabilidade monetária. Para tentar consolidar a economia o país foi vítima de diversos planos econômicos inexitosos. Com isso, a geração dos pais e avós dos jovens de hoje viveram uma realidade bem diferente, com muitas restrições financeiras. Não podiam confiar nem nos bancos, pois eram instituições frágeis num ambiente instável e de inflação descontrolada. Não contavam com todo tipo de informação que dispomos nos dias de hoje. Mesmo assim, a duras penas, asseguravam a seus descendentes, bem menos consumistas que nos dias atuais, um nível mínimo de conforto, mesmo com algumas privações.

A partir da década de 1990, surge, no cenário nacional, um período de estabilidade da moeda, com maior desenvolvimento econômico que permitiu a ascensão de boa parte da população à classe média. Surge, então, dentre a população brasileira, o interesse sobre temas relacionados a bancos, investimentos, ações, imóveis, previdência, enfim, independência financeira. Nessa conjuntura as famílias veem a oportunidade de um padrão de vida mais elevado, de satisfazer seu desejos e, às vezes, sem um planejamento, sofrem as consequências de suas escolhas: endividamento por cartão de crédito, cheque especial, empréstimos consignados, etc.

Em tempos atuais, o cenário nacional vem sofrendo fortes modificações, ocasionadas por uma forte crise econômica. As pessoas que se beneficiaram da estabilidade estão tendo que aprender a reorganizar suas vidas. Em tempos de crise econômica obtém êxito aquele que melhor administra suas finanças.

Para auxiliar a população nesse vai e vem da economia, foi instituída pelo Decreto[3] 7.397 de 22 de dezembro de 2010 a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF[4]), que mobiliza vários setores da sociedade em torno de ações que promovam o tema. A estratégia foi instituída como política de estado em caráter permanente e suas principais característica são a gratuidade das iniciativas que desenvolve ou apoia e a imparcialidade comercial. O objetivo da ENEF é contribuir para o fortalecimento da cidadania ao fornecer e apoiar ações que ajudem a população a tomar decisões mais autônomas e conscientes na questão da administração das próprias finanças.

A estratégia foi criada através da articulação de órgãos e entidades governamentais e a organização da sociedade civil que, juntas, integram o Comitê Nacional de Educação Financeira (CONEF), que tem como finalidade definir planos, programas, ações e coordenar a ENEF.

A criação da Associação de Educação Financeira do Brasil (AEF-Brasil[5]) teve como objetivo possibilitar que a Educação Financeira chegasse a todo brasileiro, dando-lhe oportunidades igualitárias de tomada de decisão financeira autônoma e saudável para sua vida, fortalecendo, desta maneira, o exercício da cidadania. Assim, a AEF-Brasil ao desenvolver seus projetos contribui para o desenvolvimento econômico e social, e especialmente, para o exercício da plena cidadania e a prática da democracia.

Dentre as diversas realizações da AEF-Brasil, destaca-se o Programa de Educação Financeira nas Escolas[6]:

> O Programa de Educação Financeira nas Escolas, formado por dois projetos, Ensino Médio e Fundamental, possui um projeto pedagógico e um conjunto de livros por níveis de ensino que oferecem, ao aluno e ao professor, atividades educativas que permitem a inserção do tema na vida escolar.

Dentre outras diversas iniciativas de disseminação da Educação Financeira no Brasil, destacam-se:

a) Semana Nacional de Educação Financeira[7], evento de reúne uma série de atividades como palestras, minicursos, painéis, mesas-redondas, distribuídas em várias cidades do Brasil.

---

[3] Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2010/Decreto/D7397.htm>. Acesso em: 26 jun. 2017.
[4] O *site* da ENEF é <http://www.vidaedinheiro.gov.br/>.
[5] O *site* da AEF-Brasil é <http://www.aefbrasil.org.br/>.
[6] Disponível em: <http://www.edufinanceiranaescola.gov.br/>. Acesso em: 01 jul. 2017.
[7] Disponível em: <http://www.semanaenef.gov.br/>. Acesso em: 01 jul. 2017.

b) Cursos gratuitos a distância ofertados pela Escola de Administração Fazendária[8], pelo Banco Central do Brasil[9] e pela Comissão de Valores Mobiliários[10].

c) Conjunto de vídeos produzido pela BM&FBOVESPA, intitulado TV Educação Financeira[11].

Como se percebe, a Estratégia Nacional de Educação Financeira promove a divulgação da ideia no país e propõe nortes para disseminar ações tanto do Estado quanto da iniciativa privada ou sociedade civil. Além disso, essa estratégia está sendo utilizada para fundamentar legislação, políticas públicas e outros programas que já estão contribuindo para melhorar a cultura financeira de toda população.

1.5 EDUCAÇÃO FINANCEIRA NA ESCOLA

Cultura financeira condensa três palavras: sonhar, planejar, alcançar. Bem se sabe que não são raros os momentos em que o cidadão se depara com situações conflitantes, nas quais tem dificuldade, ou ainda não está preparado para a melhor escolha. O imediatismo, por exemplo, de comprar um tênis pode levar à escolha de muitas prestações e um acréscimo considerável no valor do mesmo. Isso acontece pela falta do conhecimento básico de Matemática Financeira para calcular se a taxa que está sendo cobrada no valor do bem é justa ou está abusiva. Muitas vezes há carência de racionalidade para saber se a melhor opção, talvez, não seja espera de algum tempo, tentando com isso melhorar sua condição e conseguir um desconto. É pertinente que se perceba todas as possibilidades e a gama de oportunidades que nos apresentam, a fim de que nossas escolhas, ainda que se não nos tragam benefícios, não nos prejudiquem.

Lima & Sá expõem que, talvez, o conteúdo mais motivador do currículo do Ensino Médio e dos cursos de Educação de Jovens e Adultos seja a Matemática Financeira. Afirmam ainda que, por meio do seu estudo, o aluno pode ser preparado para enfrentar situações financeiras que ocorrem no seu dia a dia, como optar pela melhor forma de pagamento, à vista ou a prazo, seja de impostos ou de compras em geral (LIMA C. B.; DE Sá, 2010).

Cientes destas dificuldades, muitos adultos questionam o porquê de o contato com esse tema não se dar mais cedo, ainda nos bancos escolares. A impressão é que despertaram para esse mundo um pouco tarde. Saliente-se que no início da vida escolar do educando é comum de se ver problematizações nas quais a Matemática Financeira está presente. Já na Educação Infantil a criança convive com questões que envolvem compras, troco, etc. Mas, conforme as séries progridem, este tipo de abordagem diminui. No Ensino Médio são escassas a alusões a este tema.

---

[8] Disponível em: <https://escolavirtual.esaf.fazenda.gov.br/>. Acesso em: 01 jul. 2017.
[9] Disponível em: <https://cidadaniafinanceira.bcb.gov.br/treinamento/>. Acesso em: 01 jul. 2017.
[10] Disponível em <http://cursos.cvm.gov.br/>. Acesso: em 02 jul. 2017.
[11] Disponível em: <http://www.tveducacaofinanceira.com.br/>. Acesso em: 02 jul. 2017.

Com isso, verifica-se que se o indivíduo não optar por uma graduação em Economia ou áreas afins, terá pouco acesso à Educação Financeira, ou quase nenhum. É pertinente considerar que grande parte da população chega no máximo ao Ensino Médio e, nesse momento, o jovem tem toda a pressão da escolha acertada de uma profissão, a qual possa lhe trazer sucesso profissional, pessoal e financeiro. Verifica-se que estes jovens sentem-se despreparados para tal deliberação, pois esta vai ecoar pelo resto de suas vidas em um momento marcado pelo conflito entre presente e futuro. Assim, não surpreende o fato de estes sujeitos encontrarem dificuldades em lidar com suas finanças, ao mesmo tempo em que sentem o desafio de preparar melhor seus filhos. Acreditam, então, que será mais fácil para estes se orientados quando crianças sobre o mundo das finanças.

Corroborando com isso, encontra-se nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica argumento afirmando que muitos jovens, principalmente os oriundos de famílias pobres, vivenciam uma relação paradoxal com a escola, vivem ansiosos por uma escola que lhes proporcione chances mínimas de trabalho e que se relacione com suas experiências presentes; para esses, o trabalho não se situa no futuro, já fazendo parte de suas preocupações presentes.

> Entender o jovem do Ensino Médio dessa forma significa superar uma noção homogeneizante e naturalizada desse estudante, passando a percebê-lo como sujeito com valores, comportamentos, visões de mundo, interesses e necessidades singulares destacando sua ansiedade em relação ao futuro, sua necessidade de se fazer ouvir e sua valorização da sociabilidade. Além das vivências próprias da juventude, o jovem está inserido em processos que questionam e promovem sua preparação para assumir o papel de adulto, tanto no plano profissional quanto no social e no familiar (MEC, 2013).

Considerando, com isso, que a clientela que compõe o Ensino Médio, principalmente noturno, na maioria das vezes é de estudantes e trabalhadores, observa-se que grande parte da matemática encontrada na escola é desconexa da sua realidade. Talvez assuntos de seu cotidiano possam quebrar algumas barreiras e introduzir o indivíduo num mundo de descobertas a sua volta, que até então passou desapercebido, principalmente da sua vida financeira, tornando-se mais responsável, capaz de tomar decisões acerca do que quer para sua vida.

> O fato é que, indiretamente, o currículo escolar tem como objetivo preparar o cidadão para a vida. Ou, ao menos, deveria ter. Mas nosso arcaico currículo elaborado há décadas esqueceu-se de levar em consideração que o pobre trabalhador que cresceu numa economia também pobre precisa saber tanto sobre as armadilhas dos juros dos crediários quanto sobre os métodos para extrair as raízes de uma equação de terceiro grau (CERBASI, 2011).

Por conseguinte, urge que o currículo deva ter como principal objetivo preparar o indivíduo para a vida e, nesse sentido, tão importante quanto saber resolver uma equação ele precisa conhecer as armadilhas dos crediários e juros, saber como funcionam os bancos, orçamento e economia doméstica. Vê-se com isso que a escola não pode ficar alheia ao caos que a sociedade se meteu devido à má gestão de suas finanças, que geram a inadimplência de parte considerável da população. Deve oferecer em sua estrutura de conhecimento práticas de ensino humanizado, com atividades extracurriculares.

As mudanças são necessárias e exigem boa vontade por parte dos pais, professores e coordenadores. Assim como um professor de Ciências ou de Biologia ensina noções básicas sobre o funcionamento da vida e do nosso corpo, importantes para a sobrevivência, também são relevantes as informações de Educação Financeira, que podem ser ministradas por várias disciplinas com enfoques nas mais diversas áreas.

Todavia, no contexto nacional, tanto os Parâmetros Curriculares Nacionais[12] quanto a maioria das propostas curriculares das escolas são omissos no que tange à questão da Educação Financeira. Não está explicitado nestes documentos como esse conteúdo deva ser abordado no cotidiano escolar. A inserção da Educação Financeira no Ensino Fundamental e Médio, como conteúdo obrigatório da disciplina de Matemática, foi objeto de um Projeto de Lei[13] que tramitou na Câmara e no Senado entre 2009 e 2013, tendo sido, por fim, rejeitado. Não obstante, diversas escolas em todo o Brasil, públicas e particulares, já vêm ministrando o assunto, de forma obrigatória ou mesmo como tema extracurricular. Nesta linha de pensamento, a BNCC[14] definiu pela inclusão de tópicos de Educação Financeira no ensino regular, conforme já citado na Introdução deste trabalho. Assim sendo, defende-se aqui, então, a ideia de acrescentá-la como um tema transversal, podendo ser inserida em diversas disciplinas. Sabe-se que o professor de outra área não precisa necessariamente trabalhar conceitos matemáticos, mas pode abordar aspectos ou temas afins ou congruentes. Por exemplo: consumismo, responsabilidade social, endividamento, sustentabilidade, valores, etc.

1.6 A GERAÇÃO Z

Como se não bastasse o distanciamento apontado em relação aos conteúdos trabalhados em sala de aula, professores e escola têm ainda o desafio de trabalhar com uma geração com certas peculiaridades. Conhecidos como nativos digitais, a geração que nasceu no final da década de 90 e perdura até os dias atuais, a Geração Z (que vem da palavra Zapear), vem inserida em um contexto repleto de tecnologias. Convivem em ambientes nos quais mudam de um canal de TV para outro, acessam a internet e atendem ao telefone, quase tudo ao mesmo tempo. Não conseguem imaginar o mundo sem o celular e o computador; sua velocidade é a mesma da tecnologia e da informação, sendo essa última quase que imediata.

Segundo o Professor Dado Schneider[15], essa geração enxerga o mundo diferente. Sua

[12] Os PCN são diretrizes elaboradas pelo Governo Federal que orientam a educação, sendo separados por disciplina. Além da rede pública, a rede privada de ensino também adota os parâmetros, porém sem caráter obrigatório.

[13] Disponível em: <http://www25.senado.leg.br/web/atividade/materias/-/materia/93105>. Acesso em: 02 jul. 2017.

[14] A Base Nacional Comum Curricular é um conjunto de orientações que deverão nortear os currículos das escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, em todo o Brasil. A Base estabelecerá direitos e objetivos de aprendizagem, isto é, o que se considera indispensável que todo estudante saiba após completar a Educação Básica. Fará isso estabelecendo os conteúdos essenciais que deverão ser ensinados em todas as escolas, assim como as competências e as habilidades que deverão ser adquiridas pelos alunos. O *site* da BNCC é <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>.

[15] Graduado em Comunicação e Pós Graduado em Marketing pela UFRGS. Mestre e Doutor em Comunicação pela PUC/RS. É palestrante renomado.

relação com o tempo é outra, é online, a maneira como lidam com hierarquias e a autoridade, enfim, tudo é diferente para a geração deste milênio, e as organizações devem se inspirar nela. Ele estuda o comportamento dessa nova geração há anos.

A escola deve, com isso, reconhecer a oportunidade que esta geração lhe propicia, de poder utilizar-se destas tecnologias para melhor compreensão dos conteúdos curriculares. Foi-se o tempo em que quadro negro e giz eram os únicos referenciais que se tinha para trabalhar. Hoje uma gama de aparatos tecnológicos são disponibilizados para assessorar o profissional em sala de aula. Aliás, os jovens certamente sentem-se mais atraídos quando aprendem com o auxílio da tecnologia, tão presente em suas vidas. Na área da matemática, por exemplo, ao utilizar aplicativos como *GeoGebra*[16] e Excel[17], pode-se conseguir aproximar este aluno ultraconectado ao universo matemático.

Além disso, (CERBASI, 2011) aponta que algumas características marcantes dessa geração, do ponto de vista financeiro, são a precocidade com que surgem intenções empreendedoras, a ansiedade pela independência financeira e uma grande facilidade para pesquisar alternativas de preços e condições em *sites* especializados e redes sociais. O aprendizado dessa geração não só é mais rápido, como também mais pragmático, ou seja, focado no que é útil para as suas vidas.

De olho neste nicho de mercado, as próprias instituições financeiras e até mesmo empresas criaram aplicativos e programas que tentam nortear a cultura financeira no cidadão. Destarte, urge que a escola se adeque a esta nova realidade. É preciso ter claro que com a ajuda da tecnologia e da internet o professor pode compartilhar conteúdos, ebooks e artigos com seus alunos em tempo real durante a aula. Ou ainda, visando desenvolver uma maior consciência financeira do cidadão, enquanto explica o conteúdo em sala, o professor pode fornecer fontes mais detalhadas para seus alunos, oferecendo assim a possibilidade para que eles façam suas próprias pesquisas e tenham um conhecimento muito mais amplo da matéria.

Pode-se encontrar respaldo para este pensamento nas ideias de Paulo Freire, que incentiva o aumento do nível de autonomia nas aulas, tendo que adequar os conteúdos às necessidades e anseios da clientela educacional.

> O respeito à autonomia e à dignidade de cada um é um imperativo ético e não um favor que podemos ou não conceder uns aos outros. Precisamente porque éticos podemos desrespeitar a rigorosidade da ética e resvalar para a sua negação, por isso é imprescindível deixar claro que a possibilidade do desvio ético não pode receber outra designação senão a de transgressão. O professor que desrespeita a curiosidade do educando, o seu gosto estético, a sua inquietude, a sua linguagem, mais precisamente, a sua sintaxe e a sua prosódia; o professor que ironiza o aluno, que o minimiza, que manda que “ele se ponha em seu lugar” ao mais tênue sinal de sua rebeldia legítima, tanto quanto o professor que se exime do cumprimento de seu dever de propor limites à liberdade do aluno, que se furta ao dever de ensinar, de estar respeitosamente presente à experiência formadora do educando, transgride os princípios fundamentalmente éticos de nossa existência (FREIRE, 2016).

[16] Este aplicativo e diversos materiais relacionados a ele podem ser obtidos em <https://www.geogebra.org/>.
[17] Editor de planilhas produzido pela Microsoft.

1.7 EDUCAÇÃO FINANCEIRA NA UTFPR, CÂMPUS CURITIBA

No ano de 2010, durante o projeto de criação do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Câmpus Curitiba, foi levado em consideração a possibilidade de o ensino de Educação Financeira ser incluído na grade curricular da Educação Básica, na disciplina de Matemática. Na época, tramitava no Senado Federal um Projeto de Lei[18] nesse sentido, que foi arquivado em 2013. Com objetivo de proporcionar uma formação completa aos seus alunos e futuros docentes, o projeto do curso incluiu no oitavo período da Licenciatura, o último, a disciplina de Educação Financeira. Esta inclusão mostrou-se ser acertada, pois, atualmente, o tema passou a integrar a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), como citado na Introdução do presente trabalho.

No ano de 2015, a disciplina Educação Financeira do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR, Câmpus Curitiba, participou de um edital nacional para a concessão do Selo ENEF[19], marca que identifica que uma iniciativa de Educação Financeira está em conformidade com os objetivos e diretrizes da ENEF, bem como com os critérios estabelecidos pelo CONEF. O Selo ENEF, cujo logotipo está mostrado na Figura 2, foi concedido para 28 instituições, sendo que apenas duas delas, UTFPR e Universidade Federal de Itajubá, são de ensino. A concessão é válida para o quadriênio 2016-2019.

Figura 2 – Selo ENEF

[18] Disponível em: <http://www25.senado.leg.br/web/atividade/materias/-/materia/93105>. Acesso em: 02 jul. 2017. O Projeto alterava a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), para dispor que o tema Educação Financeira integrasse o currículo da disciplina Matemática.

[19] Disponível em: <http://www.vidaedinheiro.gov.br/pagina-27-selo_enef.html>. Acesso em: 01 jul. 2017.

O conteúdo programático desta disciplina contém os temas que serão desenvolvidos no Capítulo 2 deste trabalho e aborda, entre outras coisas, diversos tipos de aplicações financeiras, tais como Caderneta de Poupança, Tesouro Direto, Fundos de Investimento e Mercado de Ações, além de tratar, também, de questões como Previdência, Cidadania Fiscal, Código de Defesa do Consumidor e Juizados Especiais Cível e Federal. Pode-se dizer que a disciplina vai um pouco além dos limites da Educação Financeira, justamente onde esta tem alguma interface com a Educação Fiscal[20], a Educação Previdenciária[21] e a Educação Jurídica.

Destaca-se que o Departamento Acadêmico de Matemática da UTFPR, Câmpus Curitiba, possui uma Linha de Pesquisa intitulada Educação Financeira[22], dentro do Grupo de Pesquisa em Ensino de Matemática, cadastrado na Plataforma Lattes do CNPq. A presente dissertação e a referência (SANTOS, 2015) são resultados de trabalhos dentro desta linha.

[20] Disponível em: <http://idg.receita.fazenda.gov.br/acesso-rapido/direitos-e-deveres/educacao-fiscal>. Acesso em: 02 jul. 2017.

[21] Disponível em: <http://www.previdencia.gov.br/acesso-a-informacao/programas-e-acoes/pep-programa-de-educacao-previdenciaria/>. Acesso em: 02 jul. 2017.

[22] O *link* da linha é <dgp.cnpq.br/dgp/espelholinha/711349561041426231778>.

2 MATEMÁTICA FINANCEIRA DO DIA A DIA

Certamente, da Matemática do Ensino Médio, a Financeira é a que mais está presente no cotidiano de todos. Entender de inflação, porcentagem, compra parcelada, financiamento, taxas de juros, descontos, capital, montante, localizar o dinheiro no tempo, são exemplos de assuntos que despertam grande interesse, e apropriar-se desses conceitos e procedimentos torna-se cada vez mais indispensável para o exercício pleno da cidadania.

Neste sentido, sempre existiu e sempre existirá uma preocupação em atribuir um valor monetário hoje, e um dado valor monetário futuro. Observa-se aí a necessidade de ponderar a decisão de uma compra, financiamento, ou um investimento, e para isso há que se levar sempre em consideração as expectativas de ganhos e os riscos associados a cada operação. Assim, o ramo da matemática que norteia tal decisão é a financeira.

Este Capítulo apresenta conteúdos da Matemática Financeira que são e podem ser utilizados por cidadãos no seu dia a dia. Além do desenvolvimento teórico, onde definições, teoremas e demonstrações estão presentes, são propostas atividades na forma de exemplos como sugestão de roteiro a ser utilizado pelo professor em sala de aula. Situações econômicas cotidianas como pagamento de impostos (IPVA, IPTU, IRPF), financiamento de veículos, financiamento habitacional e cálculo de reserva financeira para uso futuro (previdência privada) são apresentadas. Pretende-se, com isso, dar um enfoque especial à Educação Financeira, bem como propor atividades de aprendizagem, estratégias de resolução de problemas práticos e a utilização de algumas ferramentas que propiciem momentos de saber, com o intuito de que sejam interessantes e pertinentes na vida dos indivíduos.

2.1 RAZÃO

Entender o conceito de razão é pressuposto para avançar em nossos estudos, uma vez que está embutida em vários outros conteúdos. O significado matemático de razão expressa uma relação entre duas grandezas por meio de um quociente. Geralmente se estabelece essa relação de valor ao se comparar os termos que compõem esse quociente. Matematicamente a razão é expressa na forma a/b, onde a é o antecedente, b é o consequente, e $b \neq 0$. A compreensão desse conceito é condição primordial para o entendimento de porcentagem e de proporção.

2.2 PORCENTAGEM

O cálculo da porcentagem é necessário em várias circunstâncias da vida de qualquer indivíduo, inclusive na escola, onde todas as disciplinas do Ensino Básico, em algum momento, tratarão do tema. Sendo um fator marcante na vida de todos, fazer com que o aluno domine esta importante operação é muito relevante em seu desenvolvimento escolar e pessoal. A porcentagem é utilizada quando se quer estabelecer uma relação entre quantidades. É uma razão especial que tem como denominador o número 100, ou seja, corresponde à parte considerada de um total de 100 partes. Normalmente usa-se o símbolo $\%$.

2.3 PROPORÇÃO

Dominar o conceito e as propriedades da proporção é essencial na resolução de alguns problemas. Algumas grandezas são desconhecidas, e, em muitas vezes, o meio de determiná-las é a proporção. Quando duas razões a/b e c/d têm o mesmo valor k, elas formam uma proporção, onde a e d são os extremos e b e c são os meios, sendo k a constante de proporcionalidade, valendo a propriedade fundamental de que "o produto dos meios é igual o produto dos extremos":

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \iff a.d = b.c.$$

Exemplo 01

Em tempos de crise, há uma mudança de hábitos: algumas marcas ficam mais atrativas que as outras. Isso se verifica ao realizar uma pesquisa de preços. Para comprar uma cesta básica, Ana pesquisou os preços em reais de alguns produtos de mesma marca em dois mercados A e B próximos um do outro, e obteve :

Produto/Mercado	A (em R$)	B (em R$)
5kg de trigo	11,99	9,80
5kg de arroz	14,20	14,59
5kg de açúcar	15,10	13,79
2kg de feijão	16,70	14,70
1kg de sal	1,25	1,59
1 litro de óleo de soja	3,79	3,65
2 litros de leite	7,60	6,98
500g de café	9,40	8,75
500g de bolacha	6,37	6,25

a) Qual o custo da cesta básica em cada mercado?

b) Qual a razão entre a soma dos preços de A e B?

c) Se Ana comprar somente os produtos mais baratos de cada mercado qual o percentual de economia ela terá em relação ao mercado mais caro?

d) Quanto Ana gastaria na compra de $5kg$ de feijão no mercado A?

e) A economia obtida com a pesquisa de preço é significativa? Justifique?

Resolução

a) No Mercado A, tem-se

$$11,99 + 14,20 + 15,10 + 16,70 + 1,25 + 3,79 + 7,60 + 9,40 + 6,37 = 86,40,$$

enquanto que no Mercado B tem-se

$$9,80 + 14,59 + 13,79 + 14,70 + 1,59 + 3,65 + 6,98 + 8,75 + 6,25 = 80,10.$$

b) Dividindo os valores obtidos anteriormente, obtém-se

$$\frac{86,40}{80,10} = \frac{96}{89}.$$

c) Escolhendo os menores valores de cada linha da tabela, tem-se

$$9,80 + 14,20 + 13,79 + 14,70 + 1,25 + 3,65 + 6,98 + 8,75 + 6,25 = 79,37.$$

O valor economizado é $86,40 - 79,37 = 7,03$ e o percentual de economia fica $\dfrac{7,03}{86,40} = 0,08136 = 8,13\%$.

d) Monta-se a proporção $\dfrac{2}{16,70} = \dfrac{5}{x}$, de onde obtém-se $2x = 83,50$. Logo, o custo seria $41,75$ reais.

e) A resposta é pessoal, no entanto caberia uma avaliação do ganho percentual em relação à inflação no momento.

Exemplo 02

Já foi comprovado através de estudos que boa parte das compras que se faz são por impulso. As razões disso são as estratégias de marketing dos vendedores aliadas à falta de conhecimento dos consumidores. Muitos fatores determinam que um produto entre em oferta, sendo o principal a falta de procura. Tomando cuidado com a qualidade e a real necessidade pode-se aproveitar a oportunidade. O mesmo tênis está sendo vendido em duas lojas do seguinte modo:

1) na primeira loja, sobre o preço de R$ 400,00 há um desconto de 8%;

2) na segunda loja, sobre o preço de R$ 420,00 há um desconto de 12%.

Qual dessas ofertas é mais conveniente para o cliente?

Resolução

O custo na primeira loja é dado por $400 \cdot (100 - 8)\% = 400 \cdot 92\% = 400 \cdot 0,92 = 368,00$, enquanto que na segunda loja dá $420 \cdot (100 - 12)\% = 420 \cdot 88\% = 420 \cdot 0,88 = 369,60$. Logo, sai mais barato comprar na primeira loja.

Exemplo 03

Há, em virtude da demanda crescente de economia de água, equipamentos e utensílios como, por exemplo, as bacias sanitárias ecológicas, que utilizam 6 litros de água por descarga em vez dos 15 litros utilizados por bacias sanitárias não ecológicas, conforme dados da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). Qual será a economia diária de água obtida por meio da substituição de uma bacia sanitária não ecológica, que gasta cerca de 60 litros por dia com a descarga, por uma bacia sanitária ecológica?[1]

Resolução

Monta-se a proporção $\dfrac{6}{15} = \dfrac{x}{60}$, de onde obtém-se $15x = 360$. Logo, $x = 24$. Assim conclui-se que as bacias ecológicas gastarão 24 litros de água, proporcionando uma economia de 36 litros diários.

Exemplo 04

Rodrigo comprou três cadernos iguais em uma promoção, na qual o segundo e o terceiro cadernos eram vendidos, respectivamente, com 20% e 40% de desconto sobre o preço do primeiro. No dia seguinte, terminada a promoção, Gustavo comprou três cadernos iguais aos de Rodrigo, todos sem desconto. Percentualmente, quanto Rodrigo pagou a menos que Gustavo?[2]

Resolução

Supondo que o preço normal do caderno é x reais, Gustavo pagou pelos três cadernos $3x$ reais.

Rodrigo pagou x reais pelo primeiro, $(100 - 20)\%x$ pelo segundo e $(100 - 40)\%x$ pelo terceiro, ou seja $x + 0,8x + 0,6x = 2,4x$ reais.

Então Rodrigo pagou $3x - 2,4x = 0,6x$ a menos que Gustavo. Sendo assim,

$$\frac{0,6x}{3x} = 0,2 = 20\%,$$

logo Rodrigo pagou 20% a menos que Gustavo.

2.4 NÚMEROS PROPORCIONAIS

Este assunto é de suma importância, principalmente para resolver problemas de regras de sociedade, onde se realiza uma divisão proporcional, direta ou inversa. Pode-se dizer que números reais não-nulos a, b, c, ..., n são diretamente proporcionais aos números a', b', c', ...,n', nessa ordem, se e somente se

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \cdots = \frac{n}{n'}.$$

Além disso,

1 Retirado do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) 2012.

2 Retirado da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) 2014.

$$\frac{a+b+c+\cdots+n}{a'+b'+c'+\cdots+n'}=k.$$

Diz-se que os números reais não-nulos a, b, c, ..., n são inversamente proporcionais aos números a', b', c', ..., n', nessa ordem, quando são diretamente proporcionais aos números $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$, $\frac{1}{c'}$, ..., $\frac{1}{n'}$, ou seja,

$$a.a' = b.b' = c.c' = ... = n.n'.$$

Exemplo 05

A cada dia no mercado surgem inovações e tecnologias, e acompanhar essa evolução tem um preço. Dois irmãos, Pedro e Paulo, compraram um game ano passado por R$ 1.000,00. Pedro contribuiu com R$ 400,00 e o restante Paulo pagou. Agora, com objetivo de comprar um novo que custa R$ 1.800,00, conseguiram vender o antigo game por R$ 450,00 e querem dividir essa quantia proporcionalmente com o que cada um contribuiu, para no novo game terem a mesma participação.

a) Quanto cada um receberá do antigo game?

b) Quanto cada um ainda terá de contribuir para que, no novo game cada um pague a mesma quantia?

c) Você considera financeiramente viável priorizar esse tipo de compra?

Resolução

a) Pedro e Paulo contribuíram na compra do game proporcionalmente na razão $\frac{400}{600}$ ou $\frac{2}{3}$, e isso significa que devem repartir os R$ 450,00 proporcionalmente a 2 e 3 respectivamente. Supondo que Pedro recebe a e que Paulo recebe b, tem-se

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{a+b}{2+3}=\frac{450}{5}.$$

Logo,

$$\frac{a}{2}=\frac{450}{5}\Rightarrow a=180$$

e

$$\frac{b}{3}=\frac{450}{5}\Rightarrow b=270.$$

b) Se no novo game cada um deve contribuir com a metade, ou seja, R$ 900,00, então Pedro deve ainda contribuir com $R\$\ 900,00 - R\$\ 180,00 = R\$\ 720,00$ e Paulo com $R\$\ 900,00 - R\$\ 270,00 = R\$\ 630,00$.

c) A resposta é pessoal, porém é importante considerar quais as prioridades de cada um e avaliar se vale a pena tal compra.

Exemplo 06

O livro “O Homem que Calculava” (TAHAN, 2013) traz uma passagem em que dois viajantes encontraram no deserto um xeique mercador que havia sido saqueado, do qual só foi poupada sua vida. Ao interrogar os dois viajantes se tinham algo para comer, um deles disse ter 3 pães, enquanto o outro 5 pães. O xeique sugeriu que juntassem os pães e fizessem uma sociedade, dividindo cada pão em três partes iguais, e que quando chegassem em Bagdá lhes daria oito moedas de ouro. Ao chegar ao destino sugeriu que o viajante que havia contribuído com 5 pães recebesse proporcionalmente 5 moedas de ouro e o outro recebesse 3 moedas. Porém, o viajante que tinha contribuído com 5 pães disse que dessa forma a divisão seria simples, mas não correta, e que ele deveria receber 7 moedas e seu amigo apenas uma moeda. Diante dos olhos questionadores dos companheiros, acabou provando posteriormente que estava matematicamente certo. Entretanto, afirmou em seguida que aos olhos de Deus a divisão não estava perfeita e tomando-as em suas mão dividiu igualmente, ou seja, quatro moedas para cada um.

a) Qual é a justificativa matemática da divisão correta proposta pelo viajante?

b) O que significa “ser correta aos olhos da Matemática mas não perfeita aos olhos de Deus”?

Resolução

a) Como os pães deveriam ser divididos por três pessoas, quem tinha 5 pães contribuiu com $\frac{15}{3}$ de pães, enquanto o outro, o dos 3 pães, contribuiu com $\frac{9}{3}$. Juntando os dois, $\frac{15}{3}+\frac{9}{3}$, tem-se $\frac{24}{3}$, que foi dividido igualmente para três pessoas, cabendo a cada um $\frac{24}{3}:3$, ou seja, $\frac{8}{3}$.

Sendo assim, quem tinha 5 pães participou com 15 pedaços de $\frac{1}{3}$, comeu 8 pedaços e contribuiu com 7 pedaços para o xeique; já o outro que tinha 3 pães participou com 9 pedaços de $\frac{1}{3}$, comeu 8 e contribuiu com um pedaço para o xeique.

b) A ideia é motivar o aluno a refletir, com base em seus valores morais, a diferença entre a justiça dos homens e a justiça de Deus.

2.5 JUROS

Estudar juros é de extrema relevância na vida de qualquer pessoa, pois a qualquer momento pode-se precisar adquirir um bem, pagar aluguel, ou fazer um investimento, e nem sempre se dispõe do valor necessário para adquiri-lo, o que pode acarretar em uma cobrança extra sobre o valor do bem: o juro. Então, juro é a remuneração que um indivíduo paga a outro por lhe ceder por certo tempo parte do seu capital. É, portanto, a forma de o devedor recompensar o dono do capital pela renúncia a seu poder de compra com o dinheiro emprestado. Quando alguém usa um imóvel ou um bem que não é seu, paga aluguel, quando toma dinheiro emprestado paga juros.

Evite pagar juros mais altos do que aqueles que você recebe de seus investimen-

> tos. Ou se aceitar pagar faça-o consciente dos custos, e de que está assumindo esses custos em função da falta de planejamento, ou por estar dando ao dinheiro tomado maior utilidade do que daria se poupasse (CERBASI, 2016).

Nesse sentido, juro deve ser entendido como sendo o custo do crédito ou a remuneração do capital aplicado. Isto é, o juro é o pagamento pelo uso de um bem ou do dinheiro alheio em um determinado período de tempo. O capital ou principal é a quantia inicial disponível para a transação econômica.

Outro termo muito utilizado é o montante, que é o capital acrescido dos juros em um certo período. A taxa de juros é fixada no mercado de capitais, e a mesma é dada pela divisão entre os juros recebidos ao final de um certo período de tempo, e o capital inicialmente aplicado.

2.5.1 JUROS SIMPLES

A área de aplicação dos juros simples concentra-se, basicamente, nas operações financeiras ativas e passivas de curto prazo. No critério linear, os juros incidem unicamente sobre o principal e geram, em consequência, remunerações diretamente proporcionais ao capital e ao prazo envolvidos na operação (ASSAF-NETO, 2014).

O regime de juros será simples quando o percentual de juros incidir apenas sobre o capital (valor principal). Sobre os juros gerados a cada período não incidem novos juros. Para obter juros simples (j) de um capital (C) a uma taxa de juros (i), em um período de tempo (t), tem-se

$$j = C \cdot i \cdot t.$$

Para obter o montante (M) soma-se o capital com os juros:

$$M = C + j.$$

A tabela a seguir ilustra a situação.

Período	Capital	Juros Acumulados	Montante
1	C	Ci	$M_1 = C + Ci = C(1 + i)$
2	C	$2Ci$	$M_2 = C + 2Ci = C(1 + 2i)$
3	C	$3Ci$	$M_3 = C + 3Ci = C(1 + 3i)$
t	C	tCi	$M_t = C + tCi = C(1 + ti)$

Exemplo 07

Enquanto algumas pessoas pagam pelo aluguel de um bem, outras veem nisso a oportunidade de ganhar com o mesmo. Um capital de R$ 1.500,00 é emprestado a uma taxa de juros simples de 1,5% ao mês. Qual o valor do montante a receber após um semestre?

Resolução

Aplicando a fórmula do montante, com $C = R\$\ 1.500,00$, $j = 1,5\%$ e $t = 6$, tem-se: $M_6 = 1.500(1 + 6 \cdot 0,015) = 1.500(1 + 0,09) = 1.500(1,09) \Rightarrow M_6 = R\$\ 1.635,00$.

Exemplo 08

Gastar menos do que ganha e saber investir as sobras pode ser um primeiro passo para tornar-se saudável financeiramente. Um capital de R$ 600,00, aplicado a taxa de juros simples de 20% ao ano, deve ficar aplicado durante quanto tempo para atingir um montante de R$ 1.080,00?

Resolução

Basta aplicar a fórmula do montante, com $C = R\$\ 600,00$, $j = 20\%$ e $M = R\$\ 1.080,00$: $M_t = 600(1 + t \cdot 0,20) = 1.080 \Rightarrow 120t = 480 \Rightarrow t = 4$ anos.

2.5.2 JUROS SIMPLES E FUNÇÃO AFIM

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *afim* quando é da forma $f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais. Quando $b = 0$, chama-se *linear*.

Como no sistema de juros simples os juros são obtidos em função do tempo de aplicação, a relação entre juros simples (j) e o tempo (t) é uma função linear, com $a = Ci$. Por outro lado, o montante (M) em relação ao tempo é uma função afim, com $a = Ci$ e $b = C$:

$$j(t) = Cit \qquad \text{e} \qquad M(t) = Cit + C.$$

Por questão de rigor matemático, vale aqui observar que, quando se diz que estas funções são afins, se está levando em conta apenas as fórmulas que as definem, uma vez que o domínio de uma função afim é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e o domínio das funções Juros Simples e Montante é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Exemplo 09

Um capital de R$ 1.500,00 é aplicado a uma taxa de juros simples de 20% ao ano.

a) Escrever a função que determina o juro em função do tempo e representá-la graficamente.

b) Escrever a função que determina o montante em função do tempo e representá-la graficamente.

Resolução

a) Como $j(t) = Cit$, $C = 1.500,00$ e $i = 20\%$, obtém-se $j(t) = 300t$.

b) Como $M(t) = Cit + C$, $C = 1.500,00$ e $i = 20\%$, obtém-se $M(t) = 300t + 1.500$.

A Figura 3, feita no *GeoGebra*, mostra as representações gráficas destas funções.

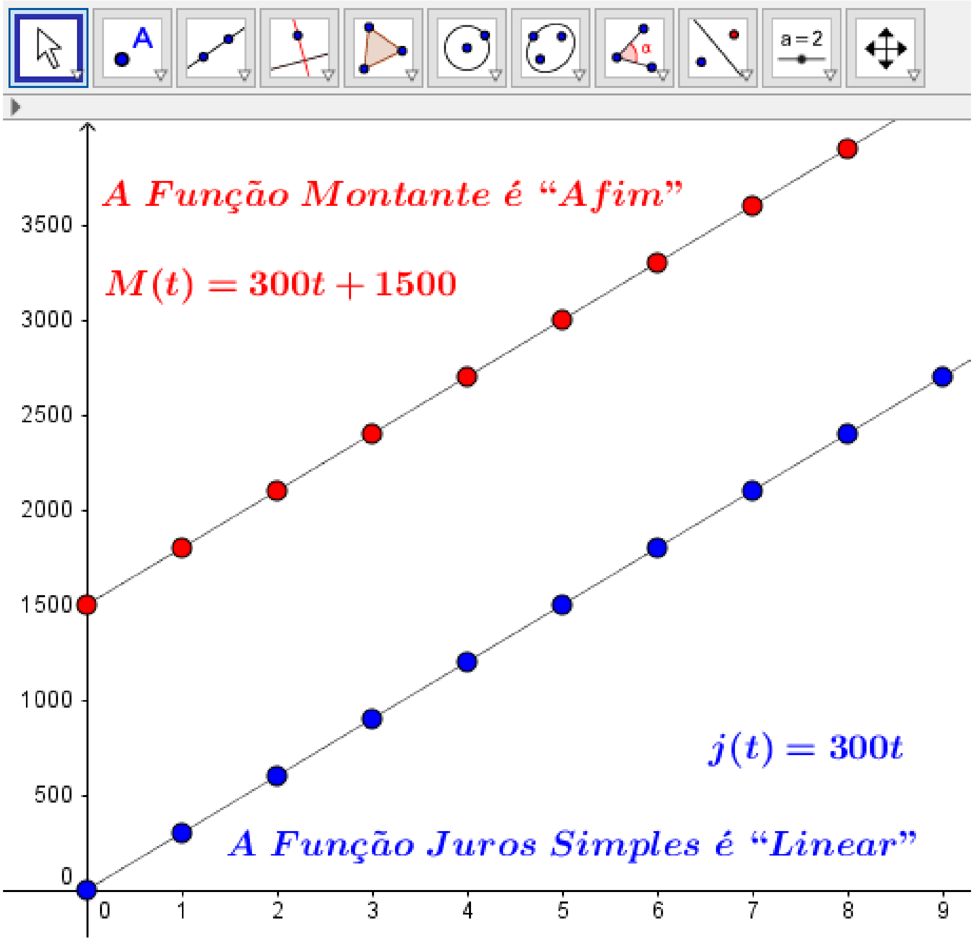


Figura 3 – Juros Simples e Função Afim

2.5.3 JUROS SIMPLES E PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Uma *Progressão Aritmética* (PA) é uma sequência numérica, onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo anterior adicionado a uma constante chamada razão. A sequência de termos formada pelo capital inicial e os montantes nos próximos períodos formam, nessa ordem, uma Progressão Aritmética, cuja razão é o juro obtido em cada período $(C, M_1, M_2, M_3, ...)$.

Exemplo 10

Um jovem trabalhador percebe que está gastando tudo o que ganha. Após conversar com seu pai, decide que vai poupar dinheiro. Combina com o pai que lhe entregará a quantia de R$ 250,00 todo dia 10 de cada mês. Então, como incentivo, seu pai lhe promete pagar juros simples de 2% ao mês. Iniciados os depósitos em 10 de janeiro e tendo cumprido integralmente o trato, qual o montante obtido no dia 10 de dezembro do mesmo ano com tais economias?

Resolução

Nessas condições, percebe-se que os R$ 250,00 do mês de dezembro não terão juros, do mês de novembro terão um mês de juros, de outubro serão 2 meses de juros e assim sucessivamente, até o valor de janeiro que terá 11 meses de juros. Por sua parte, o pai irá pagar em cada mês um acréscimo de $250 \cdot 2\% \ = 5,00$, que será a razão da PA (250, 255, 260, 265, ...,305), referente aos meses (dezembro, novembro, outubro, setembro, ..., janeiro).

Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PA (IEZZI, 2004),

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n,$$

obtém-se

$$S_{12} = \frac{(250 + 305)}{2} \cdot 12 = 555 \cdot 6 = 3.330.$$

Assim, em 10 de dezembro o jovem terá conseguido acumular um montante de R$ 3.330,00.

2.5.4 JUROS COMPOSTOS

Os juros compostos têm grande aplicação prática em operações financeiras de médio e longo prazos. Nesse critério de capitalização os juros incidem sempre sobre o saldo acumulado e ocorre dessa forma juros sobre juros, ou seja, no regime de juros compostos o juro gerado em determinada operação é adicionado ao principal, e serve de base para o cálculo de juros para o período posterior. A tabela a seguir ilustra a situação.

Período	Capital	Juros no Período	Montante
1	C	Ci	$M_1 = C + Ci = C(1+i)$
2	M_1	$M_1 \cdot i$	$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1(1+i) = C(1+i)^2$
3	M_2	$M_2 \cdot i$	$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2(1+i) = C(1+i)^3$
t	M_{t-1}	$M_{t-1} \cdot i$	$M_t = C(1+i)^t$

Exemplo 11

As instituições financeiras oferecem cada vez mais informações e serviços visando disputar a preferência de seus clientes, de um mercado rentável que irá multiplicar suas economias. Uma pessoa que tem R$ 2.000,00 e deseja aplicar em um banco a juros compostos de 0,8% ao mês, no final de um ano verá seu dinheiro atingir que quantia?

Resolução

Aplicando a fórmula do montante, com $C = R\$\ 2.000,00$, $j = 0,8\%$ e $t = 12$, tem-se: $M_{12} = 2.000(1 + 0,008)^{12} = 2.000(1,008)^{12} = 2.000(1,10) \Rightarrow M_{12} = R\$\ 2.200,00.$

2.5.5 JUROS COMPOSTOS E FUNÇÃO EXPONENCIAL

Uma função $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ chama-se *exponencial* quando é da forma $f(x) = a^x$, onde a base a é um número real positivo e diferente de 1.

Como no sistema de juros compostos o montante é obtido em função do tempo, conhecidos capital e taxa de juros, tem-se uma variação do tipo exponencial, na qual $a = 1 + i$:

$$M(t) = C(1 + i)^t.$$

Observa-se que o domínio de uma função exponencial é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ enquanto que o domínio da função Montante é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Exemplo 12

Um capital de R$ 1.000,00 é aplicado a uma taxa de juros compostos de 20% ao ano. Construir o gráfico que relaciona o montante ao tempo em anos.

Resolução

Neste caso, a fórmula do montante é dada por $M(t) = 1000(1 + 0,2)^t$. A Figura 4, construída no *GeoGebra*, ilustra o comportamento exponencial .

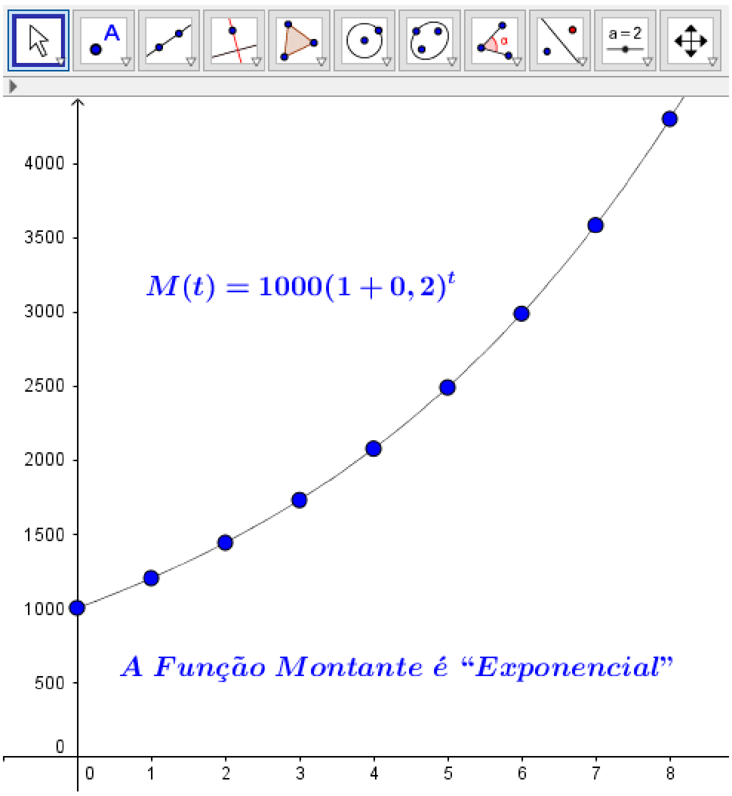


Figura 4 – Juros Compostos e Função Exponencial

2.5.6 JUROS COMPOSTOS E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Uma *Progressão Geométrica* (PG) é uma sequência numérica, onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo anterior multiplicado por uma constante chamada razão. A sequência de termos formada pelo capital inicial e os montantes nos próximos períodos a juros compostos formam, nessa ordem, uma Progressão Geométrica, cuja razão é $1 + i$.

Exemplo 13

Buscando realizar seu sonho, Ana encontrou em seu banco um Fundo de Investimento que, na data de adesão e na mesma data dos meses subsequentes, transfere da sua Conta Corrente para o Fundo a quantia de R$ 300,00, valor que cabe dentro do seu orçamento. A vigência do Fundo é de 2 anos e o capital fica submetido a juros compostos de 1% ao mês, com resgate total do montante ao final do período, na data de aniversário. Obviamente, não existe débito no 24º mês a partir da adesão, pois esta é a data de resgate do Fundo. Qual será o valor desse resgate caso Ana venha a optar por este investimento?

Resolução

O primeiro depósito, na data de adesão ao fundo, renderá durante 24 meses, o segundo, durante 23 meses, e assim sucessivamente, até o 24º depósito (que ocorrerá ao final do 23º mês) que renderá apenas durante um mês.

Desta forma, a sequência dos valores que cada depósito produz no final do período é uma PG: $(300.1,01; 300.1,01^2; ...; 300.1,01^{24})$.

Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PG (IEZZI, 2004),

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

obtém-se

$$S_{24} = 300 \cdot 1,01 \cdot \frac{1,01^{24} - 1}{1,01 - 1} = 8.172,96.$$

Assim, no final de 24 meses, Ana terá conseguido acumular um montante de R$ 8.172,96.

2.5.7 JUROS SIMPLES X JUROS COMPOSTOS

Embora os juros compostos sejam mais utilizados nas operações que se realizam diariamente, como compras a médio e longo prazo, empréstimos bancários, cartão de crédito e outras, os juros simples são usados em processos de curto prazo, como descontos simples ou acréscimo sobre uma dívida que foi paga com alguns dias de atraso. Geralmente esses juros são pagos no final do período. No gráfico da Figura 5, construído no *GeoGebra*, observa-se que quando o período está entre 0 e 1 (pode-se pensar em dias do mês), o juro simples é maior que o composto. No período 1 ambos são iguais e, a partir daí, juros compostos são mais rentáveis, e por isso são mais usados que os juros simples. Por questões de clareza didática, os gráficos foram construídos com as linhas cheias em vez de pontos.

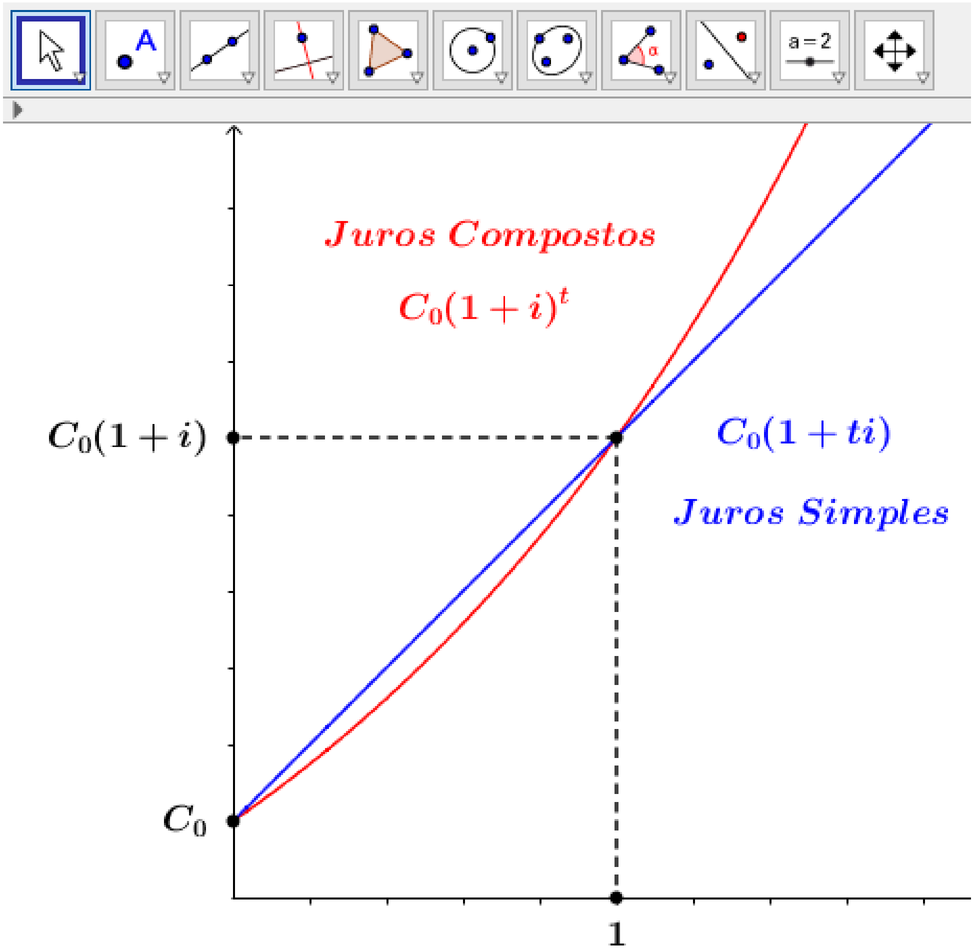


Figura 5 – Juros Simples e Juros Compostos

Exemplo 14

A Prefeitura Municipal de Fraiburgo-SC efetua cobrança do IPTU 2017 (Imposto Predial e Territorial Urbano [3]) oferecendo ao cidadão três opções de pagamento diferentes:

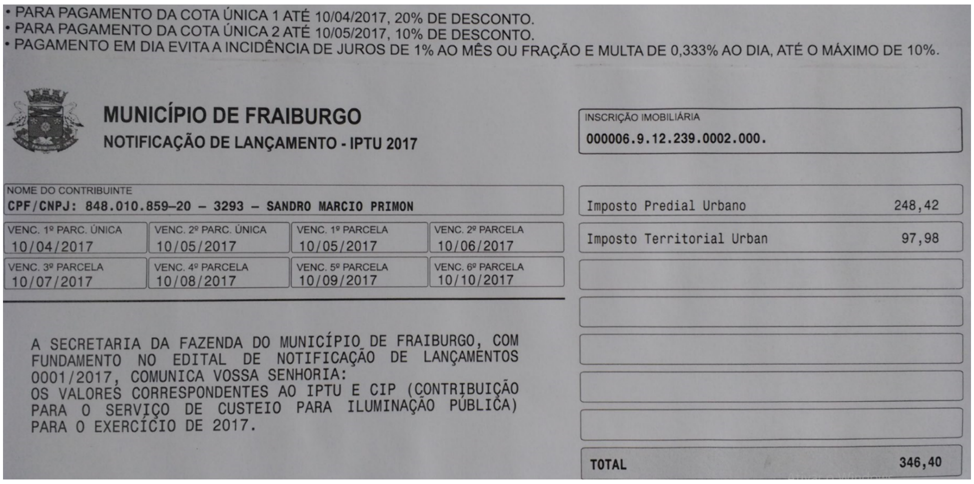
1) Para pagamento em cota única até 10 de abril, desconto de 20%;

2) Para pagamento em cota única até 10 de maio, desconto de 10%;

3) Para pagamento em 6 prestações mensais iguais, começando em 10 de maio, não há desconto.

Supondo que o titular do carnê da Figura 6 tenha recursos para pagar em qualquer uma das opções, qual é a mais viável economicamente, se seu dinheiro está aplicado com rendimento de 1% ao mês?

[3] Tributo que incide sobre a propriedade imobiliária, incluindo todos os tipos de imóveis, como casas, apartamentos, prédios comerciais e industriais, terrenos e chácaras de recreio.



• PARA PAGAMENTO DA COTA ÚNICA 1 ATÉ 10/04/2017, 20% DE DESCONTO.
• PARA PAGAMENTO DA COTA ÚNICA 2 ATÉ 10/05/2017, 10% DE DESCONTO.
• PAGAMENTO EM DIA EVITA A INCIDÊNCIA DE JUROS DE 1% AO MÊS OU FRAÇÃO E MULTA DE 0,333% AO DIA, ATÉ O MÁXIMO DE 10%.

MUNICÍPIO DE FRAIBURGO
NOTIFICAÇÃO DE LANÇAMENTO - IPTU 2017

INSCRIÇÃO IMOBILIÁRIA
000006.9.12.239.0002.000.

NOME DO CONTRIBUINTE
CPF/CNPJ: 848.010.859-20 - 3293 - SANDRO MARCIO PRIMON

VENC. 1º PARC. ÚNICA	VENC. 2º PARC. ÚNICA	VENC. 1º PARCELA	VENC. 2º PARCELA
10/04/2017	10/05/2017	10/05/2017	10/06/2017
VENC. 3º PARCELA	VENC. 4º PARCELA	VENC. 5º PARCELA	VENC. 6º PARCELA
10/07/2017	10/08/2017	10/09/2017	10/10/2017

Imposto Predial Urbano	248,42
Imposto Territorial Urban	97,98
TOTAL	346,40

A SECRETARIA DA FAZENDA DO MUNICÍPIO DE FRAIBURGO, COM FUNDAMENTO NO EDITAL DE NOTIFICAÇÃO DE LANÇAMENTOS 0001/2017, COMUNICA VOSSA SENHORIA: OS VALORES CORRESPONDENTES AO IPTU E CIP (CONTRIBUIÇÃO PARA O SERVIÇO DE CUSTEIO PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA) PARA O EXERCÍCIO DE 2017.

Figura 6 – IPTU 2017 de Fraiburgo

Fonte: Carnê do Contribuinte

Resolução

Para comparar as opções, deve-se levar esses valores ao mesmo período (será considerado o mês de maio).

Opção 1: Em abril o valor a ser pago é R$ 346,40, com desconto de 20%, que dá R$ 277,12. Como seu dinheiro vale 1% ao mês, em maio tem-se acréscimo de R$ 2,77, resultando em R$ 279,89.

Opção 2: Em maio o valor a ser pago é R$ 346,40, com desconto de 10%, que dá R$ 311,76.

Opção 3: Em maio o valor a ser pago é R$ 346,40 dividido por 6, o que dá R$ 57,73. Trazendo cada parcela dos próximos meses para maio, e somando-as, tem-se:

$$57,73 + \frac{57,73}{1,01} + \frac{57,73}{1,01^2} + \frac{57,73}{1,01^3} + \frac{57,73}{1,01^4} + \frac{57,73}{1,01^5} =$$

$$= 57,73 + 57,16 + 56,59 + 56,03 + 55,48 + 54,93 = R\$\,337,92.$$

Comparando os resultados, conclui-se que a Opção 1 representa uma economia considerável em relação às outras duas, e portanto é a mais vantajosa.

2.6 TAXAS EQUIVALENTES

São taxas que geram montantes idênticos quando capitalizados sobre o mesmo capital e prazo. Por exemplo,10% ao semestre e 21% ao ano são equivalentes por produzirem no mesmo prazo montante igual, ou seja, é indiferente investir um capital a 10% ao semestre ou 21% ao ano.

Se a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo t é igual a i, e a taxa de juros relativamente a n períodos de tempos t é I, tem-se que

$$1 + I = (1 + i)^n.$$

Para provar a afirmação anterior, seja C o capital sobre o qual incidirão juros. Após um período de tempo T, o montante será $C(1 + I)$. Sendo o período T equivalente a n períodos de tempos iguais a t, $T = nt$, o valor do montante também será igual a $C(1 + i)^n$. Logo,

$$C(1 + I) = C(1 + i)^n \Rightarrow 1 + I = (1 + i)^n.$$

Exemplo 15

Cada vez mais se constata a substituição das moedas e cédulas pelos cartões de crédito, que embora não sejam dinheiro real, manifestam a intenção de pagamento do consumidor. Muitas instituições financeiras oferecem o serviço, porém o consumidor deve tomar cuidado com algumas armadilhas do mesmo. Atenção com prorrogação do pagamento e, principalmente, com as taxas de juros praticadas que, normalmente quando comparadas com as taxas normais de mercado, são abusivas. Se uma operadora oferece esses serviços de crédito a 15% ao mês, qual é a taxa de juros acumulada em um ano?

Resolução

Para se chegar ao valor pretendido, aplica-se a relação de equivalência de juros, ou seja,

$$1 + I = (1 + 0,15)^{12} = (1,15)^{12} = 5,35 \Rightarrow I = 4,35.$$

Portanto, os juros acumulados no ano são de aproximadamente 435%.

Exemplo 16

Suellen investe seu dinheiro a juros de 9% ao ano com capitalização mensal. Qual a taxa anual de juros a qual está investido o capital de Suellen?

Resolução

A taxa de 9% ao ano é chamada *Taxa Nominal*, significando que, na prática, a taxa mensal a ser aplicado nos cálculos é de $9\%/12 = 0,75\%$. Logo,

$$1 + I = (1 + 0,0075)^{12} = (1,0075)^{12} = 1,0938 \Rightarrow I = 0,0938.$$

Este resultado mostra que o dinheiro de Suellen está aplicado à taxa de aproximadamente 9,38% ao ano, valor conhecido como *Taxa Efetiva*, que é a taxa real praticada.

2.7 EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS

Esse conteúdo permite desmistificar a ideia de que a compra à vista é sempre mais rentável do que a prazo. Isso nem sempre é verdade pois depende de alguns fatores como, por exemplo, quanto vale seu dinheiro em tempos distintos e as taxa de juros aplicadas. Isso pode ser decisivo na hora de comparar as opções em uma compra ou formas de pagamento.

O valor financeiro de uma quantia depende da época à qual ela está referida. Uma quantia hoje igual a C, chamada *Valor Atual* (ou *Valor Presente*) será transformada, depois de n períodos de tempo, em uma quantia $C(1+i)^n$, chamada *Valor Futuro*, quando se tem uma taxa i no período. Assim, a relação entre o Valor Atual A e o Valor Futuro F é dada por

$$F = A(1+i)^n.$$

Exemplo 17

Pedro recebeu de uma loja um panfleto de ofertas que apresenta o notebook que ele quer comprar, com duas opções de pagamento, de acordo com a Figura 7:

1) À vista por R$ 2.349,00;

2) A prazo, sem entrada e 16 parcelas fixas de R$ 234,90.

Figura 7 – Oferta de Notebook

Fonte: Panfleto de Publicidade da Loja

Se Pedro tem seu dinheiro aplicado a uma taxa de 1% ao mês, qual das opções é mais vantajosa nessa compra? E se o dinheiro estivesse aplicado a 7% ao mês?

Resolução

Para resolver esse problema, pode-se trazer o valor de cada uma das 16 parcelas para o tempo da compra e comparar sua soma ao do preço à vista.

No caso do dinheiro aplicado a 1%, tem-se:

$$\frac{234,90}{1,01} + \frac{234,90}{(1,01)^2} + \frac{234,90}{(1,01)^3} + \cdots + \frac{234,90}{(1,01)^{16}} = R\$\ 3.493,09.$$

Como este valor é maior do que o preço à vista, seria recomendável retirar o dinheiro aplicado e comprar o notebook à vista.

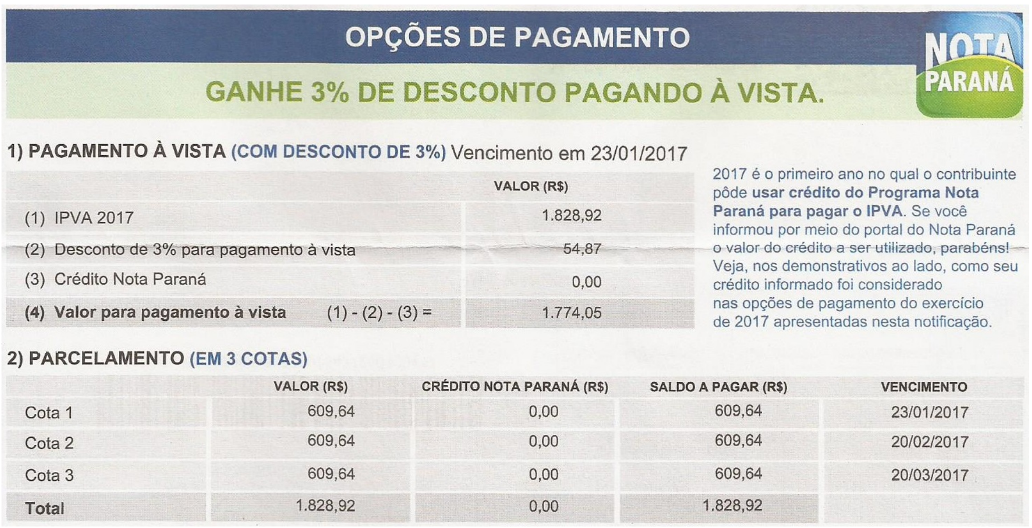
Por outro lado, no caso do dinheiro aplicado a 7% , tem-se:

$$\frac{234,90}{1,07} + \frac{234,9}{(1,07)^2} + \frac{234,90}{(1,07)^3} + \cdots + \frac{234,90}{(1,07)^{16}} = R\$\ 2.219,01.$$

Como este valor é menor do que o preço à vista, seria vantajoso deixar o dinheiro aplicado e comprar o notebook a prazo.

Exemplo 18

O pagamento do IPVA (Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores[4]) do Estado do Paraná pode ser feito de duas formas distintas, à vista com desconto de 3% ou parcelado em três vezes sem juros, conforme exemplificado no extrato de um cidadão mostrado na Figura 8. Qual é a taxa de juro aplicada no parcelamento? Caso o cidadão possuísse a quantia para liquidar todo o imposto, qual das duas opções seria mais vantajosa?



OPÇÕES DE PAGAMENTO

NOTA PARANÁ

GANHE 3% DE DESCONTO PAGANDO À VISTA.

1) PAGAMENTO À VISTA (COM DESCONTO DE 3%) Vencimento em 23/01/2017

		VALOR (R$)
(1) IPVA 2017		1.828,92
(2) Desconto de 3% para pagamento à vista		54,87
(3) Crédito Nota Paraná		0,00
(4) Valor para pagamento à vista	(1) - (2) - (3) =	1.774,05

2017 é o primeiro ano no qual o contribuinte pôde **usar crédito do Programa Nota Paraná para pagar o IPVA**. Se você informou por meio do portal do Nota Paraná o valor do crédito a ser utilizado, parabéns! Veja, nos demonstrativos ao lado, como seu crédito informado foi considerado nas opções de pagamento do exercício de 2017 apresentadas nesta notificação.

2) PARCELAMENTO (EM 3 COTAS)

	VALOR (R$)	CRÉDITO NOTA PARANÁ (R$)	SALDO A PAGAR (R$)	VENCIMENTO
Cota 1	609,64	0,00	609,64	23/01/2017
Cota 2	609,64	0,00	609,64	20/02/2017
Cota 3	609,64	0,00	609,64	20/03/2017
Total	1.828,92	0,00	1.828,92	

Figura 8 – IPVA 2017 do Estado do Paraná

[4] Tributo a ser pago todo ano pelo proprietário, sendo calculado com base no valor do veículo. Do total arrecadado, 50% vai para o governo estadual e os outros 50% para o município no qual o veículo foi emplacado.

Resolução

O pagamento em cota única no dia 23/01/2017 implica desembolsar todo o valor com desconto de 3%, isto é, R$ 1.774,05, enquanto que a opção de parcelar em três vezes de R$ 609,64 implica pagar a primeira parcela também em 23/01/2017. Comparando esses valores na data de 23/01/2017, tem-se:

$$1.774,05 = 609,64 + \frac{609,64}{1+i} + \frac{609,64}{(1+i)^2}.$$

Logo,

$$(1.774,05 - 609,64)(1+i)^2 = 609,64(1+i) + 609,64$$

$$\Rightarrow (1.164,41)(1+i)^2 - 609,64(1+i) - 609,64 = 0.$$

Resolvendo esta equação do 2º grau em $(1+i)$, encontra-se $1+i = 1,0312547$ e, portanto, $i = 3,12547\%$.

Possuindo a quantia para realizar o pagamento à vista, a opção matematicamente mais vantajosa dependeria da taxa j à qual o cidadão consegue fazer seu dinheiro render. Se $j > i$, seria melhor pagar parcelado, deixando o dinheiro das parcelar render, enquanto que se $j < i$, seria melhor pagar à vista.

Atualmente, aplicações financeiras que tenham taxas de rendimento de 3% ao mês são incomuns e/ou de alto risco. Desta forma, pode-se considerar que o desconto dado para o pagamento do IPVA à vista é excelente.

No Exemplo 21 a ser apresentado mais adiante, o problema de calcular a taxa de juro de um financiamento será retomado, porém em um contexto onde sua determinação envolve a resolução de uma equação polinomial de grau superior a 2.

Exemplo 19

Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

a) Opção 1: Pagar à vista, por R$ 55.000,00.

b) Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 30.000,00, e mais uma prestação de R$ 26.000,00 para dali 6 meses.

c) Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 20.000,00, mais uma prestação de R$ 20.000,00, para dali 6 meses e outra de R$ 18.000,00 para dali a 12 meses da data da compra.

d) Opção 4: Pagar a prazo dando uma entrada de R$ 15.000,00 e o restante em um ano da data da compra, pagando R$ 39.000,00.

e) Opção 5: Pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R$ 60.000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, qual opção Arthur concluiu que era mais vantajosa?[5]

Resolução

A melhor maneira de responder a esta pergunta é visualizar todos os valores no mesmo tempo, levando em conta que o dinheiro de Arthur pode render 10% ao semestre. No instante do momento da compra, tem-se:

Opção 1 $\Rightarrow$ R$ 55.000,00

Opção 2 $\Rightarrow$ 30.000,00 + $\dfrac{26.000,00}{1,1}$ = R$ 53.636,36

Opção 3 $\Rightarrow$ 20.000,00 + $\dfrac{20.000,00}{1,1}$ + $\dfrac{18.000,00}{1,1^2}$ = R$ 54.710,74

Opção 4 $\Rightarrow$ 15.000,00 + $\dfrac{39.000,00}{1,1^2}$ = R$ 47.231,40

Opção 5 $\Rightarrow$ $\dfrac{60.000,00}{1,1^2}$ = R$ 49.586,77

Comparando os valores, conclui-se que a Opção 4 seria a mais vantajosa.

2.8 SÉRIES UNIFORMES

Um conjunto de quantias (chamadas usualmente de pagamentos, parcelas ou termos), referidas a épocas diversas, é chamada de série, anuidade ou renda. Se esses pagamentos forem iguais e igualmente espaçados no tempo, a série é dita uniforme. Pode-se dizer que é a série que exibe o retorno do capital em pagamentos iguais em intervalos constantes, utilizada em situações de empréstimos e aquisição de bens. O valor A de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, uma unidade de tempo antes do primeiro pagamento, sendo i a taxa de juros, é dado por

$$A = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n},$$

que é a soma dos n termos de uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{(1+i)}$.

Aplicando a fórmula da soma dos termos de uma PG, chega-se a

$$A = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

conhecida como fórmula do Valor Atual. Esta igualdade é uma das mais importantes da Matemática Financeira e pode ser usada, por exemplo, para calcular a prestação de um financiamento.

[5] Retirado do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) 2012.

Analogamente, o valor F de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, na época do último pagamento, sendo i a taxa de juros, é dado por

$$F = P + P(1+i) + P(1+i)^2 + P(1+i)^3 + \cdots + P(1+i)^{n-1},$$

que é a soma dos n termos de uma progressão geométrica de razão $(1+i)$.

Aplicando a fórmula da soma dos termos de uma PG, chega-se a

$$F = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

conhecida como fórmula do Valor Futuro. Juntamente com a fórmula do Valor Atual, esta igualdade é um dos principais resultados da Matemática Financeira, pois pode ser utilizada para estimar uma quantia a ser acumulada no futuro a partir de depósitos regulares realizados em determinado período.

Note-se que

$$F = A(1+i)^n,$$

como já anunciado anteriormente.

Exemplo 20

Na medida do possível, deve-se evitar compras parceladas, pois na maioria das vezes possuem taxas muito altas, acima das aplicadas pelo mercado. Maria comprou um aparelho em 10 parcelas iguais de R$ 200,00, sem entrada. Sabendo que a taxa de juros cobrada pela loja é 2% ao mês, quanto Maria pagaria à vista por esse aparelho?

Resolução

Aplicando a fórmula do Valor Atual, com $n = 10$, $P = 200$ e $i = 2\%$, tem-se

$$A = 200 \cdot \frac{1 - (1,02^{-10})}{0,02} = R\$ \; 1.796,52.$$

Exemplo 21

A Figura 9 mostra uma situação frequente nas publicidades de produtos e serviços, onde se anuncia que o preço à vista pode ser parcelado sem juros. Trata-se de uma viagem de São Paulo a Madri, na Espanha, que custa R$ 2.433,00 em até 5 pagamentos sem juros. Na internet, é usual esta modalidade de vendas para parcelamento no cartão de crédito. Muitas vezes, o cliente gostaria de pagar à vista com desconto, porém a opção é pagar o mesmo valor que o do parcelamento. Considerando que do ponto de vista financeiro todo parcelamento deve embutir juros, qual deveria ser o preço à vista da viagem a Madri, para uma taxa de juro de 1,6% ao mês?

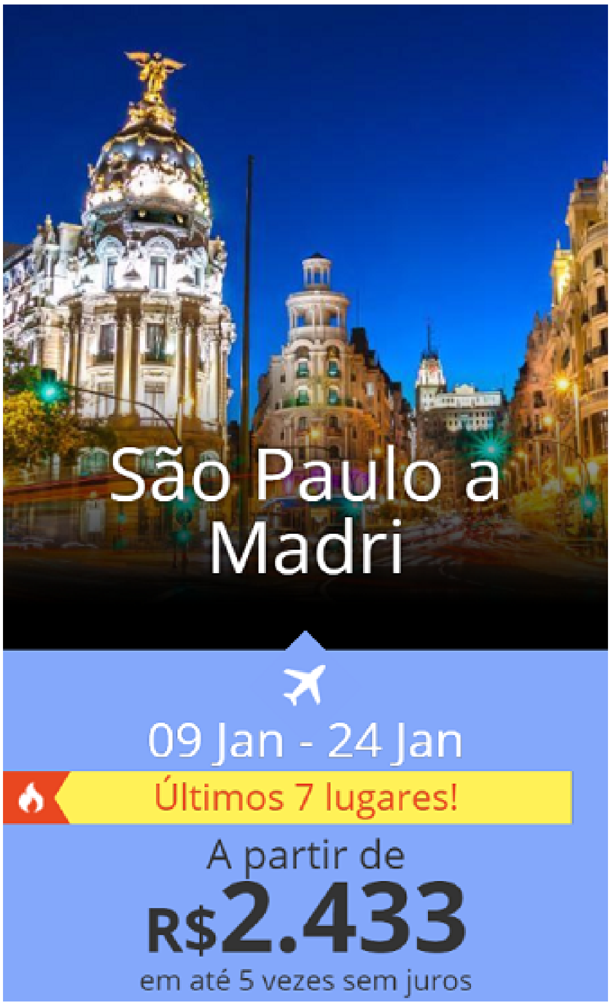


Figura 9 – Publicidade de Viagem de São Paulo a Madri

Resolução

No caso do parcelamento em 5 vezes, a prestação P seria $R\$ \ 2.433,00 \div 5$, que dá $P = R\$486,60$.

Aplicando a fórmula do Valor Atual, com $n = 5$, $P = 486,60$ e $i = 1,6\%$, tem-se

$$A = 486,60 \cdot \frac{1-(1,016^{-5})}{0,016} = 2.320,44.$$

Assim, nestas condições, o valor para pagamento à vista deveria ser $R\$ \ 2.320,44$.

Exemplo 22

No mês de seu aniversário, uma concessionária de veículos de Curitiba fez uma promoção para o financiamento de carros, com entrada de 10% e o saldo em até 48 vezes, com taxa de 1,27$\%$ ao mês, conforme se vê na placa de publicidade mostrada na Figura 10. Querendo comprar um carro cujo valor era de R$ 50.000,00, qual seria a prestação que Sandro pagaria se o financiamento fosse feito em 36 parcelas?

Figura 10 – Financiamento de Automóvel

Fonte: Publicidade da Concessionária

Resolução

Sendo 10% o valor a ser pago na entrada, o valor a ser financiado seria 90% de R$ 50.000,00, isto é, R$ 45.000,00. Aplicando a fórmula do Valor Atual, com $A = 45.000$, $n = 36$ e $i = 1,27\%$, tem-se

$$45.000 = P \cdot \frac{1 - (1,0127^{-36})}{0,0127} \Rightarrow P = R\$\ 1.565,24.$$

Pode-se resolver esse problema fazendo uso de uma ferramenta do Banco Central do Brasil, chamada Calculadora do Cidadão[6], que simula financiamentos com parcela fixa. Nela deve-se preencher os valores do financiamento, que no caso são: número de meses (36), taxa de juro (1,27) e o valor financiado (45.000,00). Como resultado, obtém-se a prestação do financiamento, que deu R$ 1.565,24, conforme mostrado na Figura 11.

6 Disponível em: <https://www3.bcb.gov.br/CALCIDADAO/>. Acesso em: 17 jun. 2017.

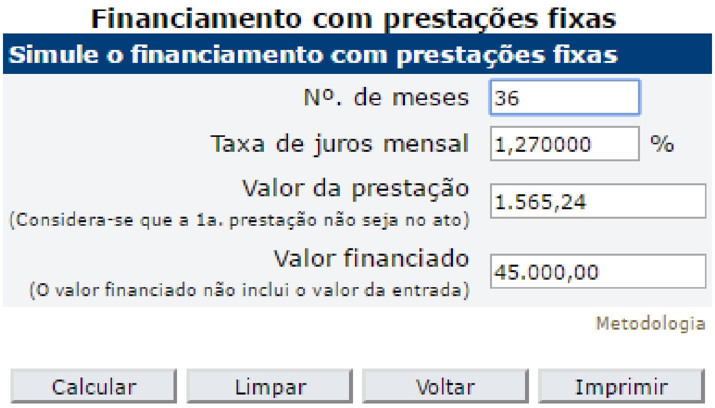


Figura 11 – Calculadora do Cidadão para Cálculo da Prestação

Fonte: Site do Banco Central do Brasil

Exemplo 23

Pessoas que usam os serviços bancários de maneira responsável podem reverter o mesmo em seu benefício. Uma família usou o crédito de maneira desmedida, acumulando uma dívida de R$ 5.000,00 com multa de 5% por mês de atraso. Como não tinha essa quantia, procurou um banco e descobriu que o mesmo financiava a dívida em 24 prestações mensais iguais de R$ 334,00, valor que caberia em seu orçamento mensal, conforme se vê na Figura 13. Calcular a taxa de juros cobrada pelo banco e justificar por que o financiamento é viável.

Resolução

Como já mostrado no exemplo anterior, esse problema será resolvido com ajuda da Calculadora do Cidadão. Nela são preenchidos os valores do financiamento, que no caso são: número de meses (24), valor da prestação (334,00) e o valor financiado (5.000,00). Como resultado, obtém-se a taxa de juros mensal do financiamento, que resultou em 4,179840%, conforme mostrado na Figura12.

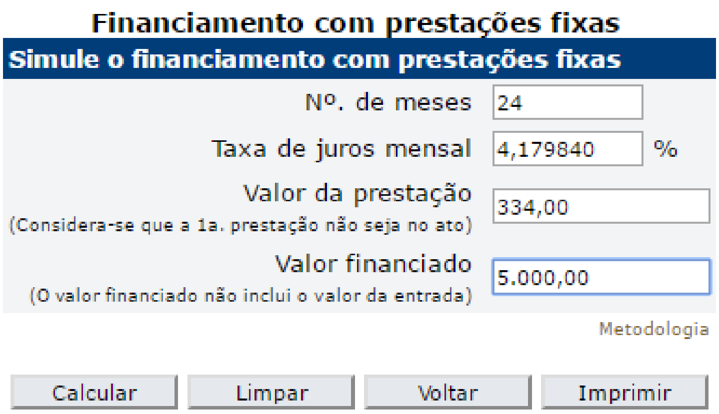


Figura 12 – Calculadora do Cidadão para Cálculo da Taxa de Juro

Fonte: Site do Banco Central do Brasil

Além de a taxa de juros ser menor que os 5% da multa por atraso na dívida bancária, a família tem condições de pagar mensalmente a parcela. É importante salientar que ainda assim a taxa de juros está alta, principalmente se comparada com a Caderneta de Poupança ou outras formas de investimentos em renda fixa.

Figura 13 – Empréstimo Bancário

Fonte: Panfleto de Publicidade do Banco

Pode-se fazer este mesmo cálculo no aplicativo Excel, utilizando a Fórmula Financeira TAXA, na qual são inseridos os valores conforme mostra a Figura 14. Neste caso, o valor encontrado foi 4,1798374%.

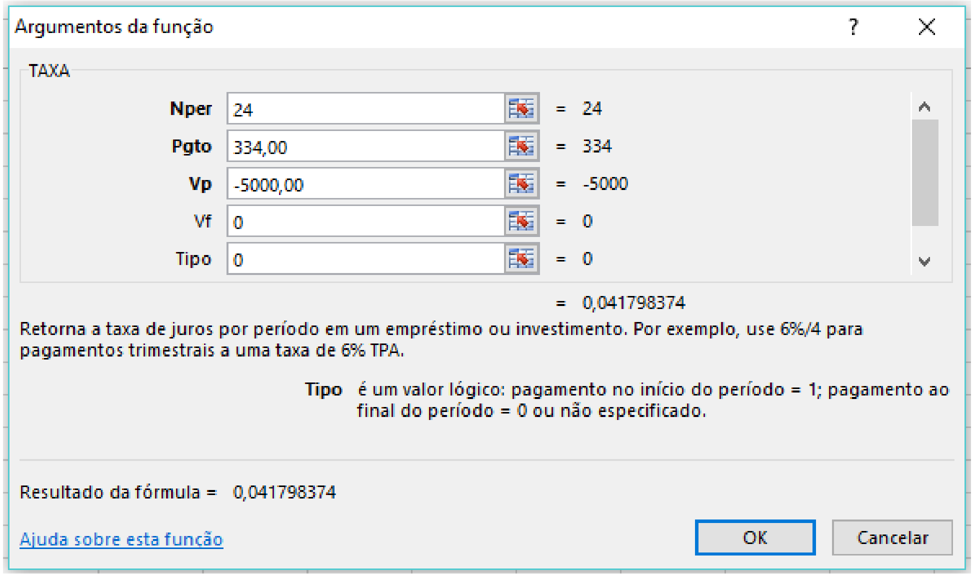


Figura 14 – Cálculo da Taxa de Juro em uma Planilha Excel

Fonte: Fórmula TAXA do Excel

Matematicamente, o problema de se encontrar a taxa de um financiamento não é trivial, sendo que uma abordagem didática a esta questão foi proposta em (ORTEGA R. R.; ABBEG, 2016).

2.9 PERPETUIDADE

Algumas situações financeiras podem prever durações indeterminadas, oriundas, por exemplo, da avaliação de ações, previdência ou ainda em locações. Um exemplo é quando se aluga um bem, cedendo-se a posse do mesmo em troca de um aluguel. Então o conjunto dos aluguéis constitui uma renda perpétua. O valor de uma perpetuidade de termos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, sendo i a taxa de juros, é obtido pelo valor da série quando n tende ao infinito:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) \Rightarrow A = \frac{P}{i}.$$

Exemplo 24

Sandro possui um apartamento que vale R$ 360.000,00 e está em dúvida se vende o imóvel e aplica o dinheiro no Tesouro Direto [7], que lhe renderia aproximadamente 0,8% ao mês, ou aluga para um casal de amigos. Para que os rendimentos fossem equivalentes, por qual valor o apartamento deveria ser alugado?

---

[7] Programa do Tesouro Nacional desenvolvido em parceria com a BMF&F Bovespa para venda de títulos públicos federais para pessoas físicas, por meio da internet: <http://www.tesouro.fazenda.gov.br/tesouro-direto>.

Resolução

O aluguel de um apartamento pode ser considerado uma perpetuidade. Assim, basta aplicar a fórmula com $A = 360.000$ e $i = 0,009$ para obter o valor da parcela:

$$A = \frac{P}{i} \Rightarrow 360.000 = \frac{P}{0,008} \Rightarrow P = R\$\,2.880,00.$$

Observe-se que este resultado é apenas uma referência, pois os valores praticado nos aluguéis dependem do mercado imobiliário, que oscila de acordo com o tempo, o lugar e a situação da Economia.

2.10 PREVIDÊNCIA E APOSENTADORIA

No primeiro semestre de 2017 a população brasileira vivenciou intensa discussão sobre as reformas da Previdência (Oficial). Devido a diversas denúncias de corrupção que atingiram o alto escalão do governo, afetando diretamente na política, o assunto da reforma foi deixado para voltar a ser discutido mais adiante.

O objetivo desta seção não é tratar da Previdência Oficial (Pública) e nem da Previdência Privada[8], embora as ideias que serão aqui colocadas se assemelhem muito a este segundo tipo de previdência.

O enfoque está nos cálculos que o cidadão poderá fazer para, durante sua vida, acumular reserva financeira suficiente para viver sem depender de renda salarial, como consequência do seu trabalho. Isto porque, durante o ciclo da vida, existe um período no qual as pessoas gozam de boa saúde e energia para exercer o trabalho e, na terceira idade[9], a saúde tende a ficar debilitada e a energia vai diminuindo com o passar do tempo.

Diante do exposto, poder-se-ia chamar o título desta seção de “Previdência Própria do Cidadão”.

Existem três resultados já apresentados ao longo deste trabalho que serão utilizados nos cálculos dos valores que interessam às pessoas, cujo objetivo seja planejar sua saúde financeira na terceira idade (por conveniência, aqui a notação foi ligeiramente alterada):

a) A fórmula do Valor Futuro,

$$F = D \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

[8] É um investimento financeiro que permite ao titular receber uma aposentadoria. Apesar de não ser ligada ao sistema do Instituto Nacional do Seguro Social (INSS), possui características semelhantes às da previdência pública, porém bastante flexível com relação à definição dos valores acumulados. É um produto oferecido pelos bancos.

[9] De acordo com a ONU, é a fase da vida que começa aos 60 anos nos países em desenvolvimento e aos 65 anos nos países desenvolvidos.

que permite obter o valor a ser acumulado F, mediante depósitos regulares D à taxa i, por um prazo determinado n;

b) A fórmula do Valor Atual,

$$A = P \cdot \frac{1-(1+j)^{-m}}{j},$$

que permite obter a renda periódica P, por prazo determinado m à taxa j, a partir de um certo valor acumulado A;

c) A fórmula da Perpetuidade,

$$A = \frac{P}{j},$$

que permite obter a renda periódica P, por prazo indeterminado (infinito) à taxa j, a partir de um certo valor acumulado A.

Quando se faz depósitos regulares no valor D durante n meses, à taxa de juro i, e após este prazo se deseja receber m parcelas no valor P, durante m meses, com a reserva acumulada aplicada à taxa de j, tem-se a igualdade

$$F = A \Rightarrow D \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = P \cdot \frac{1-(1+j)^{-m}}{j}.$$

Por outro lado, na mesmas condições, porém se o prazo que se deseja receber m parcelas no valor P é indeterminado (infinito), com a reserva acumulada aplicada à taxa de j, tem-se a igualdade

$$F = A \Rightarrow D \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{P}{j}.$$

O exemplo seguinte mostra uma situação realista de como seria possível realizar um planejamento de longo prazo, a fim de construir uma reserva financeira que serviria como uma previdência particular. Por simplicidade e também para que se tenha uma noção mais precisa dos valores, seria interessante pensar que não existe inflação[10].

Exemplo 25

Bruno pretende ingressar no mercado de trabalho aos 25 anos de idade e se aposentar aos 65 anos, contribuindo com uma Previdência Privada durante 40 anos.
a) Se ele depositar R$ 400,00 por mês a juros de 0,3% ao mês durante 40 anos (ou 480 meses) e desejar receber aposentadoria até os 80 anos de idade, com o valor acumulado rendendo 0,4% ao mês, quanto receberá mensalmente depois de se aposentar?
b) Se ele depositar R$ 400,00 por mês a juros de 0,3% durante 40 anos (ou 480 meses) e desejar receber aposentadoria perpétua, com o valor acumulado rendendo 0,4% ao mês quanto receberá

[10] No contexto da Economia, inflação é um conceito que designa o aumento continuado e generalizado dos preços dos bens e serviços. Quando a inflação chega a zero, diz-se que houve estabilidade dos preços.

mensalmente depois de se aposentar?
c) Se ele deseja se aposentar recebendo R$ 5.000,00 por mês até completar 85 anos de idade, quanto deve investir mensalmente, a juros de 0,5% ao mês, durante os 40 anos de contribuição?

Resolução

a) Neste caso, Bruno contribui durante 40 anos (480 meses) à taxa de 0,3% e recebe durante 15 anos (180 meses). Utilizando

$$D \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = P \cdot \frac{1-(1+j)^{-m}}{j},$$

com $D = R\$\ 400,00$, $n = 480$, $m = 180$, $i = 0,3\%$ e $j = 0,4\%$, tem-se

$$400 \cdot \frac{(1+0,003)^{480} - 1}{0,003} = P \cdot \frac{1-(1+0,004)^{-180}}{0,004} \Rightarrow P = 3.341,85.$$

Logo, receberá R$ 3.341,85,00 mensais ao se aposentar.

b) Neste caso, Bruno contribui durante 40 anos (480 meses) à taxa de 0,3% e recebe perpetuamente. Utilizando

$$D \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{P}{j},$$

com $D = R\$\ 400,00$, $n = 480$, $i = 0,3\%$ e $j = 0,4\%$, tem-se

$$400 \cdot \frac{(1+0,003)^{480} - 1}{0,003} = \frac{P}{0,004} \Rightarrow P = 1.712,86.$$

Logo, receberá R$ 1.712,86 mensais ao se aposentar.

c) Neste caso, Bruno contribui durante 40 anos (480 meses) e recebe durante 20 anos (240 meses). Utilizando

$$D \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = P \cdot \frac{1-(1+j)^{-m}}{j},$$

com $P = R\$\ 5.000,00$, $n = 480$, $m = 240$ e $i = j = 0,5\%$, tem-se

$$D \cdot \frac{(1+0,005)^{480} - 1}{0,005} = 5.000 \cdot \frac{1-(1+0,005)^{-240}}{0,005} \Rightarrow D = 350,44.$$

Logo, deverá investir R$ 350,44 mensais para se aposentar recebendo R$ 5.000,00.

Visto que os cálculos dos valores relacionados à previdência podem ser demorados, inclusive porque muitas vezes se quer fazer diversas simulações, recomenda-se utilizar uma planilha. Por exemplo, fazendo uso do aplicativo Excel, pode-se facilmente elaborar uma, como mostrado na Figura 15.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		**Planilha de Simulação de Previdência**					
3							
4		Aqui, calcula-se o Montante Acumulado e os valores P das rendas Perpétua e por					
5		Prazo Determinado de uma Aposentadoria, investindo-se mensalmente D.					
6							
7		**N**	40		**Renda Perpétua investindo D**		**R$ 1.712,86**
8		**D**	**R$ 400,00**				
9		**M**	15		**Renda por Prazo investindo D**		**R$ 3.341,85**
10		**i**	0,30%				
11		**j**	0,40%		**Montante Acumulado**		**R$ 428.214,28**
12							
13		Aqui, calcula-se o Montante Acumulado e o valor a ser investido mensalmente D					
14		para se obter renda Perpétua e por Prazo Determinado P de uma Aposentadoria.					
15							
16		**N**	40		**Valor de D para Renda Perpétua P**		**R$ 502,14**
17		**P**	**R$ 5.000,00**				
18		**M**	20		**Valor de D para Renda por Prazo P**		**R$ 350,44**
19		**i**	0,50%				
20		**j**	0,50%		**Montante Acumulado**		**R$ 9.957.453,67**

Figura 15 – Simulação de Valores de Previdência

Fonte: Planilha Elaborada no Excel

Note-se que, nos itens a) e b) do exemplo anterior, o montante acumulado foi de R$ 428.214,28, enquanto que no item c) foi de R$ 9.957.453,67. Estes valores não são habitualmente intuitivos.

O funcionamento da Planilha se dá da seguinte forma:

a) Na parte superior, entra-se com o tempo de contribuição N em anos, os depósitos mensais D, a taxa mensal de juros i durante o tempo de contribuição, o tempo de recebimento da aposentadoria M em anos, a taxa mensal de juros j durante o período de recebimento da aposentadoria, e obtém-se, nas células $G7$, $G9$ e $G11$, respectivamente, os valores das rendas perpétua, por prazo determinado e do montante acumulado.

b) Na parte inferior, entra-se com o tempo de contribuição N em anos, o valor que se deseja receber de aposentadoria P, a taxa mensal de juros i durante o tempo de contribuição, o tempo de recebimento da aposentadoria M em anos, a taxa mensal de juros j durante o período de recebimento da aposentadoria, e obtém-se, nas células $G16$ e $G18$, respectivamente, os valores dos depósitos a serem feitos para se ter renda perpétua e por prazo determinado. Na célula $G20$ aparece o montante acumulado.

2.11 FINANCIAMENTO HABITACIONAL

É muito provável que, ao longo da vida, o cidadão passe pela experiência de contrair um empréstimo para adquirir um imóvel. Esta é uma operação de crédito muito frequente cujo agente que financia é uma instituição bancária.

Atualmente, no Brasil, existem duas opções para se escolher como a dívida será paga: o *Sistema de Amortização Constante* (*SAC*) e o Sistema Francês da Amortização, mais conhecido como *Tabela Price*.

Para explicar a principal diferença entre os dois, é preciso mencionar que toda prestação P de um financiamento é constituída de duas partes: o quanto se paga realmente da dívida contraída, a *amortização* A, e o quanto se paga de *juro* J, normalmente incidindo sobre o saldo devedor. Assim, tem-se que

$$P = A + J.$$

Quando se opta por um financiamento pelo *SAC*, é a amortização A de cada parcela que é constante, enquanto que na *Tabela Price* é a própria prestação P que é constante.

Desta forma, sendo D_0 a dívida contraída em um financiamento habitacional de n meses, a uma taxa mensal i, tem-se:

a) No *SAC*, a amortização A_k no mês k, $1 \leq k \leq n$, é dada por

$$A_k = \frac{D_0}{n},$$

o saldo devedor D_k no mês k é

$$D_k = (n-k)\frac{D_0}{n},$$

o juro J_k no mês k é

$$J_k = i \cdot D_{k-1}$$

e a prestação P_k no mês k é

$$P_k = A_k + J_k.$$

b) Na *Tabela Price*, a prestação P_k no mês k, $1 \leq k \leq n$, é obtida a partir da fórmula do Valor Atual, onde se utiliza os elementos com a notação anterior,

$$D_0 = P_k \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

logo

$$P_k = D_0 \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}},$$

o juro J_k no mês k é

$$J_k = i \cdot D_{k-1},$$

a amortização A_k no mês k é

$$A_k = P_k - J_k$$

e o saldo devedor D_k no mês k é

$$D_k = P_k \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}.$$

O quadro comparativo a seguir mostra os elementos dos dois sistemas de amortização da dívida:

SAC	**Price**
$A_k = \frac{D_0}{n}$	$P_k = D_0 \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$
$D_k = (n-k)\frac{D_0}{n}$	$D_k = P_k \cdot \dfrac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}$
$J_k = i \cdot D_{k-1}$	$J_k = i \cdot D_{k-1}$
$P_k = A_k + J_k$	$A_k = P_k - J_k$

Exemplo 26

Na compra de uma casa, Emily financiou R$ 150.000,00 a juros de 0,9% ao mês, em 30 anos. Calcular os valores de A_{217}, D_{217}, J_{217} e P_{217} dos cinco primeiros meses pelo *SAC* e pela *Tabela Price*.

Resolução

Os dados são $D_0 = 150.000$, $n = 30 \cdot 12 = 360$ meses, $i = 0,009$ e $k = 217$.

a) Pelo *SAC*, tem-se:

$$A_{217} = \frac{D_0}{n} = \frac{150.000}{360} = 416,67,$$
$$D_{217} = (360-217) \cdot 416,67 = 59.583,33,$$
$$J_{217} = 0,009 \cdot D_{216} = (360-216) \cdot 416,67 = 540,00,$$
$$P_{217} = A_{217} + J_{217} = 416,67 + 540,00 = 956,67.$$

b) Pela *Tabela Price*, tem-se:

$$P_{217} = D_0 \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 150.000 \cdot \frac{0,009}{1-(1+0,009)^{-360}} = 1.405,86,$$
$$D_{217} = P_{217} \cdot \frac{1-(1+0,009)^{-(360-217)}}{0,009} = 112.829,57,$$
$$J_{217} = 0,009 \cdot D_{216} = 0,009 \cdot P_{216} \cdot \frac{1-(1+0,009)^{-(360-216)}}{0,009} = 1.018,95,$$
$$A_{217} = P_{217} - J_{217} = 1.405,86 - 1.018,95 = 386,91.$$

Neste trabalho não se pretende fazer um estudo mais detalhado dos dois sistemas de amortização, nem mesmo uma comparação das vantagens e desvantagens proporcionadas por cada um deles. Esta análise foi realizada em (SANTOS, 2015). Esta referência, por exemplo, apresenta uma planilha elaborada no Excel que fornece automaticamente os valores dos três primeiros e dos três últimos meses dos financiamentos pelo *SAC* e pela *Tabela Price*, além dos valores de qualquer mês a ser definido pelo usuário. A Figura 16 mostra a planilha com valores do financiamento do exemplo anterior, e os valores relativos no 217º mês.

Planilha Comparativa entre o SAC e a Tabela Price

Esta planilha mostra o status comparativo das três primeiras e das três últimas prestações de um financiamento pelo SAC e pela Tabela Price.
Na última linha, é possível ver os valores do financiamento no mês k, digitando na Célula A21 o mês desejado (3 < k < n-2).

D_0	R$ 150.000,00
n	360
i	0,90%

SAC				
	Amortização	Saldo Devedor	Juros	Prestação
k	A_k	D_k	J_k	P_k
0		R$ 150.000,00		
1	R$ 416,67	R$ 149.583,33	R$ 1.350,00	R$ 1.766,67
2	R$ 416,67	R$ 149.166,67	R$ 1.346,25	R$ 1.762,92
3	R$ 416,67	R$ 148.750,00	R$ 1.342,50	R$ 1.759,17
358	R$ 416,67	R$ 833,33	R$ 11,25	R$ 427,92
359	R$ 416,67	R$ 416,67	R$ 7,50	R$ 424,17
360	R$ 416,67	R$ 0,00	R$ 3,75	R$ 420,42
217	R$ 416,67	R$ 59.583,33	R$ 540,00	R$ 956,67

Price				
	Prestação	Juros	Amortização	Saldo Devedor
k	P_k	J_k	A_k	D_k
0				R$ 150.000,00
1	R$ 1.405,86	R$ 1.350,00	R$ 55,86	R$ 149.944,14
2	R$ 1.405,86	R$ 1.349,50	R$ 56,37	R$ 149.887,77
3	R$ 1.405,86	R$ 1.348,99	R$ 56,87	R$ 149.830,90
358	R$ 1.405,86	R$ 37,29	R$ 1.368,58	R$ 2.774,22
359	R$ 1.405,86	R$ 24,97	R$ 1.380,89	R$ 1.393,32
360	R$ 1.405,86	R$ 12,54	R$ 1.393,32	R$ 0,00
217	R$ 1.405,86	R$ 1.018,95	R$ 386,91	R$ 112.829,57

Figura 16 – Comparação de Valores SAC X Price

Fonte: (SANTOS, 2015)

2.12 IMPOSTO DE RENDA

O tema deste capítulo tem uma notável importância pois, além de fazer parte do cotidiano das pessoas, é excelente para ser trabalhado nas aulas de Matemática, pois abrange diversos conteúdos: porcentagem, modelagem, função afim, função definida por várias sentenças, domínio de função e, inclusive, a ideia de continuidade.

Da mesma forma que a Educação Financeira é política de Estado e existem diversos canais oficiais para sua divulgação, a Educação Fiscal também tem seu programa implementado, o PNEF[11], que possui um *link*[12] exclusivo dentro do *site* da Receita Federal:

> A compreensão de uma cidadania ativa, participativa e solidária, mediante a existência dos direitos fiscais, especialmente a adequada gestão do gasto público por parte dos governantes, assim como de obrigações fiscais, são passos importantes que as Administrações Tributárias mais modernas perseguem no contexto de socialização dos tributos.

[11] Programa Nacional de Educação Fiscal, disponível em: <http://educacaofiscal.gov.br/>. Acesso em: 15 jun. 2017.

[12] Disponível em: <http://idg.receita.fazenda.gov.br/acesso-rapido/direitos-e-deveres/educacao-fiscal>. Acesso em: 15 jun. 2017.

> No mundo contemporâneo, não há como se falar em sociedade sem impostos. Sem o pagamento dos impostos, a realização dos próprios direitos fundamentais é impossível. A tributação, então, deve ser compreendida como um dever de cooperação que possibilita a atuação estatal nas suas mais diversas áreas, especialmente na vida social e econômica das pessoas.
>
> Assim, o conhecimento da questão dos impostos possibilita o fomento da cidadania, proporcionando os conhecimentos e habilidades que capacitam a compreensão do mundo e a atuação consistentemente na melhoria da realidade social de todos.
>
> O tributo é um instrumento que pode e deve ser utilizado para promover as mudanças e reduzir as desigualdades sociais. O cidadão, consciente da função social do tributo, como forma de redistribuição da renda nacional e elemento de justiça social, é capaz de participar do processo de arrecadação, aplicação e fiscalização do dinheiro público.

O Artigo 145 da Constituição Federal do Brasil dispõe sobre a fixação de tributos no território nacional. O Imposto de Renda Pessoa Física (IRPF) é de competência federal e deve ser pago por todos os cidadãos que tenham obtido ganho financeiro acima de determinado valor mínimo. Anualmente este cidadão (contribuinte) deve prestar informações à Receita Federal através da Declaração de Ajuste Anual para apurar possíveis valores a pagar ou a receber (restituição de imposto). Contribuintes com renda até determinado valor são considerados isentos.

O IRPF se insere tanto na Educação Fiscal quanto na Educação Financeira, uma vez que o tema tem impacto direto na economia dos cidadãos.

Neste trabalho não se pretende mostrar como se faz e como se entrega a Declaração de Ajuste Anual, pois estas explicações podem ser encontradas no *site* da Receita Federal do Brasil[13].

O objetivo é mostrar a Matemática do cálculo do imposto devido, bem como a porcentagem real dos rendimentos que são pagos de imposto. Para tanto, é preciso introduzir alguns conceitos:

a) *Rendimentos Tributáveis* (RT) são aqueles recebidos de Pessoas Físicas ou de Pessoas Jurídicas. O conjunto dos rendimentos tributáveis é bastante amplo, dentre os quais destacam-se: salários, serviços prestados, aposentadorias, resgates de previdência privada, ações judiciais e pensões. A relação completa dos rendimentos tributáveis pode ser encontrada no *site* da Receita Federal.

b) *Deduções* (DD) são pagamentos realizados pelo contribuinte que podem ser abatidos dos Rendimentos Tributáveis para fins do cálculo do imposto devido. Dentre elas, destacam-se: pagamento da Previdência Oficial, dependentes, despesas com Educação, despesas com saúde e contribuição à Previdência Privada. A relação completa das possíveis deduções pode ser encontrada no *site* da Receita Federal.

[13] O *site* da Receita Federal do Brasil é <https://idg.receita.fazenda.gov.br/>.

c) *Rendimento Líquido* (R) é o resultado da diferença entre os rendimentos tributáveis e as deduções, isto é,

$$R = RT - DD.$$

Exemplo 27

Os valores do IRPF de 2017 são dados pela seguinte Tabela Progressiva Anual, obtida do *site* da Receita Federal do Brasil:

Base de Cálculo (em R$)	**Alíquota**	**Parcela a deduzir**
Até 22.847,76 (A)	Isento	—
De 22.847,77 até 33.919,80 (B)	7,5%	R$ 1.713,58
De 33.919,81 até 45.012,60 (C)	15%	R$ 4.257,57
De 45.012,61 até 55.976,16 (D)	22,5%	R$ 7.633,51
Acima de 55.976,16	27,5%	R$ 10.432,32

O cálculo do imposto devido I de uma pessoa que, em 2016, teve um rendimento líquido R é feito através de uma expressão da forma $I = aR - p$, onde a alíquota a e a parcela a deduzir p dependem da renda R. Com base nestas informações, expressar $I(R)$ (imposto a pagar em função da renda) algebrica e graficamente.

Resolução

Basta escrever os dados da tabela na forma de função definida por várias sentenças:

$$I(R) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad R \leq A, \\ 0,075R - 1.713,58, & \text{se} \quad A < R \leq B, \\ 0,15R - 4.257,57, & \text{se} \quad B < R \leq C, \\ 0,225R - 7.633,51, & \text{se} \quad C < R \leq D, \\ 0,275R - 10.432,32, & \text{se} \quad R > D, \end{cases}$$

onde $A = R\$\ 22.847,76$, $B = R\$\ 33.919,80$, $C = R\$\ 45.012,60$ e $D = R\$\ 55.976,16$.

A Figura 17, feita no *GeoGebra*, representa graficamente a função.

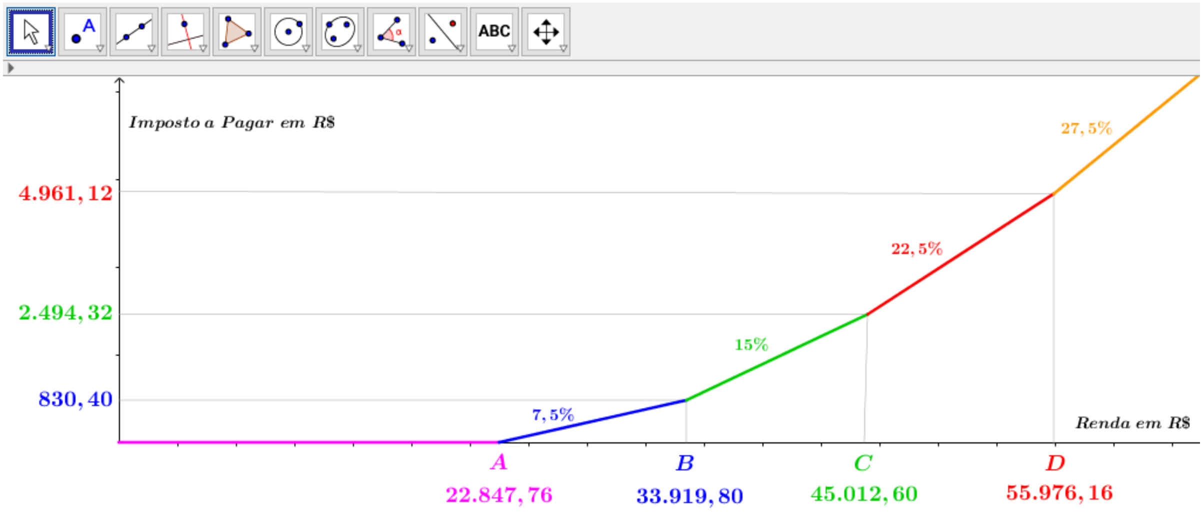


Figura 17 – Gráfico do IRPF

Note-se que o domínio desta função, no contexto real, é formado por números não negativos que possuem representação decimal com duas casas após a vírgula, por representarem valores financeiros.

Exemplo 28

Utilizando a tabela progressiva anual, calcular o imposto que Bianca deve pagar referente a 2016, se ela teve rendimentos tributáveis RT de R$ 87.764,29 e deduções DD de R$ 21.412,38.

Resolução

O rendimento líquido R é o valor total dos rendimentos tributáveis RT menos as deduções DD, isto é,

$$R = RL - DD = R\$\, 87.764, 29 - R\$\, 21.412, 38 = R\$\, 66.351, 91.$$

Pode-se calcular o imposto a ser pago pela simples aplicação da função obtida no exemplo anterior. Como R está na faixa de alíquota 27,5%, aplica-se a última sentença, isto é,

$$I(R) = 0, 275R - 10.432, 32.$$

Portanto,

$$I(66.351, 91) = 0, 275 \times 66.351, 91 - 10.432, 32 = 7.814, 45.$$

Assim, conclui-se que o imposto devido de Bianca relativo aos ganhos de 2016 é R$ 7.814,45.

Existe outra forma de se calcular o imposto, aplicando-se cada percentual da alíquota às faixas da base de cálculo que estiverem dentro dos limites definidos:

a) Na 1ª faixa, até R$ 22.847,76, existe isenção e o imposto a pagar $I_1 = 0$;

b) Na 2ª faixa, de R$ 22.847,77 a R$ 33.919,80, incide imposto de 7,5% sobre

$$R\$\ 11.072,04 = R\$\ 33.919,80 - R\$\ 22.847,76,$$

sendo o imposto a pagar $I_2 = R\$\ 830,40$;

c) Na 3ª faixa, de R$ 33.919,81 a R$ 45.012,60, incide imposto de 15% sobre

$$R\$\ 11.092,80 = R\$\ 45.012,60 - R\$\ 33.919,80,$$

sendo o imposto a pagar $I_3 = R\$\ 1.663,92$;

d) Na 4ª faixa, de R$ 45.012,61 a R$ 55.976,16, incide imposto de 22,5% sobre

$$R\$\ 10.963,56 = R\$\ 55.976,16 - R\$\ 45.012,61,$$

sendo o imposto a pagar $I_4 = R\$\ 2.466,80$;

e) Na 5ª faixa, acima de R$ 55.976,16, incide imposto de 27,5% sobre

$$R\$\ 10.375,75 = R\$\ 66.351,91 - R\$\ 55.976,16,$$

sendo o imposto a pagar $I_5 = R\$\ 2.853,33$.

Sendo o imposto total devido igual a $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5$, tem-se R$ 7.814,45, igual ao resultado obtido anteriormente.

A Receita Federal tem em seu *site*[14] uma ferramenta que simula o cálculo do imposto através das faixas de renda, conforme mostrado na Figura 18.

2.8 Total das deduções 21.412,38
* Para mais informações sobre deduções verificar IN RFB nº 1500, de 2014.

3. Base de Cálculo (1 - 2.8) 66.351,91

4. Imposto 7.814,45

Demonstrativo da Apuração do Imposto

Faixa da Base de Cálculo		Alíquota	Valor do Imposto
1ª Faixa	22.847,76	Isento	0,00
2ª Faixa	11.072,04	7,5%	830,40
3ª Faixa	11.092,80	15,0%	1.663,92
4ª Faixa	10.963,56	22,5%	2.466,80
5ª Faixa	10.375,75	27,5%	2.853,33
Total	66.351,91	---	7.814,45

Figura 18 – Cálculo do IRPF por Faixas

Fonte: Simulador da Receita Federal

14 Disponível em: <http://www26.receita.fazenda.gov.br/irpfsimulaliq/private/pages/simuladoraliquota.jsf>. Acesso em: 15 jun. 2017.

Existe uma tendência equivocada de as pessoas acharem que o valor do imposto pago é exatamente a simples aplicação da alíquota referente à faixa de rendimento sobre o valor do rendimento obtido. Assim, é importante observar que o percentual da renda pago como imposto de renda, chamado de *alíquota efetiva*, é sempre menor que a alíquota da tabela, como consequência da existência de um limite de isenção (a parcela a deduzir) e do caráter progressivo da tabela do IRPF.

O mesmo simulador citado anteriormente no cálculo do imposto por faixas também calcula a alíquota efetiva do IRPF de 2017. Por exemplo, a cidadã Bianca do exemplo anterior, cujos rendimentos tributáveis foram de R$ 87.764,29 em 2016, não pagou 27,5% deste valor, mas sim R$ 7.814,45, o equivalente a 8,90% de sua renda tributável, conforme mostra a Figura19, obtida com uso deste simulador.

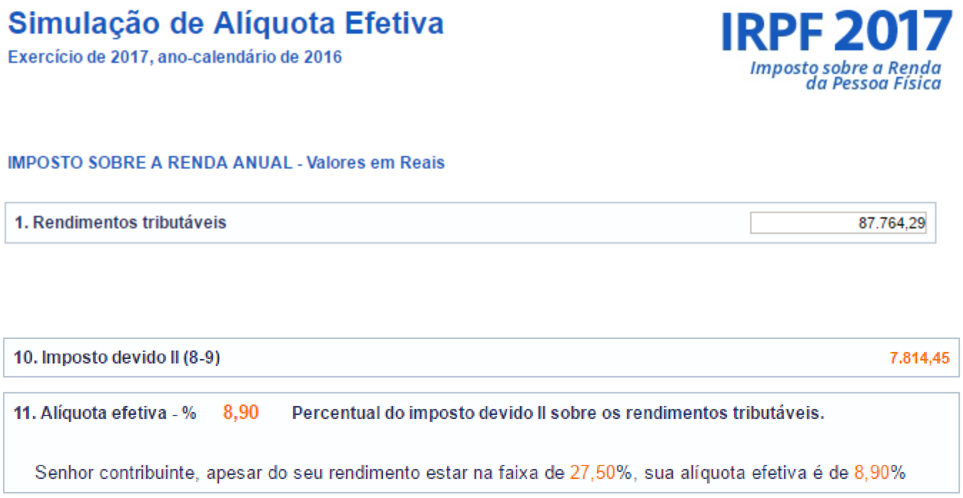


Figura 19 – Cálculo da Alíquota Efetiva do IRPF de 2017

Fonte: Simulador da Receita Federal

3 RELATO DE EXPERIÊNCIA

Neste Capítulo é relatada uma experiência que o autor da presente Dissertação realizou junto a alunos do Ensino Médio, com objetivo de averiguar a capacidade dos estudantes de enfrentar e resolver situações cotidianas que envolvessem a utilização de conhecimentos de finanças pessoais.

3.1 QUEM REALIZOU, ONDE FOI E QUEM PARTICIPOU

O autor desta Dissertação, Sandro Marcio Primon, é Professor do Ensino Médio da Escola de Educação Básica São José[1], da cidade de Fraiburgo, situada no Estado de Santa Catarina. Essa escola é estadual e se encontra localizada em um bairro onde a população predominantemente trabalha em empresas da cidade ou da região.

Atualmente, a escola funciona nos três períodos, com um total aproximado de 500 alunos. O corpo docente conta com cerca de 40 profissionais, sendo que a maioria tem formação na sua área de atuação e são efetivos na própria escola. O corpo técnico administrativo conta com uma diretora, dois assessores de direção, um técnico pedagógico e um secretário.

Para desenvolvimento das atividades a escola dispõe de bom espaço físico, com 10 salas de aula, laboratórios de ciências e de informática, sala audiovisual, pátio amplo, quadra esportiva e ginásio de esportes.

Com apoio institucional, o Professor Sandro realizou uma experiência que teve como objetivo conhecer melhor, dentro do aspecto financeiro, a realidade dos estudantes, do meio em que vivem, suas atribuições diárias, como participam na sociedade e quais seriam suas interferências no meio social e econômico. A experiência, simples e prática, foi executada da seguinte maneira:

a) O Professor Sandro elaborou e aplicou um questionário, com perguntas de múltipla escolha, como forma de avaliação preliminar;

b) Depois, ministrou um minicurso de Educação Financeira, de conteúdo similar ao apresentado no Capítulo 2 deste trabalho, porém dentro das limitações de tempo;

c) Finalmente, aplicou um novo questionário pós-curso, de questões abertas, visando, com isso, avaliar a efetividade do curso ministrado.

Participaram da experiência somente alunos do período noturno, boa parte formada por trabalhadores, e que, portanto, passam o dia em atividade laboral. Pelas circunstâncias, estes estudantes têm menos tempo para se dedicar aos estudos, se comparados aos que não trabalham,

[1] O *site* da escola é <http://saojosefraiburgo.blogspot.com.br/>.

além de estarem mais desgastados física e mentalmente no horário das aulas, pois os mesmos chegam à escola depois da jornada de trabalho. Por outro lado, como eles têm remuneração, naturalmente acabam sendo mais experientes no manuseio do dinheiro e nas trocas financeiras do dia a dia. Ao todo, 29 estudantes entre 16 e 19 anos de idade, do 3º ano do Ensino Médio, fizeram o curso, que foi ministrado no mês de abril de 2017.

3.2 DIAGNÓSTICO: PERGUNTAS E RESPOSTAS

Antes de iniciar o Curso de Educação Financeira para os estudantes da escola, foi aplicado um questionário, com questões que buscavam conhecer como os participantes veem a Educação Financeira, como lidam com suas finanças, como família e escola o auxiliam. Esse questionário serviu como um diagnóstico, que orientou o Professor Sandro para, em um segundo momento, fazer uma interferência através de um curso onde se trabalhou a Educação Financeira, paralelamente aos principais assuntos já estudados na Matemática do Ensino Médio. Ao fim desse trabalho, aplicou-se um segundo questionário, com objetivo de verificar a aprendizagem dos educandos no processo como um todo, e estimar quais informações sobre o assunto eles levam para a vida ao concluir o Ensino Médio.

Na sequência, serão apresentadas as perguntas do questionário de múltipla escolha, com as respostas na forma de gráficos de colunas, todos feitos no Excel.

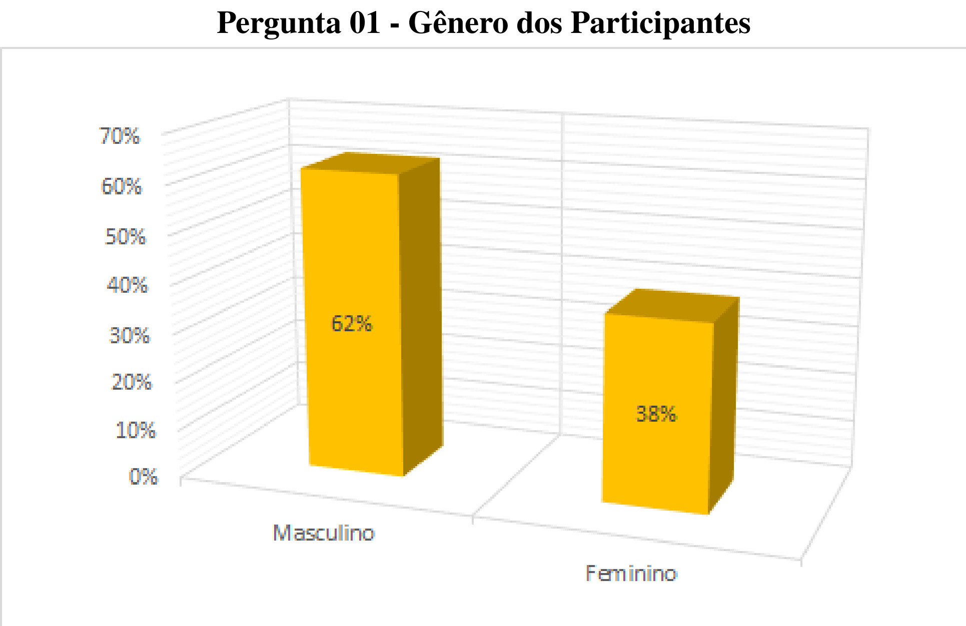


Figura 20 – Respostas da Pergunta 01

Pergunta 02 - Idade dos Estudantes

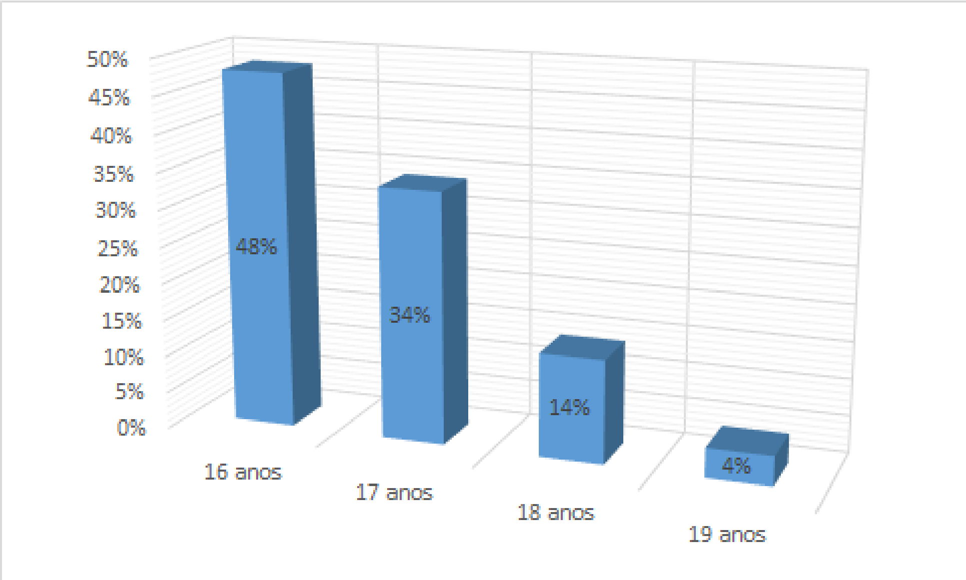


Figura 21 – Respostas da Pergunta 02

Pergunta 03 - Você já ouviu falar em Educação Financeira? Onde?

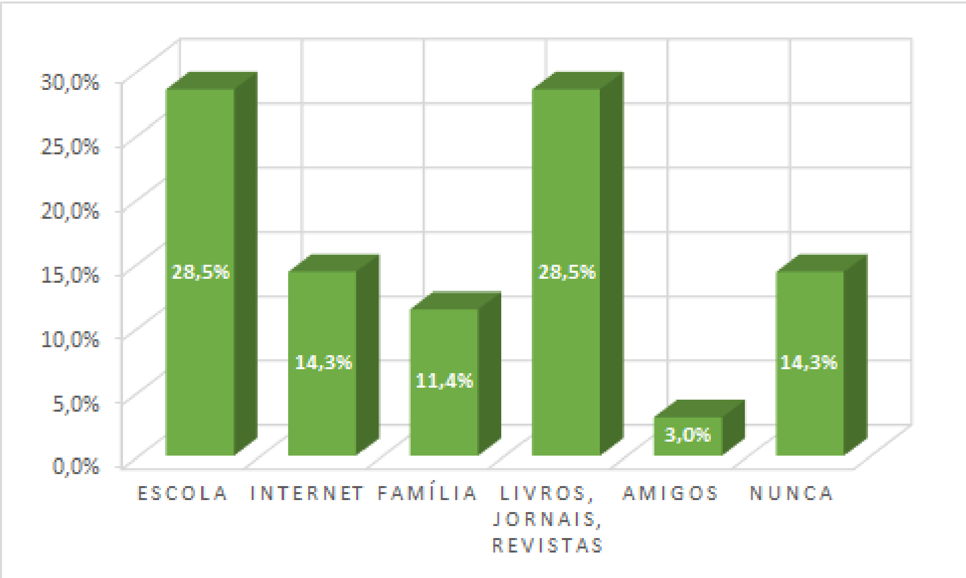


Figura 22 – Respostas da Pergunta 03

Comentário: Observa-se que livros, revistas, jornais e a escola são as principais fontes de acesso ao conhecimento de Educação Financeira, e que há uma parcela significativa, 14,3%, que ainda não havia tido contato com o tema.

Pergunta 04 - Você recebe regularmente algum dinheiro?

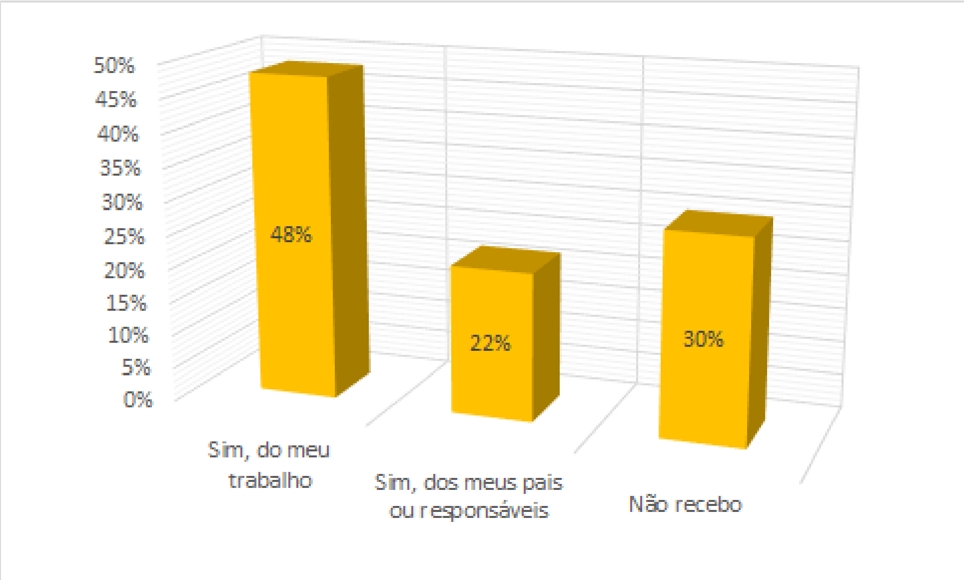


Figura 23 – Respostas da Pergunta 04

Comentário: Nota-se que a grande maioria, 70%, recebe dinheiro regularmente, sendo que, desses, 69% recebem do seu próprio trabalho e os outros 31% dos pais ou responsáveis. O resultado era esperado, uma vez que a opção pelo ensino noturno é para se ter disponibilidade de tempo para poder trabalhar.

Pergunta 05 - Quem administra suas finanças?

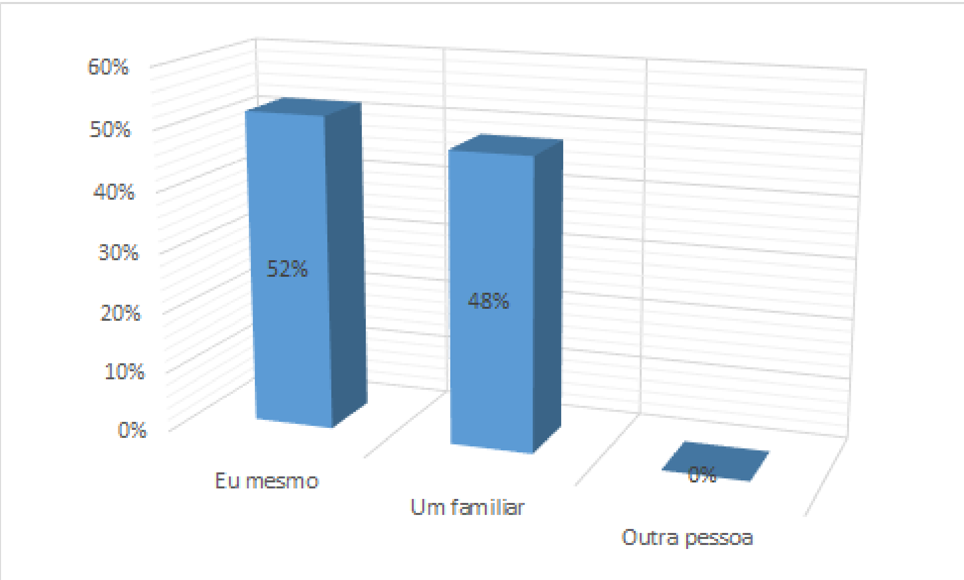


Figura 24 – Respostas da Pergunta 05

Pergunta 06 - Da quantia que recebe mensalmente, você ...

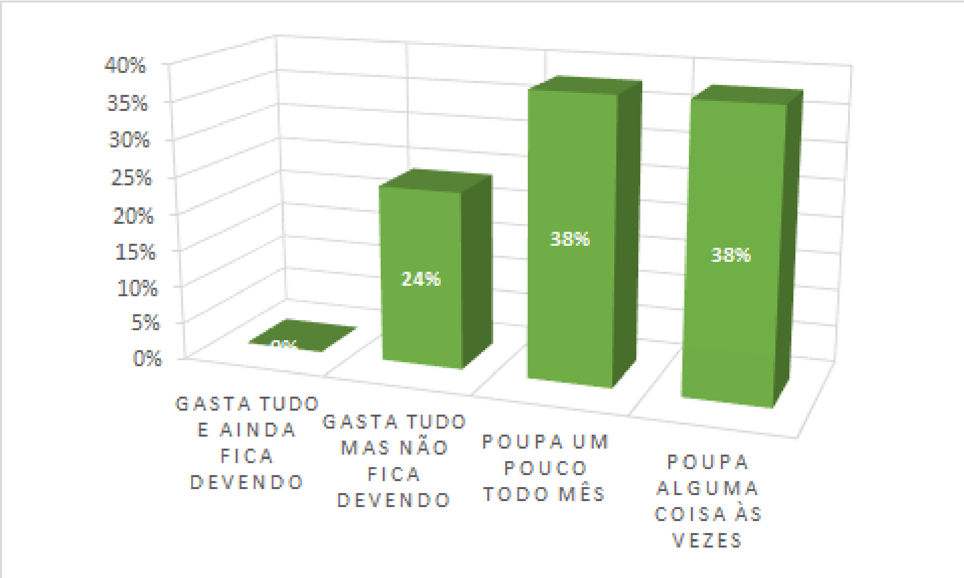


Figura 25 – Respostas da Pergunta 06

Comentário: É bem positivo observar que quase todos conseguem poupar alguma coisa e, se não poupam, pelo menos não gastam mais do que recebem.

Pergunta 07 - Seus pais compartilham com você as questões financeiras que ocorrem na família?

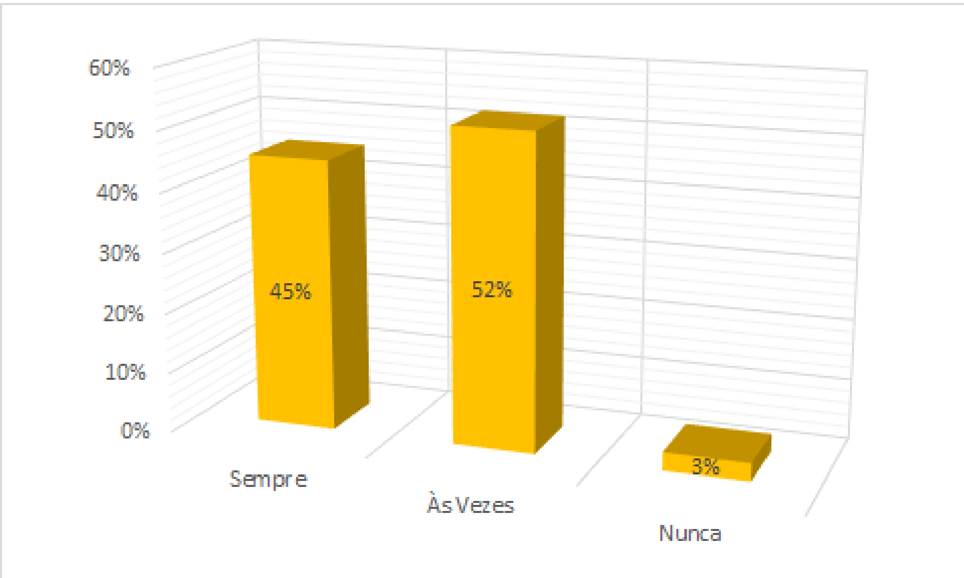


Figura 26 – Respostas da Pergunta 07

Pergunta 08 - Compra parcelada é uma boa maneira de adquirir um bem?

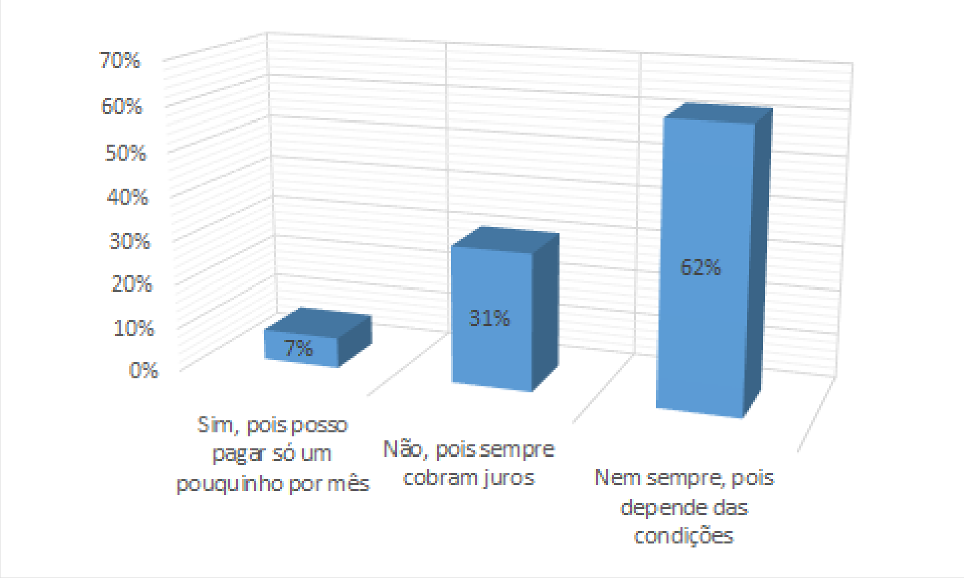


Figura 27 – Respostas da Pergunta 08

Pergunta 09 - Quando comprou parcelado, você procurou saber se a taxa de juros cobrada não era abusiva?

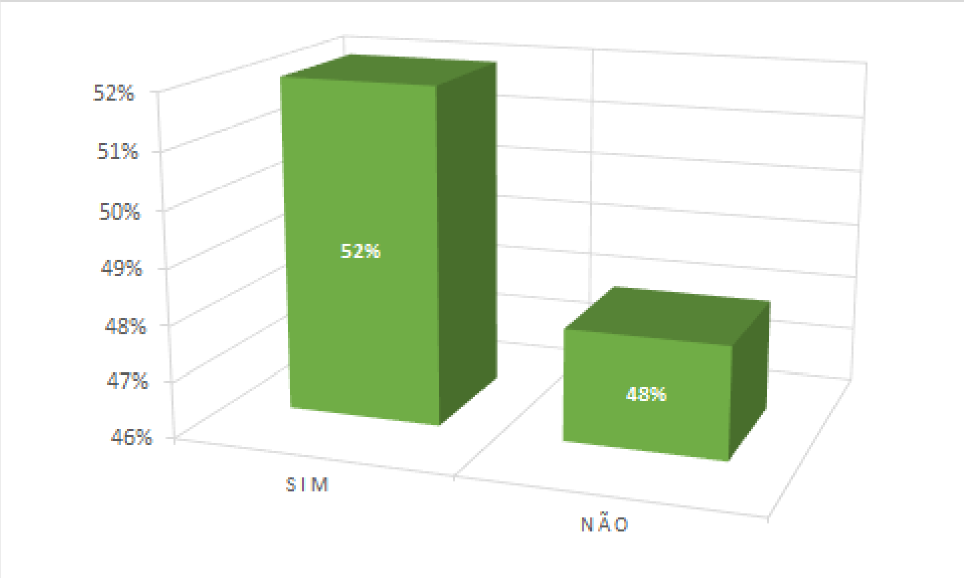


Figura 28 – Respostas da Pergunta 09

Comentário: Levando em consideração que todos fazem compras parceladas, é preocupante saber que boa parte dos cidadãos, 48%, não se interessa em saber a taxa de juro praticada.

Pergunta 10 - De quais dos seguintes conceitos financeiros você considera ter conhecimento?

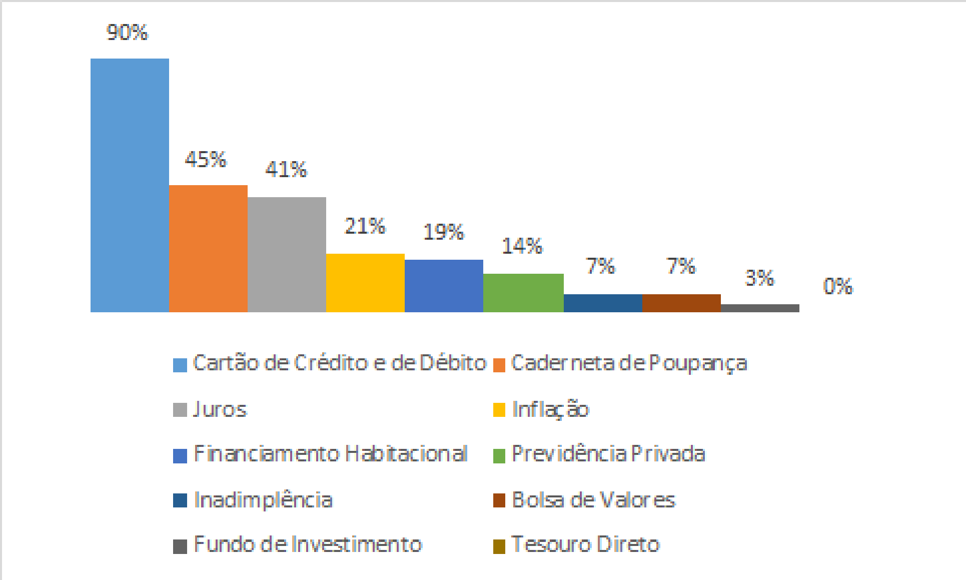


Figura 29 – Respostas da Pergunta 10

Comentário: Aqui foi permitido assinalar mais de uma opção.

Pergunta 11 - Qual é, aproximadamente, a taxa de juros mensal paga pela Caderneta de Poupança atualmente?

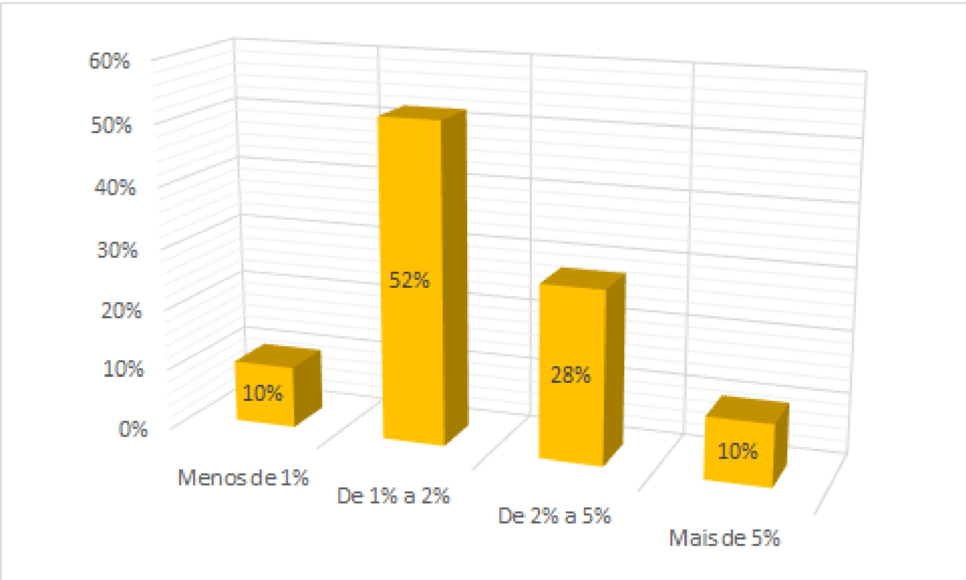


Figura 30 – Respostas da Pergunta 11

Comentário: Apesar de a Caderneta de Poupança ser o tipo de investimento mais popular no Brasil, 90% não sabem quanto é sua taxa de juros.

Pergunta 12 - Uma empresa de crédito que cobra 2% de juros mensais sobre o saldo devedor, no final de um ano acumula juros de 24%?

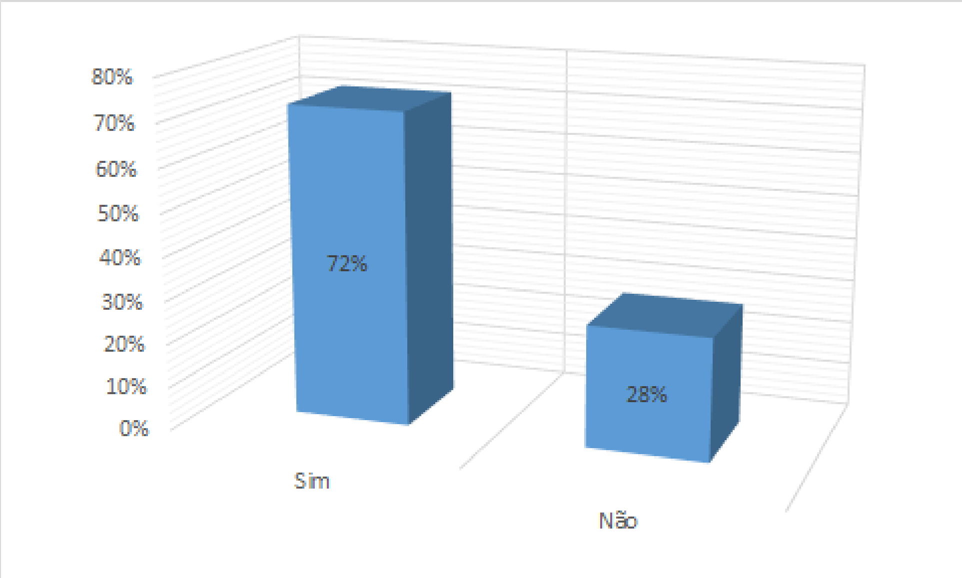


Figura 31 – Respostas da Pergunta 12

Comentário: As respostas confirmam a tendência de se raciocinar de forma linear. Setenta e dois por cento dos estudantes simplesmente multiplicaram 2 por 12.

Pergunta 13 - Em Santa Catarina, o IPVA oferta duas opções de pagamento: à vista ou parcelado em três vezes sem juros. Tendo a quantia para liquidar todo o imposto, qual das opções é financeiramente mais vantajosa?

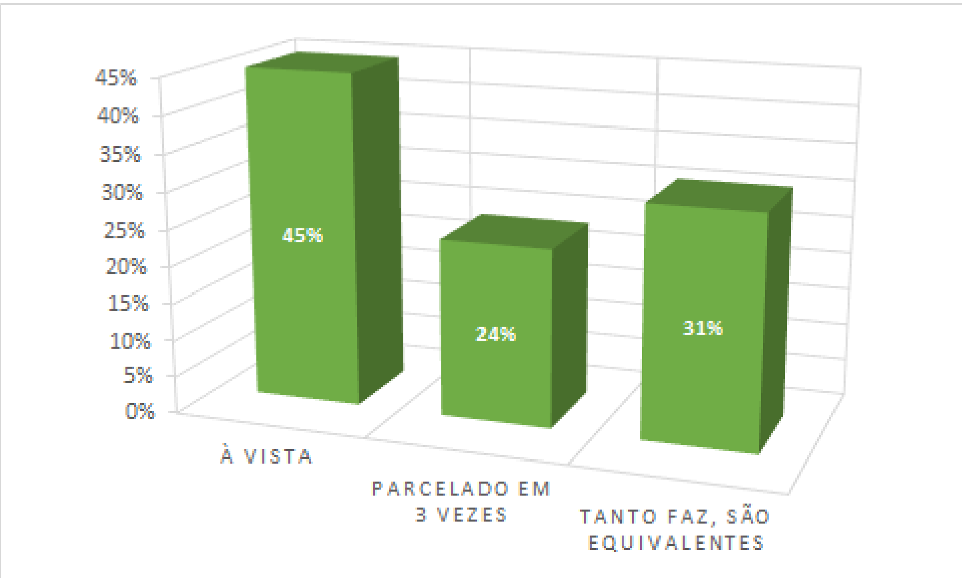


Figura 32 – Respostas da Pergunta 13

Comentário: Aqui percebe-se que a ideia de que pagar à vista é sempre melhor prevalece para a maioria, independentemente das condições.

Pergunta 14 - Em Fraiburgo-SC, o IPTU disponibiliza três opções de pagamento: a primeira (em parcela única), com um mês adiantado e 20% de desconto; a segunda (em parcela única) no vencimento com 10% de desconto; a terceira, em seis parcelas mensais iguais. Para uma pessoa que tem seu dinheiro na Caderneta de Poupança, qual opção é mais vantajosa?

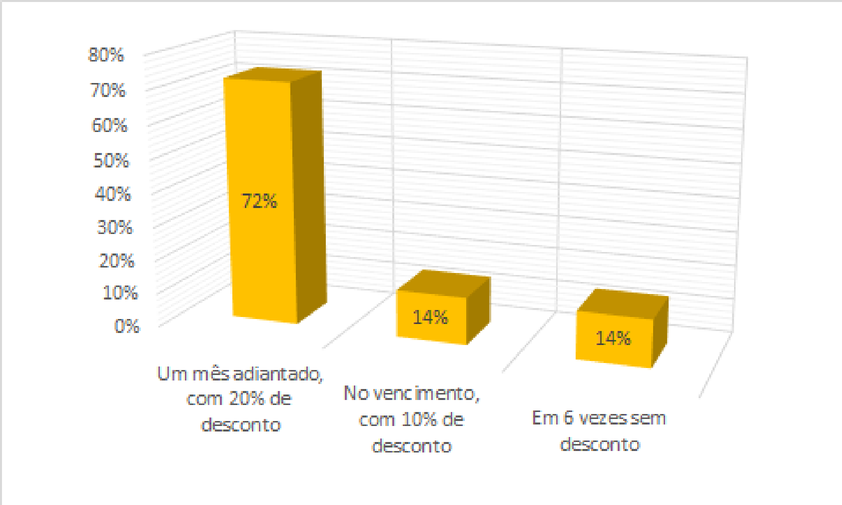


Figura 33 – Respostas da Pergunta 14

Comentário: Apesar de que a grande maioria, 72%, fez a opção correta, é preocupante saber que mesmo com essa grande diferença de valores, existem pessoas que pensam que a segunda e a terceira são melhores.

Pergunta 15 - Um mesmo produto é vendido em duas lojas diferentes: na loja Barateira custa R$ 130,00, com 10% de desconto para pagamento à vista; na loja Superbarato custa R$ 150,00, com 20% de desconto para pagamento à vista. Em qual das duas lojas é mais vantajoso comprar à vista?

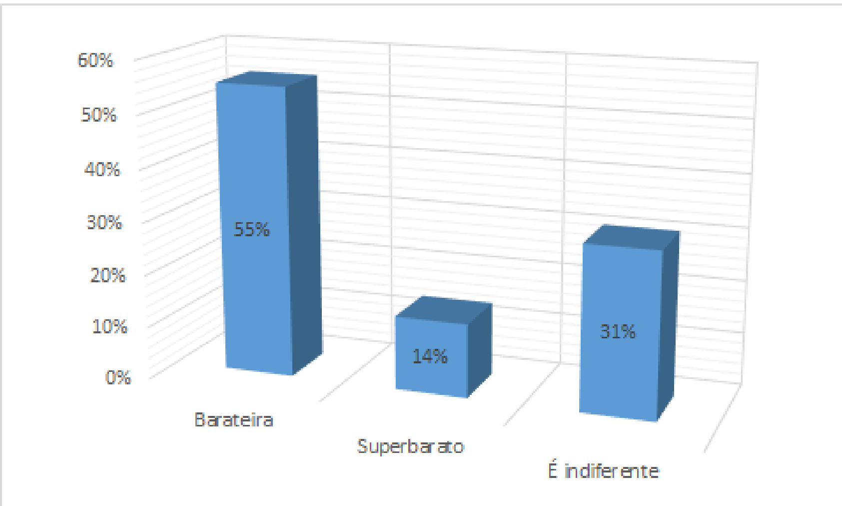


Figura 34 – Respostas da Pergunta 15

Comentário: Problema simples, envolvendo noções básicas de proporção e porcentagem, que uma parte significativa, 45%, não soube resolver corretamente.

3.3 CURSO MINISTRADO

Com os resultados obtidos no questionário diagnóstico, percebeu-se que a grande maioria dos alunos, quando estão terminando o Ensino Médio, já são economicamente ativos, ao mesmo tempo que algumas deficiências ficam bem evidentes. A noção que a maioria tem sobre alguns temas relevantes da Educação Financeira é insatisfatória para esse momento, em que a vida requer a tomada de decisões responsáveis e inteligentes, que implicarão na construção de uma vida saudável em uma sociedade cada vez mais exigente com relação ao tema.

Nesse sentido, o próximo passo foi uma interferência junto a esses estudantes, trabalhando os principais temas de Matemática Financeira, os quais eles já haviam tido acesso, porém agora com a proposta apresentada no segundo Capítulo desse trabalho.

Assim, foi ministrado um curso com duração de quatro horas, onde trabalhou-se alguns assuntos e exercícios do Capítulo 2 e, ao fim desse período, aplicou-se nova avaliação com questões que necessitavam dos alunos, além de uma boa interpretação, realização de cálculos e uso de ferramentas no auxílio da tomada de melhores decisões.

3.4 PÓS-CURSO: AVALIAÇÃO DE APRENDIZAGEM

Nesta seção serão apresentadas as perguntas do questionário aplicado depois do curso ministrado, cujas questões eram abertas, com as respostas na forma de gráficos de colunas, todos feitos no Excel.

Pergunta 1 - Um mesmo produto é vendido em duas lojas diferentes: na loja Barateira custa R$ 130,00, com 10% de desconto para pagamento à vista; na loja Superbarato custa R$ 150,00, com 20% de desconto para pagamento à vista. Em qual das lojas é mais vantajoso comprar? Qual é o valor à vista em cada uma das lojas?

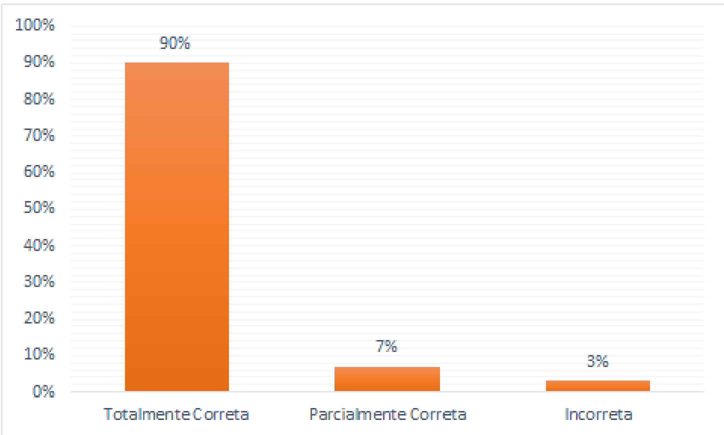


Figura 35 – Respostas da Pergunta 1 Pós-Curso

Comentário: Praticamente todos os alunos acertaram esta questão. Isso deveu-se ao pequeno grau de dificuldade, uma vez que só se usa porcentagem em sua resolução. Porém, no questionário de diagnóstico, esta mesma pergunta, a 15, teve índice de acerto de apenas 55%.

Pergunta 2 - Um investidor deposita todo mês R$ 400,00 em uma aplicação que rende 0,8% ao mês. Ao final de um ano, qual o montante acumulado?

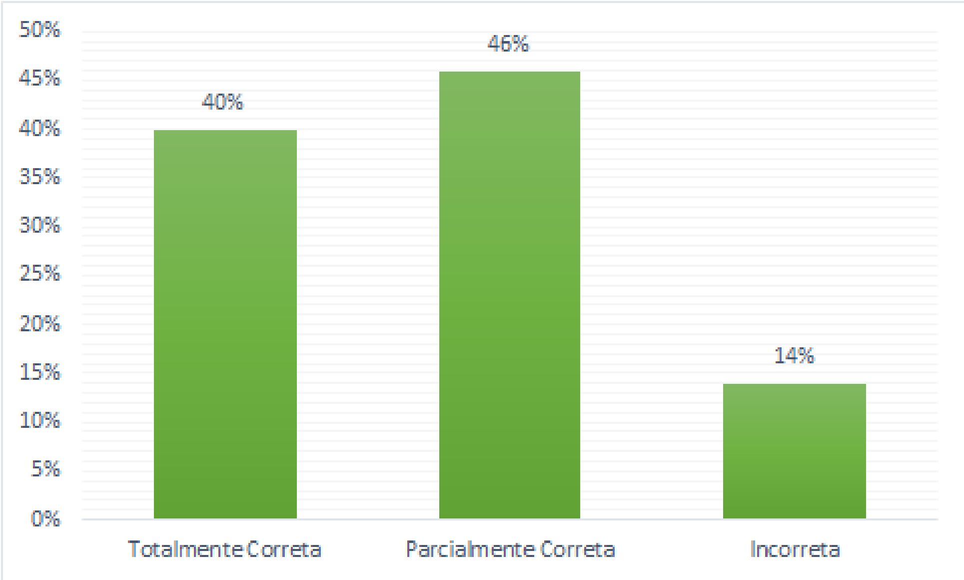


Figura 36 – Respostas da Pergunta 2 Pós-Curso

Comentário: Aqui os alunos tiveram certa dificuldade em utilizar a fórmula de séries uniformes ou da soma dos termos de uma Progressão Geométrica. Levando-se em conta que mais da metade acertou parcial ou totalmente, pode-se considerar o resultado como satisfatório.

Pergunta 3 - Uma empresa de crédito que cobra 2% de juros mensais sobre o saldo devedor, no final de seis meses, quanto acumula de juros?

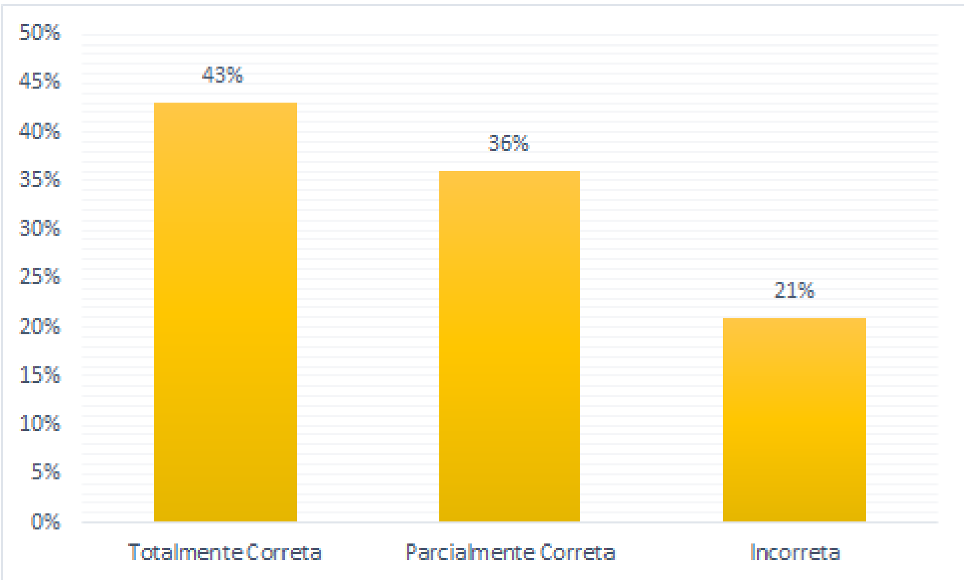


Figura 37 – Respostas da Pergunta 3 Pós-Curso

Comentário: Visto que 79% dos alunos acertaram a resposta total ou parcialmente, pode-se considerar como um bom resultado.

Pergunta 4 - Um cidadão empresta R$ 2.500,00 para seu amigo, ficando combinado que a taxa de juros a ser paga deve ser de 1% ao mês. No final de oito meses, querendo efetuar o pagamento, o devedor procura o credor para esclarecer se serão cobrados juros simples ou compostos. Qual tem maior rendimento? Qual seria a diferença de valores neste caso?

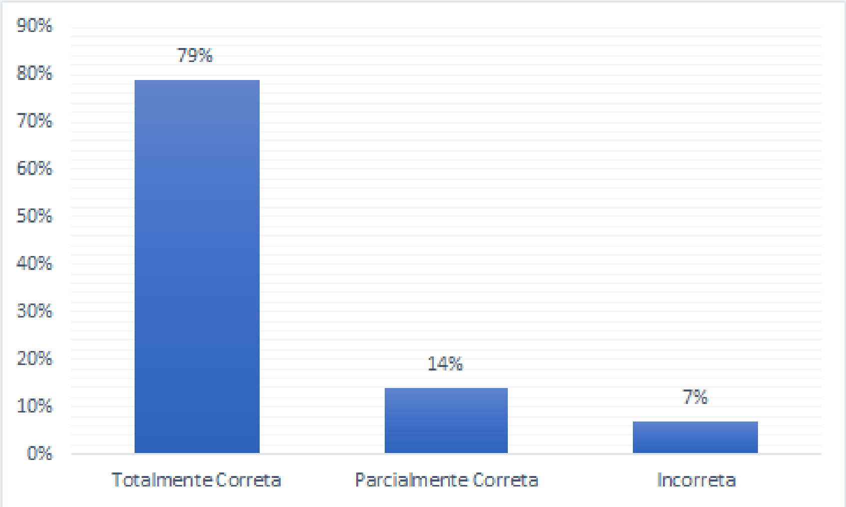


Figura 38 – Respostas da Pergunta 4 Pós-Curso

Comentário: Os resultados permitem acreditar que os alunos têm bom domínio dos conteúdos de juros simples e compostos.

Pergunta 5 - Em Santa Catarina, o IPVA oferece duas opções de pagamento: à vista ou parcelado em três vezes sem juros. Para um cidadão que possui a quantia para liquidar todo o imposto devido, de R$ 834,15, aplicado com rendimento de 1% ao mês, qual das opções é financeiramente mais vantajosa? Quanto ele ganha com essa opção em relação à outra?

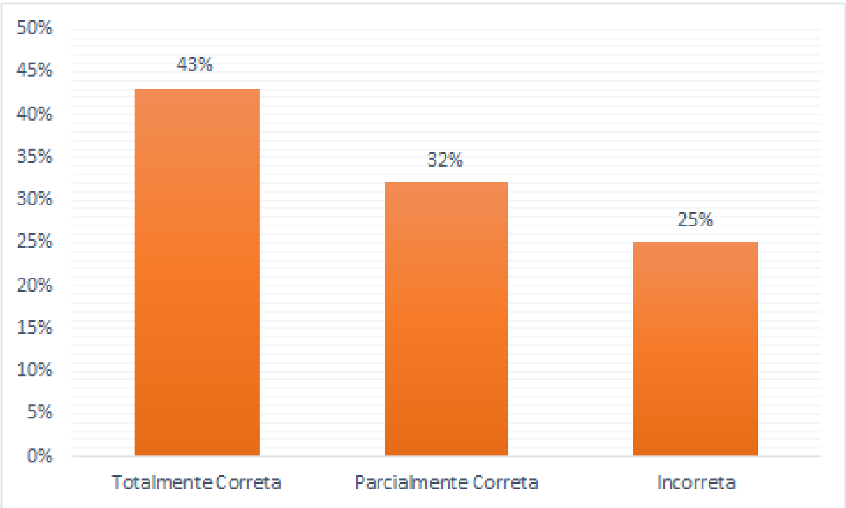


Figura 39 – Respostas da Pergunta 5 Pós-Curso

Comentário: Por se tratar de uma questão do cotidiano, pode-se considerar o resultado positivo, pois apenas 25% erraram ou não souberam responder.

Pergunta 6 - Em Fraiburgo-SC, o IPTU disponibiliza três opções de pagamento: a primeira (em parcela única), com um mês adiantado, até 10 de abril, com 20% de desconto; a segunda (em parcela única), no vencimento, até 10 de maio, com 10% de desconto; a terceira, em seis parcelas mensais iguais, com a primeira vencendo em 10 de maio. Para uma pessoa que tem seu dinheiro aplicado na Caderneta de Poupança rendendo 0,7% ao mês, qual opção é mais vantajosa? Em cada caso, qual o valor do dinheiro em 10 de maio?

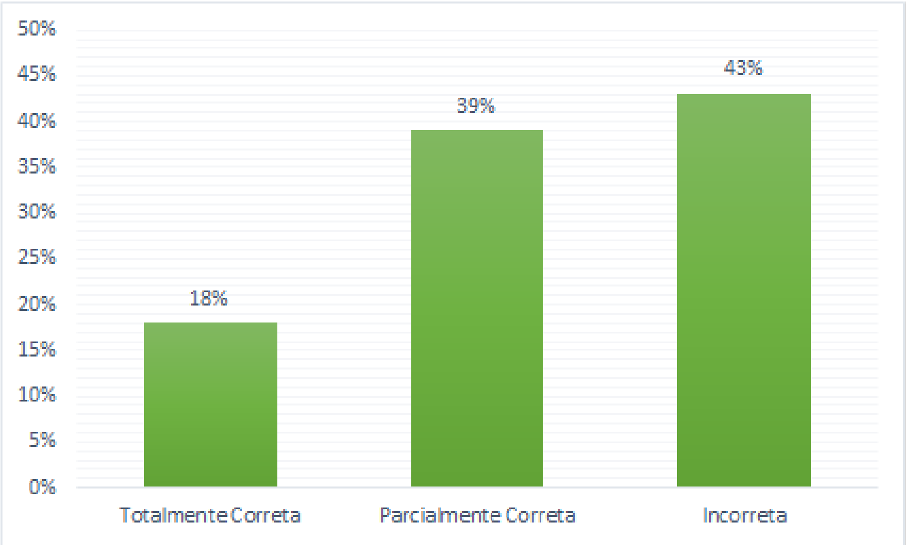


Figura 40 – Respostas da Pergunta 6 Pós-Curso

Comentário: Esta questão possibilitou perceber a dificuldade que a maioria dos estudantes tem para situar os diversos valores financeiros no tempo.

Pergunta 7 - As aulas de Educação Financeira ministradas no Colégio ficaram ...

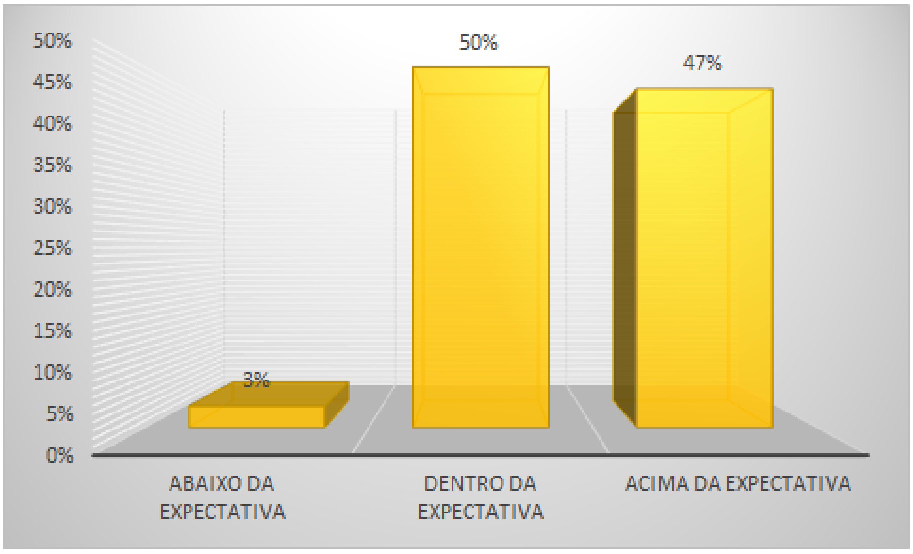


Figura 41 – Respostas da Pergunta 7 Pós-Curso

Comentário: Pode-se considerar que 97% dos estudantes ficaram satisfeitos com o curso ministrado, pois se manifestaram positivamente. Isto faz pensar que iniciativas como esta são bem-vindas e podem despertar grande interesse na sociedade.

A oitava e última questão era subjetiva e pedia aos estudantes que descrevessem de que maneira o conhecimento adquirido nas aulas de Educação Financeira poderá contribuir para a sua vida.

A seguir são mostradas imagens de algumas das respostas dadas por eles.

8)Escreva de que maneira o conhecimento adquirido nas aulas de Educação Financeira poderá contribuir na sua vida.

Aprendi diversos macetes, que tornaram as contas mais "fáceis". Tinha bastante dificuldade, e agora com o auxílio acredito que vai ser bem mais fácil conseguir! Pois educação financeira é nosso cotidiano.

8)Escreva de que maneira o conhecimento adquirido nas aulas de Educação Financeira poderá contribuir na sua vida.

Eu acredito que em muitas coisas na minha vida, no caso de compra-los em lojas, saber oque é mais vantajoso.

8)Escreva de que maneira o conhecimento adquirido nas aulas de Educação Financeira poderá contribuir na sua vida.

Ajuda-nos a pensar qual será a melhor forma de investirmos ou gastarmos o nosso dinheiro

8)Escreva de que maneira o conhecimento adquirido nas aulas de Educação Financeira poderá contribuir na sua vida.

Contribui para o meu conhecimento e ao bom uso de meu dinheiro e de minha família para melhor entender as armadilhas dos bancos.

8)Escreva de que maneira o conhecimento adquirido nas aulas de Educação Financeira poderá contribuir na sua vida.

O conhecimento financeiro trará mais sabedoria para Administrar nosso dinheiro para ter-mos uma vida melhor

8)Escreva de que maneira o conhecimento adquirido nas aulas de Educação Financeira poderá contribuir na sua vida.

Irá contribuir para o aluno começar a avaliar melhor suas escolhas antes de efetuar alguma compra, empréstimo ou algo do gênero

8)Escreva de que maneira o conhecimento adquirido nas aulas de Educação Financeira poderá contribuir na sua vida.

Para eu poder ter uma boa administração do meu dinheiro, e saber quais serviços bancários utilizar.

8)Escreva de que maneira o conhecimento adquirido nas aulas de Educação Financeira poderá contribuir na sua vida.

Pode me ajudar quando eu for fazer alguma compra, vou saber planejar se vou gastar muito, e se é mais viável compras a vista ou a prazo.

8)Escreva de que maneira o conhecimento adquirido nas aulas de Educação Financeira poderá contribuir na sua vida.

AS AULAS DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA PODERÁ CONTRIBUIR MUITO EM MINHA VIDA, POIS AGORA SEI QUANTO EU GASTO, QUANTO É DE JURO, ESSAS AULAS ME MOSTRARAM O PREJUIZO DO CARTÃO DE CRÉDITO, QUE COMPENSA NA MAIOR PARTE DAS VEZES ESPERAR E PAGAR A VISTA.

3.5 CERTIFICADO

ESTADO DE SANTA CATARINA
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
9ª GERÊNCIA REGIONAL DA EDUCAÇÃO
802000754420 – ESCOLA DE EDUCAÇÃO BÁSICA SÃO JOSÉ
AV. Miguel Novick, S/N; fone: (49) 3533-5447
89580-000 – FRAIBURGO – SANTA CATARINA

CERTIFICADO

Certifico para os devidos fins, que SANDRO MARCIO PRIMON, RG nº.: 2.975.682 CPF nº. 848.010.859-20, Professor de Matemática do Ensino Médio, titular de cargo efetivo nesta Unidade Escolar, ministrou um curso de Educação Financeira no total de 02 encontros de 120 minutos cada, no mês de Abril do ano de 2017.

Por ser expressão da verdade, firmo este certificado.

ESCOLA DE EDUCAÇÃO BÁSICA SÃO JOSÉ
Manutenção Estado de Santa Catarina
Parecer nº 051 - CEE
Av. Miguel Novick, s/nº - Nações
Fone: (49) 3533-5447
e-mail: eebsanjose@sed.sc.gov.br
89.580-000 - Fraiburgo - SC

Fraiburgo(SC), 26 de junho de 2017

DEIZE MARIA BARETTA
Diretora

4 CONCLUSÃO

A observação diária de situações preocupantes relacionadas à área financeira, bem como a certeza de que na Matemática tem-se uma grande aplicabilidade de conteúdos que poderiam estimular um novo pensar e atuar na sociedade, foram os norteadores na escolha da Educação Financeira como tema deste trabalho. Ao transitar diuturnamente no corredores escolares verifica-se a carência da prática escolar em questões básicas do cotidiano financeiro das pessoas, e percebe-se as consequências desta para a vida do educando. Isso faz refletir sobre as palavras de Gustavo Cerbasi[1], quando afirma que “enquanto nosso modelo de educação negligenciar a necessidade de ensinar nossos jovens a empreender e planejar sua vida, mais resignação e conformismo teremos entre os trabalhadores deste país”.

Assim, ao findar esse trabalho, verifica-se que a escolha deste tema, dentre tantos campos disponíveis no universo da Matemática, contribui para solucionar boa parte de problemas que envolvem situações reais, os quais implicam diretamente na qualidade de vida de todos os cidadãos. Tem-se a clareza de que é preciso cada vez mais criar estratégias para a contextualização dos conteúdos matemáticos aplicados todos os dias nas salas de aula das escolas brasileiras. Com isso, busca-se a ressignificação do Ensino de Matemática, que além de proporcionar evolução na capacidade de raciocínio, contribua também para a formação do indivíduo enquanto cidadão inserido em um contexto social, no qual saiba agir com consciência, discernimento e equilíbrio, para bem administrar sua vida em todos os aspectos.

Outro fator que deve ser considerado é no que tange à utilização de ferramentas que demandam tecnologias, pois são imprescindíveis e cada vez mais fazem parte do mundo e portanto a escola não pode ser alheia a isso. Esta deve sim adequar-se ao contexto tecnológico exigido, bem como utilizar-se destes como facilitadores de aprendizagem e de uma maior compreensão tanto dos conteúdos trabalhados, como do mundo como um todo. Na realização deste trabalho utilizou-se de aplicativos conhecidos como *GeoGebra* e Excel, bem como *links* ferramentas tecnológicas disponíveis gratuitamente.

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, pôde-se compreender que urge em nossas escolas uma maior atenção à questão das finanças pessoais. Ao realizar a experiência descrita no Capítulo 3, pôde-se constatar que os estudantes concluem o Ensino Médio tendo visto todos os conteúdos da grade curricular, mas não conseguem fazer um paralelo dos mesmos com situações que se apresentam em seu dia a dia, e que a sociedade exige que saibam resolver. Propõe-se, portanto, que iniciativas como a experimentada pelo autor, de criar e ministrar cursos aos estudantes, seja cada vez mais frequente.

[1] Escritor, consultor financeiro, professor, palestrante e administrador brasileiro.

Assim sendo, este trabalho, que está alinhado à ENEF e à BNCC, também pode servir de reflexão e discussão no meio escolar, e seria mais um pequeno passo para o reconhecimento da importância da Educação Financeira na formação e instrução dos cidadãos, visando atingir o exercício pleno de sua cidadania.

REFERÊNCIAS

ASSAF-NETO, A. **Finanças Corporativas e Valor**. São Paulo: Atlas, 7 ed, 2014.

BRASIL, B. C. do. **Gestão de Finanças Pessoais**. Brasília: Banco Central do Brasil, 2013. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/pre/pef/port/caderno_cidadania_financeira.pdf>. Acesso em: 03 jul. 2017.

BRASIL, C. C. B. do. **As Muitas Faces da Moeda**. Rio de Janeiro: Centro Cultural Banco do Brasi, 1998.

CERBASI, G. **Pais Inteligentes Enriquecem seus Filhos**. Rio de Janeiro: Sextante, 2011.

CERBASI, G. **Dinheiro: Os Segredos de Quem Tem**. Rio de Janeiro: Sextante, 2016.

FéLIX, L. **Pluto - Aristófanes - A Quem a Riqueza Acompanha?** Jornal Carta Forense, 2010. Disponível em: <http://www.cartaforense.com.br/conteudo/colunas/pluto—aristofanes—a-quem-a-riqueza-acompanha/5871>. Acesso em: 03 jul. 2017.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários à Prática Educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 53 ed, 2016.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**. São Paulo: Atual Editora, vol. 4, 7 ed, 2004.

LIMA C. B.; DE Sá, I. P. **Matemática Financeira no Ensino Fundamental**. Vassouras-RJ: Revista Eletrônica TECCEN, vol. 3, n. 1, p. 34-43, 2010. <Disponível em: <http://www.uss.br/pages/revistas/revistateccen/V3N12010/artigo03.pdf>. Acesso em: 03 jul. 2017.

MEC. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica**. Brasília, 2013.

MEC. **Base Nacional Comum Curricular, Proposta Preliminar, Segunda Versão Revista**. Brasília, 2016, p. 568. Disponível em: <http://historiadabncc.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf>. Acesso em: 26 jun. 2017.

MEC. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017, p. 225. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf>. Acesso em: 26 jun. 2017.

ORTEGA R. R.; ABBEG, T. P. **História, Resolução Numérica e GeoGebra no Ensino de Equações Algébricas**. Revista Professor de Matemática Online, vol. 4, p. 5-20, 2016. Disponível em: <http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/2016/02/pmo-sbm-v004-n001-ortega-junior-e-abbeg.pdf>. Acesso em: 03 jul. 2017.

SANTOS, K. M. B. dos. **A Matemática do Financiamento Habitacional**. Curitiba: UTFPR, 2015. Disponível em <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/1363>. Acesso em: 03 jul. 2017.

TAHAN, M. **O Homem que Calculava**. Rio de Janeiro: Editora Record, 83 ed, 2013.