UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Márcio André dos Santos

Os Teoremas das Panquecas e a divisão de figuras planas em regiões de mesma área.

Ouro Preto

2017

MÁRCIO ANDRÉ DOS SANTOS

Os Teoremas das Panquecas e a divisão de figuras planas em regiões de mesma área.

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como exigência parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira.
Co-Orientador: Prof. Dr. Eder Marinho Martins.

Ouro Preto
2017

S591t Santos, Márcio André dos.
Os teoremas das panquecas e a divisão de figuras planas em regiões de mesma área [manuscrito] / Márcio André dos Santos. - 2017.
53f.: il.: grafs.

Orientador: Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira.
Coorientador: Prof. Dr. Eder Marinho Martins.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.
Área de Concentração: Matemática com oferta nacional.

1. Teorema do valor médio (Cálculo). 2. Geometria. 3. Matemática (Ensino médio). I. Ferreira, Wenderson Marques. II. Martins, Eder Marinho. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Titulo.

CDU: 51:37

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

Ministério da Educação
Universidade Federal de Ouro Preto
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
ICEB - Campus – Morro do Cruzeiro
Ouro Preto – MG – CEP 35.400-000
Fone: (031) 3559 - 1629
E-mail: profmat@iceb.ufop.br

"Os Teoremas das Panquecas e a divisão de figuras planas em regiões de mesma área"

Autor: Márcio André dos Santos

Dissertação defendida e aprovada, em 14 de Julho de 2017, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Professor Dr. Wenderson Marques Ferreira
Universidade Federal de Ouro Preto

Viviane Pardini Valério

Professora Dra. Viviane Pardini Valério
Universidade Federal de São João Del Reí

Professor Dr. Eder Marinho Martins
Universidade Federal de Ouro Preto

Geraldo César G. Ferreira

Professor Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira
Universidade Federal de Ouro Preto

À minha mãe (in memoriam), Maria Zita dos Santos, base do meu existir e inspiração para o meu prosseguir.

Agradecimentos

A Deus, por ter ouvido as minhas preces, ter me dado persistência e saúde e por ter me capacitado para chegar até aqui.

À minha mãe, Maria Zita dos Santos, grande exemplo de pessoa que trago comigo.

Aos meus irmãos: Davi, Gilson, Patrícia, Reinaldo e Teodolino, pelo incentivo e torcida.

Ao professor e orientador Wenderson Marques Ferreira, pelos ensinamentos, pela humildade, por ter acreditado em mim, pela paciência e pelo compromisso.

A todos os colegas da minha turma, pelas trocas de experiências de vida.

À UFOP, pela oportunidade de cursar um Mestrado de qualidade e tão perto de casa.

A todos os professores do Mestrado que contribuíram para minha formação profissional.

Ao IFMG, por me permitir não lecionar nos dias em que eu tinha aulas no Mestrado.

E a todos que sinceramente torceram para que tudo desse certo.

Resumo

Neste trabalho, abordaremos o Teorema do Valor Intermediário, estabeleceremos sua demonstração, analisaremos sua geometria, mostraremos sua equivalência com o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o aplicaremos para a obtenção do Primeiro e do Segundo Teoremas das Panquecas, estabelecendo sua demonstração rigorosa e abordando uma atividade didática, na qual utilizaremos o programa *Geogebra*, que os envolva. No decorrer do trabalho, serão apresentados resultados auxiliares como a definição do conceito de Ponto Fixo, o Teorema de Borsuk-Ulam e também serão utilizados diversos conceitos de matemática de domínio dos alunos do Ensino Médio como áreas de figuras planas, congruência e semelhança de triângulos, ângulos determinados por um feixe de retas paralelas e por uma transversal, lei dos cossenos, inequações modulares, sistema de coordenadas dentre outros. A abordagem geométrica apresentada nas demonstrações e o fácil entendimento da geometria dos principais resultados nos indica possibilidades de utilizá-los como incentivo à curiosidade dos alunos do Ensino Básico em relação à Matemática e também de permitir aos professores que vejam aplicações de alguns dos conceitos que lecionam em demonstrações rigorosas de Teoremas Matemáticos.

Palavras-chave: Teorema do Valor Intermediário, Primeiro Teorema das Panquecas, Segundo Teorema das Panquecas.

Abstract

In this work, we will stablish and prove the Intermediate Value Theorem, analyze its geometry, and show the equivalence between this Theorem and Brouwer's Fixed-Point Theorem. We will obtain, as a consequence, the First and the Second Pancake Theorems, stablishing its rigorous demonstration and approaching a didactic activity, using Geogebra, involving those results. In the course of the work, auxiliary results will be necessary as the Fixed Point concept, the Borsuk-Ulam's Theorem, and several High School Math topics as areas of flat figures, congruence and similarity of triangles, angles determined by a beam of parallel lines and by a transversal, law of cosines, modular inequalities, coordinate system, among others. The geometric approach presented in the demonstrations and the easy geometric understanding of the main results can indicate possibilities of using these results as a stimulus to the curiosity of students in Middle and High Schooll in relation to Math and also show teachers some applications of topics they teach in rigorous demonstrations of Mathematical Theorems.

Keywords: Intermediate Value Theorem, First Pancake Theorem, Second Pancake Theorem.

Conteúdo

1 Introdução

Neste trabalho, abordaremos o Teorema do Valor Intermediário e algumas de suas consequências: os Teoremas das Panquecas. Pretendemos abordar tanto as demonstrações formais que estabelecem tais Teoremas (que utilizam conceitos de Ensino Superior), quanto a geometria envolvida neles, enfatizando seu grande apelo geométrico (que pode ser explorado mesmo por alunos do Ensino Médio).

Para alcançar esse objetivo, partimos de um conceito muito simples: o conceito de ponto fixo. Tal conceito será fundamental em nosso texto e pode ser compreendido por todos que tenham noção do conceito de função. Abordaremos formalmente tal conceito e apresentaremos diversos exemplos. Tal conceito pode ser abordado pelos professores do Ensino Médio, que podem aproveitá-lo para revisar conceitos matemáticos como função, composição de funções, crescimento e decrescimento, funções pares e ímpares, funções inversas, equações, sistemas de equações e iniciá-los no processo de demonstração matemática (veja Capítulo 2).

O Capítulo 3 aborda conceitos mais relacionados à Análise Matemática. Nesse Capítulo, são feitas as demonstrações do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e do Teorema do Valor Intermediário (essas demonstrações exigem conceitos tais como função contínua, intervalos encaixantes, supremo, ínfimo, conjunto aberto, conjuntos fechados, limite de sequências, cisão e proposições/teoremas relacionados). Apresentaremos também a demonstração da equivalência entre estes dois resultados, o que, em geral, não é abordado em alguns dos livros de Análise Matemática mais utilizados nas graduações do país. Embora se trate de um resultado mais formal, não abriremos mão da exploração da geometria envolvida nas demonstrações.

No Capítulo 4, veremos três aplicações do Teorema do Valor Intermediário na Geometria Plana, a saber: o Teorema de Borsuk-Ulam, o Primeiro Teorema das Panquecas e o Segundo Teorema das Panquecas. Os nomes destes dois últimos teoremas remetem à divisão de figuras planas (panquecas) em figuras de áreas iguais utilizando apenas linhas retas (as facas que cortam as panquecas). Nas demonstrações desses teoremas, veremos a importância de conceitos trabalhados no Ensino Médio tais como cálculo de área, congruência e semelhança de triângulos, ângulos determinados por um feixe de retas paralelas e por uma transversal, inequações modulares, lei dos cossenos, propriedades dos triângulos, sistema de coordenadas etc. A parte mais formal das demonstrações também envolverá conceitos de continuidade, vistos nos cursos de Análise.

No Capítulo 5, apresentaremos uma atividade exploratória dos resultados vistos no Capítulo 4, na qual utilizaremos o *Software Geogebra*. Tal atividade pode ser desenvolvida com alunos do Ensino Médio, bem como com alunos de cursos superiores, em especial aqueles ligados à formação de professores de Matemática.

A bibliografia básica utilizada neste trabalho foram os livros [2] e [7] , nos quais nos baseamos para desenvolvermos os capítulos 3 e 4. Os conceitos de Análise Matemática utilizados baseiam-se principalmente em [4] e [5].

2 Pontos Fixos

Neste capítulo, apresentaremos a definição de ponto fixo e veremos exemplos de como encontrá-lo(s) algebricamente e geometricamente. Utilizaremos principalmente a referência [5].

Definição 2.0.1. *Seja $\mathbb{X}$ um conjunto não vazio e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ uma função dada. Dizemos que um elemento $x_0 \in \mathbb{X}$ é um ponto fixo de f se $f(x_0) = x_0$.*

2.1 Exemplos

Nesta seção, veremos exemplos que ilustram a existência ou não de pontos fixos para algumas funções trabalhadas no Ensino Médio.

Exemplo 2.1.1. *0 e 1 são os únicos pontos fixos da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, pois 0 e 1 são as únicas soluções da equação $x^2 = x$ e pertencem a $\mathbb{R}$.*

Exemplo 2.1.2. *$\dfrac{1}{3}$ é o único ponto fixo da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2x+1$, pois $\dfrac{1}{3}$ é a única solução real da equação $-2x+1 = x$.*

Exemplo 2.1.3. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x+1$ não possui ponto fixo, pois a equação $x+1 = x$ não tem solução.*

Exemplo 2.1.4. *Todo $x \geq 0$ é ponto fixo da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$, pois todo número real não negativo é solução da equação $|x| = x$.*

Para os próximos exemplos precisaremos das definições de função par e de função ímpar apresentadas a seguir:

Definição 2.1.1. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo com centro 0. Dizemos que a função $f : I \to \mathbb{R}$ é par (respectivamente ímpar) se $f(x) = f(-x)$ (respectivamente se $f(x) = -f(-x)$) para todo $x \in I$.*

Exemplo 2.1.5. *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par e $x_0 \neq 0$ um ponto fixo de f, então $-x_0$ não é ponto fixo de f.*

Prova.

Por hipótese $f(x_0) = x_0$. Agora suponha, por absurdo, que -x_0 seja ponto fixo de f, ou seja,

$$f(-x_0) = -x_0.$$

Também por hipótese f é uma função par, isto é, $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular $f(-x_0) = f(x_0)$, então temos $-x_0 = x_0$, implicando em $x_0 = 0$, o que é uma contradição. Logo $-x_0$ não é ponto fixo de f. □

Exemplo 2.1.6. *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar e x_0 um ponto fixo de f, então -x_0 também é ponto fixo de f.*

Prova.

Como, por hipótese, f é uma função ímpar, temos $f(x_0) = -f(-x_0)$. Por outro lado, também por hipótese, $f(x_0) = x_0$. Então temos

$$-f(-x_0) = x_0 \Rightarrow f(-x_0) = -x_0,$$

isto é, $-x_0$ é ponto fixo de f. □

2.2 Observações

Observação 2.2.1. *De acordo com a Definição 2.0.1, se queremos determinar algebricamente o(s) ponto(s) fixo(s) de uma função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, basta encontrarmos o conjunto solução da equação $f(x) = x$ e, em seguida, fazer a interseção desse conjunto com o conjunto $\mathbb{X}$. Isto é o que fizemos para os quatro primeiros exemplos anteriores.*

Observação 2.2.2. *Se queremos determinar geometricamente o(s) ponto(s) fixo(s) de uma função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, basta encontrarmos a abscissa ou a ordenada do ponto de interseção dos gráficos de f e de $g : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ dada por $g(x) = x$.*
De fato:

Primeiramente, note que dado $x_0 \in \mathbb{X}$, então A = $(x_0, f(x_0))$ pertence ao gráfico de f e B = $(x_0, g(x_0))$ pertence ao gráfico de g. Por outro lado, se x_0 for ponto fixo de f, teremos $f(x_0) = x_0$. Além disso, pela definição de g, temos $g(x_0) = x_0$. Portanto A = B= (x_0, x_0) pertence aos gráficos de f e de g.

Por último, repare que se $(x_0, f(x_0))$ pertence ao gráfico de g, então x_0 é ponto fixo de f.

Veja, a seguir, os gráficos ilustrando a aplicação dessa Observação aos Exemplos 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 e 2.1.4 anteriores.

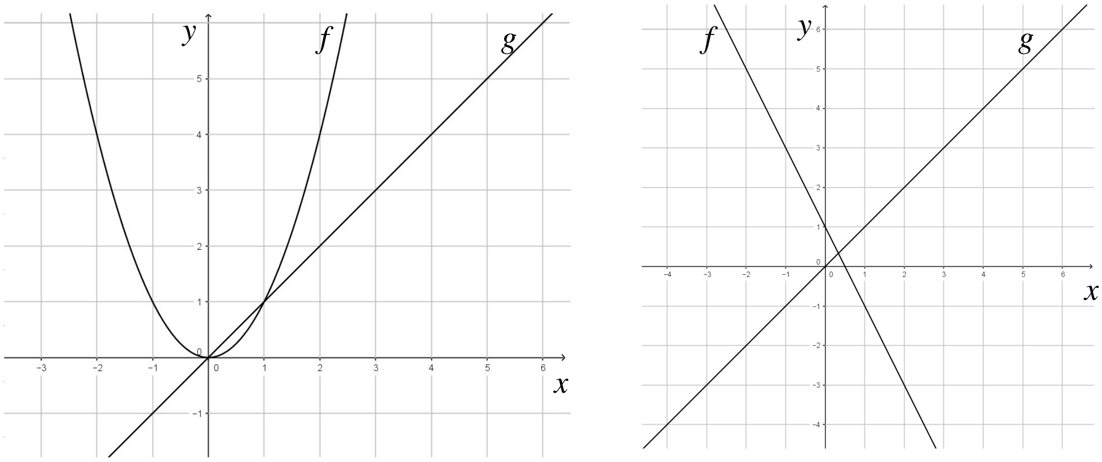

Figura 2.1: Gráficos referentes aos Exemplos 2.1.1 e 2.1.2

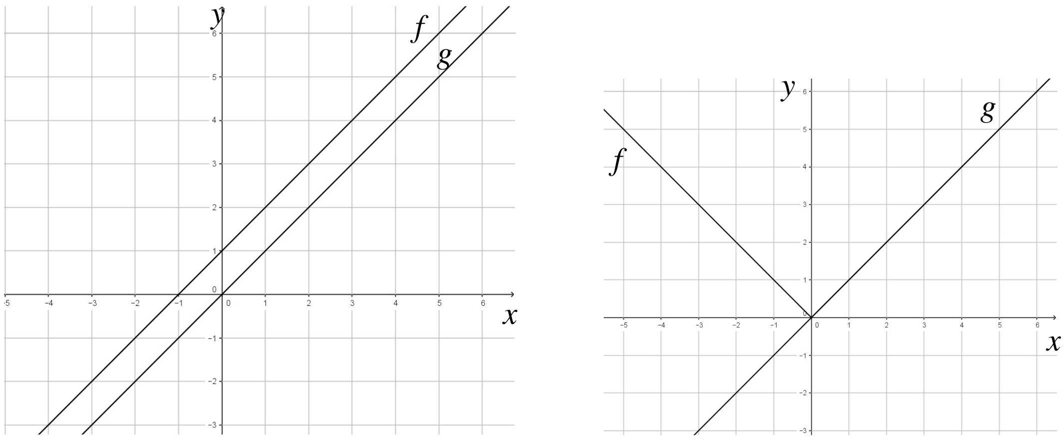

Figura 2.2: Gráficos referentes aos Exemplos 2.1.3 e 2.1.4

Observação 2.2.3. *Vê-se que podemos estender a Definição 2.0.1, da seguinte forma: Sejam* $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$ *conjuntos não vazios e* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *uma função dada. Dizemos que um elemento* $x_0 \in \mathbb{X} \cap \mathbb{Y}$ *é um ponto fixo de* f *se* $f(x_0) = x_0$.
Com essa definição, podemos mostrar os seguintes resultados:
1. *Sejam* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *e* $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$ *funções. Se* x_0 *é um ponto fixo de* f *e de* g*, então* x_0 *é ponto fixo de* $gof : \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$*, isto é,* $x_0 \in \mathbb{X} \cap \mathbb{Z}$ *e* $gof(x_0) = x_0$.

Demonstração:

Por hipótese x_0 é ponto fixo de f e de g. Então temos: $a)$ $x_0 \in \mathbb{X} \cap \mathbb{Y}$ e $f(x_0) = x_0$. $b)$ $x_0 \in \mathbb{Y} \cap \mathbb{Z}$ e $g(x_0) = x_0$ donde se vê que $x_0 \in \mathbb{X} \cap \mathbb{Z}$. Além disso, por definição, $gof(x_0) = g(f(x_0))$. Então, de acordo com o item $a)$, $gof(x_0) = g(x_0)$. Por $b)$, $gof(x_0) = x_0$. Portanto x_0 é ponto fixo de gof. □

2. *Sejam $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma função bijetora e $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ sua inversa. Se x_0 é ponto fixo de f, então x_0 é também ponto fixo de g.*

Demonstração:

Por hipótese $x_0 \in \mathbb{X} \cap \mathbb{Y}$ e $f(x_0) = x_0$. Então, pela definição de função inversa, $g(x_0) = x_0$, isto é, x_0 é ponto fixo de g. □

Para terminar esse capítulo, façamos o seguinte exercício:

Exercício 2.2.1. *Sendo $f : [2, +\infty) \to [1, +\infty)$ a função dada por $f(x) = x^2 - 4x + 5$, pede-se:*

1. Prove que f é uma função bijetora.

Resolução:

Primeiramente mostremos que f é uma função injetora, isto é, provemos que se $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$, com $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$.

Sejam $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ e suponhamos $f(x_1) = f(x_2)$. Então

$$x_1^2 - 4x_1 + 5 = x_2^2 - 4x_2 + 5,$$

implicando em

$$x_1^2 - 4x_1 = x_2^2 - 4x_2.$$

Portanto, temos que

$$(x_1 - 2)^2 - 4 = (x_2 - 2)^2 - 4,$$

e consequentemente

$$(x_1 - 2)^2 = (x_2 - 2)^2.$$

Desta forma, temos que

$$x_1 - 2 = x_2 - 2 \text{ ou } x_1 - 2 = -x_2 + 2.$$

Finalmente temos

$$x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 - 2 = -x_2 + 2.$$

Assim só falta mostrar que se $x_1 - 2 = -x_2 + 2$, então $x_1 = x_2$.

Como $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$, então:

$a)$ $x_1 \geq 2 \Rightarrow x_1 - 2 \geq 0$, isto é, $x_1 - 2$ é um número positivo ou nulo.

$b)$ $x_2 \geq 2 \Rightarrow -x_2 \leq -2 \Rightarrow -x_2 + 2 \leq 0$, isto é, $-x_2 + 2$ é um número negativo ou nulo.

Portanto, como estamos supondo $x_1 - 2 = -x_2 + 2$, ambos devem ser nulos, isto é, $x_1 - 2 = 0$ e $-x_2 + 2 = 0$, implicando em $x_1 = x_2 = 2$. Donde se vê que $x_1 = x_2$ e está provado que f é uma função injetora.

Agora mostremos que f é uma função sobrejetora, isto é, para todo $y \in [1, +\infty)$, existe $x \in [2, +\infty)$ tal que $f(x) = y$.

Dado $y \in [1, +\infty)$, tome $x = 2 + \sqrt{y-1}$. Como $x \in [2, +\infty)$ e f é definida neste intervalo, temos:

$$f(x) = (2 + \sqrt{y-1})^2 - 4 \cdot (2 + \sqrt{y-1}) + 5.$$

Portanto

$$f(x) = 4 + 4 \cdot \sqrt{y-1} + y - 1 - 8 - 4 \cdot \sqrt{y-1} + 5,$$

e, finalmente, $f(x) = y$. Logo está provado que f é uma função sobrejetora.

2. Determine um ponto comum aos gráficos de f e f^{-1}.

Resolução:

Primeiramente determinaremos $f^{-1}(x)$.

Temos que $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Completando quadrado, obtemos

$$f(x) = (x-2)^2 + 1,$$

donde

$$(x-2)^2 = f(x) - 1.$$

Por outro lado $f(x) - 1 \geq 0$, pois $f(x) \in [1, +\infty)$, então

$$x - 2 = \pm\sqrt{f(x) - 1},$$

isto é,

$$x = 2 \pm \sqrt{f(x) - 1}.$$

Como $x \in [2, +\infty)$, então

$$x = 2 + \sqrt{f(x) - 1}.$$

Portanto, de acordo com a definição de função inversa,

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x - 1}.$$

Agora resolveremos o sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \text{ se } x \geq 2, \\ y = 2 + \sqrt{x-1} \text{ se } x \geq 1. \end{cases}$$

Donde se vê que:

$$x^2 - 4x + 5 = 2 + \sqrt{x - 1},$$

ou seja,

$$x^2 - 4x + 3 = \sqrt{x - 1},$$

isto é,

$$(x^2 - 4x + 3)^2 = (x - 1),$$

ou equivalentemente,

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 25x + 10 = 0.$$

Então teremos que resolver uma equação do 4º grau completa[1], o que nem sempre é fácil. Pensemos, então, em outra alternativa.

Vejamos se f possui ponto fixo.

De acordo com as Observações 2.2.1 e 2.2.3, devemos resolver a equação:

$$x^2 - 4x + 5 = x,$$

[1]para a resolução de equação do quarto grau, pesquise sobre o método de Ferrari.

isto é,

$$x^2 - 5x + 5 = 0$$

(equação do 2º grau completa, mas muito mais fácil de ser resolvida do que a equação do 4º grau anteriormente obtida) e, em seguida, fazermos a interseção do seu conjunto solução $\mathbb{S}$ com o conjunto $([2,+\infty) \cap [1,+\infty)) = [2,+\infty)$.

Completando quadrado ou usando a fórmula de Bhaskara, temos $\mathbb{S} = \left\{ \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \right\}$.

Como $[2,+\infty) \cap \mathbb{S} = \left\{ \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \right\}$, segue-se então que $\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ é o único ponto fixo de f. Fazendo

$$\frac{5+\sqrt{5}}{2} = x_0$$

e usando o resultado 2 da Observação 2.2.3, temos que x_0 também é ponto fixo de f^{-1}. Então (x_0, x_0) pertence aos gráficos de f e f^{-1}, pois $(x_0, f(x_0))$ pertence ao gráfico de f, $(x_0, f^{-1}(x_0))$ pertence ao gráfico de f^{-1} e $f(x_0) = x_0 = f^{-1}(x_0)$.

Portanto $\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \right)$ é um ponto comum aos gráficos de f e f^{-1} e está terminada a resolução desse exercício.

Por fim, note que a resolução da questão anterior, suscita, no mínimo, duas perguntas:

Questão 1. *Se a interseção dos gráficos de f e f^{-1} não for vazia, então f sempre possui ponto fixo?*

A resposta é não. Veja o seguinte contra-exemplo: Dada a função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, definida conforme Figura 2.3, temos que:

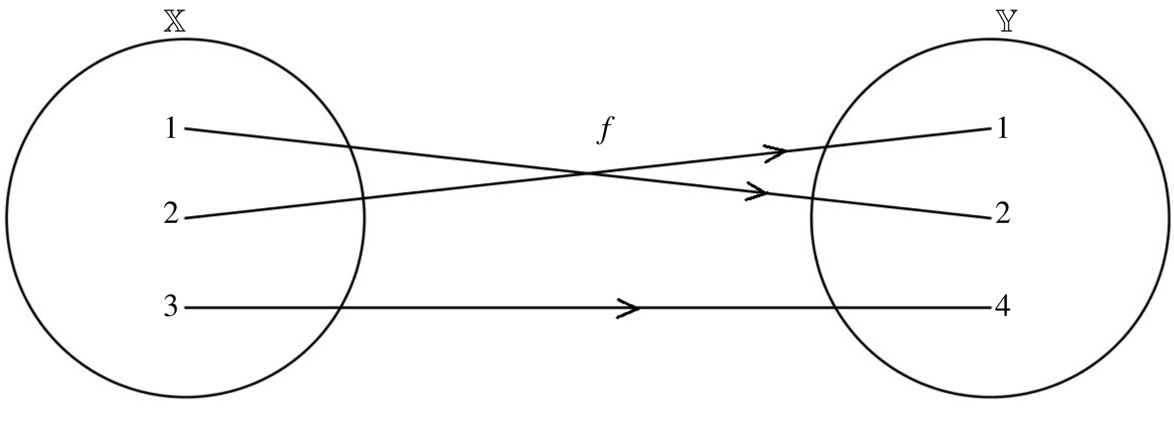

Figura 2.3: Função definida por diagrama de flechas

a) O conjunto $\{(1,2),(2,1),(3,4)\}$ é o gráfico da função f e o conjunto $\{(1,2),(2,1),(4,3)\}$ é o gráfico da função f^{-1}.

b) A interseção dos gráficos de f e f^{-1} não é vazia, no entanto f não tem ponto fixo.

Questão 2. *Existem condições para que, sendo a interseção dos gráficos de f e f^{-1} não vazia, f tenha ponto fixo?*

Uma condição suficiente é que f deve ser crescente ou decrescente (Note que a função desse exercício é crescente, enquanto a função do diagrama acima não é crescente e nem decrescente).

Prova.

Sejam $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma função crescente (o caso em que f é decrescente se prova de forma análoga) e $f^{-1} : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ sua função inversa. Como a interseção dos gráficos de f e f^{-1} é não vazia, então existe $x_0 \in \mathbb{X} \cap \mathbb{Y}$ tal que $(x_0, f(x_0)) = (x_0, f^{-1}(x_0))$, donde $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$.

Agora, suponhamos, por absurdo, que x_0 não seja ponto fixo de f, isto é, $f(x_0) \neq x_0$. Então há duas possibilidades: ou $f(x_0) > x_0$ ou $f(x_0) < x_0$.

Se:

$1)$ $f(x_0) > x_0$, temos que $f^{-1}(f(x_0)) > f^{-1}(x_0)$, pois f^{-1} também é crescente (veja, a seguir, o Lema 2.2.1) e portanto $x_0 > f(x_0)$, o que é um absurdo.

$2)$ $f(x_0) < x_0$, segue-se que $f^{-1}(f(x_0)) < f^{-1}(x_0)$, pois, como mencionado no item anterior, f^{-1} é crescente, e consequentemente $x_0 < f(x_0)$, o que também é um absurdo.

Portanto x_0 deve ser ponto fixo de f. $\square$

Lema 2.2.1. *Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ uma função bijetora. Se f for uma função crescente, $f^{-1} : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ também será uma função crescente.*

Prova.

Sejam $y_1, y_2 \in \mathbb{Y}$. Como f é uma função bijetora, existem únicos $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ de forma que:

i) $y_1 = f(x_1) \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) = x_1$.

ii) $y_2 = f(x_2) \Leftrightarrow f^{-1}(y_2) = x_2$.

Agora supondo $y_1 < y_2$, temos, por $i)$ e $ii)$, que $f(x_1) < f(x_2)$. Então, como f é uma função crescente, $x_1 < x_2$, e portanto, também por $i)$ e $ii)$, $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. $\square$

3 Equivalência entre o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema do Valor Intermediário

Neste Capítulo, mostraremos a equivalência entre o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema do Valor Intermediário.

Conforme mencionado na introdução desta dissertação, alguns livros de análise sequer mencionam esta equivalência. Outros comentam, mas demonstram apenas uma das 2 implicações da equivalência (às vezes deixando a outra como exercício).

Inicialmente apresentaremos as definições de função contínua e de propriedade do valor intermediário de uma função, e mostraremos alguns exemplos. Faremos a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e a do Teorema do Valor Intermediário e finalmente demonstraremos a equivalência citada acima.

3.1 Continuidade e Propriedade do Valor Intermediário

Definição 3.1.1. *Uma função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in \mathbb{X}$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in \mathbb{X}$ e $|x - x_0| < \delta$, então $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

Definição 3.1.2. *Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f possui a propriedade do valor intermediário se, para todo $[a,b] \subset \mathbb{X}$ e todo y_o pertencente ao intervalo fechado de extremidades $f(a)$ e $f(b)$, existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $y_0 = f(x_0)$.*

3.2 Exemplos

Nesta seção, relacionaremos algumas funções vistas no Ensino Médio com as Definições 3.1.1 e 3.1.2.

Exemplo 3.2.1. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$ é contínua em qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$ e possui a propriedade do valor intermediário.*

Vejamos porque:

1. *Continuidade: Dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = 2\varepsilon$.*
   De fato: Supondo $x_0 \in \mathbb{R}$ e $|x - x_0| < \delta$, temos que $|x - x_0| < 2\varepsilon$, isto é, $\left|\dfrac{x}{2} - \dfrac{x_0}{2}\right| < \varepsilon$, ou seja, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, o que satisfaz a Definição 3.1.1.

2. *Propriedade do valor intermediário: Para todo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e todo y_o pertencente ao intervalo fechado de extremidades $f(a)$ e $f(b)$, tome $x_0 = 2(y_0 - 1)$.*
   De fato: Nesse caso o intervalo fechado de extremidades $f(a)$ e $f(b)$ é $\left[\frac{a}{2}+1, \frac{b}{2}+1\right]$.
   Donde $\frac{a}{2}+1 \leq y_0 \leq \frac{b}{2}+1$, ou seja, $a \leq 2(y_0-1) \leq b$, isto é, $x_0 \in [a,b]$. Além disso $f(x_0) = y_0$, satisfazendo a Definição 3.1.2.

Exemplo 3.2.2. *A função $f : \{1,2\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(1) = 2$ e $f(2) = 3$ é contínua em $x_0 = 1$.*

Por que?

Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \frac{1}{2}$. Como o único $x \in \{1,2\}$ que satisfaz $|x-1| < \delta$ é $x = 1$, teremos $|f(x) - f(1)| = |f(1) - f(1)| = 0 < \varepsilon$, donde se vê que f é contínua em $x_0 = 1$.

De forma análoga se mostra que f é contínua em $x_0 = 2$.

Note que o gráfico de f é um conjunto com apenas dois pontos do plano.

Exemplo 3.2.3. *A função $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } \ 1 \leq x \leq 2, \\ 2x-1 & \text{se } \ 2 < x \leq 3, \end{cases}$$

não possui a propriedade do valor intermediário, pois $[2,3] \subset [1,3]$, $y_0 = \frac{5}{2} \in [f(2), f(3)]$, mas não existe $x_0 \in [2,3]$ tal que $\frac{5}{2} = f(x_0)$.

Veja, na Figura 3.1, o gráfico de f.

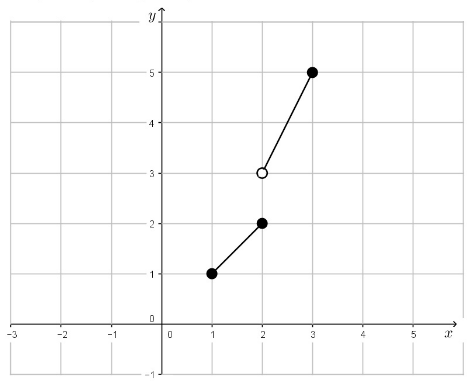

Figura 3.1: Gráfico referente ao Exemplo 3.2.3

3.3 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema do Valor Intermediário

Vejamos agora um dos principais resultados do nosso trabalho. A demonstração, a seguir, foi baseada principalmente em [7].

Teorema 3.3.1 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer)**.** *Seja $f : [a,b] \to [a,b]$ uma função contínua. Então f possui ponto fixo.*

Prova.

Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, o teorema está provado. Caso contrário $f(a) > a$ e $f(b) < b$, isto é, como o domínio e o contradomínio de f são $[a,b]$, a imagem de a situa-se à direita de a e a imagem de b, à esquerda de b. Faça $I_0 = [a,b]$ e c_1, o seu ponto médio.

Se $f(c_1) = c_1$, o teorema está provado. Caso contrário, teremos dois subintervalos, $[a,c_1]$ e $[c_1,b]$, e a imagem de c_1 estará ou à esquerda ou à direita de c_1. Se $f(c_1)$ pertencer ao intervalo $[a,c_1]$, então $f(a) > a$ e $f(c_1) < c_1$, pois estamos supondo que a e c_1 não são pontos fixos. Se $f(c_1)$ pertencer ao intervalo $[c_1,b]$, então $f(c_1) > c_1$ e $f(b) < b$, pois estamos supondo que c_1 e b não são pontos fixos. Assim, independentemente a qual desses subintervalos pertença a imagem de c_1, temos que a imagem da extremidade esquerda está à sua direita e a imagem da extremidade direita, à sua esquerda. Faça I_1 igual ao subintervalo ao qual pertence $f(c_1)$ e, em seguida, tome c_2, o seu ponto médio.

Se $f(c_2) = c_2$, o teorema está provado. Caso contrário teremos novamente dois subintervalos, escolha o subintervalo ao qual pertence $f(c_2)$ e proceda como no caso anterior. Continuando esse processo nós encontraremos um ponto fixo após um número finito de passos ou obteremos uma sequência infinita $\{I_0, I_1, I_2, ..., I_n, ...\}$ de intervalos fechados e encaixados, para os quais a imagem da extremidade esquerda está à sua direita e a imagem da extremidade direita, à sua esquerda.

Como esses intervalos encaixados têm comprimento tendendo a zero, à medida que n cresce indefinidamente, existe um único x_0 pertencente a todos eles (cf. Lema 2.23, na pág. 85 em [5] ou Lema 6.1.1, no apêndice desta dissertação).

Provemos que $f(x_0) = x_0$.
De fato:

Suponha por absurdo que $y_0 = f(x_0) \neq x_0$. Sem perda de generalidade, consideremos $x_0 < y_0$, conforme Figura 3.2.

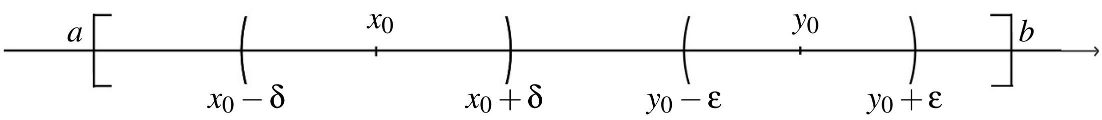

Figura 3.2: Construção utilizada na demonstração do Teorema 3.3.1

Como f é contínua em x_0, dado $\varepsilon > 0$, existe uma δ-vizinhança adequada de x_0 tal que todos os seus pontos têm as suas imagens pertencentes a ε-vizinhança de y_0, isto é, a imagem por f de cada ponto da δ-vizinhança de x_0 está à sua direita. Por outro lado para n suficientemente grande I_n está contido na δ-vizinhança de x_0. Por isso a imagem de cada ponto extremo de I_n está à sua direita, o que é um absurdo, pois, pela construção de I_n, a imagem da extremidade esquerda deveria está à sua direita e a imagem da extremidade direita, à sua esquerda. Portanto $f(x_0) = x_0$. $\square$

Teorema 3.3.2 (Teorema do Valor Intermediário)**.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < c < f(b)$ ou $f(b) < c < f(a)$, então existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = c$.*

Em outras palavras f possui a propriedade do valor intermediário.

Prova.

Consideremos os conjuntos $A = \{x \in [a,b]; f(x) \leq c\}$ e $B = \{x \in [a,b]; f(x) \geq c\}$. Pelo Corolário 2 do Teorma 1 do Capítulo 7 de [4] (cf. Corolário 6.1.1.1 e Teorema 6.1.1, no apêndice), A e B são conjuntos fechados, isto é, $A = \bar{A}$ e $B = \bar{B}$. Logo $\bar{A} \cap B = A \cap B = A \cap \bar{B}$. Além disso $[a,b] = A \cup B$. Por outro lado, sabemos que ou $A \cap B = \emptyset$ ou $A \cap B \neq \emptyset$.

Afirmamos que não ocorre $A \cap B = \emptyset$. Se fosse $A \cap B = \emptyset$, então $[a,b] = A \cup B$ seria uma cisão não trivial (visto que $a \in A$ e $b \in B$), o que pelo Teorema 5 do Capítulo 5 de [4] (cf. Teorema 6.1.2, no apêndice) é impossível. Logo $A \cap B \neq \emptyset$ e, assim sendo, existe $x_0 \in A \cap B$ e portanto $f(x_0) = c$. $\square$

Finalmente vejamos a demonstração da equivalência entre o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema do Valor Intermediário proposta no início desse capítulo.

Teorema 3.3.3 (Equivalência entre o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema do Valor Intermediário)**.** *O Teorema do Valor Intermediário é uma consequência do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e vice-versa.*

Prova.

Inicialmente provaremos o Teorema do Valor Intermediário para o caso especial em que $c = 0$, o que acarreta termos, por hipótese, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $f(a) < 0 < f(b)$ e termos que provar que existe x_0 pertencente ao intervalo (a,b) tal que $f(x_0) = 0$.

Considere a função F de domínio $[a,b]$ e dada por $F(x) = \lambda f(x) + x$, sendo $\lambda \neq 0$ escolhido de forma que as imagens de F pertençam ao intervalo $[a,b]$. Note que F é uma função contínua, pois é a soma de funções contínuas. Além disso λ deve ser negativo, pois:

i) $F(a) \geq a \Rightarrow \lambda f(a) + a \geq a \Rightarrow \lambda f(a) \geq 0 \Rightarrow \lambda < 0$, pois sabemos que $\lambda \neq 0$ e $f(a) < 0$.

ii) $F(b) \leq b \Rightarrow \lambda f(b) + b \leq b \Rightarrow \lambda f(b) \leq 0 \Rightarrow \lambda < 0$, pois sabemos que $\lambda \neq 0$ e $f(b) > 0$.

Como f é contínua no compacto $[a,b]$, então f é limitada, isto é, existem m e M tais que $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a,b]$. No nosso caso $m < 0$ e $M > 0$.

Como $f(a) < 0$, a continuidade de f implica que $f(x) < 0$ para todo x suficientemente próximo de a. Escolha x_1 tal que $f(x) < 0$ $\forall x \in [a, x_1]$. Em seguida, escolha x_2 tal que $f(x) > 0$ $\forall x \in [x_2, b]$ (veja Figura 3.3).

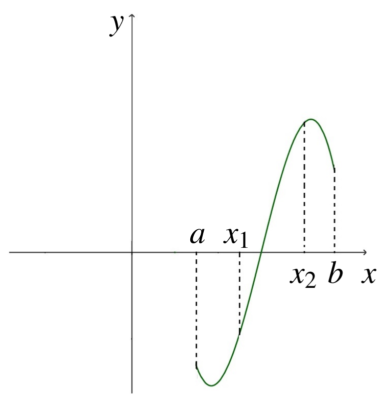

Figura 3.3: Construção utilizada na demonstração do Teorema 3.3.2

Seja
$$\lambda = max\left\{\frac{a-x_1}{M}, \frac{b-x_2}{m}\right\}.$$

Note que λ é negativo.
Mostraremos agora que λ, assim definido, satisfaz $F(x) \geq a$, se $a \leq x \leq b$.
Primeiramente consideremos x tal que $f(x) > 0$:
Temos que:
$i)$ $\lambda \geq \dfrac{a-x_1}{M} \Rightarrow \lambda f(x) \geq \dfrac{a-x_1}{M} f(x) \Rightarrow \lambda f(x) + x \geq \dfrac{a-x_1}{M} f(x) + x \Rightarrow F(x) \geq \dfrac{a-x_1}{-M}(-f(x)) + x.$

$ii)$ $-f(x) \geq -M \Rightarrow \dfrac{a-x_1}{-M}(-f(x)) \geq a-x_1 \Rightarrow \dfrac{a-x_1}{-M}(-f(x)) + x \geq a-x_1+x.$

Assim de $i)$ e $ii)$ temos que $F(x) \geq a-x_1+x$.
Como $f(x) \geq 0$, então a escolha de x_1 implica que $x > x_1$. Daí temos
$$x - x_1 > 0 \Rightarrow x - x_1 > a - a \Rightarrow a - x_1 + x > a.$$

Portanto $F(x) > a$.
Agora consideremos x tal que $f(x) \leq 0$.
Temos que
$$\lambda f(x) \geq 0 \Rightarrow \lambda f(x) + x \geq x.$$
Como $x \geq a$, então $\lambda f(x) + x \geq a$, isto é, $F(x) \geq a$.

Mostraremos também que λ satisfaz $F(x) \leq b$ se $a \leq x \leq b$.
Primeiramente consideremos x tal que $f(x) \geq 0$.
Temos que
$$\lambda f(x) \leq 0 \Rightarrow \lambda f(x) + x \leq x.$$
Como $x \leq b$, então $\lambda f(x) + x \leq b$, isto é, $F(x) \leq b$.
Agora consideremos x tal que $f(x) < 0$.
Temos que:
$i)$ $\lambda \geq \dfrac{b-x_2}{m} \Rightarrow \lambda f(x) \leq \dfrac{b-x_2}{m} f(x) \Rightarrow \lambda f(x) + x \leq \dfrac{b-x_2}{m} f(x) + x \Rightarrow F(x) \leq \dfrac{b-x_2}{-m}(-f(x)) + x.$

$ii)$ $-f(x) \leq -m \Rightarrow \dfrac{b-x_2}{-m}(-f(x)) \leq b-x_2 \Rightarrow \dfrac{b-x_2}{-m}(-f(x)) + x \leq b-x_2+x.$

Assim de $i)$ e $ii)$ temos que $F(x) \leq b-x_2+x$.

Como $f(x) < 0$, então a escolha de x_2 implica que

$$x < x_2 \Rightarrow x - x_2 < 0 \Rightarrow x - x_2 < b - b \Rightarrow b - x_2 + x < b.$$

Portanto $F(x) < b$.
Logo, acabamos de mostrar que F de fato tem as suas imagens pertencentes ao intervalo $[a,b]$, isto é, temos $F : [a,b] \to [a,b]$. Além disso F é contínua, então, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, F possui ponto fixo, isto é, existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $F(x_0) = x_0$. Segue-se, portanto, que
$\lambda f(x_0) + x_0 = x_0 \Rightarrow \lambda f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$, pois $\lambda \neq 0$. Assim, para terminar a demonstração, só falta mostrar que x_0 pertence ao intervalo (a,b), mas isso é trivial, pois, como $f(a) < 0 < f(b)$, $x_0 \neq a$ e $x_0 \neq b$.

Caso $c \neq 0$, teremos, devido às hipóteses do enunciado, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $f(a) < c < f(b)$, donde $f(a) - c < 0 < f(b) - c$. Assim, considerando $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = c$, temos que $h = f - g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $h(a) < 0 < h(b)$. Portanto, pelo caso especial $c = 0$, já provado, existe $F : [a,b] \to [a,b]$ contínua, com ponto fixo x_0, dada por

$$F(x) = \lambda h(x) + x; \;\; \lambda \neq 0.$$

Então

$$h(x_0) = 0,$$

isto é,

$$(f - g)(x_0) = 0,$$

ou seja,

$$f(x_0) - g(x_0) = 0,$$

o que equivale a

$$f(x_0) = g(x_0).$$

Portanto

$$f(x_0) = c.$$

Agora devemos mostrar que, sendo válido o Teorema do Valor Intermediário, uma função $f : [a,b] \to [a,b]$ contínua possui ponto fixo.

Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, não há o que demonstrar.
Caso contrário, $f(a) > a$ e $f(b) < b$, isto é, $f(a) - a > 0$ e
$f(b) - b < 0$, donde $f(b) - b < 0 < f(a) - a$.

Considerando $g : [a,b] \to [a,b]$ dada por $g(x) = x$. Temos que $h : [a,b] \to [a,b]$ dada por $h(x) = f(x) - g(x)$ é uma função contínua, pois h é soma de funções contínuas. Além disso, $h(b) < 0 < h(a)$ e então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $h(x_0) = 0$. Logo

$$f(x_0) - g(x_0) = 0,$$

então

$$f(x_0) - x_0 = 0.$$

Portanto

$$f(x_0) = x_0,$$

isto é, f possui ponto fixo. $\square$

4 Aplicações do Teorema do Valor Intermediário

Neste Capítulo, mostraremos, via Teorema do Valor Intermediário, três teoremas: o Teorema de Borsuk-Ulam, o Primeiro Teorema das Panquecas e o Segundo Teorema das Panquecas. Tais teoremas possuem um apelo geométrico muito forte e, em suas demonstrações, fica claro o uso de conceitos matemáticos estudados nos ensinos fundamental e médio. Embora as demonstrações rigorosas que apresentaremos dependam também de conceitos de matemática do ensino superior, alguns dos resultados em si são bastante intuitivos, evidenciando que rigor e intuição muitas vezes se complementam nas demonstrações matemáticas (cf. em [6]).

4.1 Pontos Antipodais e Coordenada Angular

Nesta seção, vamos definir o que são pontos antipodais e coordenadas angulares.

Dado um círculo C (veja a Figura 4.1), construa o plano cartesiano com origem no centro de C e o círculo unitário C_1. Note que para cada $x \in C$, a semirreta com origem no centro de C, e que contém x, determina em C_1 um único x_1 e vice-versa. Isto é, para cada $x_1 \in C_1$, a semirreta com origem no centro de C e que contém x_1 determina em C um único x.

Assim, temos as seguintes definições:

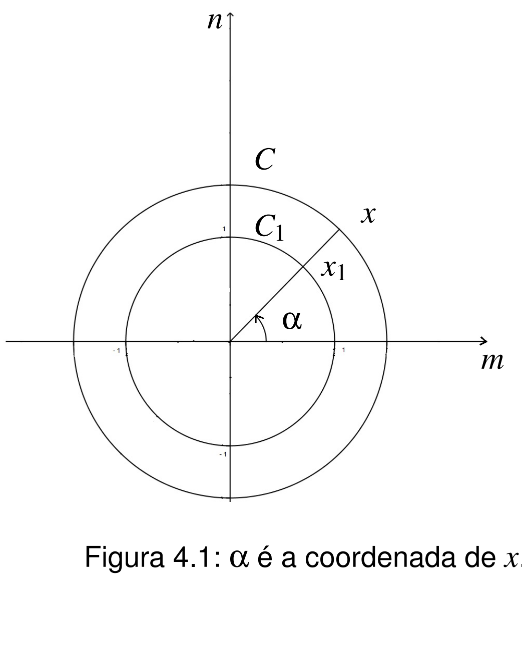

Figura 4.1: α é a coordenada de x.

Definição 4.1.1. *Seja* α *a medida, em radianos, do menor arco trigonométrico não negativo de extremidade* x_1. *Dizemos que* α *é a coordenada angular de* x.

Definição 4.1.2. *Dois pontos* x *e* x^* *pertencentes a* C *são ditos pontos antipodais quando a diferença entre suas coordenadas angulares é igual a* $\pm\pi$.

4.2 Observações

Nesta seção, veremos observações relacionadas às duas definições anteriores.

Observação 4.2.1. *Sejam* x *e* x^* *dois pontos antipodais de coordenadas angulares respectivamente iguais a* α *e* β. *Se* $\alpha < \beta$, *tem-se que:*
$i)$ $\alpha \in [0,\pi)$.
$ii)$ $\beta \in [\pi, 2\pi)$.

Observação 4.2.2. *Nota-se que, se* $\alpha \in [0,2\pi)$ *for a coordenada angular de um ponto* x *qualquer do círculo* C, *então existe uma função bijetora*

$$h : [0,2\pi) \to C,$$

definida por $h(\alpha) = x$ *e contínua (cf., neste caso, a definição de continuidade na seção 6.1 e a prova da continuidade de* h *na seção 4.4).*
Assim, se existe $f : C \to \mathbb{R}$, *também existe* $foh : [0,2\pi) \to \mathbb{R}$ *tal que, para todo* $x \in C$, *existe um único* α *pertencente a* $[0,2\pi)$ *de forma que* $f(x) = foh(\alpha)$.

4.3 Primeiro e Segundo Teoremas das Panquecas

Nesta seção, demonstraremos os teoremas mencionados no início deste capítulo. Iniciaremos pela demonstração de um importante teorema, o qual é consequência direta do Teorema do Valor Intermediário e que requer a definição de função contínua (cf. seção 6.1), quando o seu domínio é um círculo C.

Teorema 4.3.1 (Teorema de Borsuk-Ulam)**.** *Seja* $f : C \to \mathbb{R}$ *uma função contínua no círculo* C. *Então existe um par de pontos antipodais* x *e* x^* *tal que* $f(x) = f(x^*)$.

Prova.

Vamos inicialmente construir o plano cartesiano com origem no centro de C (veja Figura 4.2) e definir $g : [-r, r] \to \mathbb{R}$ contínua (cf. seção 4.4), em que r é a medida do raio do círculo C, da seguinte forma:

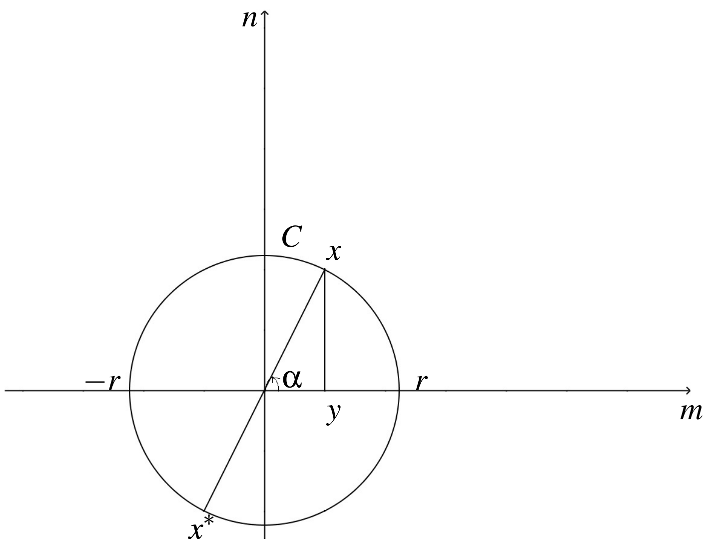

Figura 4.2: A coordenada α é associada ao ponto $x \in C$ e este é associado a y.

$i)$ Para $y \in [-r, r]$, seja x o ponto de interseção da reta que contém y e é perpendicular ao eixo horizontal com o semicírculo superior.
$ii)$ Sejam x^* o ponto antipodal a x e α a coordenada angular de x.
$iii)$ Seja $g(y) = f(x) - f(x^*)$, ou equivalentemente, de acordo com a observação 4.2.2,

$$g(y) = foh(\alpha) - foh(\alpha \pm \pi).$$

Admitindo tudo isso, temos que

$$g(-r) = foh(\pi) - foh(0)$$

e

$$g(r) = foh(0) - foh(\pi),$$

donde $g(r) = -g(-r)$.
Se:
$a)$ $g(r) = 0$, então da definição de g temos que $f(x) = f(x^*)$ e o teorema está provado.
$b)$ $g(r) \neq 0$, então ou $g(r) < 0 < g(-r)$ ou $g(-r) < 0 < g(r)$. Em ambos os casos, o Teorema do Valor Intermediário garante que existe $y \in [-r, r]$ tal que $g(y) = 0$. Portanto, de acordo com a definição de g,

$$f(x) = f(x^*),$$

em que x é o ponto associado a y conforme i). □

Teorema 4.3.2 (Primeiro Teorema das Panquecas)**.** *Se A e B forem duas figuras planas e limitadas, cujos interiores são conjuntos conexos (cf. definição na seção 6.2), então existe uma mesma reta dividindo cada uma delas em duas partes de áreas iguais.*

Prova.

Inicialmente coloquemos as duas figuras dentro de um círculo C (veja Figura 4.3. Em linguagem figurada, o círculo seria a frigideira onde estão as panquecas). Isso pode ser feito, pois as duas figuras são limitadas.

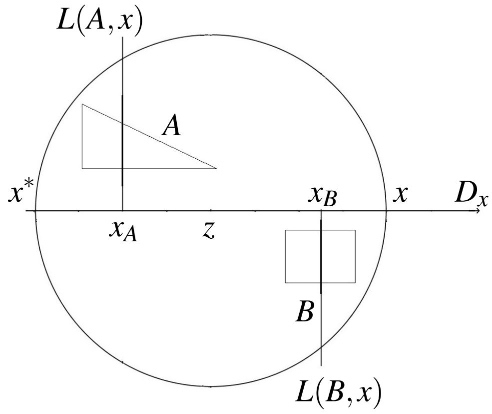

Figura 4.3: Duas figuras planas ("panquecas") dentro de um círculo ("frigideira")

Seja z o centro de C e r a medida de seu raio. Para qualquer $x \in C$, seja x^* o seu ponto antipodal, e D_x o diâmetro de extremidades x e x^* . De acordo com o Lema 4.3.1, a seguir, para todo $x \in C$, existe uma única reta $L(A,x)$ perpendicular a D_x dividindo A em duas figuras de mesma área e uma única reta $L(B,x)$ perpendicular a D_x dividindo B também em duas figuras de mesma área.

Denote, respectivamente, por x_A e x_B, os pontos de interseção de $L(A,x)$ e $L(B,x)$ com D_x. Em D_x, temos uma escala natural (sistema de coordenadas) com z na origem: a coordenada do ponto é a sua distância orientada a z, positiva se o ponto estiver entre z e x, e negativa caso contrário.

Seja $g : C \to \mathbb{R}$ uma função dada por

$$g(x) = g_A(x) - g_B(x),$$

em que $g_A(x)$ e $g_B(x)$ são, respectivamente, as coordenadas de x_A e x_B.
De acordo com a definição de g, temos que $g(x) = -g(x^*)$ para todo $x \in C$.
De fato:

$D_{x^*} = D_x$, então $L(A,x) = L(A,x^*)$ e $L(B,x) = L(B,x^*)$. Dessa forma $x_A = x_A^*$ e $x_B = x_B^*$. Porém as orientações em D_{x^*} e D_x são opostas e portanto $g_A(x^*) = -g_A(x)$ e $g_B(x^*) = -g_B(x)$, de modo que

$$g(x^*) = g_A(x^*) - g_B(x^*) = -g_A(x) + g_B(x) = -g(x).$$

Observemos que tal argumentação é válida para qualquer ponto x do círculo. Por outro lado, como g é contínua (cf. seção 4.4), pelo teorema de Borsuk-Ulam, existe um par de pontos antipodais $\overline{x}$ e $\overline{x}^*$ tal que $g(\overline{x}) = g(\overline{x}^*)$. Para este par de pontos, podemos obter únicas $L(A,\overline{x})$ e $L(B,\overline{x})$ perpendiculares a $D_{\overline{x}}$ e dividindo ao meio, respectivamente, A e B. Portanto, para este par de antipodais, temos

$$\begin{cases} g(\overline{x}) = -g(\overline{x}^*) \\ g(\overline{x}) = g(\overline{x}^*) \end{cases}$$

donde $g(\overline{x}) = 0$. Isto implica em $g_A(\overline{x}) = g_B(\overline{x})$, e então $\overline{x}_A = \overline{x}_B$. Portanto $L(A,\overline{x}) = L(B,\overline{x})$ divide cada uma das figuras A e B ("panquecas") em duas outras figuras de áreas iguais. □

Lema 4.3.1. *Se A é uma figura plana e limitada, cujo interior é um conjunto conexo, então, para todo diâmetro de qualquer círculo C que contenha A, existe uma única reta perpendicular ao mesmo e dividindo A em duas figuras de mesma área.*

Primeiramente, mostraremos a existência de tal reta: para todo $x \in C$, em que C é um círculo cujo raio tem medida r, sejam L_y a reta perpendicular a D_x, no ponto de coordenada y (veja Figura 4.4), e $f : [-r,r] \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(y)$, em que $f(y)$ é a área da parte de A que está no lado positivo de L_y (no sentido de crescimento de y no sistema de coordenadas de D_x).

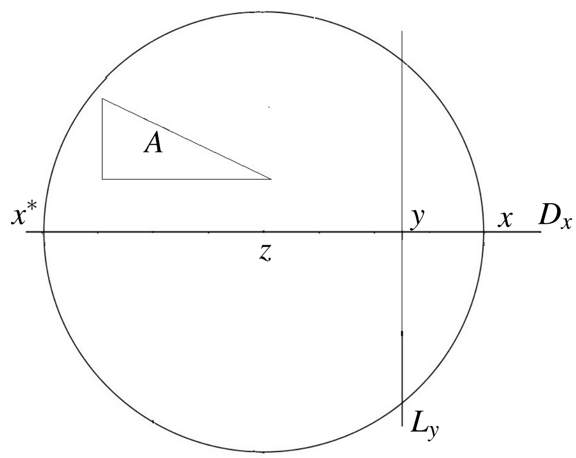

Figura 4.4: L_y é perpendicular a D_x em y

De acordo com a definição de f, temos que $f(-r) = k > 0$ e $f(r) = 0$; k sendo a área total de A. Assim $f(r) < \frac{k}{2} < f(-r)$ e, como f é contínua (cf. seção 4.4), segue-se do Teorema do Valor Intermediário que existe $y_0 \in (-r, r)$ tal que $f(y_0) = \frac{k}{2}$ e, portanto, existe L_{y_0} perpendicular a D_x dividindo A em duas figuras de áreas iguais.

Finalmente, mostremos a unicidade: suponha, por absurdo, que existam retas L_y e $L_{y'}$ perpendiculares a D_x e dividindo A em duas figuras de áreas iguais (o que acarreta $f(y) = f(y^{'})$) e que $y \neq y^{'}$, digamos $y < y^{'}$ (veja Figura 4.5).

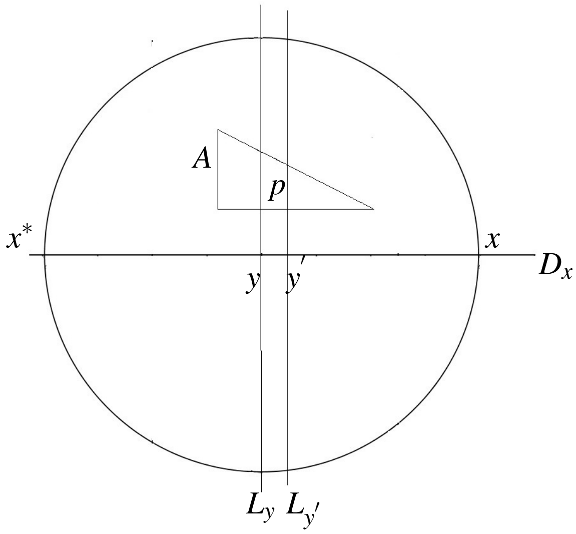

Figura 4.5: L_y e $L_{y'}$ perpendiculares a D_x e cada uma delas dividindo A em duas figuras de áreas iguais

A faixa Q entre L_y e $L_{y'}$ é um conjunto aberto, cujo complemento foi dividido em duas partes, uma contendo os pontos de D_x cujas coordenadas são menores ou iguais a y e a outra contendo os pontos de D_x cujas coordenadas são maiores ou iguais a $y^{'}$. Como o interior de A (Int$A$) é conexo e possui pontos de cada uma dessas duas partes, então Int$A$ deve ter um ponto de Q, digamos p. Como Int$A$ e Q são conjuntos abertos, Int$A \cap Q$ também é aberto. Assim, Int$A \cap Q$ contém uma vizinhança de p. Desta forma Int$A \cap Q$ possui área $m > 0$ e, portanto, $f(y) > f(y^{'})$, mas isso contradiz o fato de $f(y) = f(y^{'})$. Logo $y = y^{'}$ e $L_y = L_{y'}$.

De forma análoga se demonstra a existência e a unicidade de $L(B, x)$.

Teorema 4.3.3 (Segundo Teorema das Panquecas). *Se A for uma figura plana e limitada, cujo interior é um conjunto conexo, existem duas retas perpendiculares entre si dividindo A em quatro partes de áreas iguais.*

Prova.

Como no teorema anterior, suponhamos que a figura, denotada por A, esteja dentro de um círculo C (veja Figura 4.6). Para qualquer ponto x em C denote por D_x o diâmetro cujas extremidades são os pontos antipodais x e x^*. Agora seja L_x uma reta perpendicular a D_x e dividindo A em duas figuras de áreas iguais (a existência de tal reta é garantida pelo teorema anterior) e M_x uma reta paralela a D_x e também dividindo A em duas figuras de áreas iguais (para ver isso, considere um diâmetro perpendicular a D_x e use o teorema anterior). Estas duas retas, com ponto de interseção pertencente ao interior de C, o dividem em quatro regiões R_1, R_2, R_3 e R_4, enumeradas no sentido anti-horário e a partir do ponto de interseção de M_x com C mais próximo de x.

Sejam A_i a região de A contida em R_i; $i \in \{1,2,3,4\}$, e $S_i(x)$ a sua área.

Como $S_1(x)+S_2(x) = S_3(x)+S_4(x)$ (pois M_x divide A em duas regiões de mesma área) e $S_1(x)+S_4(x) = S_2(x)+S_3(x)$ (pois L_x divide A em duas regiões de mesma área), temos

$$\begin{cases} S_1(x)+S_2(x) = S_3(x)+S_4(x) \\ S_1(x)+S_4(x) = S_2(x)+S_3(x) \end{cases}$$

Multiplicando-se a segunda equação desse sistema por -1 e a somando membro a membro com a primeira equação, obtemos $S_2(x) = S_4(x)$. Usando esse fato na primeira ou na segunda equação, se conclui que $S_1(x) = S_3(x)$.

Essas duas igualdades foram obtidas para um ponto x arbitrário, mas com posição fixada. Agora suponha que este ponto se mova ao longo de C no sentido anti-horário e descreva, a partir de x, um arco de $\frac{\pi}{2}$ radianos. Denote essa nova posição por y (veja Figura 4.6). Então, nomeando as regiões determinadas pelo par de perpendiculares L_y e M_y, temos $A_1 = \overline{A_4}$, $A_2 = \overline{A_1}$, $A_3 = \overline{A_2}$ e $A_4 = \overline{A_3}$ e consequentemente $S_1(y) = S_2(x)$ e $S_2(y) = S_3(x)$. Seja $f : C \to \mathbb{R}$ uma função dada por:

$$f(x) = S_1(x) - S_2(x).$$

Então

$$f(y) = S_1(y) - S_2(y) = S_2(x) - S_3(x) = S_2(x) - S_1(x) = -f(x),$$

isto é,

$$f(y) = -f(x).$$

Pela bijetivida citada na Observação 4.2.2 da seção anterior, existem únicos e distintos α e β pertencentes ao intervalo $[0,2\pi)$ tal que $foh(\alpha) = -foh(\beta)$ e então, pelo Teorema do

Valor Intermediário, visto que f e $foh : [0,2\pi) \to \mathbb{R}$ são contínuas (cf. seção 4.4),existe θ pertencente a um dos intervalos (α,β) ou (β,α) tal que $foh(\theta) = 0$. Novamente, pela bijetividade mencionada anteriormente, existe $w \in C$ tal que $f(w) = 0$ e consequentemente $S_1(w) = S_2(w)$. Como já mostramos que $S_1(x) = S_3(x)$ e $S_2(x) = S_4(x)$ para todo x, então $S_3(w) = S_1(w) = S_2(w) = S_4(w)$. Portanto L_w e M_w dividem A em quatro partes de mesma área. $\square$

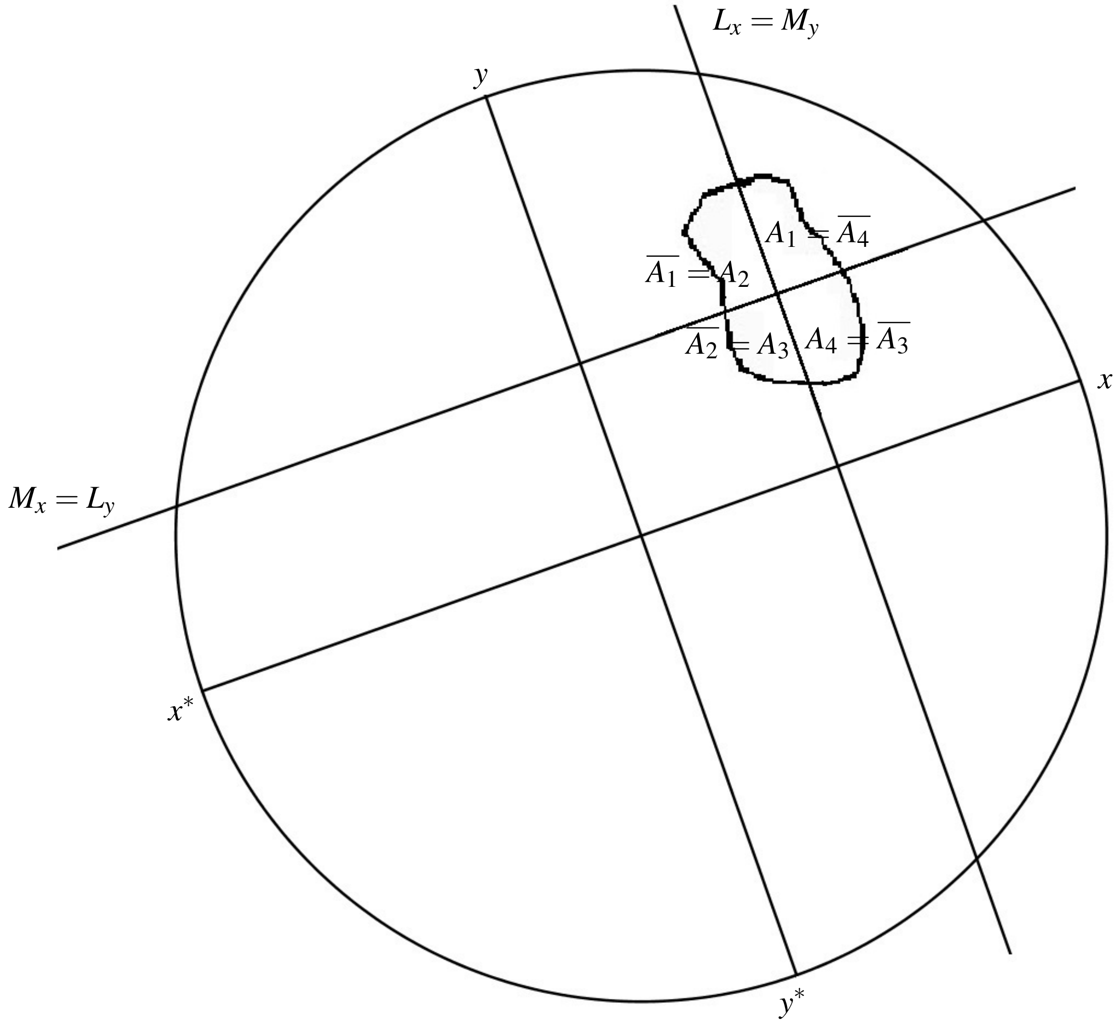

Figura 4.6: Representação esquemática da construção utilizada na demonstração do Segundo Teorema das Panquecas

4.4 Demonstrações de Continuidade das Funções Utilizadas na Demonstração do Teorema de Borsuk-Ulam e dos Teoremas das Panquecas

Nesta seção, vamos demonstrar que de fato são contínuas as funções $h : [0,2\pi) \to C$ da Observação 4.2.2, $g : [-r,r] \to \mathbb{R}$ do Teorema 4.3.1, $f : [-r,r] \to \mathbb{R}$ do Teorema 4.3.2, $g : C \to \mathbb{R}$ do Teorema 4.3.2, $f : C \to \mathbb{R}$ do Teorema 4.3.3 e $foh : [o,2\pi) \to \mathbb{R}$ do Teorema 4.3.3.

$a)$ Continuidade de $h : [0,2\pi) \to C$, dada por $h(\alpha) = x$, da Observação 4.2.2.

Inicialmente note que, conforme esquematizado na Figura 4.7 e a definição de h,

$$d(x,x_0) \leq r|\alpha - \alpha_0|.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{\varepsilon}{r}$, assim, se $\alpha \in [0,2\pi)$ e $|\alpha - \alpha_0| < \delta$, teremos

$$d(h(\alpha) - h(\alpha_0)) < \varepsilon,$$

o que prova que h é contínua.

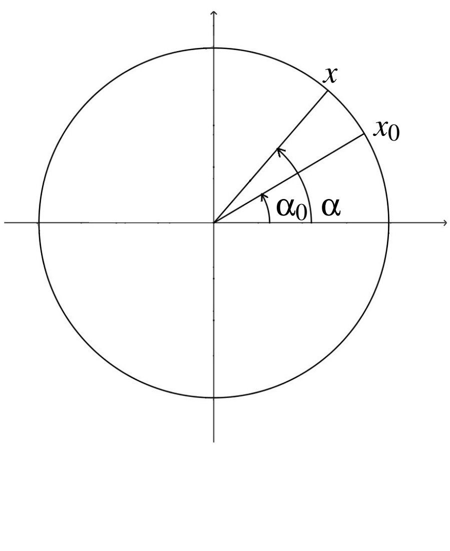

Figura 4.7: Círculo de raio r

$b)$ Continuidade de $g : [-r, r] \to \mathbb{R}$, dada por $g(y) = f(x) - f(x^*)$, do Teorema 4.3.1.

Note que:

$i)$ Devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $y \in [-r, r]$ e $|y - y_0| < \delta$, teremos $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$, isto é, $|f(x) - f(x^*) - f(x_0) + f(x_0^*)| < \varepsilon$.

$ii)$ $|f(x) - f(x^*) - f(x_0) + f(x_0^*)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x^*) - f(x_0^*)|$, pela desigualdade triangular.

$iii)$ $d(x, x_0) = d(x^*, x_0^*)$, em que x^* e x assim como x_0^* e x_0 são dois pares de pontos antipodais (veja Figura 4.8).

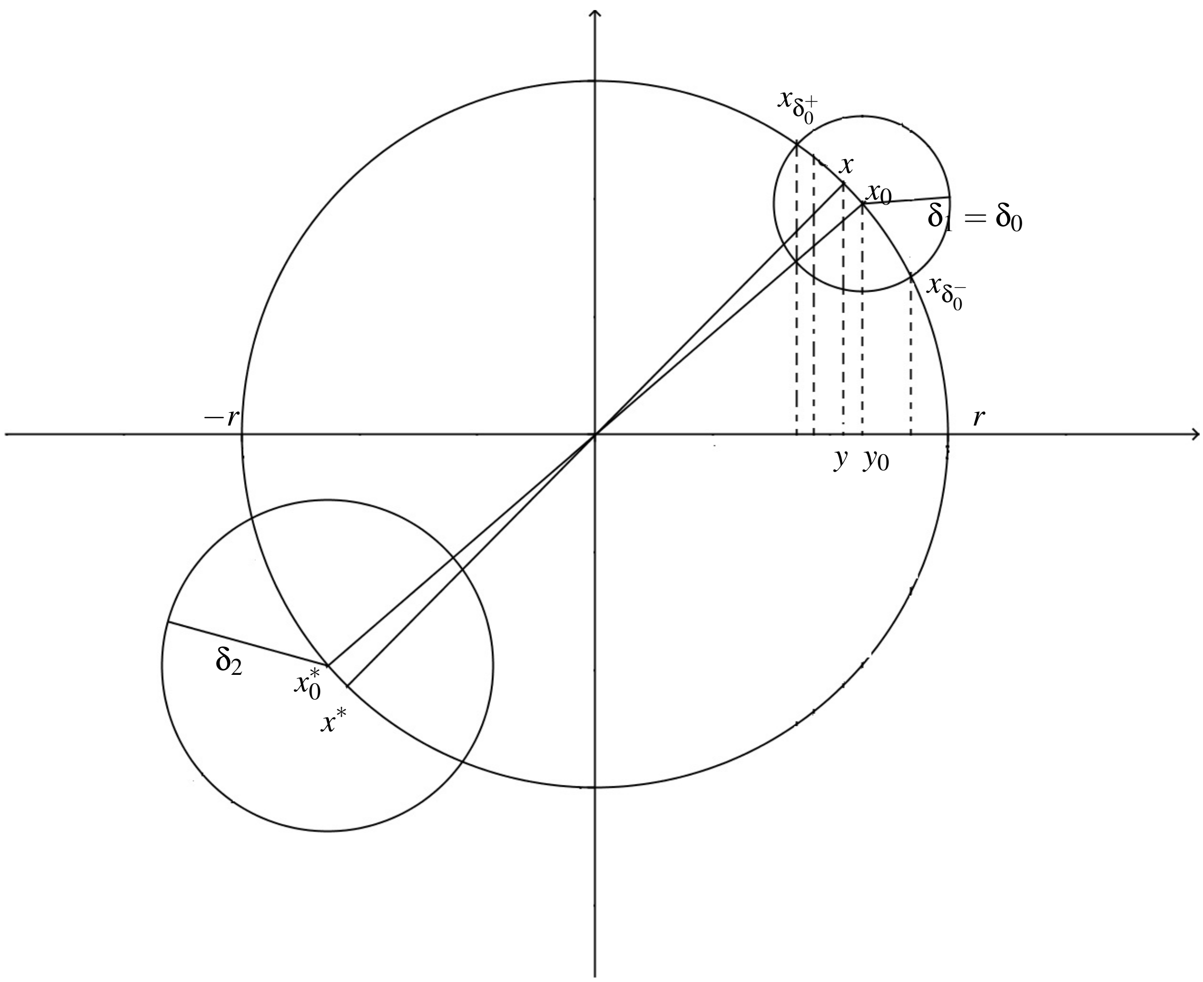

Figura 4.8: Representação esquemática da construção utilizada na demonstração da continuidade da função $g : [-r, r] \to \mathbb{R}$ do Teorema 4.3.1

Prova.

Dado $\varepsilon > 0$, como f é contínua em C, existe $\delta_1 > 0$ tal que, se $x_1 \in C$ e $d(x_1, x_0) < \delta_1$, então $|f(x_1) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Também existe $\delta_2 > 0$ tal que, se $x_2 \in C$ e $d(x_2, x_0^*) < \delta_2$, então $|f(x_2) - f(x_0^*)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $\delta_0 = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Sem perda de generalidade suponha $\delta_0 = \delta_1$.

Definindo L_{y_0} como a reta que contém x_0 e o ponto de coordenada y_0. E $x_{\delta_0^+}$ e $x_{\delta_0^-}$ como os pontos pertencentes a C e cujas distâncias a x_0 são iguais a δ_0, vê-se que é possível escolher $\delta = \text{mín}\left\{d(x_{\delta_0^+}, L_{y_0}), d(x_{\delta_0^-}, L_{y_0})\right\} < \delta_0$ tal que, se $|y - y_0| < \delta$, teremos, por $iii)$, $d(x, x_0) = d(x^*, x_0^*) < \delta_0$ e consequentemente

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$|f(x^*) - f(x_0^*)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donde $|f(x) - f(x_0)| + |f(x^*) - f(x_0^*)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Portanto, por $ii)$, tem-se

$$|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon.$$

$\square$

$c)$ Continuidade de $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ do Teorema 4.3.2.

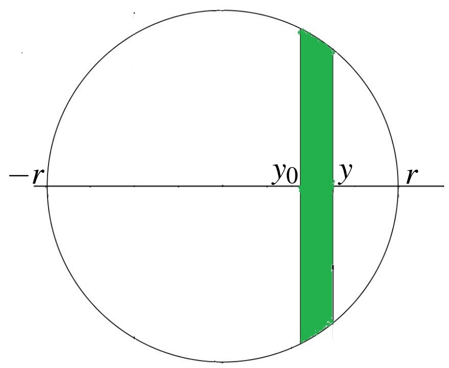

Figura 4.9: A área da região colorida é maior do que o módulo da diferença entre $f(y_0)$ e $f(y)$

Inicialmente note que, conforme esquematizado na Figura 4.9 e a definição de f,

$$|f(y) - f(y_0)| < 2r|y - y_0|.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2r}$. De modo que, se $y \in [-r, r]$ e $|y - y_0| < \delta$, teremos

$$|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon,$$

o que prova que f é contínua.

$d)$ Continuidade de $g : C \to \mathbb{R}$ do Teorema 4.3.2

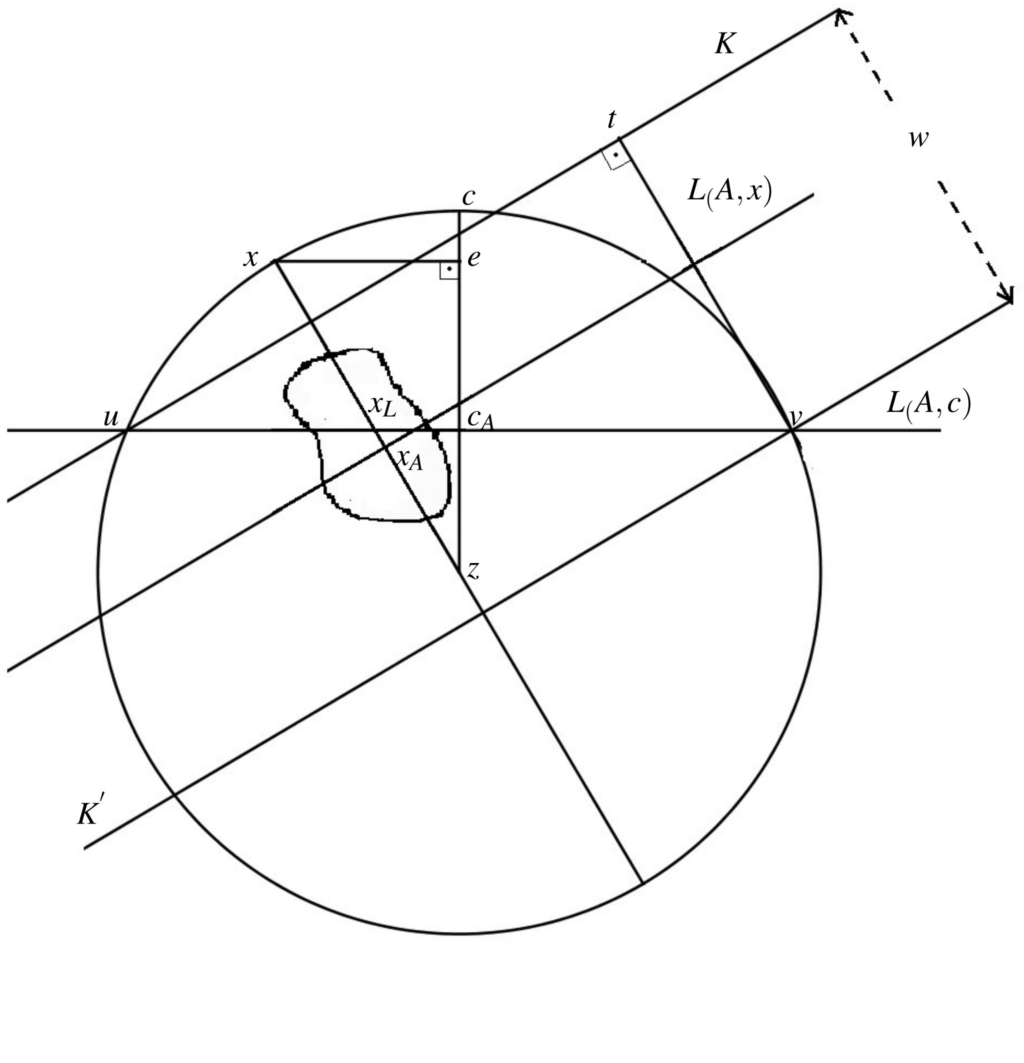

Figura 4.10: Representação esquemática da construção feita na demonstração da continuidade da função g do Primeiro Teorema das Panquecas

Como g é a diferença entre duas funções e a diferença de funções contínuas é contínua, basta mostrarmos que g_A e g_B são contínuas.

Sejam C um círculo de centro z, c um ponto de C no qual queremos mostrar que g_A é contínua, c_A o ponto de interseção entre a perpendicular $L(A,c)$, que divide A em duas regiões de mesma área, e D_c um diâmetro de C (veja Figura 4.10).

Seja x um ponto de C próximo a c. Através dos pontos u e v, interseção entre $L(A,c)$ e C, desenhe as retas K e $K^{'}$ perpendiculares a D_x. A reta $L(A,c)$ divide o interior de C em duas partes, U e V (veja Figuras 4.11(a) e 4.11(b)).

A faixa entre K e $K^{'}$ separa o seu complemento no interior de C em duas partes, $U^{'}$ e $V^{'}$, de forma que $U^{'} \subset U$ e $V^{'} \subset V$. Por isso cada uma das partes $U^{'}$ e $V^{'}$ pode ter área, no máximo, igual à metade da área da figura A. Isso implica em $L(A,x)$, reta perpendicular a D_x e que divide A em duas regiões de mesma área, estar localizada na faixa entre K e $K^{'}$. Denote por x_A o ponto de interseção entre $L(A,x)$ e D_x e por x_L o ponto de interseção entre $L(A,c)$ e D_x. Como c_A está dentro da faixa determinada por K e $K^{'}$ e o segmento $\overline{c_A z}$ é menor do que o segmento $\overline{x_L z}$ (pois o $\triangle x_L c_A z$ é retângulo em c_A), então, ao girarmos D_c em torno do centro z de forma que c coincida com x, veremos claramente que $g_A(c)$ e $g_A(x)$ pertencem a um mesmo intervalo real de comprimento w (note que w é também a largura da faixa citada anteriormente), portanto

$$|g_A(x) - g_A(c)| < w.$$

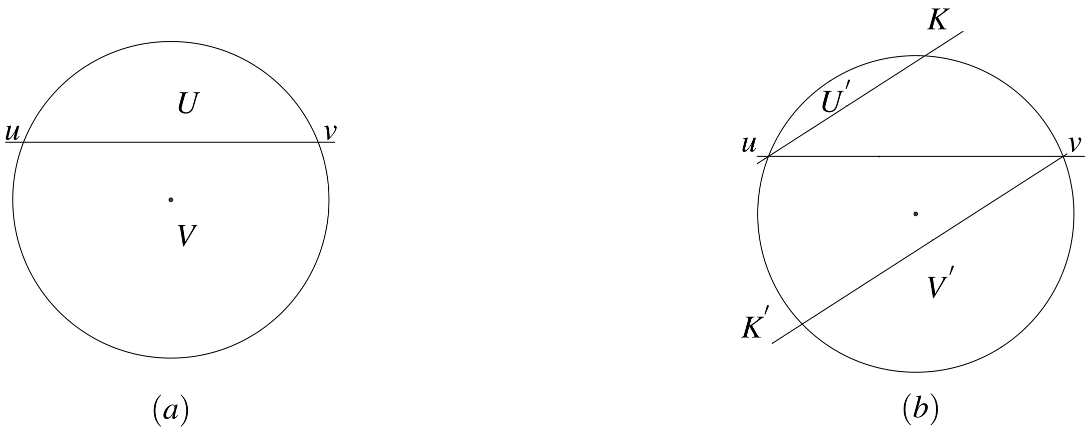

Figura 4.11: $C = U \cup V$, $U^{'} \subset U$ e $V^{'} \subset V$

Por outro lado $\triangle zex \sim \triangle utv$, pelo caso de semelhança ângulo-ângulo (veja Figura 4.12, a seguir).

Então

$$\frac{w}{d(u,v)} = \frac{d(e,x)}{d(z,x)},$$

em que e é o pé da perpendicular baixada de x a D_c e t é o pé da perpendicular baixada de v a K. Como $r = d(z,x)$, então

$$w = \frac{d(e,x)}{r} d(u,v).$$

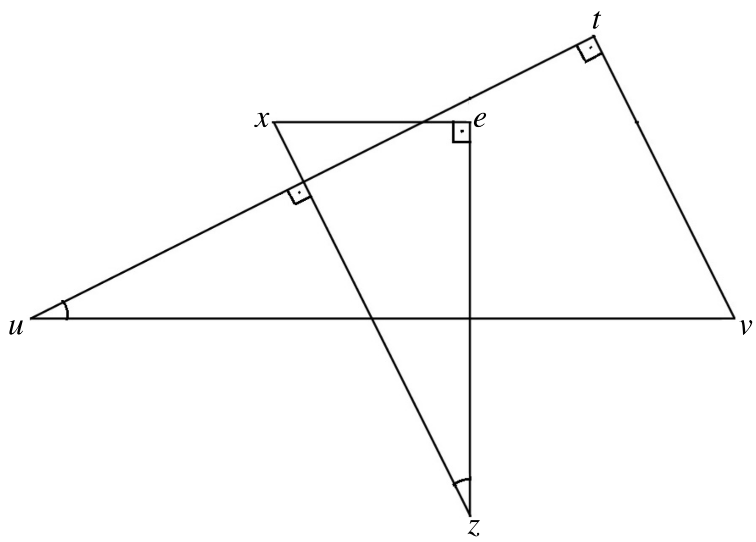

Figura 4.12: $\triangle zex \sim \triangle utv$

Além disso, $d(u,v) \leq 2r$ e $d(e,x) \leq d(x,c)$, daí

$$w \leq 2d(x,c),$$

e, portanto,

$$|g_A(x) - g_A(c)| < 2d(x,c).$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Assim, se $x \in C$ e $d(x,c) < \delta$, teremos $|g_A(x) - g_A(c)| < \varepsilon$, o que prova que g_A é contínua.

De forma análoga se prova que g_B também é contínua e, dessa forma, concluímos a continuidade de g.

$e)$ Continuidade de $f = S_1 - S_2 : C \rightarrow \mathbb{R}$ do Teorema 4.3.3.

Assim como no item anterior, basta mostrarmos que S_1 e S_2 são contínuas.

Sejam c um ponto de C, no qual queremos mostrar que S_1 é contínua, e x um ponto de C próximo a c (veja a Figura 4.13). A passagem do par de perpendiculares L_c e M_c para o par L_x e M_x pode ser feita em dois passos. Primeiramente, rotacionamos L_c e M_c em torno do ponto p de interseção entre elas até obtermos o par de perpendiculares $L_c^{'}$ e $M_c^{'}$, paralelas, respectivamente, a L_x e a M_x. O ângulo de rotação de medida α é determinado pelo arco de extremidades c e x. O segundo passo é transladar o par de perpendiculares $L_c^{'}$ e $M_c^{'}$ até o ponto de interseção entre L_x e M_x de forma que $L_c^{'}$ e $M_c^{'}$ se mantenham paralelas, respectivamente, à L_x e M_x.

Denote por $S_i(c)$ as áreas das sub-regiões de A obtidas pelo par L_c e M_c, por $S_i(x)$ as áreas das sub-regiões de A obtidas pelo par L_x e M_x e por $S_i^{'}(c)$ as áreas das sub-regiões de A

obtidas pelo par $L_c^{'}$ e $M_c^{'}$. Temos, de acordo com a Figura 4.13, que:

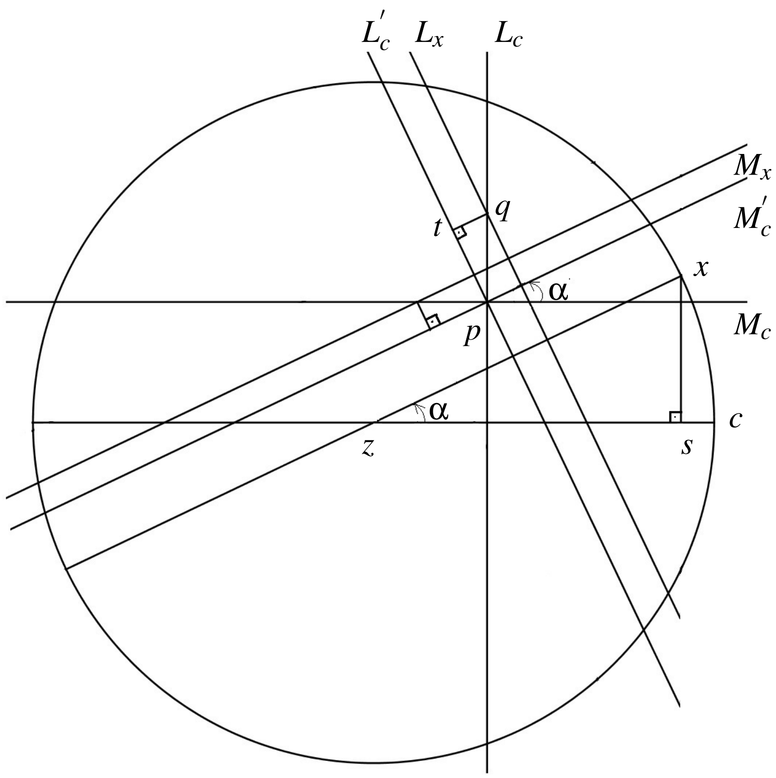

Figura 4.13: Construção feita na demonstração da continuidade da função f do Segundo Teorema das Panquecas

$i)$ $|S_1(c) - S_1^{'}(c)|$ não é maior do que a área de um setor de C com vértice p fora do centro. Como essa área é menor do que $2rd(x,c)$, onde r é a medida do raio de C, e x está muito próximo de c (Veja justificativa no final dessa demonstração), então

$$|S_1(c) - S_1^{'}(c)| < 2rd(x,c).$$

$ii)$ A área U entre $L_c^{'}$ e L_x e dentro de C é no máximo $2ru$, em que u é a medida da distância entre $L_c^{'}$ e L_x. De forma análoga, a área V entre $M_c^{'}$ e M_x e dentro de C é no máximo $2rv$, em que v é a medida da distância entre $M_c^{'}$ e M_x. Em outras palavras

$$U \leq 2ru$$

e

$$V \leq 2rv.$$

$iii)$ $|S_1(x) - S_1^{'}(c)| < U + V$, isto é,

$$|S_1(x) - S_1^{'}(c)| < 2r(u+v).$$

$iv)$ Os três triângulos retângulos, cujos ângulos retos estão indicados na Figura 4.13, são, dois a dois, pelo caso de semelhança ângulo-ângulo, semelhantes. Além disso, o segmento de reta, de extremidades p e q, em que q é o ponto de interseção entre L_c e L_x, mede menos do que $2r$ e o segmento de reta, de extremidades x e s, em que s é o pé da perpendicular baixada de x sobre D_c, mede menos do que $d(x,c)$. Como $\triangle xsz \sim \triangle qtp$, em que t é o pé da perpendicular baixada de q sobre $L_c^{'}$, podemos escrever $\dfrac{d(p,q)}{r} = \dfrac{u}{d(x,s)}$, isto é,

$$u = \frac{d(p,q)}{r} d(x,s).$$

Além disso, como exposto anteriormente, $d(p,q) < 2r$ e $d(x,s) < d(x,c)$. Desses fatos se conclui que

$$u < 2d(x,c).$$

De forma análoga mostra-se que

$$v < 2d(x,c).$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} |S_1(x) - S_1(c)| &= |S_1(x) - S_1^{'}(c) + S_1^{'}(c) - S_1(c)| \\ &\leq |S_1(x) - S_1^{'}(c)| + |S_1^{'}(c) - S_1(c)|, \end{aligned}$$

então, usando $i)$, $iii)$ e $iv)$, temos $|S_1(x) - S_1(c)| < 8rd(x,c) + 2rd(x,c)$, isto é,

$$|S_1(x) - S_1(c)| < 10rd(x,c).$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{\varepsilon}{10r}$. Assim, se $x \in C$ e $d(x,c) < \delta$, teremos $|S_1(x) - S_1(c)| < \varepsilon$, o que prova que S_1 é contínua.

De forma análoga se prova que S_2 também é contínua.

Vejamos os detalhes da justificativa citada, em $i)$, acima.

Dada a Figura 4.14, a seguir, temos:

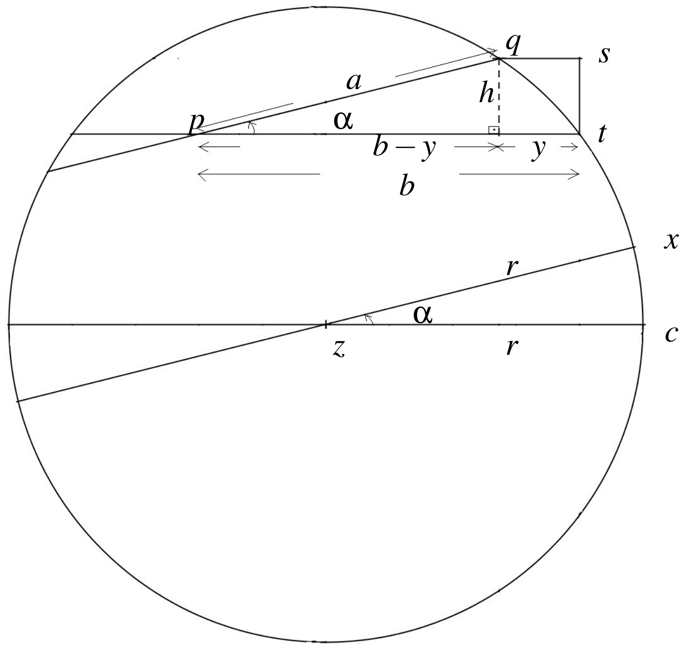

Figura 4.14: Comparando áreas de Setor, Trapézio e Retângulo

1) A área do setor com vértice p fora do centro é menor do que a área ($A_{Trap.}$) do trapézio retângulo de vértices $pqst$.

2) A área do retângulo de dimensões $2r$ e $d(x,c)$ é $A_{Ret.} = 2r \cdot (r\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\cos\alpha})$, isto é, $A_{Ret.} = 2r^2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\alpha}$. Note que $d(x,c) = r\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\cos\alpha}$ foi obtido pela lei dos cossenos.

3) $h = a\text{sen}\alpha$, $y = b - a\cos\alpha$ e $A_{Trap.} = \dfrac{(2b - a\cos\alpha)a\text{sen}\alpha}{2}$.

4) $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \dfrac{(2b - a\cos\alpha)a\text{sen}\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}} = b^2\sqrt{2}$. Como $b^2\sqrt{2} < 4r^2\sqrt{2}$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $\alpha \in (0, \delta_1)$, então $\dfrac{(2b - a\cos\alpha)a\text{sen}\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}} < 4r^2\sqrt{2}$, isto é, $\dfrac{(2b - a\cos\alpha)a\text{sen}\alpha}{2} < 2r^2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\alpha}$, ou seja,

$$A_{Trap.} < A_{Ret.}.$$

Portanto, para α pequeno o suficiente, isto é, para x muito próximo de c, a área do setor com vértice p fora do centro é, de fato, menor do que $2rd(x,c)$.

Note que, mesmo se p coincidir com z, o resultado ainda é verdadeiro, mas, neste caso,

$$a = b = r.$$

$f)$ Continuidade de $foh : [0,2\pi) \to \mathbb{R}$ do Teorema 4.3.3 (Lembre-se de que $f : C \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = S_1(x) - S_2(x)$, enquanto $h : [0,2\pi) \to C$ é definida por $h(\alpha) = x$)

Dado $\varepsilon > 0$ existe, pela continuidade de f no ponto x_0, um número $\delta_1 > 0$ tal que se $x \in C$ e $d(x,x_0) < \delta_1$, então $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Por sua vez, a continuidade de h em α_0 garante que existe $\delta > 0$ tal que se $\alpha \in [0,2\pi)$ e $|\alpha - \alpha_0| < \delta$, então $d(h(\alpha),h(\alpha_0)) < \delta_1$, isto é, $d(x,x_0)) < \delta_1$. Portanto, se $\alpha \in [0,2\pi)$ e $|\alpha - \alpha_0| < \delta$, teremos $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ou seja,

$$|foh(\alpha) - foh(\alpha_0)| < \varepsilon,$$

o que prova que foh de fato é contínua.

5 Explorando os Teoremas das Panquecas via software Geogebra

Os Teoremas das Panquecas possuem grande apelo geométrico e são facilmente verificados se tivermos figuras com determinada simetria (como círculos, retângulos, losangos, etc).

Seguramente não é nossa intenção que a demonstração formal que apresentamos no Capítulo anterior seja entendida, na íntegra, por alunos do Ensino Médio, mesmo porque ela requer conceitos de cálculo diferencial.

No entanto, a exploração geométrica dos teoremas pode ser trabalhada. Para isso, neste capítulo, apresentaremos duas atividades relacionadas a esses dois Teoremas para serem realizadas com o uso do *software Geogebra*. A escolha pelo *Geogebra* se deve ao fato de o mesmo ser gratuito e de acreditarmos que, se bem utilizado, pode ser uma boa ferramenta para auxiliar no aprendizado e na revisão de conceitos de Geometria Plana. O uso de um software também se justifica por sabermos que computadores/tecnologia chamam a atenção dos alunos e, além disso, a exploração da geometria dinâmica nos permiti visualizar passo a passo algumas aplicações dos Teoremas da Panquecas.

Vamos às atividades, observando que em turmas maiores, a condução da aula é facilitada se todos fizerem a mesma figura (panqueca (s)).

Atividade 5.0.1. *Dadas as figuras (panquecas), na Figura 5.1, encontre uma reta que divida, simultaneamente, cada uma delas em duas outras figuras de mesma área.*

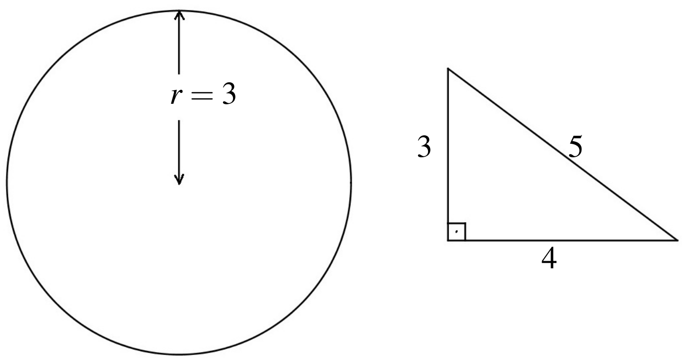

Figura 5.1: Duas panquecas, um corte e quatro pedaços

Passos:

$1)$ Construa as figuras dadas (veja Figura 5.2).

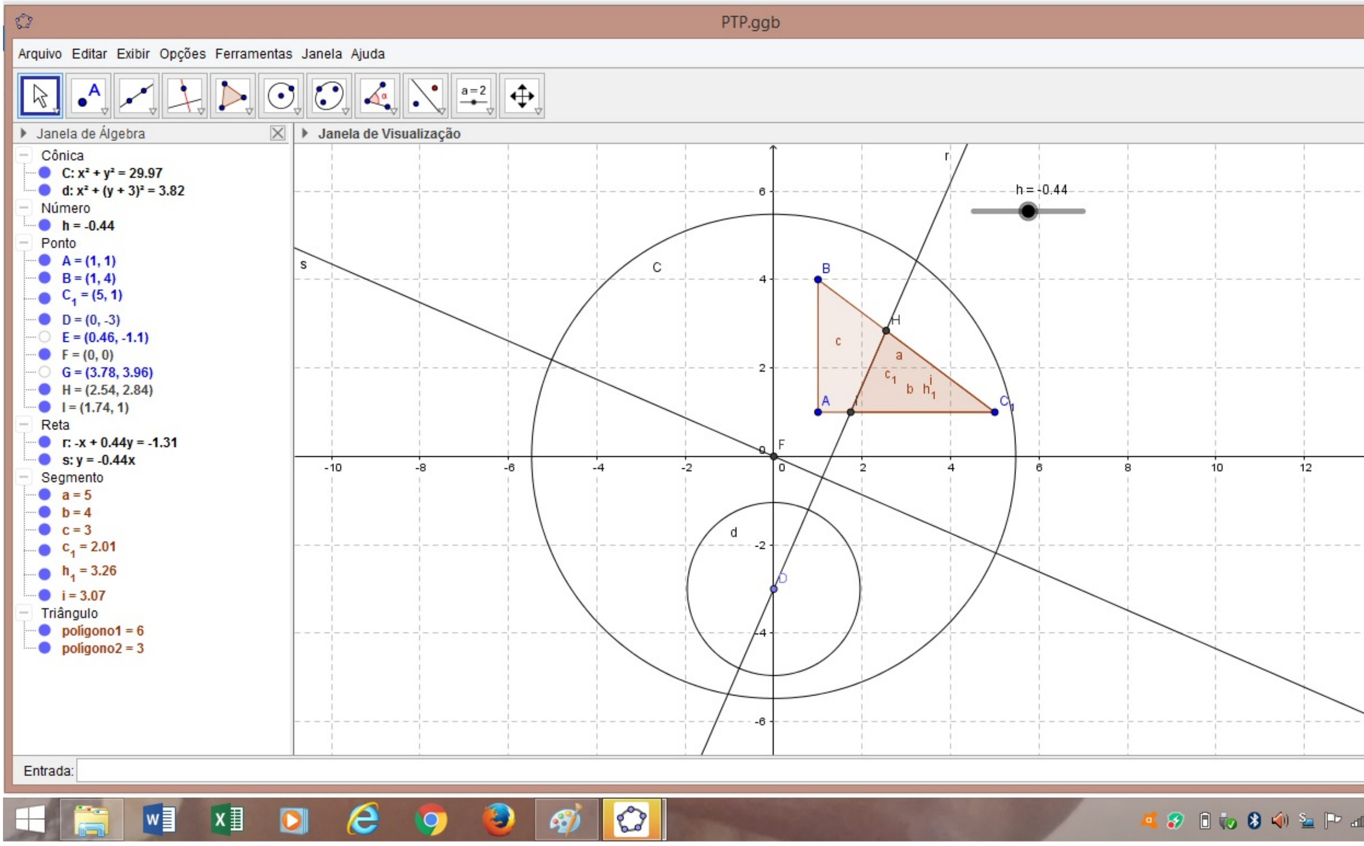

Figura 5.2: Ilustração da atividade i.

$2)$ Construa um círculo C de centro na origem do plano cartesiano e de forma que as figuras dadas fiquem no interior de C.

$3)$ Insira/defina um parâmetro h, via controle deslizante.

$4)$ Insira/defina a reta s de equação $y = hx$ (Note que, para cada valor de h, s determina um diâmetro em C).

$5)$ Construa a reta r perpendicular a s e contendo o centro do círculo dado.

$6)$ Ajuste os valores máximo e mínimo de h para que r sempre divida o triângulo dado em duas outras figuras (polígonos).

$7)$ Construa um dos dois polígonos citados no passo anterior (as vezes, será necessário repetirmos esse passo).

$8)$ Reajuste os valores máximo e mínimo de h de forma que a área do polígono construído no

passo anterior seja próxima à metade da área do triângulo dado.
$9)$ Clique no controle deslizante referente a h e acione a animação.
$10)$ No instante em que a área do polígono construído no passo 7 for igual à metade da área do triângulo dado, desative a animação, pois terá finalizado a atividade.

Atividade 5.0.2. *Dada a figura (panqueca), a seguir, encontre um par de retas, r e s, perpendiculares entre si de forma que elas dividam a figura em quatro outras figuras de mesma área.*

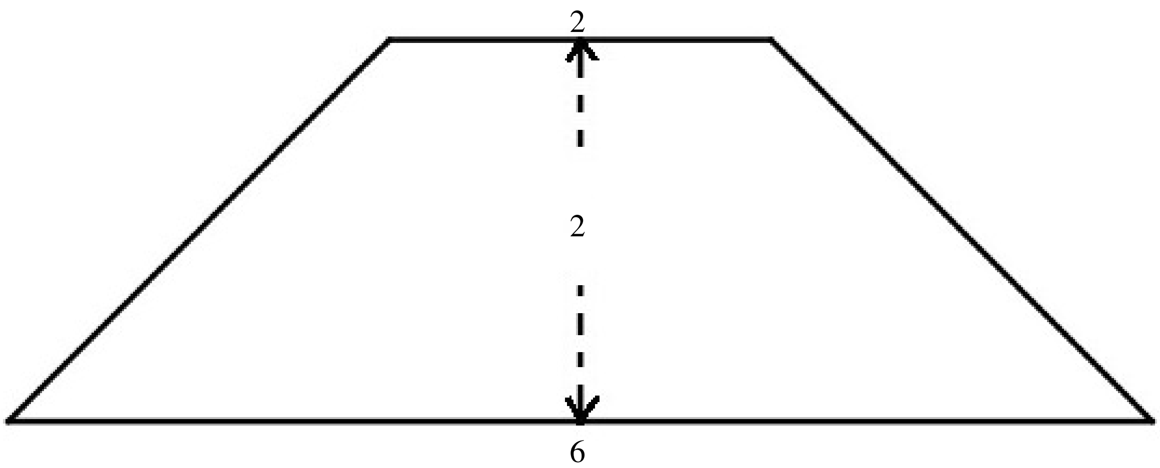

Figura 5.3: Uma panqueca, dois cortes e quatro pedaços

Passos:
$1)$ Construa o trapézio isósceles dado (veja Figura 5.4).
$2)$ Construa um círculo C de centro na origem do plano cartesiano e de forma que a figura dada fique no interior de C.
$3)$ Construa a mediatriz de uma das bases do trapézio (note que a mediatriz dividi o trapézio em dois outros trapézios).
$4)$ Construa um dos dois trapézios obtidos no passo anterior (veja que a área desse trapézio é igual à metade da área do trapézio dado).
$5)$ Construa a reta r contendo a origem do plano cartesiano e paralela a uma das bases do trapézio dado. Se r não for vertical, denote o seu coeficiente angular por m_r.
$6)$ Insira/defina um parâmetro h, via controle deslizante.
$7)$ Insira/construa a reta s paralela a r e de equação $y = m_r x + h$ (se r for vertical, então a equação de s será $x = h$).
$8)$ Ajuste os valores máximo e mínimo de h para que s sempre divida o trapézio dado em dois outros trapézios).

9) Construa um dos dois polígonos citados no passo anterior.

10) Reajuste os valores máximo e mínimo de h de forma que a área do polígono construído no passo anterior seja próxima à metade da área do trapézio dado.

11) Clique no controle deslizante referente a h e acione a animação.

12) No instante em que a área do polígono construído no passo 10 for igual à metade da área do trapézio dado, desative a animação.

13) Note que o par de perpendiculares r e s divide a figura dada em 4 polígonos (trapézios). Construa esses quatro polígonos.

14) Para finalizar a atividade, constate que as áreas desses polígonos são iguais.

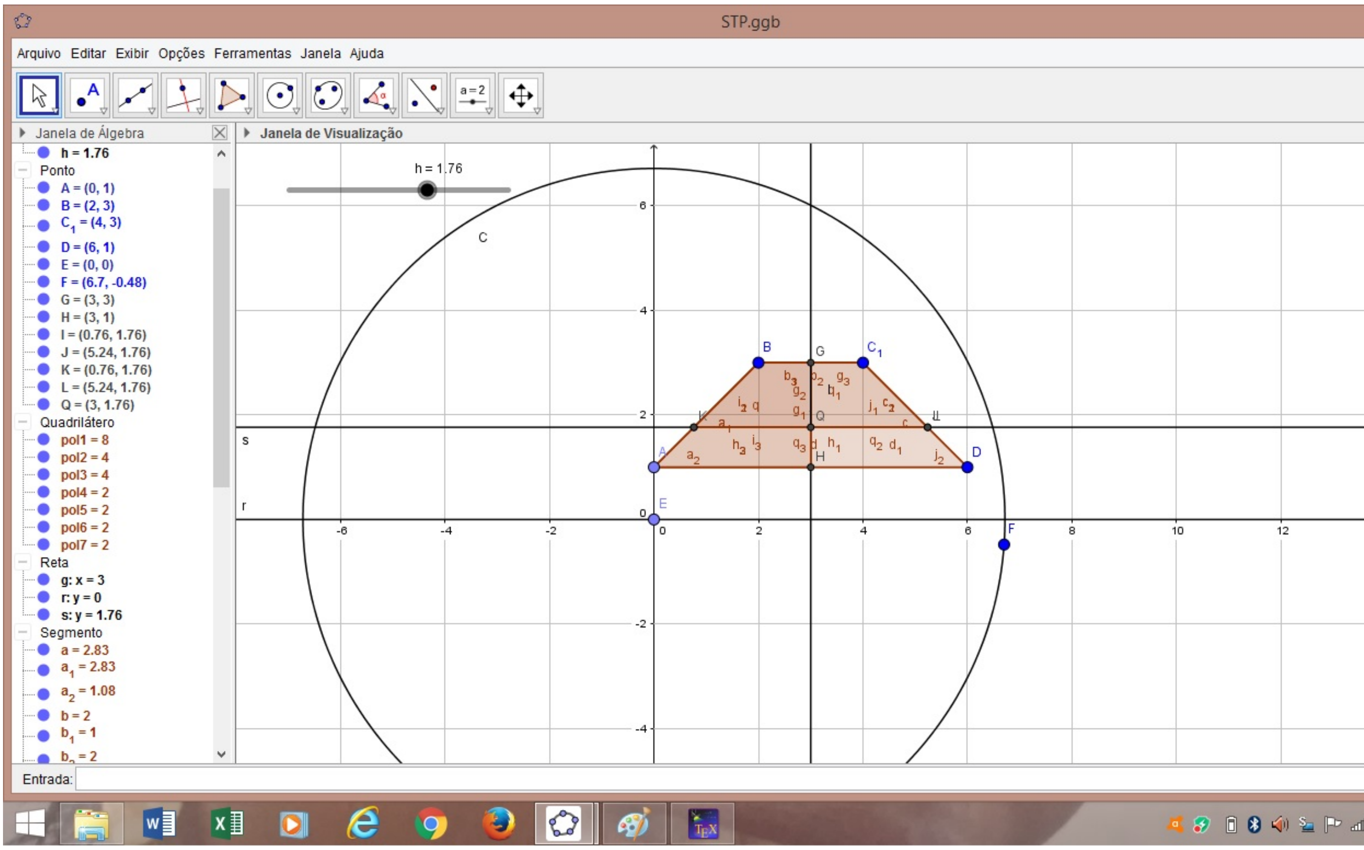

Figura 5.4: Ilustração da atividade ii.

6 Apêndice

Neste capítulo, enunciaremos alguns resultados que foram utilizados no texto, bem como algumas definições.

6.1 Continuidade

Definição 6.1.1. *Sejam $h : [0,2\pi) \to C$ uma função, C um círculo e $d(h(\alpha),h(\alpha_0))$ a distância de $h(\alpha)$ a $h(\alpha_0)$. Dizemos que h é contínua em $\alpha_0 \in [0,2\pi)$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\alpha \in [0,2pi)$ e $|\alpha - \alpha_0| < \delta$, então $d(h(\alpha),h(\alpha_0)) < \varepsilon$.*

Definição 6.1.2. *Sejam $f : C \to \mathbb{R}$ uma função, C um círculo e $d(x,x_0)$ a distância de x a x_0. Dizemos que f é contínua em $x_0 \in C$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in C$ e $d(x,x_0) < \delta$, então $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

Lema 6.1.1. *Sejam dados os intervalos $I_n = [a_n,b_n], n \in \mathbb{N}$, tais que $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} |I_n| = 0$, então existe um único $l \in \mathbb{R}$ tal que $\cap_{n\geq 1} I_n = \{l\}$.*

Teorema 6.1.1. *Sejam $f,g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in X$, com $f(a) < g(a)$. Existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta)$.*

Corolário 6.1.1.1. *Dadas $f,g : X \to \mathbb{R}$ contínuas, sejam $Y = \{x \in X; f(x) < g(x)\}$ e $Z = \{x \in X; f(x) \leq g(x)$ Existem $A \subset \mathbb{R}$ aberto e $F \subset \mathbb{R}$ fechado tais que $Y = X \cap A$ e $Z = X \cap F$. Em particular, se X é aberto, então Y é aberto e se X é fechado então Z é fechado.*

Teorema 6.1.2. *Um intervalo da reta só admite a cisão trivial.*

6.2 Algumas Noções Topológicas

Definição 6.2.1. *Sejam $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{X}$ e $r > 0$. Então a vizinhança de x em $\mathbb{X}$ é o conjunto $N(x,r,\mathbb{X})$ de todos os pontos de $\mathbb{X}$, cujas distâncias a x são inferiores a r, isto é,*

$$N(x,r,\mathbb{X}) = \{a \in \mathbb{X} / d(a,x) < r\}.$$

Definição 6.2.2. *Sejam $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{X}$ e $r > 0$. Então a vizinhança de x em $\mathbb{X}$ é o conjunto $N(x,r,\mathbb{X})$ de todos os pontos de $\mathbb{X}$, cujas distâncias a x são inferiores a r, isto é,*

$$N(x,r,\mathbb{X}) = \{a \in \mathbb{X} / d(a,x) < r\}.$$

Definição 6.2.3. *Sejam* $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ *e* $U \subset \mathbb{X}$. *Então* U *é aberto em* $\mathbb{X}$ *se para cada* $u \in U$, *existe* $r > 0$ *tal que* $N(u, r, \mathbb{X}) \subset U$.

Definição 6.2.4. *Seja* $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$. *Dizemos que um par de conjuntos não vazios* A *e* B *é uma Separação de* $\mathbb{X}$ *se:*

$i)$ $\mathbb{X} = A \cup B$;

$ii)$ $A \cap B = \emptyset$;

$iii)$ A *e* B *são conjuntos abertos em* $\mathbb{X}$.

Definição 6.2.5. *Um conjunto que não admite Separação é dito ser um Conjunto Conexo.*

7 Considerações Finais

A divisão de figuras planas em regiões de mesma área, via Teoremas das Panquecas, é um resultado de enunciado bastante simples e intuitivo, cuja demonstração, em grande parte, envolve conceitos de Matemática Básica.

Ao redigirmos o trabalho, em especial os Capítulos 3 e 4, tínhamos em mente que a maior parte das demonstrações formais contidas neles estão fora do alcance da imensa maioria dos alunos do Ensino Médio (principalmente devido às demonstrações e conceitos que são vistos, no mínimo, a partir da graduação), mesmo que tenhamos tentado, sempre que possível, salientar a geometria dos resultados envolvidos.

Os Teoremas das Panquecas são casos típicos de resultados que, mesmo sem a demonstração formal, podem ser explorados em salas de aula do Ensino Básico, gerando discussões e possibilitando a consolidação e aplicação de diversos conceitos matemáticos já conhecidos pelos estudantes. Atividades exploratórias como as que desenvolvemos no Capítulo 5, nos permitem perceber que a resolução de um problema ou a busca de respostas para determinadas questões não se reduz apenas às demonstrações formais (mesmo porque muitas delas demandam conceitos matemáticos mais elevados) e pode ser trabalhada em sala de aula, muitas vezes com o uso de *softwares*. Além disso, a busca pela divisão de figuras planas em regiões de mesma área com o uso dos recursos computacionais é uma ferramenta de investigação e não apenas um instrumento de cálculo.

A quantidade de conceitos do Ensino Básico utilizados no texto (congruência de triângulos, semelhança de triângulos, razões trigonométricas no triângulo retângulo, lei dos cossenos, sistemas de coordenadas, etc) é bastante significativa. Além disso, outros conceitos como os de ponto fixo e a visualização gráfica do Teorema do Valor Intermediário podem ser explorados com alunos que tenham conhecimento do conceito de função. Acreditamos que muitos alunos podem ter aguçada a curiosidade acerca da Matemática estudada além do Ensino Médio e, aqueles com maior interesse no tema podem (desde que haja interesse e condições na escola) se aprofundar em estudos de alguns temas que tradicionalmente não são vistos durante o Ensino Básico.

Os professores do Ensino Fundamental e Médio que se detiverem nas demonstrações dos Teoremas, perceberão que seu entendimento está diretamente relacionado ao domínio de diversos conceitos matemáticos estudados nos Ensinos Fundamental, Médio e Superior.

Bibliografia

[1] AMORIM,L.I.F., e REIS, F.S. *A (Re)construção do Conceito de Limite do Cálculo para a Análise*. IN FROTA, , M.C.R.; BIANCHINI, B.L.; CARVALHO, A.M.F.T (orgs.) Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior. Coleção Perspectivas em Educação Matemática. Campinas: Papirus, p.277-305,2013.

[2] CHINN, W.G e STEENROD, N.E. *First Concept of Topology: The Geometry of Mapping of Segments, Curves, Circles and Disks*. 6ªed., AMS, New Mathematical Library, 1966.

[3] DANTE, L.R. *Matemática Dante*. Volume Único, 1ªed. São Paulo: Ática, 2009.

[4] LIMA, E.L. *Análise Real*. 6ªed., IMPA, Coleção Matemática Universitária, 2002.

[5] MUNIZ NETO, A. C. *Fundamentos de Cálculo*, Rio de Janeiro, SBM, (2015). 561p. (Coleção PROFMAT).

[6] REIS, F.S. *Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise*. IN FROTA, M.C.R.; NASSER, L.(orgs.) Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates. Coleção SBEM. 2009.

[7] SHASHKIN, Y. *Fixed Points*. Vol. 2, traduzido do Russo por ViKtor Minachin, AMS, 1991.