Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Teoria Econômica dos Jogos e o Ensino Médio

Davi Lessa de Oliveira

Goiânia

2017

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Nome completo do autor: Davi Lessa de Oliveira

Título do trabalho: Teoria Econômica dos Jogos e o Ensino Médio

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Davi Lessa de Oliveira

Assinatura do (a) autor (a) [2]

Data: 14 / 04 / 2017

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Davi Lessa de Oliveira

Teoria Econômica dos Jogos e o Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Rogerio de Queiroz Chaves

Goiânia

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Oliveira, Davi Lessa de
Teoria Econômica dos Jogos e o Ensino Médio [manuscrito] / Davi Lessa de Oliveira. - 2017.
73 f.

Orientador: Prof. Dr. Rogerio de Queiroz Chaves.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2017.
Bibliografia.
Inclui símbolos, gráfico, tabelas, algoritmos, lista de figuras.

1. Teoria dos jogos. 2. Dilema dos prisioneiros. 3. Estratégias puras. 4. Estratégias mistas. 5. Equilíbrio de Nash. I. Chaves, Rogerio de Queiroz, orient. II. Título.

CDU 51

Davi Lessa de Oliveira

"Teoria Econômica dos Jogos e o Ensino Médio"

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 27 de março de 2017, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Rogerio de Queiroz Chaves
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Bianka Carneiro Leandro

Profª. Drª. Bianka Carneiro Leandro
Membro Externo – PUC/GO

Universidade Federal de Goiás - UFG
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional – PROFMAT/UFG
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

Ata da reunião da banca examinadora da defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Davi Lessa de Oliveira – Aos vinte e sete dias do mês de março do ano de dois mil e dezessete, às 16:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Dr. Rogerio de Queiroz Chaves – Orientador, Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues e Profa. Dra. Bianka Carneiro Leandro, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no LEMAT do IME, procederem a avaliação da defesa intitulada **"Teoria Econômica dos Jogos e o Ensino Médio"**, em nível de mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Davi Lessa de Oliveira, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo presidente da banca, Prof. Dr. Rogerio de Queiroz Chaves, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 30 minutos, procedeu à apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se à avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1075/2012 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG, e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega, na secretaria do IME, da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 17:00 horas, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, eu, Sonia Maria Oliveira, secretária do PROFMAT/UFG, lavrei a presente ata que, após lida e aprovada, segue assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. Rogerio de Queiroz Chaves
Presidente – IME/UFG

Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues
Membro – IME/UFG

Bianka Carneiro Leandro

Profª. Drª. Bianka Carneiro Leandro
Membro – PUC/GO

Davi Lessa de Oliveira graduou-se em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Goiás, especializou-se em Psicopedagogia Institucional e Clinica pelo Instituto Saber, é professor da Secretaria Municipal de Educação de Goiânia e da Secretaria de Estado de Educação, Cultura e Esporte de Goiás.

Para meu filho, Lael Lessa Peperaio,
que esperei por tanto tempo e finalmente está aqui.

Agradecimentos

Ao **Senhor Meu Deus** que sempre me guiou pelo caminho;

À minha esposa **Priscilla Peperaio Lessa** por me suportar e apoiar;

Aos **meus familiares** por todos os incentivos dispensados;

A meu professor orientador **Dr. Rogerio de Queiroz Chaves** que esteve sempre pacientemente pronto a me auxiliar;

A toda a equipe do **CMAI BRASIL DI RAMOS CAIADO**, em especial, sua diretora, **Dra. Mércia Rosana Chavier**, juntamente com suas coordenadoras, **Simony Jacob da Silva** e **Andréia Lúcia Carneiro de Andrade**, pelo constante apoio e incentivo;

À **CAPES**, ao **PROFMAT** e à **UFG** por esta grande oportunidade;

A **todos os colegas** da turma de mestrado de 2015 do PROFMAT/UFG.

Resumo

Este trabalho concentra-se em apresentar os elementos básicos da Teoria Econômica dos Jogos limitando seu conteúdo ao nível matemático do ensino médio da educação brasileira. Para tanto é nele exposto: uma breve contextualização histórica do assunto, jogos clássicos da Teoria Econômica dos Jogos, o que são estratégias puras e mistas, métodos de sistematização, o conceito de solução, métodos para encontrar soluções e, ao final, uma proposta de oficina matemática sobre Teoria Econômica dos Jogos a ser ministrada a estudantes do ensino médio.

Palavras-chave

Teoria Dos Jogos, Dilema dos Prisioneiros, Estratégias puras, Estratégias mistas, Equilíbrio de Nash.

Abstract

This work focuses on presenting the basic elements of the Economic Theory of Games in a way that is suitable for exposition at the mathematical level of high school education in Brazil. With that in mind, the work covers a brief historical context of the subject, classic games of Economic Theory of Games, what are pure and mixed strategies, methods of systematization, the concept of solution, methods to find solutions and, at the end, we suggest a Mathematical Workshop on Economic Theory of Games as a way to introduce the subject to high school students.

Keywords

Game theory, Pure strategies, Mixed strategies, Nash equilibrium.

Lista de Figuras

1 Matriz de Payoffs, Dilema dos Prisioneiros 24
2 Matriz de Payoffs, Três Pontes 25
3 Matriz de Payoffs, Dois Túneis 27
4 1ª Matriz de Payoffs, Jogo Exemplo 1 29
5 2ª Matriz de Payoffs, Jogo Exemplo 1 29
6 3ª Matriz de Payoffs, Jogo Exemplo 1 29
7 4ª Matriz de Payoffs, Jogo Exemplo 1 30
8 1ª Matriz de Payoffs, Jogo Exemplo 2 32
9 2ª Matriz de Payoffs, Jogo Exemplo 2 32
10 3ª Matriz de Payoffs, Jogo Exemplo 2 32
11 Matriz de Payoffs, Dilema dos Prisioneiros 33
12 Matriz de Payoffs com marcações, Dilema dos Prisioneiros 33
13 Matriz de Payoffs, Três Pontes 35
14 Matriz de Payoffs com marcações, Três Pontes 35
15 Matriz de Payoffs, Dois Túneis 36
16 Matriz de Payoffs com marcações, Dois Túneis 36
17 Matriz de Payoffs com estratégias Mistas, Dois Túneis 39
18 Matriz de Payoffs com estratégias Mistas, Jogo Exemplo 3 41
19 Gráfico 1, Jogo Exemplo 3 42
20 Gráfico 2, Jogo Exemplo 2 43
21 Gráfico 3, Jogo Exemplo 2 43
22 Matriz de Payoffs, com estratégias mistas, Dois Túneis 44
23 Gráfico 1, Dois Túneis 45
24 Gráfico 2, Dois Túneis 46
25 Gráfico 3, Dois Túneis 46
26 Matriz de Payoffs, Quiosques de Água de Coco 48
27 Matriz de Payoffs, Sete/Meio 50
28 Gráficos, Sete e Meio 52
29 Matriz de Payoffs, Par ou Impar 53
30 Gráficos, Par ou impar 54
31 Matriz de Payoffs, Guerra dos Sexos 55
32 Gráficos, Guerra dos Sexos 57

Sumário

1 Introdução **15**

1.1 Um Pouco De História 15

2 Teoria Dos Jogos **17**

2.1 Teoria Combinatória Dos Jogos 18

2.2 Teoria Econômica Dos Jogos 19

3 Teoria Econômica Dos Jogos Em Estratégias Puras **20**

3.1 Sistematização De Jogos Em Estratégias Puras 21

3.1.1 O Dilema Dos Prisioneiros 21

3.1.2 Três Pontes 24

3.1.3 Dois Túneis 26

3.2 Soluções De Jogos Em Estratégias Puras 27

3.2.1 Equilíbrio Das Estratégias Dominantes 27

3.2.2 Equilíbrio De Nash Em Estratégias Puras 30

3.2.3 De Volta Ao Dilema dos Prisioneiros 33

3.2.4 De Volta Às Três Pontes 34

3.2.5 De Volta Aos Dois Túneis 36

4 Teoria Econômica dos Jogos Em Estratégias Mistas **37**

4.1 Sistematização De Jogos Em Estratégias Mistas 37

4.2 Soluções Em Estratégias Mistas 39

4.2.1 Equilíbrio De Nash Em Estratégias Mistas 40

4.2.2 Finalmente A Solução, Dois Túneis 44

5 Jogos, Jogos e Mais Jogos **47**

5.0.1 Quiosques de Água de Coco 47

5.0.2 Sete e Meio 49

5.0.3 Par ou Impar 51

5.0.4 Guerra Dos Sexos 55

5.0.5 E continua... 58

6 Proposta De Oficina Matemática Sobre Teoria Econômica Dos Jogos Para O Ensino Médio **58**

6.1 Justificativa 58

6.2 Objetivos Gerais 59
6.3 Metodologia 59
6.3.1 Aula 1 60
6.3.2 Aula 2 62
6.3.3 Aula 3 62
6.3.4 Aula 4 64
6.3.5 Aula 5 65
6.4 Relatório Sobre Aplicação Da Oficina 67
6.4.1 Relatório da Aula 1 67
6.4.2 Relatório da Aula 2 68
6.4.3 Relatório da Aula 3 68
6.4.4 Relatório da Aula 4 69
6.4.5 Relatório da Aula 5 69
6.4.6 Relatório da Atividade de Verificação de Aprendizagem e Aproveitamento 70

7 Conclusão **71**

1 Introdução

O Presente documento tem como objetivo expor a Teoria Econômica dos Jogos sob a perspectiva de uma matemática acessível a estudantes do ensino médio, indicando algumas aplicações, métodos de resoluções, benefícios de sua análise e estratégias para ministrar tal conteúdo em sala de aula. Com o fim de situar o atual contexto do assunto, apresentamos um breve resumo histórico sobre o surgimento e evolução da Teoria dos Jogos (campo do qual descende a Teoria Econômica dos Jogos) até os dias de hoje; passamos ao leitor o objeto de estudo da Teoria dos Jogos, juntamente com o objeto de estudo de suas duas ramificações, a saber, a Teoria Econômica dos Jogos e a Teoria Combinatória dos Jogos; feito isto, o trabalho se concentra exclusivamente na Teoria Econômica dos Jogos, indicando quais os parâmetros dos jogos que serão abordados, como se dá a sistematização de um jogo, exemplos de jogos, o conceito de solução de um jogo e alguns métodos de solução; finalizando com uma proposta de oficina matemática sobre a Teoria Econômica dos Jogos a ser ministrada para turmas dos ensino médio.

1.1 Um Pouco De História

O que se segue é um apanhado histórico das principais influências no desenvolvimento da Teoria dos Jogos baseado majoritariamente em [1, 2, 3, 4, 5].

É senso comum entre os estudiosos do assunto que a Teoria dos Jogos ganhou notoriedade no mundo da economia e da matemática aplicada em 1944, quando John von Neumann (1903-1957), matemático húngaro, e Oskar Morgenstern (1902-1077), economista austríaco, lançam o livro *The Theory of Games and Economic Behaviour*[6], que por meio da análise de jogos com soma zero (jogos nos quais a vitória de um representa necessariamente a derrota de outro) oferecia soluções para alguns problemas militares. O que causou grande impacto, dado que o mundo se encontrava na segunda guerra mundial.

Porém outros autores ja haviam previamente trabalhado ideias intrínsecas à Teoria dos Jogos. James Waldegrave (1684-1741), no século XVIII já trabalhava a ideia do equilíbrio de estratégias mistas por meio de um jogo de cartas chamado "le Her", mas sem formalizar o seu conceito ou tentar estender sua abordagem para uma teoria geral. Em 1838, Antoine Cournot (1801-1877), matemático e economista francês, formalizou o conceito de equilibro nas estratégias dos jogos, que posteriormente seria generalizado pelo matemático norte-americano John Nash Jr. (1928-2015). Em 1913, Ernst Zermelo (1871-1953), matemático e filosofo alemão, enuncia o que ficou conhecido como o primeiro teorema matemático da Teoria dos Jogos, o Teorema de Zermelo, que afirma a existência de uma estratégia para jogos, como xadrez por exemplo, na qual fica assegurada a vitória ou no mínimo o empate para o jogador que a tomar primeiro. Neste período também tivemos a contribuição do matemático francês Félix Borel (1871-1956), estudioso dos jogos de estratégia, que segundo Ronaldo Fiani[4] demonstrou que tanto questões relacionadas à arte da guerra quanto questões sobre especulação financeira e economia podem ser representadas e analisadas sob a forma de jogos matemáticos.

Voltando a John von Neumann, em 1928 ele demonstra por meio de topologia e análise funcional que todo jogo finito de soma zero com dois jogadores possui solução[1], em 1937 fornece uma demonstração alternativa mais elegante baseada no teorema do ponto fixo de Brouwer, finalmente publicando o livro *The Theory of Games and Economic Behaviour*[6] com seu companheiro Oskar Morgenstern em 1944.

Na década de 1950, o já mencionado John Nash Jr. passa a chamar a atenção do mundo com suas contribuições sobre o tema, mostrando a existência de um equilíbrio de estratégias mistas para jogos não cooperativos e em 1970 John Conway, matemático britânico nascido em 1937 e vivo até os dias de hoje, nos apresenta um jogo que possuía simplesmente zero jogadores. Estes são respectivamente os famosos equilíbrio de Nash e Jogo da Vida, sobre os quais falaremos mais tarde. O economista húngaro John Harsanyi (1920-2000) então, em 1988, demonstra que o equilibro de Nash poderia ser aplicado a jogos assimétricos, que são os jogos nos quais um jogador possui mais informações que seu oponente. Em 1994, John Nash e John Harsanyi recebem o Prêmio Nobel de Economia por suas contribuições para a Teoria dos Jogos.

A Teoria dos Jogos vem desde então contribuindo para uma vasta gama de saberes da humanidade, entre os quais se encontram economia, ciências sociais, biologia,

[1] O conceito “solução de um jogo” é definido na seção 3.2.

matemática pura, psicologia, inteligencia artificial e outros. Especula-se sobre a possibilidade de que algum dia a Teoria dos Jogos seja capaz de teorizar de forma geral o modo como decisões são tomadas, nos permitindo prever consequências e reações sobre uma infinidade de situações problemas de forma mais ampla.

2 Teoria Dos Jogos

O que se estabelece neste capítulo é baseado no conhecimento adquirido pela análise de [1, 3, 4, 6, 7, 8].

A Teoria dos Jogos é o campo do saber que busca compreender os aspectos matemáticos estabelecidos na parte racional dos jogos. O melhor movimento inicial, a melhor resposta a uma jogada adversária, as chances de obter êxito utilizando determinada estratégia. A Teoria dos Jogos procura por estes e outros aspectos do tipo, não se limitando a jogos puramente estratégicos.

Em jogos envolvendo fatores atléticos por exemplo (futebol, vôlei, etc..) também há o uso do intelecto, da racionalidade, para se aumentar as chances de vitória. Analisar qual a melhor posição para os jogadores, quando avançar, quando recuar, quantos jogadores manter em posição ofensiva, quantos manter em defensiva, certamente contribuirá para o ideal de vencer o jogo.

Há também a possibilidade de se enxergar situações problemas do cotidiano como jogos matemáticos. Decidir qual estratégia irá maximizar os lucros de um empresa frente à competitividade do mercado, por exemplo. Como bem nos mostrou o ator neozelandês Russell Crowe durante a cena do bar, ao interpretar John Nash Jr. no filme *Uma Mente Brilhante*, até mesmo a tentativa de conseguir um par romântico pode ser visualizada como um jogo no qual certas condutas aumentarão suas chances de não ter que voltar para a casa sozinho no fim da noite.

Atualmente a Teoria dos Jogos é dividida em dois ramos, a Teoria Combinatória dos Jogos que será apresentada tão somente para melhor compreensão do que é Teoria dos Jogos e a Teoria Econômica dos Jogos, que é o real objeto de analise deste trabalho.

2.1 Teoria Combinatória Dos Jogos

A Teoria Combinatória dos Jogos trabalha exclusivamente com jogos de informações perfeitas, ou seja, jogos onde o fator sorte não exista, com todas as informações e possíveis movimentos disponíveis a todos os jogadores.

Entre tais, estão jogos como xadrez, Ouri, Nim, Damas, Arimaa e Hex. Alguns destes, e ainda outros, são apresentados e analisados em [8], que nos fala um pouco da vida e dos jogos combinatórios criados por John Conway, um dos maiores estudiosos e contribuintes da Teoria Combinatória dos Jogos.

Diferentemente dos jogos analisados pela Teoria Econômica dos Jogos, na Teoria Combinatória podem haver jogos de um ou até mesmo zero jogadores, como é o caso do Jogo da Vida, um jogo no qual se estabelecem as configurações iniciais e a partir daí ele segue automaticamente sem a necessidade de jogador algum. O Jogo da Vida trouxe muitas contribuições para outras áreas de interesse da humanidade, como inteligência artificial, programação e até mesmo biologia.

O Teorema de Zermelo, citado ao início deste trabalho, pertence a esta parte da Teoria dos Jogos. Ernst Zermelo provou que em qualquer jogo finito de informações perfeitas, entre duas pessoas, em que os jogadores realizam suas jogadas alternadamente, sem a interferência do acaso, sempre há uma estratégia vencedora a ser tomada que garanta no mínimo o empate para o jogador que a tomar primeiro. Pensemos no jogo da velha, por exemplo. É um jogo bem simples que atende a todos os requisitos do Teorema de Zermelo e, portanto, possui uma estratégia vencedora. Analisar meticulosamente o jogo da velha a fim de desvendar qual a sua estratégia vencedora não é uma tarefa das mais árduas. Já no caso do xadrez, esta é uma tarefa tão difícil que nem mesmo nossos computadores ainda foram capazes de cumprir, porém sabemos que a solução existe e essa é a beleza do Teorema de Zermelo.

Os estudiosos da Teoria combinatória dos Jogos buscam, por meio da analise de jogos matemáticos, soluções para situações problemas e aplicações tanto para a matemática pura quanto para outras áreas de interesse da humanidade. Este é um ramo da Teoria dos Jogos extremamente importante e interessante, porém não é o foco deste trabalho em especifico e, portanto, limitemos o assunto até aqui.

2.2 Teoria Econômica Dos Jogos

Antes de falar diretamente sobre a Teoria Econômica dos Jogos, eis uma pequena anedota[7]:

> "No dia do jogo o técnico Vicente Feola tentava enfiar na cabeça de Garrincha um esquema tático mortal que seria usado pela primeira vez na Seleção, contra os russos: 'No meio de campo - dizia Feola - Nilson Santos, Zito e Didi trocariam passes curtos para atrair a atenção dos russos... Vavá puxaria a marcação da defesa deles caindo para o lado esquerdo do campo... Depois da troca de passes no meio do campo, repentinamente a bola seria lançada por Nilton Santos nas costas do marcador de Garrincha.
>
> Garrincha venceria facilmente seu marcador na corrida e com a bola dominada iria até à área do adversário, sempre pela direita, e ao chegar à linha de fundo cruzaria a bola na direção da marca de pênalti; Mazzola viria de frente em grande velocidade já sabendo onde a bola seria lançada... e faria o gol!'
>
> Garrincha, com a camisa jogada no ombro, ouvia sem muito interesse a preleção, entre divertido e distraído, e em sua natural simplicidade perguntou ao técnico: 'Tá legal, seu Feola!... Mas o senhor já combinou tudo isso com os russos?' "

O raciocínio de Garrincha estava em perfeita sintonia com o objeto de estudo da Teoria Econômica dos Jogos, que nos mostra, assim como Garrincha, que em certas situações, sejam elas de conflitos de interesses ou não, se queremos alcançar o melhor resultado possível, devemos seguir uma conduta que leve em conta as atitudes que podem ser tomadas por todas as pessoas envolvidas na situação.

A Teoria Econômica dos Jogos tem por finalidade analisar as possíveis reações de duas ou mais entidades (doravante chamadas **jogadores**) envolvidas em uma situação problema (doravante chamada **jogo**) e então estabelecer quais atitudes (**jogadas**) um jogador deve seguir para maximizar seus ganhos ou minimizar suas perdas ao final da situação. Ela nos apresenta modelos e exemplos que facilitam nossa compreensão sobre quais as melhores escolhas na tomada de decisões interdependentes, tendo como principal argumento se perguntar quais as possíveis jogadas de cada jogador, qual a melhor resposta para uma determinada jogada do oponente (em alguns casos, mesmo sem ter conhecimento prévio de que jogada o outro fará) e tudo isto tendo em mente que os outros jogadores também estão seguindo esta linha de raciocínio.

Para a análise a que se propõe Teoria Econômica dos Jogos, os jogos devem ser convenientemente sistematizados. Neste trabalho apresentamos dois métodos de sistematização: por **estratégias puras** e por **estratégias mistas**. Quando um jogador escolhe diretamente qual jogada tomar, diz-se que ele está tomando uma **estratégia pura**. No jogo de par ou impar, por exemplo, quando você decide conscientemente por colocar par ou por colocar impar, você está seguindo uma estratégia pura. Em alguns jogos, como veremos mais à frente, é preferível, ao em vez de escolher diretamente uma jogada, estabelecer uma probabilidade a cada escolha de jogada possível. Esta conduta é denominada **estratégia mista**. No jogo do par ou impar, você está seguindo uma estratégia mista se, por exemplo, rolar um dado de 6 faces e decidir que jogará par, caso a rolagem resulte em par, porém jogará impar, caso a rolagem resulte em impar.

Os jogos aqui apresentados são do tipo um contra um; todos os jogadores jogam individualmente e motivados por seus próprios interesses, portanto, não cooperando entre si; todos os jogadores estão a par de todas as informações existentes sobre o jogo e o resultado da jogada de um jogador afeta o resultado da jogada do outro; as jogadas são feitas simultaneamente; o jogo possui uma única rodada e no caso específico dos jogos analisados por estratégias mistas, nos restringiremos a jogos nos quais cada um dos dois jogadores possui apenas duas opções de estratégias a seguir. A Teoria Econômica dos Jogos não se limita aos jogos que se encaixam nestes requisitos, porém neste trabalho nos limitaremos a eles.

3 Teoria Econômica Dos Jogos Em Estratégias Puras

O que se estabelece neste capítulo é baseado no conhecimento adquirido pela análise de [1, 2, 3, 4, 5, 6].

3.1 Sistematização De Jogos Em Estratégias Puras

Como já dito, a Teoria Econômica dos Jogos sistematiza situações problemas na forma de jogos matemáticos a fim de se ter uma melhor compreensão das condutas seguidas pelos indivíduos envolvidos. Uma **estratégia pura** é simplesmente um das possíveis jogadas que cada jogador pode fazer. Para fins didáticos, explicaremos como se dá a sistematização de um jogo em estratégias puras simultaneamente com a apresentação do jogo O Dilema dos Prisioneiros, um clássico da Teoria Econômica dos Jogos.

3.1.1 O Dilema Dos Prisioneiros

O jogo que se segue foi inventado em 1950 pelos matemáticos norte-americanos Merrill Flood (1908-1991) e Melvin Dresher (1911-1992), porém foi adaptado e tomou notoriedade por intermédio do matemático canadense Albert Tucker (1905-1995).

Suponha que dois homens foram presos por terem cometido um certo crime. A polícia, apesar de convicta de ter pego os culpados, possui prova suficiente para manter cada um preso por apenas um ano. Não satisfeito com este resultado e na ânsia por mais provas sobre o caso, o delegado coloca cada prisioneiro em uma sala diferente, de modo que não possam se comunicar, e faz a mesma proposta a ambos:

> *"Você pode confessar ou negar,*
> *se ambos confessarem, então ambos ficarão detidos por 5 anos,*
> *se ambos negarem, então ambos ficarão detidos por 1 ano,*
> *mas se um negar e o outro confessar, o que confessou será solto e o que negou ficará detido por 10 anos!"*

A situação pode ser interpretada como um jogo no qual cada prisioneiro é um jogador que a partir de agora jogará individualmente buscando a vitória, ou seja, garantir ou ao menos maximizar sua liberdade. Para tal, cada prisioneiro deve escolher entre uma das seguintes estratégias puras; negar ou confessar. Vejamos então os elementos básicos da sistematização por estratégias puras de um jogo como este.

De forma geral diz-se que o conjunto finito de todos os jogadores de um jogo é dado por $G = \{g_1, g_2, g_3, ..., g_n\}$ onde $g_i \in G$ representa o i-ésimo jogador. O conjunto finito de todas as possíveis jogadas de um i-ésimo jogador é dado por $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, ..., s_{im_i}\}$ com $m_i \geq 2$. Cada elemento do conjunto S_i representa uma **estratégia pura** do jogador g_i. No Dilema dos Prisioneiros, denotando por g_1 e g_2 os prisioneiros, temos

$$G = \{g_1, g_2\},$$

$$S_1 = \{s_{11}, s_{12}\}, \text{ com } s_{11} = g_1 \text{ nega e } s_{12} = g_1 \text{ confessa},$$

$$S_2 = \{s_{21}, s_{22}\}, \text{ com } s_{21} = g_2 \text{ nega e } s_{22} = g_2 \text{ confessa}.$$

O produto cartesiano dos conjuntos de estratégias puras dos jogadores é denominado **espaço de estratégias puras** e denotado por

$$S = \prod_{i=1}^{n} S_i = S_1 \times S_2 \times S_3 \times ... \times S_n.$$

No Dilema dos Prisioneiros, temos

$$S = S_1 \times S_2 = \{(s_{11}, s_{21}), (s_{11}, s_{22}), (s_{12}, s_{21}), (s_{12}, s_{22})\}.$$

Cada elemento $\mathbf{s}$ do conjunto S, em outras palavras, $\mathbf{s} = (s_{1j_1}, s_{2j_2}, s_{3j_3}, ..., s_{nj_n})$, onde s_{ij_i} é uma **estratégia pura** do i-ésimo jogador, é denominado **perfil de estratégias puras**. No Dilema dos Prisioneiros, há quatro perfis de estratégias puras, a saber,

$$\begin{aligned}
(s_{11},\ s_{21}) &= (g_1 \text{ nega},\ g_2 \text{ nega}),\\
(s_{11},\ s_{22}) &= (g_1 \text{ nega},\ g_2 \text{ confessa}),\\
(s_{12},\ s_{21}) &= (g_1 \text{ confessa},\ g_2 \text{ nega}),\\
(s_{12},\ s_{22}) &= (g_1 \text{ confessa},\ g_2 \text{ confessa}).
\end{aligned}$$

O perfil de estratégias puras que g_1 e g_2 tomarão determina o que acontecerá com cada um deles. Este resultado, individual, é chamado **payoff** (pagamento) e para fins de sistematização e análise do jogo, convém representá-lo por meio de um valor numérico. Por exemplo, se g_1 e g_2 confessarem, então ambos ficarão presos por um ano, como ficar preso é um resultado desfavorável, convém estabelecer que cada preso receberá -1 de payoff. Mas se g_1 nega e g_2 confessa, então g_1 receberá um payoff de -10 e g_2 receberá um payoff de 0 já que não ficará preso por período algum.

A função u_i que associa o payoff do i-ésimo jogador a cada perfil de estratégia pura $\mathbf{s} \in S$ é denominada **função utilidade**, de modo que

$$\begin{aligned} u_i : S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{s} &\longmapsto u_i(\mathbf{s}) \end{aligned}$$

No Dilema dos Prisioneiros, convencionando $u_i(\mathbf{s}) = x$, com $x \in \mathbb{R}$ tal que x é dado em anos de liberdade, temos

$$\begin{aligned} u_1(s_{11},\ s_{21}) &= u_1(g_1 \text{ nega},\ g_2 \text{ nega}) = -1, \\ u_1(s_{11},\ s_{22}) &= u_1(g_1 \text{ nega},\ g_2 \text{ confessa}) = -10, \\ u_1(s_{12},\ s_{21}) &= u_1(g_1 \text{ confessa},\ g_2 \text{ nega}) = 0, \\ u_1(s_{12},\ s_{22}) &= u_1(g_1 \text{ confessa},\ g_2 \text{ confessa}) = -5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(s_{11},\ s_{21}) &= u_2(g_1 \text{ nega},\ g_2 \text{ nega}) = -1, \\ u_2(s_{11},\ s_{22}) &= u_2(g_1 \text{ nega},\ g_2 \text{ confessa}) = 0, \\ u_2(s_{12},\ s_{21}) &= u_2(g_1 \text{ confessa},\ g_2 \text{ nega}) = -10, \\ u_2(s_{12},\ s_{22}) &= u_2(g_1 \text{ confessa},\ g_2 \text{ confessa}) = -5. \end{aligned}$$

Há também um recurso visual que auxilia na compreensão dos payoffs nos jogos de dois jogadores denominado **matriz de payoffs**. Nesta matriz, cada linha corresponde a uma estratégia pura de g_1, cada coluna corresponde a uma estratégia pura de g_2 e, então, cada uma de suas entradas consiste de um par ordenado em que o primeiro termo é o payoff de g_1 e o segundo termo, o payoff de g_2, para o perfil de estratégias puras onde g_1 usou a estratégia da linha e g_2 usou a estratégia da coluna em questão. A Matriz de payoffs do Dilema dos Prisioneiros é apresentada na Figura 1.

Figura 1: Matriz de Payoffs, Dilema dos Prisioneiros

	g_2 nega	g_2 confessa
g_1 nega	$(-1,\ -1)$	$(-10,\ 0)$
g_1 confessa	$(0,\ -10)$	$(-5,\ -5)$

Estes são os elementos básicos da sistematização de um jogo em estratégias puras segundo a Teoria Econômica dos Jogos. Observe que no Dilema dos Prisioneiros há uma simetria nas condições, nos payoffs, e os objetivos de todos os jogadores são semelhantes, mas esse não é sempre o caso. Na seção 3.2 veremos qual a solução deste e outros jogos por meio de **equilíbrio das estratégias dominantes** e **equilíbrio de Nash em estratégias puras**, porém não antes de conhecermos mais alguns exemplos clássicos de jogos que serão apresentados a seguir.

3.1.2 Três Pontes

Por um grande rio passam três pontes, que chamaremos de A, B e C, sendo B a ponte do meio. Se duas pessoas passarem simultaneamente por pontes adjacentes, certamente se verão de longe, mas não poderão se comunicar. Se passarem pelas pontes A e C não se verão e tão pouco se comunicarão. Tiago e Aline são dois ex-namorados que, estando cada um em uma das margens do rio, atravessarão simultaneamente de um lado para o outro. Logo, podem acabar se encontrando na mesma ponte, se verem de longe em pontes adjacentes ou não se verem, caso passem pelas pontes dos extremos.

Ocorre que Aline está muito triste pelo término do namoro e ficará satisfeita se não vir Tiago durante a travessia, porém ficará insatisfeita se o vir ao longe e não puder conversar com ele. Portanto, se o vir, prefere que seja pessoalmente, ficando parcialmente satisfeita. Já Tiago, deseja passar pela mesma ponte que Aline, ficando satisfeito com este desfecho, porém ficará insatisfeito se a vir ao longe e não puder conversar com ela. Portanto, se não puder falar com ela, prefere nem mesmo vê-la, ficando parcialmente satisfeito. Tiago e Aline estão, cada um, a par de todas as informações sobre a situação e devem decidir por qual ponte passar a fim de maximizar seu bem estar pessoal.

Sistematização do jogo Três Pontes

Convencionando g_1 = Tiago, g_2 = Aline, A_i = i-ésimo jogador escolhe a ponte A, B_i = i-ésimo jogador escolhe a ponte B, C_i = i-ésimo jogador escolhe a ponte C. Temos os conjuntos de estratégias puras $S_1 = \{A_1,\ B_1,\ C_1\}$, $S_2 = \{A_2,\ B_2,\ C_2\}$, e o espaço de estratégias puras $S = \{(A_1,\ A_2),\ (A_1,\ B_2),\ (A_1,\ C_2),\ (B_1,\ A_2),\ (B_1,\ B_2),\ (B_1, C_2),$ $(C_1, A_2), (C_1, B_2), (C_1, C_2)\}$.

Convencionado $u_i(\mathbf{s}) = x$, com $x \in$ (-1,0,1) tal que -1 = insatisfeito(a), 0 = parcialmente satisfeito(a) e 1 = satisfeito(a), temos os seguintes payoffs;

$$
\begin{array}{ll}
u_1(A_1, A_2) = 1 & u_2(A_1, A_2) = 0 \\
u_1(A_1, B_2) = -1 & u_2(A_1, B_2) = -1 \\
u_1(A_1, C_2) = 0 & u_2(A_1, C_2) = 1 \\
u_1(B_1, A_2) = -1 & u_2(B_1, A_2) = -1 \\
u_1(B_1, B_2) = 1 & u_2(B_1, B_2) = 0 \\
u_1(B_1, C_2) = -1 & u_2(B_1, C_2) = -1 \\
u_1(C_1, A_2) = 0 & u_2(C_1, A_2) = 1 \\
u_1(C_1, B_2) = -1 & u_2(C_1, B_2) = -1 \\
u_1(C_1, C_2) = 1 & u_2(C_1, C_2) = 0
\end{array}
$$

Todos estes dados são apresentados de modo sintetizado na matriz de payoffs da Figura 2.

Figura 2: Matriz de Payoffs, Três Pontes

	A_2	B_2	C_2
A_1	(1, 0)	(−1, −1)	(0, 1)
B_1	(−1, −1)	(1, 0)	(−1, −1)
C_1	(0, 1)	(−1, −1)	(1, 0)

Por enquanto apenas sistematizamos este jogo, deixaremos a análise de sua solução para a seção 3.2.

3.1.3 Dois Túneis

Dois túneis paralelos e consideravelmente distantes entre si, que chamaremos de A e B, cortam uma grande montanha. De um lado desta montanha está um fugitivo que a atravessará por um dos túneis e, do outro lado, está um assassino que aguardará o fugitivo na saída de um dos túneis para, caso escolha o mesmo túnel do fugitivo, matá-lo. O Túnel A é totalmente seguro, já no túnel B, desmoronamentos ocorrem esporadicamente e existe uma chance de 30% de quem por ele passar morrer. Se o assassino aguardar no mesmo túnel pelo qual o fugitivo passar, então o fugitivo certamente morrerá. Assassino e fugitivo estão a par de todas as informações sobre a situação e devem tomar um dos túneis por escolha, competindo em um jogo onde o primeiro almeja a morte do segundo, que, por sua vez, almeja tão somente a vida.

Sistematização do jogo Dois Túneis

Convencionando g_1 = Fugitivo, g_2 = Assassino, A_i = i-ésimo jogador escolhe o túnel A, B_i = i-ésimo jogador escolhe a Túnel B. Temos os conjuntos de estratégias puras $S_1 = \{A_1,\ B_1\}$, $S_2 = \{A_2,\ B_2,\}$, e o espaço de estratégias puras $S = \{(A_1,\ A_2),\ (A_1,\ B_2),\ (B_1,\ A_2),\ (B_1,\ B_2)\}$.

Convencionado $u_1(\mathbf{s}) = x$, com $x \in \mathbb{R}$ tal que x é o percentual da chance de vida de g_1 e $u_2(\mathbf{s}) = y$, com $y \in \mathbb{R}$ tal que y é o percentual da chance de morte de g_1, temos os seguintes payoffs:

$$\begin{aligned}
u_1(A_1, A_2) &= 0, & u_2(A_1, A_2) &= 100,\\
u_1(A_1, B_2) &= 100, & u_2(A_1, B_2) &= 0,\\
u_1(B_1, A_2) &= 70, & u_2(B_1, A_2) &= 30,\\
u_1(B_1, B_2) &= 0, & u_2(B_1, B_2) &= 100.
\end{aligned}$$

Todos estes dados são apresentados de modo sintetizado na matriz de payoffs da Figura 3.

Por enquanto apenas sistematizamos este jogo, deixaremos a análise de sua solução para as seções 3.2 e 4.

Figura 3: Matriz de Payoffs, Dois Túneis

	A_2	B_2
A_1	$(0, 100)$	$(100, 0)$
B_1	$(70, 30)$	$(0, 100)$

3.2 Soluções De Jogos Em Estratégias Puras

É possível especular dialeticamente sobre as soluções de um determinado jogo, porém existem métodos matemáticos para tal, eliminando assim todos os engodos, sofismas ou confusões que o pensamento não matemático pode causar.

Na Teoria Econômica dos Jogos, o que se entende como solução de um jogo em estratégias puras é um perfil de estratégias puras onde cada jogador não tem incentivo de mudar sua estratégia se os demais jogadores não o fizerem. Em jogos com dois jogadores, isto equivale a dizer que ambos usaram uma estratégia tal que não haja outra que sirva de melhor resposta para a usada por seu oponente. O perfil de estratégias puras que atenda este requisito pode ser um **equilíbrio das estratégias dominantes** e certamente será um **equilíbrio de Nash em estratégias puras**, conceitos que serão devidamente explicados nas próximas seções.

3.2.1 Equilíbrio Das Estratégias Dominantes

Dadas duas estratégias puras de um mesmo jogador, se uma delas sempre apresenta payoff menor do que a outra para qualquer estratégia escolhida pelo oponente, dizemos que esta é uma **estratégia pura estritamente dominada**. Ora, se uma estratégia é estritamente dominada, não há por que um jogador com intenção de maximizar seus ganhos optar por ela. Podemos eliminar todas as estratégias puras estritamente dominadas de um jogo, para então observar se há estratégias restantes que passaram a ser estritamente dominadas e em caso afirmativo, repetir o processo. A isto se dá o nome de **dominância estrita iterada**. Se tal processo culmina em um único perfil de estratégias puras, dizemos que este perfil é um **equilíbrio das estratégias dominantes**. Fatalmente, o perfil em questão apresenta estratégias às quais nenhum de seus jogadores possuem motivação para alterá-las e, portanto, se enquadra na definição de solução de um jogo segundo a Teoria Econômica dos Jogos.

Antes de mostrarmos um exemplo de como se dá o processo de dominância estrita iterada, convém apresentar a definição formal do que é uma estratégia pura estritamente dominada. Para isto é conveniente introduzir uma notação em que se define

$$\mathbf{s}_{-i} = (s_{1j_1}, ..., s_{(i-1)j_{(i-1)}}, s_{(i+1)j_{(i+1)}}, ..., s_{nj_n}),$$

um elemento de

$$S_{-i} = S_1 \times ... \times S_{(i-1)} \times S_{(i+1)} \times ... \times S_n,$$

produto cartesiano dos conjuntos de estratégias puras dos jogadores, com exceção do i-ésimo. No que se segue, uma maneira conveniente de se expressar um perfil de estratégias puras, destacando a estratégia de um particular jogador é

$$\mathbf{s} = (s_{ij_i}, \mathbf{s}_{-i}) = (s_{1j_1}, ..., s_{(i-1)j_{(i-1)}}, s_{ij_i}, s_{(i+1)j_{(i+1)}}, ..., s_{nj_n}).$$

Esta nova notação permite analisar diferentes perfis de estratégias puras nos quais apenas a estratégia pura de um único jogador g_i varia. Podemos, agora, definir formalmente o que são estratégias puras estritamente dominadas.

Definição 1 (Estratégia Pura Estritamente Dominada)**.** *Uma estratégia pura $s_{ik} \in S_i$ do jogador $g_i \in G$ é estritamente dominada pela estratégia $s_{ik'} \in S_i$ se $u_i(s_{ik'}, \boldsymbol{s}_{-i}) > u_i(s_{ik}, \boldsymbol{s}_{-i})$, para todo $\boldsymbol{s}_{-i} \in S_{-i}$.*

Para exemplificar um processo de dominância estrita iterada, tomemos um jogo qualquer, que chamaremos de Jogo Exemplo 1, cuja matriz de payoffs é apresentada pela Figura 4.

Por meio da matriz de payoffs, vejamos quais são as estratégias puras estritamente dominadas no Jogo Exemplo 1. Observe que s_{14} é estritamente dominada por s_{11} e que s_{22} é estritamente dominada por s_{24}, pois $u_1(s_{11}, s_{2j_2}) > u_1(s_{14}, s_{2j_2})$ para todo $s_{2j_2} \in S_2$ e $u_2(s_{1j_1}, s_{24}) > u_2(s_{1j_1}, s_{22})$ para todo $s_{1j1} \in S_1$. Portanto, iremos eliminar as estratégias s_{14} e s_{22} do Jogo Exemplo 1, obtendo como resultado a matriz de payoffs dada pela Figura 5.

Figura 4: 1ª Matriz de Payoffs, Jogo Exemplo 1

	s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}
s_{11}	(3, 5)	(3, 1)	(4, 4)	(1, 3)
s_{12}	(2, 1)	(4, 0)	(1, 5)	(0, 2)
s_{13}	(4, 8)	(1, 4)	(4, 7)	(0, 5)
s_{14}	(0, 2)	(2, 2)	(2, 1)	(0, 6)

Figura 5: 2ª Matriz de Payoffs, Jogo Exemplo 1

	s_{21}	s_{23}	s_{24}
s_{11}	(3, 5)	(4, 4)	(1, 3)
s_{12}	(2, 1)	(1, 5)	(0, 2)
s_{13}	(4, 8)	(4, 7)	(0, 5)

Note que a estratégia s_{24} passou a ser estritamente dominada pela estratégia s_{23}, já que a estratégia s_{14} foi eliminada e, portanto, os payoffs $u_2(s_{14}, s_{23})$ e $u_2(s_{14}, s_{24})$ não existem mais. De modo análogo, a estratégia s_{12} passou a ser estritamente dominada pela estratégia s_{11} no momento em que a estratégia s_{22} foi eliminada. Deve-se, então, eliminar as estratégias s_{24} e s_{12}, com o que se obtêm a matriz de payoffs dada pela Figura 6.

Figura 6: 3ª Matriz de Payoffs, Jogo Exemplo 1

	s_{21}	s_{23}
s_{11}	(3, 5)	(4, 4)
s_{13}	(4, 8)	(4, 7)

É fácil ver que s_{23} se tornou estratégia estritamente dominada por s_{21}. Motivo pelo qual eliminaremos s_{23} obtendo a matriz de payoffs dada pela Figura 7.

Finalmente, restam, ao jogador g_1, as estratégias s_{11} e s_{13}. Como $u_1(s_{13}, s_{21}) > u_1(s_{11}, s_{21})$, eliminamos s_{11} e obtemos o perfil de estratégias puras $\mathbf{s} = (s_{13}, s_{21})$ que é um equilíbrio das estratégias dominantes e, portanto, solução do jogo. Observe, pela Figura 4, que s_{13} é a melhor resposta que g_1 poderia dar para a estratégia s_{21} de g_2 e,

Figura 7: 4ª Matriz de Payoffs, Jogo Exemplo 1

	s_{21}
s_{11}	(3, 5)
s_{13}	(4, 8)

reciprocamente, s_{21} é a melhor resposta que g_2 poderia dar à estratégia s_{13} do jogador g_1.

Tal exemplo foi convenientemente escolhido para que a dominância estrita iterada levasse à solução do jogo. É possível que, em dado momento, um jogo a ser analisado não possua estratégia estritamente dominada para ser eliminada. Isto apenas significa que o jogo não é resolúvel por dominância estrita iterada, porém ainda passível de solução pelo **método das marcações**, que nos auxilia a encontrar todos os **equilíbrios de Nash em estratégias puras** presentes em um jogo e será apresentado na seção a seguir.

3.2.2 Equilíbrio De Nash Em Estratégias Puras

Um **equilíbrio de Nash em estratégias puras** é o perfil de estratégias puras tal que, sendo tomado, nenhum dos jogadores possui motivação para mudar de estratégia. Vejamos sua definição formal.

Definição 2 (Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras)**.** *Diz-se que um perfil de estratégias puras* $\boldsymbol{s}^* = (s_1^*, ..., s_{(i-1)}^*, s_i^*, s_{(i+1)}^*, ..., s_n^*) \in S$ *é um Equilíbrio de Nash se* $u_i(s_i^*, \boldsymbol{s}_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij_i}, \boldsymbol{s}_{-i}^*)$ *para todo* $i = 1, .., n$ *e para todo* $j_i = 1, ..., m_i$ *com* $m_i \geq 2$.

Portanto, todo equilíbrio das estratégias dominantes é um equilíbrio de Nash em estratégias puras, haja visto que se $\mathbf{s}^* = (s_1^*, ..., s_{(i-1)}^*, s_i^*, s_{(i+1)}^*, ..., s_n^*) \in S$ é um perfil obtido por dominância estrita e iterada então, para todo $i = 1, .., n$ e para todo $j_i = 1, ..., m_i$ com $m_i \geq 2$, tem-se que $u_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) > u_i(s_{ij_i} - \{s_i^*\}, \mathbf{s}_{-i}^*)$, onde $s_{ij_i} - \{s_i^*\}$ representa todas as possíveis estratégias do i-ésimo jogador com exceção de s_i^*, que implica em $u_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij_i}, \mathbf{s}_{-i}^*)$. Mas nem todo equilíbrio de Nash em estratégias puras é um equilíbrio das estratégias dominantes como se pode ver no jogo "Guerra dos Sexos" apresentado na seção 5.0.4.

Vejamos se o perfil de estratégias puras $\mathbf{s} = (s_{13}, s_{21})$, do Jogo Exemplo 1, obtido como solução por dominância estrita iterada, de fato é um equilíbrio de Nash em estratégias puras. Da Figura 4 tem-se que

$$
\begin{aligned}
u_1(s_{11}, s_{21}) &= 3, \qquad & u_2(s_{13}, s_{21}) &= 8,\\
u_1(s_{12}, s_{21}) &= 2, \qquad & u_2(s_{13}, s_{22}) &= 4,\\
u_1(s_{13}, s_{21}) &= 4, \qquad & u_2(s_{13}, s_{23}) &= 7,\\
u_1(s_{14}, s_{21}) &= 0, \qquad & u_2(s_{13}, s_{24}) &= 5.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
u_1(s_{13}, s_{21}) &\geq u_1(s_{1j_1}, s_{21}) \text{ para todo } j_1 = 1, 2, 3, 4,\\
u_2(s_{13}, s_{21}) &\geq u_2(s_{13}, s_{2j_2}) \text{ para todo } j_2 = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}
$$

Portanto, o perfil $\mathbf{s} = (s_{13}, s_{21})$, é um equilíbrio de Nash em estratégias puras.

O método acima nos permite apenas verificar se um perfil candidato é um equilíbrio de Nash em estratégias puras. Como saber se este é o único perfil que se enquadra nestes requisitos? Em verdade, nos jogos resolúveis por dominância estrita iterada, caso do Jogo Exemplo 1, a solução encontrada é única, posto que havendo outras soluções não haveriam estratégias estritamente dominadas para serem eliminadas. Já nos jogos não resolúveis por dominância estrita iterada há a possibilidade de haver mais de uma solução e, claro, a possibilidade de não haver solução alguma (em estratégias puras). Nestes jogos, usaremos o **método das marcações**.

O **método das marcações** consiste em marcar, em cada coluna da matriz de payoffs, o payoff mais alto que g_1 pode conseguir e, em cada linha, o payoff mais alto que g_2 pode conseguir.[2] Observa-se, então, se alguma entrada da matriz possui os dois valores de seu par ordenado marcados. Cada perfil de estratégias puras pertinente a tais entradas é um equilíbrio de Nash em estratégias puras. Este método pode findar com nenhuma das entradas da matriz possuindo os dois valores de seu par ordenado marcados, isto indica que o jogo não possui solução em estratégias puras.

[2]Em caso de empate, marcam-se os payoffs empatados.

Tomemos um jogo qualquer, que chamaremos de Jogo Exemplo 2, cuja matriz de payoffs é dada pela Figura 8 e apliquemos o método das marcações.

Figura 8: 1ª Matriz de Payoffs, Jogo Exemplo 2

	s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}
s_{11}	(2, 5)	(3, 2)	(3, 1)	(4, 6)
s_{12}	(3, 0)	(1, 1)	(1, 4)	(2, 3)
s_{13}	(1, 2)	(5, 5)	(3, 1)	(2, 2)

Marcando o payoff mais alto que g_1 pode conseguir em cada coluna, tem-se a Figura 9.

Figura 9: 2ª Matriz de Payoffs, Jogo Exemplo 2

	s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}
s_{11}	(2, 5)	(3, 2)	(*3, 1)	(*4, 6)
s_{12}	(*3, 0)	(1, 1)	(1, 4)	(2, 3)
s_{13}	(1, 2)	(*5, 5)	(*3, 1)	(2, 2)

Em seguida, marcando o payoff mais alto que g_2 pode conseguir em cada linha, tem-se a Figura 10.

Figura 10: 3ª Matriz de Payoffs, Jogo Exemplo 2

	s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}
s_{11}	(2, 5)	(3, 2)	(*3, 1)	(*4, 6*)
s_{12}	(*3, 0)	(1, 1)	(1, 4*)	(2, 3)
s_{13}	(1, 2)	(*5, 5*)	(*3, 1)	(2, 2)

O método das marcações indica, portanto, que os perfis $\mathbf{s}' = (s_{13}, s_{22})$ e $\mathbf{s}'' = (s_{11}, s_{24})$ são **equilíbrios de Nash em estratégias puras** do Jogo Exemplo 2 e consequentemente, soluções do jogo. De fato,

$$u_1(s_{13}, s_{22}) \geq u_1(s_{1j_1}, s_{22}) \text{ para todo } j_1 = 1, 2, 3,$$
$$u_2(s_{13}, s_{22}) \geq u_2(s_{13}, s_{2j_2}) \text{ para todo } j_2 = 1, 2, 3, 4,$$

e

$$u_1(s_{11}, s_{24}) \geq u_1(s_{1j_1}, s_{24}) \text{ para todo } j_1 = 1, 2, 3,$$
$$u_2(s_{11}, s_{24}) \geq u_2(s_{11}, s_{2j_2}) \text{ para todo } j_2 = 1, 2, 3, 4.$$

Voltemos agora aos jogos apresentados na seção 3.1 e analisemos suas soluções.

3.2.3 De Volta Ao Dilema dos Prisioneiros

Vejamos novamente a matriz de payoffs do dilema dos prisioneiros dada pela Figura 11

Figura 11: Matriz de Payoffs, Dilema dos Prisioneiros

	g_2 nega	g_2 confessa
g_1 nega	$(-1,\ -1)$	$(-10,\ 0)$
g_1 confessa	$(0,\ -10)$	$(-5,\ -5)$

Note que a estratégia g_1 *nega* é estritamente dominada por g_1 $confessa$, ao passo que a estratégia g_2 *nega* é estritamente dominada por g_2 $confessa$. Eliminando-se as estratégias estritamente dominadas, nos sobra o perfil de estratégias puras $\mathbf{s} = (g_1\ confessa,\ g_2\ confessa)$, que é a solução única do jogo.

Como o jogo foi resolvido por dominância estrita e iterada, já se sabe que a solução é única. Utilizemos o método das marcações apenas para simples confirmação. Marcaremos os maior payoff que g_2 consegue de cada linha e o maior payoff que g_1 consegue de cada coluna, conforme apresenta-se na Figura 12.

Figura 12: Matriz de Payoffs com marcações, Dilema dos Prisioneiros

	g_2 nega	g_2 confessa
g_1 nega	$(-1,\ -1)$	$(-10,\ 0*)$
g_1 confessa	$(*0,\ -10)$	$(*-5,\ -5*)$

O método das marcações também indica que $\mathbf{s} = (g_1\ confessa,\ g_2\ confessa)$ é solução única do jogo. De fato,

$$
\begin{array}{ll}
u_1(g_1 \text{ nega}, \ g_2 \text{ nega}) = -1, & u_2(g_1 \text{ nega}, \ g_2 \text{ nega}) = -1, \\
u_1(g_1 \text{ nega}, \ g_2 \text{ confessa}) = -10, & u_2(g_1 \text{ nega}, \ g_2 \text{ confessa}) = 0, \\
u_1(g_1 \text{ confessa}, \ g_2 \text{ nega}) = 0, & u_2(g_1 \text{ confessa}, \ g_2 \text{ nega}) = -10, \\
u_1(g_1 \text{ confessa}, \ g_2 \text{ confessa}) = -5, & u_2(g_1 \text{ confessa}, \ g_2 \text{ confessa}) = -5.
\end{array}
$$

Logo,

$$
u_1(g_1 \text{ confessa}, \ g_2 \text{ confessa}) \geq u_1(s_{1j_1}, \ g_2 \text{ confessa}) \text{ para todo } j_1 = 1, \ 2,
$$
$$
u_2(g_1 \text{ confessa}, \ g_2 \text{ confessa}) \geq u_2(g_1 \text{ confessa}, \ s_{2j_2}) \text{ para todo } j_2 = 1, \ 2.
$$

Portanto, o perfil $\mathbf{s} = (g_1 \text{ confessa}, \ g_2 \text{ confessa})$ é um equilíbrio de Nash em estratégias puras.

A princípio, muitos estranham o fato de que o desfecho no qual ambos terminam presos por 5 anos seja a solução do dilema dos prisioneiros. Porém, observe que nenhum jogador vê vantagens pessoais em mudar de estratégia. De fato, partindo do pressuposto de que joga individualmente e pensando exclusivamente em seus ganhos, o jogador g_1 não possui nenhuma motivação para tomar uma estratégia diferente de confessar, o mesmo ocorre com o jogador g_2.

Algum pensador mais insistente poderia argumentar que o desfecho em que os prisioneiros terminam enclausurados por apenas 1 ano é o ideal para ambos. Porém este desfecho só será alcançado se g_1 e g_2 cooperarem entre si por meio de uma relação de confiança mútua, jogando então como um time e não como opositores, o que não é o caso do que foi previamente estabelecido.

3.2.4 De Volta Às Três Pontes

Vejamos novamente a matriz de payoffs do jogo Três Pontes dada pela Figura 13.

Observemos as estratégias puras do jogador g_1; Alguma delas é sempre a pior resposta que g_1 pode dar para qualquer uma das estratégias de g_2? Por certo que não; A_1 e C_1 são as piores respostas para B_2, porém A_1 é a melhor resposta para A_2 e C_1

Figura 13: Matriz de Payoffs, Três Pontes

	A_2	B_2	C_2
A_1	$(1,\ 0)$	$(-1,\ -1)$	$(0,\ 1)$
B_1	$(-1,\ -1)$	$(1,\ 0)$	$(-1,\ -1)$
C_1	$(0,\ 1)$	$(-1,\ -1)$	$(1,\ 0)$

é a melhor resposta para C_2; já B_1 é a pior resposta tanto para A_2 quanto para C_2, porém é a melhor resposta para B_2. Ou seja, não existe estratégia $s_{1k} \in S_1$ tal que $u_1(s_{1k}, s_{2j_2})$ seja sempre o menor possível para todo $s_{2j_2} \in S_2$. O mesmo ocorre com as estratégias do jogador g_2, logo não há estratégias puras estritamente dominadas no jogo das três pontes.

A fim de verificarmos, pelo método das marcações, se há, algum equilíbrio de Nash em estratégias puras no jogo Três Pontes, marcaremos na matriz de payoffs o payoff mais alto que g_2 pode conseguir em cada linha e o payoff mais alto que g_1 pode conseguir em cada coluna, resultando na Figura 14.

Figura 14: Matriz de Payoffs com marcações, Três Pontes

	A_2	B_2	C_2
A_1	$(*1,\ 0)$	$(-1,\ -1)$	$(0,\ 1*)$
B_1	$(-1,\ -1)$	$(*1,\ 0*)$	$(-1,\ -1)$
C_1	$(0,\ 1*)$	$(-1,\ -1)$	$(*1,\ 0)$

O método das marcações nos evidencia o fato de que o perfil de estratégias puras $\mathbf{s} = (B_1, B_2)$ é um equilíbrio de Nash em estratégias puras. De fato,

$$\begin{aligned} u_1(A_1, B_2) &= -1, & u_2(B_1, A_2) &= -1, \\ u_1(B_1, B_2) &= 1, & u_2(B_1, B_2) &= 0, \\ u_1(C_1, B_2) &= -1, & u_2(B_1, C_2) &= -1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} u_1(B_1, B_2) &\geq u_1(s_{1j_1},\ B_2) \text{ para todo } j_1 = 1, 2, 3, \\ u_2(B_1, B_2) &\geq u_2(B_1,\ s_{2j_2}) \text{ para todo } j_2 = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Observe que, tendo g_1 jogado B_1, B_2 é a melhor resposta que g_2 poderia dar e, tendo g_2 jogado B_2, B_1 é a melhor resposta que g_1 poderia dar. Logo, cada jogador não tem incentivo de mudar sua estratégia a menos que seu oponente o faça.

3.2.5 De Volta Aos Dois Túneis

Vejamos novamente a matriz de payoffs do jogo Dois Túneis dada pela Figura 15.

Figura 15: Matriz de Payoffs, Dois Túneis

	A_2	B_2
A_1	$(0, 100)$	$(100, 0)$
B_1	$(70, 30)$	$(0, 100)$

Observa-se que A_1 é a pior resposta que g_1 poderia dar para A_2, porém é a melhor resposta para B_2, já B_1 é a pior resposta que g_1 poderia dar para B_2, porém é a melhor resposta para A_2 e, portanto, g_1 não possui estratégias puras estritamente dominadas. O mesmo ocorre com g_2. Apliquemos então, o método das marcações a fim de tentar encontrar algum equilíbrio de Nash em estratégias puras no jogo Dois Túneis. Ver Figura 16.

Figura 16: Matriz de Payoffs com marcações, Dois Túneis

	A_2	B_2
A_1	$(0, 100*)$	$(*100, 0)$
B_1	$(*70, 30)$	$(0, 100*)$

O método das marcações nos revela que não há equilíbrio de Nash em estratégias puras no jogo Dois Túneis. De fato, nesta situação não existe nenhum desfecho tal que tanto fugitivo quanto assassino não queiram mudar de estratégia. Afinal, se ambos escolhem o mesmo túnel, o fugitivo terá se arrependido de sua escolha, porém se ambos escolhem túneis diferentes, será o assassino a se arrepender da decisão tomada. O jogo

Dois Túneis possui, segundo a Teoria Econômica dos Jogos, solução nas chamadas estratégias mistas. Caso em que, em vez de escolher diretamente uma estratégia pura a ser tomada, atribui-se uma probabilidade a cada escolha de estratégia pura. A solução em estratégias mistas do jogo Dois Túneis é apresentada na seção 4.2.2.

4 Teoria Econômica dos Jogos Em Estratégias Mistas

O que se estabelece neste capítulo é baseado no conhecimento adquirido pela análise de [1, 2, 3, 4, 5, 6].

4.1 Sistematização De Jogos Em Estratégias Mistas

Nem todos os jogos analisados pela Teoria Econômica dos Jogos possuem solução em estratégias puras, o jogo Dois Túneis é um exemplo disso. Porém, baseado no Teorama do Equilíbrio de Nash, sabe-se hoje que todo e qualquer jogo que possa ser sistematizado por meio de estratégias puras possui solução em estratégias mistas. Uma **estratégia mista** é a estratégia na qual se distribui uma probabilidade de escolha para cada uma das possíveis estratégias puras de um jogador. Analisando o jogo sob esta perspectiva, é possível estabelecer qual peso um jogador deve atribuir a cada uma de suas possíveis estratégias puras para, então, sortear qual estratégia adotar de forma que se produza uma configuração de equilíbrio, em que nenhum dos jogadores envolvidos possui motivação para mudar de estratégia. Tal qual em estratégias puras, este segue sendo o conceito de solução do jogo, que agora denominamos **equilíbrio de Nash em estratégias mistas**.

Antes de abordarmos especificamente o **equilíbrio de Nash em estratégias mistas** e o processo pelo qual encontramos tal solução, convém apresentar de modo mais formal o que são **estratégias mistas** e introduzir os detalhes da sistematização de um jogo com a presença das mesmas.

Uma **estratégia mista** p_i para o jogador $g_i \in G$ é uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, ..., s_{im_i}\}$, com $m_i \geq 2$, de estratégias puras do jogador g_i, isto é, p_i é um elemento do conjunto $\triangle_{m_i} = \{(x_1, ..., x_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} \mid x_1 \geq 0, ..., x_{m_i} \geq 0 \text{ e } \sum_{k=0}^{m_i} x_k = 1\}$. Sendo $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, ..., p_{im_i})$, cada $p_{ik} \in p_i$ representa a probabilidade de g_i escolher a estratégia pura $s_{ik} \in S_i$.

Tomemos como exemplo o jogo Dois Túneis e suponhamos que g_2 seguiu a estratégia mista $p_2^* = (2/3, 1/3)$. Isto corresponde a dizer que g_2 seguiu a estratégia na qual há uma probabilidade de $2/3$ de optar pela estratégia pura A_2 e uma probabilidade de $1/3$ de optar pela estratégia pura B_2. Um dos modos de se fazer isto é g_2 rolar um dado de seis faces e optar por A_2 caso a rolagem resulte em $x = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ ou optar por B_2 caso a rolagem resulte em $x = \{5,\ 6\}$. Perceba que há uma infinidade de estratégias mistas que tanto g_2 quanto g_1 podem seguir.

O produto cartesiano dado por $\triangle = \triangle_{m_1} \times \triangle_{m_2} \times ... \times \triangle_{m_n}$, onde $\triangle_{m_i}$ é o conjunto de todas as infinitas estratégias mistas que g_i pode seguir é denominado **espaço de estratégias mistas**. Um vetor $\mathbf{p} \in \triangle$ é denominado **perfil de estratégias mistas**. Sendo $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, ..., p_n)$, onde p_i, como já dito, representa a estratégia mista tomada pelo i-ésimo jogador. Tal qual em estratégias puras, usaremos $\mathbf{p}_{-i}$ para denotar a estratégia mista de todos os jogadores com exceção do jogador g_i. Voltando ao caso do jogo Dois Túneis onde g_2 tomou $p_2^* = (2/3, 1/3)$, supondo que g_1 tomou $p_1^* = (1/5, 4/5)$, então tem-se o perfil de estratégias mistas dado por $\mathbf{p}^* = (p_1^*, p_2^*) = ((1/5, 4/5), (2/3, 1/3))$. Cada perfil de estratégias mistas $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, ..., p_n) \in \triangle$ determina, para cada jogador, um **payoff esperado**, uma média dos payoffs associados a cada estratégia pura, ponderada pelas respectivas probabilidades $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$.

Ao analisar estratégias mistas, a **função utilidade** de cada jogador passa a ser entendida como a função $\ddot{u}_i$ que associa o payoff do i-ésimo jogador a cada perfil de estratégias mistas $\mathbf{p} \in \triangle$, ou seja,

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i : \triangle &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{p} &\longmapsto \ddot{u}_i(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

onde $\ddot{u}_i(\mathbf{p})$ é o **payoff esperado** do jogador g_i pelo perfil de estratégias mistas $\mathbf{p}$. Ou seja, se

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, ..., p_n) = (\underbrace{p_{11}, p_{12}, ..., p_{1m_1}}_{p_1}; \underbrace{p_{21}, p_{22}, ..., p_{2m_2}}_{p_2}; ...; \underbrace{p_{n1}, p_{n2}, ..., p_{nm_n}}_{p_n}),$$

então

$$\ddot{u}_i(\mathbf{p}) = \sum_{j_1=1}^{m_1}\sum_{j_2=1}^{m_2}...\sum_{j_n=1}^{m_n}(\prod_{k=1}^{n} p_{kj_k} u_i(s_{1j_1}, s_{2j_2}, ..., s_{nj_n})).$$

Portanto, seguindo nosso exemplo do jogo Dois Túneis, temos

$$\begin{aligned}\ddot{u}_1(\mathbf{p}^*) &= \ddot{u}_1((1/5,4/5),(2/3,1/3)) \\ &= (1/5)[(2/3)\cdot 0 + (1/3)\cdot 100] + (4/5)[(2/3)\cdot 70 + (1/3)\cdot 0] \\ &= 100/15 + 560/15 \ = \ 660/15 \ = \ 44,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{u}_2(\mathbf{p}^*) &= \ddot{u}_2((1/5,4/5),(2/3,1/3)) \\ &= (2/3)[(1/5)\cdot 100 + (4/5)\cdot 30] + (1/3)[(1/5)\cdot 0 + (4/5)\cdot 100] \\ &= 440/15 + 400/15 \ = \ 840/15 \ = \ 56.\end{aligned}$$

Para fins meramente didáticos, adicionaremos uma nova linha na parte de cima e uma nova coluna na parte mais à esquerda da **matriz de payoffs**, nas quais serão marcadas as estratégias mistas a serem seguidas. Assim, a matriz de payoffs do jogo Dois Túneis, onde o perfil de estratégias mistas $\mathbf{p}^*$ foi seguido, é dada pela Figura 17.

Figura 17: Matriz de Payoffs com estratégias Mistas, Dois Túneis

		2/3 A_2	1/3 B_2
1/5	A_1	$(0, 100)$	$(100, 0)$
4/5	B_1	$(70, 30)$	$(0, 100)$

4.2 Soluções Em Estratégias Mistas

Nas estratégias mistas uma solução de um jogo permanece sendo considerada um desfecho no qual nenhum jogador tem motivação para seguir uma estratégia diferente a menos que seu oponente o faça. Um perfil de estratégias mistas que se enquadra nestes termos é denominado **equilíbrio de Nash em estratégias mistas**. Após definirmos formalmente este conceito, indicaremos como encontrá-lo por meio de análise de payoffs e comparações gráficas.

Ao analisarmos um jogo por estratégias mistas teremos aqui apenas duas pretensões; distinguir quais estratégias mistas de um determinado jogador são mais eficientes contra todas as possíveis estratégias mistas de seu oponente (porém não nos preocupando em prever qual estratégia mista seu oponente de fato tomará) e encontrar todos os equilíbrios de Nash em estratégias mistas presentes no jogo em questão. Perceba que esta é a mesma premissa da analise em estratégias puras feita nos jogos apresentados na seção 3. Em alguns jogos, como o Dilema dos Prisioneiros por exemplo, é possível especular sobre qual estratégia cada jogador provavelmente tomará, porém não tivemos tal pretensão na seção 3 e também não a teremos nesta seção.

4.2.1 Equilíbrio De Nash Em Estratégias Mistas

Vejamos, então, de modo mais formal, o que se entende por **equilíbrio de Nash em estratégias mistas**.

Definição 3 (Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas). *Diz-se que um perfil de estratégias mistas* $\boldsymbol{p}^* = (p_1^*, ..., p_{(i-1)}^*, p_i^*, p_{(i+1)}^*, ..., p_n^*) \in \triangle$ *é um Equilíbrio de Nash se* $\ddot{u}_i(p_i^*, \boldsymbol{s}_{-i}^*) \geq \ddot{u}_i(p_i, \boldsymbol{p}_{-i}^*)$ *para todo* $p_i \in \triangle_{m_i}$*, isto é, nenhum jogador sente motivação de trocar sua estratégia mista se os demais jogadores não o fizerem.*

Note que todo equilíbrio de Nash em estratégias puras é também um **equilíbrio de Nash em estratégias mistas**, visto que uma estratégia pura s_{ik} nada mais é do que uma estratégia mista na qual o jogador g_i atribuiu 1 de probabilidade para s_{ik} e 0 para suas demais estratégias puras. A recíproca, obviamente, não é válida.

Vejamos a matriz de payoffs de um jogo qualquer, que chamaremos de Jogo Exemplo 3, dada pela Figura 18 e busquemos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

Pelo que já foi discutido na seção 3.2, observa-se que o Jogo Exemplo 3 não possui

Figura 18: Matriz de Payoffs com estratégias Mistas, Jogo Exemplo 3

		p_{21}	p_{22}
		s_{21}	s_{22}
p_{11}	s_{11}	(5, 2)	(4, 3)
p_{12}	s_{12}	(3, 5)	(8, 4)

equilíbrio de Nash em estratégias puras. As estratégias mistas de g_1 e g_2 são respectivamente $p_1 = (p_{11}, p_{12})$ e $p_2 = (p_{21}, p_{22})$, de forma que

$$p_{11} + p_{12} = 1 \to p_{12} = 1 - p_{11},$$
$$p_{21} + p_{22} = 1 \to p_{22} = 1 - p_{21},$$

onde

p_{11} é a probabilidade de g_1 escolher s_{11},
p_{12} é a probabilidade de g_1 escolher s_{12},
p_{21} é a probabilidade de g_2 escolher s_{21},
p_{22} é a probabilidade de g_2 escolher s_{22}.

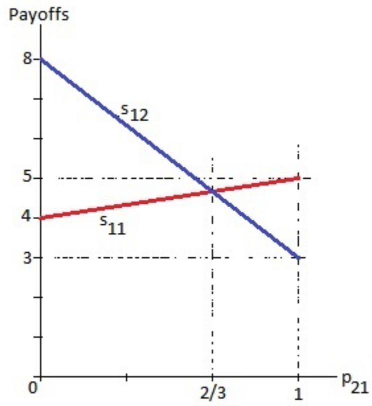
Calculemos o payoff esperado, de g_1, para cada uma de suas estratégias puras em função de p_{21}.

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_1(s_{11}, p_2) &= \ddot{u}_1((1,0), p_2) \\
&= 1[p_{21} \cdot 5 + p_{22} \cdot 4] + 0[p_{21} \cdot 3 + p_{22} \cdot 6] \\
&= 5p_{21} + 4p_{22} \;=\; 5p_{21} + 4(1 - p_{21}) \;=\; p_{21} + 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_1(s_{12}, p_2) &= \ddot{u}_1((0,1), p_2) \\
&= 0[p_{21} \cdot 5 + p_{22} \cdot 4] + 1[p_{21} \cdot 3 + p_{22} \cdot 6] \\
&= 3p_{21} + 6p_{22} \;=\; 3p_{21} + 6(1 - p_{21}) \;=\; -3p_{21} + 6
\end{aligned}$$

Comparemos ambos os resultados com sobreposição de seus gráficos. Ver Figura 19.

Figura 19: Gráfico 1, Jogo Exemplo 3



Pela comparação dos payoffs esperados de g_1 observa-se que sua melhor estratégia é tomar s_{12} sempre que $p_{21} < \frac{2}{3}$, tomar s_{11} sempre que $p_{21} > \frac{2}{3}$ e, caso $p_{21} = \frac{2}{3}$, não há um estratégia mais vantajosa, visto que $\ddot{u}_1(s_{11}, p_2) = \ddot{u}_1(s_{12}, p_2) \iff p_{21} + 4 = -3p_{21} + 6 \iff 4p_{21} = 2 \iff p_{21} = \frac{2}{3}$.

Calculemos agora, o payoff esperado, de g_2, para cada uma de suas estratégias puras em função de p_{11}.

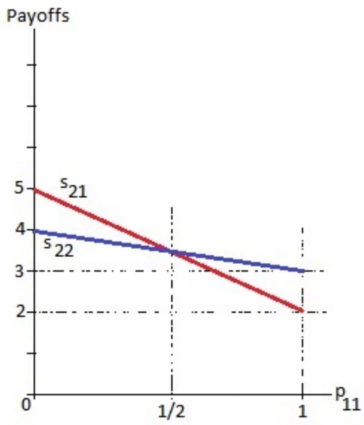
$$\begin{aligned} \ddot{u}_2(p_1, s_{21}) &= \ddot{u}_2(p_1, (1,0)) \\ &= 1[p_{11} \cdot 2 + p_{12} \cdot 5] + 0[p_{11} \cdot 3 + p_{12} \cdot 4] \\ &= 2p_{11} + 5p_{12} \;=\; 2p_{11} + 5(1 - p_{11}) \;=\; -3p_{11} + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_2(p_1, s_{22}) &= \ddot{u}_2(p_1, (0,1)) \\ &= 0[p_{11} \cdot 2 + p_{12} \cdot 5] + 1[p_{11} \cdot 3 + p_{12} \cdot 4] \\ &= 3p_{11} + 4p_{12} \;=\; 3p_{11} + 4(1 - p_{11}) \;=\; -p_{11} + 4 \end{aligned}$$

Comparemos ambos os resultados com sobreposição de seus gráficos. Ver Figura 20.

Pela comparação dos payoffs de g_2 observa-se que sua melhor estratégia é tomar s_{21} sempre que $p_{11} < \frac{1}{2}$, tomar s_{22} sempre que $p_{11} > \frac{1}{2}$ e, caso $p_{11} = \frac{1}{2}$, não há um estratégia

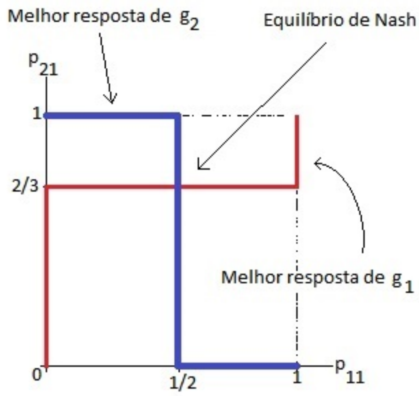
Figura 20: Gráfico 2, Jogo Exemplo 2



mais vantajosa, visto que $ü_2(p_1, s_{21}) = ü_2(p_1, s_{22}) \iff -3p_{11} + 5 = -p_{21} + 4 \iff 2p_{11} = 1 \iff p_{11} = \frac{1}{2}$.

Portanto, o perfil de estratégias mistas $\mathbf{p}^* = (p_1^*, p_2^*) = ((1/2, 1/2), (2/3, 1/3))$ é um equilíbrio de Nash. O gráfico da Figura 21 nos mostra isto com mais clareza ao estabelecer a relação entre as curvas de melhor resposta de g_1 e g_2 em função de p_{11} e p_{21}.

Figura 21: Gráfico 3, Jogo Exemplo 2



Além disso, segue que

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_1(p_1,(2/3,1/3)) &= \ddot{u}_1((p_{11},1-p_{11}),(2/3,1/3)) \\
&= p_{11}[(2/3)\cdot 5+(1/3)\cdot 4]+(1-p_{11})[(2/3)\cdot 3+(1/3)\cdot 8] \\
&= p_{11}\cdot(14/3)+(14/3)-p_{11}\cdot(14/3) \\
&= 14/3 \;\leq\; \ddot{u}_1(p_1^*,p_2^*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_2((1/2,1/2),p_2) &= \ddot{u}_2((1/2,1/2),(p_{21},1-p_{21})) \\
&= p_{21}[(1/2)\cdot 2+(1/2)\cdot 5]+(1-p_{21})[(1/2)\cdot 3+(1/2)\cdot 4] \\
&= p_{21}\cdot(7/2)+(7/2)-p_{21}\cdot(7/2) \\
&= 7/2 \;\leq\; \ddot{u}_2(p_1^*,p_2^*)
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{p}^*=(p_1^*,p_2^*)=((1/2,1/2),(2/3,1/3))$ é de fato um equilíbrio de Nash.

4.2.2 Finalmente A Solução, Dois Túneis

Podemos agora apresentar a solução para o jogo Dois Túneis. Já sabemos que o jogo não possui solução em estratégias puras, busquemos então a solução em estratégias mistas com auxílio da Figura 22.

Figura 22: Matriz de Payoffs, com estratégias mistas, Dois Túneis

		p_{21} A_2	p_{22} B_2
p_{11}	A_1	$(0,100)$	$(100,0)$
p_{12}	B_1	$(70,30)$	$(0,100)$

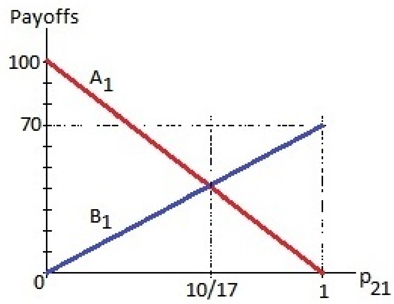
Conforme feito no Jogo Exemplo 2, calculemos o payoff esperado, de g_1, para cada uma de suas estratégias puras em função de p_{21}.

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_1(A_1,p_2) &= \ddot{u}_1((1,0),p_2) \\
&= 1[p_{21}\cdot 0+p_{22}\cdot 100]+0[p_{21}\cdot 70+p_{22}\cdot 0] \\
&= 100p_{22} \;=\; 100(1-p_{21}) \;=\; -100p_{21}+100
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ü_1(B_1, p_2) &= ü_1((0,1), p_2) \\ &= 0[p_{21} \cdot 0 + p_{22} \cdot 100] + 1[p_{21} \cdot 70 + p_{22} \cdot 0] \\ &= 70p_{21} \end{aligned}$$

Comparemos ambos os resultados com sobreposição de seus gráficos. Ver Figura 23.

Figura 23: Gráfico 1, Dois Túneis



Pela comparação dos payoffs de g_1 observa-se que sua melhor estratégia é tomar A_1 sempre que $p_{21} < \frac{10}{17}$, tomar B_1 sempre que $p_{21} > \frac{10}{17}$ e, caso $p_{21} = \frac{10}{17}$, não há um estratégia mais vantajosa, visto que $ü_1(A_1, p_2) = ü_1(B_1, p_2) \iff -100p_{21} + 100 = 70p_{21} \iff 170p_{21} = 100 \iff p_{21} = \frac{10}{17}$.

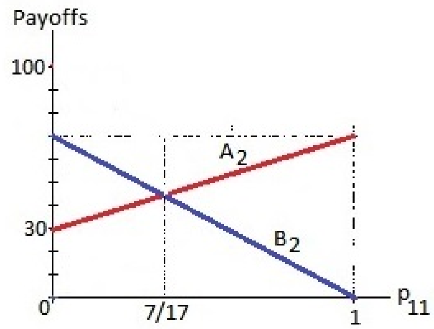
Calculemos agora, o payoff esperado, de g_2, para cada uma de suas estratégias puras em função de p_{11}.

$$\begin{aligned} ü_2(p_1, A_2) &= ü_2(p_1, (1,0)) \\ &= 1[p_{11} \cdot 100 + p_{12} \cdot 30] + 0[p_{11} \cdot 0 + p_{12} \cdot 100] \\ &= 100p_{11} + 30p_{12} \ = \ 100p_{11} + 30(1 - p_{11}) \ = \ 70p_{11} + 30, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ü_2(p_1, B_2) &= ü_2(p_1, (0,1)) \\ &= 0[p_{11} \cdot 100 + p_{12} \cdot 30] + 1[p_{11} \cdot 0 + p_{12} \cdot 100] \\ &= 100p_{12} \ = \ 100(1 - p_{11}) \ = \ -100p_{11} + 100. \end{aligned}$$

Comparemos ambos os resultados com sobreposição de seus gráficos. Ver Figura 24.

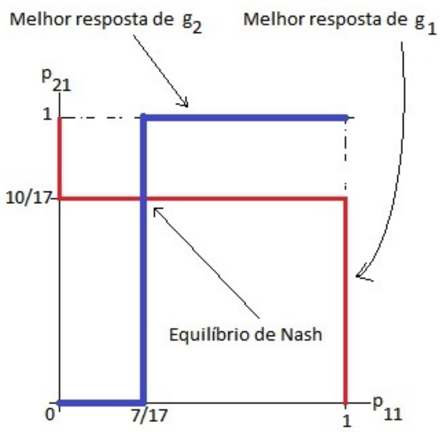
Figura 24: Gráfico 2, Dois Túneis



Pela comparação dos payoffs de g_2 observa-se que sua melhor estratégia é tomar B_2 sempre que $p_{11} < \frac{7}{17}$, tomar A_2 sempre que $p_{11} > \frac{7}{17}$ e, caso $p_{11} = \frac{7}{17}$, não há um estratégia mais vantajosa, visto que $\ddot{u}_2(p_1, A_2) = \ddot{u}_2(p_1, B_2) \iff 70p_{11} + 30 = -100p_{21} + 100 \iff 170p_{11} = 70 \iff p_{11} = \frac{7}{17}$.

Vejamos as curvas de melhor resposta de g_1 e g_2 em função de p_{11} e p_{21}, dadas pela Figura 25.

Figura 25: Gráfico 3, Dois Túneis



As curvas de melhor resposta indicam que o perfil de estratégias mistas $\mathbf{p}^* = (p_1^*, p_2^*) = ((7/17, 10/17), (10/17, 7/17))$ é um equilíbrio de Nash do jogo. Que confirma-se por

$\ddot{u}_1(p_1, (10/17, 7/17))$

$$\begin{aligned}
&= \ddot{u}_1((p_{11}, 1-p_{11}), (10/17, 7/17)) \\
&= p_{11}[(10/17)\cdot 0 + (7/17)\cdot 100] + (1-p_{11})[(10/17)\cdot 70 + (7/17)\cdot 0] \\
&= p_{11}\cdot(700/17) + (700/17) - p_{11}\cdot(700/17) \\
&= 700/17 \ \leq \ \ddot{u}_1(p_1^*, p_2^*),
\end{aligned}$$

$\ddot{u}_2((7/17, 10/17), p_2)$

$$\begin{aligned}
&= \ddot{u}_2((7/17, 10/17), (p_{21}, 1-p_{21})) \\
&= p_{21}[(7/17)\cdot 100 + (10/17)\cdot 30] + (1-p_{21})\cdot[(7/17)\cdot 0 + (10/17)\cdot 100] \\
&= p_{21}\cdot(1000/17) + (1000/17) - p_{21}\cdot(1000/17) \\
&= 1000/17 \ \leq \ \ddot{u}_2(p_1^*, p_2^*).
\end{aligned}$$

5 Jogos, Jogos e Mais Jogos

Vejamos agora mais alguns exemplos de jogos e suas soluções.

5.0.1 Quiosques de Água de Coco

Suponha um grande parque público em uma cidade qualquer. No parque há apenas dois quiosques que vendem água de coco, o **Coco Legal** e o **Super Coco**. O quiosque Coco Legal tem um lucro médio de R$4000,00 por mês, enquanto que o quiosque Super Coco tem um lucro médio de R$5000,00 por mês. Ambos os proprietários planejam fazer uma promoção na venda de água de coco com o fim de atrair tanto clientes do concorrente, quanto clientes novos. Uma pesquisa de mercado estima que se um quiosque fizer a promoção enquanto o outro não, então o quiosque que oferecer a promoção aumentará R$2000,00 em seus lucros, enquanto o que não oferecer terá uma queda de R$1000,00 nos lucros. Porém, se ambos fizerem a promoção simultaneamente, então cada um aumentará R$1000 em seus lucros. Os donos dos quiosques devem decidir entre fazer ou não a promoção.

Sistematização do jogo Quiosques de Água de Coco

Convencionando g_1 = Dono do Coco Legal, g_2 = Dono do Super Coco, sim_i = i-ésimo jogador faz a promoção, não_i = i-ésimo jogador não faz a promoção. Temos os conjuntos de estratégias puras $S_1 = \{\text{sim}_1, \text{não}_1\}$, $S_2 = \{\text{sim}_2, \text{não}_2\}$, e o espaço de estratégias puras $S = \{(\text{sim}_1, \text{sim}_2),(\text{sim}_1, \text{não}_2),(\text{não}_1, \text{sim}_2),(\text{não}_1, \text{não}_2)\}$.

Convencionado $u_i(\mathbf{s}) = \text{x}$, com $\text{x} \in \mathbb{R}$ tal que x é dado em milhares, temos os seguintes payoffs.

$$\begin{aligned} u_1(\text{sim}_1, \text{sim}_2) &= 5, & u_2(\text{sim}_1, \text{sim}_2) &= 6,\\ u_1(\text{sim}_1, \text{não}_2) &= 6, & u_2(\text{sim}_1, \text{não}_2) &= 4,\\ u_1(\text{não}_1, \text{sim}_2) &= 3, & u_2(\text{não}_1, \text{sim}_2) &= 7,\\ u_1(\text{não}_1, \text{não}_2) &= 4, & u_2(\text{não}_1, \text{não}_2) &= 5. \end{aligned}$$

Todos estes dados são apresentados de modo sintetizado na matriz de payoffs da Figura 26.

Figura 26: Matriz de Payoffs, Quiosques de Água de Coco

	sim_2	não_2
sim_1	(5, 6)	(6, 4)
não_1	(3, 7)	(4, 5)

A estratégia não_1 é estritamente dominada por sim_1 e a estratégia não_2 é estritamente dominada por sim_2. Eliminando-se as estratégias estritamente dominadas nos sobra o perfil de estratégias puras $\mathbf{s} = (sim_1, sim_2)$ que é a solução única do jogo.

O perfil de fato se enquadra como equilíbrio de Nash, posto que

$$\begin{aligned} u_1(\text{sim}_1, \text{sim}_2) &\geq u_1(s_{1j_1}, \text{sim}_2) \text{ para todo } j_1 = 1, 2,\\ u_2(\text{sim}_1, \text{sim}_2) &\geq u_2(\text{sim}_1, s_{2j_2}) \text{ para todo } j_2 = 1, 2. \end{aligned}$$

É interessante observar que sim_1 é a melhor resposta para qualquer estratégia possível a g_2 e sim_2 é a melhor resposta para qualquer estratégia possível a g_1. O mesmo ocorre na solução do dilema do prisioneiro, isto é, uma solução na qual mesmo que seu oponente mude de estratégia, ainda não há motivação para seguir uma estratégia diferente. Perceba que esta situação não fere a máxima de que uma solução é o *"desfecho onde cada jogador não tem incentivo de mudar sua estratégia se os demais jogadores não o fizerem"*, a frase não diz que um jogador precisa necessariamente se sentir motivado a mudar de estratégia caso os demais jogadores o façam. A frase diz que essa motivação de mudança só poderá vir a existir, apesar de não obrigatoriamente, caso algum jogador mude sua estratégia.

5.0.2 Sete e Meio

Programa Sete e Meio era o nome de um game-show apresentado por Silvio Santos no Sistema Brasileiro de Televisão (SBT) entre 2002 e 2004. Durante o programa dois grupos, de quatro participantes cada, disputavam importâncias em dinheiro em uma competição de perguntas e respostas. Ao final, cada grupo escolhia um representante para participar, com o valor acumulado do grupo, do jogo Sete e Meio contra o representante do outro grupo.

O jogo Sete e Meio consistia no seguinte: o representante de cada grupo, além de um envelope com o dinheiro do grupo, possuía uma carta com o simbolo 7 e outra carta com o simbolo 1/2. Os dois representantes sentavam-se frente a frente e , tendo o apresentador como mediador, conversavam por dois minutos sobre as duas únicas opções que possuíam, apresentar a carta 1/2 para que todos os oito participantes dividissem a soma das duas quantias igualmente ou apresentar a carta 7 para trair os outros sete participantes e ficar com a soma das duas quantias sozinho.

Se ambos apresentassem a carta 1/2, então de fato a soma total das quantias seria dividida igualmente entre todos os participantes. Se um apresentasse a carta 1/2 e outro apresentasse a carta 7, então a soma total das quantias seria dada ao que apresentou a carta 7 e todos os outros participantes ficariam com nada. Porém, se ambos apresentassem a carta 7, então ninguém receberia valor algum (e Silvio Santos sairia rindo como grande vencedor do jogo).

Sistematização do jogo Sete e Meio[3]

Convencionando g_1 = Representante de um grupo, g_2 = Representante do outro grupo, $(7)_i$ = i-ésimo jogador apresenta a carta 7, $(\frac{1}{2})_i$ = i-ésimo jogador apresenta a carta 1/2 e $u_i(\mathbf{s})$ = x, com x $\in \mathbb{R}$ tal que x representa um percentual da soma de todas as quantias, temos a matriz de payoffs dada pela Figura 27.

Figura 27: Matriz de Payoffs, Sete/Meio

		p_{21} $(7)_2$	p_{22} $(\frac{1}{2})_2$
p_{11}	$(7)_1$	(0, 0)	(100, 0)
p_{12}	$(\frac{1}{2})_2$	(0, 100)	(12.5, 12.5)

Pela matriz observa-se que não há estratégias estritamente dominadas no jogo Sete e Meio. Poderíamos usar o método das marcações para encontrar algum equilíbrio de Nash em estratégias puras, porém, como já dito na seção 4.2.1, todo equilíbrio de Nash em estratégias puras é também um equilíbrio de Nash em estratégias mistas, sendo que a reciproca não é verdadeira. Convém, então, buscar soluções por estratégias mistas, visto que assim, toda solução em estratégias puras será também encontrada. Calculemos os payoffs esperados de g_1 em função de p_{21}, os payoffs esperados de g_2 em função de p_{11} e então façamos a analise gráfica das equações encontradas, dada pela Figura 28.

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_1((7)_1,\ p_2) &= \ddot{u}_1((1,\ 0),\ p_2) \\
&= 1[p_{21}\cdot 0 + p_{22}\cdot 100] + 0[p_{21}\cdot 0 + p_{22}\cdot 12,5] \\
&= 100p_{22} \ = \ 100(1-p_{21}) \ = \ -100p_{21} + 100
\end{aligned}$$

[3]Vale lembrar que apesar de o Programa Sete e Meio possuir oito participantes, no jogo Sete e Meio há apenas dois jogadores

$$
\begin{aligned}
\ddot{u}_1((\frac{1}{2})_1,\ p_2) &= \ddot{u}_1((0,\ 1),\ p_2) \\
&= 0[p_{21}\cdot 0 + p_{22}\cdot 100] + 1[p_{21}\cdot 0 + p_{22}\cdot 12,5] \\
&= 12,5p_{22} \ = \ 12,5(1-p_{21}) \ = \ -12,5p_{21} + 12,5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{u}_2(p_1,\ A_2) &= \ddot{u}_2(p_1,\ (1,\ 0)) \\
&= 1[p_{11}\cdot 0 + p_{12}\cdot 100] + 0[p_{11}\cdot 0 + p_{12}\cdot 12,5] \\
&= 100p_{12} \ = \ 100(1-p_{11}) \ = \ -100p_{11} + 100
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{u}_2(p_1,\ B_2) &= \ddot{u}_2(p_1,\ (0,\ 1)) \\
&= 0[p_{11}\cdot 0 + p_{12}\cdot 100] + 1[p_{11}\cdot 0 + p_{12}\cdot 12,5] \\
&= 12,5p_{12} \ = \ 12,5(1-p_{11}) \ = \ -12,5p_{11} + 12,5
\end{aligned}
$$

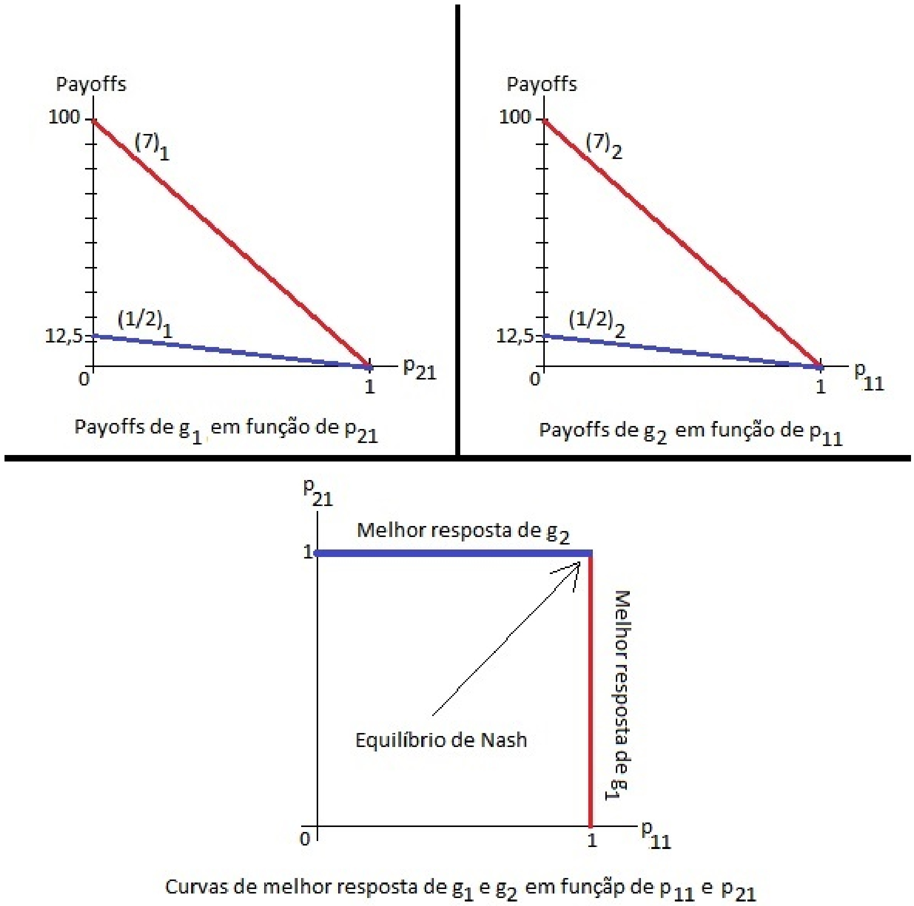
Verificamos então que a solução única do jogo Sete e Meio é o perfil de estratégias mistas $\mathbf{p}^* = ((1,\ 0),\ (1,\ 0))$, que também pode ser apresentado como o perfil de estratégias puras $\mathbf{s}^* = ((7)_1,\ (7)_2)$. Que confirma-se por

$$
\begin{aligned}
\ddot{u}_1(p_1,\ (1,\ 0)) &= p_{11}[1\cdot 0 + 0\cdot 100] + p_{12}[1\cdot 0 + 0\cdot 12,5] \ = \ 0 \ \leq \ \ddot{u}_1((1,\ 0),\ (1,\ 0)), \\
\ddot{u}_2((1,\ 0),\ p_2) &= p_{21}[1\cdot 0 + 0\cdot 100] + p_{22}[1\cdot 0 + 0\cdot 12,5] \ = \ 0 \ \leq \ \ddot{u}_2((1,\ 0),\ (1,\ 0)).
\end{aligned}
$$

5.0.3 Par ou Impar

O jogo de Par ou Impar, conhecido em todo o Brasil, é usado geralmente para resolver algum impasse entre duas pessoas; quem inicia determinado evento, quem tomará determinada decisão, quem deverá realizar determinado feito, etc. No jogo, um jogador decide por par e o outro por impar, para depois, simultaneamente mostrarem qualquer quantidade de dedos em suas mãos. A quantidade total de dedos será contada, resultando em algum valor par ou em algum valor impar, o jogador que acertar a predição do resultado é o vencedor.

Figura 28: Gráficos, Sete e Meio



Sistematização do jogo Par ou Impar

Convencionando g_1 = Jogador que escolher par, g_2 = Jogador que escolher impar, PAR_i = i-ésimo jogador apresenta um número par de dedos, IMPAR_i = i-ésimo jogador apresenta um número impar de dedos e $u_i(\mathbf{s}) = x$, com $x \in \{-1,\ +1\}$ tal que $x = -1$ indica derrota e $x = +1$ indica vitória, temos a matriz de payoffs dada pela Figura 29.

Pela matriz observa-se que não há estratégias estritamente dominadas no jogo Par ou Impar. Conforme fizemos no jogo Sete e Meio, em vez de aplicarmos o método das marcações para verificarmos algum equilíbrio de Nash em estratégias puras, buscaremos soluções em estratégias mistas, já que no processo, as possíveis soluções em estratégias puras também serão encontradas.

Figura 29: Matriz de Payoffs, Par ou Impar

		p_{21} PAR_2	p_{22} IMPAR_2
p_{11}	PAR_1	$(+1,\ -1)$	$(-1,\ +1)$
p_{12}	IMPAR_1	$(-1,\ +1)$	$(+1,\ -1)$

Calculemos os payoffs esperados de g_1 em função de p_{21}, os payoffs esperados de g_2 em função de p_{11} e então façamos a analise gráfica das equações encontradas, dada pela Figura 30. Vale observar que, para os payoffs esperados, qualquer resultado pertencente a]-1, 0[indica uma tendência de derrota, qualquer resultado pertencente a]0, $+1$[indica uma tendência de vitória e o resultado 0 indica uma tendência de empate.

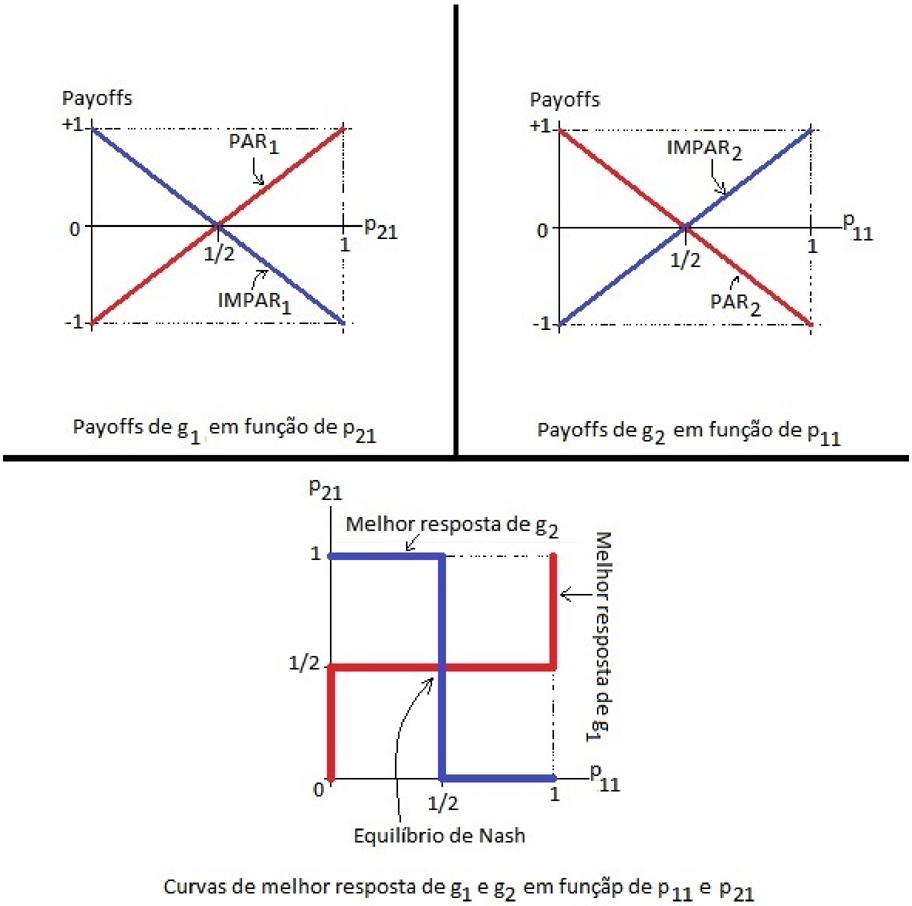
$$\begin{aligned}
\ddot{u}_1(\mathrm{PAR}_1,\ p_2) &= \ddot{u}_1((1,\ 0),\ p_2)\\
&= 1[p_{21}\cdot(+1)+p_{22}\cdot(-1)]+0[p_{21}\cdot(-1)+p_{22}\cdot(+1)]\\
&= p_{21}-p_{22}\ =\ p_{21}-1(1-p_{21})\ =\ 2p_{21}-1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_1(\mathrm{IMPAR}_1,\ p_2) &= \ddot{u}_1((0,\ 1),\ p_2)\\
&= 0[p_{21}\cdot(+1)+p_{22}\cdot(-1)]+1[p_{21}\cdot(-1)+p_{22}\cdot(+1)]\\
&= -p_{21}+p_{22}\ =\ -p_{21}+1(1-p_{21})\ =\ -2p_{21}+1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_2(p_1,\ \mathrm{PAR}_2) &= \ddot{u}_2(p_1,\ (1,\ 0))\\
&= 1[p_{11}\cdot(-1)+p_{12}\cdot(+1)]+0[p_{11}\cdot(+1)+p_{12}\cdot(-1)]\\
&= -p_{11}+p_{12}\ =\ -p_{11}+1(1-p_{11})\ =\ -2p_{11}+1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_2(p_1,\ \mathrm{IMPAR}_2) &= \ddot{u}_2(p_1,\ (0,\ 1))\\
&= 0[p_{11}\cdot(-1)+p_{12}\cdot(+1)]+1[p_{11}\cdot(+1)+p_{12}\cdot(-1)]\\
&= p_{11}-p_{12}\ =\ p_{11}-1(1-p_{11})\ =\ 2p_{11}-1
\end{aligned}$$

Figura 30: Gráficos, Par ou impar



Verificamos então que a solução única do jogo Par ou Impar é o perfil de estratégias mistas $\mathbf{p}^* = ((1/2,\ 1/2), (1/2,\ 1/2))$. Ou seja, o perfil no qual cada jogador atribui 50% de chance de lançar par e 50% de chance de lançar impar. Que confirma-se por

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1(p_1,\ (1/2,\ 1/2)) &= p_{11}[(1/2)\cdot 1 + (1/2)\cdot(-1)] + p_{12}[(1/2)\cdot(-1) + (1/2)\cdot 1] \\ &= 0 \ \leq \ \ddot{u}_1((1/2,\ 1/2),\ (1/2,\ 1/2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_2((1/2,\ 1/2),\ p_2) &= p_{21}[(1/2)\cdot(-1) + (1/2)\cdot 1] + p_{22}[(1/2)\cdot 1 + (1/2)\cdot(-1)] \\ &= 0 \ \leq \ \ddot{u}_2((1/2,\ 1/2),\ (1/2,\ 1/2)). \end{aligned}$$

5.0.4 Guerra Dos Sexos

Um homem e uma mulher, casados, desejam sair para passear. Os dois únicos eventos interessantes a acontecer no dia em questão são, um jogo de futebol e determinado filme passando no cinema. Os dois eventos ocorrerão simultaneamente e, portanto, cada um deve decidir a qual evento irá. Os dois sabem o seguinte: o homem, se for acompanhado de sua esposa, ficará satisfeito indo ao jogo de futebol e parcialmente satisfeito indo ao cinema. Porém, sem sua esposa, ficará insatisfeito em qualquer evento. Já a mulher, se for acompanhada de seu marido, ficará satisfeita indo ao cinema e parcialmente satisfeita indo ao futebol. Sem o marido, ficará insatisfeita em qualquer evento.

Sistematisação do jogo Guerra dos Sexos

Convencionando g_1 = Homem, g_2 = Mulher, Futebol_i = i-ésimo jogador escolhe ir ao jogo de futebol, Cinema_i = i-ésimo jogador escolhe ir ao cinema e $u_i(\mathbf{s}) = x$, com $x \in \{-1,\ 0,\ +1\}$, tal que $x = -1$ indica insatisfação, $x = 0$ indica satisfação parcial e $x = +1$ indica satisfação, temos a matriz de payoffs da Figura 31.

Figura 31: Matriz de Payoffs, Guerra dos Sexos

		p_{21} Futebol_2	p_{22} Cinema_2
p_{11}	Futebol_1	$(1,\ 0)$	$(-1,\ -1)$
p_{12}	Cinema_1	$(-1,\ -1)$	$(0,\ 1)$

Pela matriz observa-se que não há estratégias estritamente dominadas no jogo Guerra dos Sexos. Buscaremos soluções em estratégias mistas, já que, no processo, as possíveis soluções em estratégias puras também serão encontradas. Calculemos os payoffs esperados de g_1 em função de p_{21}, os payoffs esperados de g_2 em função de p_{11} e então façamos a analise gráfica das equações encontradas, dada pela Figura 32. Vale observar que, para os payoffs esperados, qualquer resultado pertencente a]-1, 0[indica uma tendência de insatisfação, qualquer resultado pertencente a $]0,\ +1[$ indica uma tendência de satisfação e o resultado 0 indica uma tendência de satisfação parcial.

$$
\begin{aligned}
\ddot{u}_1(\text{Futebol}_1,\ p_2) &= \ddot{u}_1((1,\ 0),\ p_2) \\
&= 1[p_{21}\cdot 1 + p_{22}\cdot(-1)] + 0[p_{21}\cdot(-1) + p_{22}\cdot 0] \\
&= p_{21} - p_{22} \ = \ p_{21} - 1(1 - p_{21}) \ = \ 2p_{21} - 1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{u}_1(\text{Cinema}_1,\ p_2) &= \ddot{u}_1((0,\ 1),\ p_2) \\
&= 0[p_{21}\cdot 1 + p_{22}\cdot(-1)] + 1[p_{21}\cdot(-1) + p_{22}\cdot 0] \\
&= -p_{21},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{u}_2(p_1,\ \text{Futebol}_2) &= \ddot{u}_2(p_1,\ (1,\ 0)) \\
&= 1[p_{11}\cdot 0 + p_{12}\cdot(-1)] + 0[p_{11}\cdot(-1) + p_{12}\cdot 1] \\
&= -p_{12} \ = \ -1(1 - p_{11}) \ = \ p_{11} - 1,
\end{aligned}
$$

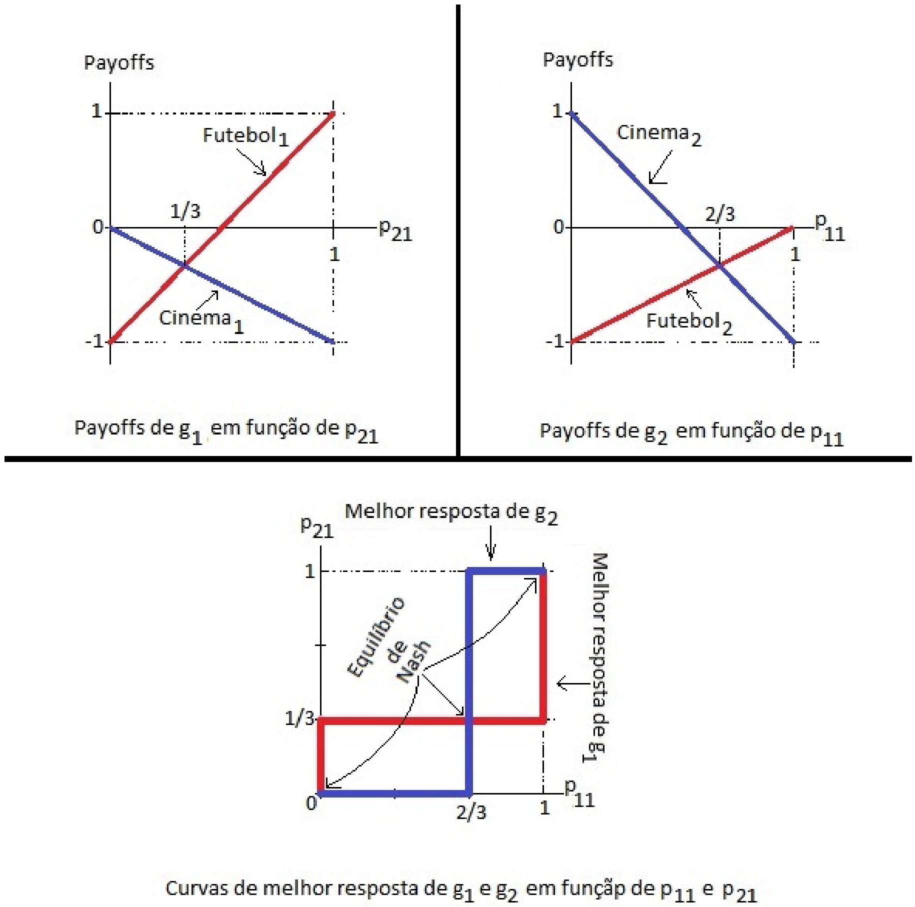
$$
\begin{aligned}
\ddot{u}_2(p_1,\ \text{Cinema}_2) &= \ddot{u}_2(p_1,\ (0,\ 1)) \\
&= 0[p_{11}\cdot 0 + p_{12}\cdot(-1)] + 1[p_{11}\cdot(-1) + p_{12}\cdot 1] \\
&= -p_{11} + p_{12} \ = \ -p_{11} + 1(1 - p_{11}) \ = \ -2p_{11} + 1.
\end{aligned}
$$

Verificamos então que existem três equilíbrios de Nash no jogo Guerra dos Sexos, a saber, $\mathbf{p}^1 = ((0,\ 1),\ (0,\ 1))$, $\mathbf{p}^2 = ((1,\ 0),\ (1,\ 0))$ e $\mathbf{p}^3 = ((2/3,\ 1/3),\ (1/3,\ 2/3))$, os dois primeiros podendo ser interpretados como os perfis de estratégias puras dados por $\mathbf{s}^1 = (\text{Cinema}_1,\ \text{Cinema}_2)$ e $\mathbf{s}^2 = (\text{Futebol}_1,\ \text{Futebol}_2)$. As soluções encontradas confirmam-se por

$$
\begin{aligned}
\ddot{u}_1(p_1,\ (0,\ 1)) &= p_{11}[0\cdot 1 + 1\cdot(-1)] + p_{12}[0\cdot(-1) + 1\cdot 0] \\
&= -p_{11} \ \leq \ 0 \ = \ \ddot{u}_1((0,\ 1),\ (0,\ 1)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{u}_2((0,\ 1),\ p_2) &= p_{21}[0\cdot 0 + 1\cdot(-1)] + p_{22}[0\cdot(-1) + 1\cdot 1)] \\
&= -p_{21} + p_{22} = -p_{21} + 1\cdot(1 - p_{21}) \\
&= -2p_{21} + 1 \ \leq \ 1 \ = \ \ddot{u}_2((0,\ 1),\ (0,\ 1)),
\end{aligned}
$$

Figura 32: Gráficos, Guerra dos Sexos



$$
\begin{aligned}
\ddot{u}_1(p_1,\ (1,\ 0)) &= p_{11}[1\cdot 1 + 0\cdot(-1)] + p_{12}[1\cdot(-1) + 0\cdot 0] \\
&= p_{11} - p_{12} \ = \ p_{11} - 1\cdot(1 - p_{11}) \\
&= 2p_{11} - 1 \ \leq \ 1 \ = \ \ddot{u}_1((1,\ 0),\ (1,\ 0)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{u}_2((1,\ 0),\ p_2) &= p_{21}[1\cdot 0 + 0\cdot(-1)] + p_{22}[1\cdot(-1) + 0\cdot 1] \\
&= -p_{22} \ = \ -1\cdot(1 - p_{21}) \\
&= p_{21} - 1 \ \leq \ 0 \ = \ \ddot{u}_2((1,\ 0),\ (1,\ 0)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{u}_1(p_1,\ (1/3,\ 2/3)) &= p_{11}[(1/3)\cdot 1 + (2/3)\cdot(-1)] + p_{12}[(1/3)\cdot(-1) + (2/3)\cdot 0] \\
&= -(1/3)p_{11} - (1/3)p_{12} \ = \ -(1/3)p_{11} - (1/3)(1-p_{11}) \\
&= -1/3 \ \leq \ \ddot{u}_1((2/3,\ 1/3),\ (1/3,\ 2/3)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{u}_2((2/3,\ 1/3),\ p_2) &= p_{21}[(2/3)\cdot 0 + (1/3)\cdot(-1)] + p_{22}[(2/3)\cdot(-1) + (1/3)\cdot 1] \\
&= -(1/3)p_{21} - (1/3)p_{22} \ = \ -(1/3)p_{21} - (1/3)(1-p_{21}) \\
&= -1/3 \ \leq \ \ddot{u}_2((2/3,\ 1/3),\ (1/3,\ 2/3)).
\end{aligned}
$$

5.0.5 E continua...

Existe uma infinidade de situações problemas que podem ser interpretadas como jogos, apresentamos apenas alguns exemplos. Vale lembrar também que, para o objetivo do trabalho, nos limitamos a certos requisitos que foram estipulados no último paragrafo da sessão 2.2, porém, a Teoria Econômica dos Jogos trabalha com vários modelos de jogos além dos apresentados aqui, jogos com mais de dois jogadores, jogos onde nem todos os jogadores estão a par de todas as informações sobre a situação, entre outros.

6 Proposta De Oficina Matemática Sobre Teoria Econômica Dos Jogos Para O Ensino Médio

6.1 Justificativa

Atualmente o ensino da Teoria Econômica dos Jogos é empreendido em diversas áreas do ensino superior. Faculdades de economia, psicologia, sociologia, filosofia, matemática, entre outras, utilizam este ramo do saber como ferramenta para a análise de seus objetos de estudo. Esta oficina tem como proposta apresentar a estudantes do ensino médio a Teoria Econômica dos Jogos, simplificada até onde seus conhecimentos matemáticos já adquiridos lhes permita chegar. Compreender os preceitos da Teoria Econômica dos Jogos ajudará o estudante a compreender melhor a análise de uma situação de conflito, quais atitudes esperar dos personagens envolvidos em tal situação e os aspectos matemáticos que a envolvem. Além disto, nesta oficina o estudante terá a oportunidade de reforçar e desenvolver seus conhecimentos matemáticos em uma nova área do saber.

6.2 Objetivos Gerais

Ao final desta oficina pretende-se que o estudante seja capaz de:

- Compreender que determinadas situações do cotidiano podem ser entendidas como um jogo matemático.
- Sistematizar uma situação problema sob a forma de um jogo.
- Refletir racionalmente sobre quais as melhores atitudes a se tomar em função das possíveis atitudes dos outros personagens envolvidos no jogo.
- Compreender o conceito de solução de um jogo em Teoria Econômica dos Jogos e ser capaz de encontrá-lo.
- Compreender o que são estratégias puras e mistas, analisar um jogo por qualquer um destes métodos e distinguir qual o método mais conveniente para o jogo em questão.
- Desenvolver e ampliar seus conhecimentos matemáticos por meio da Teoria Econômica dos Jogos.

6.3 Metodologia

Esta oficina será aplicada durante um total de cinco aulas de cinquenta minutos cada, o tempo das aulas corresponde ao tempo padrão de uma aula para uma turma do ensino médio na maioria das escolas pelo Brasil. No decorrer das aulas serão apresentadas propostas de dinâmicas (cinco ao todo) que de forma lúdica prepararão o estudante para o conteúdo a ser ministrado na aula em questão, sendo que a cada aula correspondem objetivos específicos que, quando alcançados, guiarão o estudante aos objetivos gerais da oficina. Ao longo do processo apresentaremos; na primeira aula, a Teoria Econômica dos jogos e um pouco de sua história, o jogo Dilema dos Prisioneiros, sistematização de jogos e o conceito de estratégias puras; na segunda aula, os jogos Três Pontes e Dois Túneis juntamente com suas sistematizações; na terceira aula, o que é uma solução de um jogo em estratégias puras e como encontrá-la; na quarta aula, as estratégias mistas e a sistematização de um jogo por elas; na quinta aula, o que é uma solução de um jogo em estratégias mistas e como encontrá-la, finalizando com a apresentação dos jogos Quiosques de Água de Coco, Sete e Meio, Par ou Impar e Guerra dos Sexos.

6.3.1 Aula 1

Objetivos Específicos

Ao final desta aula espera-se que o estudante:

- Seja apresentado à Teoria Econômica dos Jogos e seu objeto de estudo.
- Reflita sobre a importância de pensar antes de agir e de procurar pela melhor estratégia em uma situação problema tendo em mente quais as possíveis estratégias dos outros envolvidos.
- Compreenda como se dá a sistematização matemática de uma situação problema transformando-a em um jogo, tendo como exemplo o Dilema dos Prisioneiros.
- Aprenda o que são estratégias puras.

Dinâmica 1

Separe 10 estudantes da turma e retire-os da sala de aula, depois, permita que retornem à sala de dois em dois. Sempre que uma dupla retornar, discrimine cada estudante como prisioneiro 1 ou 2 e então lhes proponha o Dilema dos Prisioneiros. Deixe que pensem (individualmente) por alguns instantes para depois anotarem suas escolhas em uma folha separada para cada. Mostre a escolha de cada jogador para a turma, explicando qual o resultado destas escolhas. Repita o processo até que os 10 estudantes tenham retornado à sala.

Feito isto anote os resultados das 5 rodadas do jogo Dilema dos Prisioneiros no quadro e convide os estudantes da turma para juntos analisarem qual teria sido a melhor estratégia de cada jogador, qual resultado era o mais esperado, se de fato o resultado que acreditam ser o mais esperado aconteceu e se existe algum desfecho onde nenhum jogador teria motivos para seguir uma estratégia diferente (Lembre seus estudantes que os dois prisioneiros devem pensar apenas em seu próprio beneficio e que a decisão deve ser tomada sem que eles se comuniquem). Permita que os estudantes conversem sobre o jogo e exponham suas opiniões a respeito dele, então retome a aula apresentando aos estudantes a Teoria Econômica dos Jogos.

Metodologia Da Aula

Na primeira aula desta oficina, antes de falar sobre Teoria Econômica dos Jogos aos estudantes, o professor deve fazer uma "provocação", apresentando o Dilema dos Prisioneiros (seção 3.1.1 do TCC) para a turma por meio da **dinâmica 1**. Após isto, o professor introduzirá sua turma à Teoria Dos Jogos, expondo; um pouco de sua história e personalidades influentes sobre o tema (seção 1 do TCC) e sua separação em Teoria Combinatória Dos Jogos e Teoria Econômica dos Jogos (seção 2 do TCC). Em seguida o professor apresentará os elementos da sistematização de um jogo e explicará o que são estratégias puras enquanto sistematiza o jogo Dilema dos Prisioneiros (seção 3.1.1 do TCC).

Opcionalmente, o professor pode sugerir a seus estudantes que assistam o filme "Uma Mente Brilhante" sobra a vida do matemático John Nash Jr. (1928 - 2015), um dos maiores contribuintes da Teoria Econômica dos Jogos.

6.3.2 Aula 2

Objetivos Específicos

Ao final desta aula espera-se que o estudante:

- Seja apresentado aos jogos Três Pontes e Dois Túneis.
- Exercite a ideia de refletir racionalmente sobre quais estratégias seguir em uma situação problema.
- Pratique a sistematização de um jogo
- Reforce os conteúdos aprendidos na aula passada.

Dinâmicas 2 e 3

As dinâmicas 2 e 3 seguem o mesmo modelo da dinâmica 1, porém na dinâmica 2 será usado o jogo Três Pontes e na dinâmica 3, o jogo Dois Túneis. Antes de iniciar as dinâmicas 2 e 3 lembre seus estudantes do Dilema dos Prisioneiros e sobre a importância de refletir sobre suas estratégias tendo em mente as possíveis estratégias dos outros jogadores envolvidos.

Metodologia Da Aula

O professor deve começar a segunda aula com as **dinâmicas 2 e 3**, nas quais, de modo lúdico, serão apresentados os jogos Três Pontes (seção 3.1.2 do TCC) e Dois Túneis (seção 3.1.3 do TCC) respectivamente. Após aplicação das dinâmicas, o professor permitirá que os estudantes, individualmente ou em pequenos grupos, sistematizem em seus cadernos os dois jogos apresentados. Depois de tempo suficiente, o professor pode apresentar no quadro as respectivas sistematizações (seção 3.1 do TCC) ou permitir que para cada jogo, um estudante vá ao quadro e apresente sua sistematização.

6.3.3 Aula 3

Objetivos Específicos

Ao final desta aula espera-se que o estudante:

- Compreenda o conceito de solução de um jogo na Teoria Econômica dos Jogos.
- Saiba encontrar as soluções de um jogo em estratégias puras.
- Perceba que nem todos os jogos da Teoria Econômica dos Jogos possuem solução em estratégias puras.
- Perceba que uma solução do jogo não necessariamente representa o melhor desfecho para ambos, ou um ponto onde todos ganham (ou perdem) por igual.
- Reforce os conteúdos aprendidos na aula anterior.

Metodologia Da Aula

Nesta aula o professor explicará à turma o conceito de solução de um jogo na Teoria Econômica dos Jogos (seção 3.2 do TCC) e o que são **equilíbrio das estratégias dominantes** e **equilíbrio de Nash**, além de como encontrá-los (seções 3.2.1 e 3.2.2 do TCC). Feito isto, o professor demonstrará como encontrar a solução para o jogo Dilema dos Prisioneiros (seção 3.2.3 do TCC) para então pedir a seus alunos que encontrem, individualmente ou em pequenos grupos, as soluções dos jogos Três Pontes e Dois Túneis. Após tempo suficiente, o professor deve apresentar no quadro a solução do jogo Três Pontes (seção 3.2.4 do TCC) ou pedir que algum aluno disposto o faça, e demonstrar que nas estratégias puras, não há solução para o jogo Dois Túneis (seção 3.2.5 do TCC).

Recomenda-se que em algum momento da aula o professor discuta com seus alunos sobre os perfis de estratégias puras encontrados como soluções dos jogos Dilema dos Prisioneiros e Dois Túneis. Questionar se estes eram os perfis que esperavam encontrar, se tal perfil é a melhor solução para os envolvidos, se há desfecho melhor para os envolvidos caso eles joguem como aliados, se de fato um perfil obtido como solução apresenta um ponto onde nenhum dos envolvidos vê motivos para ter seguido uma estratégia diferente, etc. Também é interessante, após a conclusão de que não há solução para o jogo Dois Túneis em estratégias puras, explicar que existe um tipo de estratégia pela qual é possível encontrar uma solução para este jogo, as estratégias mistas, que serão objeto de estudo da próxima aula da oficina.

6.3.4 Aula 4

Objetivos Específicos

Ao final desta aula espera-se que o estudante:

- Compreenda o que são estratégias mistas.
- Verifique como as estratégias mistas atuam na prática durante um jogo.
- Aumente ou reforce seus conhecimentos sobre probabilidades.
- Verifique como se dá a sistematização de um jogo por estratégias mistas e seja capaz de fazê-lo.

Preparando uma Gerador de Números Aleatórios

Para esta aula o professor deve possuir alguma ferramenta que lhe possibilite selecionar aleatoriamente um valor x, tal que x seja uma variável contínua entre 0 e 1. Existem vários programas para computadores e aplicativos para celulares e tablets que fazem isto, cabe ao ministrante da oficina escolher o que melhor lhe convém. Chamaremos esta ferramenta de **gerador de números aleatórios**.

Dinâmica 4

Após ter explicado a seus estudantes o que são estratégias mistas o professor deve novamente retirar 10 deles da sala e solicitar que retornem de dois em dois. Cada vez que uma dupla retornar o professor relembrará a dupla do jogo Dois Túneis e discriminará os indivíduos em g_1 (fugitivo) e g_2 (assassino) solicitando então que cada um indique uma estratégia mista a ser tomada. Com seu gerador de números aleatórios o professor gerará um valor x para g_1 e um valor y para g_2. Tais valores indicarão qual estratégia pura cada jogador seguirá em função de sua estratégia mista seguida.

Por exemplo, se g_1 toma a estratégia $p_1^* = (2/5,\ 3/5)$ e $x = 0.34567$, então g_1 jogará s_{11} visto que $x \leq 2/5$, por outro lado, se g_2 toma a estratégia mista $p_2^* = (5/17,\ 12/17)$ e $y = 0,63679$, então g_2 jogará s_{22} visto que $y > 5/17$. O professor deve fazer tal análise no quadro e, opcionalmente, pode pedir o auxilio de algum estudante. É importante mostrar as frações de cada estratégia mista como complementares do intervalo unitário. Pode ser interessante traduzir antes as frações (a primeira de cada par, pelo menos) em notação decimal para facilitar as comparações.

Para todas as cinco duplas, anote no quadro as estratégias mistas seguidas, os valores de x e y, as estratégias puras seguidas em decorrência destes valores e o payoff de cada jogador.

Metodologia Da Aula

O professor deve iniciar a aula explicando o que são estratégias mistas (seção 4.1 do TCC) para após isto aplicar a **dinâmica 4**. Completada a dinâmica, o professor permitirá que a turma discuta os resultados obtidos e perceba que os payoffs encontrados poderiam ter sido diferentes dependendo dos números x e y oferecidos pelo professor, explicará como se dá a sistematização do jogo em estratégias mistas (novamente seção 4.1 do TCC) procurando deixar claro aos estudantes que o **payoff esperado** de um perfil de estratégias mistas para um i-ésimo jogador é um valor que se espera estar próximo da média dos payoffs obtidos após um número suficientemente grande de rodadas do jogo seguindo o perfil de estratégias mistas em questão.

6.3.5 Aula 5

Objetivos Específicos

Ao final desta aula espera-se que o estudante:

- Compreenda o que são soluções em estratégias mistas e seja capaz de obtê-las.

- Aumente e/ou reforce seus conhecimentos sobre probabilidades.
- Aumente e/ou reforce seus conhecimentos sobre uso de gráficos para análises matemáticas.
- Reforce os conteúdos aprendidos na aula anterior.

Dinâmica 5

Inicie a aula relembrando seus estudantes do jogo Dois Túneis e peça que calculem, individualmente ou em pequenos grupos, os **payoffs esperados** do perfil de estratégias mistas $\mathbf{p}^* = ((7/17,\ 10/17),\ (10/17,\ 7/17))$. Após tempo suficiente para concluírem que $u_1(\mathbf{p}^*) \approx 41,18$ e $u_2(\mathbf{p}^*) \approx 58,82$, questione seus estudantes se algum deles é capaz de indicar uma estratégia mista para g_1 que aumente seu payoff esperado sendo que g_2 não mude de estratégia, ou uma estratégia mista para g_2 que aumente seu payoff esperado sendo que g_1 não mude de estratégia. Dê um tempo aos estudantes, caso queiram, para cumprir tal tarefa mas, passado tal tempo explique a seus estudantes que isto não é possível.

Este perfil é a solução do jogo e, portanto, não há estratégia que aumente o payoff esperado de um jogador se seu oponente não mudar sua estratégia, mas não diga isto a seus estudantes ainda. Eles perceberão isso no decorrer da aula.

Metodologia Da Aula

Após aplicar a **dinâmica 5** exponha a seus estudantes o que são e como encontrar soluções em estratégias mistas para os jogos da Teoria Econômica dos Jogos (seção 4.2 do TCC). Então, peça que seus estudantes tentem, individualmente ou em pequenos grupos, encontrar alguma solução para o jogo Dois Túneis (seção 4.2.2 do TCC) e, depois de tempo suficiente, apresente a solução no quadro. Neste momento (ou mesmo antes) todos os estudantes perceberão que a solução encontrada é o perfil de estratégia dado na **dinâmica 5** e, portanto, a tarefa que foi solicitada ao fim da dinâmica era impossível de ser realizada.

O professor pode finalizar esta aula e a oficina, como um todo, apresentando a seus estudantes os demais jogos que se encontram na seção 5 do TCC e orientando-os a encontrarem por conta própria as soluções de tais jogos.

6.4 Relatório Sobre Aplicação Da Oficina

A oficina matemática sobre Teoria Econômica dos Jogos para o ensino médio, proposta neste TCC, foi aplicada no Colégio Sesi Campinas de Goiânia a quatro turmas do ensino médio, que juntas totalizam 136 estudantes, durante o período dos dias 13 a 17 de fevereiro do ano de 2017. Ao final de sua aplicação, os estudantes participaram de uma atividade de verificação de aprendizagem e aproveitamento, cujos resultados são aqui expostos.

6.4.1 Relatório da Aula 1

Durante a aplicação da **dinâmica 1** os estudantes demonstraram-se altamente interessados e em todas as turmas verificou-se uma disposição de participação acima da cotidiana. Os estudantes contribuíram energeticamente com opiniões sobre o jogo e sobre qual atitude tomariam na situação proposta. Inicialmente alguns estudantes tiveram dificuldade em aceitar que na Teoria Econômica dos Jogos os jogadores devem ser vistos como adversários, insistindo na ideia de que, se no lugar dos prisioneiros, não trairiam seus comparsas por respeito à sua cumplicidade. Porém, mediante intervenção do educador, foram capazes de compreender que o jogo Dilema dos Prisioneiros é um exercício de análise matemática de uma situação de conflito de interesses e que, portanto, ao menos naquele momento, não cabiam questões sobre o que seria ou não ético. Entretanto, ficou exposto um grande potencial para uma aula interdisciplinar entre matemática e filosofia.

No decorrer da aula, ao apresentar a sistematização do jogo Dilema dos Prisioneiros, muitos estudantes declararam compreender melhor a situação agora que ela havia sido sistematizada. Em todas as turmas, mesmo sem saber o conceito de solução de um jogo segundo a Teoria Econômica dos Jogos, houveram estudantes que chegaram à conclusão de que a melhor escolha para os dois prisioneiros seria “falar” e que esta seria uma situação onde nenhum dos dois se arrependeria da escolha tomada.

6.4.2 Relatório da Aula 2

Ao início da aula, quando anunciado que seriam apresentados mais dois jogos, os estudantes demonstraram interesse e disposição para participar como jogadores. Nesta aula, assim como na anterior, foi possível confirmar que o assunto tratado pela Teoria Econômica dos Jogos desperta e motivas os estudantes. Durante a **dinâmica 2** os estudantes apresentaram maior facilidade em discutir as possíveis estratégias de cada jogador e argumentar sobre qual estratégia seria provavelmente mais eficiente que as demais. Em todas as turmas houve estudantes capazes de identificar um resultado final onde nenhum dos jogadores teria motivo para se arrepender da escolha tomada. Durante a **dinâmica 3** alguns estudantes tentaram argumentar sobre qual seria a melhor estratégia para cada jogador, porém a grande maioria afirmou não conseguir identificar uma estratégia que seguramente aumentasse o payoff de algum dos jogadores. Esta é uma reação interessante e coerente, visto que, realmente, não há estratégia pura no jogo Dois Túneis que garanta maximização de payoff para algum dos jogadores.

Em geral, os estudantes foram capazes de sistematizar os dois jogos sem grandes dificuldades, necessitando de algumas intervenções e orientações do educador para tal.

6.4.3 Relatório da Aula 3

Inicialmente alguns estudantes tiveram dificuldade em compreender o que é uma solução de um jogo segundo a Teoria Econômica dos Jogos mas, mediante intervenção e paciência do educador, todas as dúvidas apresentadas foram sanadas. Muitos estudantes comentaram já ter observado que havia no Dilema dos Prisioneiros e nas Três Pontes um desfecho onde nenhum jogador se arrepende da estratégia que seguiu. Após explicado o que é **equilíbrio das estratégias dominantes** e **equilíbrio de Nash** e como encontrá-los, os educandos não tiveram muitas dificuldades em concluir a solução do jogo Três Pontes, tão pouco de concluírem o fato do jogo Dois Túneis não possuir solução em estratégias puras. Os estudantes puderam observar que o equilíbrio de Nash não necessariamente representa um desfecho onde todos ganham por igual e que, em estratégias puras, nem sempre há uma solução. Esta conclusão serviu de gancho motivador, posto que o educador mencionou o fato de o jogo Dois Túneis possuir solução nas estratégias mistas, assunto da aula posterior.

6.4.4 Relatório da Aula 4

Ao final da **dinâmica 4** muitos estudantes argumentaram não perceber a serventia da análise de um jogo por estratégias mistas, o educador precisou explicar que em certas situações é possível estimar qual estratégia mista um jogador está usando e assim ponderar sobre qual estratégia usar contra ele. Foi dado como exemplo uma situação na qual 100 fugitivos, individualmente, já haviam enfrentado o mesmo assassino no jogo Dois Túneis e que todas as informações sobre essas 100 rodadas estavam disponíveis a um novo fugitivo que enfrentaria o assassino. Assim sendo, o fugitivo seria capaz de estimar qual a estratégia mista usada por seu oponente e qual estratégia pura aumentaria seu **payoff esperado**. Isto ajudou na compreensão de todos sobre esta nova abordagem da situação. Também foi explicado que um equilíbrio de Nash neste jogo, somente pode ser encontrado por estratégias mistas e que este seria o assunto da próxima aula.

Nesta aula foi possível perceber a dificuldade dos estudantes do ensino médio em lidar com situações que envolvem probabilidades e em compreender sua aplicação. Também percebeu-se que, dado o interesse dos estudantes pelo assunto, havia por parte deles maior disposição do que a cotidiana, para assimilar o conteúdo.

6.4.5 Relatório da Aula 5

Durante a **dinâmica 5**, poucos estudantes apresentaram dificuldades para calcular os payoffs esperados do perfil de estratégias mistas dado e, em todas as turmas, vários estudantes alegaram que procurar a esmo por uma estratégia mista mais vantajosa para algum dos jogadores não era um método eficiente de atender ao pedido da dinâmica. Após explicado o que é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas e como encontrá-lo, a maioria dos estudantes teve dificuldade em demonstrar que o perfil dado na dinâmica era um equilíbrio de Nash do jogo Dois Túneis. Em todas as turmas, foram necessárias intervenções do educador para auxiliar os estudantes a cumprirem tal tarefa. Em geral, os estudantes apresentaram grande dificuldade em construir e interpretar os gráficos que auxiliam a encontrar um equilíbrio de Nash em estratégias mistas, com especial dificuldade nas curvas de melhor resposta. Tais dificuldades repercutiram na atividade de verificação de aprendizagem, como veremos a seguir.

6.4.6 Relatório da Atividade de Verificação de Aprendizagem e Aproveitamento

A atividade de verificação de aprendizagem e aproveitamento, aplicada ao final da oficina, constou de sete questões, detalhadas a seguir, juntamente com a quantidade e porcentagem de estudantes que responderam cada questão de forma satisfatória.

Questão 1 - O que é Teoria Econômica dos Jogos?

107 (78,68%) dos estudantes responderam esta questão de forma satisfatória.

Questão 2 - O que são estratégias puras e estratégias mistas?

115 (84,56%) dos estudantes responderam esta questão de forma satisfatória.

Questão 3 - O que é um equilíbrio de Nash?

119 (87,50%) dos estudantes responderam esta questão de forma satisfatória.

Questão 4 - Sistematize e encontre um equilíbrio de Nash no jogo Quiosques de Água de Coco. (Seção 5.0.1 do TCC).

80 (58,82%) dos estudantes concluíram esta questão de forma satisfatória.

Questão 5 - Sistematize e encontre um equilíbrio de Nash no jogo Par ou Impar. (Seção 5.0.3 do TCC).

51 (37,50%) dos estudantes concluíram esta questão de forma satisfatória.

Questão 6 - Conhecer a Teoria Econômica dos Jogos lhe ajudou a compreender melhor a importância de refletir sobre as possíveis reações de todos os envolvidos em uma situação antes de escolher que atitude tomar?

134 (98,53%) dos estudantes responderam esta questão de forma afirmativa.

Questão 7 - Conhecer a Teoria Econômica dos Jogos lhe ajudou de alguma forma a ampliar seus conhecimentos matemáticos?

124 (91,18%) dos estudantes responderam esta questão de forma afirmativa.

Parecer do Educador Sobre a Oficina

Por meio da oficina foi possível identificar estudantes com dificuldades em compreender conceitos, organizar e expor ideias. Tais dificuldades foram novamente identificadas durante a correção das questões 1, 2 e 3. Verificou-se também o alto grau de dificuldade que os estudantes do ensino médio possuem em áreas como probabilidades, interpretação de texto e interpretação gráfica. Que confirma-se pelos baixos índices obtidos nas questões 4 e 5. Considerando as questões de 1 a 5 como de igual peso, tem-se uma média de 94.4 (69,41%) de acertos, o que indica ter havido um bom aproveitamento da oficina, sendo que seus objetivos foram alcançados em uma proporção satisfatória. Quanto às dificuldades percebidas dos estudantes, concluí-se que a oficina serviu de poderosa ferramenta educacional para trabalha-las, dado o grau de interesse e participação dos estudantes. Isto confirma-se pelo alto índice de aprovação da oficina obtido nas questões 6 e 7.

7 Conclusão

Este trabalho apresentou ao leitor os elementos básicos da Teoria Econômica dos Jogos, acessíveis a estudantes do ensino médio, além de sugerir maneiras de se explorar esse conteúdo em sala de aula. Iniciamos com uma breve contextualização histórica da Teoria Econômica dos Jogos; prosseguimos com a apresentação de seus elementos básicos sob a perspectiva das estratégias puras e mistas, expondo em ambos os casos, como se dá a sistematização de um jogo, o que é uma solução de um jogo e como encontrá-las caso existam, apresentando e analisando alguns jogos como Dilema dos Prisioneiros, Três Pontes, Dois Túneis, entre outros; finalizando com uma proposta de oficina matemática sobre Teoria Econômica dos Jogos para estudantes do ensino médio que apresenta, de forma didática e lúdica, tudo o que foi previamente exposto no TCC.

Concluímos que, apesar do alto grau de complexidade que a Teoria Econômica dos Jogos pode alcançar e do fato de que, em geral, este conteúdo atualmente é ministrado apenas em cursos universitários é possível apresentá-lo a estudantes do ensino médio, desde que resguardado o devido zelo por manter o assunto dentro do escopo de conhecimento dos mesmos. O estudo da Teoria Econômica dos Jogos ministrado em turmas do ensino médio dá ao professor uma nova estratégia para despertar em seus estudantes o interesse pela matemática, possibilitando aos mesmos a oportunidade de reforçar e desenvolver seus conhecimentos sobre certos conteúdos matemáticos como probabilidades, expressões numéricas, interpretação de textos e gráficos, entre outros, por meio de uma nova área do saber.

Referências

[1] SARTINI, B. A,; GARBUGIO, G.;BORTOLOSSI, H. J.; SANTOS, P. A.; BARRETO, L. S. *Uma Introdução a Teoria dos Jogos.* II Bienal da SBM, Universidade Federal da Bahia, 25 a 29 de outubro de 2004.

[2] ALMEIDA, A. N. *Teoria dos Jogos: As Origens e os Fundamentos da Teoria dos Jogos.* UNIMESP - Centro Universitário Metropolitano de São Paulo, Novembro/2006.

[3] PEREIRA, S. B. *Introdução à Teoria dos Jogos e a Matemática no Ensino Médio.* Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 11 de setembro de 2014.

[4] FIANI, R. *Teoria dos Jogos.* Editora Campus, 2004, 232p.

[5] ABRANTES, M. L. *A Teoria dos Jogos e os Oligopólios [abordagem].* Multitema, dezembro de 2004, 1º edição, 120p.

[6] NEUMANN, J. V.; MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.

[7] CORREA, N. *Esqueceram de Combinar Com o Lewis*. Blog: Pô, Meu!. Disponível em: <http://pomeu.com/automobilismo/esqueceram-de-combinar-com-o-lewis/>. Acesso em: 08/12/2016

[8] SANTOS, C. P.; NETO J. P.; SILVA J. N. *Coleção Jogos Com História: John Conway + Ouri*. Edimpresa, 2007