Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Um estudo das cônicas

Danielle Michaelsen Lago

Goiânia

2017

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[ ] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Nome completo do autor: Danielle Michaelsen Lago

Título do trabalho: Um estudo das Cônicas

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

D Lago

Assinatura do (a) autor (a) [2]

Data: 13 / 04 / 2017

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Danielle Michaelsen Lago

Um estudo das cônicas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dra. Thaynara Arielly de Lima

Goiânia

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Michaelsen Lago, Danielle
Um estudo das cônicas [manuscrito] / Danielle Michaelsen Lago. - 2017.
96 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Thaynara Arrielly de Lima.
Trabalho de Conclusão de Curso Stricto Sensu (Stricto Sensu) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Catalão, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - profissional), Goiânia, 2017.
Bibliografia.

1. . I. Arrielly de Lima, Thaynara, orient. II. Título.

CDU 51

Universidade Federal de Goiás-UFG
Instituto de Matemática e Estatística-IME
Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UFG
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso da aluna Danielle Michaelsen Lago – Aos trinta e um dias do mês de março do ano de dois mil e dezessete (31/03/2017), às 16:30 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof.ª. Drª. Thaynara Arielly de Lima – Orientadora; Prof.ª. Drª. Kélem Gomes Lourenço e Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos , para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Auditório do IME, procederem a avaliação da defesa intitulada: **"Um Estudo das Cônicas"**, em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Danielle Michaelsen Lago discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pela Presidente da banca, Prof.ª. Drª. Thaynara Arielly de Lima , que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida a autora do TCC que, em 30 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1075/2012 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do IME da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 17:30 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, Sonia Maria de Oliveira, secretária do PROFMAT/UFG, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, é assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Thaynara A. de Lima
Prof.ª. Drª. Thaynara Arielly de Lima
Presidente – IME/UFG

Kélem Gomes Lourenço
Profª. Drª. Kélem Gomes Lourenço
Membro – IME/UFG

JESV
Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos
Membro – IFG/GOIÂNIA

Danielle Michaelsen Lago graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais em 2009, pós graduada em docência do ensino superior, professora com mais de 8 anos de atuação em sala de aula nos níveis básico e superior.

Dedico este trabalho ao meu companheiro Claudionor Francisco da Silva que me incentivou e apoiou durante todo o curso.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais que desde a infância investiram e apoiaram os meus estudos.

Agradeço aos professores da UFG que me instruíram e me ajudaram nesta conquista.

Agradeço em especial a professora Thaynara que com paciência e dedicação me orientou para que este trabalho fosse concluído.

Resumo

Este trabalho foi realizado para auxiliar professores e alunos do ensino médio no estudo das figuras geométricas conhecidas como elipse, parábola e hipérbole obtidas através da secção do cone. Apresentaremos como os principais personagens da história influenciaram nas descobertas relativas ao conteúdo. Demonstraremos as respectivas equações canônicas (reduzidas) de cada uma das figuras bem como a equação geral para a obtenção dessas estruturas. Apresentaremos algumas das as aplicações oferecidas por estas estruturas ressaltando a importância do estudo deste tema.

Palavras-chave

Cônicas, elipse, parábola, hipérbole, cone.

Abstract

This work was carried out to help teachers and students of high school in the study of geometric figures known as ellipse, parabola and hyperbola obtained through the cone section. We will present how the main characters in the story influenced the findings. We will demonstrate the respective canonical (reduced) equations of each of the figures as well as the general equation. We will present some of the applications offered by these structures emphasizing the importance of studying this theme.

Keywords

Conical, ellipse, parabola, hyperbola, cone.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Geometria, é uma palavra que teve sua origem no grego antigo e significava algo próximo a "medir a terra". Como a maioria das descobertas são advindas da solução de problemas, todas as vezes que as águas do Rio Nilo no antigo Egito subiam de seu nível normal cobrindo as terras às margens do rio, os chamados "homens com as cordas" mediam essas terras, pois, os proprietários pagariam impostos de acordo com a área disponível para o plantio, daí o nome sugestivo dessa disciplina.

Em termos gerais, a geometria é associada a argumentos ligados à forma, à posição e às propriedades de figuras planas e espaciais. Mas, em que poderia contribuir o estudo dessa disciplina aos estudantes atuais?

Crescenti (1999, p. 49) coloca que o estudo da Matemática nas escolas tem se pautado nas seguintes razões: por ser uma matéria necessária às atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos e no desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de abstrair e generalizar.

Lorenzato (1995, p.6) diz que a "Geometria é um ramo da Matemática de extrema importância [...] e se interliga com a aritmética e com a álgebra porque os objetos e as relações dela correspondem aos das outras".

Passos (2000, p. 49) também ressalta que a Geometria pode ser considerada como "uma ferramenta muito importante para a descrição e inter-relação do homem com o espaço em que vive", uma vez que consiste na "parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade".

Dentre as expectativas do ensino da geometria estão desenvolver raciocínios cognitivos e lógicos, expressar ideias verbais e simbólicas e colocar em ação habilidades adquiridas em sala de aula. Em geral, quando os estudantes desenvolvem essas capacidades passam a utilizá-las em contextos diretamente ligados à sua convivência. Adquirem a capacidade de solucionar problemas ligados ou não à matemática, à geometria ou a qualquer outro ramo de estudo. Por isso a necessidade de sempre apontar, incentivar e estimular o aluno na busca do interesse por esta disciplina apresentando a influência que esta exercerá em seu crescimento intelectual.

Outro fator que afeta as escolas de ensino atuais é o grande despreparo dos professores de matemática para lecionarem a geometria [3].

Segundo Lorenzato (199, p. 22), o ensino da Geometria está superficial nas salas de aula. O autor afirma que muitos dos professores não possuem os conhecimentos necessários de Geometria, para que possam ensiná-la.

Pavanello (1993, p. 15) também indica que a atual desvalorização do ensino da Matemática está bastante associada à formação geométrica do professor. Em geral, faltam competências a estes profissionais para exercer tal ofício. Esta falta causa aos discentes uma perda expressiva dos conhecimentos geométricos esperado.

Silva (2009, p. 28), considera que o insucesso está nos professores, com a capacitação inadequada, uso da metodologia tradicional, o uso inadequado de recursos pedagógicos, e a falta de incentivo na utilização de novos recursos pedagógicos no processo ensino/aprendizagem.

Ruiz e Bellini (2011, p. 32) também considera as dificuldades dos alunos em relação à Matemática, sua origem em uma prática pedagógica inadequada, baseada em aulas expositivas, na repetição constante de exercícios parecidos, na prática de siga o exemplo.

Para minimizar esses problemas, sólidos geométricos em acrílico, datashow, softwares relacionados à geometria como o Geogebra, o Cabri 3D, Winplot, etc, são exemplos de ferramentas disponíveis no mercado que podem auxiliar os profissionais nas ministrações dessas aulas geométricas.

> "É importante entender que [...] o desenvolvimento da visualização, juntamente com a intuição, a percepção e a representação, está relacionado com a passagem do espaço real para o espaço teórico" (Wagner, 2012, apud Hershkowitz, 1994, apud Fainguelernt, 1999).

Por isso a necessidade indispensável do professor de preparação, buscando conhecer e aprimorar seus conhecimentos em ferramentas visuais e métodos de ensino objetivando utilizá-los com segurança e competência no desenvolvimento do exercício em sala de aula. Pensando nessas dificuldades decidi apresentar este trabalho no curso de Mestrado profissionalizante voltado ao aperfeiçoamento do professor de matemática da escola básica recordando um de alguns dos temas geométricos que estão cada vez mais distantes dos alunos do ensino médio das escolas.

O Trabalho propõe colocar em discussão um conteúdo da Geometria analítica, as cônicas. Limitando-se às discussões simples e aos conceitos elementares, apresentando o conteúdo de modo a facilitar a compreensão tanto do professor quanto do aluno. A maioria das figuras apresentadas ao longo do trabalhado foram desenvolvidas pela autora no software GeoGebra.

No Capítulo 2 apresentamos as discussões históricas em torno ao tema. Iniciamos o trabalho apresentado a problematização da *duplicação do volume do cubo* levantada pelos gregos e a solução proposta por Hipócrates de Quíos. Em seguida falaremos das contribuições de Menecmo e Apolônio de Pérgamo no desenvolvimento da geometria analítica.

No Capítulo 3 apresentaremos a etimologia e a definição histórica das cônicas, passando por Euclides de Alexandria, Apolônio até a modernidade.

No Capítulo 4 nos dedicaremos a apresentar todos os conhecimentos relativos à seção cônica conhecida por parábola, desde a definição histórica, equação canônica, identificação e propriedades dessa estrutura.

Nos Capítulos 5 e 6 nos dedicaremos aos estudos da elipse e da hipérbole respectivamente. De maneira análoga a parábola, apresentaremos desde a definição histórica, equação canônica, identificação e propriedades dessas estruturas.

No Capítulo 7 nos dedicaremos a apresentar a equação geral das cônicas, identificação das mesmas através do cálculo do discriminante da equação do 2º grau e a equação na forma matricial.

No Capítulo 8 apresentaremos algumas aplicações das estruturas cônicas na atualidade: na astronomia, na engenharia ou arquitetura, na óptica, na acústica e em diversos campos tecnológicos.

E assim concluiremos o trabalho.

Capítulo 2

Estruturas cônicas: História

2.1 Um problema sem solução para os gregos

O livro [23] de Tomas Gutierres aponta os gregos como principais responsáveis pelas estruturas cônicas, ao tentar resolver um problema que, a princípio, não havia nenhuma ligação com essas estruturas. Tudo tem início em Atenas por volta do ano 430 a.C; nesse período deflagra uma forte epidemia de peste levando a morte um quarto da população ateniense. Então, uma delegação é formada para visitar o oráculo de Delfos, o mais importante centro religioso da Grécia antiga. Este templo era procurado por pessoas ou por autoridades que almejavam receber, supostamente, previsões sobre o futuro, conselhos e orientações espirituais. A delegação, então, pede ao oráculo o fim da epidemia, este, concederia a bênção, desde que, lhe fosse construído um novo altar; no entanto, esse novo altar, em forma de um cubo, deveria conter o dobro de volume do anterior. A delegação, então, constrói um novo altar dobrando a medida dos lados do cubo com o intuito de dobrar seu volume, mas, estranhamente a peste não cessa, em que teriam se equivocado os atenienses?

Hoje, através da álgebra, é possível solucionar esse dilema. Uma vez dobrado o valor do lado do cubo, seu volume aumenta em oito vezes e não em duas vezes como requisitado pelo oráculo. Para se construir um novo cubo com o dobro de volume dever-se-ia construir este novo cubo multiplicando-se a aresta por $\sqrt[3]{2}$, ou aproximadamente $1,26$, vejamos o porquê:

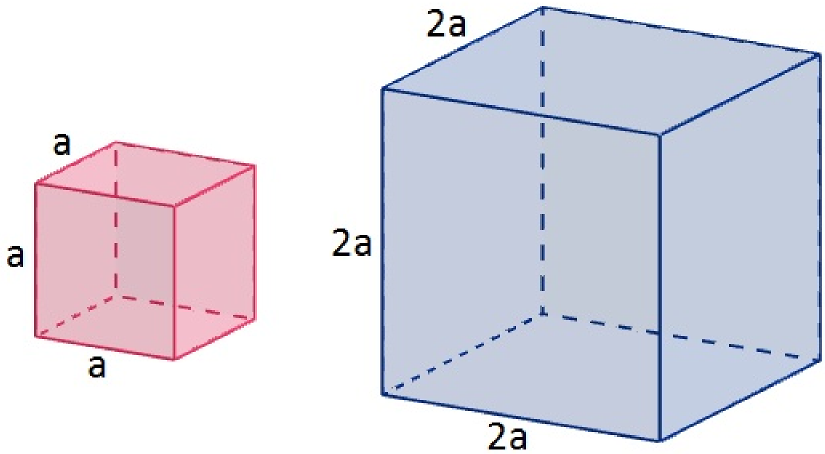

Figura 2.1: Dobrando o valor da aresta de um cubo

Seja l_1 e V_1 o lado e o volume inicial do cubo respectivamente. Sabemos que $V_1 = l_1^3$, logo, para se obter o dobro do volume inicial temos $V_2 = 2.V_1$; de onde, $l_2^3 = 2.l_1^3$ e por tanto $l_2 = \sqrt[3]{2}.l_1$, como queríamos demonstrar.

Esses cálculos confirmariam o equívoco dos atenienses, no entanto, os gregos ainda não se utilizavam de cálculos algébricos; as ferramentas disponíveis eram o compasso, para se construir círculos, e a régua, para se construir retas (instrumentos euclidianos). Nasce então, *"o problema da duplicação do cubo"*: dado um cubo, construir com instrumentos euclidianos um segmento que seja a aresta de um cubo que tenha o dobro do volume do cubo dado.

2.2 A solução de Hipócrates de Quíos

Objetivando resolver o problema, os gregos se utilizavam de várias curvas que serviam de instrumento para a solução. O primeiro matemático a tentar a solução foi Hipócrates de Quíos (460-380 a.C), nascido nas ilhas de Quíos; ele abriu uma escola de geometria e foi responsável pela criação do método da redução.

Método este que consistia em desmembrar um problema não solucionado, transformando em outro já solucionado. Utilizando dessa estratégia, ele busca resolver o problema da duplicação do cubo.

Hipócrates procurava generalizar a construção de um quadrado cuja área é igual à de um retângulo dado. Ele considerou o retângulo de lados a e b e efetuou a seguinte construção com régua e compasso que pode ser acompanhada na Figura 2.3 feita no GeoGebra 2D:

- Alinhamos dois segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{DB}$ de comprimentos b e a respectivamente, iguais a base e altura do retângulo;
- Traçamos o ponto médio (M) do segmento $\overline{AB}$;
- Construímos um semi-circulo de raio $\overline{AM}$;
- Em D traçamos segmento perpendicular ao diâmetro, até encontrar o círculo no ponto C;

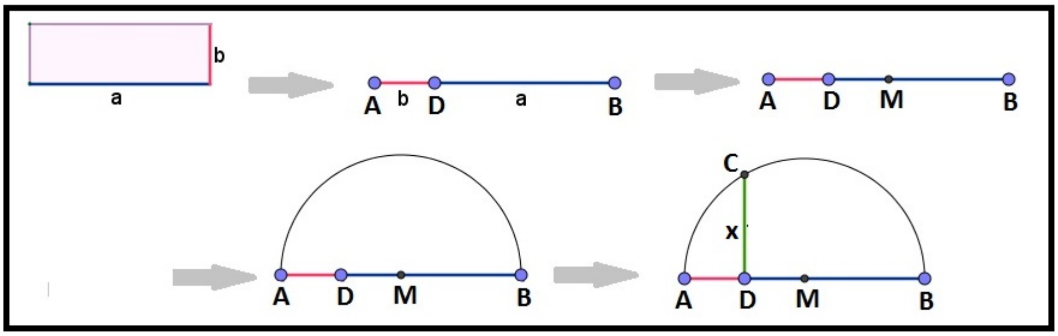

Figura 2.2: Passo a passo da construção de Hipócrates

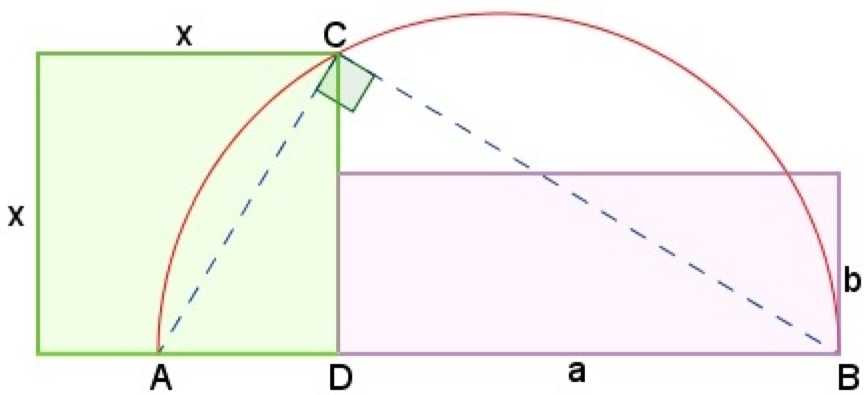

Figura 2.3: Generalização de Hipócrates

Observe na Figura 2.3 os triângulos retângulo $\triangle ADC$ e $\triangle BDC$ são semelhantes, pelo caso ângulo - ângulo, então, os catetos são proporcionais, ou seja, a está para x assim como x está para b, então:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Logo, para se construir o quadrado, geometricamente, devemos encontrar o valor de x, de tal modo que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Em sua generalização, Hipócrates acrescenta ao problema duas medidas x e y proporcionais aos segmentos a e b como mostra a Figura 2.4, obtendo as seguintes relações:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

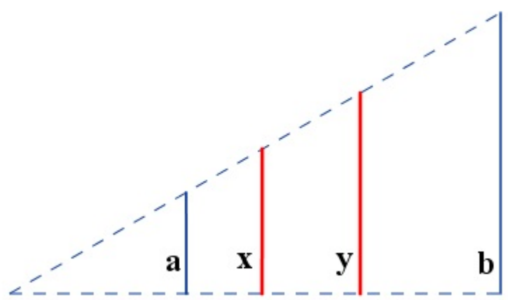

Figura 2.4: Medidas x e y proporcionais aos segmentos a e b

Elevando $\frac{a}{x}$ ao cubo, podemos escrever:

$$\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x}.\frac{x}{y}.\frac{y}{b} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{b} \leftrightarrow x^3 = \frac{b}{a}a^3$$

Baseado nesse resultado é possível construir o cubo em qualquer proporção $\left(\frac{b}{a}\right)$ desejada, no caso particular $b = 2a$ pode-se resolver algebricamente, ou seja:

$$x^3 = \frac{2a}{a}a^3 \leftrightarrow x^3 = 2a^3$$

onde a é a aresta do cubo inicial.

2.3 Menecmo e a origem das cônicas

Menaechmus (Menecmo) nasceu em 350 a.C em Alopeconnesus, atualmente localizada na Turquia. Era membro da Academia platônica, discípulo de Eudoxo e mestre de Aristóteles e também procura resolver o problema da duplicação do cubo dos gregos. Em sua solução, ele se utiliza da generalização de Hipócrates vista anteriormente, ou seja,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

e atribui os valores 1 e 2 para a e b respectivamente. Assim, deve-se encontrar x e y tais que:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2}$$

A partir dessas relações, tomando-se duas igualdades quaisquer, é possível deduzir as seguintes equações: $x^2 = y$, $y^2 = 2x$ ou $xy = 2$. A aresta do cubo desejado (aquele com o dobro de seu volume inicial) será o valor x obtido mediante a intersecção dessas curvas. Veja na Figura 2.5 a representação gráfica dessas curvas e o seu ponto de intercepção.

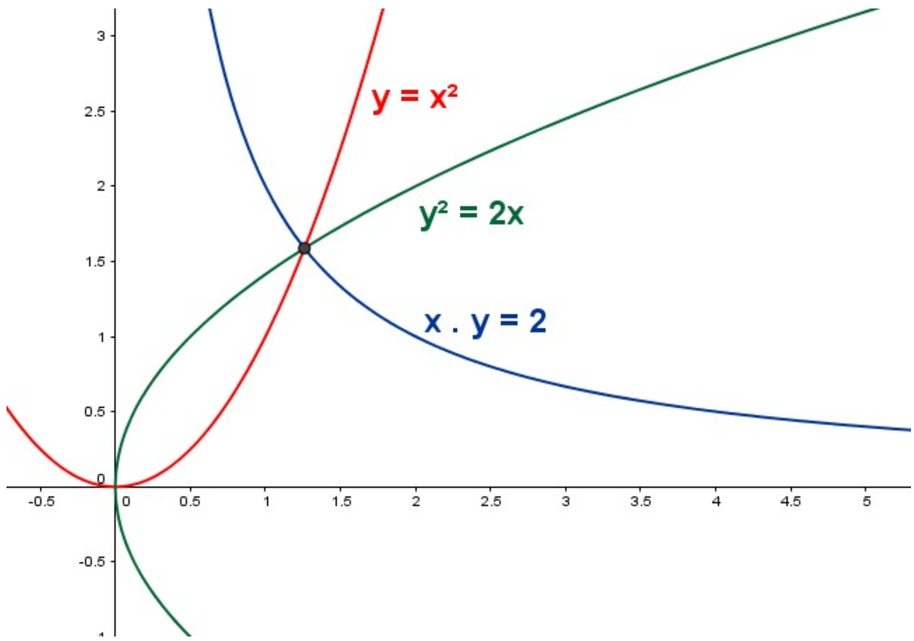

Figura 2.5: Solução de Menecmo

É fácil notar que a abcissa do ponto de intersecção de ambas as curvas é $x = \sqrt[3]{2}$, esse valor corresponde à aresta do cubo com o dobro de volume.

Hipócrates e Menecmo encontraram soluções algébrica e geométrica, respectivamente, para o problema proposto. No entanto, a utilização dos instrumentos euclidianos (régua e compasso), foi buscada somente em 1837 pelo matemático francês Pierre Laurent Wantzel (1814-1848). Segundo o artigo [24] *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géometrie peut se résoudre avec lá règle et la compas* (Pesquisa sobre os meios de reconhecer se um problema pode ser resolvido por meio de régua e compasso) publicado no *Journal de Mathématiques* em 1837 o matemático demonstra e publica definitivamente "ser impossível resolver, utilizando somente régua e compasso, o problema da duplicação do cubo".

Embora a solução de Menecmo não tivesse nada a ver com a solução do problema proposto pelos gregos, a história da matemática presencia a introdução das curvas cônicas, e, a partir de então, se tem início os estudos dessas estruturas.

2.4 Apolônio de Pérgamo

Outros matemáticos também pesquisaram o problema da duplicação do volume do cubo [12]. Euclides escreveu quatro livros sobre o assunto, dos quais não se conservaram para a atualidade. Pappus de Alexandria conta que Aristeu, um matemático contemporâneo de Euclides, também teria trabalhado sobre essas estruturas, no entanto, foi através de Apolônio de Pérgamo que o estudo das estruturas cônicas obteve o seu apogeu.

Apolônio (262-190 a.C.) nasceu em Pérgamo na atual Turquia. Devido a seu grande trabalho recebeu o título de *"o grande geômetra"*. Foi contemporâneo de Arquimedes (287-212 a.C) e estudou com os discípulos de Euclides em Alexandria. Sua obra prima *"Seções Cônicas"* era composta de oito volumes (aproximadamente 400 proposições), dos quais quatro foram escritos em grego e três em árabe e uma de suas obras se perdeu. Graças a Pappus de Alexandria (séc. IV) as demais se mantiveram até nossos dias.

O trabalho de Apolônio é a mais completa obra escrita sobre o assunto. Em seu primeiro livro, ele conta que a pedido de um geômetra chamado Neucrate, decidiu escrever esta obra. A seguir vemos na íntegra o conteúdo de uma carta escrita por Apolônio e endereçada a Eudemo de Rodi (filósofo e companheiro de Aristóteles) que resume o conteúdo de seus trabalhos:

> "Apolônio a Eudemo, saudações.
>
> Se a sua saúde se restabeleceu e se, o resto, tudo procede segundo as suas vontades, fico feliz; eu estou bem. Observei que, em nosso encontro em Pérgamo, você tinha pressa de ter notícias a respeito dos meus trabalhos sobre as cônicas, te estou enviando o primeiro livro corrigido e te enviarei os outros depois que eu estiver satisfeito com o resultado.
>
> Creio que você não se esqueceu, visto que eu te contei, que é por causa do pedido do geômetra Naucrate que foi meu hóspede na ocasião da sua visita em Alexandria, que me empenhei no sentido desse argumento e que, quando ele estava a ponto de embarcar, me senti obrigado em colocá-lo a par daquilo que eu já tinha elaborado em oito livros, sem pensar nas correções, mas, anotando tudo aquilo que eu tinha descoberto, pois, eu tinha a intenção de efetuar uma futura revisão. Agora que tive a ocasião de enunciar as coisas de maneira correta, as publico.
>
> Aconteceu que alguns estudiosos que me frequentaram receberam o primeiro e o segundo livro antes que fossem corrigidos, não estou maravilhado de encontrar problemas que serão dispostos de diversas maneiras.
>
> Os primeiros quatro livros dos oito são dedicados à exposição dos elementos. O primeiro diz respeito à geração de três seções do cone e das seções opostas, juntamente com suas principais propriedades, expostas de modo mais desenvolvido e mais geral comparado a outros autores que escreveram sobre o argumento. O segundo livro diz respeito às propriedades dos diâmetros e dos eixos das seções, das assíntotas e, além disso, diz respeito a outras coisas de uso geral, necessárias para a distinção e à explicações simples e precisas, ou seja, para discussões. É esse livro que eu intitulo diâmetros e eixos. O terceiro livro compreende inúmeros e interessantes teoremas que são úteis na construção dos sólidos e nas discussões. A maior parte e os mais belos teoremas são novos. Por outro lado, é sabendo desses resultados, que observei que para Euclides o lugar não é construído em relação a três ou quatro linhas, se isso não acontece de modo acidental, e de maneira que ele não foi feliz, porque não é possível desfrutar da construção sem as minhas descobertas complementares. O quarto livro trata de quantos

> modos se é possível interceptar duas seções cônicas com a circunferência do círculo. Este livro compreende, além daquilo que os meus predecessores não trataram, em quantos pontos uma seção do cone ou uma circunferência do círculo se encontram. Os livros restantes são muito mais ricos; de fato, é possível encontrar, de uma parte aquilo que foi mais especificamente desenvolvido no que diz respeito aos mínimos e aos máximos; por outro lado, aquilo que diz respeito às seções dos cones iguais e similares; aquilo que se refere aos teoremas que existem discussões e, enfim, aquilo que é relativo aos problemas sobre cônicas que existem. Quanto ao resto, não publiquei tudo isto pensando em retirar daqueles que encaram o argumento, a possibilidade de apreciar, cada um à sua maneira.
>
> Que a sorte te seja favorável". (MARCHINI, 2005/2006 [10])

O trabalho de Apolônio será o principal recurso de nossas pesquisas. Dado à sua importância e influência nos tempos modernos, seria impossível não atentar a seus conteúdos e ensinamentos.

Capítulo 3

Estruturas cônicas: Definições históricas

3.1 As cônicas e a etimologia

Proveniente do grego *konikós* compreende tudo que tem a forma do cone.

Neste trabalho estudaremos as seções cônicas, que, por definição, são todas as curvas especiais obtidas a partir da secção de um cone por um plano. Apresentaremos detalhadamente quais eram as compreensões, as definições e os questionamentos que os principais matemáticos envolvidos na história tinham referente a essas estruturas.

3.2 Definição de cônicas para Euclides

Euclides de Alexandria (330 a.C. a 260 a.C.) nasceu na Síria e estudou em Atenas, foi um dos primeiros geômetras da história e um dos mais importantes matemáticos da Grécia clássica. Em sua principal obra intitulada *Os Elementos* ele faz uma pequena citação de assuntos relacionados às seções cônicas. Como foi dito anteriormente, sua principal obra relacionada às estruturas desse tipo não teria chegado até nossos dias. Euclides estabeleceu ser possível obter um cone da seguinte maneira:

> “Cone é a figura compreendida, quando um lado, dos à volta do ângulo reto, de um triângulo retângulo, permanecendo fixo, o triângulo, tendo sido levado à volta, tenha retornado ao mesmo lugar de onde começou a ser levado. E, caso, por um lado, a reta que permanece fixa seja igual à restante, [...] levada à volta do ângulo reto, o cone será retângulo, caso, por outro lado, menor, obtusângulo, e caso maior, acutângulo..” (EUCLIDES, 2009, p. 482)

Como citado, para Euclides, é possível obter um cone girando um triângulo retângulo em torno de um dos catetos. A Figura 3.1 mostra passo a passo dessa construção.

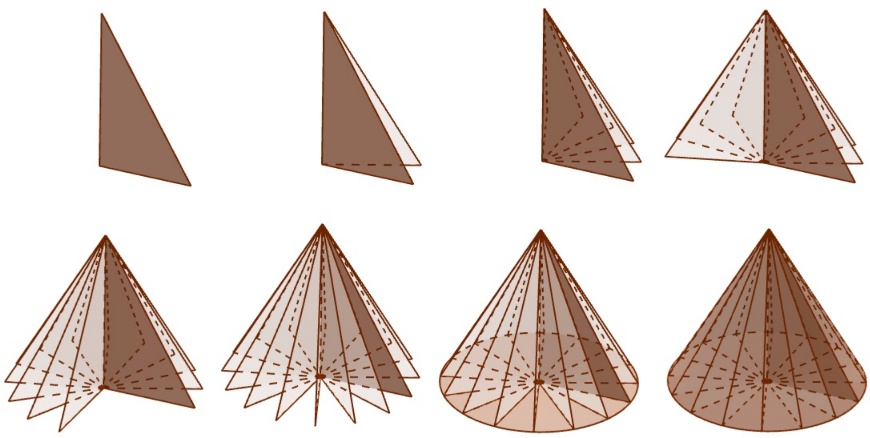

Figura 3.1: Obtenção do cone segundo Euclides

Euclides classifica os cones obtidos de acordo com a medida de um dos catetos desse triângulo. Se ambos os catetos são congruentes (o triângulo retângulo é isósceles) ele o classifica como um cone retangular, por outro lado, se o cateto fixo é menor, ele o classifica como um cone obtusângulo e, por último, se o cateto fixo é maior, ele o classifica como um cone acutângulo. Na Figura 3.1 é possível perceber a diferença entre estes cones.

Uma vez construída essas figuras, Euclides imaginou um plano que as seccionasse perpendicularmente à hipotenusa do triângulo retângulo gerador, assim, o encontro entre o plano e a estrutura dos cones (secção) geram figuras geométricas particulares, a essas seções. Euclides nomina *oxitome, ortotome* e *amblitone*, termos do original grego para designar agudo, reto e obtuso, respectivamente fazendo referência aos tipos de cones pelos quais foi gerada cada figura. As Figuras 3.3, 3.4 e 3.5 servirão para clarear melhor a compreensão desse argumento.

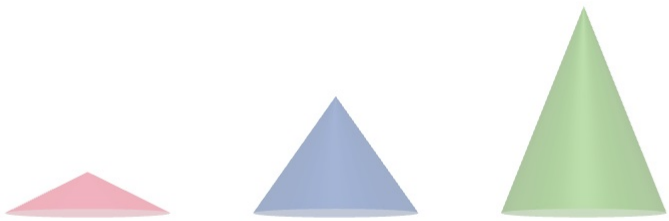

Figura 3.2: Cones de Euclides: obtusângulo, retângulo e acutângulo

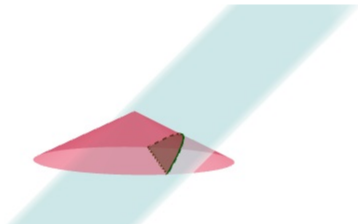

Figura 3.3: Oxitome - Cone Obtusângulo

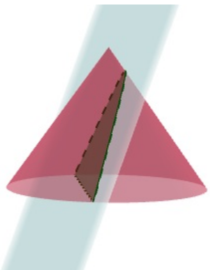

Figura 3.4: Ortotome - Cone Retângulo

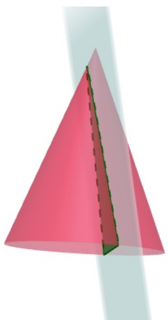

Figura 3.5: Amblitone - Cone Acutângulo

Alguns aspectos chamam a atenção na construção de Euclides, para Bellè e Napolitani, em sua obra *Le sezioni coniche dei Greci* [25], esses aspectos serão fundamentais para Apolônio na construção de suas teorias, listamos abaixo aqueles mais importantes:

- Existência de três cones diferente para gerar as cônicas;
- Existência de uma única aba, assim, a hipérbole seria composta de um único ramo;
- Os cones nascem finitos, são finitos e não se estendem;
- Não é possível obter sessões de tipos diferentes em um mesmo cone.

Veremos a seguir os argumentos apresentados nos trabalhos de Apolônio concernente a esses aspectos particulares apontados por Euclides.

3.3 Definição de cônicas para Apolônio

Como visto anteriormente, Apolônio de Pérgamo foi o maior pesquisador na história a estudar as seções cônicas. Vimos na carta escrita a Eudemo de Rodi, que Apolônio questiona algumas das descobertas deixadas por Euclides, e então decide trabalhar a respeito; tanto estava decidido nesse estudo em particular, que introduz seu primeiro livro propriamente com a definição de cone como se segue:

> "Se uma reta prolongada ao infinito passando sempre por um ponto fixo, sendo feita girar ao longo de uma circunferência de um círculo que não se encontra no mesmo plano do ponto, de modo que, passe sucessivamente através de cada ponto daquela circunferência, a reta que gira traçará a superfície de um duplo cone". (MARCHINI, 2005/2006) [10]

É possível observar essa construção passo a passo através da Figura 3.6. Hoje, tratamos o ponto fixo como sendo o vértice dos cones gerados. Como a reta em movimento é infinita, ambos os cones crescem infinitamente, o eixo dos cones obtidos passará pelo vértice e pelo centro do círculo que serviu para apoiar a reta rolante e obtemos não somente uma, mas duas abas cônicas.

Atualmente, ainda utilizamos esse tipo de construção para definir esta figura geométrica. Vimos anteriormente, que, algumas constatações estabelecidas por Euclides foram questionadas e comprovadas com êxito por Apolônio, são elas:

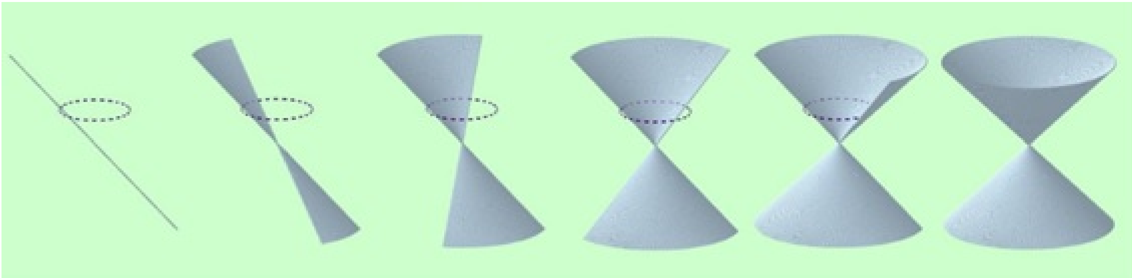

Figura 3.6: Obtenção do cone segundo Apolônio

- Não são necessários três cones distintos para se obter as seções cônicas como afirmava Euclides, apenas modificando a inclinação do plano que efetua a secção é possível obter todas as seções através de apenas um único cone, esse fato mostraremos detalhadamente mais adiante;
- A estrutura de Apolônio, sendo formada por dois cones simétricos, construiria perfeitamente os dois ramos da hipérbole, enquanto que, a construção de Euclides formaria somente um ramo;
- Euclides alegava ser finito o cone e, como se pôde perceber, Apolônio constrói cones infinitos;
- Apolônio demonstra ser possível construir seções cônicas partindo de cones não necessariamente retos.

3.4 A etimologia moderna

Os termos *"parábola"*, *"elipse"* e *"hipérbole"* foram adaptados de alguns usos anteriores. Os pitagóricos, e até Aristóteles no sec. VI a.C. utilizavam dessas palavras para designar termos relacionados ao cálculo de áreas buscando solucionar problemas com equações de segundo grau; para isso, utilizavam de uma figura geométrica conhecida, o quadrado. Ao aplicar a área do quadrado na solução da equação desejada, surgiria uma das seguintes possibilidades:

- O quadrado seria menor e, portanto, faltaria área para completar o quadrado (a essa falta chamavam elipse);

- A área do quadrado seria exatamente igual à área da figura (a essa igualdade chamavam parábola);

- A área do quadrado seria maior e, portanto, sobraria área ao completar o quadrado (a esse excesso chamavam hipérbole).

Por exemplo, dada a equação $x^2 + k.xy + y^2 = 10$ temos:

- Para $k = 1$ falta xy para que seja um quadrado $x^2 + 1.xy + y^2 = (x + y)^2 - xy$, portanto, temos uma elipse;

- Para $k = 2$ temos que $x^2 + 2.xy + y^2 = (x + y)^2$, portanto, temos uma parábola e

- Para $k = 3$ sobra xy para que seja um quadrado $x^2 + 3.xy + y^2 = (x + y)^2 + xy$, portanto, temos uma hipérbole.

Segundo o dicionario *Figuras de linguagem* [26], surgiriam os seguintes nomes:

- Parábola, do grego, significa comparação ou igualdade. Este termo também é utilizado nos evangelhos bíblicos para indicar as histórias de Cristo ao comparar figuradamente fatos, rotinas e eventos cotidianos do povo com a dinâmica do reino divino.

- Elipse, do grego, significa falta ou omissão. Na gramática da língua portuguesa utiliza-se como figura de linguagem onde se omite um termo em uma oração ou período cuja falta não altera a compreensão nem o sentido da mesma.

- Hipérbole, do grego, significa excesso ou exagero. Também faz parte da língua portuguesa essa figura de linguagem que tem a característica de exagerar copiosamente o pensamento na fala ou na escrita.

Muitos dos termos matemáticos conhecidos atualmente sofreu forte influência dos gregos, dos árabes ou dos turcos, pois, foram desses povos que herdamos muitos de nossos conhecimentos matemáticos. E, por isso, alguns nomes ligados a assuntos matemáticos fogem da lógica do significado como, por exemplo: raiz quadrada, algarismo, vetor, geometria, álgebra, abscissa, logaritmo, trigonometria e muitos outros.

Capítulo 4

Seções cônicas: Parábola

4.1 Introdução

Neste capítulo iremos apresentar conhecimentos relativos à seção cônica conhecida por parábola. Normalmente, os alunos do ensino médio têm seu primeiro contato com essa estrutura através da plotagem do gráfico correspondente às funções conhecidas como quadráticas ou do 2^o grau, mas, veremos em nossos estudos, serem muito mais amplos os conhecimentos que podem ser adquiridos através de uma análise um pouco mais detalhada e aprofundada do tema.

Inicialmente apresentaremos a definição de Apolônio. Em seguida, faremos uma apresentação formal bem como todos os elementos que compõem essa estrutura e suas equações paramétricas relativas.

4.2 Parábola: Definição Histórica

Para MARCHINI [10], a parábola teria sido a figura mais difícil a ser demonstrada ou podemos dizer parametrizada por Apolônio. Diferente da elipse ou da hipérbole que eram demonstradas a partir da falta ou do excesso da área de um quadrado, a parábola deveria conter a mesma área do quadrado tornando assim mais complexa sua demonstração. Ainda em seu primeiro livro, Apolônio apresenta a definição de parábola da seguinte maneira:

> "Se um cone é seccionado por um plano que passa pelo eixo e se esse plano é seccionado por outro plano que secciona a base do cone segundo uma reta perpendicular à base do triângulo que passa pelo eixo; se além do mais, o diâmetro da seção é paralelo a um dos lados do triângulo que passa pelo eixo, [...] chamaremos tal seção de parábola." MARCHINI [10]

Na primeira parte da definição, Apolônio descreve a construção necessária para se obter uma seção parabólica. A construção poderá ser acompanhada na Figura 4.1.

Seja um cone definido e construído como na Figura 3.6:

- Seccionamos o cone com um plano α infinito em seu eixo de simetria, com essa secção obtemos um triângulo e nominamos seus vértices por A, B e C sendo A o vértice do cone;
- Seccionamos o cone com outro plano β perpendicular ao $\triangle BAC$, logo $\alpha \perp \beta$;
- Marcamos um segmento de reta $\overline{DE}$ contida no plano β e perpendicular ao segmento de reta $\overline{BC}$ do $\triangle ABC$;
- Construímos um plano γ que contenha a $\overline{DE}$ e seja paralelo a semirreta $\overrightarrow{AC}$. A estrutura cônica parábola será formada da intersecção entre o plano γ e o cone.

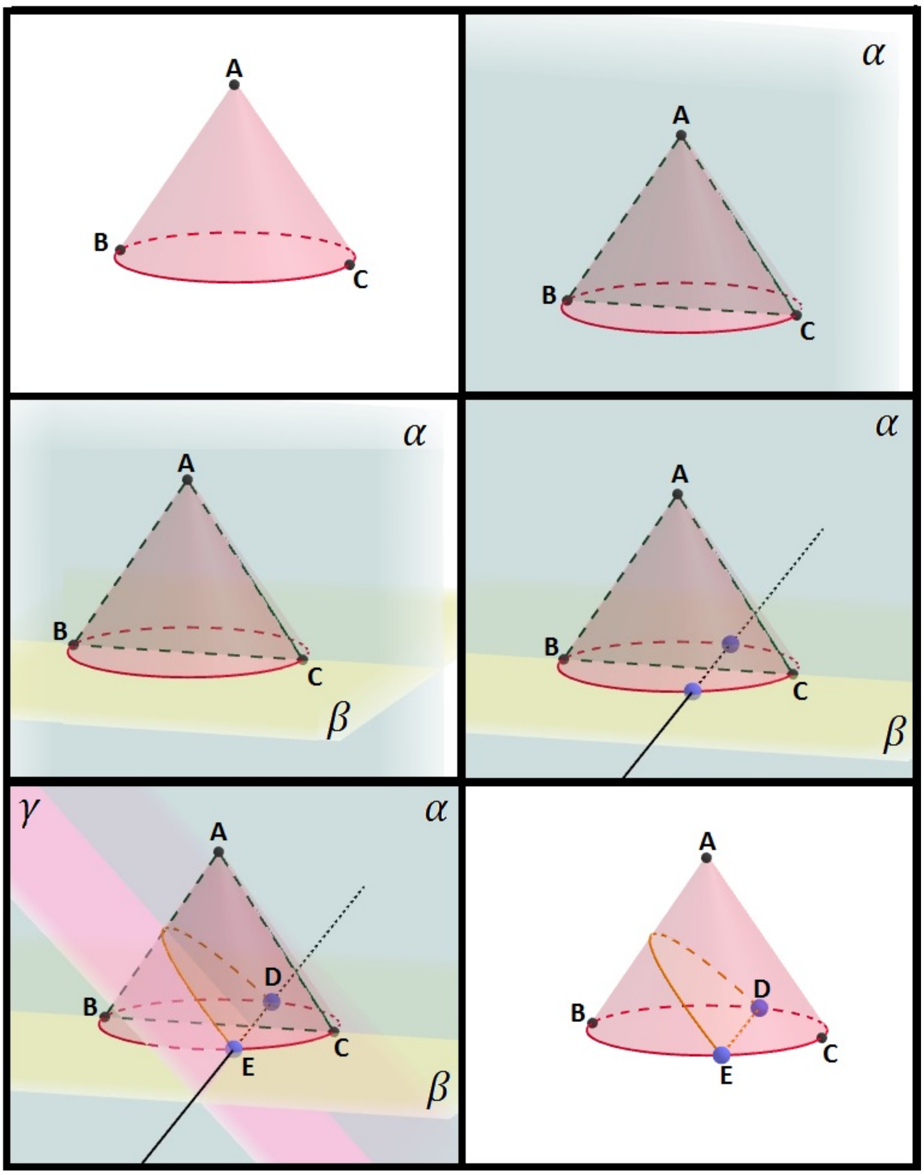

Figura 4.1: Processo de obtenção da Parábola

4.3 Elementos de uma Parábola

Uma vez obtida uma parábola como mostrado anteriormente, faz-se necessário identificar e definir os elementos e as propriedades que a compõe.

A partir das relações de Apolônio, podemos definir formalmente parábola, definição conhecida atualmente, como sendo o lugar geométrico de um plano que possui a mesma distância entre o ponto fixo F (chamado foco) e uma reta fixa d (chamada diretriz). A reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz é chamada eixo de simetria, esse eixo intercepta a parábola exatamente no ponto V, ponto médio entre o foco e a reta diretriz chamado vértice. Nominaremos de p o parâmetro utilizado para a construção da parábola. A Figura 4.2 mostra com detalhes essas informações:

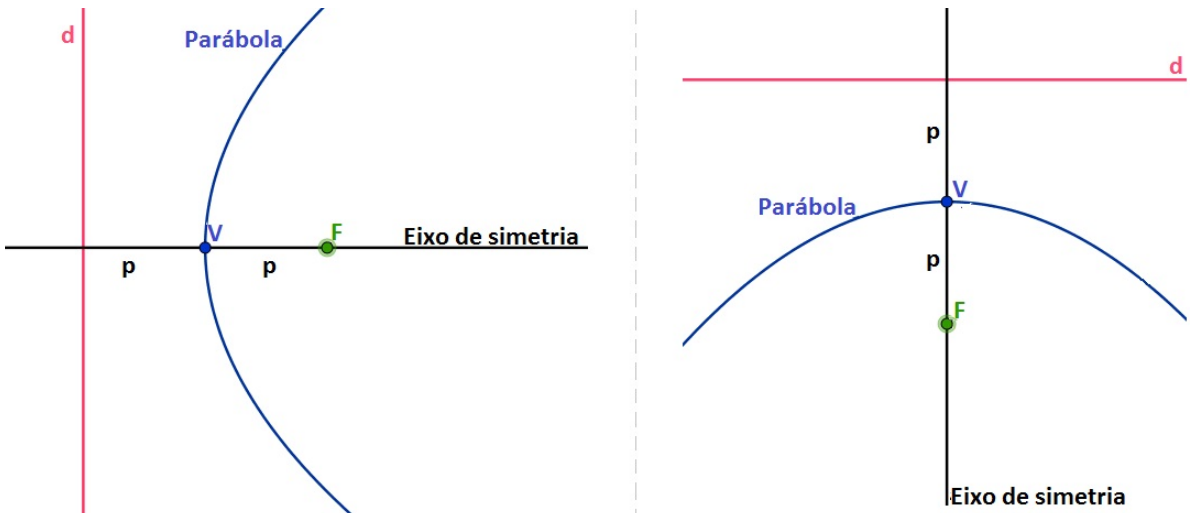

Figura 4.2: Elementos de uma Parábola

Logo, os elementos que compõem uma parábola são:

- F: foco
- V: vértice
- d: reta diretriz
- p: distância entre o foco e o vértice.

4.4 Equação Canônica da Parábola

Dizemos que uma equação está em sua forma canônica, quando a escrevemos na forma mais simples (reduzida) possível, evidenciando o que é mais importante.

4.4.1 Parábola com o foco F posicionado sobre o eixo x

Para deduzir a equação canônica da parábola utilizaremos alguns artifícios da geometria. Acrescentaremos na Figura 4.2, vista anteriormente, os eixos cartesianos x e y como mostra a Figura 4.3.

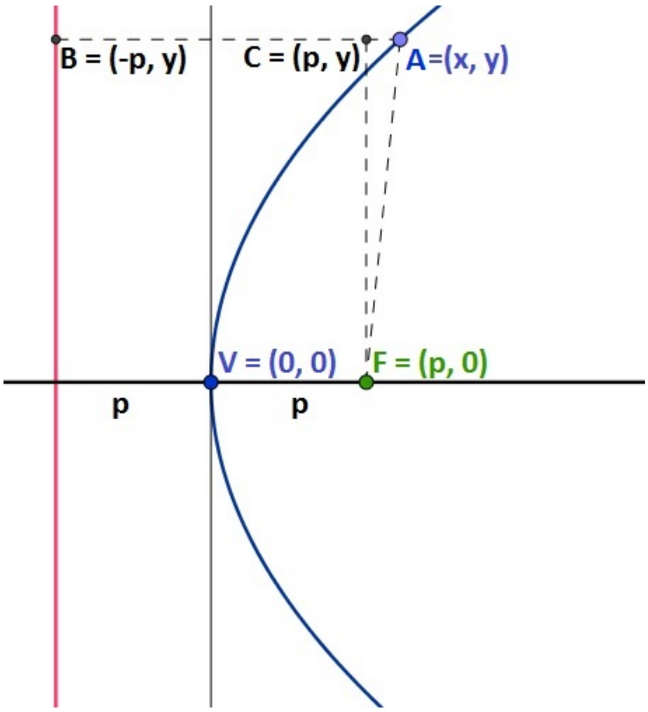

Figura 4.3: Equação Canônica da Parábola paralela ao eixo x

Para viabilizar a construção da equação canônica da parábola paralela ao eixo x, levaremos em consideração alguns parâmetros que estarão presentes nas coordenadas cartesianas dos seguintes pontos do plano: $A = (x, y)$, $F = (p, 0)$ e $B = (-p, y)$, pela definição dada anteriormente, os pontos pertencentes a uma parábola, quaisquer que sejam, possuem distâncias iguais ao foco e à reta diretriz (d). Em termos matemáticos, as distâncias entre os pontos A e B e F e A representadas na Figura 4.3 são iguais, logo: $|\overline{AB}| = |\overline{FA}|$ onde $|\overline{ST}|$ representa o comprimento do segmento $\overline{ST}$.

Como $A = (x, y)$ e $B = (-p, y)$ então

$$|\overline{AB}| = |\overline{FA}| = |x + p| \tag{4.1}$$

É fácil perceber que o triângulo $\triangle FCA$ é retângulo em C, logo, pelo Teorema de

Pitágoras, a hipotenusa do triângulo retângulo ao quadrado é igual à soma dos dois catetos ao quadrado, ou seja:

$$|\overline{FA}|^2 = |\overline{FC}|^2 + |\overline{AC}|^2$$

Como $|\overline{FC}| = y$ e $|\overline{AC}| = x - p$ então

$$\begin{aligned} |\overline{FA}|^2 &= y^2 + (x-p)^2 \\ |\overline{FA}| &= \sqrt{y^2 + (x-p)^2} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Igualando as Equações 4.1 e 4.2, temos:

$$|x + p| = \sqrt{y^2 + (x-p)^2} \tag{4.3}$$

Elevando ambos os lados da Equação 4.3 ao quadrado e desenvolvendo os termos ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned} |x+p|^2 &= \sqrt{y^2 + (x-p)^2}^2 \\ x^2 + 2xp + p^2 &= y^2 + x^2 - 2xp + p^2 \\ y^2 &= 4xp \end{aligned} \tag{4.4}$$

Denotando $4p = a$ na Equação 4.4, temos que:

$$y^2 = ax \tag{4.5}$$

A Equação 4.5 é chamada de Equação canônica reduzida de uma parábola com vértice na origem. Em outras palavras, todos os pares ordenados (x, y) que satisfizerem esta relação pertencerão ao lugar geométrico denominado parábola.

Parábola com diretriz paralela ao eixo x e com o foco (F) genérico em (h, k)

Para generalizar, ou seja, obter equações canônicas para parábolas cujos focos pertençam a quaisquer coordenadas do plano cartesiano, acrescentaremos os parâmetros h e k, onde o ponto (h, k) será o foco genérico de nossa parábola. A esse processo chamamos translação, acrescentando tais parâmetros à forma canônica $y^2 = ax$ obtida anteriormente levaremos o lugar geométrico da parábola para quaisquer posição no plano através da relação:

$$(y - k)^2 = a(x - h)$$

As Figuras 4.4 e 4.5 mostram que é possível, através do programa GeoGebra, aplicando os parâmetros a, h e k como controles deslizantes fazer variar valores e fazer com que a nossa parábola deslize pelo plano cartesiano. Essa animação é simples, prática e pode ser construída em sala de aula.

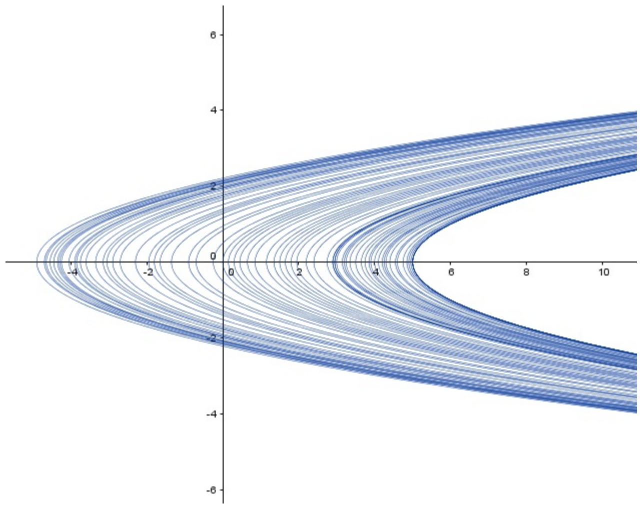

Figura 4.4: Generalização do foco, variação de h

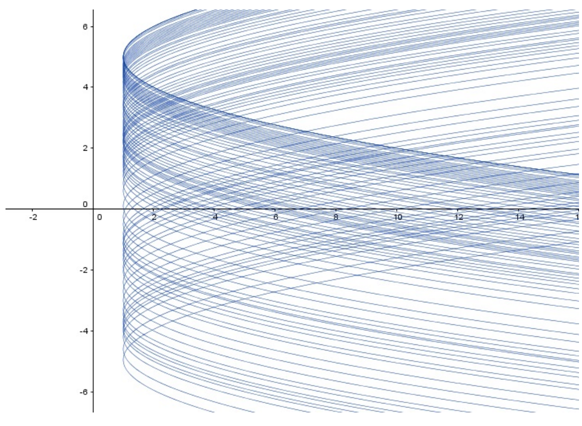

Figura 4.5: Generalização do foco, variação de k

Na Figura 4.4 foram mantidos fixos os parâmetros $a = 1$ e $k = 0$ enquanto o parâmetro h varia, logo, a parábola desliza paralelamente ao eixo x. Por outro lado, na Figura 4.5 foram mantidos fixos os parâmetros $a = 1$ e $h = 1$ enquanto que o parâmetro k varia, logo, a parábola desliza paralelamente ao eixo y.

Tivemos o cuidado de esboçar os gráficos anteriores criteriosamente com a concavidade voltada para a direita, no entanto, se variamos o parâmetro a tal que $a < 0$, como podemos observar nas Figuras 4.6 e 4.7 as concavidades relativas se voltarão para a esquerda.

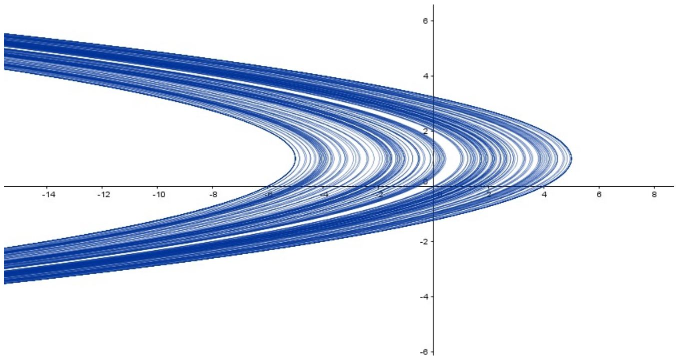

Figura 4.6: Generalização do foco, variação de h com $a < 0$

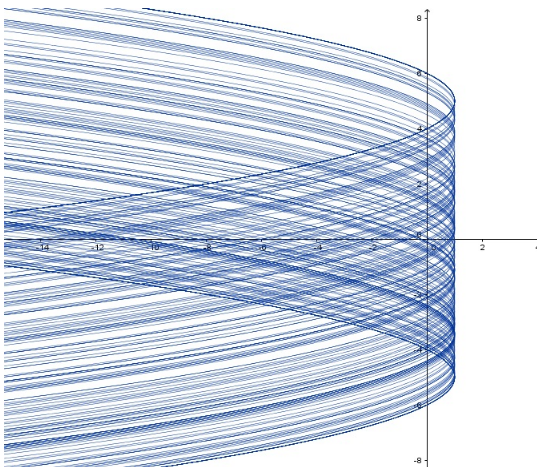

Figura 4.7: Generalização do foco, variação de k com $a < 0$

4.4.2 Parábola com o foco F posicionado sobre o eixo y

Analogamente a equação com foco sobre o eixo x, para deduzir a equação canônica da parábola utilizaremos alguns artifícios da geometria. Acrescentaremos na Figura 4.2, vista anteriormente, os eixos cartesianos x e y como mostra a Figura 4.8.

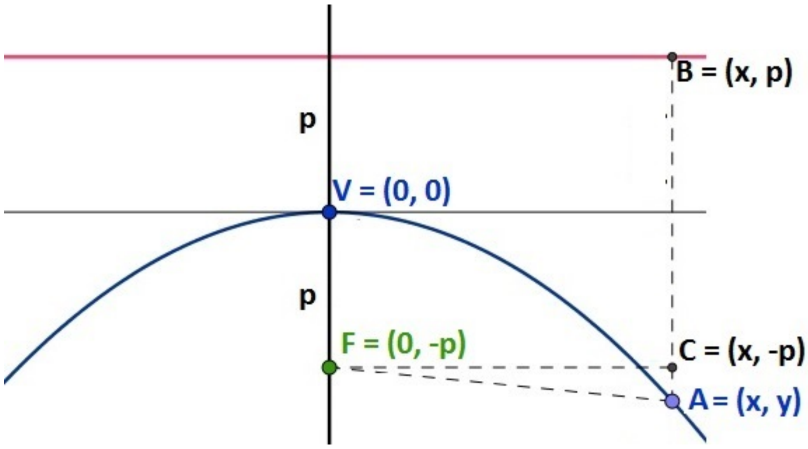

Figura 4.8: Equação Canônica da Parábola paralela ao eixo y

Para viabilizar a construção da equação canônica da parábola paralela ao eixo y, levaremos em consideração alguns parâmetros que estarão presentes nas coordenadas cartesianas dos seguintes pontos do plano: $A = (x, y)$, $F = (0, -p)$ e $B = (x, p)$, pela definição dada anteriormente, os pontos pertencentes a uma parábola, quaisquer que sejam, possuem distâncias iguais ao foco e à reta diretriz (d). Em termos matemáticos, as distâncias entre os pontos A e B e F e A representadas na Figura 4.8 são iguais, logo: $|\overline{AB}| = |\overline{FA}|$ onde $|\overline{ST}|$ representa o comprimento do segmento $\overline{ST}$.

Como $A = (x, y)$ e $B = (x, p)$ então

$$|\overline{AB}| = |\overline{FA}| = |y - p| \tag{4.6}$$

É fácil perceber que o triângulo $\triangle FCA$ é retângulo em C, logo, pelo Teorema de Pitágoras, a hipotenusa do triângulo retângulo ao quadrado é igual à soma dos dois catetos ao quadrado, ou seja:

$$|\overline{FA}|^2 = |\overline{FC}|^2 + |\overline{AC}|^2$$

Como $|\overline{FC}| = x$ e $|\overline{AC}| = y + p$ então

$$|\overline{FA}|^2 = x^2 + (y + p)^2$$
$$|\overline{FA}| = \sqrt{x^2 + (y + p)^2} \tag{4.7}$$

Igualando as Equações 4.6 e 4.7, temos:

$$|y - p| = \sqrt{x^2 + (y + p)^2} \tag{4.8}$$

Elevando ambos os lados da Equação 4.8 ao quadrado e desenvolvendo os termos ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned} |y-p|^2 &= \sqrt{x^2+(y+p)^2}^2 \\ y^2-2yp+p^2 &= x^2+p^2+2yp+y^2 \\ x^2 &= -4yp \end{aligned} \tag{4.9}$$

Denotando $-4p = a$ na Equação 4.9, temos que:

$$x^2 = ay \tag{4.10}$$

A Equação 4.10 é chamada de Equação canônica reduzida de uma parábola com vértice na origem. Em outras palavras, todos os pares ordenados (x, y) que satisfizerem esta relação pertencerão ao lugar geométrico denominado parábola.

Parábola com diretriz paralela ao eixo y e com o foco (F) genérico em (h, k)

Para generalizar, ou seja, obter equações canônicas para parábolas cujos focos pertençam a quaisquer coordenadas do plano cartesiano, acrescentaremos os parâmetros h e k, onde o ponto (h, k) será o foco genérico de nossa parábola. A esse processo chamamos translação, acrescentando tais parâmetros à forma canônica $x^2 = ay$ obtida anteriormente levaremos o lugar geométrico da parábola para quaisquer posição no plano através da relação:

$$(x-k)^2 = a(y-h)$$

As Figuras 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12 mostram que é possível, através do programa GeoGebra, aplicando os parâmetros a, h e k como controles deslizantes fazer variar valores e fazer com que a nossa parábola deslize pelo plano cartesiano. Essa animação é simples, prática e pode ser construída em sala de aula.

Observe que ao variarmos os valores de a alteremos a concavidade da parábola, ou seja, para $a > 0$ temos parábolas concavas para cima e para $a > 0$ temos parábolas concavas para baixo.

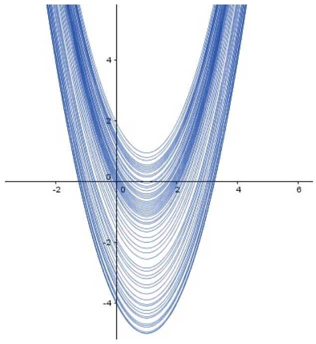

Figura 4.9: Generalização do foco, variação de h com $a > 0$

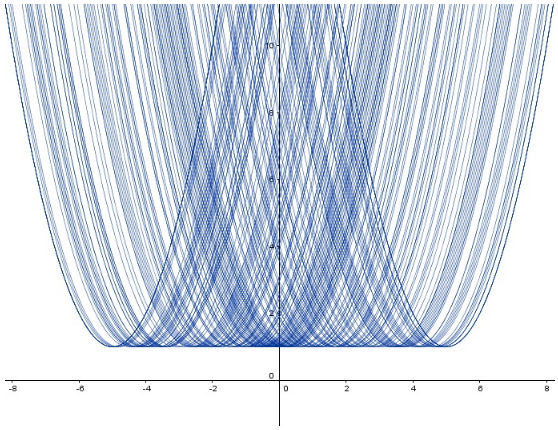

Figura 4.10: Generalização do foco, variação de k

com $a > 0$

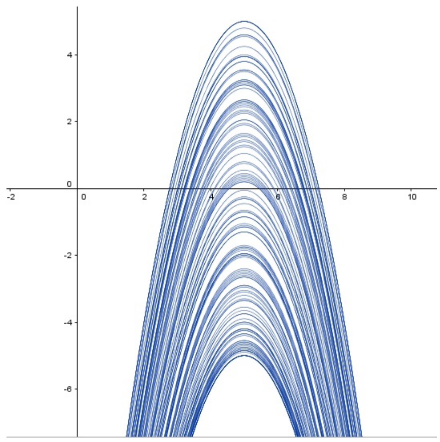

Figura 4.11: Generalização do foco, variação de h com $a < 0$

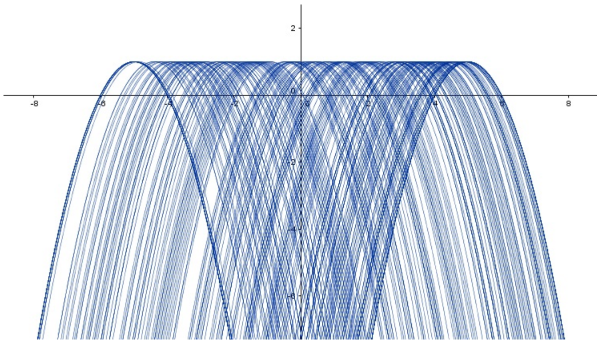

Figura 4.12: Generalização do foco, variação de k com $a < 0$

4.5 Identificação de uma parábola

Conclui-se que será possível identificar uma parábola todas as vezes que nos depararmos com uma relação do tipo:

$$By^2 + Cx = 0$$

ou

$$By + Cx^2 = 0$$

onde $B, C \in \mathbb{R}$

4.6 Excentricidade da Parábola

A excentricidade e mede a abertura das cônicas, ou seja, quanto mais "arredondada" ou "achatada" é a figura.

Por definição $e = \dfrac{c}{a}$. Na Parábola c é a distância entre a reta diretriz e um ponto $P = (x, y)$ pertencente a curva e a é a distância deste mesmo ponto P até o foco da Parábola como mostra a Figura 4.13.

Pela definição de Parábola temos $c = a$, portanto a excentricidade da Parábola é $e = 1$

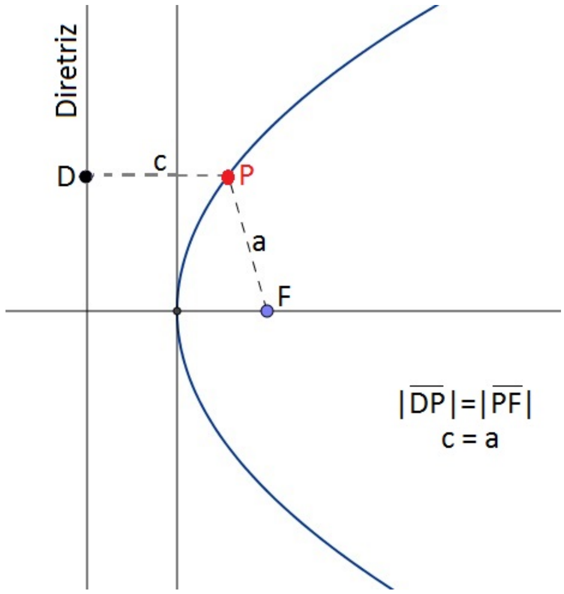

Figura 4.13: Excentricidade da Parábola

4.7 Propriedade da Parábola

A parábola possui uma propriedade muito interessante; os gregos descobriram que um raio de luz, de som, ou de uma onda qualquer emitida pelo foco da parábola em direção à sua estrutura, indiferente do ponto que a atinja, as reflete em uma trajetória paralela ao eixo de simetria e, da mesma forma, se os mesmos incidem na estrutura em trajetória paralela ao eixo de simetria serão refletidas em direção ao foco, conforme ilustra a Figura 4.14. As tecnologias modernas fazem uso dessa importante propriedade para solucionar problemas em vários ramos de conhecimento (médico, telefônico, automotivo, engenharia, eletrônica, etc.). No Capítulo 8 mostraremos algumas aplicações dessa propriedade.

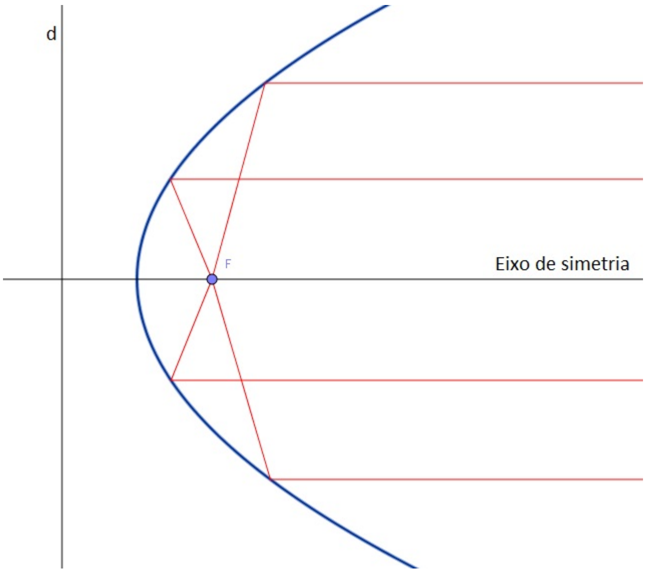

Figura 4.14: Propriedade reflexiva da Parábola

Capítulo 5

Seções cônicas: Elipse

5.1 Introdução

Nesse capítulo apresentaremos conhecimentos relativos à segunda seção cônica conhecida, a elipse. Os alunos do ensino médio nem sempre têm contato com essa estrutura. Talvez pela sua complexidade ou pelas dificuldades encontradas pelos docentes em dominar e transmitir tal conteúdo.

Como nas estruturas parabólicas, apresentamos a definição de Apolônio para a elipse e a definição utilizada nos livros didáticos. Em seguida, serão listados todos os elementos que compõem essa estrutura bem como as equações canônicas que as definem no plano geométrico. Por fim generalizaremos sua posição no plano com parâmetros relativos e visualizaremos com o auxílio do Geogebra a variação desses parâmetros.

5.2 Elipse: Definição Histórica

Como visto anteriormente, o termo elipse utilizado por Apolônio significava "estar faltando" ou "ser carente de", indicando que faltava algo ao efetuar alguns dos cálculos. É importante lembrar, que, Apolônio não faz uso da álgebra em suas demonstrações, ele utiliza apenas a geometria. Segundo Apolônio obtemos a elipse quando:

> "Um cone é seccionado por um plano que passa pelo seu eixo, e, se é também seccionado por outro plano que, encontrando qualquer um dos lados do triângulo que passa pelo eixo, não é colocado nem paralelamente, nem antiparalela mente à base do cone; se, além disso, o plano da base e o plano secante se encontram ao longo de uma reta perpendicular a base do triângulo que passa pelo eixo..." MARCHINI [10]

Analisaremos passo a passo a descrição de Apolônio quanto à obtenção da seção cônica conhecida como elipse. A construção poderá ser acompanhada na Figura 5.1.

Seja um cone definido e construído como na Figura 3.6, com visto anteriormente:

- Seccionamos o cone com um plano α infinito em seu eixo de simetria com essa secção obtemos um triângulo onde nominaremos seus vértices por A, B e C sendo que A é o vértice do cone;
- Seccionamos o cone com outro plano β perpendicular ao $\triangle BAC$, logo $\alpha \perp \beta$;
- Marcamos uma reta que passa pelo ponto C, contida no plano β, e perpendicular ao segmento de reta $\overline{BC}$ do $\triangle BAC$;
- Construímos um plano γ que contenha a reta que passa pelo ponto C e que não seja paralelo ao segmento de reta $\overline{AC}$, a estrutura cônica elipse será formada da intersecção entre o plano γ e a estrutura do cone.

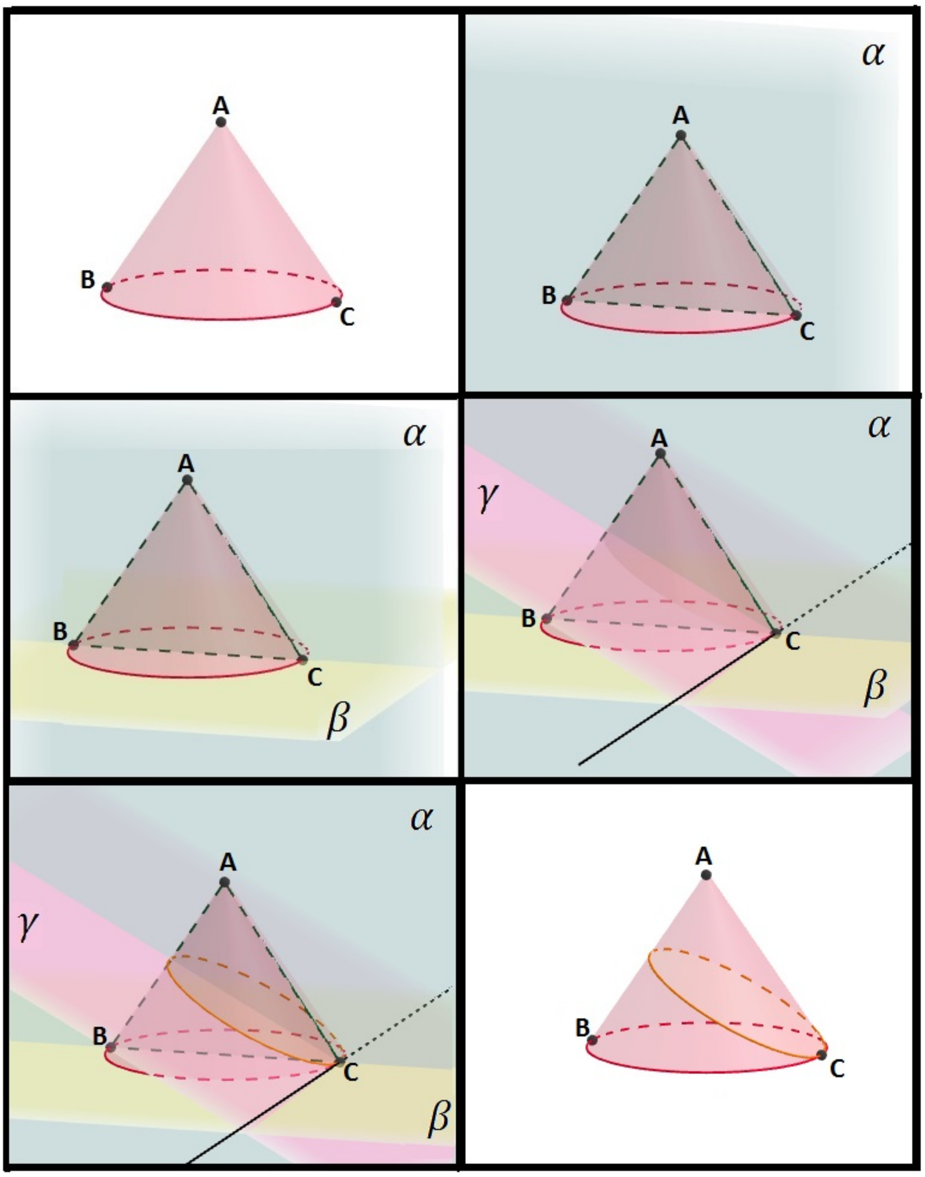

Figura 5.1: Processo de obtenção da Elipse

5.3 Elementos de uma elipse

Vamos identificar e definir os elementos e as principais propriedades que compõem uma elipse. A partir das relações de Apolônio, podemos definir formalmente elipse, como sendo o lugar geométrico dos pontos P pertencentes a um plano onde a soma das distâncias a dois pontos fixos (F_1 e F_2) são iguais. A Figura 5.2 mostra os elementos de uma elipse:

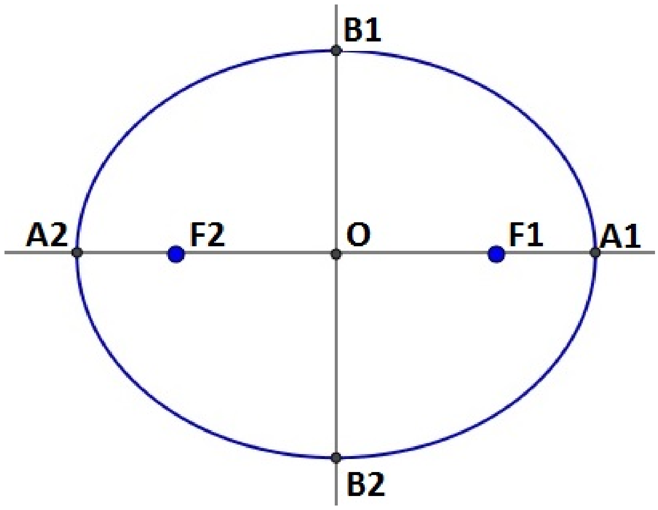

Figura 5.2: Elementos de uma Elipse

Logo, os elementos que compõem uma elipse são:

- O: origem
- $F1$ e $F2$: focos
- $A1$ e $A2$: vértices do eixo maior
- $B1$ e $B2$: vértices do eixo menor
- $\overline{A_1A_2}$: eixo maior
- $\overline{B_1B_2}$: eixo menor

5.4 Equação Canônica da Elipse

Uma vez conhecida a definição de elipse e os elementos que a compõe, somos capazes de encontrar a sua equação canônica (reduzida).

5.4.1 Elipse com focos F_1 e F_2 posicionados sobre os eixos x ou y

Para facilitar os cálculos, escolheremos estrategicamente os focos da elipse sobre o eixo x, de modo que a origem do plano cartesiano seja o ponto médio entre os focos (F_1 e F_2). Desta forma, as coordenadas cartesianas dos focos correspondem a: $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$ e a origem $O = (0, 0)$. Consideraremos o comprimentos dos eixos maior e menor equivalente a $2a$ e $2b$ respectivamente; assim, as coordenadas dos vértices serão: $A_1 = (a, 0)$, $A_2 = (-a, 0)$, $B_1 = (0, b)$ e $B_2 = (0, -b)$. Os detalhes dessa construção estão na Figura 5.3:

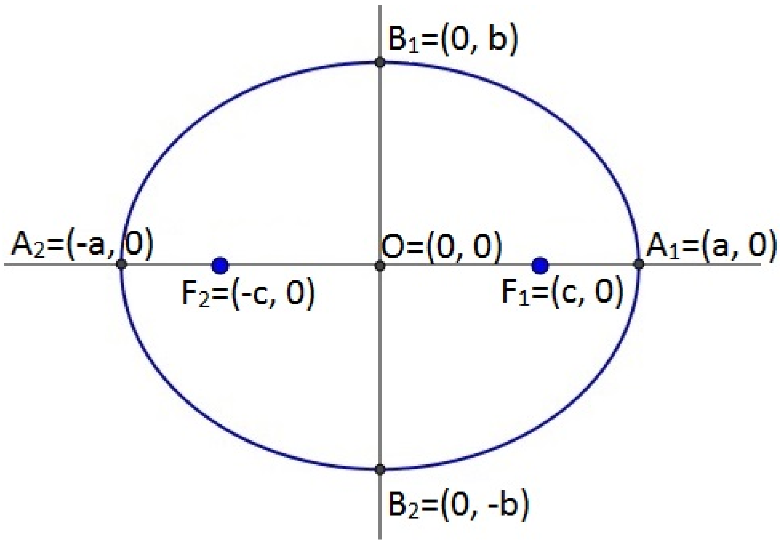

Figura 5.3: Coordenadas cartesianas dos elementos da elipse

Considere um ponto $P = (x, y)$ qualquer posicionado sobre o lugar geométrico denominado elipse. Por definição, a soma das distâncias entre o ponto P e os focos são constantes e iguais a $2a$, logo, para qualquer ponto escolhido, as distâncias $|\overline{PF_1}| +$

$|\overline{PF_2}| = 2a$. Analisando os triângulos retângulos $\triangle PCF_1$ e $\triangle PCF_2$ formados conforme a construção da Figura 5.4 e, através do teorema de Pitágoras, é possível calcular os comprimentos $|\overline{PF_1}|$ e $|\overline{PF_2}|$, ou seja:

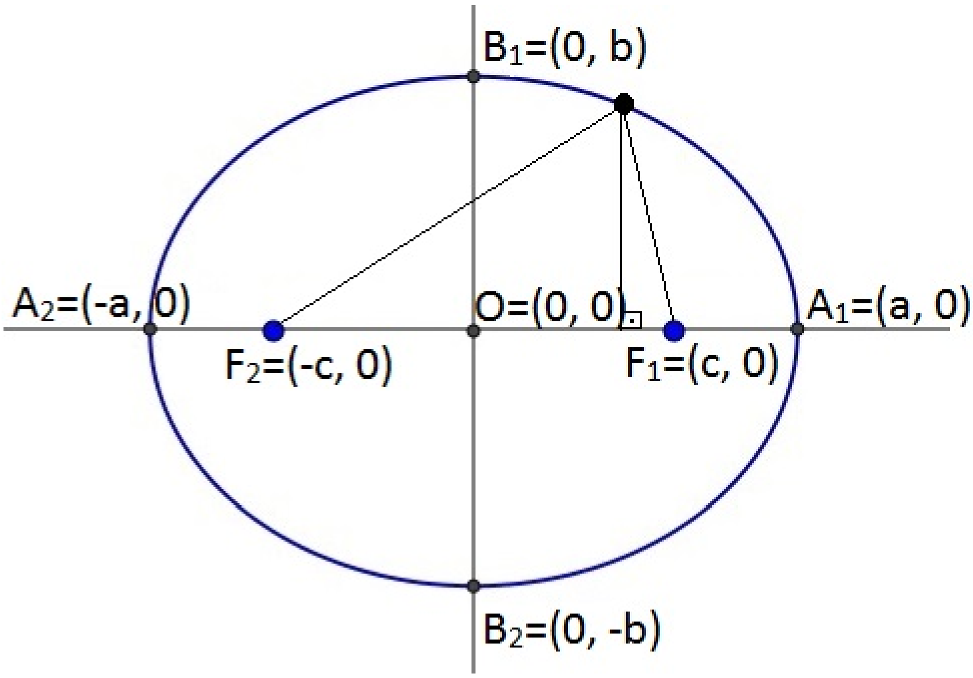

Figura 5.4: Determinando a equação canônica da elipse

Seja

$$|\overline{PF_2}|^2 = (c - x)^2 + (y)^2 \tag{5.1}$$

e

$$|\overline{FA}| = \sqrt{y^2 + (x - p)^2} \tag{5.2}$$

logo $|\overline{PF_2}| = \sqrt{(c - x)^2 + y^2}$ e $|\overline{PF_1}| = \sqrt{(c + x)^2 + y^2}$
como $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{(c - x)^2 + y^2} + \sqrt{(c + x)^2 + y^2} &= 2a \\ \sqrt{(c - x)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(c + x)^2 + y^2} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Elevando ambos os lados da Equação 5.3 ao quadrado:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(c-x)^2+y^2}^2 &= (2a-\sqrt{(c+x)^2+y^2})^2 \\
(c-x)^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(c+x)^2+y^2}+(c+x)^2+y^2 \\
c^2-2cx+x^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(c+x)^2+y^2}+c^2+2cx+x^2+y^2 \\
4cx+4a^2 &= 4a\sqrt{(c+x)^2+y^2} \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da Equação 5.4 por 4 e em seguida elevando ambos os membros ao quadrado temos:

$$\begin{aligned}
(cx+a^2)^2 &= (a\sqrt{(c+x)^2+y^2})^2 \\
c^2x^2+2a^2cx+a^4 &= a^2((c+x)^2+y^2) \\
c^2x^2+2a^2cx+a^4 &= a^2c^2+2a^2cx+a^2x^2+a^2y^2 \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

De onde,

$$\begin{aligned}
x^2(c^2-a^2)+a^4 &= a^2c^2+a^2y^2 \\
x^2(a^2-a^2)-a^4 &= -a^2c^2-a^2y^2 \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

Agora observe o triângulo $\triangle F_1B_1F_2$. Note que $|\overline{F_1B_1}|+|\overline{B_1F_2}|=2a$, pois B_1 é um ponto da elipse. Mas por questão de simetria, $|\overline{F_1B_1}|=|\overline{B_1F_2}|$.

Logo, $|\overline{B_1F_2}|=a$.

Considere agora o triângulo retângulo $\triangle OB_1F_2$.

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}
|\overline{OB_1}|^2+|\overline{OF_2}|^2 &= |\overline{B_1F_2}|^2 \\
b^2+c^2 &= a^2 \\
a^2-c^2 &= b^2 \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

Substituindo 5.8 em 5.5 temos que

$$\begin{aligned}
x^2b^2-a^4 &= -a^2c^2-a^2y^2 \\
x^2b^2+a^2y^2 &= a^2(a^2-c^2) \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

De onde,

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \tag{5.9}$$

Dividindo ambos os lados da Equação 5.9 por a^2b^2, obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5.10}$$

Observe que escolhemos estrategicamente os focos da elipse sobre o eixo x, de modo que a origem do plano cartesiano fosse o ponto médio entre os focos. De maneira análoga, poderíamos também ter escolhido os focos da elipse sobre o eixo y conforme Figura 5.5.

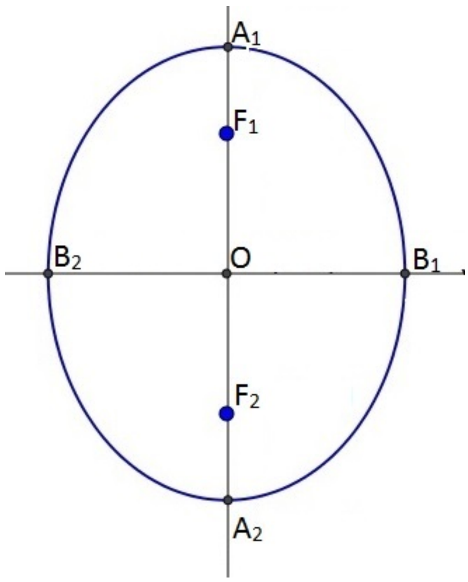

Figura 5.5: Elipses com focos no eixo y

Observe na Figura 5.5 que apenas rotacionamos em 90° a elipse, invertendo os eixos x e y. Invertendo as posições das incógnitas na Equação 5.10 obtendo a Equação 6.1.

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{5.11}$$

Identificamos as Equações 5.10 e 6.1 como equações canônicas da elipse com focos (F_1 e F_2) sobre os eixos x e y respetivamente. Em outras palavras, todos os pares ordenados (x, y) que satisfaçam esta relação pertencerão ao lugar geométrico denominado elipse.

5.4.2 Elipse com focos F_1 e F_2 genéricos

Vimos anteriormente, como se obter a equação canônica de uma elipse a partir de seus focos (F_1 e F_2) posicionados sobre o eixo x e sobre o eixo y. Para generalizarmos, ou seja, obter equações canônicas para elipses cujos focos podem ser posicionados em quaisquer pontos do plano cartesiano, acrescentaremos os parâmetros h e k as Equações 5.10 e 6.1.

Acrescentando os parâmetros temos:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{5.12}$$

e

$$\frac{(x-k)^2}{b^2} + \frac{(y-h)^2}{a^2} = 1 \tag{5.13}$$

A intenção é transladarmos nossa elipse através da variação de tais parâmetros, ou seja, levaremos o lugar geométrico da elipse para quaisquer posições no plano que desejarmos.

As figuras que se seguem mostram que é possível, através do GeoGebra 3D, aplicando controles deslizantes aos parâmetros a, b, h e k fazer com que a elipse deslize pelo plano cartesiano a medida que diferentes valores são atribuídos aos valores.

A Figura 5.6 mostra o que sucede com a elipse de Equação 6.3 quando mantemos fixos os parâmetros a, b e h e variamos o parâmetro k.

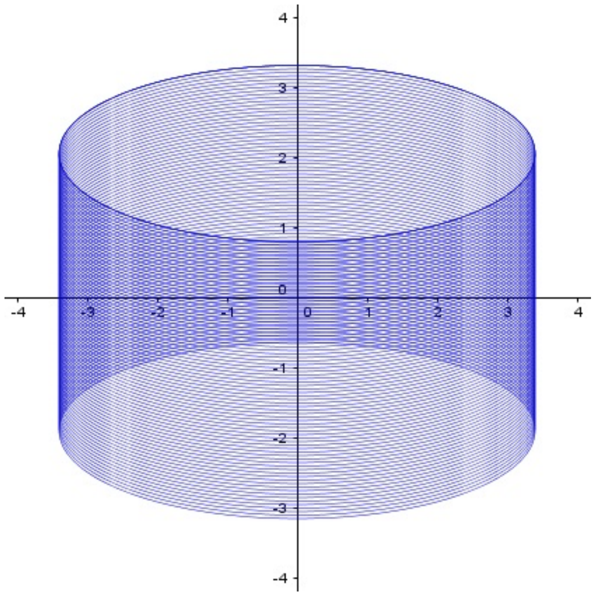

Figura 5.6: Elipses ao variar o parâmetro k

Observe que quando variamos o parâmetro k, nossa elipse desliza sobre o eixo y.

Vamos verificar na Figura 5.7, o que sucede quando mantemos fixos os parâmetros a, b e k, e variamos o parâmetro h na elipse de Equação 6.3.

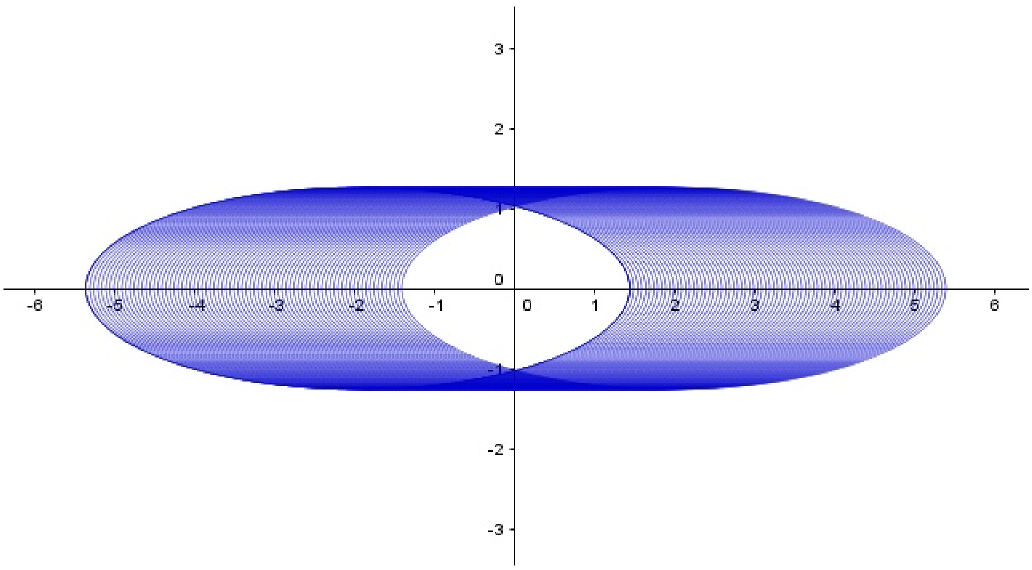

Figura 5.7: Elipses ao variar o parâmetro h

É possível perceber que, variando o parâmetro h, a elipse desliza sobre o eixo x.

Se variamos simultaneamente os parâmetros k e h a elipse circulará por pontos do plano gerando figuras interessantíssimas. Na Figura 5.8 temos um exemplo do que ocorre quando variamos os parâmetros k e h com diferença de 3 unidades entre eles:

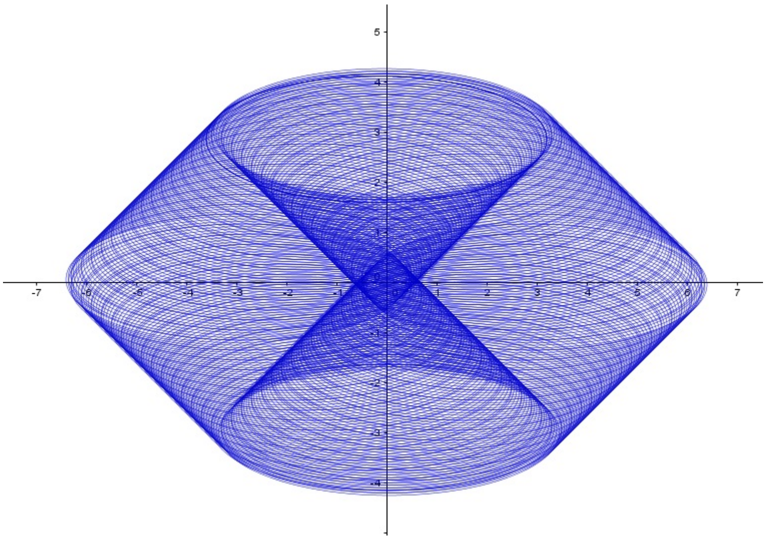

Figura 5.8: Elipses ao variar os parâmetros k e h

Mas, o que aconteceria se variássemos o parâmetro a ou b?

Vimos que, ao parametrizar a elipse posicionamos criteriosamente os focos (F_1 e F_2) sobre o eixo x ou sobre o eixo y e utilizamos os valores a e b para indicar a distância entre os eixos maior e menor da elipse. É lógico pensar que, se variamos os valores a e b variamos justamente as medidas desses eixos como se pode observar nas Figuras 5.9 e 5.10.

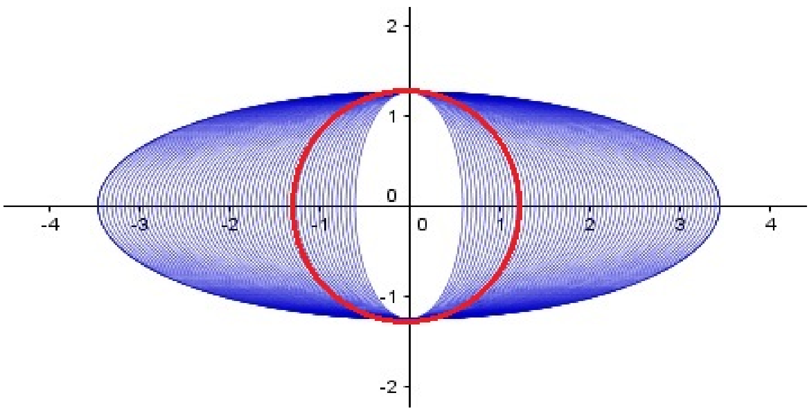

Figura 5.9: Elipses ao variar o parâmetro a

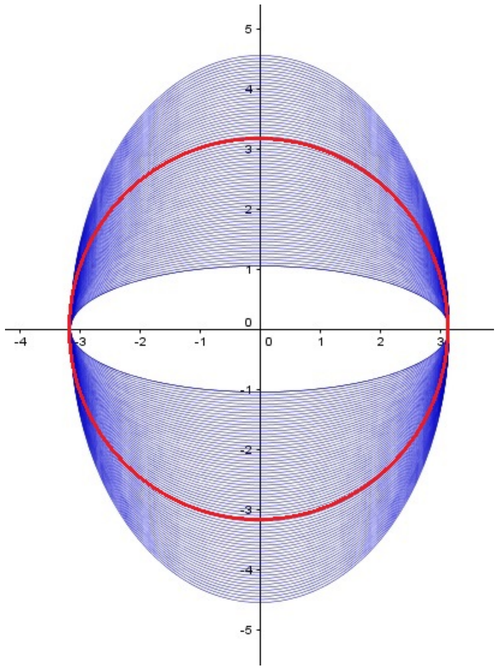

Figura 5.10: Elipses ao variar o parâmetro b

Vimos o resultado quando variamos os valores dos parâmetros a e b, porém, outro fato chama a atenção. Observe através das figuras que, uma vez que atribuímos valores iguais para a e b, ou seja, $a = b$, obtemos outra figura geométrica conhecida, o círculo que se destaca com a cor vermelha.

5.5 Identificação de uma elipse

De posse das Equações 6.2 e 6.3 , para se identificar uma elipse com focos (F_1 e F_2) sobre os eixo x e y respectivamente, basta identificarmos relações do tipo:

$$Ax^2 + By^2 = F \tag{5.14}$$

ou

$$Bx^2 + Ay^2 = F \tag{5.15}$$

onde $A, B, F \in \mathbb{R}$

5.6 Excentricidade da Elipse

Como vimos na Parábola a excentricidade e mede a abertura das cônicas, ou seja, quanto mais “arredondada” ou “achatada” é a figura.

Por definição $e = \dfrac{c}{a}$. Na Elipse temos que c é o comprimento de um dos focos, por exemplo F_1, até a origem do plano cartesiano O e a é o comprimento deste mesmo foco F_1 até o ponto B_1, como mostra a Figura 5.11.

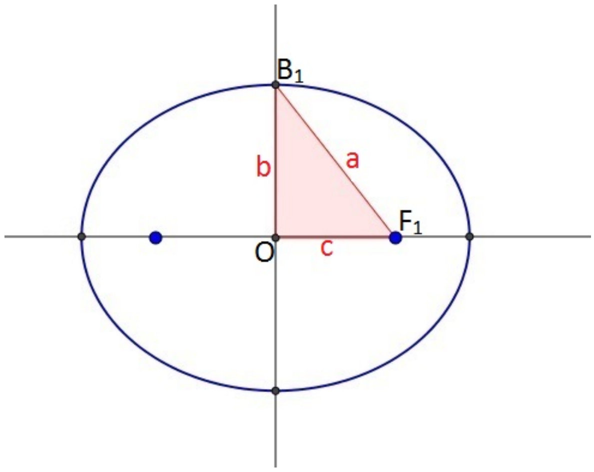

Figura 5.11: Excentricidade da Elipse

Observe que $c = |\overline{F_1O}|$, $a = |\overline{F_1B_1}|$ e que a é a hipotenusa do triângulo retângulo $\triangle OF_1B_1$. Logo, pelas propriedades do triângulo a hipotenusa é sempre maior que os catetos ou seja $a > c$. Observe também que a e c são valores positivos.Portanto $0 < e = \dfrac{c}{a} < 1$

Como vimos anteriormente uma vez que atribuímos valores iguais para a e b, ou seja, $a = b$, obtemos o círculo. Neste caso, temos $c = 0$ e portanto, a excentricidade da circunferência é $e = 0$

5.7 Propriedade da Elipse

Assim como a parábola, a elipse também possui propriedades interessantes. Se, um raio de luz, de som, ou de uma onda qualquer é emitido por qualquer um dos focos da elipse, estes serão refletidos em direção ao foco adjacente.

A Figura 5.12 mostra essa propriedade, indiferente do ponto da estrutura atingido pelo raio, o ângulo formado entre esta reta e a reta tangente ao ponto receptor na elipse será igual ao ângulo formado pela mesma reta tangente e a reta formada pelo raio refletido.

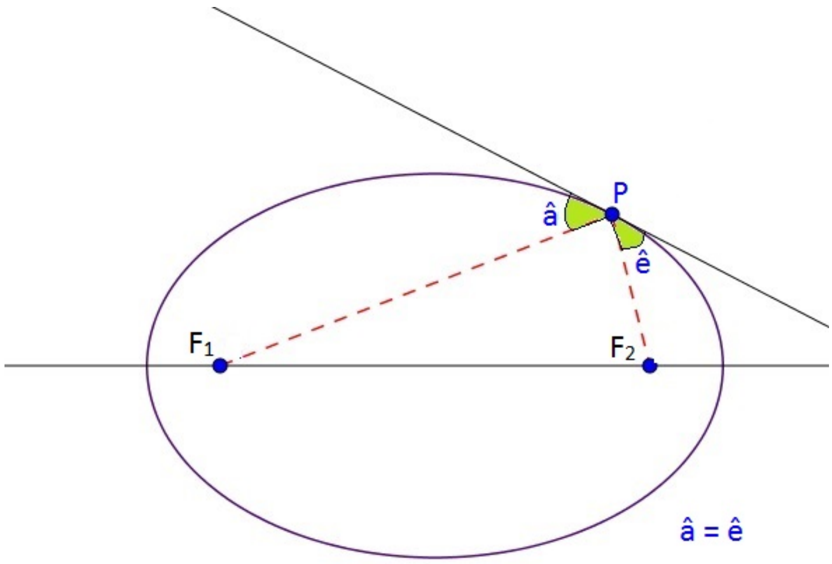

Figura 5.12: Propriedade da Elipse

Muitas tecnologias modernas fazem uso dessa importante propriedade para solucionar problemas em diversos ramos de conhecimento (médico, arquitetura, etc.). No Capítulo 8 mostraremos algumas aplicações dessa propriedade.

Capítulo 6

Seções cônicas: Hipérbole

6.1 Introdução

A hipérbole é a última das estruturas definidas e demonstradas por Apolônio e, portanto, apresentarei da mesma forma como a parábola e a elipse. Em geral, os alunos do ensino médio também não têm contato com essa estrutura, talvez, pelos mesmos motivos apresentados na elipse.

Como nas estruturas anteriores, iniciarei nossos estudos com a definição de Apolônio para a hipérbole e em seguida a definição utilizada nos livros didáticos. Serão listados os elementos que compõem essa estrutura, bem como as equações canônicas que as definem no plano geométrico e por fim generalizaremos sua posição no plano com parâmetros relativos e usaremos novamente o Geogebra para melhor visualização.

6.2 Hipérbole: Definição Histórica

Como visto anteriormente, o termo hipérbole utilizado por Apolônio teria o mesmo significado do verbo "exceder" ou a expressão "ir além de" indicando que sobrava algo ao efetuar alguns dos cálculos. É importante lembrar, que, Apolônio não faz uso da álgebra em suas demonstrações, ele utiliza apenas a geometria. Segundo Apolônio obtemos a hipérbole quando:

> "Se um cone é seccionado por um plano que passa pelo seu eixo, e, se é seccionado por outro plano que secciona a base do cone segundo uma reta perpendicular à base do triângulo que passa pelo eixo; se, além do mais, o diâmetro prolongado da seção encontra um dos dois lados do triângulo pelo eixo além do vértice do cone, [...] Chamaremos tal seção de hipérbole."
> MARCHINI [10]

Analisaremos passo a passo a descrição de Apolônio quanto à obtenção da seção cônica conhecida como hipérbole. A construção poderá ser acompanhada na Figura 6.1.

Sejam os cones definidos e construídos como na Figura 3.6 visto anteriormente, porém, desta vez, utilizaremos as duas abas cônicas:

- Seccionamos os cones com um plano α infinito em seu eixo de simetria com essa secção obtemos dois triângulos onde nominaremos seus vértices por A, B, C, D e E sendo que A é o vértice comum dos cones;

- Seccionamos os cones com dois planos β e θ perpendicular ao $\triangle BAC$ e $\triangle DAE$ respectivamente, logo $\alpha \perp \beta$ e $\alpha \perp \theta$;

- Marcamos a reta r paralela ao eixo do cone e contida no plano α que corta o lado AC e AD dos triângulos $\triangle BAC$ e $\triangle DAE$ respectivamente;

- Construímos um plano γ que contenha a reta paralela e que seja perpendicular ao plano α. A estrutura cônica hipérbole será formada da intersecção entre o plano γ e a estrutura do cone.

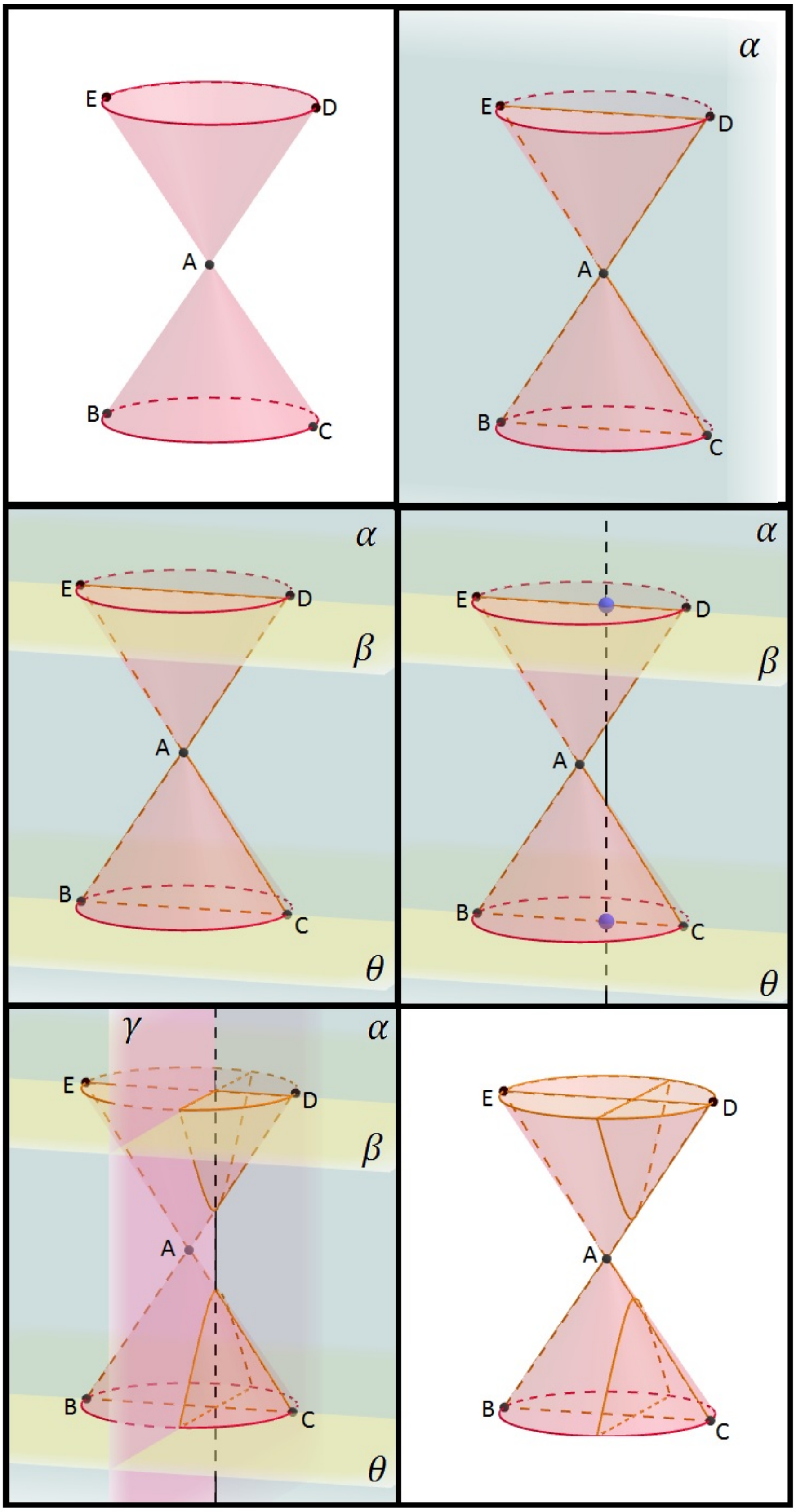

Figura 6.1: Processo de Obtenção da hipérbole

6.3 Elementos de uma Hipérbole

Identificaremos e definiremos os elementos e as principais propriedades que compõem uma hipérbole. Podemos definir formalmente hipérbole, como sendo o lugar geométrico dos pontos P pertencentes a um plano onde a diferença de distâncias a dois pontos fixos (F_1 e F_2) é constante. A Figura 6.2 mostra com detalhes os elementos de uma hipérbole:

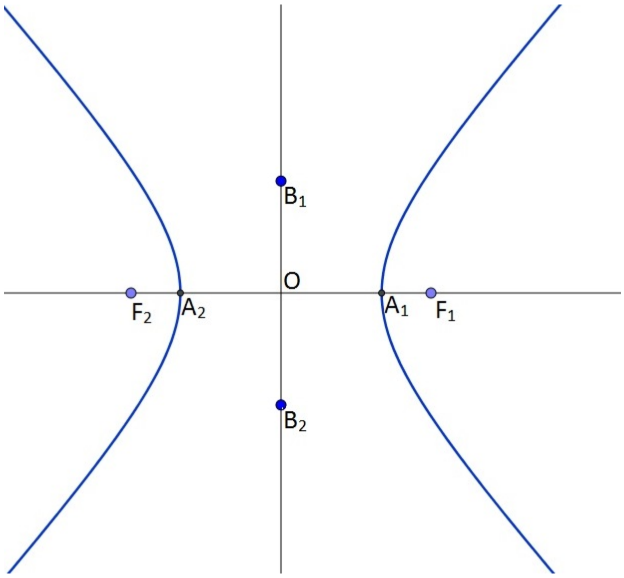

Figura 6.2: Elementos da hipérbole

Logo, os elementos que compõem uma hipérbole são os seguintes:

- F_1 e F_2: focos
- O: origem e ponto médio entre os focos (F_1 e F_2)
- $|\overline{F_1F_2}|$: distância focal
- A_1 e A_2: vértices da hipérbole
- $\overline{A_1A_2}$: eixo real
- $\overline{B_1B_2}$: eixo imaginário

6.4 Equação Canônica da Hipérbole

Uma vez conhecidos os elementos que compõe uma hipérbole, somos capazes de encontrar a equação canônica (reduzida) que caracteriza os pontos da hipérbole em um plano.

6.4.1 Hipérbole com focos F_1 e F_2 posicionados sobre o eixo x ou eixo y

Para facilitar os cálculos, escolheremos estrategicamente os focos da hipérbole sobre o eixo x, de modo que a origem do plano cartesiano seja o ponto médio entre os focos (F_1 e F_2). Desta forma, as coordenadas cartesianas dos focos correspondem a $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$ e a origem $O = (0, 0)$. Consideraremos o comprimento dos entre os eixos real e imaginário equivalente a $2a$ e $2b$, respectivamente. Assim, as coordenadas dos vértices serão: $A_1 = (a, 0)$, $A_2 = (-a, 0)$, $B_1 = (0, b)$ e $B_2 = (0, -b)$. Os detalhes dessa construção podem ser averiguados na Figura 6.3.

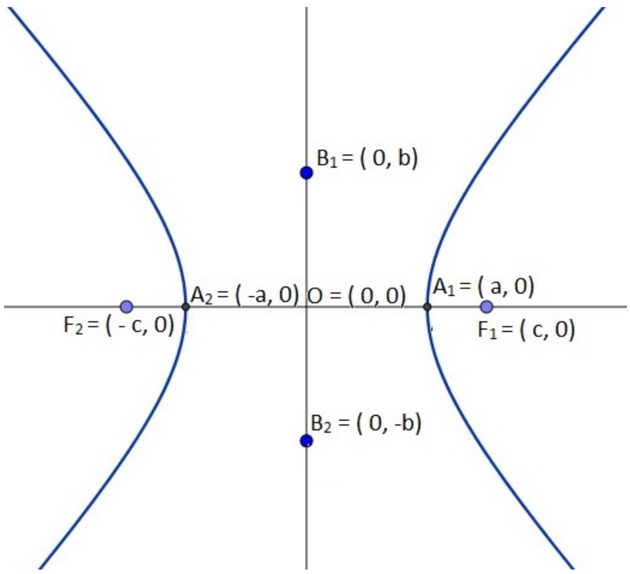

Figura 6.3: Coordenadas cartesianas dos elementos da hipérbole

Considere um ponto $P = (x, y)$ qualquer posicionado sobre o lugar geométrico denominado hipérbole, então, por definição, a diferença das distâncias entre o ponto P aos focos é constante e igual a $2a$. Logo, para qualquer ponto escolhido, temos

$$|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = 2a$$

Analisando os triângulos retângulos $\triangle PXF_1$ e $\triangle PXF_2$ formados conforme a construção da Figura 6.4, e através do teorema de Pitágoras, é possível calcular os comprimentos $|\overline{PF_1}|$ e $|\overline{PF_2}|$, ou seja:

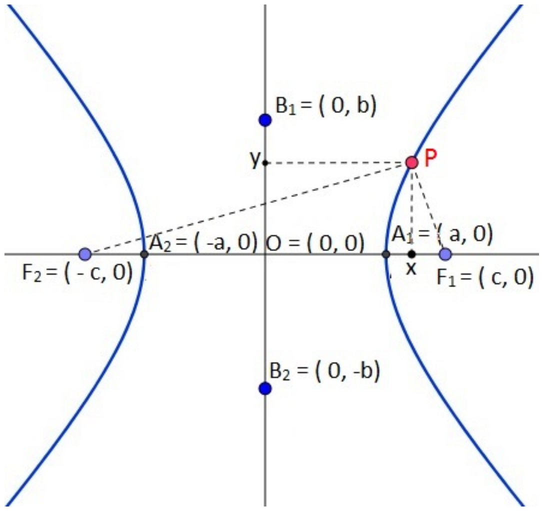

Figura 6.4: Equação canônica da hipérbole

$$|\overline{PF_1}^2| = (c - x)^2 + y^2$$

e

$$|\overline{PF_2}^2| = (c + x)^2 + y^2$$

logo $|\overline{PF_1}| = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$ e $|\overline{PF_2}| = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}$,
como $|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = 2a$, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{(c-x)^2 + y^2} + \sqrt{(c+x)^2 + y^2} &= 2a \\ \sqrt{(c-x)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(c+x)^2 + y^2} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Elevando ambos os lados da Equação 6.1 ao quadrado temos:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{(c-x)^2+y^2})^2 &= (2a-\sqrt{(c+x)^2+y^2})^2\\
(c-x)^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(c+x)^2+y^2}+(c+x)^2+y^2\\
c^2-2cx+x^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(c+x)^2+y^2}+c^2+2cx+x^2+y^2\\
4cx+4a^2 &= 4a\sqrt{(c+x)^2+y^2} \qquad (6.2)
\end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da Equação 6.2 por 4 e em seguida elevando ao quadrado novamente temos:

$$\begin{aligned}
(cx+a^2)^2 &= (a\sqrt{(c+x)^2+y^2})^2\\
c^2x^2+2a^2cx+a^4 &= a^2((c+x)^2+y^2)\\
c^2x^2+2a^2cx+a^4 &= a^2c^2+2a^2cx+a^2x^2+a^2y^2\\
x^2(c^2-a^2)+a^4 &= a^2c^2+a^2y^2\\
x^2(c^2-a^2)-a^2y^2 &= a^2c^2-a^4\\
x^2(c^2-a^2)-a^2y^2 &= a^2(c^2-a^2) \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

Agora observe o triângulo $\triangle F_1B_1O$. Note que $|\overline{OF_1}|=a$, $|\overline{OB_1}|=b$, $|\overline{F_1B_1}|=c$ e que o triângulo é retângulo.

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}
|\overline{OF_1}|+|\overline{OB_1}| &= |\overline{F_1B_1}|\\
a^2+b^2 &= c^2\\
c^2-a^2 &= b^2 \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

Substituindo a Equação 6.4 na Equação 6.3 obtemos,

$$x^2b^2-a^2y^2=a^2b^2$$

Dividindo ambos os lados por $a^2.b^2$, temos que:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (6.5)$$

Observe que escolhemos estrategicamente os focos da hipérbole sobre o eixo x, de modo que a origem do plano cartesiano fosse o ponto médio entre os focos. De maneira

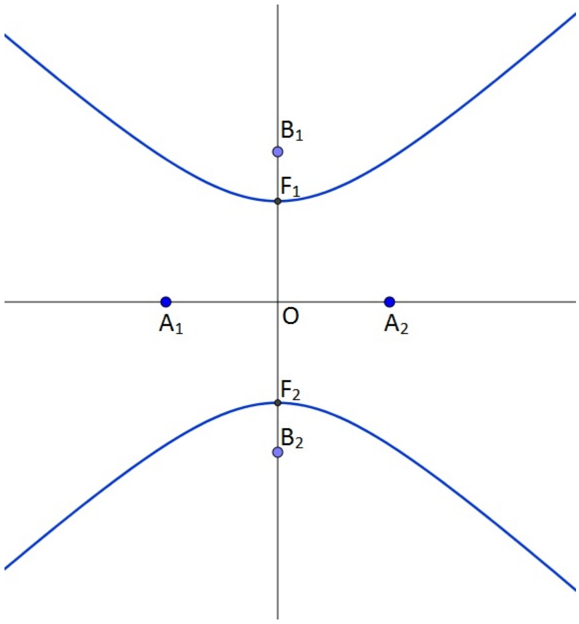

Figura 6.5: Hipérbole com focos no eixo y

análoga, poderíamos também ter escolhido os focos da elipse sobre o eixo y conforme Figura 6.5.

Observe na Figura 6.5 que apenas rotacionamos em 90° a elipse, invertendo os eixos x e y. Invertendo as posições das incógnitas na Equação 6.5 obtendo a Equação 6.6.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{6.6}$$

Identificamos as Equações 6.5 e 6.6 como equações canônicas da elipse com focos (F_1 e F_2) sobre os eixos x e y respetivamente. Em outras palavras, todos os pares ordenados (x, y) que satisfaçam esta relação pertencerão ao lugar geométrico denominado hipérbole.

6.4.2 Hipérbole com focos (F_1 e F_2) genéricos

Vimos como se obter a equação canônica de uma hipérbole a partir de seus focos (F_1 e F_2) posicionados sobre o eixo x ou eixo y. Para generalizar, ou seja, obter equações canônicas para hipérboles cujos focos podem ser posicionados em quaisquer pontos do plano cartesiano, como aplicado à elipse, acrescentaremos os parâmetros h e k às equações 6.4 e 6.6 canônicas da hipérbole.

Acrescentando os parâmetros temos:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{6.7}$$

e

$$\frac{(y-h)^2}{a^2} - \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1 \tag{6.8}$$

Lembrando que a intenção é transladar nossa hipérbole através da variação de tais parâmetros, ou seja, levaremos o lugar geométrico da hipérbole para quaisquer posições no plano que desejarmos.

As figuras que se seguem mostrarão que é possível, através do programa GeoGebra 2D. Aplicando controles deslizantes aos parâmetros a, b, h e k faremos com que a hipérbole deslize pelo plano cartesiano.

A Figura 6.6 mostra o que sucede com a hipérbole quando mantemos fixos os parâmetros a, b e h e variamos o parâmetro k.

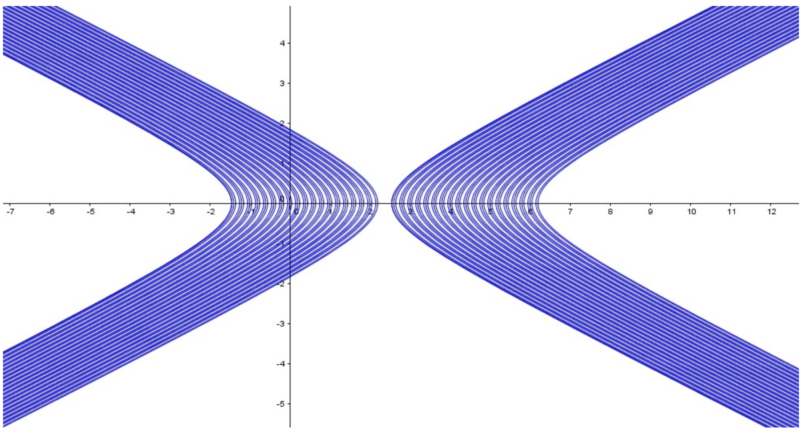

Figura 6.6: Hipérboles ao variar o parâmetro k

Percebe-se que ao variar o parâmetro k, a hipérbole desliza sobre o eixo y, a Figura 6.7 mostra o que ocorre quando se mantém fixos os parâmetros a, b e k e varia-se o parâmetro h.

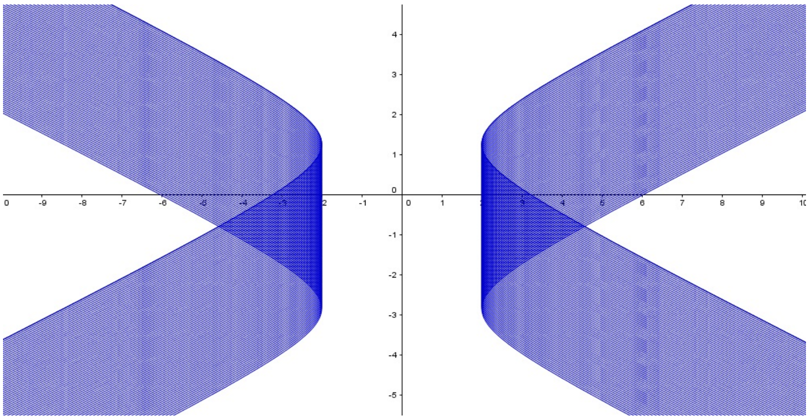

Figura 6.7: Hipérboles ao variar o parâmetro h

É possível perceber que, variando o parâmetro h, a hipérbole desliza sobre o eixo x. O leitor deve ter percebido que se variamos simultaneamente os parâmetros h e k a hipérbole, assim como a elipse, circulará por todos os pontos do plano.

Mas, o que aconteceria se variássemos os parâmetros a ou b?

Vimos que, ao parametrizar a hipérbole posicionamos os focos (F_1 e F_2) sobre o eixo x e utilizamos os valores a e b para indicar o comprimento entre os eixos maior e menor. É lógico pensar que, se variamos os valores a e b variamos justamente as medidas desses eixos. Veja nas Figuras 6.8 e 6.9 o que ocorre se variarmos os valores de a e de b, respectivamente.

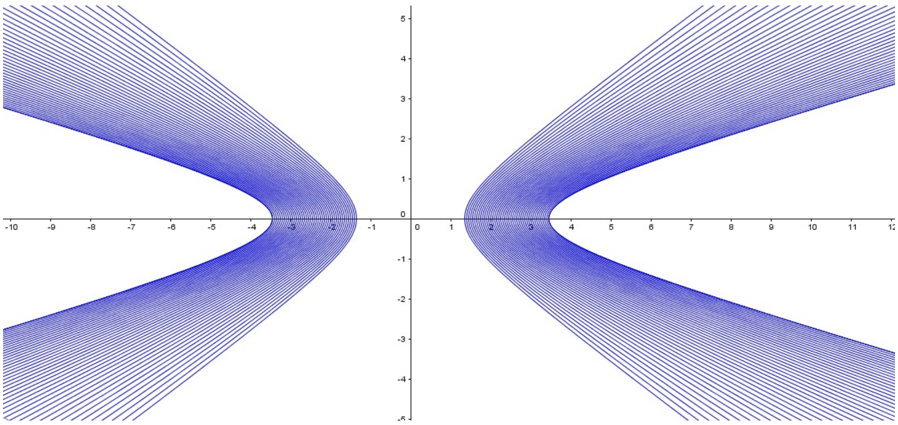

Figura 6.8: Hipérboles ao variar o parâmetro a

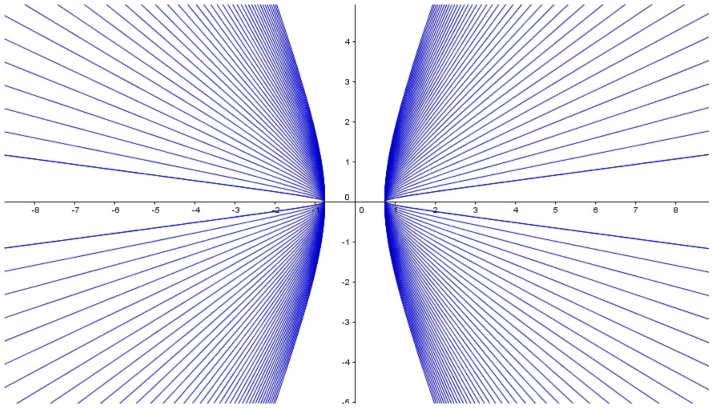

Figura 6.9: Hipérboles ao variar o parâmetro b

6.5 Identificação de uma Hipérbole

Como vimos, 6.5 é a equação reduzida da hipérbole. É natural que para se identificar uma hipérbole com focos (F_1 e F_2) sobre o eixo x, basta identificarmos relações do tipo:

$$Ax^2 - By^2 = F$$

onde A, B, $F \in \mathbb{R}$.

6.6 Excentricidade da Hipérbole

Como vimos a excentricidade e mede a abertura das cônicas, ou seja, quanto mais "arredondada" ou "achatada" é a figura.

Por definição $e = \dfrac{c}{a}$. Na Hipérbole temos que c é o comprimento de A_1 até B_1 e a é o comprimento de A_1 até a origem O do plano cartesiano como mostra a Figura 6.10.

Observe que $c = |\overline{A_1B_1}|$, $a = |\overline{A_1O}|$ e c é a hipotenusa do triângulo retângulo $\triangle OA_1B_1$. Logo, pelas propriedades do triângulo a hipotenusa é sempre maior que os catetos ou seja $c > a$. Observe também que a e c são valores positivos. Portanto $e = \dfrac{c}{a} > 1$

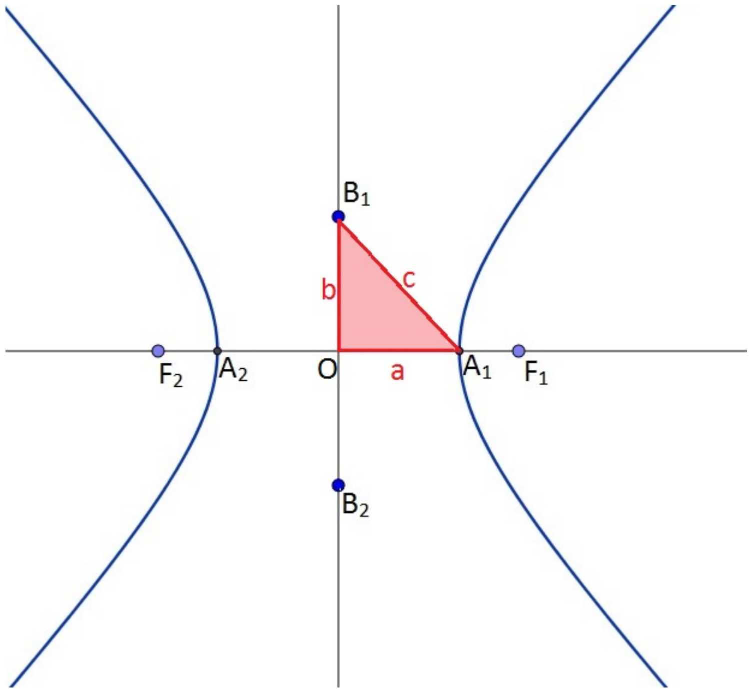

Figura 6.10: Excentricidade da Hipérbole

6.7 Propriedade da Hipérbole

Assim como a parábola e a elipse, a hipérbole também possui propriedades interessantes.

Se, um raio de luz, de som, ou de uma onda qualquer é emitido por um dos focos da hipérbole ao atingir a estrutura oposta em um ponto P, serão refletidos obedecendo a uma direção relativa ao foco oposto. A Figura 6.11 mostra essa propriedade.

Indiferente do ponto que atinja a estrutura, o ângulo formado pela reta emitida pelo foco e a reta tangente ao ponto receptor na hipérbole será igual ao ângulo formado pela mesma reta tangente e a reta refletida.

Muitas tecnologias modernas fazem uso dessa importante propriedade para solucionar problemas em diversos ramos de conhecimento (localização, arquitetura, engenharia, etc.). No Capítulo 8 mostraremos algumas aplicações dessa propriedade.

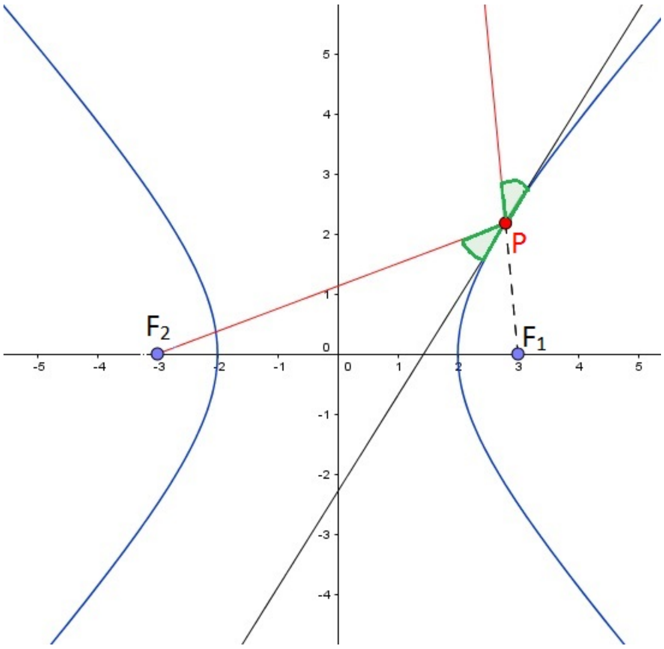

Figura 6.11: Propriedade da Hipérbole

Capítulo 7

Estruturas cônicas: Equação geral

7.1 Introdução

Através de nossos estudos, descobrimos as equações canônicas dos locais geométricos no plano que determinam a parábola, a elipse e a hipérbole. Tais equações foram definidas por: $y^2 = ax$; $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ e $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ respectivamente. As relações para identificações foram definidas como se segue: $By^2 + cx = 0$; $Ax^2 + By^2 = F$ e $Ax^2 - By^2 = F$ respectivamente.

René Descartes foi o primeiro a demonstrar ser possível através de uma única equação reconhecer as curvas cônicas. Devemos supor, que a equação desejada deverá ser de segundo grau e além disso, conter duas variáveis x e y. Logo, a equação que todos preenche os requisitos é:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{7.1}$$

Com A, B, C, D, E, $F \in \mathbb{R}$ e A, B, C não simultaneamente nulos.

A essa equação denominamos equação geral das cônicas.

7.2 Análise da equação

Definimos uma equação completa quando todos os elementos A, B, C, D, E, F da Equação 7.1 são não nulos.

Além do mais, podemos identificar que a Equação 7.1 possui:

- Três termos do segundo grau, sendo: Ax^2, Bxy e Cy^2;
- Dois termos do primeiro grau Dx e Ey e
- Um termo independente F.

Observe que o termo Bxy não aparece em nenhuma ocasião em nossos estudos. Consideramos $B = 0$, pois não aplicamos nesse trabalho casos onde rotaciona-se os eixos que contêm os focos.

Vamos analisar a Equação 7.1 com $B = 0$. Assim temos:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{7.2}$$

Observe que se:

- $A = C$ temos uma circunferência;
- $A \neq C$ e os sinais de A e C são iguais temos uma elipse;
- $A \neq C$ e os sinais de A e C são opostos temos uma hipérbole;
- $A = 0$ e $C \neq 0$ ou $C = 0$ e $A \neq 0$ temos uma parábola.

Segundo o livro *analise matemática IV* [28] o discriminante de uma equação de segundo grau é dado por $B^2 - 4AC$.

Vejamos como podemos identificar as cônicas através do discriminante $-4AC$, uma vez que estamos analisando os casos onde $B = 0 \to B^2 = 0$.

Observe que, se

- $-4AC < 0$ a equação é uma elipse pois os sinais de A e C são iguais e portanto AC é positivo;
- $-4AC > 0$ a equação é uma hipérbole pois os sinais de A e C são opostos e portanto AC é negativo;
- $-4AC = 0$ a equação é uma parábola pois $A = 0$ e $C \neq 0$ ou $C = 0$ e $A \neq 0$ e portanto $AC = 0$.

Lembramos que para o caso $A = C$ obtemos uma equação particular da elipse que representa a circunferência.

Capítulo 8

Estruturas cônicas: Aplicações

8.1 Introdução

Como nossos estudos mostraram até o momento, é notório que as cônicas desempenharam e ainda desempenham papéis importantíssimos em diversos ramos de estudos e pesquisas. A seguir, descreveremos simplificadamente alguns desses campos com suas respectivas aplicações.

8.2 Aplicações parabólicas

8.2.1 Trajetória de projéteis

A balística é a ciência que estuda as trajetórias dos projéteis, em ambientes terrestres, onde atua a força da gravidade. O projétil realiza quase sempre uma trajetória parabólica. Alguns cálculos podem fornecer informações como o alcance da queda de um projétil, por exemplo.

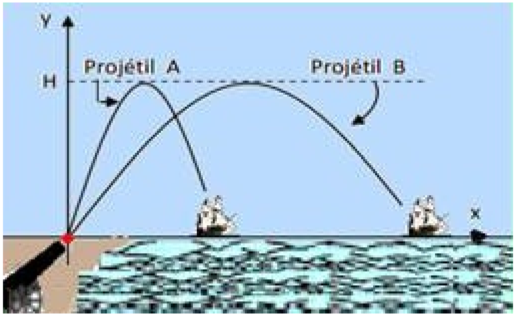

Figura 8.1: Projéteis (Fonte: fisicaevestibular.com.br)

8.2.2 Propriedade de reflexão

Como vimos a propriedade de destaque na parábola é sua propriedade de reflexão. Todo raio luminoso ou onda sonora que incida sobre a parábola paralelamente ao seu eixo é refletido de modo a passar pelo foco da parábola. O processo inverso também acontece, ou seja, qualquer raio ou onda que seja emitido do foco da parábola e que incida sobre a parábola é refletido numa mesma direção segundo retas paralelas ao eixo da parábola.

Essa propriedade faz com que a parábola apresente várias aplicações. A seguir, apresentamos algumas dessas aplicações.

Faróis e lanternas

Utiliza-se essa propriedade em faróis de veículos e mesmo em lanternas, pois permite que a luz chegue a longas distâncias.

Figura 8.2: Lanterna (Fonte: dreamstime.com.br)

Antenas parabólicas

As antenas parabólicas também funcionam devido essa propriedade da parábola. Ela tem um formato parabólico que consiste na rotação de uma parábola em torno do seu eixo principal. A antena capta as ondas que chegam a sua superfície e as refletem para um único ponto (o foco).

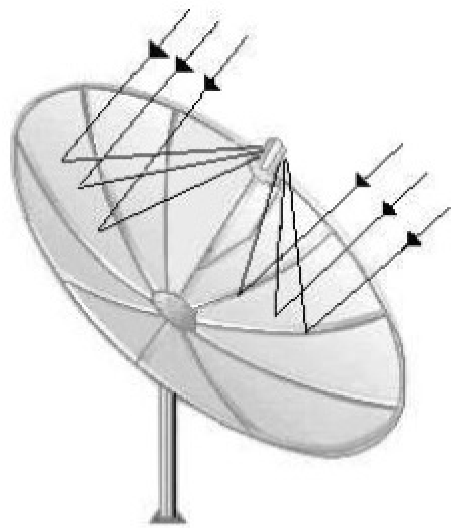

Figura 8.3: Antena parabólica (Fonte: sofisica.com.br)

8.2.3 Engenharia

As parábolas aparecem frequentemente em projetos de engenharia. Uma utilização bastante comum são nas pontes suspensas (juntamente com as pontes estaiadas), pois possibilitam os maiores vãos.

Nessas pontes, segundo reportagem publicada no site *IPC Digital*, a base é sustentada por vários cabos metálicos verticais ligados a dois cabos maiores principais, que por sua vez, são conectados às torres de sustentação. Os cabos comprimem as torres de sustentação e estas últimas transferem as forças de compressão para as fundações. Como os cabos verticais são distribuídos de maneira regular, a carga da ponte é distribuída de modo uniforme aos cabos principais, que formam uma parábola.

Como exemplos, temos a maior ponte suspensa do mundo, em Akashi Kaikyo - Japão, com extensão de quase 4 Km e vão central de quase 2 Km. Outra ponte suspensa, conhecida no Brasil, é a Ponte Hercílio Luz, que fica em Florianópolis, SC.

Figura 8.4: Ponte suspensa - Japão (Fonte: www.ipcdigital.com)

Figura 8.5: Ponte Luz - Florianópolis (Fonte: www.ipcdigital.com)

8.3 Aplicações elípticas

8.3.1 Aplicações nas ciências

Lei das Órbitas

Durante muitos anos se acreditou que a Terra era fixa em um único ponto e que os demais planetas circulavam em torno dela (geocentrismo).

No século XVI, o matemático e astrônomo polonês Nicolau Copérnico apresentou o primeiro modelo matemático sugerindo estar o sol fixo nesse ponto enquanto que os demais planetas circulam em torno dele (heliocentrismo).

Em 1609, Johannes Kepler enunciou três leis que revolucionariam os conhecimentos sobre o movimento dos planetas. A princípio, ele procura comparar o movimento dos planetas a todas as geometrias conhecidas. Através de seus registros conclui que somente a estrutura cônica elipse era a que mais se adaptava à órbita dos planetas estudados, assim, sintetizou suas observações em forma de lei que ficou conhecida como *Lei das Órbitas*. Essa lei, garantia ao movimento dos planetas "uma trajetória elíptica, estando o sol localizado em um dos focos da elipse".

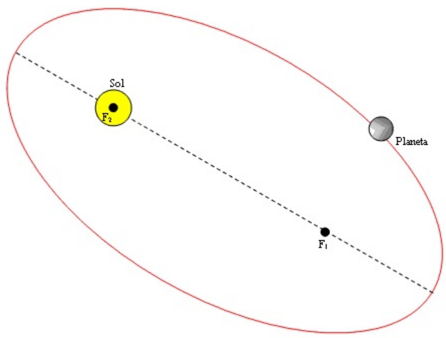

Figura 8.6: Lei das Órbitas - Kepler (Fonte: www.sofisica.com.br)

Klaus Feldkeller, em seu artigo *Nasa lança ao espaço o primeiro satélite de comunicações* [19] informa que o primeiro satélite artificial foi lançado pelos americanos em 1957 e depois deste, então milhares de satélites foram lançados ao espaço. Dentre eles, podemos destacar os satélites de comunicações, os astronômicos, os militares, os meteorológicos, os de reconhecimento, os de observação, os de navegação, entre outros.

Normalmente os satélites obedecem a órbitas elípticas com grande excentricidade, ou seja, bastante achatada como da Figura 8.7.

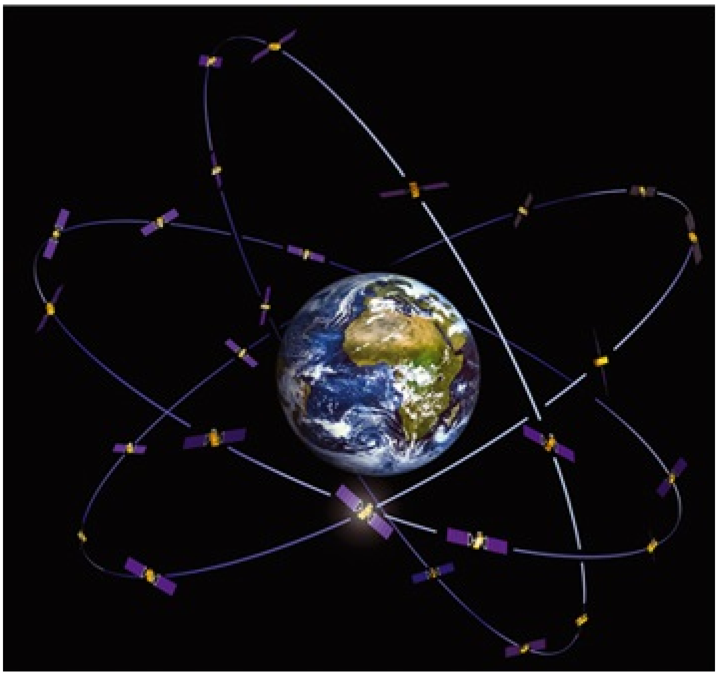

Figura 8.7: Satélites artificiais (Fonte: www.sofisica.com.br)

8.3.2 Eletrosfera

A Eletrosfera é a região externa de um átomo, onde se localizam os elétrons. Ao longo da história, diversos modelos atômicos foram desenvolvidos e, em 1910, Rutherford e Bohr apresentaram o modelo planetário, onde os elétrons giravam circularmente entorno do núcleo.

Logo após Rutherford e Bohr enunciarem seu modelo, verificou-se que um elétron, numa mesma camada, apresentava energias diferentes. Sommerfild sugeriu então que as órbitas fossem elípticas, pois em uma elipse há diferentes excentricidades (distância do centro), gerando energias diferentes para uma mesma camada.

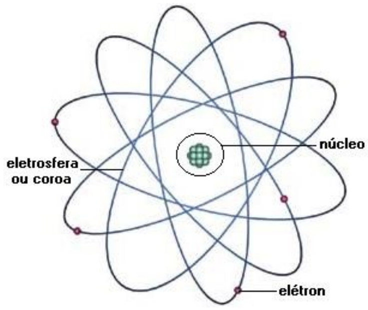

Figura 8.8: Eletrosfera (Fonte: www.infoescola.com

8.3.3 Propriedade de reflexão

Como vimos, uma propriedade muito importante da elipse é que qualquer raio luminoso ou onda sonora que saia de um dos focos será refletido pela elipse na direção do outro foco.

Óptica

A elipse também tem aplicação na óptica. Por exemplo: existe um dispositivo de iluminação usado em consultórios odontológicos que consiste num espelho com a forma de um arco de elipse e numa lâmpada que se coloca no foco mais próximo. A luz da lâmpada é concentrada pelo espelho no outro foco, ajustando-se o dispositivo de forma a iluminar o ponto desejado.

Figura 8.9: Espelho odontológico (Fonte: www.dx.com)

Ondas de choque

No artigo *Litotripsia para quebrar Pedra nos Rins* [20] do Dr. Cury um procedimento muito utilizado no tratamento de cálculo renal é denominado litotripsia extracorpórea. Neste procedimento, conforme esquema da Figura 8.10, ondas de choque criadas fora do corpo do paciente viajam através da pele e tecidos até encontrarem os cálculos mais densos, pulverizando-os. O litotriptor possui um espelho elíptico que concentra os raios emitidos num determinado ponto com grande precisão.

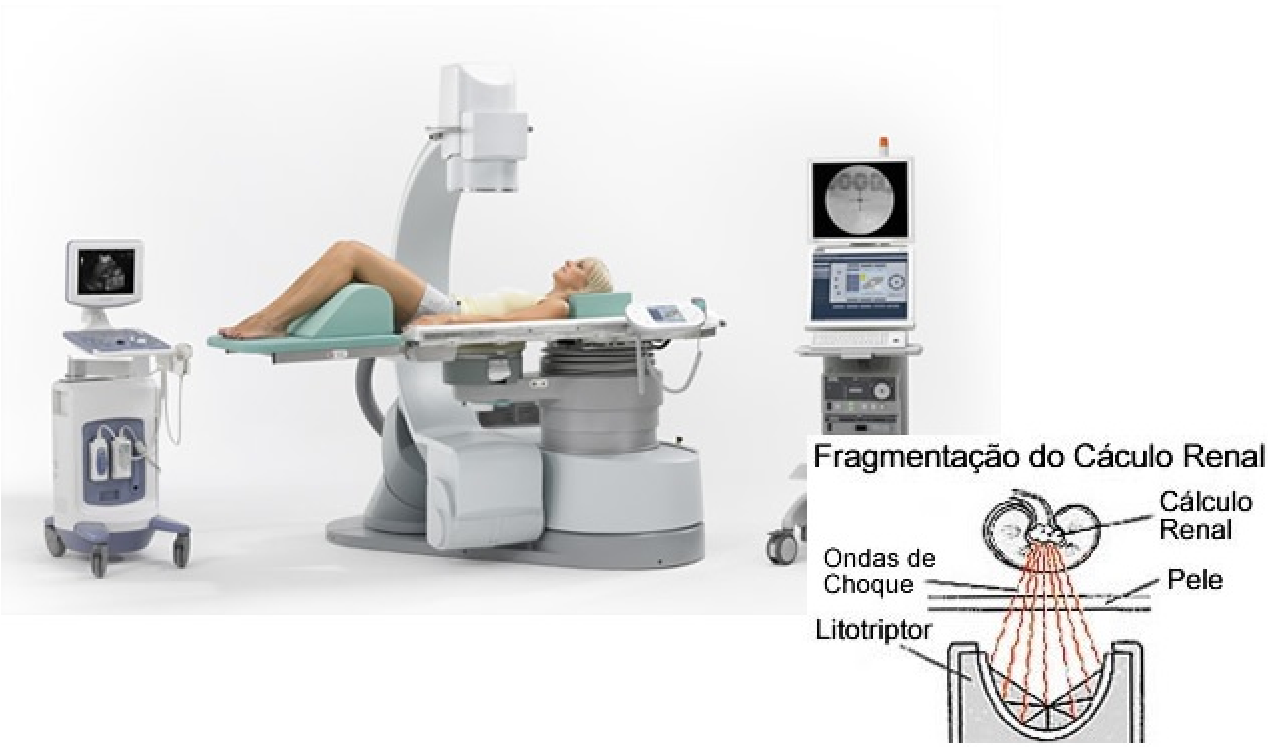

Figura 8.10: Litotriptor (Fonte: www.pedranorim.com.br)

8.4 Aplicações hiperbólicas

8.4.1 Propriedade de reflexão

Como vimos a propriedade de reflexão da hipérbole afirma que qualquer segmento de reta dirigido a um dos focos da hipérbole encontra o ramo correspondente e é refletido em direção do outro foco.

Telescópio

Essa propriedade é muito aplicada nos telescópios de reflexão. O físico astrônomo Renato Las Casas explica que esses telescópios:

> "são constituídos de dois espelhos, sendo um maior, que é parabólico e outro menor, que é hiperbólico. Esses dois espelhos dispõem-se de modo que os eixos da parábola e da hipérbole coincidam e que o foco da parábola coincida com um dos focos da hipérbole. Nesse tipo de telescópio, quando os raios de luz se refletem no espelho parabólico são dirigidos para o foco, pela propriedade de reflexão da parábola. Como este também é foco da hipérbole, pela propriedade de reflexão desta os raios de luz refletem-se no espelho hiperbólico e seguem em direção ao outro foco da hipérbole. Os raios de luz passam através de um orifício no centro do espelho primário, atrás do qual está uma lente-ocular que permite corrigir ligeiramente a trajetória da luz, que chega finalmente aos olhos do observador ou à película fotográfica." (Transcrição de áudio da radio Inconfidência [29])

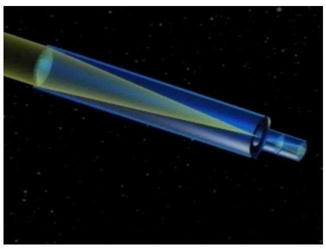

Figura 8.11: Telescópio refletor (Fonte: www.astro.if.br)

Acústica

Uma aplicação importante da hipérbole é no campo da acústica utilizada em igrejas, auditórios e teatros. Um exemplo é a Catedral de Brasília as paredes têm vibração acústica devido ao seu formato hiperbólico.

Figura 8.12: Catedral de Brasília (Fonte: cafehistoria.ning.com)

Característica interessante pois dispensa microfone para o celebrante das missas, ouvidas com perfeição em qualquer ponto, sem que seja preciso alterar o timbre e a altura de voz. Segundo o site *Café História* [22] a voz leva dois segundos para se propagar de um lado ao outro da catedral.

Capítulo 9

Considerações finais

O desenvolvimento deste trabalho possibilitou, inicialmente verificar que de fato a geometria tem sido deixada em segundo plano nas salas de aula. Autores como Crescenti, Passos e Silva, dentre outros, concordam que é de suma importância o ensino da geometria e que muitas vezes o conteúdo não é lecionado pela falta de preparo dos professores. Também é importante ressaltar que o uso da tecnologia e de softwares como o Geogebra, usado no desenvolvimento do trabalho estimulam e facilitam a aprendizagem.

No decorrer do trabalho contamos que a delegação Ateniense pede ao oráculo para o fim da epidemia e este traz a tona o problema da duplicação do cubo. Acreditamos que histórias como essa, quando contadas em sala de aula desperta o interesse pelo aprendizado.

Em seguida, formalizamos as cônicas: Parábola, Elipse e Hipérbole, definindo cada uma delas com base nos estudos de Apolônio, deduzindo suas equações canônicas na origem; com o auxílio do Geogebra, mostrando a generalização das curvas e por fim destacando a importante propriedade reflexiva de cada curva. Estes capítulos contém uma noção do conhecimentos que devem ser transmitidos na sala de aula pelo professor.

Para finalizar o trabalho buscamos aplicações interessantíssimas das cônicas, que muitas vezes passam despercebidas. Objetos simples como uma lanterna faz o uso das propriedade reflexiva da parábola. Também ressaltamos a finalidade acústica de se construir a Catedral de Brasília com varias hipérboles ao seu redor, o que é extremamente intrigante e curioso para quem não detém conhecimento das cônicas. Essas e outras aplicações podem e devem ser usadas pelo professor com finalidade de intrigar os alunos.

Para concluir ressalto que o trabalho nos oportunizou conhecer um pouco mais do tema, trazendo novos conhecimentos, em especial do contexto histórico e aplicabilidade das cônicas.

Referências Bibliográficas

[1] EUCLIDES., *Os elementos*, Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: FEU - Fundação Editora da UNESP, 2009. 583 p.

[2] APOLÔNIO. [S.l.]: [s.n.]

[3] Castelino Roberto e Crysthian Roberto, *Problemática do ensino e aprendizagem da Matemática/Geometria no Ensino Fundamental e no Ensino Médio da Escola Pública de Cuiabá.* Disponível em: <http://www.semana7.com.br/noticia/834/problematica-do-ensino-e-aprendizagem-da-matematica-geometria-no-ensino-fundamental-e-no-ensino-medio-da-escola-publica-de-cuiaba.html> Acesso em: 13 Setembro 2016.

[4] BELLÈ, R.; NAPOLITANI, P. D., *Le sezioni coniche dei Greci.* [S.l.]:

[5] GIOVANNI, V., *Le Coniche* [S.l.]: [s.n.].

[6] EDITORA ABRIL., *O que era o Oráculo de Delfos? Mundo Estranho, 2012.*, Disponível em: <http://mundoestranho.abril.com.br/materia/o-que-era-o-oraculo-de-delfos>. Acesso em: 13 Setembro 2016.

[7] BENAGLIA, L., *Corso di Storia ed epistemologia della matematica,* Bergamo, 2006/2007.

[8] LETILEO., *Problemas Clasicos de Grecia. Slideboom*,2010. Disponivel em: <http://www.slideboom.com/presentations/204842/Problemas-Cl%C3%A1sicos-de-Grecia>. Acesso em: 13 Setembro 2016.

[9] LOAIZA, L. S., *Historia en las secciones cónicas. Secciones Cónicas.* Disponivel em: <http://sitios.usac.edu.gt/seccionesconicas/elementos_historicos.html>. Acesso em: 31 Agosto 2016.

[10] MARCHINI, C., *Geometria clássica, Appunti delle lezioni.* Parma: Università degli Studi di Parma, 2005/2006.

[11] NOÉ, M., *Plano Cartesiano.* Brasil Escola, 2014. Disponivel em: <http://www.brasilescola.com/matematica/plano-cartesiano.htm>. Acesso em: 12 Setembro 2016.

[12] PINHEIRO, F. D. A., *As cônicas: história, sugestões e curiosidades.* Revista Educação e Mudança, Dezembro 2003. Disponivel em: <http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&cad=rja&uact=8&ved=0CCUQFjAB&url=http%3A%2F%2Frevistas.unievangelica.edu.br%2Findex.php%2Frevistaeducacaoemudanca%2Farticle%2Fdownload%2F482%2F480&ei=wc8lVIySJrPGsQSvyYL4Cg&usg=AFQjCNGqsxNy>. Acesso em: 26 Setembro 2016.

[13] EDUC - INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA, 2000., *Euclides - Biografia.* Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euclides/index.htm>. Acesso em: 01 Setembro 2016.

[14] SANTANA, A. L. PITÁGORAS, *Info Escola Navegando e Aprendendo, 2006.* Disponivel em: <http://www.infoescola.com/filosofos/pitagoras/>. Acesso em: 13 Setembro 2016.

[15] UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID., *Cónicas.* Disponível em: <http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/historia/apoloni o/conic>. Acesso em: 13 Setembro 2016. VENTURI, J. J. Cônica. 5ª. ed. Curitiba: Arte Gráficas e Editora Unificado, 1949. 243 p.

[16] O PRINCIPE DO RECANTO, *A metafísica platônica e a duplicação do cubo* Disponível em: <https://principedaliberdade.wordpress.com/2016/11/10/a-metafisica- platonica-e-a-duplicacao-do-cubo/>. Acesso em: 19 de dezembro de 2016.

[17] BARBOSA, JOÃO PAULO, *O Último Capítulo de Dois dos Três Problemas Clássicos.* Disponível em: <http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/Comunicacoes/1_Barbosa_J_P_C_ Pierre_Laurent_Wantzel_O_%C3%9

Altimo_Cap%C3%ADtulo_de_Dois_dos_Tr%C3%AAs.pdf>. Acesso em: 19 de dezembro de 2016.

[18] [S.N.], *As curvas cônicas - Desenho Geométrico* Disponível em: <http://www.uel.br/cce/mat/geometrica/php/dg/dg_9t.php>. Acesso em: 19 de janeiro de 2017.

[19] KLAUS FELDKELLER, *Nasa lança ao espaço o primeiro satélite de comunicações* Disponível em:<http://www.dw.com/pt-br/1962-nasa-lan%C3%A7a-ao-espa%C3%A7o-o-primeiro-sat%C3%A9lite-de-comunica%C3%A7%C3%B5es/a-8 9757> Acesso em: 19 de janeiro de 2017.

[20] [S.N.], *Pedra nos rins Litotripsia* Disponível em: <http://www.pedra no-rim.com.br/litotripsia.htm> Acesso em: 19 de janeiro de 2017.

[21] [S.N.], *Modelos atômicos* Disponível em: <https://www.algosobre.com.br/fisica/modelos-atomicos.html> Acesso em: 19 de janeiro de 2017.

[22] SELMA LESSA, *Catedral de Brasília* Disponível em: <http://cafehistoria.ning.com/photo/1980410:Photo:25267?commentId=1980410 %3A Comment%3A26595> Acesso em: 19 de janeiro de 2017.

[23] Tomas Gutierres, *Las Matemáticas a Lo Largo de la Historia: de la Prehistoria a la Antigua Grecia* Editora: Vision Libros, 2009.

[24] [S.N.] , *Recherches sur les moyens de reconnaítre si un problème de géometrie peut se résoudre avec lá règle et la compas* publicado no *Journal de Mathématiques* em 1837

[25] Riccardo Belle e Pier Daniele Napolitani , *Le sezioni coniche dei Greci*/Progetto Lauree Scientifiche: Laboratorio di matematica. Disponível em: <http://web.math.unifi.it/archimede/note_storia/BelleNapolitani-Coniche.pdf> Acesso em: 17 de fevereiro de 2017.

[26] [S.N.] *Figura de linguagem.* Disponível em: <http://www.dicionarioinformal.com.br/figura+de+linguagem/> Acesso em: 17 de fevereiro de 2017.

[27] [S.N.] *Geometria analítica 1 - CDERJ.* Disponível em: <http://www.professores.uff.br/kowada/ga/ead/ga1V1aula15.pdf> Acesso em: 17 de fevereiro de 2017.

[28] [s.n.] *Análise Matemática IV*. Departamento de Matemática da F.C.T.U.C. - 2005/2006 Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/ adsg/AM4conicas.pdf> Acesso em: 25 de fevereiro de 2017.

[29] Renato Las Casas *Universo fantástico*. Radio Inconfidência. Áudio disponível em Disponível em: <http://inconfidencia.mg.gov.br> Acesso em: 25 de fevereiro de 2017.