



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Leandro Mendes Barrigio

Representação matemática do espectro de luz visível

Rio de Janeiro

2016

Leandro Mendes Barrigio

Representação matemática do espectro de luz visível



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antonio de Araujo Carneiro

Rio de Janeiro

2016

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

B275 Barrigio, Leandro Mendes.
 Representação matemática do espectro de luz visível/
 Leandro Mendes Barrigio – 2016.
 177 f. : il.

 Orientador: Fernando Antonio de Araujo Carneiro
 Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
 Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de
 Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística

 1. Cor - Teoria - Teses 2. Ótica - Teses. I. Carneiro, Fernando
 Antonio de Araujo. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro.
 Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

 CDU 535.6

Autorizo apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial
desta dissertação, desde que citada a fonte

Assinatura

Data

Leandro Mendes Barrigio

Representação matemática do espectro de luz visível

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Aprovada em 06 de dezembro de 2016

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Antonio de Araujo Carneiro (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Helvecio Rubens Crippa
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Sergio Augusto Romaña Ibarra
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

Rio de Janeiro

2016

DEDICATÓRIA

A Deus, pelo ânimo, e à minha família, pela força, pois sem isso eu não conseguiria concluir esta etapa tão importante em minha vida.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por me capacitar a realizar meus sonhos.

À minha família que sempre esteve ao meu lado com dedicação e carinho.

A todos os meus amigos com quem sempre pude contar.

Aos meus colegas do curso que, por eu não ser professor, sempre me animaram com suas experiências ao lecionar; e, também, por contar com sua tamanha inteligência para esclarecer minhas dúvidas.

Aos professores do curso Profmat que me ajudaram a resgatar o amor pela matemática.

Ao professor Dr. Fernando Antonio de Araujo Carneiro que sempre se mostrou interessado nesse trabalho, com devidas sugestões, esclarecimentos, acompanhando cada etapa até a sua conclusão.

A maravilhosa disposição e harmonia do universo só pode ter tido origem segundo o plano de um Ser que tudo sabe e tudo pode. Isso fica sendo a minha última e mais elevada descoberta.

Isaac Newton

RESUMO

BARRIGIO, L. M. *Representação matemática do espectro de luz visível*. 2016. 177f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

O presente trabalho tem como objetivo representar o espectro de luz visível matematicamente, ou seja, representar as cores sob linguagem algébrica e geométrica, onde vetores, matrizes e transformações lineares são meios importantes para se obter uma cor, que é a tradução numérica da sensação visual. Do antigo, triângulo de Maxwell, ao moderno, diagrama de cromaticidade, a percepção das cores, através da Teoria tricromática, é melhor compreendida nas misturas de luzes e tintas. O espaço de cor toma formas de acordo com a sensibilidade aplicada: na música, na filosofia ou na psicologia. Seus atributos matiz, saturação e brilho são relevantes quando se trata de colorimetria. E para se obter uma uniformidade colorimétrica, fórmulas garantem aproximações ideais da sensação e do real, da percepção visual e do mundo de cores.

Palavras-chave: Espectro de luz visível. Diagrama de cromaticidade. Teoria tricromática. Metamerismo. Teoria da cor. Colorimetria. Cores aditivas. Cores subtrativas.

ABSTRACT

BARRIGIO, L. M. *Mathematical representation of the visible light spectrum*. 2016. 177f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

This work aims to represent the visible light spectrum mathematically, ie, represent the colors in algebraic and geometric language, where vectors, matrices and linear transformations are important means for obtaining a color, which is the numerical translation of the visual sensation. The old, Maxwell's triangle, the modern, chromaticity diagram, perception of colors by trichromatic theory, is best understood in mixtures of lights and paint. The color space takes shape according to the sensitivity applied: music, philosophy or psychology. Its attributes hue, saturation and brightness are relevant when it comes to colorimetry. And to obtain a colorimetric uniformity formulas ensure optimal approaches and real feel, and visual perception of the color world.

Keywords: Light spectrum visible. Chromaticity diagram. Trichromatic theory. Metamerism. Color theory. Colorimetry. Additive colors. Subtractive colors.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Escala de cores de Pitágoras	18
Figura 2 –	Escala de cores de Aristóteles	18
Figura 3 –	Escala de cores de Leonardo da Vinci	19
Figura 4 –	Livro sobre óptica geométrica por François de Aguillon	19
Figura 5 –	Isaac Newton e seu experimento com um prisma óptico	20
Figura 6 –	Sistema de cores de Newton	20
Figura 7 –	Sistema de cores de Tobias Mayer	21
Figura 8 –	Sistema de cores de Lambert	21
Figura 9 –	Codificação neural na visão de cores de Thomas Young	22
Figura 10 –	Esfera de cores de Runge	23
Figura 11 –	Livro sobre a lei do contraste simultâneo das cores por Chevreul	23
Figura 12 –	Teoria da cor de Helmholtz	24
Figura 13 –	Triângulo de Maxwell	25
Figura 14 –	Livro “Padrões de cor e nomenclatura” por Ridgway	26
Figura 15 –	“Árvore de cores” de Munsell	26
Figura 16 –	Diagrama de cromaticidade CIE 1931.....	27
Figura 17 –	Vetor.....	28
Figura 18 –	Formulação do centro de gravidade de Grassmann	29
Figura 19 –	Soma de vetores	30
Figura 20 –	Lei do paralelogramo.....	30
Figura 21 –	Vetores opostos	31
Figura 22 –	Soma de Vetores.....	31
Figura 23 –	Vetor normal ao plano	37
Figura 24 –	Plano determinado por três pontos	38
Figura 25 –	Paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$	41
Figura 26 –	Paralelepípedo formado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$	42
Figura 27 –	Espectro de luz visível.....	51
Figura 28 –	Vetores de cor	52
Figura 29 –	Diagrama de cromaticidade	54
Figura 30 –	Locus sob iluminante D65	55
Figura 31 –	Representação plana das cores por Grassmann	59

Figura 32 – Representação tridimensional das cores por Grassmann.....	60
Figura 33 – Diagramas de cromaticidade – CIE 1931, 1960 e 1976.....	62
Figura 34 – Cores complementares	66
Figura 35 – Reprodução da cor.....	74
Figura 36 – Mistura de magenta e amarelo.....	79
Figura 37 – Mistura de amarelo e vermelho	80
Figura 38 – Mistura de amarelo e azul.....	81
Figura 39 – Harmonia entre cores e notas musicais	83
Figura 40 – Sistema de cores de Isaac Newton	84
Figura 41 – Diapasão circular de Thomas Salmon e círculo de cores de Isaac Newton	85
Figura 42 – Círculo de cores de Isaac Newton.....	86
Figura 43 – Ponto de equilíbrio de todas as cores	87
Figura 44 – Localização da cor de acordo com o peso (luminosidade).....	88
Figura 45 – Resultado do ponto de equilíbrio cor.....	88
Figura 46 – Modelo de cores de Tobias Mayer	89
Figura 47 – Triângulos sobrepostos por Tobias Mayer	90
Figura 48 – Pirâmide de cores por Johann Lambert e sua geometria triangular.....	91
Figura 49 – Curva de cores e Triângulo de Maxwell	94
Figura 50 – Diagrama de Helmholtz.....	99
Figura 51 – Sistema de cores de Munsell	102
Figura 52 – Sistema e atributos das cores de Munsell.....	102
Figura 53 – Sistema de cores de Munsell, com vermelho intenso	103
Figura 54 – Espaço de cores de Munsell	103
Figura 55 – Espectro de luz vermelha.....	110
Figura 56 – Espaço vetorial tricromático	112
Figura 57 – Valores triestímulos que representam o amarelo puro.....	130
Figura 58 – Estímulo próximo ao branco.....	132
Figura 59 – Metamerismo.....	137
Figura 60 – Sistema uniforme de cores CIELAB.....	138
Figura 61 – Cor obtida no espaço CIELAB.....	140
Figura 62 – Espaços de cores RGB	142
Figura 63 – Espaços de cores CMY	142

Figura 64 – Cubo de cores	144
Figura 65 – Mistura subtrativa	146
Figura 66 – Cor escolhida no Applet do Word	147
Figura 67 – Tabela de cores.....	147
Figura 68 – Mistura de cores aditivas.....	157
Figura 69 – Cores complementares	158
Figura 70 – Mistura de cores subtrativas	158
Figura 71 – Cor resultante de $\overline{r(\gamma)} = 0,1$; $\overline{g(\gamma)} = 0,1$ e $\overline{b(\gamma)} = 1$	162
Figura 72 – Cores obtidas no sistema XYZ.....	165
Figura 73 – Localização das cores obtidas no diagrama cromático	166
Figura 74 – Espaço de cor CIELAB.....	167
Figura 75 – Cor obtida no sistema CMY	168
Figura 76 – Brilho percebido	168
Figura 77 – Cor resultante de $\overline{x(\gamma)} = 0,7$, $\overline{y(\gamma)} = 0,4$ e $\overline{z(\gamma)} = 0,5$	170

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 –	Coordenadas cartesianas $(-2, 3)$	33
Gráfico 2 –	Coordenadas cartesianas $p = (1, 1, 1)$	34
Gráfico 3 –	Vetor $\vec{u}$ no plano cartesiano.....	35
Gráfico 4 –	Vetor $\vec{u} + \vec{v}$ no plano cartesiano.....	36
Gráfico 5 –	Vetor $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	39
Gráfico 6 –	Mapeamento de um paralelogramo	47
Gráfico 7 –	Mapeamento de um paralelepípedo	48
Gráfico 8 –	Locus do espectro tridimensional.....	53
Gráfico 9 –	Função $y = -3x^2 + 2,87x - 0,275$	55
Gráfico 10 –	Coordenadas $(0.4, 0.39)$ no diagrama de cromaticidade.....	56
Gráfico 11 –	Coordenadas $(0.7, 0.26)$ no diagrama de cromaticidade.....	57
Gráfico 12 –	Coordenadas $(0.8, 0.1)$ no diagrama de cromaticidade.....	58
Gráfico 13 –	Teoria tricromática. Reconstrução espectral.....	62
Gráfico 14 –	Sensibilidade normalizada por Comprimento de ondas.....	65
Gráfico 15 –	Diagrama de cromaticidade com foco em determinada gama de cores.....	68
Gráfico 16 –	Refletância pelo Comprimento de onda.....	70
Gráfico 17 –	Curvas de refletância no dióxido de titânio	70
Gráfico 18 –	Curvas de refletância no marfim preto	71
Gráfico 19 –	Curvas de refletância em um objeto cinza ideal.....	71
Gráfico 20 –	Curvas de refletância	72
Gráfico 21 –	Curvas de refletância	73
Gráfico 22 –	Respostas dos cones.....	75
Gráfico 23 –	Diagrama de cromaticidade	76
Gráfico 24 –	Diagrama de cromaticidade	77
Gráfico 25 –	Diagrama de cromaticidade	78
Gráfico 26 –	Triângulo de Maxwell	95
Gráfico 27 –	(a) Posição da cor no triângulo de Maxwell (b) Diferença de saturação das cores.....	96
Gráfico 28 –	Localização de uma cor no triângulo de Maxwell.....	97

Gráfico 29 – Diagrama de cromaticidade	97
Gráfico 30 – Intensidade do estímulo x Sensação	100
Gráfico 31 – Luminância x Luminosidade	106
Gráfico 32 – Valor Munsell x Luminância relativa.....	111
Gráfico 33 – Respostas dos cones em função do comprimento de onda	114
Gráfico 34 – Componentes tricromáticos RGB em função do comprimento de onda	115
Gráfico 35 – Plano definido por três vértices unitários	117
Gráfico 36 – Diagrama de cromaticidade	118
Gráfico 37 – Intensidade luminosa em função do comprimento de onda sob determinado iluminante	119
Gráfico 38 – Valores triestímulus XYZ em função do comprimento de onda	121
Gráfico 39 – Diagrama de cromaticidade	123
Gráfico 40 – Cubo de cor na escala decimal.....	125
Gráfico 41 – Diagrama cromático e estímulo no centro da gama de cor (gamut) .	126
Gráfico 42 – Diagrama cromático e gamas de cores	126
Gráfico 43 – Diagramas cromáticos e cores resultantes de misturas.....	127
Gráfico 44 – Diagrama cromático e elipses de MacAdam.....	133
Gráfico 45 – Elipses de MacAdam e o espaço de cor uniforme	134
Gráfico 46 – Diagramas cromáticos CIE XYZ e UCS.....	136
Gráfico 47 – Cubo RGB na escala inteira	143
Gráfico 48 – Gama de cores sob o Iluminante D65.....	153
Gráfico 49 – Mistura de cores no diagrama de cromaticidade	155
Gráfico 50 – Mistura de cores no diagrama de cromaticidade	156
Gráfico 51 – Curva de refletância.....	156
Gráfico 52 – Luminância x Luminosidade (Valor Munsell)	159
Gráfico 53 – Componentes tricromáticos RGB em função do comprimento de onda	161
Gráfico 54 – Pureza de excitação luminosa	163
Gráfico 55 – Função $V = 2,468Y^{1/3} - 1,636$	169

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	16
1	EXPOSIÇÃO HISTÓRICA	18
2	TEORIA BÁSICA PARA APLICAÇÃO MATEMÁTICA	28
2.1	Vetores	28
2.1.1	<u>Notação de Grassmann para vetores</u>	28
2.1.2	<u>Adição de vetores</u>	29
2.1.3	<u>Subtração de vetores</u>	30
2.2	Notação de função	31
2.2.1	<u>Funções com valor escalar</u>	32
2.2.2	<u>Funções vetoriais</u>	32
2.3	Coordenadas cartesianas	32
2.3.1	<u>Coordenadas cartesianas do plano</u>	33
2.3.2	<u>Coordenadas cartesianas de um espaço tridimensional</u>	33
2.4	Vetores em coordenadas cartesianas de duas e três dimensões	34
2.4.1	<u>Vetores no plano</u>	35
2.4.2	<u>Formando planos</u>	37
2.4.2.1	Plano determinado por ponto e vetor normal	37
2.4.2.2	Plano determinado por três pontos	37
2.4.3	<u>Vetores no espaço tridimensional</u>	38
2.5	Produto escalar (Interno)	39
2.6	Produto vetorial	40
2.7	Produto misto	42
2.8	Matrizes	42
2.8.1	<u>Multiplicando matrizes e vetores</u>	43
2.8.2	<u>Produto matriz-matriz</u>	44

2.9	Transformações lineares	45
2.9.1	<u>Matrizes e transformações lineares</u>	46
2.10	Como transformações lineares mapeiam paralelogramos e paralelepípedos	46
2.10.1	<u>Mapeando paralelogramos</u>	47
2.10.2	<u>Mapeando paralelepípedos</u>	48
2.11	Além das três dimensões	49
3	LUZ VISÍVEL – O ESPECTRO DE CORES SOB OLHAR MATEMÁTICO	51
4	A MATEMÁTICA DA PERCEPÇÃO DAS CORES	59
5	MATEMÁTICA APLICADA ÀS MISTURAS DAS CORES	64
6	CONCEITO DE ESPAÇO DE COR – EVOLUÇÃO GEOMÉTRICA	82
6.1	A partir de Maxwell, responsável pelos fundamentos da Teoria das Cores	92
7	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE COLORIMETRIA	112
8	UNIFORMIDADE CROMÁTICA	133
9	MODERNA CONCEITUAÇÃO MATEMÁTICA DAS CORES	141
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	148
	REFERÊNCIAS	149
	APÊNDICE A - Exercícios propostos a respeito do tema	153
	ANEXO A - Tabela comparativa: cor e nota musical	171
	ANEXO B - Notação de Munsell para a matiz em seu sistema de cores....	172
	ANEXO C - Cores primárias correspondentes aos comprimentos de Onda	173
	ANEXO D - Iluminantes e suas referências aos valores triestímulos.....	174

ANEXO E - Matrizes para transformação linear RGB/XYZ em um espaço RGB específico e sob determinado Iluminante.....	175
ANEXO F - Correlação entre a cor e a cor complementar.....	176
ANEXO G - Tabela de valor do pixel baseada no sistema RGB.....	177

INTRODUÇÃO

Este trabalho se refere ao espectro de luz visível sob representações matemáticas. Uma abordagem minuciosa das cores amparada nos conceitos da física e da computação gráfica.

A percepção visual é uma das várias formas de apreciação associadas aos sentidos. É o produto final da visão consistindo na habilidade de detectar a luz e interpretar as consequências do estímulo luminoso, neste trabalho, do ponto de vista lógico.

Com o avanço da tecnologia, houve um aumento na utilização de cores e luzes coloridas em vários campos como na arte, no design de iluminação, na psicologia e na ciência da computação. Para atender às expectativas dos indivíduos, diante de uma pintura, de um ambiente decorado, sob análise cognitiva, ou boa resolução de imagem digital, é importante entender as relações entre a cor e a percepção da luz, que é o tema de muitos estudos críticos.

O objetivo deste trabalho não é examinar a cor como um lado artístico e subjetivo da natureza humana, mas sim explorar a lógica geométrica da nossa experiência visual; compreender as cores dos objetos e suas misturas sob ponto de vista matemático; ver o que acontece, algébrica e geometricamente, na formação das cores na retina a partir da reflexão da luz.

É interessante perceber o quanto a matemática foi importante para que os grandes sábios pudessem representar o espectro de luz visível, cor, de forma lógica. Apesar de discordâncias a respeito do mundo colorido, hoje tudo o que se vê pode comprovar numérica e graficamente.

Este trabalho é composto por nove capítulos. O primeiro capítulo é a parte histórica, desde o matemático Pitágoras até sistemas modernos de cores.

O segundo capítulo apresenta teoria básica para melhor compreensão do trabalho, onde vetores, matrizes e transformações lineares são essenciais.

O terceiro capítulo compreende informações do espectro de luz visível, enfatizando que cor é apenas uma sensação. Esta é abordada de duas formas: sob conceito antigo através do Triângulo de Maxwell e, representação moderna em um diagrama de cromaticidade, sob determinado iluminante.

No quarto capítulo, a percepção da cor é enfatizada pelas propriedades do matemático Grassmann. Também, é tratada sob conceito psicofísico partindo de três

cores primordiais. E, três receptores na retina são o ponto de partida para a Teoria Tricromática.

No quinto capítulo, a mistura aditiva e subtrativa de cores é diferenciada quando realizada pela luz ou em objetos. Estas misturas são influenciadas por metamerismo. E trata, também, da refletância espectral.

O sexto capítulo é a evolução geométrica do espaço de cor. Várias figuras e sólidos foram necessários para representar as cores, seja em comparação à música, ou conceituação filosófica, ou na área psicológica; do círculo de cores de Newton, passando por Maxwell, responsável pelos fundamentos da Teoria da Cor, e, por fim, os atributos da cor, matiz, saturação e brilho, de Munsell.

O sétimo capítulo trata da medição da cor, colorimetria. Utilizando a teoria do segundo capítulo, espaço vetorial e funções de combinações de cores, são abordados cones sensoriais e triestímulos espectrais, assim como pureza colorimétrica e de excitação – tudo de acordo com a Comissão Internacional de Iluminação (CIE).

No oitavo capítulo, há a necessidade de apresentar uma uniformidade cromática. Através dos experimentos de MacAdam, foram criados os espaços de cor CIELUV e CIELAB para uniformidade perceptual. Assim, é possível calcular, matematicamente, as curvas de sensibilidade de um observador padrão.

Por fim, no nono capítulo, a cor é abordada no âmbito da modernidade, nos sistemas RGB e CMY, ou seja, dispositivos atuais que utilizam das cores aditivas e subtrativas, respectivamente, para aprimorar cada vez mais imagens coloridas. São apresentados, também, Applets como programas que quantificam cores e as dimensões de aparência de cores.

Nas considerações finais, observa-se os principais resultados de pesquisas, onde a matemática é fundamental.

tornou conhecida como uma interpretação metafísica grandiosa da luz. Ele percebeu que as cores não eram só definidas de acordo com o seu brilho ou saturação, mas, também, pela sua brancura. O que implica que Grosseteste foi o primeiro a distinguir entre os dois tipos de cor, hoje conhecidos como acromática (preto, cinza e branco) e cromática (todas as outras).

Toda essa segregação de cores reais era muito difícil naquela época. O próprio pintor Leonardo da Vinci (1452-1519), sobre uma escala ainda linear, utilizou apenas seis cores, contradizendo os padrões da Antiguidade.

Figura 3 – Escala de cores de Leonardo da Vinci



Fonte: http://www.colorsystm.com/?page_id=23#. Acesso em: 07 jan. 2016.

Da Vinci estava interessado em cores como um pintor. Sua teoria, de que qualquer cor poderia ser criada a partir de seis cores, foi utilizada para criar a Mona Lisa.

Através do sistema linear aristotélico, o matemático e físico François de Aguillon (1567-1617) distinguiu três tipos de cores, em seu livro sobre óptica geométrica.

Figura 4 – Livro sobre óptica geométrica por François de Aguillon



Fonte: <https://archive.org/details/francisciagui/lon00agui>. Acesso em: 08 jan. 2016.

Embora o esquema de Aguilonius fosse linear, a escolha das cores vermelha, amarela e azul como principais cores, foi o passo inicial para o sistema de três cores. O que se tornaria dominante por séculos.

Cinquenta anos mais tarde, o matemático e físico Isaac Newton (1642-1726) revelou que cor era uma propriedade primária da luz, e não uma propriedade de objetos. Observação realizada através de um prisma óptico.

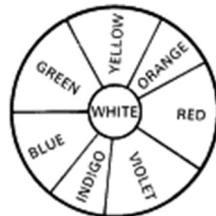
Figura 5 – Isaac Newton e seu experimento com um prisma óptico



Fonte: <http://saladeprofessor.tvescola.org.br/fasciculos/ano2/s04>. Acesso em: 08 jan. 2016.

Através de um segundo prisma, Newton constatou que a luz branca era composta de “raios” espectrais. A descoberta de que as cores espectrais são as componentes da cor branca é uma das grandes descobertas da física. Desta forma Newton introduziu, pela primeira vez, um método prático de sistema de cores.

Figura 6 – Sistema de cores de Newton



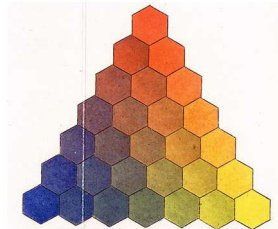
Fonte: <http://www.mundocor.com.br>. Acesso em: 11 jan. 2016.

Newton percebeu que as cores são dispostas em um círculo contendo as cores visíveis saturadas. Com seu plano de cor ele acrescentou uma dimensão para o esquema de cores linear de Aristóteles e de todos os outros teóricos de cores, tais como Aguilonius. Sua teoria da cor dominou as ideias do século XVIII a respeito de óptica e cores.

Mais de meio século depois de Isaac Newton apresentar sua obra *Opticks*, o matemático e astrônomo Tobias Mayer (1723-1762) tentou identificar o número exato de cores que o olho é capaz de perceber. O seu ponto de partida foi o plano de cor de

Newton, levando em consideração a sua regra de que uma cor está no centro de gravidade de um segmento entre duas cores originais.

Figura 7 – Sistema de cores de Tobias Mayer



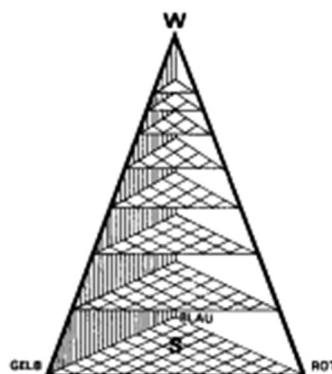
Fonte: KUEHNI, 2008.

Mayer utilizou um triângulo em que vermelho, amarelo e azul eram suas cores básicas. Preto e branco eram os agentes de luz e escuridão, que clareavam ou escureciam as cores.

Mayer foi o primeiro a desenvolver, quantitativamente, um espaço métrico de cores.

Baseado nas medições efetuadas por Tobias Mayer, o matemático e naturalista Johann Heinrich Lambert (1728-1777) reconheceu que Mayer tinha descoberto um meio de construir e nomear muitas das cores possíveis. Mas, ao mesmo tempo, percebeu que o único elemento que faltava neste triângulo era profundidade. Por isso, Lambert sugeriu uma pirâmide a partir de uma série de triângulos de Mayer. Diferindo em tamanho e na posição do preto (S).

Figura 8 – Sistema de cores de Lambert



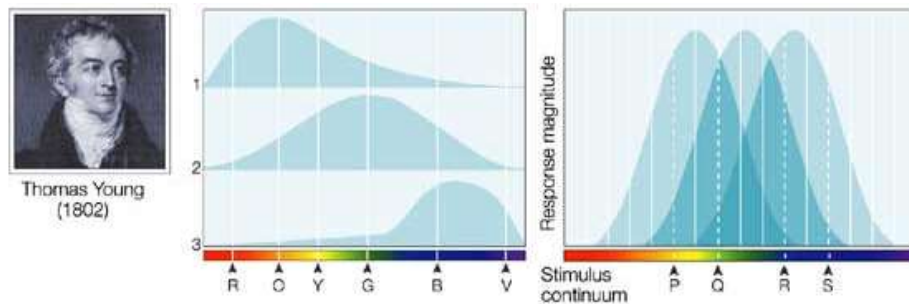
Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/119486196341445262>. Acesso em: 13 jan. 2016.

Lambert observou que uma mistura de vermelho, amarelo e azul nas proporções certas produziam o preto, por isso o situou no centro da base da pirâmide.

Com este argumento, Lambert foi o descobridor do princípio da mistura de cores subtrativas.

Familiarizado com o esquema de três cores de Tobias Mayer e desafiando a autoridade póstuma de Newton, o médico e físico Thomas Young (1773-1829) foi o primeiro a sugerir que a retina dividia o espectro contínuo em três partes. Isso era um pensamento extremamente revolucionário na época. Pois, de acordo com Young não havia três tipos de luz, como seus antecessores tinham afirmado, mas três tipos de sensações elementares.

Figura 9 - Codificação neural na visão de cores de Young

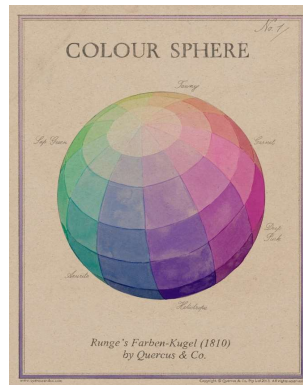


Fonte: http://www.nature.com/nrn/journal/v4/n5/fig_tab/nrn1105_F3.html.
Acesso em: 13 jan. 2016.

Isto viria a ser a Teoria Tricromática da visão.

Nesta mesma época, na arte, um importante pintor romântico Philipp Otto Runge (1777-1810) quis capturar a harmonia de cores, e não as proporções de misturas como faziam na ciência. Ele queria trazer uma ordem de sentido para a totalidade de todas as cores possíveis, e procurou um sólido de cor ideal.

Figura 10 – Esfera de cores de Runge



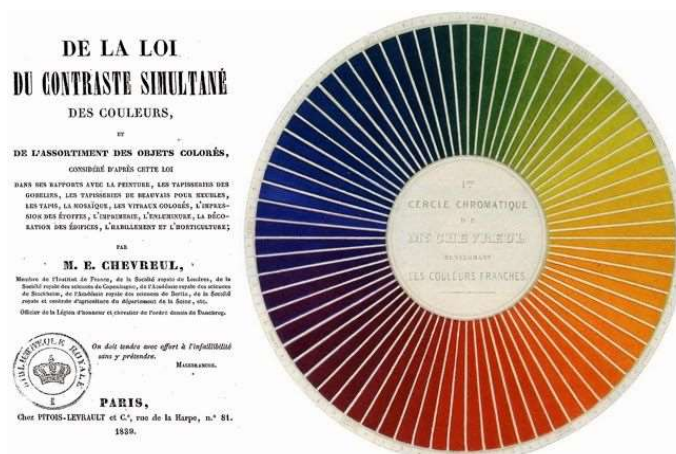
Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/495396027732441507>. Acesso em: 14 jan. 2016.

Naturalmente, Runge sabia da existência da Pirâmide de Lambert, mas ele queria colocar as cores puras à mesma distância do branco e do preto e, assim, decidiu por uma construção esférica.

Runge resumiu o conhecimento contemporâneo da multiplicidade de cores em uma imagem apropriada. Antes, tal sistema fora impossível através da ciência natural.

Um sistema de cor adequado para todos os artistas que usavam materiais coloridos foi o grande desejo do químico francês Michel Eugène Chevreul (1786-1889). Ele estava convencido de que os muitos tons diferentes de cores e sua harmonia poderiam ser definidos por meio das relações entre os números.

Figura 11 – Livro sobre a lei do contraste simultâneo das cores por Chevreul

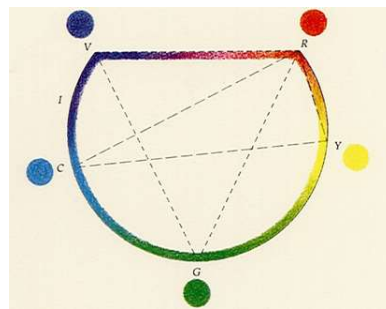


Fonte: <http://acorsimplificada.com.br/circulos-cromaticos>. Acesso em: 15 jan. 2016.

Embora os sistemas de harmonia análoga ou contrastante de Chevreton foram de grande influência, ele foi incapaz de descobrir uma lei da harmonia de cores. Ela simplesmente não existe.

Já o problema de mistura de cores foi finalmente resolvido pelo físico alemão Hermann von Helmholtz (1821-1894). Um século e meio depois de Newton, Helmholtz foi o primeiro a realizar experimentos sem falhas na mistura de cores espectrais. Modificando o círculo de Newton.

Figura 12 – Teoria da cor de Helmholtz



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/337840409520265827>. Acesso em: 18 jan. 2016.

Ao misturar amarelo e azul, Helmholtz chegou à cor branca, ou seja, amarelo e azul seriam cores complementares. Depois de várias experiências concluiu que as cores aditivas eram vermelha, verde e azul. Iniciava-se, assim, a chamada Teoria Tricromática.

Nesta época, o matemático Hermann Grassmann Günther (1809-1877), iniciador da análise de vetores, elaborou leis, as Leis de Grassmann, que formam a base teórica da teoria tricromática da cor.

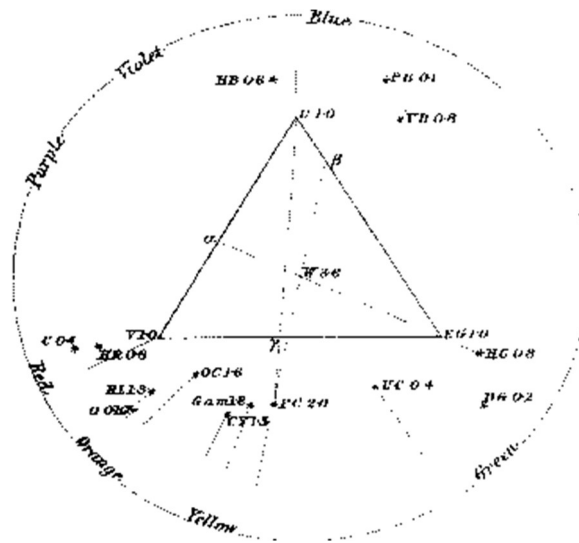
Embora Lambert e Runge houvessem apresentado sistemas de cores através de pirâmide e esfera, respectivamente, foi Grassmann o primeiro a propor enfaticamente a tridimensionalidade da coleção da cor.

O sistema que Grassmann adotou por classificação das cores é o sistema monocromático. Diferente dos sistemas baseados em três cores primárias, o sistema de Grassmann tem apenas uma variável de cor: o comprimento de onda da cor espectral.

A figura de Helmholtz foi, sem dúvida, melhor do que o círculo de cor de Newton, mas não foi apoiada por medidas quantitativas, que só foram realizadas por Maxwell.

James Clerk Maxwell (1831-1879), com especial talento para analisar matematicamente problemas físicos, fez uma contribuição fundamental à teoria da visão de cores, e foi o primeiro a estabelecer a teoria tricromática por medição quantitativa.

Figura 13 – Triângulo de Maxwell



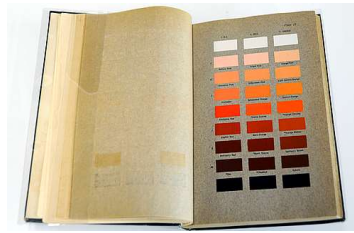
Fonte: KUEHNI, 2008.

Como representação gráfica, Maxwell escolheu, assim como Mayer, um triângulo equilátero. Depois de muito cálculo, ele foi capaz de situar um número de cores neste plano.

Maxwell foi o fundador da colorimetria e construiu o primeiro colorímetro tricromático.

Diante de tamanha quantidade de cores encontradas na natureza, o botânico norte-americano Robert Ridgway (1850-1929) se tornou consciente de que a precisão necessária para uma descrição científica de cores só seria possível através de alguma forma de padronização. Portanto, ele propôs um sistema de cores, que foi publicado em 1912, sob o título Padrões de Cor e Nomenclatura.

Figura 14 – Livro “Padrões de cor e nomenclatura” por Ridgway

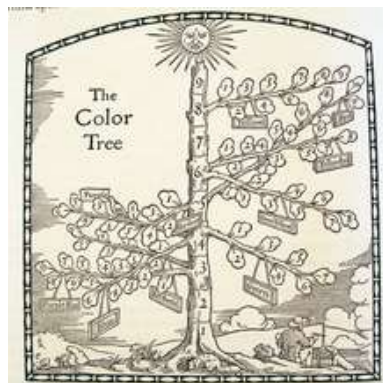


Fonte: http://www.rmaba.org/rmbpf/2015/2015_FeaturedItems/ABA/ABA_2015.html. Acesso em: 21 jan. 2016.

Ridgway tratou das cores sob aspecto meramente visual. Quem teve mesmo o objetivo de fornecer amostras padrões de cores de forma lógica foi o pintor americano Albert Henry Munsell (1858-1918), com base no “princípio da equidistância percebida”. Este é, certamente, um dos termos técnicos mais difundidos e utilizados a respeito das cores.

A notação de Munsell, através da sua “árvore de cor”, com identificação dos parâmetros matiz, valor e croma, foi recomendada pela Optical Society of America.

Figura 15 – “Árvore de cor” de Munsell



Fonte: <http://munsell.com/color-blog/color-system-measurement>. Acesso em: 21 jan. 2016.

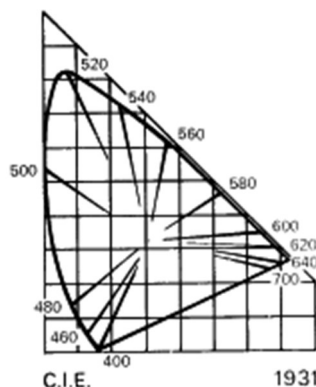
Todos os sistemas de cores que se seguiram foram convertidos utilizando seus métodos físicos. Pesquisadores de cores, hoje em dia, requerem Munsell para reconstruir seu sistema de medição moderna da cor.

O século XX foi o que forneceu uma incrível quantidade de fatos sobre o processo visual, onde os aspectos teóricos da cor poderiam ser mais precisamente definidos. Mas experiências modernas do sistema visual requereram novas teorias. Na primeira metade deste século era grande a necessidade de especificação precisa

de visão tricromática para fins científicos e técnicos. O físico americano Deane Brewster Judd (1900-1972) foi uma figura importante nessa tentativa, contribuindo bastante para o campo da colorimetria.

A iniciativa partiu da Comissão Internacional de Iluminação (CIE – Commission Internationale d'Eclairage), em 1931. O primeiro requisito para a padronização tricromática de cores foi o estabelecimento de um observador padrão. Judd converteu a distribuição de curvas do observador padrão em um sistema de valores triestimulares (coordenadas cromáticas), sem valores negativos.

Figura 16 – Diagrama de cromaticidade CIE 1931



Fonte: http://www.vitrinaecia.com.br/site2010/cor_luz_17_new.asp. Acesso em: 22 jan. 2016.

Através de exames dicromáticos e medição de absorção dos cones dos olhos diretamente do espectro de cores, resultou-se num diagrama de cromaticidade, ou diagrama CIE. Tendo por base as medições de cores de Maxwell e a construção de seu triângulo.

O desejo de métodos aprimorados para determinar cores tornara-se cada vez mais evidente. Sistemas de cores foram necessários para atender diversas áreas, a fim de obter um acesso mais direto com o mundo das cores, entender suas misturas, dominar a sua diversidade, ilustrar as suas dimensões, compreender as sensações que elas induzem, ou classificar suas diferenças. Enquanto a história continua, os sistemas de cores perduram com valiosos ensinamentos.

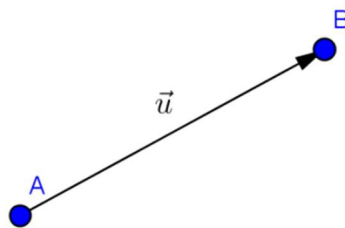
À medida que progredimos, movendo-se do mundo clássico para o dia de hoje, queremos nos familiarizar com a origem da cor, tanto no que vemos quanto em nossas mentes. Para o físico, “cor” pode implicar em um comprimento de onda determinável, mas para o pintor, é uma substância brilhante em sua paleta.

2 TEORIA BÁSICA PARA APLICAÇÃO MATEMÁTICA

2.1 Vetores

Um vetor é um objeto que tem tanto um comprimento quanto um sentido. Geometricamente, podemos imaginar um vetor tal como um segmento de reta dirigida, cuja magnitude é o comprimento do vetor. A direção do vetor $\vec{u}$ é de sua extremidade inicial A para sua extremidade final B .

Figura 17 - Vetor



Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

Dois vetores são iguais se tiverem o mesmo comprimento e direção. Isto significa que, se tomarmos um vetor e o colocarmos em uma nova posição, sem girá-lo, o vetor obtido é o mesmo vetor inicial.

Existe uma exceção importante para vetores que têm uma direção, o vetor 0 (zero), denotado por $\vec{0}$, é o vetor de comprimento zero. Uma vez que não tem um comprimento, não está apontado para uma determinada direção. Há apenas um vetor de comprimento zero.

2.1.1 Notação de Grassmann para vetores

O matemático Hermann Grassmann foi o precursor nos estudos sobre vetores, principalmente, aplicação matemática ao analisar vetores de cor, a fim de calcular resultados de misturas de cores. Por isso, é importante citá-lo neste momento.

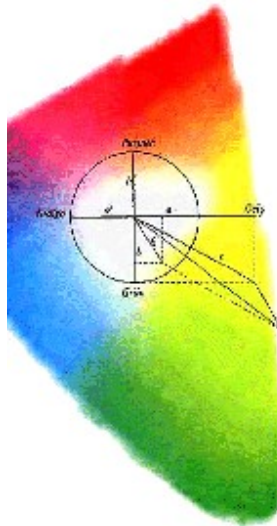
Sua interpretação a respeito dos vetores, de acordo com a figura anterior, foi: um ponto B obtido de um ponto A , através da translação do vetor $\vec{u}$.

Assim, pode-se escrever:

$$B = A + \vec{u}, \text{ portanto, } \vec{u} = B - A.$$

Esta interpretação, de um vetor como a diferença de dois pontos, permite a simplificação nas resoluções.

Figura 18 – Formulação do centro de gravidade de Grassmann



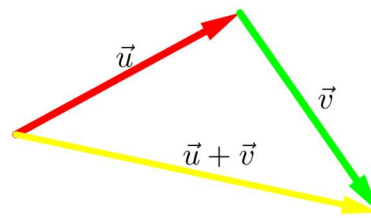
Fonte: <http://www.uni-potsdam.de/u/philosophie/grassmann/Grassmann-2009.htm>. Acesso em: 15 jan. 2016.

A maioria dos cálculos das posições de cores em um espaço conta com formulação do centro de gravidade de Grassmann.

2.1.2 Adição de vetores

Dado dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, formamos a sua soma $\vec{u} + \vec{v}$. Temos o vetor $\vec{v}$ com sua extremidade inicial coincidente com a extremidade final do vetor $\vec{u}$. O segmento de reta dirigida a partir da extremidade inicial de $\vec{u}$ para a extremidade final de $\vec{v}$ é o vetor $\vec{u} + \vec{v}$.

Figura 19 – Soma de vetores



Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

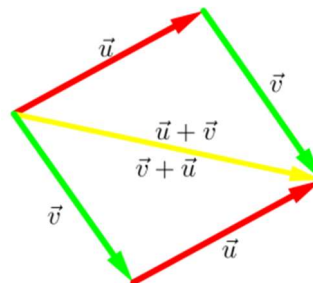
A adição de vetores satisfaz duas propriedades importantes:

- A lei comutativa afirma que a ordem da adição não importa.

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

Esta lei também é chamada lei do paralelogramo, como ilustrado na imagem abaixo. Dois lados adjacentes do paralelogramo definem $\vec{u} + \vec{v}$, e os outros dois lados definem $\vec{v} + \vec{u}$. Mas, ambas as somas são iguais à mesma diagonal do paralelogramo.

Figura 20 – Lei do paralelogramo



Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

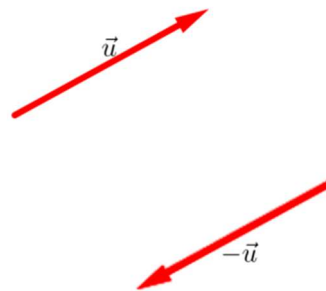
- A lei associativa afirma que a soma dos três vetores não depende da ordem que os pares de vetores são somados.

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{a} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{a})$$

2.1.3 Subtração de vetores

Antes de definir subtração, é importante definirmos o vetor $-\vec{u}$, que é o oposto de $\vec{u}$. O vetor $-\vec{u}$ tem a mesma ordem de grandeza de $\vec{u}$, mas é apontado para a direção oposta.

Figura 21 – Vetores opostos



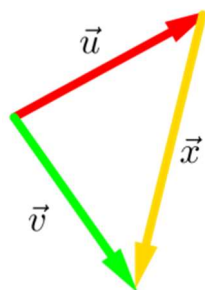
Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

Definimos subtração como a adição com o oposto de um vetor:

$$\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$$

Isto é equivalente a aplicar ao vetor $-\vec{u}$ as regras acima para adição. Na figura abaixo, temos o vetor $\vec{x}$ igual a $\vec{v} - \vec{u}$. Observemos como isto é o mesmo que $\vec{u} + \vec{x} = \vec{v}$, assim como com subtração de números escalares.

Figura 22 – Soma de Vetores



Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

2.2 Notação de função

A notação $\mathbb{R}$ representa os números reais. Da mesma forma, o símbolo $\mathbb{R}^2$ representa um vetor bidimensional, e $\mathbb{R}^3$, um vetor tridimensional.

2.2.1 Funções com valor escalar

Uma função como $f(x, y) = x + y$ é uma função de duas variáveis. Um elemento de $\mathbb{R}^2$, como $(3, 2)$, em $f(3, 2)$ dá 5, pois $f(3, 2) = 3 + 2 = 5$. Escrevemos esta função desta forma $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ou $f: (x, y) \rightarrow x + y$.

Nos referimos ao número real como escalar para diferenciar um simples número real de um vetor.

O mesmo procedimento é para as funções escalares de três ou mais variáveis. Por exemplo, $f(x, y, z)$, podemos escrever $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ou $f: (x, y, z) \rightarrow x + y - z$, uma função de valor escalar de três variáveis.

2.2.2 Funções vetoriais

Uma função vetorial assume valores que são vetores.

A função com valor de vetor em duas dimensões pode ser escrito $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Por exemplo, $f(t) = (4t, t)$. Para um dado número real t , $f(t)$ é o vetor bidimensional $(4t, t)$. Da mesma forma, uma função vetorial em três dimensões pode ser escrito $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Por exemplo, se $f(t) = (2 + t, t^3, \cos t)$, então, $f(0) = (2 + 0, 0^3, \cos 0) = (2, 0, 1)$. Por vezes, escrevemos funções vetoriais usando o vetor unidade i, j e k , como em $f(t) = (2 + t)i + t^3j + (\cos t)k$.

Por fim, podemos ter funções vetoriais de várias variáveis. Por exemplo, uma função pode tomar valores em $\mathbb{R}^3$ e vetor em $\mathbb{R}^2$, como $f: (x, y, z) = (x - y, x^2/z)$, isto é, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

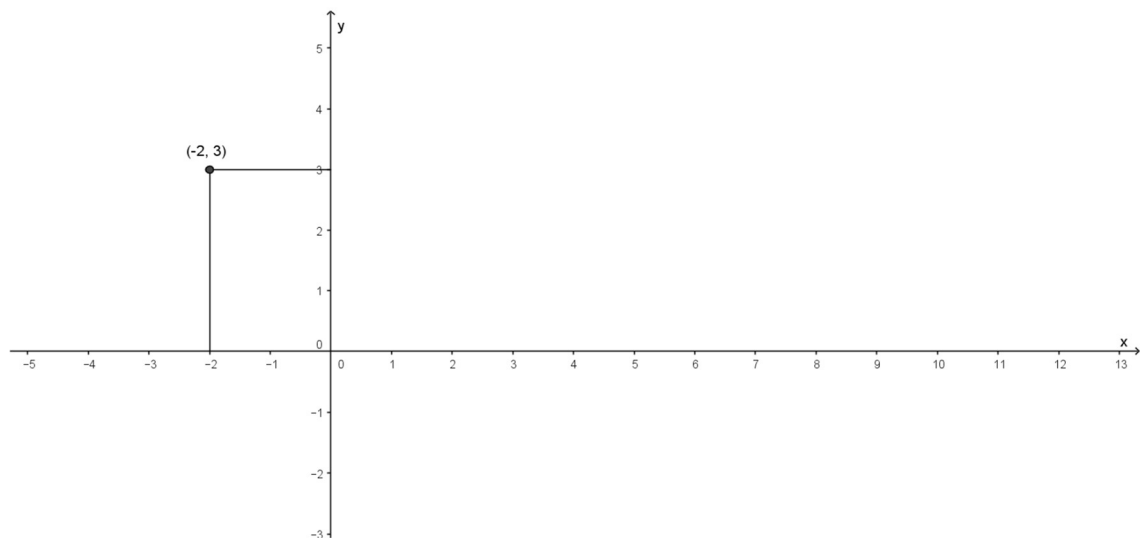
2.3 **Coordenadas cartesianas**

Coordenadas cartesianas, ou coordenadas retangulares, permitem especificar a localização de um ponto no plano ou no espaço tridimensional. As coordenadas cartesianas de um ponto são um par de números, em duas dimensões, ou um trio de números, em três dimensões, que especificam distâncias a partir do eixo de coordenadas.

2.3.1 Coordenadas cartesianas do plano

As coordenadas cartesianas do plano são especificadas em termos do eixo x e do eixo y . A origem é a interseção destes eixos. As coordenadas cartesianas de um ponto no plano são escritos como (x, y) , onde o primeiro número é a coordenada x , e o segundo, a coordenada y . A figura, a seguir, representa um ponto com coordenadas $(-2, 3)$, com duas unidades para a esquerda e três unidades para cima, a partir da origem.

Gráfico 1 – Coordenadas cartesianas $(-2, 3)$

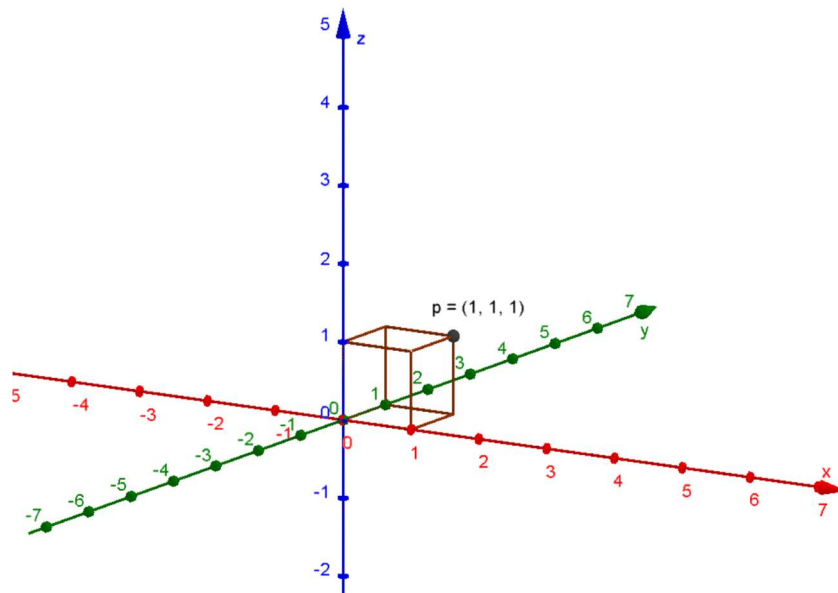


Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

2.3.2 Coordenadas cartesianas de um espaço tridimensional

No espaço tridimensional, existe um sistema de coordenadas cartesiano padrão (x, y, z) . Partindo de um ponto, origem $(0, 0, 0)$, três eixos perpendiculares entre si, eixo x , eixo y e eixo z . A parte negativa de cada um dos eixos fica no lado oposto da origem, onde os eixos se cruzam. Com estes eixos, a qualquer ponto p no espaço podem ser atribuídos três coordenadas $p = (x, y, z)$.

Por exemplo, para $p = (1, 1, 1)$, temos,

Gráfico 2 – Coordenadas cartesianas $p = (1, 1, 1)$ 

Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

Além dos três eixos coordenados, temos três planos coordenados. O plano xy é o plano horizontal formado pelos eixos x e y . O plano xz é o plano vertical formado pelos eixos x e z . E o plano yz é o plano vertical formado pelos eixos y e z .

Coordenadas cartesianas podem ser usadas não só para especificar a localização de pontos, mas também para especificar as coordenadas de vetores. Neste trabalho, servem para localização de uma determinada cor. As coordenadas cartesianas de vetores de duas ou três dimensões são parecidas com os dos pontos do plano ou do espaço tridimensional.

2.4 Vetores em coordenadas cartesianas de duas e três dimensões

Agora, discutiremos vetores em sistema de coordenadas.

Ao vermos apenas a definição geométrica do comprimento e direção dos vetores, fomos capazes de definir operações, como adição, subtração e multiplicação por escalares, assim como as propriedades destas operações.

Muitas vezes, um sistema de coordenadas é útil para manipular, facilmente, o comprimento e direção de um vetor. Quando expressamos um vetor num sistema de

coordenadas, identificamos este vetor com números que especificam a geometria do vetor em termos do sistema de coordenadas.

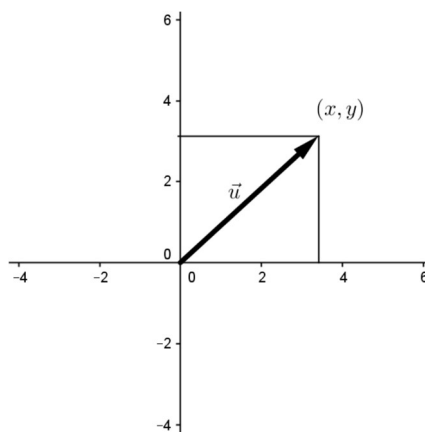
Vamos ver o sistema padrão de coordenadas cartesianas no plano e no espaço tridimensional.

2.4.1 Vetores no plano

Cada ponto no plano é identificado pelos componentes x e y : $P = (P_1, P_2) = (x, y)$, como visto anteriormente.

Para determinar as coordenadas de um vetor $\vec{u}$ no plano, o primeiro passo é posicionar o vetor de modo que a sua extremidade inicial fique na origem do sistema de coordenadas. A extremidade final do vetor será algum ponto (x, y) no plano. x e y são as coordenadas do vetor $\vec{u}$. Muitas vezes escrevemos $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ para indicar que pode ser descrito por duas coordenadas reais.

Gráfico 3 - Vetor $\vec{u}$ no plano cartesiano



Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

Usando o Teorema de Pitágoras, podemos obter uma expressão para o comprimento de um vetor, em termos de suas coordenadas. Dado um vetor $\vec{u} = (x, y)$, o próprio vetor é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são de comprimento x e y . Por isso, o comprimento do vetor $\vec{u}$ é:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Como exemplo, considere o vetor $\vec{u}$ representado pelo segmento de reta que vai desde o ponto $(2, 3)$ ao ponto $(5, 7)$. Calculemos as coordenadas e o comprimento deste vetor.

Para encontrar as coordenadas, o vetor começa na origem, e termina em $(5 - 2, 7 - 3) = (3, 4)$. Portanto, $\vec{u} = (3, 4)$.

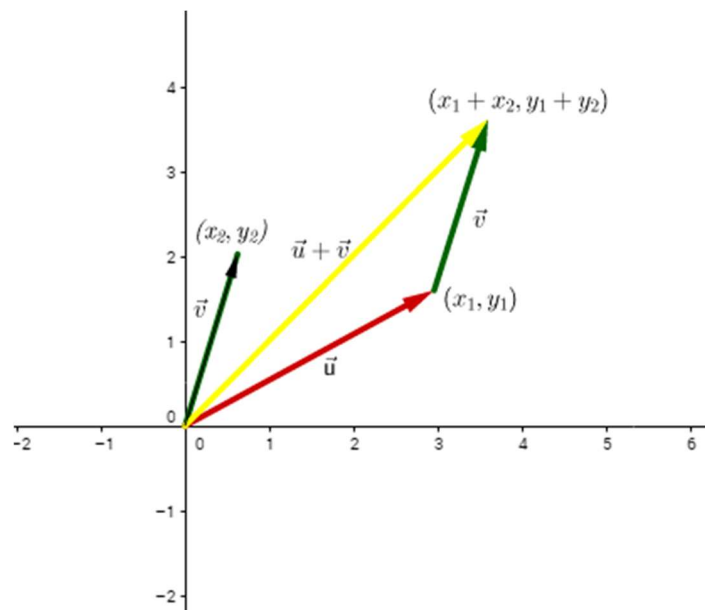
O comprimento de $\vec{u}$ é:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

As operações vetoriais, definidas anteriormente, são fáceis de serem expressas em termos destas coordenadas.

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, sua soma é simplesmente $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, tal como ilustrado na figura abaixo. Também é fácil ver que $\vec{v} - \vec{u} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ e $\lambda \vec{u} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$, para qualquer escalar λ .

Gráfico 4 – Vetor $\vec{u} + \vec{v}$ no plano cartesiano



Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

Usamos a mesma notação para indicar um ponto e para denotar um vetor. Outra forma de indicar vetores é através de vetores unitários $\vec{i}$ e $\vec{j}$, cujo comprimento é 'um'. O vetor $\vec{i}$ é o vetor unitário na direção positiva do eixo x . Em coordenadas, podemos escrever $\vec{i} = (1, 0)$. Do mesmo modo, o vetor $\vec{j}$ é o vetor unitário na direção positiva do eixo y , tal como $\vec{j} = (0, 1)$. Podemos escrever qualquer vetor bidimensional em termos destes vetores unitários como:

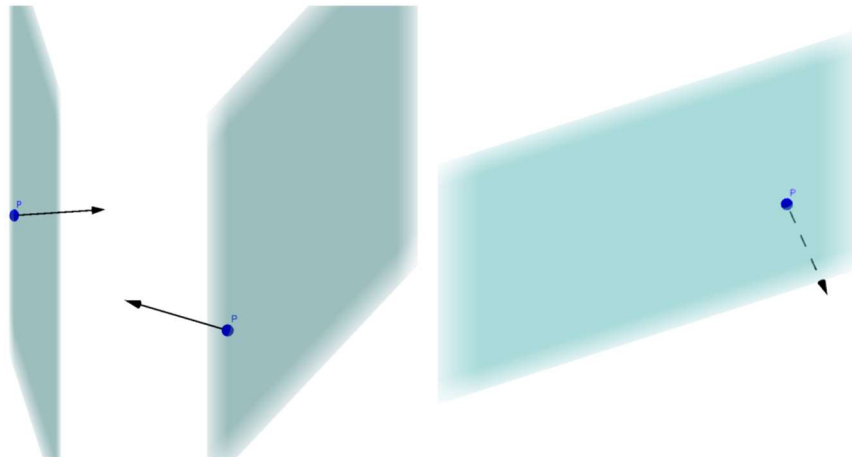
$$\vec{u} = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

2.4.2 Formando planos

2.4.2.1 Plano determinado por ponto e vetor normal

Dado um ponto P , há muitos planos que contêm P . No entanto, partindo do princípio de que vivemos no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$, um plano é determinado se um vetor normal for especificado, ou seja, um vetor perpendicular a este plano.

Figura 23 – Vetor normal ao plano



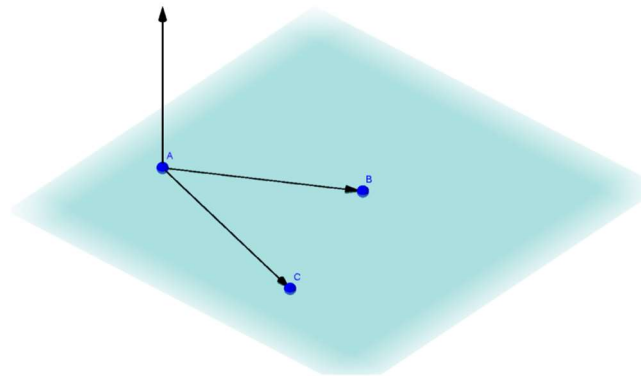
Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

O plano independe do comprimento do vetor normal, o importante é a direção deste. Na verdade, se mudarmos a orientação do vetor normal para direção oposta, ainda obtemos o mesmo plano. Claro que, mudando o ponto P para qualquer outro ponto sobre este plano, não iria alterá-lo.

2.4.2.2 Plano determinado por três pontos

Vimos que para determinar um plano, basta um ponto e um vetor, vetor normal a este plano. Três pontos, também, determinam um plano, desde que não sejam colineares.

Figura 24 – Plano determinado por três pontos



Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

Em resumo, se é dado três pontos, podemos levar o produto vetorial dos vetores entre dois pares de pontos para determinar um vetor normal.

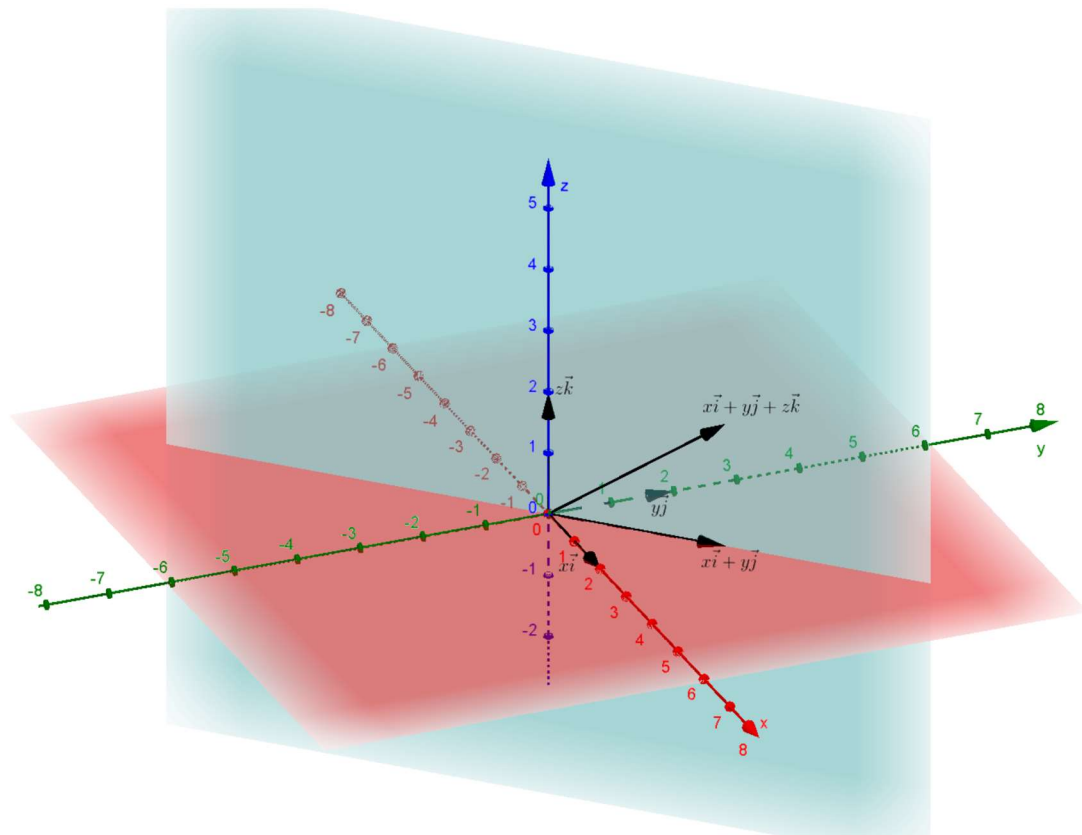
2.4.3 Vetores no espaço tridimensional

Assim como em duas dimensões, vamos atribuir coordenadas de um vetor $\vec{u}$ em três dimensões. A partir da origem $(0,0,0)$, temos $\vec{u} = (x, y, z)$. Escrevemos $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ para indicar que pode ser representado por três coordenadas reais. Somas, diferenças e produtos escalares de vetores tridimensionais, que veremos mais adiante, são todos realizados para cada coordenada.

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, então $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$, $\vec{v} - \vec{u} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ e $\lambda \vec{u} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$, para qualquer escalar λ .

Assim como em duas dimensões, também podemos denotar vetores tridimensionais através de vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$. Estes vetores unitários na direção positiva de x, y e z , respectivamente. Em termos de coordenadas, podemos escrevê-los como $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Podemos expressar qualquer vetor tridimensional como uma soma de produtos escalares destes vetores unitários na forma,

$$\vec{u} = (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Gráfico 5 – Vetor $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 

Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

Podemos decompor o vetor $\vec{u} = (x, y, z)$ em $(x, y, 0) + (0, 0, z)$. O primeiro vetor pode ser pensado como de duas dimensões, de modo que seu comprimento é $\|(x, y, 0)\| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. O comprimento do segundo vetor é $\|(0, 0, z)\| = |z|$. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, o comprimento do vetor $\vec{u} = (x, y, z)$ é:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\|(x, y, 0)\|^2 + \|(0, 0, z)\|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

2.5 Produto escalar (Interno)

Citamos produto escalar no assunto anterior. Vamos, agora, tratar deste termo.

Dado um vetor $\vec{u}$ e um número real, escalar, λ , podemos formar o vetor $\lambda\vec{u}$ do seguinte modo: se λ é positivo, então $\lambda\vec{u}$ é o vetor cuja direção é a mesma que a direção de $\vec{u}$ e cujo comprimento é λ vezes o comprimento de $\vec{u}$. Neste caso, o produto por λ , simplesmente, aumenta (se $\lambda > 1$) ou diminui (se $0 < \lambda < 1$) o vetor $\vec{u}$.

Se, por outro lado, λ é negativo, então temos que tomar o oposto de $\vec{u}$ antes de aumentá-lo ou diminuí-lo. Em outras palavras, o vetor $\lambda\vec{u}$ aponta na direção oposta de $\vec{u}$. E o comprimento de $\lambda\vec{u}$ é $|\lambda|$ vezes o comprimento de $\vec{u}$, não importando o sinal de λ . Observa-se que o comprimento de $\lambda\vec{u}$ é $|\lambda|$ vezes o comprimento de $\vec{u}$: $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|$.

Produtos escalares satisfazem as seguintes propriedades:

- $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
- $(\lambda + \alpha)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \alpha\vec{u}$
- $1\vec{u} = \vec{u}$
- $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$
- $0\vec{u} = \vec{0}$

Na última propriedade, o zero à esquerda é o número 0, enquanto o zero da direita é o vetor $\vec{0}$, que é o vetor único, cujo comprimento é igual a zero.

E se $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ para algum escalar λ , então dizemos que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos.

Por vezes, descrevemos vetores, adição de vetores, subtração de vetores e produto escalar sem referência a qualquer sistema de coordenadas. A vantagem de tal raciocínio, puramente geométrico, é que os resultados independem de qualquer sistema de coordenadas no qual os vetores se localizam. No entanto, é útil expressar os vetores em termos de coordenadas.

2.6 Produto vetorial

O produto vetorial é definido apenas para vetores tridimensionais.

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores tridimensionais, seu produto vetorial, escrito como $\vec{u} \times \vec{v}$, é outro vetor tridimensional. Definimos este vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ pelas seguintes exigências:

- $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor perpendicular a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$; e,
- O comprimento do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$, assim descrito $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$, é a área do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja, paralelogramo cujos lados adjacentes são os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

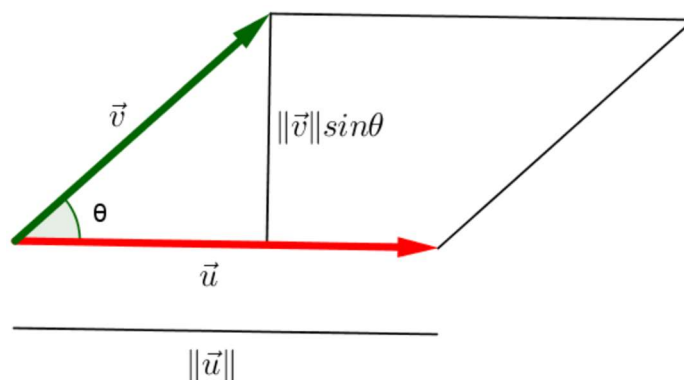
Utilizando trigonometria, pode-se calcular a área do paralelogramo gerado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$$\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$$

Onde θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

A figura mostra o paralelogramo como tendo uma base de comprimento $\|\vec{u}\|$ e altura $\|\vec{v}\| \sin \theta$.

Figura 25 – Paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$



Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

A fórmula $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$ indica que o comprimento do produto vetorial é maior quando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares. Por outro lado, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos ou se qualquer dos dois vetores for $\vec{0}$, o produto vetorial é $\vec{0}$.

Note que a área do paralelogramo é o comprimento do produto vetorial.

Dois propriedades importantes do produto vetorial:

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}; e,$
- $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}.$

A definição geométrica do produto vetorial é boa para a compreensão de suas propriedades. No entanto, não é muito conveniente calcular numericamente o produto vetorial de vetores através de suas coordenadas.

Com exceção das duas propriedades referidas anteriormente, vamos afirmar que o produto vetorial se comporta como multiplicação regular. Para isso, baseia-se nas seguintes propriedades:

- $\lambda(\vec{u}) \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times \lambda(\vec{v})$

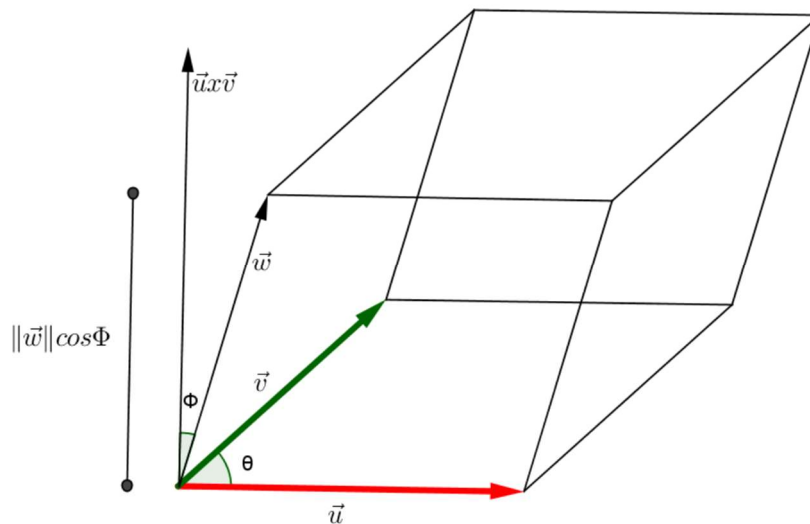
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- $(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u}$

Onde $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores em $\mathbb{R}^3$ e λ é um escalar. Estas propriedades significam que o produto vetorial é linear.

2.7 Produto misto

O produto misto de vetores é assim representado $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$. Este produto é importante, pois seu valor absoluto $|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$ é o volume do paralelepípedo formado pelas arestas $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Figura 26 – Paralelepípedo formado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$



Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

Por vezes, num sistema de cores moderno, é possível obter a quantidade de cores contidas num sólido de cor.

2.8 Matrizes

Matriz pode ser visto como uma generalização de um vetor, onde dispomos números em linhas e colunas. Fazendo m o número de linhas e n o número de colunas, referimo-nos a uma matriz $m \times n$ como:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Para o espectro de cores as matrizes são limitadas em 3×3 . Por exemplo,

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

A estrutura de uma matriz nos permite definir uma operação fundamental, a multiplicação. Esta multiplicação constitui a base da álgebra linear, em particular, transformações lineares, ou funções lineares, que transformam vetores em outros vetores.

Um vetor é um tipo especial de matriz. Ao compararmos um vetor com uma matriz, inicialmente, parece que a diferença entre vetores e matrizes é o número de linhas. No entanto, quando vemos vetores como matrizes, percebemos uma versão rotacionada da forma padrão, ou seja, escrevemos um vetor n -dimensional como uma matriz $n \times 1$.

$$u = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

Denominamos vetor u como coluna $n \times 1$ usando os termos “vetor coluna” e “matriz coluna” como sinônimos. Veremos que, para o espectro de luz visível, o vetor cor é escrito como um vetor coluna 3×1 .

2.8.1 Multiplicando matrizes e vetores

Para definir a multiplicação entre uma matriz e um vetor, precisamos ver o vetor como uma matriz coluna. Define-se o produto de matriz-vetor apenas para o caso em que o número de colunas na matriz é igual ao número de linhas no vetor. Então se A uma matriz $m \times n$, e u , o vetor dado, se fizermos $Au = v$, logo v é um vetor coluna $m \times 1$. Em outras palavras, o número de linhas em A determina o número de linhas do produto v .

A fórmula geral para um produto matriz-vetor:

$$Au = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

O processo de multiplicação de matriz-vetor é realmente muito simples. Toma-se o produto de cada valor de u com cada valor de cada linha de A . Por isso que o número de colunas de A tem que ser igual ao número de componentes de u . Como iremos nos limitar a matriz 3×3 e vetor 3×1 , devido ao espectro de luz visível, temos, por exemplo:

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } u = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O produto matriz-vetor fica assim:

$$Au = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 6 + 6 \times 3 + 1 \times 1 \\ 4 \times 6 + 6 \times 3 + 0 \times 1 \\ 5 \times 6 + 4 \times 3 + 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 + 18 + 1 \\ 24 + 18 + 0 \\ 30 + 12 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 42 \\ 43 \end{bmatrix}$$

2.8.2 Produto matriz-matriz

Uma vez que os vetores são como matrizes coluna, o produto de matriz-vetor é simplesmente um caso especial do produto de matriz-matriz, isto é, o produto entre duas matrizes. Assim como para o produto matriz-vetor, o produto AB entre matrizes A e B é definido apenas se o número de colunas em A é igual ao número de linhas em B . Em termos matemáticos, dizemos que se pode multiplicar $A_{m \times n}$ por $B_{n \times p}$.

O produto AB é uma matriz $m \times p$ que vamos chamar de C , isto é, $AB = C$. A matriz B é formada por p ($n \times 1$) vetores coluna:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \dots \\ b_{n2} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} b_{1p} \\ b_{2p} \\ \dots \\ b_{np} \end{bmatrix} \right]$$

A matriz C é o produto da matriz-vetor de A com a respectiva coluna de B . Em outras palavras, o componente na i -ésima linha e j -ésima coluna de C é o produto de pontos entre a i -ésima linha de A e a j -ésima coluna de B . Escrevemos este componente de C como $C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$.

Nos limitando às dimensões 3×3 do sistema de cores, um exemplo de produto matriz-matriz:

Sejam,

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3x6 + 6x7 + 1x8 & 3x3 + 6x2 + 1x1 & 3x1 + 6x1 + 1x1 \\ 4x6 + 6x7 + 0x8 & 4x3 + 6x2 + 0x1 & 4x1 + 6x1 + 0x1 \\ 5x6 + 4x7 + 1x8 & 5x3 + 4x2 + 1x1 & 5x1 + 4x1 + 1x1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 18 + 42 + 8 & 9 + 12 + 1 & 3 + 6 + 1 \\ 24 + 42 + 0 & 12 + 12 + 0 & 4 + 6 + 0 \\ 30 + 28 + 8 & 15 + 8 + 1 & 5 + 4 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68 & 22 & 10 \\ 66 & 24 & 10 \\ 66 & 24 & 10 \end{bmatrix} = C_{3 \times 3}$$

2.9 Transformações lineares

A transformação linear é uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Para quaisquer vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ e qualquer escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

É simples identificar se determinada função $f(x)$ é uma transformação linear. Basta reparar em cada termo de cada componente de $f(x)$.

A função $f(x, y, z) = (4x, 4z, 0, 2z - x)$ é uma transformação linear.

A função $g(x, y, z) = (4x, 4z + 3, 0, 2z - x)$ não é uma transformação linear, pois o termo 3 do componente $4z + 3$ é uma constante que não contém quaisquer componentes do vetor (x, y, z) . Violando a segunda condição acima.

Por exemplo, tomando $g(0, 0, 0) = (4 \cdot 0, 4 \cdot 0 + 3, 0, 2 \cdot 0 - 0) = (0, 3, 0, 0)$.

A função $h(x, y, z) = (4x, 4xz, 0, 2z - x)$ não é uma transformação linear, pois o componente $4xz$ o desqualifica.

Uma característica útil de uma transformação linear é que não há apenas correspondência de um-para-um entre matrizes e transformações lineares, com base na multiplicação de matriz e vetor.

2.9.1 Matrizes e transformações lineares

Podemos associar cada matriz a uma função.

Dada a função $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, podemos associar $g(x)$ a alguma matriz, apenas se $g(x)$ é um tipo de transformação linear.

Seja a função $f(x, y) = (3x + y, 2y, 2x - 3y)$, uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^3$. A matriz A , associada com f , será uma matriz 3×2 ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},$$

que precisa satisfazer $f(x) = Ax$, onde $x = (x, y)$.

A conclusão é que cada transformação linear está associada com uma matriz e vice-versa.

2.10 **Como transformações lineares mapeiam paralelogramos e paralelepípedos**

A noção de linearidade desempenha um papel importante porque qualquer função diferenciável é localmente linear. A definição de diferenciabilidade baseia-se na capacidade de aproximar uma função $f(x)$ por uma transformação linear $T(x)$.

Uma transformação linear bidimensional leva paralelogramos em paralelogramos e uma transformação linear tridimensional leva paralelepípedos em paralelepípedos.

2.10.1 Mapeando paralelogramos

A transformação linear bidimensional $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é o tipo de mapeamento a partir de um plano bidimensional para outro plano bidimensional. Pode ser escrita como:

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Onde a, b, c e d são números que definem a transformação linear

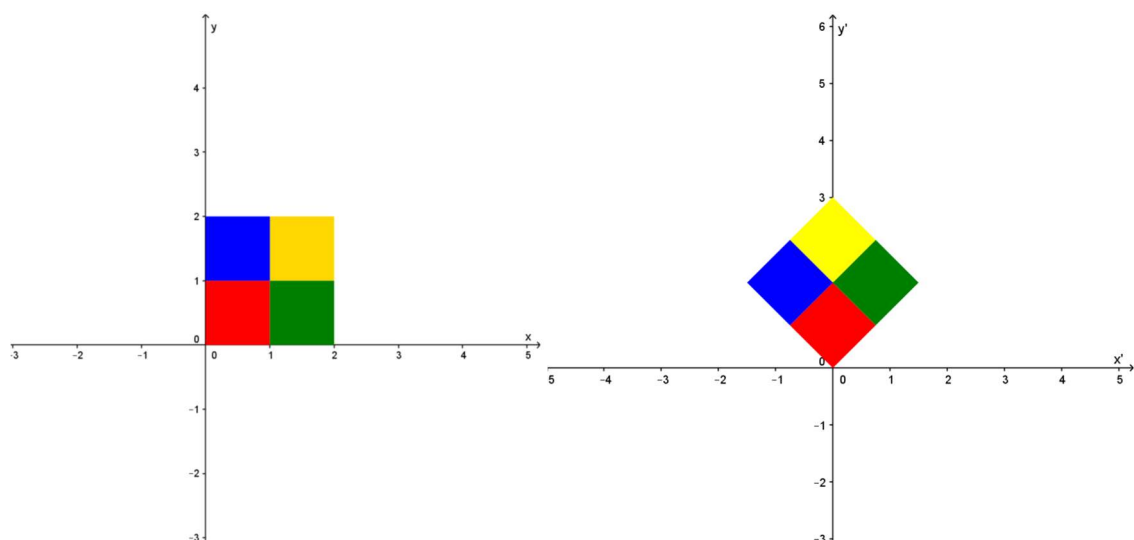
$$T(X) = AX.$$

Onde $X = (x, y)$, e A é a matriz 2×2 .

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Podemos ver T como regiões de mapeamento do plano xy para o plano $x'y'$, $(x', y') = T(x, y)$.

Gráfico 6 - Mapeamento de um paralelogramo



Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

O paralelogramo sob T ainda é um paralelogramo. Mas precisamos mostrar que a mesma relação entre os vértices ainda se mantém. Façamos os vértices do quadrilátero como $a' = T(a), b' = T(b), c' = T(c)$ e $d' = T(d)$. Dado $d + a = b + c$, significa que o quadrilátero original é um paralelogramo que pode multiplicar tal condição pela matriz A , associada com T , e obter $Ad + Aa = Ab + Ac$. Em termos de novos vértices, esta equação é exatamente $d' + a' = b' + c'$. Com efeito, a imagem de um paralelogramo sob uma transformação linear é outro paralelogramo.

2.10.2 Mapeando paralelepípedos

A transformação linear tridimensional é uma função $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ da forma,

$$T(x, y, z) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) = AX.$$

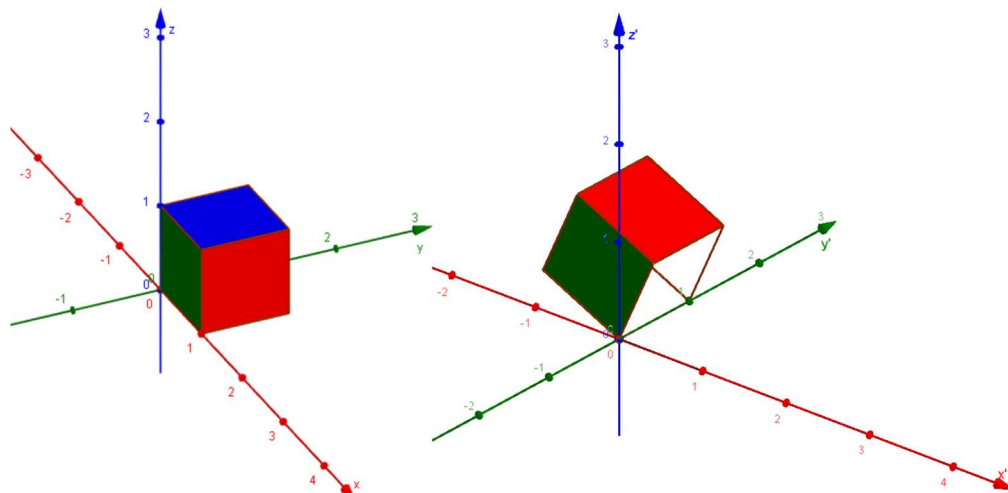
Onde,

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ e } X = (x, y, z).$$

Os componentes a_{ij} de A definem a transformação linear.

Como um dos sistemas de cores é representado por um cubo de cores, o cubo RGB, na escala decimal, eis um exemplo de transformação linear tridimensional utilizando um cubo com arestas de comprimento unitário.

Gráfico 7 – Mapeamento de um paralelepípedo



Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

Mesmo que os cálculos não são para duas dimensões, as transformações lineares tridimensionais mapeiam paralelogramos em paralelogramos. Portanto, T mapeia as seis faces de um paralelepípedo em seis outros paralelogramos. Este resultado significa que T mapeia o paralelepípedo para um sólido geométrico tridimensional com seis faces que são paralelogramos, que definem um paralelepípedo. Podemos concluir que transformações lineares mapeiam paralelepípedos em paralelepípedos.

2.11 Além das três dimensões

Podemos, facilmente, visualizar duas ou três dimensões ao representarmos um vetor tal como $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ e $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, respectivamente. Também podemos ir além de três dimensões como $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Para dimensão superior é fácil representar numericamente, mas vetores não são fáceis de visualizar. Assim é o espectro de luz visível, multidimensional.

Como estamos acostumados com vetores apenas como indicadores de localização no espaço físico, a solução é desfocar das dimensões matemáticas de um vetor e das dimensões espaciais que conhecemos. Isto é difícil, pois estamos contidos em apenas três dimensões.

Pode parecer que o que vai além de três dimensões é uma abstração matemática inútil. Acontece que essa suposição está muito longe da verdade. Para descrever até mesmo os objetos mais simples, precisamos de mais de três dimensões. O espectro de luz visível mesmo, como aplicação matemática, é um desafio para desenvolver modelos matemáticos que podem descrever de forma realista em um sistema físico e ainda manter o número de dimensões tão grande.

Quantas dimensões são necessárias para especificar a posição de uma cor no espaço? Poderíamos afirmar que seriam necessárias três dimensões, a partir das coordenadas x, y e z . Em alguns sistemas de cores, a matiz, a saturação e a luminosidade seriam suficientes, mas uma outra dimensão é necessária para simular um outro atributo, a transparência.

Newton, mesmo, havia sublinhado a existência de um número infinito de cores, correspondente ao número infinito de graus de refringência (índice de refração). Seus

escritos e sua discussão sobre o processo de mistura minimizou a noção de mudança de cor contínua e enfatizou um espectro discreto pela existência de sete "cores primárias". As gradações intermediárias de cor foram explicadas como resultantes da sobreposição destas "cores primárias" no espectro.

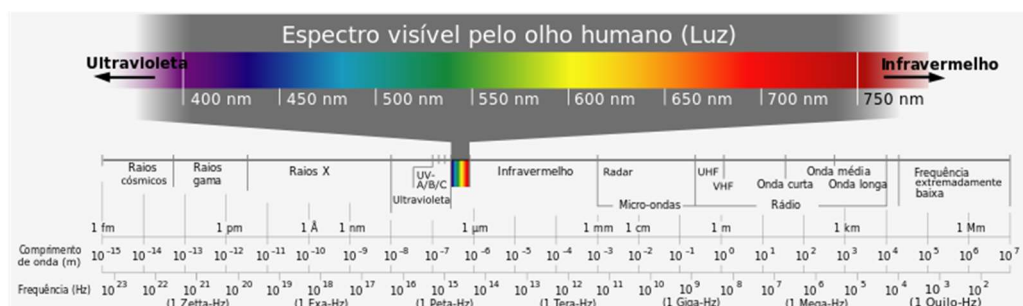
3 LUZ VISÍVEL – O ESPECTRO DE CORES SOB OLHAR MATEMÁTICO

A visão é o órgão do sentido da energia radiante, ou seja, através da radiação eletromagnética solar. A modalidade desse sentido é a luz, apresentado como cor no espaço tridimensional. No entanto, o verdadeiro órgão da visão é o cérebro, pois no momento da conscientização da cor há uma informação sensitiva da imagem óptica de conceituação e visualização de cores e objetos em nosso meio.

[...] três graus de resposta: o primeiro grau se limita à estimulação imediata dos órgãos corporais por objetos externos; o segundo grau compreende todos os imediatos efeitos produzidos na mente. Esses efeitos incluem dor, prazer, fome, **cor**, som, gosto; e, o terceiro grau inclui todos os julgamentos sobre coisas fora de nós.¹ (DESCARTES, 1984, p. 294)

A fusão nuclear que ocorre no interior do sol produz um fluxo de radiação para o espaço. Os cientistas descrevem esta radiação como ciclos ou ondas em um campo eletromagnético. Portanto, luz nada mais é que a radiação eletromagnética que estimula o olho. Este estímulo depende tanto de energia (frequência expressa em comprimento de onda) quanto de quantidade de luz (número de fótons).

Figura 27 – Espectro de luz visível



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Espectro_vis%C3%ADvel. Acesso em: 03 nov. 2015.

A figura mostra o espectro visível numa escala de comprimento de onda tal como aparece na luz solar refletida. Fora da faixa visível, a radiação eletromagnética em energias mais elevadas (comprimentos de onda menores do que 380 nanômetros)

¹ Traduzido de "Three degrees of response : the first level is limited to the immediate stimulation of body organs by external objects; the second level comprises all the immediate effects on the mind. These effects include pain, pleasure, hunger, **color**, sound, taste; and the third level includes all judgments about things outside of us." (DESCARTES, 1984, p. 294).

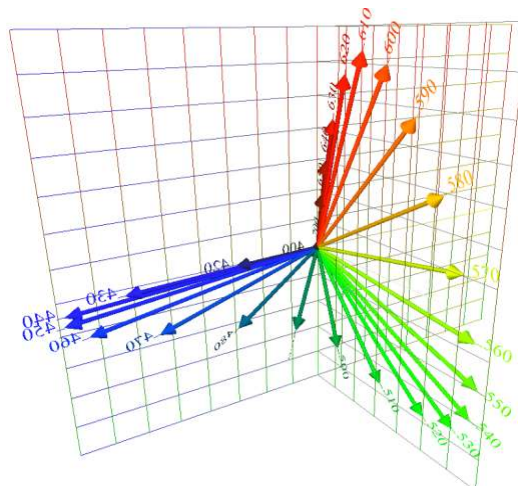
é chamada ultravioleta e inclui raios X e raios gama. Baixa radiação de energia (em comprimentos de onda mais longos do que cerca de 800 nanômetros) é chamada infravermelha ou de calor; em frequências ainda mais baixas (comprimentos de onda mais longos) são micro-ondas, ondas de televisão e ondas de rádio.

A própria luz não tem cor. A cor é como uma sensação. Não é uma característica do mundo físico, mas, também, não é uma ilusão. Um único comprimento de onda do espectro ou luz monocromática cria uma percepção reconhecível, mas o mesmo comprimento de onda da luz pode mudar a cor se ele é visto em um contexto diferente. Por exemplo, comprimento de onda longo ou luz "vermelha" pode aparecer em vermelho, escarlata, carmesim, rosa, marrom, cinza ou preto mesmo. Da mesma forma, as ilustrações de cores (incluindo o diagrama de cromaticidade) são apenas símbolos para os diferentes comprimentos de onda de luz.

Milhares de cores distintas podem surgir a partir do estímulo de receptores de três cores diferentes, a teoria tricromática da visão de cores, proposta pela primeira vez no século XVIII. Esta teoria é a fundação da moderna colorimetria, que é a correspondência de cores percebidas através de medição física de luzes ou superfícies.

Qualquer diagrama que mostra a combinação das cores define, também, uma específica geometria da cor. Esta geometria se altera dependendo da forma como as cores são combinadas. As relações entre a sensação de cor específica e a "forma" de cor na mente são aspectos de um mesmo problema.

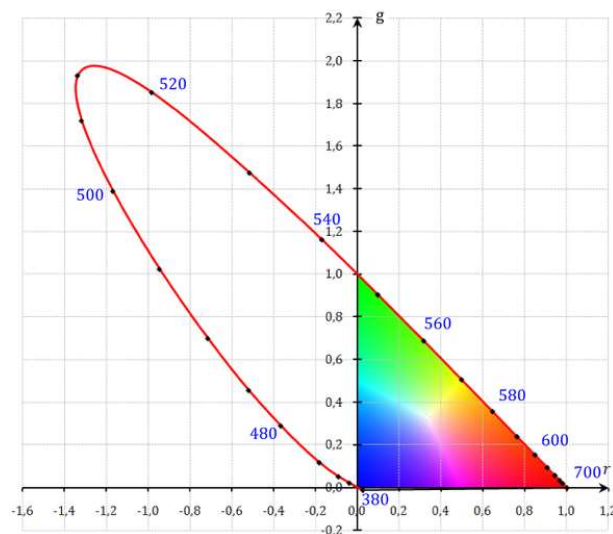
Figura 28 – Vetores de cor



Fonte: <http://www.handprint.com>. Acesso em: 06 nov. 2015.

O espaço de cor é representado de duas maneiras: valores nulos do espectro, formado na origem, tons "pretos"; e, projeção do espectro na superfície plana de um triângulo equilátero, cujos vértices estão localizados nos valores máximos de três cores. O locus do espectro tridimensional é achatado em duas dimensões, e o espaço de cor obtido é algo parecido com um triângulo retângulo. Uma linha desde a origem até o ponto branco forma uma escala de cinza acromática (sem cor).

Gráfico 8 – Locus do espectro tridimensional



Fonte: <http://www.handprint.com>.
Acesso em: 11 nov. 2015.

De acordo com a figura o espectro é um triângulo de mistura trilinear ou um triângulo de Maxwell, que veremos mais adiante, em homenagem ao físico inglês do século XIX, James Clerk Maxwell, quem primeiro o utilizou. Qualquer combinação possível de três cores pode ser representada como um único ponto dentro do triângulo. A gama de cores possíveis fisicamente está contida no interior do locus do espectro.

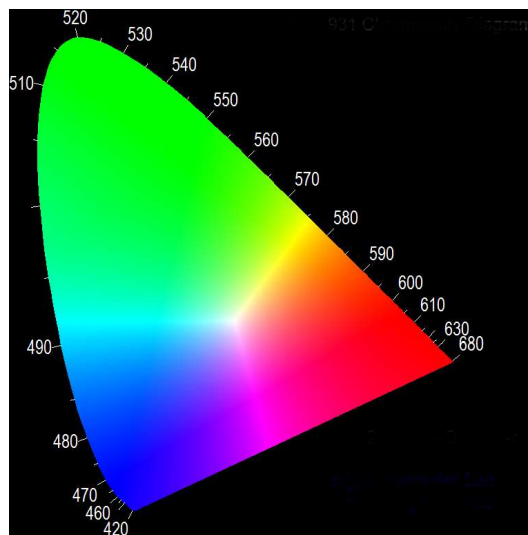
O triângulo de Maxwell não representa as diferenças de luminosidade ou claridade entre as cores, apenas diferenças de cromaticidade (matiz e grau de pureza, ou seja, tonalidade e saturação da cor). A mistura no interior do triângulo, cujos extremos comprimentos de onda longos e curtos estão ligados, é chamado de diagrama de cromaticidade.

Cada vértice do triângulo representa a cor de máxima pureza. Os lados do triângulo representam tons entre apenas dois tipos de cores. Qualquer localização no

interior do triângulo representa uma cor que resulta das coordenadas das três cores básicas.

O ponto onde as três cores primárias, vermelha, verde e azul, contribuem em proporções iguais ao seu peso perceptual é o ponto branco. As cromaticidades de monocromáticos, radiações produzidas por apenas uma cor, definem o locus do espectro, o traço das cores mais intensas fisicamente possíveis. A linha de "vermelhos" e "azuis" entre 400 nanômetros e 700 nanômetros, que inclui magenta e roxo, é chamada de linha púrpura.

Figura 29 – Diagrama de cromaticidade

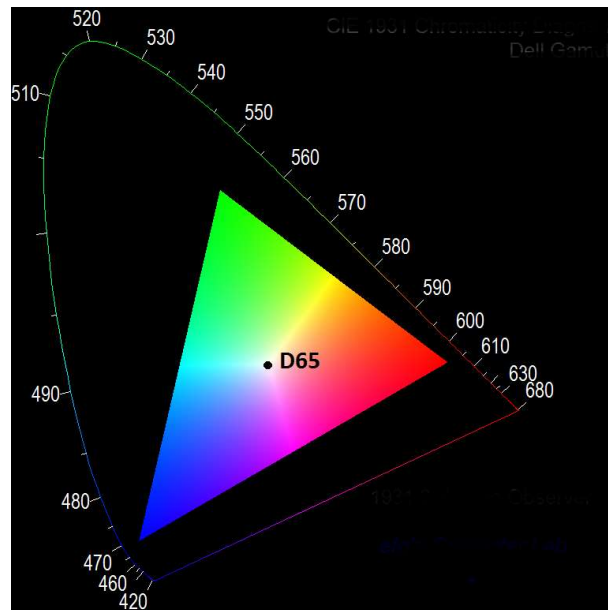


Fonte: O autor, 2016. Software CIE Chromaticity Diagrams.

A pureza ou croma de uma cor é definida como o comprimento da linha entre a cor do ponto e o branco. É óbvio que tons monocromáticos não têm igualdade de pureza: o espectral "amarelo" aparece bastante pálido ou esbranquiçado, pois fica próximo ao ponto branco, e o espectral "violeta" tem a maior croma porque é mais distante.

Todas as misturas fora do locus do espectro e da linha púrpura são proporções de cores que não podem ser produzidas por qualquer luz física. Elas são fisicamente impossíveis ou cores irrealizáveis.

Figura 30 – Locus sob iluminante **D65**

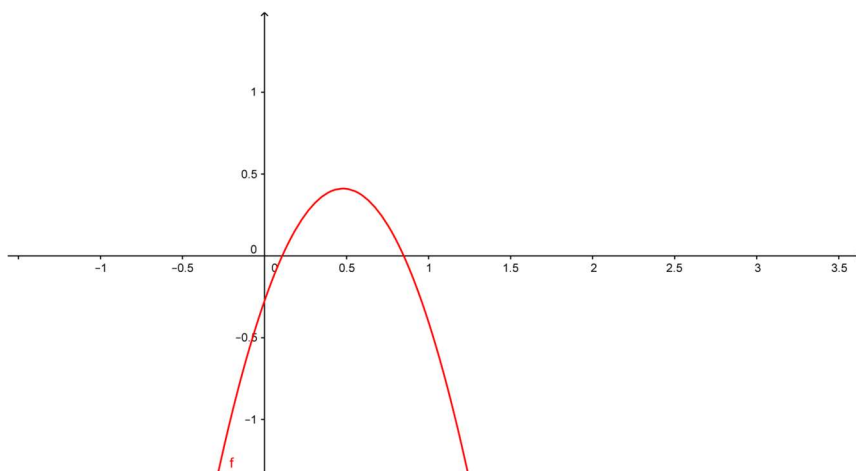


Fonte: O autor, 2016. Software CIE Chromaticity Diagrams.

D65, representado na figura, é o iluminante padrão correspondente tanto à luz solar direta, quanto à luz difusa por um céu claro, de acordo com a Comissão Internacional de Iluminação (CIE). Apesar de ser difícil reproduzir artificialmente, este iluminante é fácil de se caracterizar matematicamente, onde as coordenadas cromáticas positivas x e y apresentam a seguinte relação quadrática:

$$y = -3x^2 + 2,87x - 0,275$$

Gráfico 9 – Função $y = -3x^2 + 2,87x - ,275$



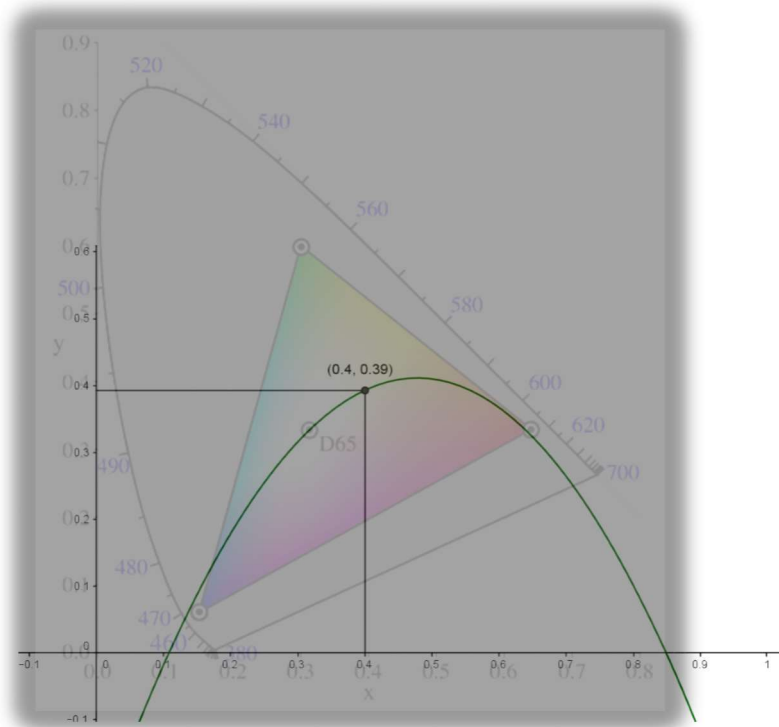
Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

Exercícios

3.1 Para $x = 0.4$ temos,

$$y = -3x^2 + 2,87x - 0,275 = -3.0,4^2 + 2,87.0,4x - 0,275 = 0.39.$$

Gráfico 10 – Coordenadas (0.4, 0.39) no diagrama de cromaticidade



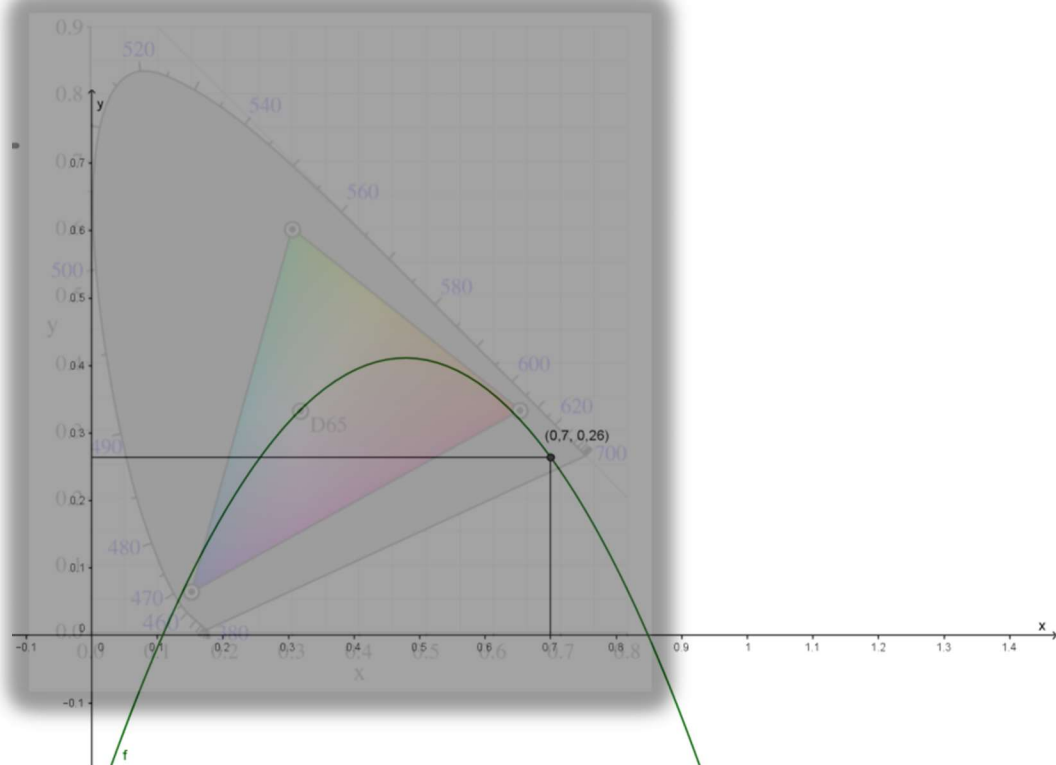
Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra sobreposto ao Software CIE Chromaticity Diagrams.

De acordo com o diagrama CIE, o resultado é uma cor possível sob o iluminante **D65**, pois a coordenada (0,4, 0,39) se encontra no interior do triângulo.

3.2 Para $x = 0.7$ temos,

$$y = -3x^2 + 2,87x - 0,275 = -3.0,7^2 + 2,87.0,7x - 0,275 = 0.26$$

Gráfico 11 – Coordenadas (0,7, 0,26) no diagrama de cromaticidade



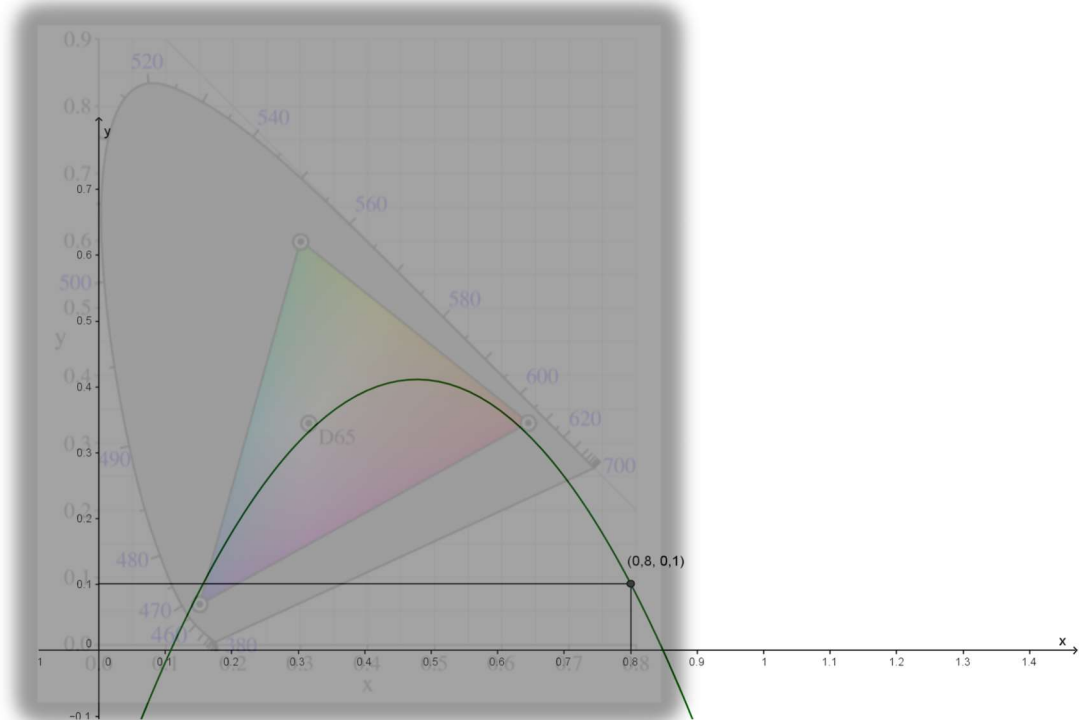
Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra sobreposto ao Software CIE Chromaticity Diagrams.

De acordo com o diagrama CIE, o resultado é uma cor possível sob iluminante diferente de **D65**, pois a coordenada (0,7, 0,26) se encontra fora do triângulo, porém no interior do locus do espectro, acima da linha púrpura.

3.3 Para $x = 0,8$ temos,

$$y = -3x^2 + 2,87x - 0,275 = -3 \cdot 0,8^2 + 2,87 \cdot 0,8x - 0,275 = 0,1$$

Gráfico 12 – Coordenadas (0,8, 0,1) no diagrama de cromaticidade



Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra sobreposto ao Software CIE Chromaticity Diagrams.

De acordo com o diagrama CIE, o resultado é uma cor impossível sob qualquer iluminante, pois a coordenada (0,8, 0,1) se encontra fora do locus do espectro.

4 A MATEMÁTICA DA PERCEPÇÃO DAS CORES

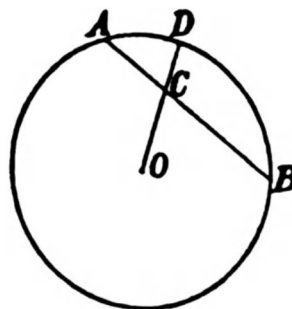
Métodos para definir uma cor: medição da cor através de um espectro ou curva de colorimetria; e, proporções das cores representadas em um diagrama de cromaticidade. São métodos que se concentram no estímulo físico (luminância), e sensação de cor, respectivamente.

O matemático alemão Hermann Grassmann revisou o círculo matiz de Newton, comentando sobre os princípios implícitos de Newton, o "centro de gravidade" como método de prever misturas de cores. Grassmann propôs que - cada sensação de cor pode ser analisada em três elementos matematicamente determináveis: o matiz, o brilho e o brilho branco (brilho do componente de cor acromática).

Grassmann esclareceu o princípio de que misturas de luz são aditivas no matiz, brilho e croma (mistura com "branco"), e, portanto, que as sensações da cor estão relacionadas com misturas de luz de acordo com princípios quantitativos. Ele também mostrou que todos os tons têm uma cor complementar que produzem "branco" quando misturados.

Estabelecida a questão das cores complementares, Grassmann introduziu a representação geométrica, que hoje chamamos de vetor, das cores. Garantiu que as cores obedecem às leis do centroide (ponto de gravidade), e a mistura pode ser representada como somas geométricas de dois pesos A e B aplicados em pontos a e b . Grassmann mostrou que intensidades poderiam ser expressas como pesos nas extremidades dos segmentos de iguais comprimentos, com o centro de gravidade expressando a tonalidade e a intensidade de mistura.

Figura 31 - Representação plana das cores por Grassmann

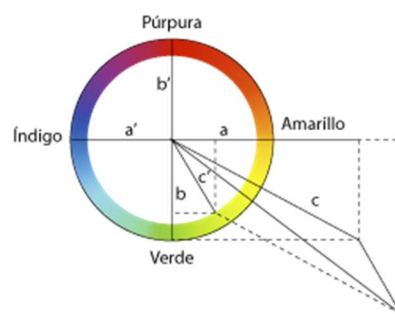


Fonte: SCHUBRING, 1996.

Considerando uma mistura particular de a unidades da cor A e b unidades da cor B . A tonalidade da mistura é representada pelo ponto-cor C , o seu centro de gravidade; e, O , o ponto branco. $(a + b)\overline{OC}$ representa intensidade cromática da mistura; $(a + b)\overline{CD}$ a intensidade da mistura com o branco; e, $(a + b)\overline{OD}$, onde $\overline{OD} = 1$, a intensidade total da mistura.

Daí resulta que cada cor pode ser representada em três dimensões com um ponto e um peso na roda de cores.

Figura 32 – Representação tridimensional das cores por Grassmann



Fonte: http://www.gusgsm.com/grassmann_las_leyes_empiricas_sobre_la_vision_del_color. Acesso em: 28 jan. 2016.

A partir do ponto central tem-se a direção ($\vec{C}$), o peso do ponto ($\vec{C}'$) e a intensidade de luz total ($\vec{C} + \vec{C}'$). O produto desta intensidade de luz total com a distância a partir do centro é a intensidade da cor. Se a saturação é a intensidade de cor dividida pela intensidade da luz, então, a saturação é representada, simplesmente, como a distância a partir do centro.

Grassmann concluiu, portanto, estar de acordo com a regra empírica de Newton e que a dedução é feita de forma "puramente matemática". No entanto, de acordo com o próprio Grassmann, a maneira pela qual Newton distribuiu, homogeneamente, as cores ao longo da circunferência do círculo precisou ser revista.

Desde então há diferentes formulações das leis de Grassmann com uma exposição matemática formal: indicando o símbolo de igualdade $=$ para cor metamérica (fenômeno no qual duas cores são iguais quando iluminadas por uma determinada fonte de luz, até que as diferenças de cor sejam reveladas quando vistas em outra fonte de luz), e a correspondência de estímulos com o símbolo aditivo $+$ para mistura de estímulos de cores.

Sejam as cores X, Y, Z e W as seguintes propriedades são verdadeiras:

Simetria: Se $X = Y$ então $Y = X$;

Transitividade: Se $X = Y$ e $Y = Z$, então $X = Z$;

Proporcionalidade: Se $X = Y$, então $X.a = b.Y$ para todos os números reais $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a = b$; e,

Aditiva: Se $X = Y$ e $(X + Z) = (Y + W)$, então, $X + Z - W = Y$. Logo, $Z = W$.

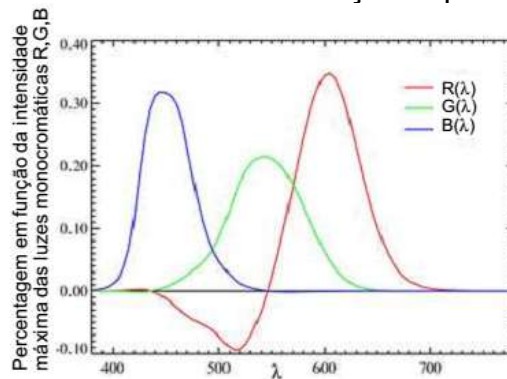
As propriedades de simetria e transitividade, em conjunto com a propriedade reflexiva $X = X$, definem uma relação de equivalência entre os estímulos de cores, a relação entre os estímulos metaméricos. As cores podem, portanto, ser definidas como classes de equivalência entre estímulos de cores. A propriedade da proporcionalidade estabelece a compatibilidade entre as variações de intensidade de um estímulo de cor e a proporção de metamerismo. E a propriedade aditiva afirma que a proporção de metamerismo é preservada.

O conjunto de estímulos de cores é, portanto, um espaço vetorial de números reais, que é o espaço triestímulo (será abordado posteriormente), um espaço tridimensional. Tanto que Hermann von Helmholtz afirmou haver três receptores, cada sinalização, uma determinada cor, e os nomeou vermelho, verde e azul. De acordo com ele, o amarelo era, simplesmente, produzido a partir da mistura de vermelho e verde.

O diagrama abaixo mostra a função “cor” como soma ponderada, linear.

$$A(\lambda) = rR(\lambda) + gG(\lambda) + bB(\lambda)$$

Gráfico 13 – Teoria tricromática.
Reconstrução espectral



Fonte: <http://www.dca.fee.unicamp.br/courses/IA725/1s2011/slides/cor.pdf>. Acesso em: 06 nov. 2015.

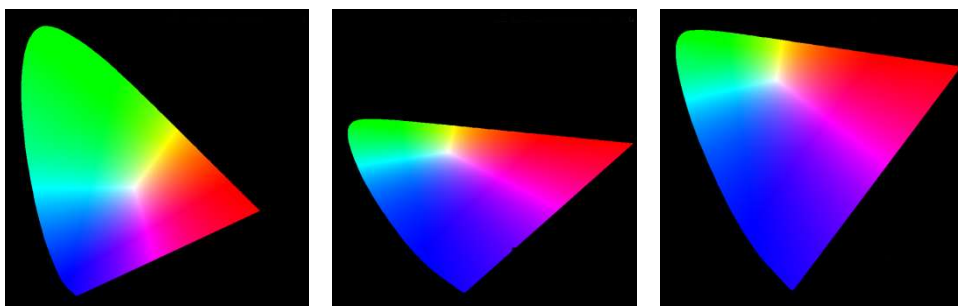
Os coeficientes r , g e b indicam o peso correspondente à cor.

O branco seria resultado desta função, onde todos os coeficientes são iguais. Em essência, isto significa que o diagrama de cores espectrais não é um círculo, mas uma região curva, já que o ponto branco é equidistante de cores igualmente saturadas. Esta regra se deve ao centro de gravidade, detalhado anteriormente.

A geometria da percepção de visão é identificada através de julgamentos da diferença de cor. O brilho e matiz da cor não são dimensões independentes, um atributo afeta o outro dependendo do nível de intensidade. E esta é uma característica geral de visão de cores. Implica, então, que a nossa ideia de cor como atributos ou dimensões distintas deturpa a natureza dinâmica da percepção da cor.

Na ligação entre matiz e pureza da cor, surge a geometria do diagrama de cromaticidade. Desenvolvida como medida colorimétrica da diferença de cor aparente entre duas cores semelhantes. Podemos, então, discriminar cores mais suaves num plano cromático.

Figura 33 – Diagramas de cromaticidade – CIE 1931, 1960 e 1976



Fonte: O autor, 2016. Software CIE Chromaticity Diagrams.

A Comissão Internacional de Iluminação – CIE depois de iniciar a evolução dos modelos de aparência da cor, ampliou o modelo para um padrão matemático que visa descrever os perceptuais aspectos da visão de cor, o CIECAM, na tentativa de um espaço de cor uniforme, de modo que uma distância espacial igual entre duas cores representa uma diferença perceptual igual entre elas.

5 MATEMÁTICA APLICADA ÀS MISTURAS DAS CORES

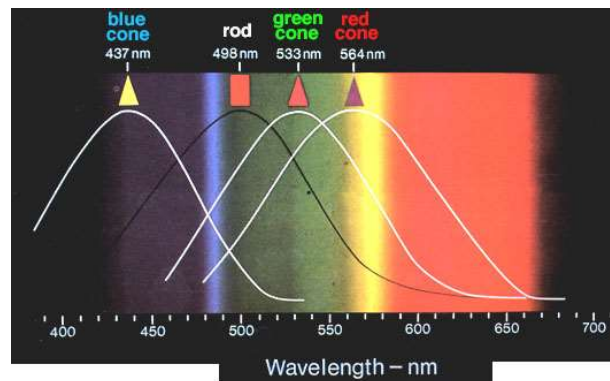
Foi abordado até aqui os fundamentos da visão de cores. Agora, o foco se restringe a uma única questão: como misturas das cores podem ser explicadas matematicamente.

Pintores misturam tintas para moldar a luz refletida de uma pintura, e o olho do espectador interpreta esta luz refletida como a cor no espaço. Estes dois extremos da experiência de cores - as tintas misturadas e a interpretação do olho - são descritas adiante.

Newton declarou que cor é uma propriedade perceptual, não um atributo físico, ou seja, as misturas de luzes ocorrem nos olhos. Hoje, defini-se cromaticidade da luz como misturas a estímulos proporcionais ao espaço de cor LMS. L (Long), M (Medium) e S (Short) é um espaço de cor representado pela resposta dos três tipos de cones² do olho humano, devido à sensibilidade em captar diferentes comprimentos de onda da radiação eletromagnética. O primeiro responde à luz de comprimentos longos de onda, como a cor vermelha; o segundo tipo responde à luz de comprimento médio de onda, atingindo um máximo de cor verde; e, o terceiro tipo responde ao mais curto comprimento de onda de luz, de cor azulada. Isso é chamado decodificação tricromática da visão de cores, propriedade da visão humana que é o fundamento de toda a teoria da colorimetria. No entanto, a existência de três diferentes tipos de cones não permite explicar todas as características da visão de cores.

² Cones são as células do olho humano que têm a capacidade de reconhecer as cores, segundo a teoria tricromática (Teoria de Young-Helmholtz). Existem também os bastonetes, outro tipo de célula dos olhos que têm a capacidade de reconhecer a luminosidade. Como o foco deste trabalho são as cores em si, apenas os cones serão referidos.

Gráfico 14 – Sensibilidade normalizada por Comprimento de ondas



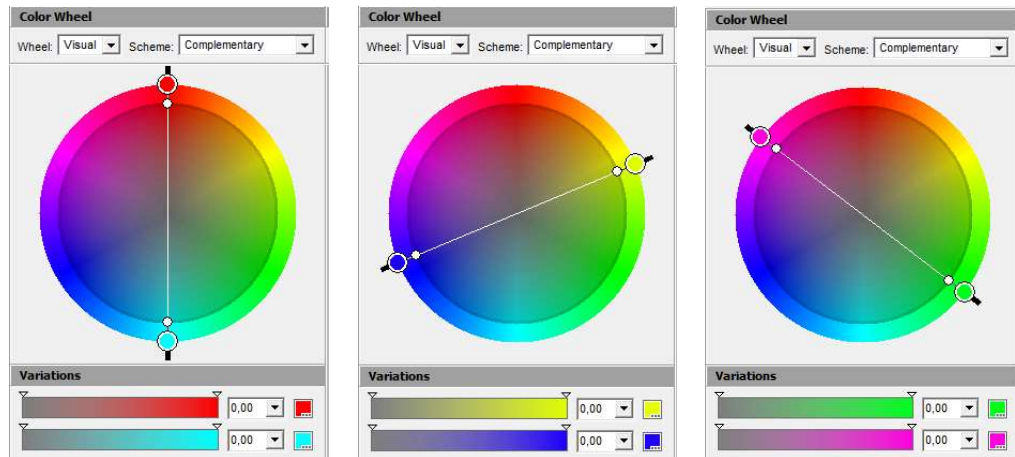
Fonte: <http://www1.appstate.edu/~kms/classes/psy3215/Color/receptors.htm>. Acesso em: 21 jan. 2016.

Luzes vermelha, verde e azul (RGB – Red, Green e Blue) são usadas para demonstrar a mistura de cores aditivas, porque elas estimulam os cones designados L, M e S.

As misturas de cores em objetos comportam-se de forma distinta às das misturas de luzes. Elas são definidas por cores primárias ciano, amarelo e magenta (CMY – Cyan, Magenta e Yellow). Na mistura de cores subtrativas, comprimentos de onda de luz são absorvidas ou refletidas.

A mistura de cores aditivas explica como o olho interpreta comprimentos de onda de luz na percepção da cor. Ela descreve a estrutura da cor de percepção de luz a partir de três luzes principais: vermelho, verde e azul, mais a luz branca (ou ponto branco) definida pela mistura das três luzes coloridas em conjunto. Esta formação tricromática é a base para todos os modernos diagramas de cromaticidade, e identificação de cores complementares (quando se misturam surge o branco).

Figura 34 – Cores complementares



Fonte: O autor, 2016. Software Color Wheel Pro.

A base aditiva da mistura de cores é o metamerismo tricromático (correspondência de cor aparente de objetos com diferentes distribuições de potência espectral). A cor produzida por qualquer curva espectral pode ser compensada pela mistura visual de três luzes, não mais: ou três luzes fortemente saturadas (único comprimento de onda ou monocromáticas), ou, no máximo, duas luzes monocromáticas misturadas com uma luz "branca".

Os princípios, a seguir, resumem as regras metaméricas da mistura aditiva das cores. Eles foram declarados pela primeira vez por Grassmann, em 1853, e são conhecidos hoje como descrições precisas de mistura de cores.

- O brilho, saturação e matiz de duas ou mais luzes preveem o brilho, saturação e matiz de sua mistura;
- Quaisquer duas luzes, que parecem ser da mesma cor, misturam cores idênticas com qualquer terceira luz, mesmo que os perfis espectrais das luzes contenham comprimentos de onda em diferentes proporções;
- Se duas misturas de luzes têm uma cor idêntica, e, em seguida, adicionar uma terceira luz em ambas, na mesma intensidade, irá resultar em misturas de cores idênticas; e,
- A cromaticidade (tonalidade e saturação) de qualquer luz pode ser compensada por um ou dois comprimentos de onda monocromática misturada com alguma quantidade de luz "branca" (acromática).

Estes princípios de Grassmann do metamerismo descrevem as características gerais da visão tricromática, através das seguintes propriedades:

- Propriedade aditiva: quando se adiciona a mesma radiação a dois metâmeros (estímulos fisicamente diferentes, mas que produzem a mesma sensação visual), eles permanecem metâmeros: (λ_i – fonte luminosa)

$$\lambda_a + \lambda_b \leftrightarrow \lambda_c + \lambda_d \quad \rightarrow \quad \lambda_a + \lambda_b + \lambda_x \leftrightarrow \lambda_c + \lambda_d + \lambda_x$$

- Propriedade escalar: se aumentarmos ou diminuirmos a intensidade de dois metâmeros na mesma quantidade, eles permanecem metâmeros:

$$x(\lambda_a + \lambda_b) \leftrightarrow x(\lambda_c + \lambda_d)$$

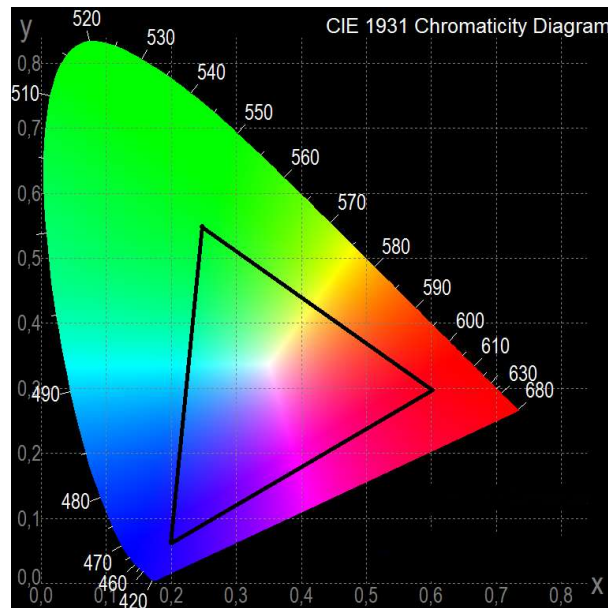
- Propriedade associativa: o metamerismo se mantém mesmo que um metâmero seja substituído por outro:

$$\lambda_a + \lambda_b \leftrightarrow \lambda_c + \lambda_d, \text{ se } \lambda_b \leftrightarrow \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z, \text{ então } \lambda_a + \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z \leftrightarrow \lambda_c + \lambda_d$$

Veremos, mais adiante, que as misturas subtrativas não seguem regras metaméricas, sendo esta a diferença mais importante entre mistura aditiva e mistura de cores subtrativas.

O diagrama, abaixo, mostra o local onde três luzes monocromáticas são usadas para analisar combinações de cores e misturas de cores tricromáticas.

Gráfico 15 – Diagrama de cromaticidade com foco em determinada gama de cores



Fonte: O autor, 2016. Software CIE Chromaticity Diagrams.

O foco aqui é no triângulo ou gama de cores, que liga as três cores primárias. Isto define a gama de misturas de cores aditivas que é possível fazer com essas três primárias. Esta gama abrange boa parte da área de cromaticidade, área de todas as possíveis cores. Uma porção significativa do diagrama de cromaticidade está fora da gama. Em outras palavras, as luzes primárias não podem misturar todas as cores visíveis. Portanto, as únicas "primárias" que podem misturar todas as cores possíveis, são as saídas dos cones L, M e S. Então, na verdade, experimentam-se sensações de cor vermelha, verde ou azul, que resulta da combinação e interpretação destas saídas no córtex visual.

Há uma lógica simples para a escolha dessas luzes primárias. Quase todo comprimento de onda da luz que estimula um cone também irá estimular um ou ambos os outros cones, porque as sensibilidades aos cones se sobrepõem. Logo, uma cor primária aditiva ideal deve estimular apenas um tipo de receptor de cone (L, M ou S) tão fortemente quanto possível, e estimular os outros dois tipos de cone tão pouco quanto possível. Poderíamos obter mistura aditiva de cores com luzes coloridas que representam as cores primárias subtrativas (ciano, amarelo e magenta), embora, com a mistura destas luzes teríamos tons insaturados (esbranquiçados).

As respostas dos receptores L, M e S podem ser previstas matematicamente a partir da intensidade somada de todos os comprimentos de onda. As primárias aditivas

conectam um estímulo da luz a uma sensação de cor. Isso é o que faz a mistura de cores aditiva, no campo científico, uma teoria da visão de cores.

Em comparação com a mistura aditiva das cores, temos a mistura subtrativa das cores. A teoria desta mistura imita as principais características da teoria aditiva da cor, e para entender por que a mistura de cores subtrativas não descrevem com precisão as cores de misturas de substâncias, é preciso fazer comparações com o que já foi visto em relação às misturas aditivas.

Em princípio, a teoria da cor subtrativa é capaz de explicar as mudanças de cor que ocorrem em qualquer tipo de mistura de material. Na verdade, ela também é capaz de explicar as mudanças de cor que ocorrem quando uma superfície é iluminada por diferentes fontes de luz. E esta é a dificuldade fundamental na teoria de mistura subtrativa: ela deve explicar o comportamento de variadas substâncias que refletem a luz, tais como pós, tintas, corantes; e, substâncias de transmissão de luz, como filtros fotográficos, vitrais ou líquidos de cor.

Se o interessante é apenas a cor de um pigmento ou corante, então pode-se definir seus atributos de cor medindo a sua curva de refletância espectral. Isso define a mistura de luz que é refletida.

$$R = \frac{F_r}{F_T}$$

Onde R é a refletância, F_r o fluxo de radiação eletromagnética refletida e F_T o fluxo de radiação eletromagnética incidente.

Se R for 0 não há reflexão, e se for 1, toda a radiação é refletida.

Então, a relação entre luz absorvida luz_A , luz refletida luz_R e luz transmitida luz_{TR} é:

$$\frac{luz_A}{luz_T} + \frac{luz_R}{luz_T} + \frac{luz_{TR}}{luz_T} = 1$$

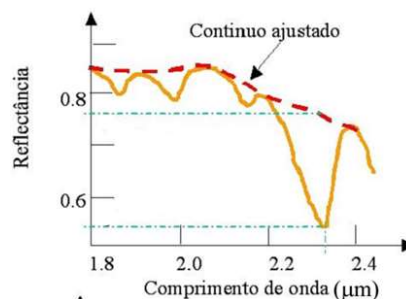
Já que a luz total $luz_T = luz_A + luz_R + luz_{TR}$.

Isso é fácil de visualizar quando fazemos uma análise derivativa do espectro de refletância. O método da análise derivativa compreende os picos de refletância, considerando a taxa de mudança da refletância em relação à taxa de variação do comprimento de onda.

$$\frac{ds}{d\lambda_i} \approx \frac{S(\lambda_i) - S(\lambda_j)}{\Delta\lambda}$$

Onde, $\frac{ds}{d\lambda_i}$ é a derivada espectral, S é o sinal de refletância, λ_i é o maior comprimento de onda, λ_j é o menor comprimento de onda, e $\Delta\lambda$ é a separação entre as bandas adjacentes, $\Delta\lambda = \lambda_i - \lambda_j$. Assim, representado graficamente:

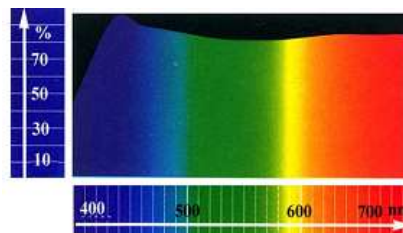
Gráfico 16 – Refletância pelo Comprimento de onda



Fonte: INPE, 2008. Métodos de análise de dados hiperespectrais.

Por exemplo, curvas de refletância a partir da reflexão no dióxido de titânio (branco) estão próximas a 1.

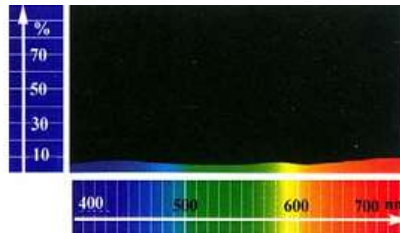
Gráfico 17 – Curvas de refletância no dióxido de titânio



Fonte: <http://www.handprint.com>.
Acesso em: 05 jan. 2016.

Outro exemplo seria curvas de refletância a partir da reflexão no marfim preto próximas a zero.

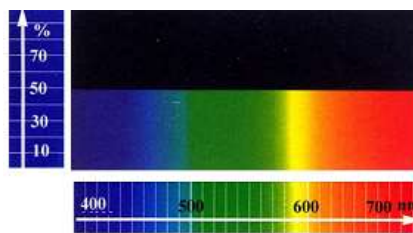
Gráfico 18 – Curvas de refletância no marfim preto



Fonte: <http://www.handprint.com>.
Acesso em: 05 jan. 2016.

Um terceiro exemplo seria curvas de refletância a partir da reflexão num objeto cinza ideal próximas a 1/2.

Gráfico 19 – Curvas de refletância em um objeto cinza ideal



Fonte: <http://www.handprint.com>.
Acesso em: 05 jan. 2016.

As curvas de refletância, dos exemplos acima, estão interpretadas sob iluminantes de igual energia, luz branca.

Os exemplos acima mostram as curvas de refletância para as cores de superfície mais básicas: branco, preto e cinza. A dimensão horizontal identifica comprimentos de onda de luz específicos do espectro visível. A altura da curva mostra a proporção (de 0% a 100%) da luz incidente que é refletida pela superfície em cada comprimento de onda. A altura média de uma curva de refletância nunca é 0%, todas as superfícies físicas refletem alguma luz. Aquarelas negras refletem cerca de 10% da luz que incide sobre elas, e tintas acrílicas pretas refletem cerca de 5%.

Duas curvas de refletância podem ser combinadas para modelar a cor que seria produzida pela mistura de dois pigmentos. A curva de refletância da mistura de tintas é aproximadamente a média geométrica das suas refletâncias em cada comprimento de onda no espectro.

De acordo com a figura abaixo, onde há mistura de azul e de vermelho,

Gráfico 20 – Curvas de refletância



Fonte: <http://www.handprint.com>.
Acesso em: 08 jan. 2016.

se o azul reflete 80% de um comprimento de onda "azul específico" de 480 nanômetros, e o vermelho reflete apenas 8%, então a sua mistura vai refletir aproximadamente 25% da luz de comprimento de onda de 480 nanômetros, ou seja, $0,08 \times 0,8 = 0,064$, a raiz quadrada de 0,064 é aproximadamente 0,25. Este cálculo da média geométrica deve ser repetido para cada comprimento de onda, em seguida, a cor aparente da mistura é determinada a partir da média resultante (linha branca encontrada).

Na mistura de cores aditivas, o metamerismo não entra em conflito com a nossa capacidade de descrever a percepção de cores resultante de misturas de luzes, porque a cromaticidade visual de uma luz prevê o seu comportamento de mistura com outras luzes. Mas em misturas de cores subtrativas, é seu perfil de refletância e os atributos físicos que determinam o seu comportamento numa mistura física. Mesmo sabendo todos os atributos físicos de uma mistura subtrativa, a previsão da cor resultante, baseando-se em suas curvas de refletância, é matematicamente complexa. Este é o ponto mais importante da diferença com a teoria da cor aditiva, onde a mistura de duas luzes pode prever a cor resultante.

O efeito visual da cor quando misturamos substâncias materiais, como tintas, corantes, não é o aumento da luz refletida, mas o seu comportamento na absorção da luz. Uma mistura subtrativa absorve comprimentos de onda de luz reduzindo a luminância (brilho) nas cores materiais. Misturando as três cores primárias subtrativas produz um neutro escuro, o oposto do branco, denominada "teoria da cor preta". Portanto, a mistura subtrativa também reduz a matiz (tonalidade), aumenta o cinzento, na cor das substâncias misturadas. Pela mesma razão, uma mistura subtrativa reflete apenas os comprimentos de onda de luz que ambos, na mistura, refletem. Amarelo e

magenta fazem o vermelho porque ambas as tintas amarela e magenta refletem quantidades significativas de luz "vermelha".

Gráfico 21 – Curvas de refletância



Fonte: <http://www.handprint.com>.

Acesso em: 08 jan. 2016.

Nesta mistura de cores subtrativas de amarelo e magenta, a linha branca mostra a curva de refletância da mistura subtrativa. Alta refletância permanece apenas onde ambas as cores refletem a luz. A refletância comum, a luz refletida por ambas as tintas, é em grande parte no "vermelho", o qual representa a tonalidade aproximada da mistura.

No entanto, para a maioria das tintas e corantes, a refletância resultante de uma mistura física de pigmentos é geralmente perto da média geométrica das curvas de refletância de cada comprimento de onda no espectro, como visto anteriormente. Quando se aplica esses cálculos de mistura para a refletância, encontra-se um perfil de mistura mais escuro na curva de refletância total. Por exemplo, ao misturarmos mesma quantidade de branco, com 90% de reflexão, e de preto, com 10% de reflexão, num determinado comprimento de onda, obtemos aproximadamente 30% de luz refletida, reduzindo a luminância do branco em, pelo menos, dois terços. Neste caso, a mistura do branco e do preto em proporções iguais, não reduz a luminância do branco pela metade, mas em dois terços. Como resultado, combinar quaisquer dois corantes sempre resulta numa mistura mais escura, mais opaca.

Foi identificada a combinação multiplicativa de escurecimento de luz (absorção) da mistura de cores subtrativas. Mas não foram identificados ainda os atributos que definem as cores primárias subtrativas ciano, amarelo e magenta.

O fato de que misturas subtrativas sempre subtraem a luminância do material composto, tornando-o mais escuro, é o que afeta a intensidade da cor nos olhos. Uma cor primária subtrativa ideal deve estimular, fortemente, a dois tipos de cones receptores (L e M, ou M e S, ou L e S) dos olhos, de forma igual quanto possível, e

estimular o terceiro tipo de cone tão pouco quanto possível. Em outras palavras, as cores primárias subtrativas são apenas uma forma indireta para especificar as respostas dos cones L, M e S das cores aditivas.

Cada cor primária subtrativa subtrai, do "branco", luz dos comprimentos de onda que representam um único primário aditivo. São fórmulas subtrativas, incluindo tanto o branco (W) quanto o preto (K):

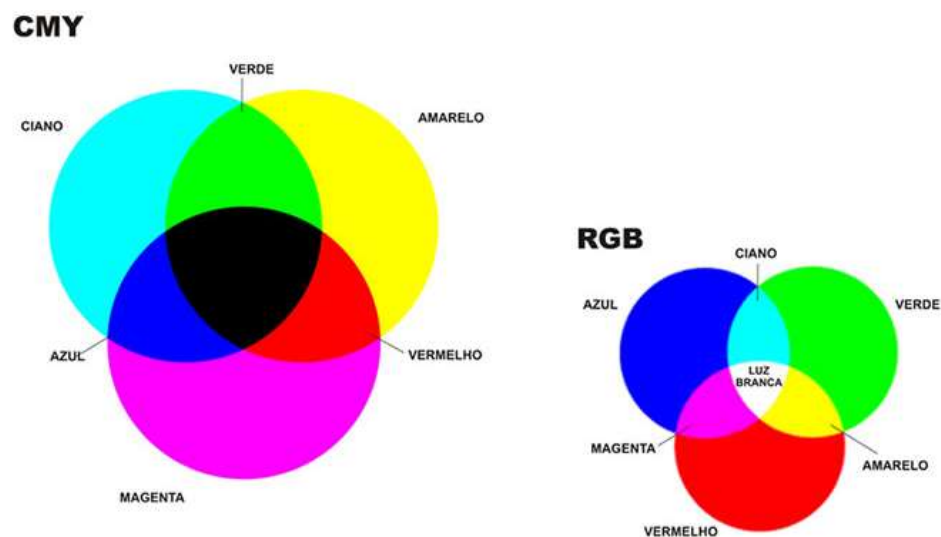
$$W - B = (R + G + B) - B = R + G = Y \text{ (amarelo)}$$

$$W - G = (R + G + B) - G = R + B = M \text{ (magenta)}$$

$$W - R = (R + G + B) - R = G + B = C \text{ (ciano)}$$

$$W - (R + G + B) = K \text{ (preto)}$$

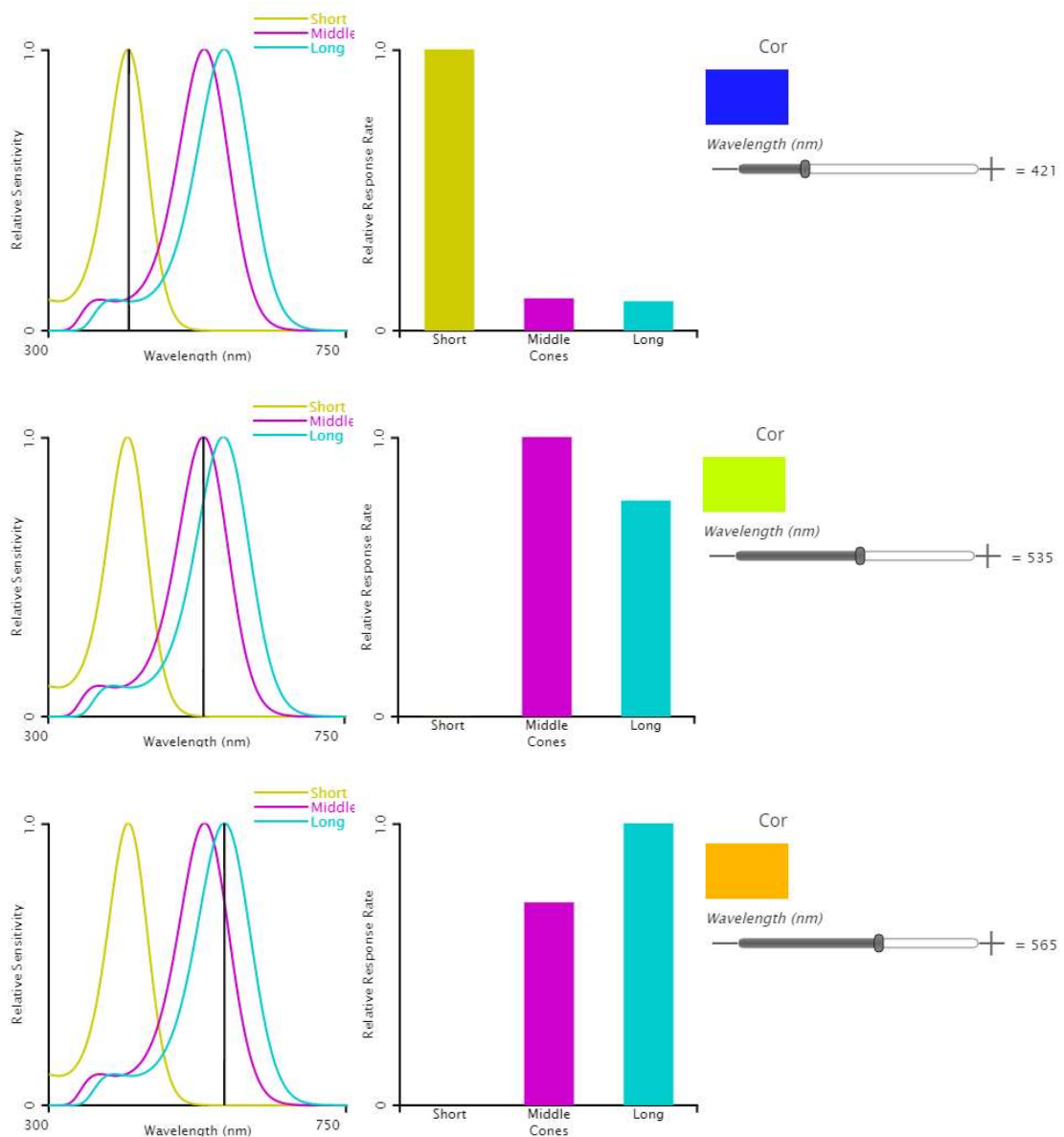
Figura 35 – Reprodução da cor



Fonte: <http://digitalphotographyacademy>. Acesso em: 13 jan. 2016.

Os diagramas a seguir mostram as respostas dos cones (L, M e S).

Gráfico 22 – Respostas dos cones



Fonte: O autor, 2016. Recurso virtual **SAGE edge**.

Nos perfis de resposta dos cones acima, as três cores primárias subtrativas, fisicamente ideais, estimulam de forma significativa o terceiro cone L, M ou S do olho. Em cada caso, não se pode alcançar um tom primário visualmente puro de tinta, por causa de uma limitação fisiológica. A qualidade "invisível" das verdadeiras primárias aditivas é em parte responsável pela qualidade "impura" das primárias subtrativas.

Quando duas destas tintas primárias subtrativas ideais são misturadas, compartilham refletância no "vermelho", no "verde" ou no "azul", ou seja, a mistura de duas primárias subtrativas mantém constante a resposta de um único fotorreceptor

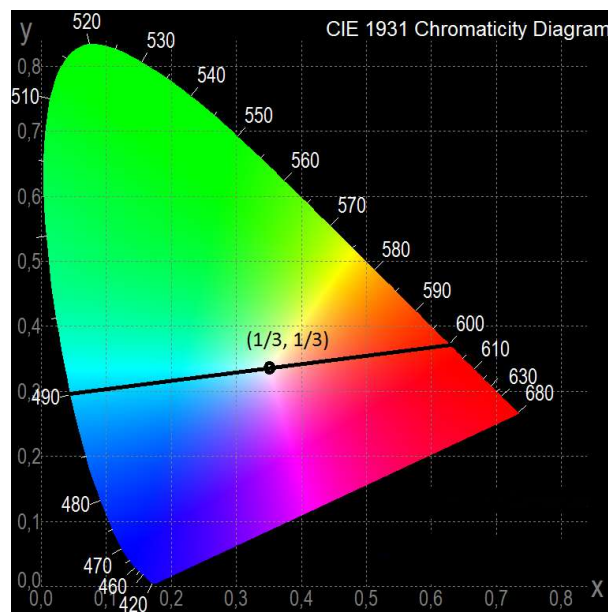
(receptores sensoriais responsáveis pela visão). Parte da refletância amarela e magenta estimula o cone L, "vermelho"; parte da refletância amarela e ciana estimula o cone M, "verde"; e, parte da refletância magenta e ciana estimula o cone S, "azul". Isto significa, também, que as misturas de duas primárias subtrativas refletem a luz de todas as partes do espectro.

Toda mistura de cores envolve a resposta da retina à luz. A única questão é como diferenciar o comportamento do estímulo luminoso, já que a mistura de cores subtrativas é, na verdade, uma manipulação indireta da mistura aditiva de cores. Basta compreender que se a mistura de luz ocorre no mundo externo, é subtrativa; se a mistura de luz ocorre nos cones receptores, é aditiva.

Exercícios

5.1 Qual a cor resultante ao misturarmos quantidades iguais de 490 nanômetros e 600 nanômetros?

Gráfico 23 – Diagrama de cromaticidade



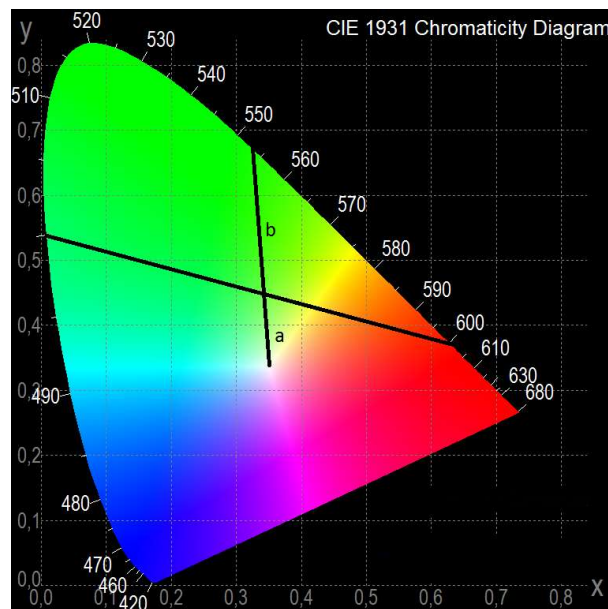
Fonte: O autor, 2016. Software CIE Chromaticity Diagrams.

Solução

Como 490 e 600 nanômetros, de quantidades iguais, são lados opostos do locus do espectro e o segmento de reta que os liga tem como ponto médio $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, a mistura produz o branco.

5.2 Qual a cor resultante ao misturarmos quantidades iguais de 500 nanômetros e 600 nanômetros?

Gráfico 24 – Diagrama de cromaticidade



Fonte: O autor, 2016. Software CIE Chromaticity Diagrams.

Solução

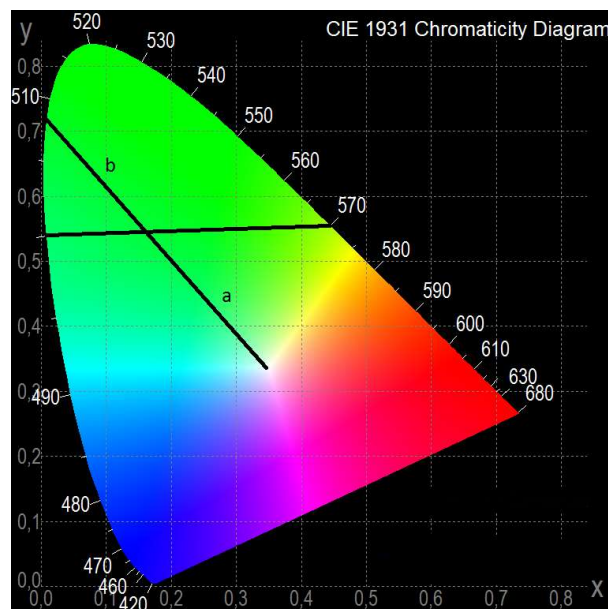
Primeiramente, conectamos os pontos 500 e 600 nanômetros do locus do espectro por um segmento de reta; encontramos o ponto médio deste segmento, já que se trata de quantidades iguais; unimos o ponto correspondente ao branco, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, com o ponto médio deste segmento de reta e prolongamos até intersectar o locus do espectro. O ponto desta interseção corresponde ao comprimento de onda dominante da mistura, 553 nanômetros. A distância relativa da amostra até o branco é a medida de sua pureza colorimétrica (ver representação tridimensional das cores por Grassmann, página 62):

$$\frac{a}{a+b} = \frac{0,125}{0,125 + 0,225} = \frac{0,125}{0,35} \cong 0,35$$

A cor resultante tem comprimento de onda $\lambda = 553 \text{ nanômetros}$ com parâmetro aproximado $\rho = 0,35$, um tom bem claro de verde.

5.3 Qual a cor resultante ao misturarmos 500 nanômetros e 570 nanômetros, sendo que há duas vezes mais quantidade de 500 nanômetros?

Gráfico 25 – Diagrama de cromaticidade



Fonte: O autor, 2016. Software CIE Chromaticity Diagrams.

Solução

Como no exemplo anterior, conectamos os pontos 500 e 570 nanômetros do locus do espectro por um segmento de reta; agora utilizamos $\frac{2}{3}$ deste segmento, já que há duas vezes mais quantidade de 500 nanômetros; unimos o ponto correspondente ao branco, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, com $\frac{2}{3}$ deste segmento de reta e prolongamos até intersectar o locus do espectro. O ponto desta interseção corresponde ao comprimento de onda dominante da mistura, 508 nanômetros. A distância relativa da amostra até o branco é a medida de sua pureza colorimétrica (ver representação tridimensional das cores por Grassmann, página 62):

$$\frac{a}{a+b} = \frac{0,3}{0,3+0,2} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$$

A cor resultante tem comprimento de onda $\lambda = 508 \text{ nanômetros}$ com parâmetro $\rho = 0,6$, um tom de verde mais saturado que o do exemplo anterior.

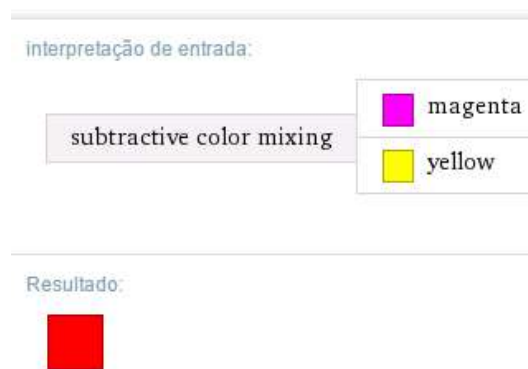
5.4 Uma luz magenta brilha sobre uma folha de papel contendo um pigmento amarelo. Qual seria a aparência no papel?

Solução

A luz magenta consiste de luz vermelha e luz azul. O pigmento amarelo absorve a luz azul, seu complementar. Assim, azul é subtraído da luz que incide sobre o papel, refletindo a luz vermelha.

$$\begin{aligned} \mathbf{M} + \mathbf{Y} &= (\mathbf{R} + \mathbf{B}) + (\mathbf{R} + \mathbf{G}) = ((\mathbf{R} + \mathbf{G} + \mathbf{B}) - \mathbf{G}) + ((\mathbf{R} + \mathbf{G} + \mathbf{B}) - \mathbf{B}) = \\ &= \mathbf{W} - (\mathbf{G} + \mathbf{B}) = \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Figura 36 – Mistura de magenta e amarelo



Fonte: O autor, 2016. Mecanismo computacional WolframAlpha.

Obs.: $(\mathbf{R} + \mathbf{G} + \mathbf{B}) + (\mathbf{R} + \mathbf{G} + \mathbf{B}) = \mathbf{W} + \mathbf{W} = \mathbf{W}$, pois parte do princípio de que a tinta no papel não pode refletir mais luz do que o papel sem tinta.

5.5 Uma luz amarela brilha sobre uma folha de papel contendo um pigmento vermelho. Qual seria a aparência no papel?

Solução

A luz amarela consiste de luz vermelha e luz verde. O pigmento vermelho absorve a luz ciana, seu complementar. Isto é, o vermelho absorve ambas as cores primárias verde e azul, refletindo a luz vermelha.

$$\mathbf{Y} + \mathbf{R} = (\mathbf{R} + \mathbf{G}) + \mathbf{R} = ((\mathbf{R} + \mathbf{G} + \mathbf{B}) - \mathbf{B}) + ((\mathbf{R} + \mathbf{G} + \mathbf{B}) - (\mathbf{G} + \mathbf{B})) = (\mathbf{R} + \mathbf{G} + \mathbf{B}) - (\mathbf{G} + \mathbf{B}) = \mathbf{W} - (\mathbf{G} + \mathbf{B}) = \mathbf{R}.$$

Figura 37 – Mistura de amarelo e vermelho



Fonte: O autor, 2016. Mecanismo computacional WolframAlpha.

5.6 Uma luz amarela brilha sobre uma folha de papel contendo um pigmento azul. Qual seria a aparência no papel?

Solução

A luz amarela consiste de luz vermelha e luz verde. O pigmento azul absorve a luz amarela, seu complementar. Ou seja, o azul absorve ambas as cores primárias vermelho e verde. Como, tanto a luz vermelha quanto a luz verde são subtraídas, a aparência no papel é preta.

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} + \mathbf{B} &= (\mathbf{R} + \mathbf{G}) + \mathbf{B} = ((\mathbf{R} + \mathbf{G} + \mathbf{B}) - \mathbf{B}) + ((\mathbf{R} + \mathbf{G} + \mathbf{B}) - (\mathbf{R} + \mathbf{G})) = \\ &= \mathbf{W} - (\mathbf{R} + \mathbf{G} + \mathbf{B}) = \mathbf{W} - \mathbf{W} = \mathbf{K} \end{aligned}$$

Figura 38 – Mistura de amarelo e azul



Fonte: O autor, 2016. Mecanismo computacional WolframAlpha.

6 CONCEITO DE ESPAÇO DE COR – EVOLUÇÃO GEOMÉTRICA

Espaço de cores é um espaço geométrico tridimensional com eixos de forma adequada, de modo que a percepção das cores corresponda à ordem do sistema visual. As representações de percepção da cor neste espaço formam a cor sólida.

As primeiras propostas para sólidos de cores tinham formas geométricas simples: triângulo duplo, pirâmide, esfera, cone, e assim por diante. O que define a forma do sólido é a definição dos eixos no espaço e suas divisões.

Vários modelos matemáticos ainda são simples e modestamente precisos. Os espaços de cores são expressos em termos de diferenças entre as percepções de cores. Há vários espaços de cores que englobam três dimensões. O sólido de cores tem sido uma meta desde a mais antiga tentativa de construção de espaços de aparência de cor. Sua importância aumentou com a capacidade de precisão. Uma vez que uma cor foi perceptivelmente desenvolvida, os estímulos relacionados podem ser definidos por um espectro.

Um modelo matemático de ligação física com os dados perceptivos tem sido dedicado a encontrar uma definição de um espaço uniforme da cor. Mas há dificuldades em criar um modelo geométrico euclidiano de espaço colorido. Uma razão importante para o desenvolvimento de sólidos de cores era ter uma base para a descoberta de regras na harmonia das cores.

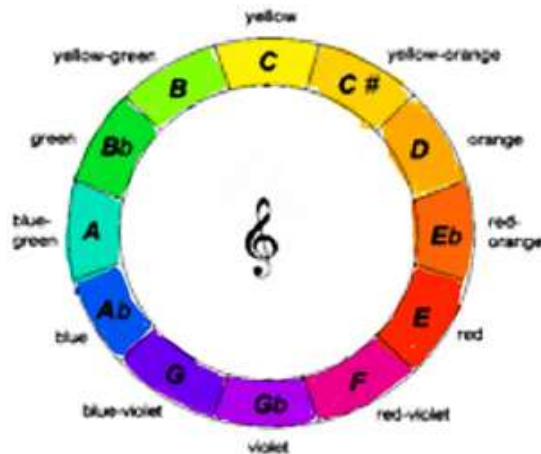
No sistema de Munsell, que veremos adiante, o ângulo polar, a distância radial e a distância a partir da origem definiram a terceira dimensão: luminosidade, tonalidade e croma. Esta foi a primeira tentativa de representação geométrica realista (euclidiana) de percepções de cores em espaços perceptivelmente uniformes.

Hoje em dia, é evidente que não existe espaço de cor uniforme e nem simples modelo geométrico de espaço perceptualmente uniforme, e sim uma aproximação. A fórmula para dados visuais tem sido baseada em correções matemáticas.

Os tridimensionais sólidos de cores começaram a surgir no século XVIII, resultados do uso de variáveis matemáticas para ajustar modelo de visão à correspondência de cores. Pois cor nada mais é que a qualidade ou atributo em virtude do qual os objetos apresentam aparências de acordo com o tipo de luz refletida em suas superfícies.

Pitágoras descobriu a relação entre as notas musicais e os números. De considerável importância para os pitagóricos foi a tetractys (soma dos quatro primeiros números era considerada como a fonte de todas as coisas). Branco, preto, vermelho e amarelo eram consideradas espécies de cores, devido às diferenças de cor em várias misturas.

Figura 39 – Harmonia entre cores e notas musicais

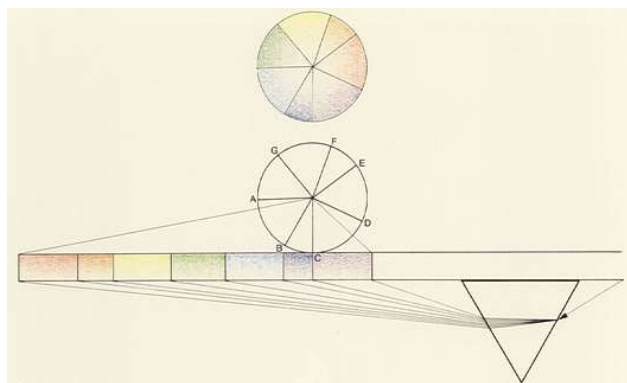


Fonte: <http://www.thinkstockphotos.com.pt>.
Acesso em: 25 nov. 2015.

As ideias de Pitágoras em harmonia musical expressas nas tetractys foram expandidas através de diagramas para mostrar a relação entre polígonos básicos. Estes diagramas foram usados para mostrar a simplicidade das leis naturais tonalidade e croma. Esta foi a primeira tentativa de representação geométrica realista (euclidiana) de percepções de cores em espaços perceptivelmente uniformes.

Mas o primeiro modelo geométrico da percepção das cores foi revelado por Isaac Newton, no século XVII, que resumiu suas experiências de luz e mistura de pigmentos como um círculo matiz, mapeando as quantidades de um estímulo físico para sensações de cor.

Figura 40 – Sistema de cores de Isaac Newton



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/424464333602043585>.
Acesso em: 12 nov. 2015.

O trabalho de Newton era manter separados os aspectos físicos e sensoriais (matemáticos e psicológicos) da cor. Newton demonstrou que cada tonalidade espectral tem um único ângulo de refração, quando passado através de uma lente ou um prisma. Em seus experimentos, ele mostrou que essa característica da luz permanece constante até mesmo se a luz é incidida numa lente, através de múltiplos prismas, ou por um filtro colorido. Identificando, portanto, sete cores "primárias ou simples" de luz no espectro - vermelho, laranja, amarelo, verde, azul, anil e violeta. E ainda descobriu que ao recombinar três ou quatro cores do espectro através de uma lente reconstituía a cor "branca" original da luz solar. Em suas reflexões sobre cores, *Opticks* (1704), Newton introduziu um círculo de cor, um diagrama de mistura.

Newton ficou intrigado com a possibilidade de paralelos entre harmonia musical e harmonia de cores. Comparou, então, cores do espectro de ondas mais longas e mais curtas com a semelhança dos tons no início e no final de uma oitava.

O agradável de comparar cor com qualquer tom único para o ouvido é que ambos os prazeres, os dos olhos e os dos ouvidos, são os efeitos da igualdade, boa proporção e correspondência.³ (BACON, 1730, p. 31)

Como seria isso? Frequências audíveis vão de 20Hz a 25.000Hz. A base lógica para a ligação com cor é a seguinte: Considerando a velocidade da luz no vácuo como

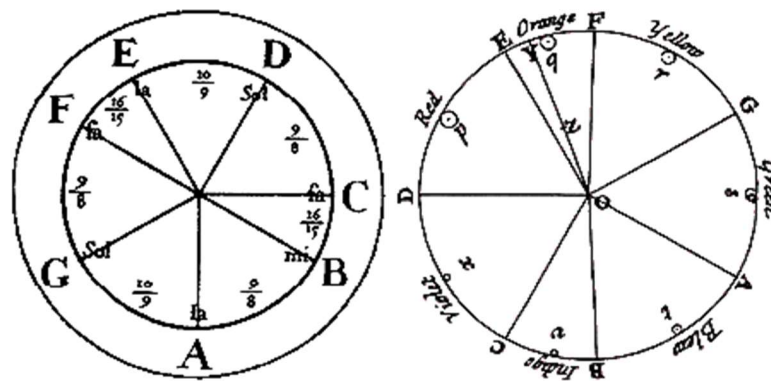
³ Traduzido de "The pleasing of colour symbolizeth with the pleasing of any single tone to the ear...And both these pleasures, that of the eye, and that of the ear, are but the effects of equality, good proportion, and correspondence." (BACON, 1730, p. 31)

uma constante de 299.792.458 metros por segundo, já que o comprimento de onda de uma cor particular pode ser expressa em metros, determina-se dividindo 299.792.458 por este comprimento de onda, em metros, ou seja,

$$\text{Frequência} = \frac{\text{Distância percorrida pela luz por segundo}}{\text{Comprimento de onda de cor específica}}$$

Portanto, Newton escolheu um círculo para a disposição das cores espectrais sob a influência do diapasão circular do inglês Thomas Salmon⁴ (1679–1767), e, também, seu conhecimento de dessaturação da luz espectral por luz branca.

Figura 41 – Diapasão circular de Thomas Salmon e círculo de cores de Isaac Newton



Fonte: <http://www.colourmusic.info/opticks3.htm>.
Acesso em: 17 nov. 2015.

A saturação da cor é indicada pelo comprimento do raio do círculo de cor.

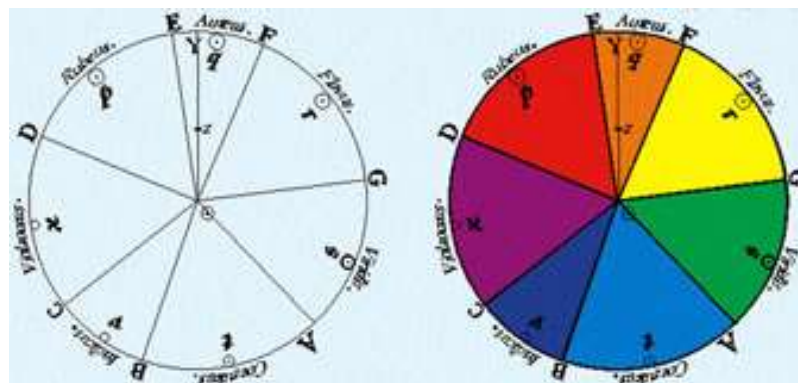
Tonalidades espectrais na periferia do círculo em proporção a uma escala musical significava que as cores opostas não eram cores complementares. Newton escolheu uma distribuição de tons de acordo com uma escala musical em seu círculo de cor, com o branco no centro representando parcimônia geométrica.

⁴ Thomas Salmon (1679–1767), historiador e geógrafo inglês, é lembrado hoje por propor uma reforma radical da notação musical.

...limites das sete cores, vermelho, laranja, amarelo, verde, azul, anil e violeta nesta ordem, estão entre si como raízes cúbicas dos quadrados dos oito comprimentos de um acorde, que encontrou as notas em uma oitava,..., isto é, como as raízes cúbicas dos quadrados dos números, 1, 8/9, 5/6, 3/4, 2/3, 3/5, 9/16, 1/2.⁵ (Opticks, 1704, Livro 2, p. 18)

Como o círculo matiz (cromático) de Newton é um arranjo geométrico das cores distintas vistas em um espectro solar, então tem-se aí uma mistura aditiva de cores. Newton explicou que a cromaticidade (combinando matiz e saturação) de uma mistura de luz seria a média ponderada dos tons das cores em torno do círculo matiz, ou seja, duas ou mais cores "primárias" espectrais combinadas em quantidades específicas ou "pesos" produzem uma cor localizada no "centro de gravidade" (média ponderada entre todas). No entanto, a característica mais importante da mistura aditiva, conforme especificado por este método, é que a cromaticidade das luzes sempre determina a cromaticidade da sua mistura.

Figura 42 – Círculo de cores de Isaac Newton



Fonte: http://www.mundocor.com.br/cores/cor_musica.asp.
Acesso em: 23 nov. 2015.

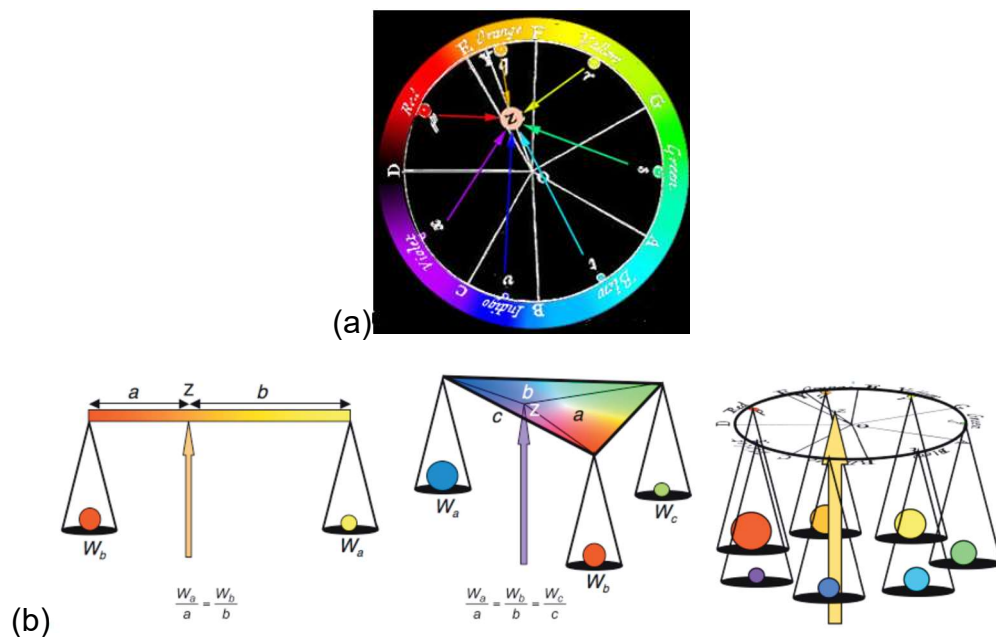
Com o centro O e raio OD descreveu um círculo e o dividiu em sete partes, proporcionais aos sete tons musicais. DE representando a cor vermelha, EF a cor laranja, FG a cor amarela, GA a cor verde, AB a cor azul, BC a cor índico, e CD a cor violeta. Seguindo a ordem do espectro de luz, concebeu que estas são todas as cores puras da luz passando gradualmente um no outro, como quando por prismas. Estas

⁵ Traduzido de "... limits of the seven Colours, red, orange, yellow, green, blue, indigo, violet in order, are to one another as the Cube Roots of the Squares of the eight lengths of a Chord, which found the notes in an eighth,..., that is, as the Cube Roots of the Squares of the Numbers, 1, 8/9, 5/6, 3/4, 2/3, 3/5, 9/16, 1/2." (Opticks, 1704, Livro 2, p. 18).

cores são alocadas aos segmentos, os tamanhos das quais são proporcionais à intensidade de suas respectivas cores no espectro. Utilizando este tamanho de segmento, foi possível calcular um tipo de ponto de concentração, equilíbrio, para o círculo, o ponto Z . E marcá-lo no segmento de reta, que ligava o centro de cor branca O e este ponto de concentração Z , intersectando o círculo em Y . Ou seja, mais próximo do centro seria branco, mais próximo à circunferência seria uma cor saturada.

Detalhadamente, o método descrito por Newton é como encontrar o ponto de equilíbrio em um círculo com diferentes pesos em sua circunferência. No diagrama de Newton (roda de cores acima), os pequenos círculos abaixo de cada nome de cor indicam as quantidades diferentes ou "pesos" de cada cor espectral que possam contribuir para uma mistura de cor: grandes quantidades de vermelho, laranja e amarelo, e pequenas quantidades das demais. A cor localizada em Z é a média de todas elas, a cor laranja.

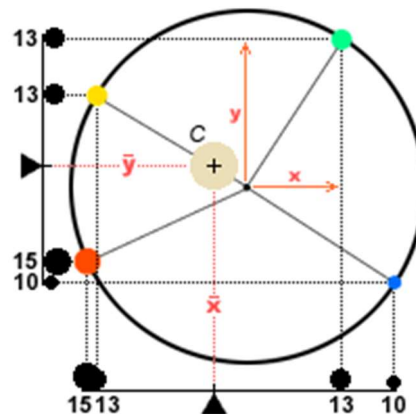
Figura 43 – Ponto de equilíbrio de todas as cores



Fonte: (a) <http://www.huevaluechroma.com/071.php>. Acesso em: 25 fev. 2016. (b) PARRAMAN, 2010.

Ponderação geométrica de Newton: A localização de cada cor é medida em x e y dimensões; os valores de x e y para cada cor são multiplicados pelo "peso" (luminosidade ou brilho) da cor; estes valores são somados e, depois, divididos pela soma dos pesos; e, as médias resultantes têm por localização C ou ponto de mistura.

Figura 44 – Localização da cor de acordo com o peso (luminosidade)



Fonte: <http://www.handprint.com>.
Acesso em: 26 nov. 2015.

Newton enfatizou que o círculo cromático só se aplica às misturas de luzes. Misturas de pigmentos (material que modifica a cor da luz transmitida ou refletida como resultado de uma absorção seletiva num dado comprimento de onda) não dependeria dos pesos proporcionais da quantidade de pigmentos na mistura, mas sobre a quantidade de luz refletida a partir deles.

Figura 45 – Resultado do ponto de equilíbrio cor

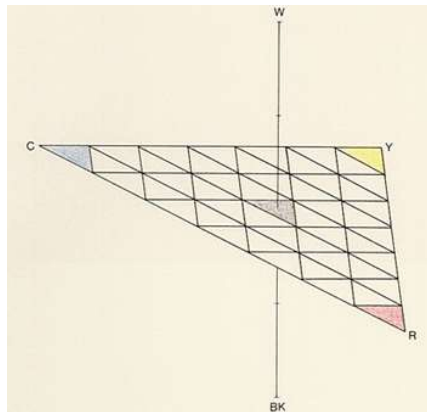


Fonte: <http://www.huevaluechroma.com/071.php>. Acesso em: 25 fev. 2016.

Numa análise matemática e por vários métodos, que serão abordados, os espectros são localizados em espaços onde uma série de tons, aproximadamente, forma um círculo. Portanto, um círculo matiz é um padrão resultante de uma estratégia do nosso sistema visual.

Todos os modelos de cores têm, por requisito, um esquema geométrico que localiza todas as cores, umas em relação às outras e aos atributos fundamentais. O matemático Tobias Mayer propôs o primeiro sistema de ordem de cor. A especificação de cores de Mayer foi baseada em três primárias, amarelo, azul e vermelho. E afirmou, ainda, que o sistema poderia ser aplicado também em luzes espectrais.

Figura 46 – Modelo de cor de Tobias Mayer



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/468726273695477508>. Acesso em: 30 nov. 2015.

Este triângulo equilátero com três cores, amarela, azul e vermelha (cores de referência para os pintores da época, chamadas cores “prismáticas”) em cada um dos vértices, foi o esquema geométrico de Mayer. As cores ao longo das bordas do triângulo, entre dois vértices, foram definidas por treze escalas de misturas principais. Simbolizadas com proporções de misturas que, somadas, sempre dá 12:

$$r_0g_{12}, r_1g_{11}, r_2g_{10}, r_3g_9, r_4g_8, r_5g_7, r_6g_6, r_7g_5, r_8g_4, r_9g_3, r_{10}g_2, r_{11}g_1 \text{ e } r_{12}g_0$$

Onde r representa o vermelho, g o amarelo, e b o azul - roth, gelb e blau, as três cores em alemão. Estes códigos da mistura serviram como etiquetas de cores.

Mayer escolheu doze tonalidades de cores a partir de um vértice para o outro, porque mais de 12 gradações de cores não eram perceptivelmente úteis, e por esta razão a diferença entre as misturas não podiam ser selecionados livremente. Para se ter uma base de cálculo, Mayer adotou doze gradações — semelhante a uma oitava (ANEXO A) — entre quaisquer duas cores básicas, e afirmou que a mistura de tal décima segunda parte de uma cor em uma cor de base foi essencial para perceber a nova mistura.

Fazendo combinações com repetição, em que as duas cores assumem valores de 0 a 12, $r + g = 12$, ou $r + b = 12$, ou $g + b = 12$, tem-se:

$$CR_{n,p} = P_{n-1+p}^{n-1, p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)!p!} = \frac{13!}{1!12!} = 13$$

Para $n = 2$ e $p = 12$, há 13 amostras de cores em cada lado do triângulo de Mayer.

No total, as misturas de cores no triângulo são representadas por uma fórmula de três cores, por exemplo, $r_1g_3b_8$, onde as proporções, novamente, se resumem a 12, indicando as quantidades das três cores primárias necessárias para a mistura.

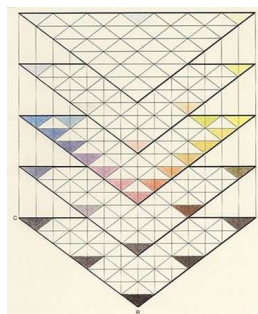
Fazendo combinações com repetição, em que as três cores assumem valores de 0 a 12, $r + g + b = 12$, tem-se:

$$CR_{n,p} = P_{n-1+p}^{n-1, p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)!p!} = \frac{14!}{2!12!} = 91$$

Para $n = 3$ e $p = 12$, há 91 amostras de cores em todo o triângulo de Mayer.

Por fim, Mayer misturou cores brancas ou pretas para produzir compostos de quatro cores, sobrepondo triângulos (figura abaixo). Por exemplo, $r_2g_6b_3W_1$ e $r_2g_6b_3K_1$. A mistura do branco com o preto é desconsiderada já que o cinza é obtido em níveis alternados por igual mistura das três cores dos vértices do triângulo. De modo igual, as proporções se resumem a 12, pois cada incremento adicional de branco ou preto reduz o número de combinações restantes para os três vértices coloridos. Com a sobreposição dos triângulos, onde os tons ficam mais escuros ou mais claros, Mayer chegou a 910 misturas de cores. Obtidas da mesma forma que para o triângulo.

Figura 47 – Triângulos sobrepostos por Tobias Mayer



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/473229873321657466>. Acesso em: 05 nov. 2015.

Fazendo combinações com repetição, em que as quatro cores assumem valores de 0 a 12, $r + g + b + W = 12$ ou $r + g + b + K = 12$, tem-se:

$$CR_{n,p} = P_{n-1+p}^{n-1, p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)!p!} = \frac{15!}{3!12!} = 455$$

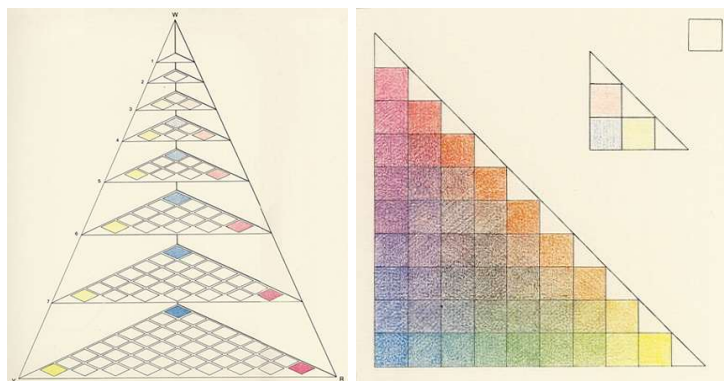
Para $n = 4$ e $p = 12$, há 455 amostras de cores para cada sobreposição de triângulos, para o branco e para o preto, no total de 910 cores.

Usando este sistema, Mayer descreveu a localização da cor de diversos pigmentos — primeira análise de pigmento de cor usando um sistema de cores.

O avanço no conceito de Mayer é a equivalência entre as misturas de cores primárias, a estrutura geométrica e o sistema de notação de cor. Esta análise de cor antecipa o moderno sistema de valores tricromáticos.

O prussiano astrônomo Johann Heinrich Lambert publicou um relato de sua “Pirâmide de cores”. Sabendo do sistema de Mayer, ele adaptou a sua geometria triangular, mas limitado a sete etapas de mistura de cores primárias puras. Lambert tratou apenas das misturas com o branco, afirmando que gradações de cinza e preto podem ser encontradas no centro de cada triângulo de mistura primária.

Figura 48 – Pirâmide de cores por Johann Lambert e sua geometria triangular



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/119486196341445262>.
Acesso em: 10 nov. 2015.

Em cada caso, duas cores básicas são misturadas, com proporções variáveis, para formar sete matizes ao longo dos lados, enquanto no interior todas as três cores básicas contribuem para a cor de cada respectiva unidade de superfície. Um total de 45 cores são assim formadas no maior triângulo, acima do qual os outros sobem, afinando e tornando-se mais brilhante à medida que avançam para cima. Por sua vez, contêm 28, 15, 10, 6, 3 e 1 campo, o branco. Lambert acomoda um total de 108 cores em sua pirâmide.

Como pode perceber na figura 53, o cateto do maior triângulo, o da base, formado por n proporções de cores é seguido, imediatamente, de $(n - 1)$ proporções

de cores, e assim por diante até uma única cor, já que se trata de um triângulo retângulo isósceles. Sendo assim, para o maior triângulo, o da base da pirâmide, tem-se 9 proporções de cores num cateto do triângulo retângulo isósceles, totalizando $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ cores. O mesmo para os triângulos que se seguem, onde Lambert utilizou 7, 5, 4, 3, 2 e 1 proporções de cores para o cateto do triângulo retângulo isósceles correspondente.

A partir do branco:

$$\begin{aligned} n = 1 &\rightarrow 1 \rightarrow \frac{1(1+1)}{2} = 1 \\ n = 2 &\rightarrow 2 + 1 = 3 \rightarrow \frac{2(2+1)}{2} = 3 \\ n = 3 &\rightarrow 3 + 2 + 1 = 6 \rightarrow \frac{3(3+1)}{2} = 6 \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \end{aligned}$$

Assim, o termo geral é: $C_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Obtendo, dessa forma, a sequência (1, 3, 6, 10, 15, 28, 45).

Este modelo de Lambert trata matiz, saturação e brilho (atributos da cor) de forma desigual.

Apesar das deficiências dos sistemas de cores até então, as ideias foram importantes para a ciência da cor, mesmo ofuscadas por Maxwell e Helmholtz.

6.1 A partir de Maxwell, responsável pelos fundamentos da Teoria das Cores

Sabe-se que a luz é o único estímulo que o olho responde normalmente. Esta descrição se aplica somente a cores independentes, pois estas cores são geradas por um foco de luz difusa diretamente no olho, ou refletindo luz a partir de uma superfície incolor (branca ou cinzenta).

Um diagrama de cor que faz esta conexão entre as respostas do cone e da cor percebida é o triângulo trilinear inventado por James Clerk Maxwell. Este triângulo define a cromaticidade de qualquer cor. Todos os modelos de cores modernos são

baseados em aditivos valores trilineares que especificam tanto a cromaticidade quanto a luminância, brilho de uma cor. Muitos artistas, a partir do século XIX, aprenderam os fundamentos da teoria da cor em termos do triângulo de Maxwell, e não, da roda de cores.

Maxwell mostrou que as combinações de cores podiam ser expressas como equações de cor, que por sua vez pode ser manipulado usando coeficientes negativos, como possíveis intensidades negativas. Estas equações podem localizar qualquer cor no plano, em relação às outras três cores fixas.

Maxwell selecionou três estímulos primários, três radiações monocromáticas, uma só cor, com os seguintes comprimentos de onda:

$$R = 630,2 \text{ nanômetros (Vermelho)}$$

$$G = 525,1 \text{ nanômetros (Verde)}$$

$$B = 456,9 \text{ nanômetros (Azul)}$$

Para alcançar resultados almejados, Maxwell utilizou das cores primárias, baseado na definição da radiação branca, já que era o resultado da soma de mesma quantidade das cores primárias. É útil pensar em mistura aditiva como a teoria da cor "branca". Misturando comprimentos de onda de luz "vermelha", "verde" e "azul", parte do espectro acrescenta luminosidade e matiz para mudar a cor da mistura de luzes para tons brancos. O princípio fundamental é que o olho mistura todos os comprimentos de onda da luz incidente na retina, e é essa sensação de luz total que o olho tem de cor.

A partir das equações de Maxwell foi obtida a primeira forma de realização do espaço numérico triestímulo:

$$A(\lambda) = rR(\lambda) + gG(\lambda) + bB(\lambda).$$

O centróide dos três pesos r, g e b aplicados ao $R(\lambda), G(\lambda)$ e $B(\lambda)$ da função cor, é um ponto dentro do triângulo RGB. Para calculá-lo é preciso encontrar o baricentro destes três pesos. Fixa-se no interior do triângulo, que Maxwell concebeu, um sistema de coordenadas triangulares equiláteras.

Neste sistema, cada ponto dentro do triângulo tem três coordenadas, x, y e z de modo que $x + y + z = \text{constante}$, bastando ter o valor de duas delas. Com este

sistema de coordenadas, o centróide dos três pesos r , g e b , localizados respectivamente em R , G e B , tem as seguintes coordenadas:

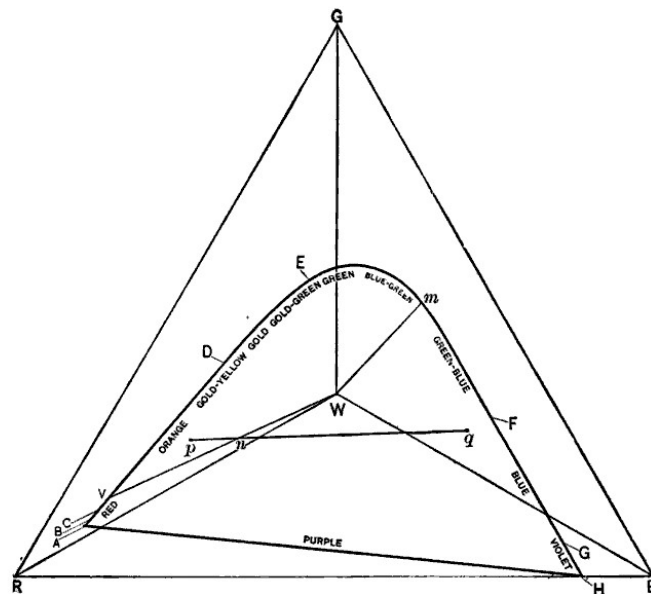
$$x = \frac{r}{r + g + b}$$

$$y = \frac{g}{r + g + b}$$

$$z = \frac{b}{r + g + b}$$

Tomando então r para o vermelho, g para o verde e b para o azul, a cor resultante é um ponto interior do triângulo, o baricentro dos três pesos r, g e b , localizados em R, G e B . À cor resultante podem ser atribuídas coordenadas x, y e z ou apenas duas delas, já que a soma das três é constante.

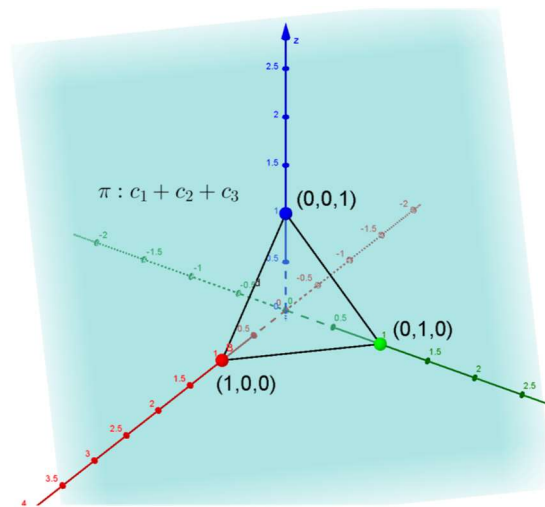
Figura 49 – Curva de cores e Triângulo de Maxwell



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Color_triangle#/media/File:Fick_color_triangle. Acesso em: 01 dez. 2015.

Para introduzir uma terceira dimensão, Maxwell desenvolveu a ideia de vetor de Grassmann (Capítulo 2). Considerou o plano no qual o triângulo e o diagrama de cromaticidade correspondente está localizado. Estabeleceu intensidade das cores igual a 1, pegou o ponto O como origem, localizado fora deste plano. A linha que une a origem com qualquer ponto do triângulo, numa direção, determina a posição da cor no diagrama.

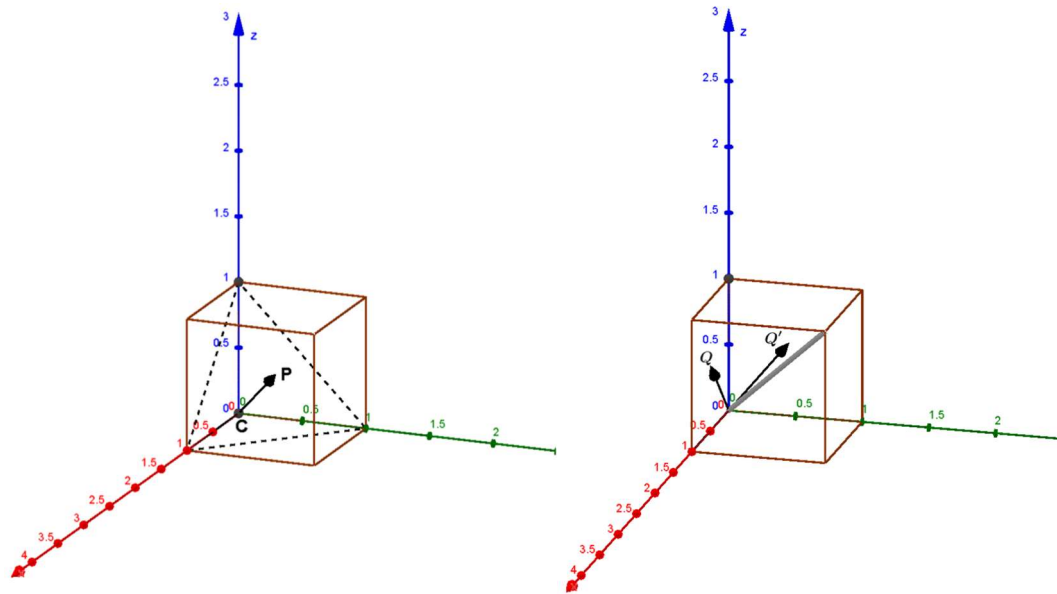
Gráfico 26 – Triângulo de Maxwell



Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

Estabelecido este sistema, o resultado de duas cores pode ser calculado a partir da notação de Grassmann para vetores. O comprimento do vetor CP (abaixo) está relacionado com o brilho da cor, e o triângulo com os vértices, nos valores máximos de R, G e B , nos eixos é o triângulo de Maxwell. Os valores R, G e B aumentam ou diminuem de acordo com o comprimento do vetor, que por sua vez variam a luminosidade, brilho da cor. Enquanto o deslocamento do vetor original OQ para o vetor OQ' reduz a saturação da cor, o distanciamento do vetor OQ da linha cinzenta e proximidade do cubo RGB aumenta a saturação da cor. Cada vetor representa, assim, uma cor com brilho de 0 (origem) a 1, ao intersectar o plano.

Gráfico 27 – (a) Posição da cor no triângulo (b) Diferença de saturação das cores de Maxwell



Fonte: O autor, 2015. Software Geogebra.

Algebricamente, sejam (c_1, c_2, c_3) as coordenadas de uma cor C no espaço de cor, a reta que passa pela origem $(0, 0, 0)$ e por C é dada pelos pontos da forma:

$$\{C; C = tc, t \in \mathbb{R}\}$$

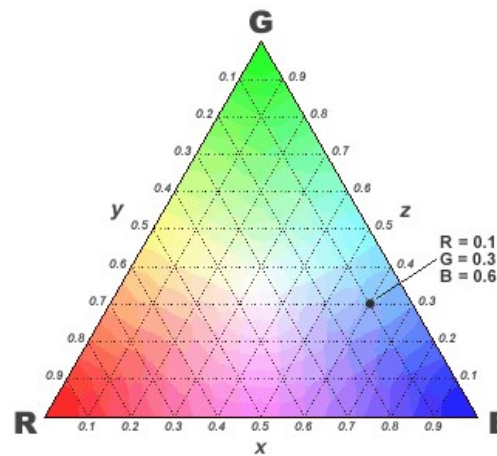
A projeção $c' = (c'_1, c'_2, c'_3)$ da cor C sobre o plano de Maxwell impõe que $c'_1 + c'_2 + c'_3 = 1$. Este resultado pode ser utilizado para normalizar a informação de cromaticidade do espaço de cor. Em particular, tem-se que $t(c_1, c_2, c_3) = (c'_1, c'_2, c'_3)$ para algum t . Logo,

$$t(c_1 + c_2 + c_3) = c'_1 + c'_2 + c'_3 = 1,$$

e portanto,

$$t = \frac{1}{(c_1 + c_2 + c_3)}$$

Gráfico 28 – Localização de uma cor no triângulo de Maxwell

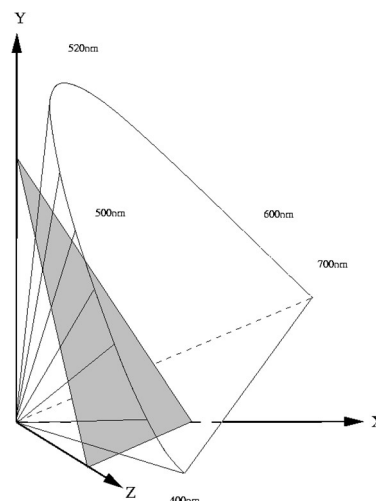


Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/299700550174058232>. Acesso em: 04 dez. 2015.

De acordo com o triângulo de Maxwell acima, as proporções da mistura são mostradas ao longo dos lados do triângulo. Por definição, cada mistura deve somar 100%, de modo que uma mistura de 10% R (Red) e de 30% G (Green) deve conter 60% B (Blue). Portanto, apenas dois valores de cromaticidade especificam exclusivamente cada cor em um diagrama de cromaticidade.

Geometricamente, projeta-se a cor C no hiperplano de cromaticidade, já que contém cores de luminância constante. O subconjunto convexo resultante, pois é a projeção radial de um cone, contém toda a informação de cromaticidade das cores reais, e é chamado de diagrama de cromaticidade.

Gráfico 29 – Diagrama de cromaticidade



Fonte: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfPeIAD/apostila?part=2>. Acesso em: 09 dez. 2015.

Para espaços de cores tricromáticos, tem-se forma de ferradura. As coordenadas de projeção de C são assim representadas:

$$c'_i = \frac{c_i}{(c_1 + c_2 + c_3)}$$

O conjunto das cores visíveis do $\mathbb{R}^3$ é chamado sólido de cor. Eis as três propriedades geométricas do sólido de cor:

- O sólido de cor é um cone, isto é, se C é uma cor visível e t é um número real positivo, então tC também é visível;
- O sólido de cor é convexo. Isto é, se C_1 e C_2 são visíveis então o segmento $(1 - t)C_1 + tC_2$, $t \in [0,1]$ é constituído por cores visíveis; e,
- As cores espectrais estão localizadas na fronteira do sólido de cor.

Utiliza-se um vetor R de dimensão finita na representação discreta de cor:

$$R: f \in D \rightarrow (f(x_1), f(x_2), f(x_3)) \in \mathbb{R}^3.$$

Onde D é a função de distribuição espectral.

Esta representação define uma transformação linear:

$$R(af_1 + bf_2) = aR(f_1) + bR(f_2).$$

Logo, a primeira propriedade é assim representada:

$$R(tC(\lambda)) = tR(C(\lambda)).$$

E a segunda propriedade, desta forma:

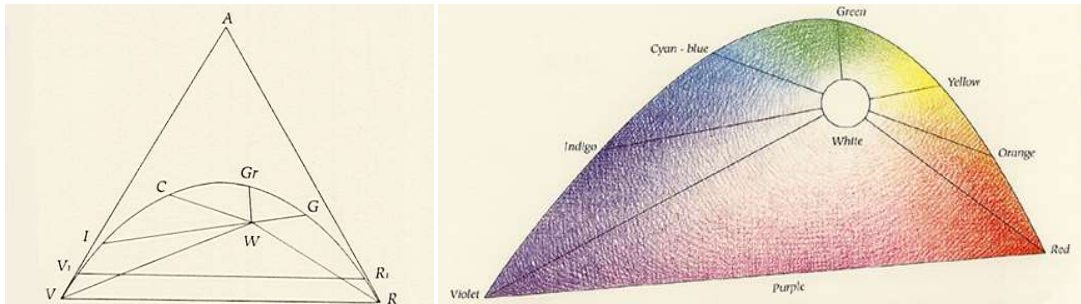
$$R((1 - t)C_1(\lambda) + tC_2(\lambda)) = (1 - t)R(C_1(\lambda)) + tR(C_2(\lambda)).$$

Pela segunda propriedade tem-se que a interseção do sólido de cor com o plano de Maxwell é uma curva convexa. Logo, justificando a terceira propriedade, as cores espectrais correspondem a pontos na fronteira do sólido de cor, diagrama de cromaticidade.

Assim, toda cor da natureza pode ser representada, tanto em termos de qualidade ou quantidade, em algum ponto no espaço de cor.

Hermann Von Helmholtz representou as cores num diagrama no qual o centro de gravidade é representado pela cor branca. Constituindo, assim, uma primeira grande revisão do quadro das cores espectrais de Newton e Grassmann.

Figura 50 – Diagrama de Helmholtz



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/538039486704674034>. Acesso em: 14 dez. 2015.

Este espectro pode ser explorado com análise gráfica de dados. Ela nos permite examinar matemática complexa por meio de imagens em vez de números, e nos permite mostrar transformações complexas em termos geométricos simples.

Ao fazer ajustes gráficos para o espaço de cores — alterar o comprimento de dimensões de cor, ajustando o ângulo entre as dimensões — podemos notar significativas transformações. Resultando nesta forma completamente diferente para o espaço de cor. Em vez de um círculo ou formas circulares, acabou por ser uma curva hiperbólica com violeta, verde e vermelho nos vértices.

Com a psicologia emergindo como uma nova ciência no final do século XIX, as relações entre os fenômenos do mundo físico e sua imagem perceptiva, derivando da famosa lei de Fechner, estabeleceram uma relação entre as diferenças na sensação de brilho e intensidade entre tonalidades da cor. Para ser mais exato, a Lei Fechner-Weber afirma que uma progressão aritmética na percepção requer uma progressão geométrica em seus estímulos.

Sob esclarecimento matemático, temos o seguinte: Fechner resolveu, por integração, a equação diferencial que estabelece a relação entre sensação e intensidade de um estímulo. Este tipo de relação pode ser descrito pela equação diferencial:

$$dp = k \frac{ds}{s},$$

onde dp é o diferencial de mudança na percepção, dS é o aumento no diferencial de estímulo, e S é o estímulo instantâneo. O parâmetro k é para ser estimado com base em dados experimentais.

Integrando a equação acima, tem-se:

$$p = k \cdot \ln S + C,$$

onde C é a constante de integração e $\ln$ é o logaritmo natural.

Para resolver C , coloca-se $p = 0$, ou seja, ausência de percepção. Em seguida, subtrair $k \cdot \ln S_0$ de ambos os lados e reorganizar,

$$C = -k \cdot \ln S_0,$$

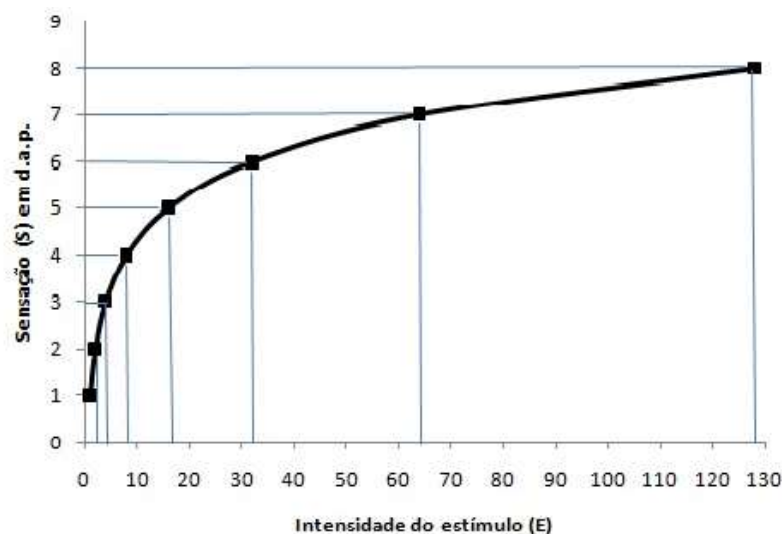
onde S_0 é o estímulo limite, abaixo do qual não é percebido.

Substituindo este valor por C acima e reorganizando, nossa equação torna-se:

$$p = k \cdot \ln \frac{S}{S_0}$$

Para Fechner, era preciso aumentar a estimulação física em uma progressão geométrica para que a sensação correspondente crescesse em uma progressão aritmética.

Gráfico 30 – Sensação x Intensidade do estímulo



Fonte: <http://www.aboveusa.com/cgi-sys/suspendedpage.cgi>.
Acesso em: 02 dez. 2015.

No gráfico, o eixo *X* representa a intensidade da estimulação física. Já no eixo *Y* temos a sensação representada pela diferença apenas perceptível (d.a.p.). Note que à medida que aumentamos o valor da estimulação, esta não produz grandes mudanças na sensação. Isso significa que somos mais sensíveis para perceber alterações em estímulos de baixa intensidade. A distância entre as linhas horizontais é sempre a mesma (progressão aritmética), por outro lado a distância entre as linhas verticais aumenta gradativamente (progressão geométrica).

Ao formular esta lei, Fechner alcançou seu objetivo de traduzir matematicamente a relação entre sensação e estimulação física.

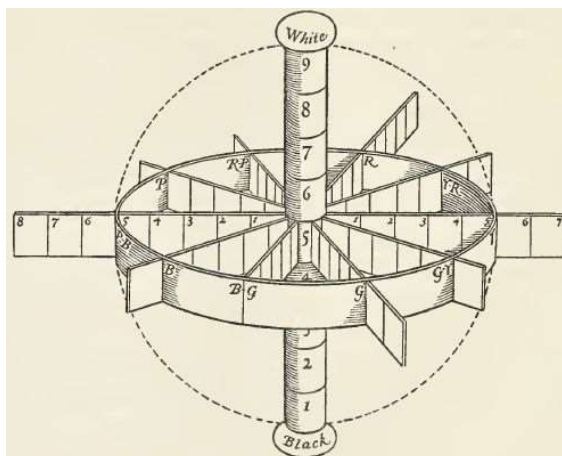
Por mais que houvesse amostras padrões de cores, foi apenas Albert Henry Munsell que conseguiu construir um sistema de cores que organizasse esta padronização de acordo com um plano lógico, sem deixar de lado a afinidade da percepção das cores. É um dos sistemas de cores mais utilizados com base na "sensação equidistante adequada". Munsell tinha proposto, inicialmente, uma esfera de cores quase imperceptível, tanto que, quando ele queria realizar amostras pintadas, notou que o corpo geometricamente simétrico é insuficiente para mostrar as relações mútuas das cores, como as percebemos. Ele mesmo afirmou:

O desejo de um contorno como a pirâmide, cone, cilindro ou cubo, juntamente com a falta de testes adequados, levou a muitas declarações distorcidas de relações de cor e torna-se evidente, quando a medição física de valores de pigmentos e croma é estudada, que nenhum contorno regular irá servir.⁶
(HALL, 1912, p. 239)

Seus esforços foram eficazes para a construção de um sistema no qual as distâncias entre cada cor eram vistas como iguais, dispondo uma ordem de cores agrupadas em torno de uma série vertical central cinza, chamado *Árvore de Cor*.

⁶ Traduzido de "Desire to fit a chosen contour, such as the pyramid, cone, cylinder or cube, coupled with a lack of proper tests, has led to many distorted statements of color relations, and it becomes evident, when physical measurement of pigment values and chromas is studied, that no regular contour will serve." (HALL, 1912, p. 239)

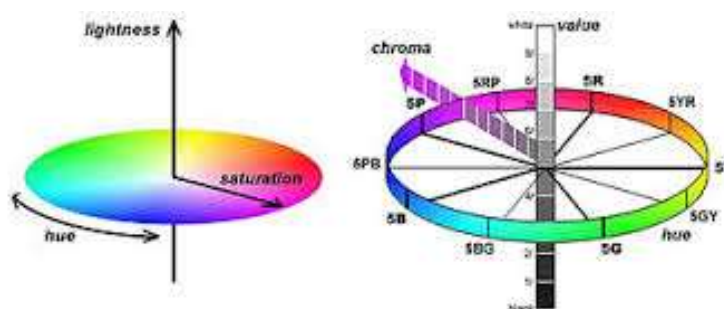
Figura 51 – Sistema de cores de Munsell



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/409968372303936882>. Acesso em: 08 dez. 2015.

Munsell construiu seu sistema de cores em um círculo de dez partes, cujas cores estão dispostas em intervalos iguais (ANEXO B). Ele as alinhou por três variáveis, que são listadas com uma nomenclatura muito peculiar: Hue (tom da cor), Valor (índice de luminosidade) e Croma (nível de saturação). Cada cor é caracterizada por um bloco triplo, que é simbolizado por H, V e C. O valor de escala vertical divide a área entre o preto e o branco em 10 partes. Ele não se limitou a definir as gradações de acordo com alterações lineares em reflexão, mas selecionou uma escala em que a raiz quadrada da intensidade refletida é sujeita a alteração uniforme.

Figura 52 – Sistema e atributos das cores de Munsell

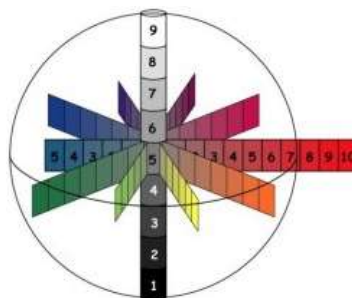


Fonte: LIMA, 2007.

Depois de configurar sua escala de Valor, do preto ao branco, Munsell selecionou 10 cores que eram equidistantes de um cinza de mesmo **Valor** (luminosidade), divididos em incrementos decimais, resultando em uma escala de luminosidade de 100 passos. Estes eram os tons básicos (**Hue**) de seu sistema de

cor, organizando-os em um círculo ao redor do cinza neutro mencionado. O parâmetro **Croma** (saturação) foi arbitrariamente atribuído a estas 10 cores principais e suas misturas, dependendo da intensidade das cores utilizadas. O vermelho intenso, por exemplo, chega a uma grande posição.

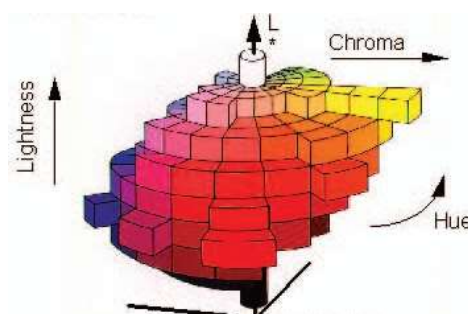
Figura 53 – Sistema de cores de Munsell, com vermelho intenso



Fonte: <http://munsell.com/color-blog/tom-parish-munsell-interview-podcast>. Acesso em: 11 dez. 2015.

No Sistema de Munsell, algumas cores tendem a ter matizes mais fortes que a média de valores mais elevados de croma na saturação total, ou ao contrário. O resultado destas diferenças é uma esfera radicalmente assimétrica.

Figura 54 – Espaço de cores de Munsell



Fonte: <http://www.coatsindustrial.com/en/information-hub/apparel-expertise>. Acesso em: 16 dez. 2015.

Muitas vezes é necessário descrever os vários termos de aparência de cor como equações simples. Estas equações, embora, não estritamente verdadeiras no sentido matemático, fornecem uma descrição de primeira ordem das relações entre as diversas percepções de cores. Na verdade, uma compreensão das seguintes equações fornece o primeiro passo para a compreensão de vários modelos de aparência da cor.

Matiz, o tom da cor, pode ser pensada como cor plena em relação ao brilho semelhante ao do branco:

$$\text{Matiz} = \frac{\text{Cor}}{\text{Brilho(branco)}}$$



Saturação, a pureza da cor, pode ser descrita como o colorido de um estímulo em relação ao seu próprio brilho:

$$\text{Saturação} = \frac{\text{Cor}}{\text{Brilho}}$$



Luminosidade, a eficácia da luz, pode ser expressa como a relação entre o brilho de um estímulo e o brilho de um estímulo branco, igualmente iluminados:

$$\text{Luminosidade} = \frac{\text{Brilho}}{\text{Brilho(branco)}}$$



A utilidade destas equações deriva de uma definição alternativa de saturação que é dada pela razão de cromaticidade e de leveza, agregação ao branco ou ao preto:

$$\text{Saturação} = \frac{\text{Cor}}{\text{Brilho}} = \frac{\text{Matiz} \cdot \text{Brilho(branco)}}{\text{Luminosidade} \cdot \text{Brilho(branco)}} = \frac{\text{Matiz}}{\text{Luminosidade}}$$

Como saturação poderia ser definida como o nível de ausência da cor branca dentro de uma determinada cor, no sistema RGB, as cores (0,9; 0,1; 0), (1; 0; 0) e (0,7; 0,3; 0), por exemplo, representam todas o mesmo tom de vermelho, mas com diferentes graus de pureza.

Como intensidade significa o nível de luminosidade aplicado a uma determinada cor, no sistema RGB, (1; 0; 0), (0,9; 0; 0) e (0,7; 0; 0), por exemplo, são três vermelhos com intensidades distintas.

Na verdade, é impossível representar as diferenças de cor uniforme como um modelo de cores tridimensional. O espaço de cor é não-euclidiano, ou seja, uma estrutura tridimensional não pode descrevê-lo. Qualquer fórmula de diferença ou modelo de cor que representa a cor em apenas três dimensões como leveza, pureza e tonalidade, deve produzir uma imagem distorcida das diferentes relações de cores.

A primeira e mais importante razão pela qual isto é assim foi identificado por Deane Judd. O efeito é descrito como compressão de croma, uma discrepância fundamental entre medidas de diferença perceptível em croma e em matiz. Esta discrepância é muito grande: a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo Euclidiano é aproximadamente 3.14 para 1; na mesma proporção, em um círculo tonalidade, a razão é maior do que 6 para 1.

Como alternativa, já que as diferenças de matiz e croma são representadas em um plano de igual leveza, as diferenças de croma dentro da mesma tonalidade devem ser alongadas em relação às diferenças de matiz, produzindo elipses. Concluiu-se que tanto leveza quanto croma tiveram de ser ajustadas por uma raiz cúbica ou compressão exponencial para corrigir esta discrepância.

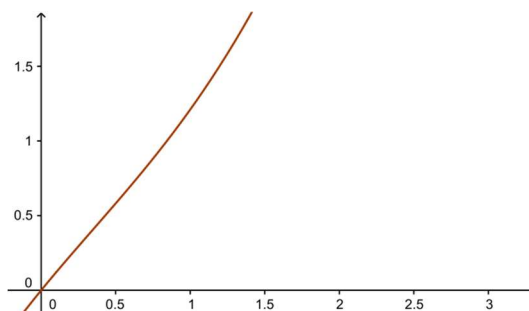
Esta compressão exponencial se faz necessária ao relacionar a leveza de uma cor em uma superfície e a refletância na mesma. O que é claro na geometria de percepção. Percebe-se que níveis de brilho de uma cor, luminosidade, são influenciados pela quantidade de luz, luminância. A relação entre o brilho percebido de uma cor e a luminância real desta é não-linear.

A escala de Valor Munsell, luminosidade, é a âncora do sistema. Esta relação não linear entre luminosidade (V) e o fator CIE de luminância (Y) foi, inicialmente, especificada por um complexo polinômio de quinta ordem, chamado polinômio de Judd, como segue:

$$Y = 1,2219V - 0,23111V^2 + 0,23951V^3 - 0,021009V^4 + 0,0008404V^5$$

Esta equação foi concebida por Judd com medições baseadas na utilização de óxido de magnésio, atribuído um valor de refletância absoluta.

Gráfico 31 – Luminância x Luminosidade



Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

Isto pode ser invertido por meio de métodos iterativos para obter a aproximação que se segue:

$$V = 0,01612Y + 2,5649Y^{1/6} + 1,3455Y^{1/3} + 0,08797Y^{-1} + (2,685 \times 10^{-7})Y^3 + 3,116$$

E, mais tarde, em 1955, foi proposta uma equação mais simples:

$$V = 2,468Y^{1/3} - 1,636$$

Assim, se o valor Munsell (V) de uma amostra é conhecido, também é conhecida a sua luminância relativa (Y), e vice-versa. A escala de leveza que foi concebida para modelar o sistema Munsell proporciona uma aproximação computacional muito boa para o valor Munsell (V).

No entanto, nenhuma relação simples tem sido relatada até agora para matiz ou croma com parâmetros CIE.

A resposta de percepção não linear da visão humana de luminância é chamada leveza. Esta leveza de uma superfície colorida pode ser determinada por uma medição instrumental ou por comparação com amostras com valores de luminosidade conhecidos. O contraste entre as cores depende do fato de que elas são diferentes em leveza. A diferença de luminosidade entre duas cores é o fator mais importante que contribui para a experiência visual de um padrão ou uma forma.

Exercícios

6.1 Para o amarelo, 585 nanômetros, teríamos qual nota musical correspondente?

Solução

Sabemos que 585 nanômetros correspondem a $585 \cdot 10^{-9}$ metros.

Fazendo,

$$\begin{aligned} \text{Frequência} &= \frac{\text{Distância percorrida pela luz por segundo}}{\text{Comprimento de onda de cor específica}} = \frac{299.792.458}{0,000000585} \cong \\ &\cong 512.465.740.170.940,17\text{Hz} \end{aligned}$$

De acordo com o ANEXO A, 513THz corresponde à frequência audível de 466Hz, que é **La#**, chamado Lá sustenido.

6.2 Dada a cor $r_{48}g_{96}$, qual a cor correspondente no triângulo de Mayer?

Solução

Como são apenas 12 tonalidades no triângulo de Mayer e seus índices indicam a quantidade proporcional de cada cor, basta dividi-los por 12, já que a soma de tais números é igual a 144. Assim,

$$\frac{r_{48}}{12} \frac{g_{96}}{12} = r_4 g_8$$

Onde $r + g = 4 + 8 = 12$. Logo, $r_4 g_8$ é a cor correspondente no triângulo de Mayer.

6.3 Deseja-se encontrar uma cor, no triângulo de Mayer, descrita como 2 partes de puro vermelho, 1 parte de ocre e 3 partes de azul prussiano. Os equivalentes numéricos para essas cores são:

Vermelho puro: r_{12}

Ocre: $r_4 g_6 b_2$

Azul prussiano: $r_2 b_{10}$

Solução

Deve-se multiplicar cada índice pela sua proporção na cor desejada:

$$r_{12x2} = r_{24}; \quad r_{4x1}g_{6x1}b_{2x1} = r_4g_6b_2; \quad r_{2x3}b_{10x3} = r_6b_{30}$$

Somar todas as cores encontradas:

$$r_{24} + r_4g_6b_2 + r_6b_{30} = r_{34}g_6b_{32}$$

Dividir o resultado pelo número de partes ($2 + 1 + 3 = 6$):

$$\frac{r_{34}g_6b_{32}}{6 \quad 6 \quad 6} = \frac{r_{17}g_3b_{16}}{3 \quad 3 \quad 3}$$

Proporcionalmente tem-se:

$$\frac{r_{17}g_3b_{16}}{3 \quad 3 \quad 3} = r_6g_1b_5$$

$r_6g_1b_5$ é a cor no triângulo de Mayer correspondente a 2 partes de puro vermelho, 1 parte de ocre e 3 partes de azul prussiano.

6.4 A partir da cor $r_7g_2b_3$ pretende-se encontrar uma maneira de prepará-la com vermelho chumbo, ocre e puro azul a fim de localizar esta mistura no triângulo de Mayer. Os equivalentes numéricos para essas cores são:

Vermelho chumbo: r_8g_4

Ocre: $r_4g_6b_2$

Azul puro: b_{12}

Solução

Fazendo,

$$r_8g_4 = x; \quad r_4g_6b_2 = y; \quad e, \quad b_{12} = z$$

tem-se:

$$7 = \frac{8x + 4y}{x + y + z} \rightarrow 7x + 7y + 7z = 8x + 4y \rightarrow x - 3y - 7z = 0$$

$$2 = \frac{4x + 6y}{x + y + z} \rightarrow 2x + 2y + 2z = 4x + 6y \rightarrow 2x + 4y - 2z = 0$$

$$3 = \frac{2y + 12z}{x + y + z} \rightarrow 3x + 3y + 3z = 2y + 12z \rightarrow 3x + y - 9z = 0$$

Somando as equações:

$$6x + 2y - 18z$$

Como é impossível adicionar uma quantidade negativa de uma cor, esta mistura não pode ser produzida a partir da combinação de vermelho chumbo, ocre e puro azul a fim de encontrá-la no triângulo de Mayer.

6.5 Baseando-se no gráfico 30, para percepção visual da cor, confirmemos a teoria de Fechner.

Solução

Podemos ver que a diferença apenas perceptível (d.a.p.) é analisada a cada unidade. Tomemos os dois primeiros estímulos visuais de valores 2 e 4 em unidades físicas. Na primeira análise, temos:

$$dp = k \frac{dS}{S} \rightarrow (2 - 1) = k \frac{(4 - 2)}{4} \rightarrow 1 = k \frac{2}{4} \rightarrow k = 2$$

Como k é um parâmetro de estímulo constante com base neste experimento, e devemos considerar sempre o maior estímulo visual anterior, temos:

$$dp = k \frac{dS}{S} \rightarrow (3 - 2) = 2 \frac{(S-4)}{S} \rightarrow 1 = 2 \frac{(S-4)}{S} \rightarrow S = 2S - 8 \rightarrow S = 8$$

$$dp = k \frac{dS}{S} \rightarrow (4 - 3) = 2 \frac{(S-8)}{S} \rightarrow 1 = 2 \frac{(S-8)}{S} \rightarrow S = 2S - 16 \rightarrow S = 16$$

$$dp = k \frac{dS}{S} \rightarrow (5 - 4) = 2 \frac{(S-16)}{S} \rightarrow 1 = 2 \frac{(S-16)}{S} \rightarrow S = 2S - 32 \rightarrow S = 32$$

⋮

Podemos perceber, até mesmo pelo gráfico, que o estímulo visual segue uma progressão geométrica de razão 2, $\left(\frac{S_n}{S_{n-1}} = 2\right)$. Enquanto, a diferença apenas perceptível (d.a.p.) segue uma progressão aritmética de razão 1, $(S_n - S_{n-1} = 1)$.

Quando temos uma progressão aritmética correspondendo a uma progressão geométrica, podemos expressar esta correspondência numa função logarítmica, pois

a média aritmética-geométrica produz aproximações do logaritmo natural $\ln(x)$, o que nos leva a:

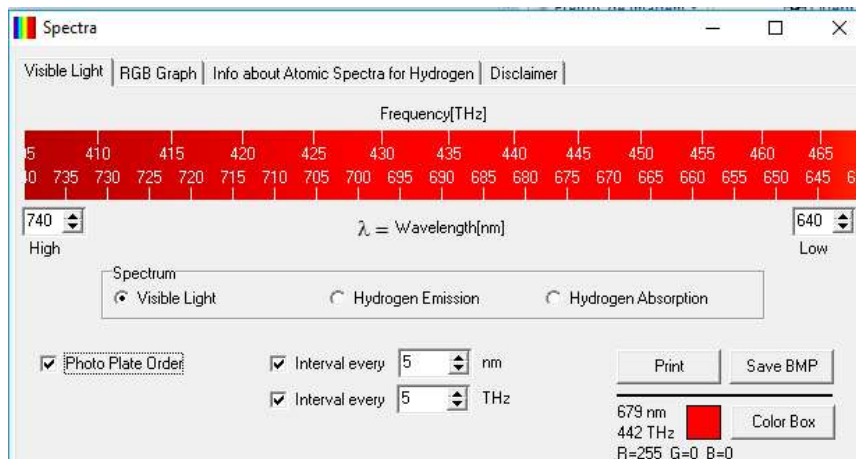
$$p = k \cdot \ln \frac{S}{S_0}$$

6.6 Percorrendo o espectro de luz visível de 405THz (740nm) a 434THz (690nm), e, logo a seguir, até 468THz (640nm), percebe-se igual tonalidade? Seria verdade para ambos intervalos?

Solução

Não, a matiz não permanece a mesma. O sistema visual humano é não-linear. Portanto, intervalos de mesmo comprimento não correspondem à mesma quantidade de luz (luminância) ou à mesma luminosidade percebida (brilho), como é mostrado na figura abaixo.

Figura 55 – Espectro de luz vermelha



Fonte: O autor, 2016. Software Spectra.

6.7 Qual é a luminância real de uma cor, se o brilho percebido desta, na escala de valor Munsell, for 3 CD/m^2 ?

Solução

Temos $V = 3$, então, pelo polinômio de quinta ordem:

$$Y = 1,2219V - 0,23111V^2 + 0,23951V^3 - 0,021009V^4 + 0,0008404V^5$$

$$Y = 1,2219 \cdot 3 - 0,23111 \cdot 3^2 + 0,23951 \cdot 3^3 - 0,021009 \cdot 3^4 + 0,0008404 \cdot 3^5$$

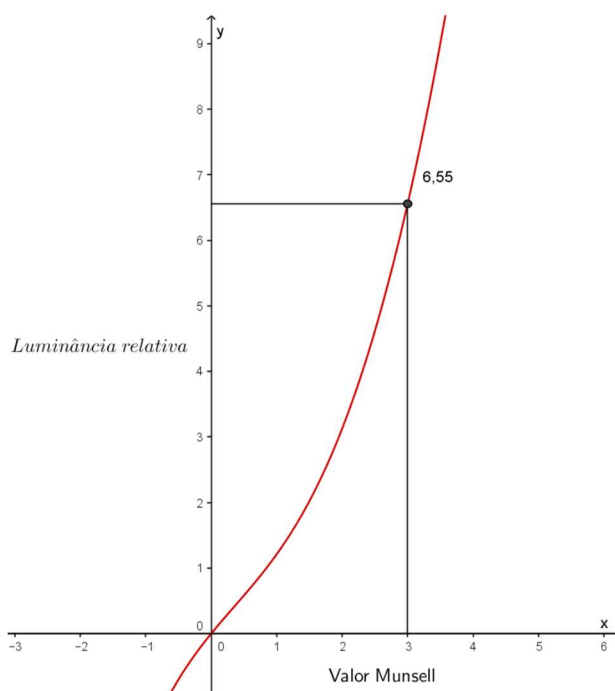
$$Y = 6,55 \text{ CD/m}^2$$

Confirmando o resultado pela equação simples do valor Munsell (V), temos,

$$V = 2,468Y^{1/3} - 1,636 = 2,468 \cdot (6,55)^{1/3} - 1,636 = 2,468 \cdot 1,869 - 1,636 =$$

$$= 4,612 - 1,636 = 2,976 \cong 3 \text{ CD/m}^2$$

Gráfico 32 –Luminância relativa x
Valor Munsell



Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

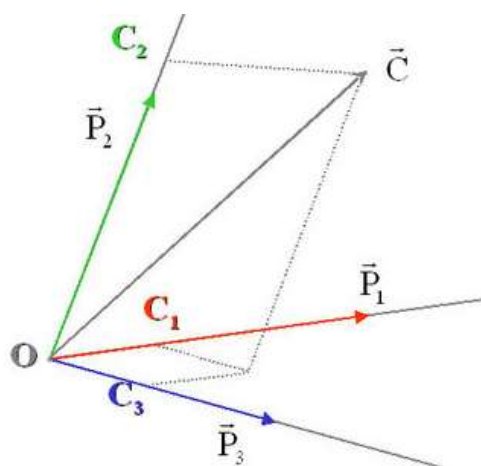
Nota: Candela, do latim *ve/a*, por metro quadrado (CD/m^2), é a unidade de medida básica do Sistema Internacional de Unidades para a intensidade luminosa que parte da área de uma determinada superfície, ou seja, lumens refletidos por área elementar de um objeto.

7 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE COLORIMETRIA

Depois de tantas evoluções dos sistemas de ordem de cor, o que não seria interessante apresentar todos, apenas os mais significativos, o de Munsell, por exemplo, foi um padrão adotado. A partir do século XX as construções geométricas, os sólidos apresentados, não ofereceram novas ideias. Mas no início deste mesmo século, a medição e especificação de cor começaram a fazer progressos significativos.

Devido à natureza tricromática da visão, uma cor pode ser definida por um conjunto de apenas três números, como as coordenadas de um vetor num espaço vetorial. Assim, uma cor pode ser representada por um vetor cujo comprimento é proporcional ao grau de iluminação e cuja orientação no espaço está relacionada com o tom da cor.

Figura 56 – Espaço vetorial tricromático



Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

Na figura, uma cor é definida por um vetor cujas coordenadas tricromáticas são as cores primárias. E pode ser assim equacionada:

$$\vec{C} = C_1\vec{P}_1 + C_2\vec{P}_2 + C_3\vec{P}_3 \quad (1)$$

Esta equação significa que se pode encontrar uma determinada cor C através de uma mistura das três cores primárias C_1 , C_2 e C_3 , com os respectivos pesos P_1 , P_2 e P_3 . Assim, qualquer espectro de luz é resultado de uma mistura aditiva de feixes de

luz monocromática, de modo que qualquer cor policromática C pode ser produzida pela seguinte combinação linear:

$$\vec{C} = \sum_{\lambda} f(\lambda) \vec{P}_{\lambda} \quad (2)$$

Onde $\vec{P}_{\lambda}$ é uma fonte primária de cor monocromática de comprimento de onda λ ; e $f(\lambda)$, o espectro de cor. De acordo com a equação (1), qualquer fonte monocromática $\vec{P}_{\lambda}$ pode ser expressa como uma combinação de três primárias não monocromáticas P_1 , P_2 e P_3 :

$$\vec{P}_{\lambda} = c_1(\lambda) \vec{P}_1 + c_2(\lambda) \vec{P}_2 + c_3(\lambda) \vec{P}_3 \quad (3)$$

Onde $c_1(\lambda)$, $c_2(\lambda)$ e $c_3(\lambda)$ são os valores espectrais de triestímulos, que são determinados a partir da substituição de (3) em (2):

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \sum_{\lambda} f(\lambda) [c_1(\lambda) \vec{P}_1 + c_2(\lambda) \vec{P}_2 + c_3(\lambda) \vec{P}_3] \\ \vec{C} &= \sum_{\lambda} f(\lambda) c_1(\lambda) \vec{P}_1 + \sum_{\lambda} f(\lambda) c_2(\lambda) \vec{P}_2 + \sum_{\lambda} f(\lambda) c_3(\lambda) \vec{P}_3 \end{aligned}$$

Logo, por (1), têm-se:

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum_{\lambda} f(\lambda) c_1(\lambda) \\ C_2 &= \sum_{\lambda} f(\lambda) c_2(\lambda) \\ C_3 &= \sum_{\lambda} f(\lambda) c_3(\lambda) \end{aligned}$$

Uma vez que os valores de triestímulos espectrais $c_1(\lambda)$, $c_2(\lambda)$ e $c_3(\lambda)$ são conhecidos, qualquer estímulo com um espectro de cor $f(\lambda)$ pode ser representado por um ponto no espaço tridimensional com coordenadas C_1 , C_2 e C_3 .

Se as respostas dos cones L , M e S fossem conhecidas, seria fácil para especificar combinações de cores em termos de estímulos de energia. Assim, para cada um dos três tipos de cones, em determinado comprimento de onda, $L(\lambda)$, $M(\lambda)$ e $S(\lambda)$ é multiplicado pela distribuição espectral do estímulo, $\Phi(\lambda)$. Em seguida, a resposta é integrada em todos os comprimentos de onda.

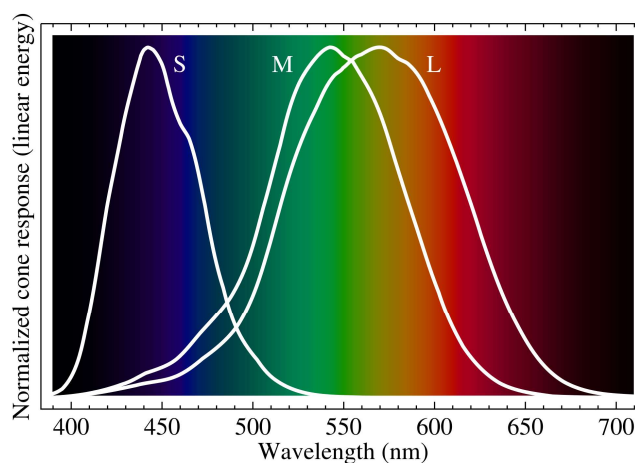
$$L = \int_0^{\infty} \Phi(\lambda)L(\lambda)d\lambda$$

$$M = \int_0^{\infty} \Phi(\lambda)M(\lambda)d\lambda$$

$$S = \int_0^{\infty} \Phi(\lambda)S(\lambda)d\lambda$$

A partir destas equações, podemos afirmar que as respostas relativas integradas dos cones L , M e S para dois estímulos diferentes, têm o mesmo valor. As respostas integradas dos cones podem ser pensadas como valores triestimulares, ou seja, os valores triestimulares dos cones são idênticos, em dois estímulos de cor diferentes, quando são integrados.

Gráfico 33 – Respostas dos cones em função do comprimento de onda



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Color_vision.
Acesso em: 16 nov. 2015.

Sabe-se das distribuições de energia espectral a fim de realizar os cálculos triestimulares para especificar as medições de cores, usando técnicas para encontrar a faixa de comprimento de onda visível e gravar a resposta relativa a cada comprimento de onda.

Na prática, é necessário ajustar as primárias do campo de visão. Isso ocorre porque a luz monocromática aparece muito saturada para os seres humanos, e é difícil combinar com três primárias puras. Adicionando luz primária pura à luz monocromática irá dessaturar a aparência. Usando as leis de Grassmann,

anteriormente citadas, isto equivale a subtrair a luz do campo de referência. Algebricamente, uma cor pode ser definida:

$$R(r) + G(g) + B(b) = \lambda - R(r_2) - G(g_2) - B(b_2)$$

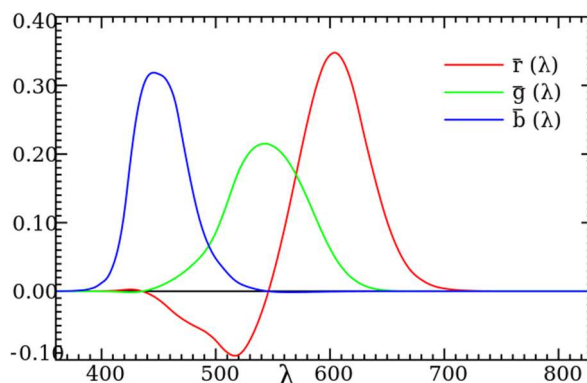
Em que R , G e B são as primárias; r , g e b , unidades arbitrárias destas primárias; e, λ , a luz monocromática.

As experiências que levaram a esta conclusão, geraram valores de triestímulos espectrais que são as quantidades relativas de cada uma das primárias R , G e B necessárias para coincidir com um determinado comprimento de onda (ANEXO C).

Tais cores primárias foram escolhidas para serem monocromáticas em 700 nanômetros para o vermelho ($\vec{R}$), aproximadamente, 546 nanômetros para o verde ($\vec{G}$) e, aproximadamente, 435 nanômetros para o azul ($\vec{B}$).

Quando a fonte de comprimento de onda λ é monocromática, as componentes tricromáticas obtidas, por experiências em observadores, são chamados valores dos componentes tricromáticos RGB, $\overline{r}(\lambda)$, $\overline{g}(\lambda)$ e $\overline{b}(\lambda)$. São representados graficamente em função do comprimento de onda λ .

Gráfico 34 – Componentes tricromáticos RGB em função do comprimento de onda



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/CIE_1931_color_space. Acesso em: 19 nov. 2015.

A escala é definida de modo que:

$$\int \overline{r}(\lambda) d\lambda = \int \overline{g}(\lambda) d\lambda = \int \overline{b}(\lambda) d\lambda$$

Esta escolha é justificada pelo fato de que a percepção visual de um estímulo neutro, cinza ou branco, corresponde a uma resposta equilibrada dos três cones dos

olhos. Para os comprimentos de onda abaixo de 550 nanômetros, as funções de cor $\overline{r}(\lambda)$ e $\overline{g}(\lambda)$ assumem valores negativos, pois é impossível corresponder uma cor monocromática abaixo de 550 nanômetros adicionando três primárias monocromáticas.

Qualquer distribuição espectral do estímulo, $\Phi(\lambda)$, está associada com uma cor $\vec{C} = R_c \vec{R} + G_c \vec{G} + B_c \vec{B}$ em que as coordenadas tricromáticas no sistema de cor RGB são dadas por:

$$R_c = \int \Phi_c(\lambda) \overline{r}(\lambda) d\lambda$$

$$G_c = \int \Phi_c(\lambda) \overline{g}(\lambda) d\lambda$$

$$B_c = \int \Phi_c(\lambda) \overline{b}(\lambda) d\lambda$$

É importante ressaltar que todos os três valores triestímulos, em estímulos diferentes, devem ser o mesmo, a fim de garantir uma correspondência de cor.

$$\int \Phi_1(\lambda) \overline{r}(\lambda) d\lambda = \int \Phi_2(\lambda) \overline{r}(\lambda) d\lambda$$

$$\int \Phi_1(\lambda) \overline{g}(\lambda) d\lambda = \int \Phi_2(\lambda) \overline{g}(\lambda) d\lambda$$

$$\int \Phi_1(\lambda) \overline{b}(\lambda) d\lambda = \int \Phi_2(\lambda) \overline{b}(\lambda) d\lambda$$

Apenas os valores relativos destas coordenadas têm um significado físico em termos de cromaticidade. Introduzindo as coordenadas tricromáticas r , g e b , tem-se:

$$r = \frac{R_c}{R_c + G_c + B_c}$$

$$g = \frac{G_c}{R_c + G_c + B_c}$$

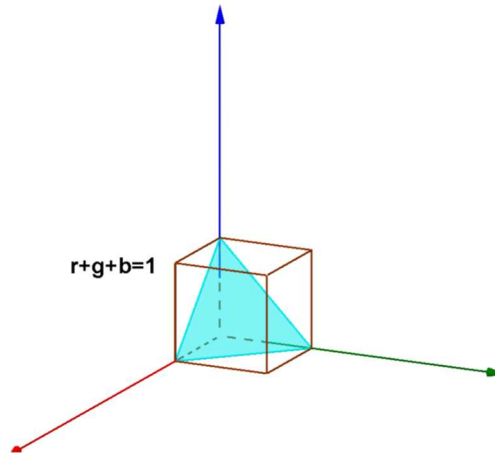
$$b = \frac{B_c}{R_c + G_c + B_c}$$

É mais fácil representar as cores num plano que no espaço tridimensional. Ao somar as coordenadas tricromáticas tem-se:

$$r + g + b = \frac{R_c}{R_c + G_c + B_c} + \frac{G_c}{R_c + G_c + B_c} + \frac{B_c}{R_c + G_c + B_c} = \frac{R_c + G_c + B_c}{R_c + G_c + B_c} = 1$$

Que é a equação de um plano definido pelos pontos dos três vetores unitários $\vec{R}$, $\vec{G}$ e $\vec{B}$.

Gráfico 35 – Plano definido por três vértices unitários



Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

A cor é representada por um ponto neste triângulo (Gráfico 28).

Por exemplo, de acordo com o gráfico 34, a distribuição espectral do estímulo correspondente a 490 nanômetros está associada, aproximadamente, com a cor:

$$\vec{C} = R_c \vec{R} + G_c \vec{G} + B_c \vec{B} = -0,058 \vec{R} + 0,057 \vec{G} + 0,083 \vec{B}.$$

Que possui as seguintes coordenadas tricromáticas:

$$r = \frac{R_c}{R_c + G_c + B_c} = \frac{-0,058}{-0,058 + 0,057 + 0,083} = \frac{-0,058}{0,082} = -0,707$$

$$g = \frac{G_c}{R_c + G_c + B_c} = \frac{0,057}{-0,058 + 0,057 + 0,083} = \frac{0,057}{0,082} = 0,695$$

$$b = \frac{B_c}{R_c + G_c + B_c} = \frac{0,083}{-0,058 + 0,057 + 0,083} = \frac{0,083}{0,082} = 1,012$$

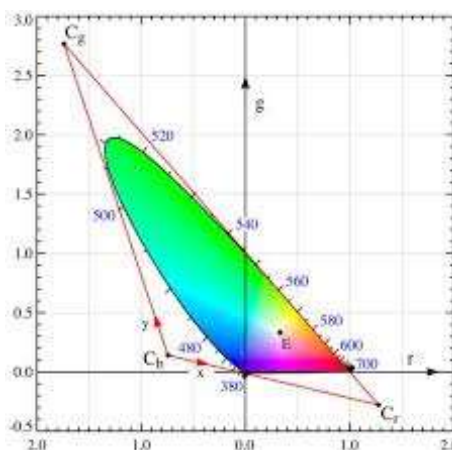
Onde,

$$r + g + b = -0,707 + 0,695 + 1,012 = 1,$$

uma vez que o componente b pode ser assim derivado $b = 1 - r - g$, desde que r e g sejam conhecidos.

De um modo geral exibe o plano $r + g + b = 1$ sob a forma de um triângulo isósceles, com r e g ao longo dos eixos que contêm os vértices do triângulo. O plano rg obtido é o chamado diagrama de cromaticidade (r, g).

Gráfico 36 – Diagrama de cromaticidade



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/CIE_1931_color_space. Acesso em: 25 nov. 2015.

Nos três vértices do triângulo aparecem as cores primárias vermelha, verde e azul. A linha que liga as primárias vermelha e azul é a linha púrpura.

Radiações monocromáticas para comprimentos de onda $380nm \ll \lambda \ll 780nm$ se situam no locus do espectro. Elas correspondem às seguintes coordenadas:

$$r = \frac{\overline{r(\lambda)}}{\overline{r(\lambda)} + \overline{g(\lambda)} + \overline{b(\lambda)}}$$

$$g = \frac{\overline{g(\lambda)}}{\overline{r(\lambda)} + \overline{g(\lambda)} + \overline{b(\lambda)}}$$

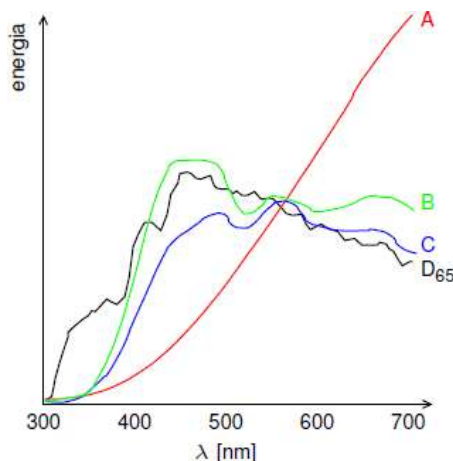
$$b = \frac{\overline{b(\lambda)}}{\overline{r(\lambda)} + \overline{g(\lambda)} + \overline{b(\lambda)}}$$

Todas as cores existentes têm seus pontos dentro do domínio do locus do espectro e a linha púrpura. Pontos fora desta área não têm significado físico e não correspondem aos estímulos reais.

Em 1931, a Comissão Internacional de Iluminação (CIE) promulgou padrões de iluminação estabelecidos A (fonte artificial de luz), B (luz do sol do meio-dia), C (luz

média do dia para um céu encoberto), **D65** (luz média do dia), e outros (ANEXO D), tornando possível a especificação das cores vistas pelo observador sob um determinado iluminante.

Gráfico 37 – Intensidade luminosa em função do comprimento de onda sob determinado iluminante



Fonte: <http://catarinaantunesdesign.blogspot.com.br/2010/10/iluminantes-padrao>. Acesso em: 28 nov. 2015.

Construções matemáticas têm sua importância estética, e o diagrama de cor é um caso. Este tipo diagrama de cromaticidade cumpre os requisitos de precisão e objetividade, como foi visto nos sistemas de Munsell, capazes de especificar exatamente as cores. Tais sistemas são utilizados para medição da cor (colorimetria).

O diagrama cromático CIE remonta as medições de cor de Maxwell e a construção do seu triângulo. Seu ponto de partida foi o método indireto de comparação Color Match, descrição numérica da resposta cromática do observador⁷ numa mistura aditiva de três cores elementares, vermelho (R), verde (G) e azul (B), através de funções de correspondência de cores: $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ e $\bar{z}(\lambda)$.

Devido à natureza tricromática do sistema visual humano L, M e S , a cor pode ser representada com um vetor de cor que consiste em três números, ou valores triestímulos X, Y e Z . O espaço de cor CIE XYZ é derivado de potência de distribuição espectral por meio de integração de funções com três cores relacionadas R, G e B . Estas funções de correspondência de cores podem ser consideradas transformações

⁷ Como a cor depende do observador, tornou-se necessário padronizá-lo. Em 1931, a CIE criou o observador 2º e, em 1964, o observador 10º. Duas áreas distintas na retina: a parte central, somente cones; e a geral, incluindo bastonetes, respectivamente.

lineares aproximadas das sensibilidades dos cones de visão.

Há muitas cores de coordenadas tricromáticas negativas no sistema RGB, como resultado da escolha de três cores primárias monocromáticas. Para eliminar este inconveniente, utiliza-se uma transformação linear ao longo do espaço RGB, conduzindo os componentes tricromáticos $\overline{x(\lambda)}$, $\overline{y(\lambda)}$ e $\overline{z(\lambda)}$ a valores positivos. Além disso, as primárias $\vec{X}$, $\vec{Y}$ e $\vec{Z}$ foram escolhidas de tal modo que o plano $O\vec{x}\vec{y}$ corresponda a um plano sem luminância, e o eixo $O\vec{Y}$ torna-se o eixo de luminâncias visuais.

A transformação linear $[\overline{r(\gamma)}; \overline{g(\gamma)}; \overline{b(\gamma)}] \rightarrow [\overline{x(\gamma)}; \overline{y(\gamma)}; \overline{z(\gamma)}]$ é definida por, aproximadamente:

$$\begin{bmatrix} \overline{x(\gamma)} \\ \overline{y(\gamma)} \\ \overline{z(\gamma)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{r(\lambda)} \\ \overline{g(\lambda)} \\ \overline{b(\lambda)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4887180 & 0,3106803 & 0,2006017 \\ 0,1762044 & 0,8129847 & 0,0108109 \\ 0,0000000 & 0,0102048 & 0,9897952 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{r(\lambda)} \\ \overline{g(\lambda)} \\ \overline{b(\lambda)} \end{bmatrix}.$$

Valores encontrados para o sistema CIE RGB (ANEXO E), sob o iluminante E , quando se utilizou fotometria (ramo da óptica que se preocupa em medir a luz), em termos de como seu brilho é percebido pelo olho humano. Este iluminante E representa um iluminante puramente teórico (igual energia em cada comprimento de onda), que nunca ocorre em um ambiente de visualização natural. Por isso, muitos preferem usar algo como uma distribuição média de luz do dia, como o Iluminante $D65$.

Logo, encontram-se, aproximadamente, as seguintes funções de combinação de cores:

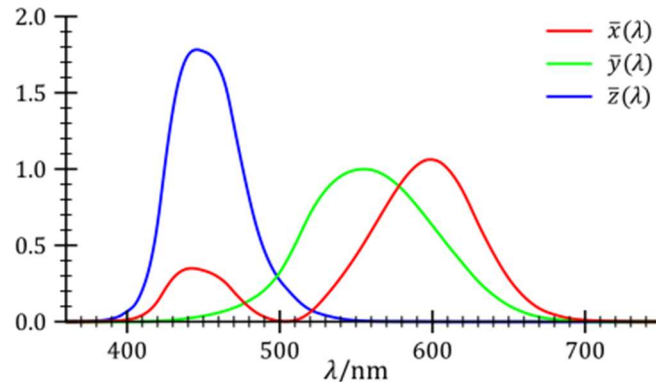
$$\overline{x(\lambda)} = 0,4887180 \overline{r(\gamma)} + 0,3106803 \overline{g(\gamma)} + 0,2006017 \overline{b(\gamma)}$$

$$\overline{y(\lambda)} = 0,1762044 \overline{r(\gamma)} + 0,8129847 \overline{g(\gamma)} + 0,0108109 \overline{b(\gamma)}$$

$$\overline{z(\lambda)} = 0,0000000 \overline{r(\gamma)} + 0,0102048 \overline{g(\gamma)} + 0,9897952 \overline{b(\gamma)}$$

Obtendo assim os valores triestímulos pelo comprimento de onda.

Gráfico 38 – Valores triestímulo XYZ em função do comprimento de onda



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/CIE_1931_color_space. Acesso em: 01 dez. 2015.

Para obter $\overline{r(\gamma)}$, $\overline{g(\gamma)}$ e $\overline{b(\gamma)}$, a partir de $\overline{x(\gamma)}$, $\overline{y(\gamma)}$ e $\overline{z(\gamma)}$, utiliza-se matriz inversa de:

$$M = \begin{bmatrix} 0,4887180 & 0,3106803 & 0,2006017 \\ 0,1762044 & 0,8129847 & 0,0108109 \\ 0,0000000 & 0,0102048 & 0,9897952 \end{bmatrix}$$

$$M \times M^{-1} = I \rightarrow \begin{bmatrix} 0,4887180 & 0,3106803 & 0,2006017 \\ 0,1762044 & 0,8129847 & 0,0108109 \\ 0,0000000 & 0,0102048 & 0,9897952 \end{bmatrix} \times M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 2,3706743 & -0,9000405 & -0,4706338 \\ -0,5138850 & 1,4253036 & 0,0885814 \\ 0,0052982 & -0,0146949 & 1,0093968 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} \overline{r(\lambda)} \\ \overline{g(\lambda)} \\ \overline{b(\lambda)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,3706743 & -0,900040 & -0,4706338 \\ -0,5138850 & 1,4253036 & 0,0885814 \\ 0,0052982 & -0,0146949 & 1,0093968 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x(\gamma)} \\ \overline{y(\gamma)} \\ \overline{z(\gamma)} \end{bmatrix}$$

Logo, para o sistema de cor CIE RGB, sob iluminante E , temos, aproximadamente,

$$\overline{r(\gamma)} = 2,3706743 \overline{x(\gamma)} - 0,900040 \overline{y(\gamma)} - 0,4706338 \overline{z(\gamma)}$$

$$\overline{g(\gamma)} = -0,5138850 \overline{x(\gamma)} + 1,4253036 \overline{y(\gamma)} + 0,0885814 \overline{z(\gamma)}$$

$$\overline{b(\gamma)} = 0,0052982 \overline{x(\gamma)} - 0,0146949 \overline{y(\gamma)} + 1,0093968 \overline{z(\gamma)}$$

A partir dos valores triestímulos X, Y e Z , obtidos, os valores médios podem ser derivados para construir as funções de correspondência de cor representando graficamente o seu locus de acordo com o comprimento de onda.

$$X = \int_{380}^{780} \Phi(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda$$

$$Y = \int_{380}^{780} \Phi(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda$$

$$Z = \int_{380}^{780} \Phi(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda$$

A partir desses cálculos, pode-se medir a cor de um determinado estímulo, $\Phi(\lambda)$.

A Comissão Internacional de Iluminação adotou estas funções de correspondência de cores através de um ajuste matemático para apenas valores positivos na resposta cromática. O que foi bom ao fazer cálculos, mas causou uma falta de clareza dos valores de referência utilizados. Enquanto os valores antigos tricromáticas de Maxwell, R, G e B , ainda poderiam estar relacionados com cores primárias, isto já não era possível com os novos valores triestímulos X, Y e Z .

Como o olho humano possui três tipos de sensores de cor que respondem a diferentes intervalos de comprimentos de onda, todas as cores visíveis são representadas tridimensionalmente. No entanto, o conceito de cor pode ser dividido em duas partes: brilho e cromaticidade. Assim, o espaço de cor CIE XYZ foi concebido apenas pelos parâmetros x e y , ambos especificam a cromaticidade da cor, e Y , a luminância, brilho da cor. Estes dois valores normalizados são funções dos três valores triestímulos X, Y e Z .

$$x = \frac{X}{X + Y + Z}$$

$$y = \frac{Y}{X + Y + Z}$$

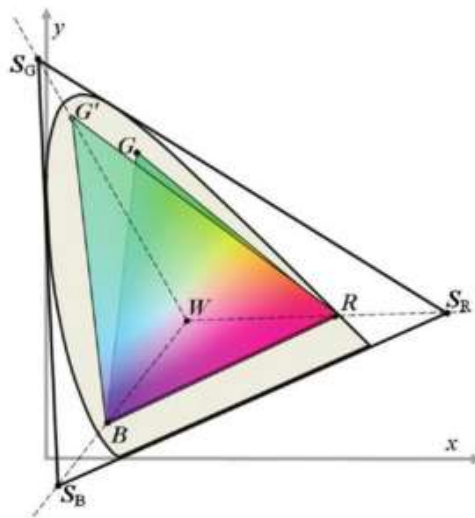
$$z = \frac{Z}{X + Y + Z} = 1 - x - y, \text{ pois,}$$

$$x + y + z = \frac{X}{X + Y + Z} + \frac{Y}{X + Y + Z} + \frac{Z}{X + Y + Z} = \frac{X + Y + Z}{X + Y + Z} = 1.$$

Os valores triestímulos X e Z (tom e saturação) podem, também, ser calculados a partir dos parâmetros x, y e do valor triestímulo Y (luminosidade):

- $X = \frac{Y}{y} x$, pois, $X = \frac{\frac{Y}{y}}{\frac{X+Y+Z}{X+Y+Z}} \cdot \frac{X}{X+Y+Z} = (X+Y+Z) \cdot \frac{X}{X+Y+Z} = X$
- $Z = \frac{Y}{y} (1 - x - y)$, pois, $Z = \frac{\frac{Y}{y}}{\frac{X+Y+Z}{X+Y+Z}} \cdot \left(1 - \frac{X}{X+Y+Z} - \frac{Y}{X+Y+Z}\right) = (X+Y+Z) \left(1 - \frac{(X+Y)}{X+Y+Z}\right) = (X+Y+Z) \left(\frac{(X+Y+Z)-(X+Y)}{X+Y+Z}\right) = (X+Y+Z) - (X+Y) = Z$

Gráfico 39 – Diagrama de Cromaticidade



Fonte: OLEARI, 2015.

Uma vez que $x + y + z = 1$, as cores são representadas num plano cujos eixos x e y formam ângulos retos. Cores monocromáticas x, y e z que possuem coordenadas dadas por:

$$x = \frac{\bar{x}(\lambda)}{\bar{x}(\lambda) + \bar{y}(\lambda) + \bar{z}(\lambda)}$$

$$y = \frac{\bar{y}(\lambda)}{\bar{x}(\lambda) + \bar{y}(\lambda) + \bar{z}(\lambda)}$$

$$z = \frac{\bar{z}(\lambda)}{\bar{x}(\lambda) + \bar{y}(\lambda) + \bar{z}(\lambda)}$$

encontram-se ao longo de todo o espectro.

Quanto ao sistema RGB, a superfície interior do qual se pode encontrar todas as cores reais físicas é delimitado pelo locus espectral e pela linha púrpura. Esta superfície é incorporada dentro de um triângulo cujos vértices representam as três primárias X, Y e Z :

- Primária X : $x = 1$; $y = 0$
- Primária Y : $x = 0$; $y = 1$
- Primária Z : $x = 0$; $y = 0 \rightarrow z = 1$

Como visto, valores de Y para uma fonte de luz são as medidas de luminância. Iluminantes padrões usados para cálculos de cor de superfície têm suas distribuições espectrais normalizados para um valor de luminância 100. Então, para valores de refletância de superfície na gama de 0 a 1, o valor calculado de Y é a refletância luminosa expressa como uma percentagem da luminância de origem no intervalo de 0 a 100.

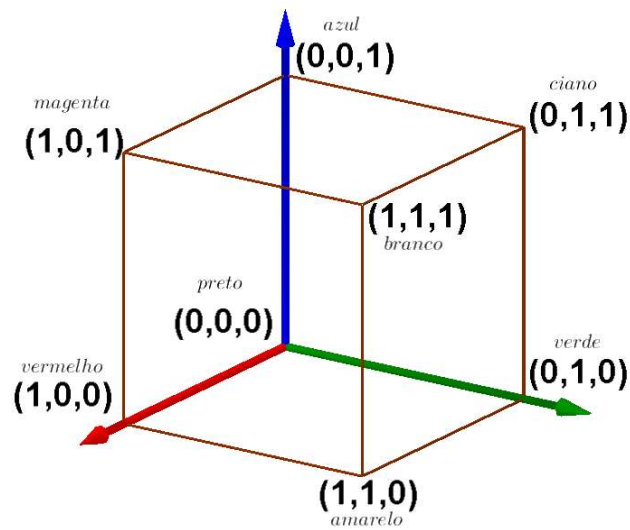
A matriz abaixo expressa o coeficiente de sensibilidade Q_{xyY} para os valores de cor (x, y, Y) em relação aos valores dos componentes triestímulos X, Y e Z :

$$Q_{xyY} = \begin{bmatrix} \frac{Y+Z}{(X+Y+Z)^2} & \frac{-X}{(X+Y+Z)^2} & \frac{-X}{(X+Y+Z)^2} \\ \frac{-Y}{(X+Y+Z)^2} & \frac{X+Z}{(X+Y+Z)^2} & \frac{-Y}{(X+Y+Z)^2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A conclusão geral que se pode ter desta matriz é que o valor triestímulo Z é efetivamente nulo, pois o componente Z não tem qualquer informação adicional ($z = 1 - x - y$), por isso, é muitas vezes omitido. A cromaticidade está próximo de um limite monocromático. Assim, $x + y = 1$, e quaisquer coeficientes de sensibilidade para x são o negativo daqueles para y , e quaisquer incertezas para x e y serão iguais.

As coordenadas cromáticas xy das primárias representam as cores obtidas para os vetores de cor $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Basicamente, elas representam cromaticidade do valor máximo quando exibida sozinha. Matematicamente, x e y são as coordenadas projetivas. Projeções bidimensionais de um espaço de cor tridimensional, que foram normalizados para remover a componente luminância. Sem a luminância é impossível saber a influência relativa das três primárias, e por isso não se sabe que cor será mostrada quando todas as três primárias são exibidas no seu máximo. Assim, precisamos incluir uma quarta descrição: a exibição ou espaço de cor do ponto branco. O ponto de um espaço de cor branca é a cor obtida pelo máximo de todas as três primárias, tipicamente expressa como o vetor de cor $(1, 1, 1)$.

Gráfico 40 – Cubo de cor na escala decimal



Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

Por definição, o espectro de um branco perfeito é constante ao longo de todo o espectro visível. Onde,

$$r_E = g_E = b_E = 1/3, \text{ desde que } \int \overline{r(\lambda)} d\lambda = \int \overline{g(\lambda)} d\lambda = \int \overline{b(\lambda)} d\lambda.$$

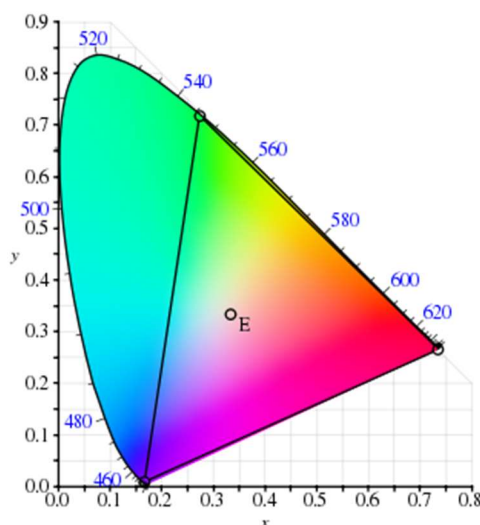
Como visto anteriormente, o estímulo para o branco corresponde a uma resposta equilibrada dos três cones dos olhos.

Isso é válido no sistema RGB, e continua sendo verdade no sistema XYZ, em que se pode escrever:

$$x_E = y_E = z_E = 1/3$$

O ponto representativo de estímulo E é localizado no centro do triângulo RGB ou XYZ.

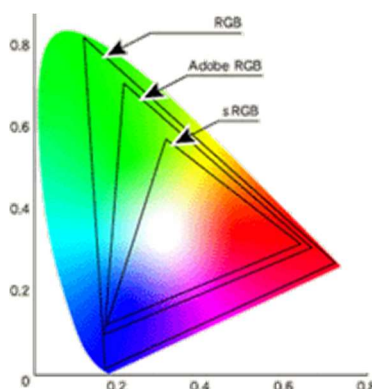
Gráfico 41 – Diagrama cromático e estímulo no centro da gama de cor (gamut)



Fonte: KLETTE, 2014.

Como foi dito, as cores visíveis do diagrama de cromaticidade ocupam uma região do plano projetivo. A extremidade curva é o locus espectral e corresponde à luz monocromática, tonalidade pura com um único comprimento de onda. As cores menos saturadas aparecem no interior, com o branco no centro. As primárias monocromáticas, usadas para especificar as funções CIE RGB, formam triângulos no interior do diagrama cromático, conhecidos como a gama de cores do sistema em questão, gamut. Esses triângulos representam o intervalo de todas as possíveis cromaticidades que podemos criar através da aditiva mistura das três primárias, seguindo as leis de Grassmann.

Gráfico 42 – Diagrama cromático e gamas de cores

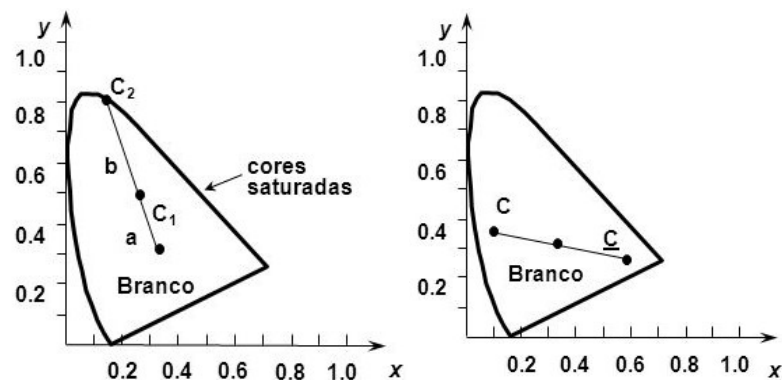


Fonte: <http://www.bairarteditions.com/pages/tutorials/epson-printing/colospace>. Acesso em: 14 dez. 2015.

Temos, no gráfico 42, o espaço de cor RGB, propriamente dito; o espaço de cor Adobe RGB, desenvolvido por Adobe Systems; e, o espaço de cor sRGB, proposto pela HP e Microsoft.

Dentro do diagrama, a cor resultante da mistura aditiva de duas cores irá resultar em três pontos alinhados.

Gráfico 43 – Diagramas cromáticos e cores resultantes de misturas



Fonte: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfPeIAD/apostila>.
Acesso em: 17 dez. 2015.

Qualquer cor $\vec{C}$ pode, igualmente, ser pensado como um aditivo de mistura do estímulo $\vec{E}$ com uma cor pura $\vec{C}_{DOMINANTE}$ ao longo do espectro:

$$\vec{C} = \vec{C}_{DOMINANTE} + \vec{E}$$

Por outro lado, o estímulo $\vec{E}$ poderia ser obtido mediante mistura aditiva de qualquer cor $\vec{C}$ com uma cor pura $\vec{C}_{DOMINANTE}$ denominada cor complementar $\vec{C}_{COMPLEMENTAR}$:

$$\vec{E} = \vec{C} + \vec{C}_{COMPLEMENTAR}$$

A razão é uma medida da pureza da cor. Esta proporção é igual a 0 para o branco puro e é igual a 1 para uma cor monocromática pura:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{C_{DOMINANTE}E}},$$

já que para o branco puro, C e E são praticamente o mesmo ponto no diagrama de cromaticidade, ambos brancos. E para uma cor pura, $C_{DOMINANTE}$ e C são a mesma cor.

Embora os comprimentos de onda dominantes complementares apresentem a matiz de um estímulo de cor, eles não transmitem informação sobre como uma cor está saturada. Isto é, todos os estímulos de cores que se encontram no mesmo segmento C_1C_2 (Gráfico 43), podem ter o mesmo comprimento de onda dominante, mas diferem, significativamente, em saturação. Consideram-se os estímulos próximos da coordenada acromática (branco) dessaturados. Por outro lado, os estímulos perto do locus do espectro são considerados altamente saturados.

Assim, a saturação de um estímulo de cor é expressa pelo termo pureza de excitação. Este termo indica a distância de um estímulo qualquer a um estímulo acromático no diagrama de cromaticidade. A pureza de excitação p_e é definida como a razão entre distâncias. No gráfico 43, sejam as coordenadas: $Branco = (x_w, y_w)$, $C_1 = (x_1, y_1)$ e $C_2 = (x_2, y_2)$. Tem-se:

$$p_e = \begin{cases} \frac{x_1 - x_w}{x_2 - x_w}, & \text{se } x_1 - x_w \geq y_1 - y_w \\ \frac{y_1 - y_w}{y_2 - y_w}, & \text{se } x_1 - x_w < y_1 - y_w \end{cases}$$

A pureza de excitação com maior numerador resulta no menor erro de precisão.

Um conceito relacionado à pureza de excitação é a pureza colorimétrica p_c . A pureza colorimétrica de um estímulo de cor expressa o quanto a luz acromática, com um comprimento de onda igual ao comprimento de onda dominante do estímulo considerado, deve ser adicionado ao estímulo monocromático de modo que a sua mistura combina com a cor do estímulo em questão. A pureza colorimétrica pode ser, assim, calculada:

$$p_c = \frac{L_d}{L_d + L_n}$$

Onde L_d e L_n representam as luminâncias dos estímulos monocromáticos e acromáticos, respectivamente. Ao usar as leis de Grassmann esta equação pode ser reescrita como:

$$p_c = \frac{L_d}{L_s}$$

Onde L_s representa a luminância do estímulo para a qual a pureza é calculada, e $L_s = L_d + L_n$.

A pureza colorimétrica pode também ser derivada da pureza de excitação, e vice-versa:

$$p_c = \frac{y_2}{y_1} p_e = \begin{cases} \frac{y_2(x_1 - x_w)}{y_1(x_2 - x_w)}, & \text{se } x_1 - x_w \geq y_1 - y_w \\ \frac{y_2(y_1 - y_w)}{y_1(y_2 - y_w)}, & \text{se } x_1 - x_w < y_1 - y_w \end{cases}$$

Vê-se que todas as cores visíveis correspondem a valores positivos dos parâmetros x, y e z , e, por conseguinte, para valores triestímulos positivos de X, Y e Z . Segmentos de reta entre quaisquer dois pontos de cor no diagrama de cromaticidade estão contidos nele, portanto, é convexo. E assim todas as cores, que podem ser formadas através de várias misturas, encontram-se no interior do diagrama de cromaticidade. Geometricamente, não há três pontos dentro do diagrama que formam um triângulo que inclui todas as cores. Logo, a gama da visão humana não é um triângulo. As cores verdes são expandidas e as cores azuis reduzidas devido ao contraste de brilho entre elas. As cores vermelhas são expandidas através da sensibilidade cromática.

Exercícios

7.1 Encontremos os valores triestímulos que representam o amarelo puro.

Solução

Sabemos que o amarelo puro, 580 nanômetros, é representado, na escala decimal, por,

$$\overline{r(580)} = 1,0; \overline{g(580)} = 1,0 \text{ e } \overline{b(580)} = 0,0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \overline{x(580)} &= 0,4887180 \overline{r(580)} + 0,3106803 \overline{g(580)} + 0,2006017 \overline{b(580)} = \\ &= 0,4887180 + 0,3106803 = \mathbf{0,7993983} \end{aligned}$$

$$\overline{y(58)} = 0,1762044 \overline{r(580)} + 0,8129847 \overline{g(580)} + 0,0108109 \overline{b(580)} = \\ = 0,1762044 + 0,8129847 = \mathbf{0,9891891}$$

$$\overline{z(580)} = 0,0000000 \overline{r(580)} + 0,0102048 \overline{g(580)} + 0,9897952 \overline{b(580)} = \mathbf{0,0102048}$$

Figura 57 - Valores triestímulos que representam o amarelo puro



Fonte: O autor, 2016. Mecansimo computacional WolframAlpha.

7.2 O estímulo $\Phi(\lambda)$ sob o iluminante **D65** tem os seguintes valores triestímulos:

$$X_0 = 95,04; Y_0 = 100; e, Z_0 = 108,89$$

Quais seriam as coordenadas tricromáticas deste estímulo?

Solução

$$x_0 = \frac{X_0}{\Sigma_0}; y_0 = \frac{Y_0}{\Sigma_0}; e, z_0 = \frac{Z_0}{\Sigma_0}$$

$$\Sigma_0 = X_0 + Y_0 + Z_0 = 95,04 + 100 + 108,89 = 303,93$$

Logo,

$$x_0 = \frac{X_0}{\Sigma_0} = \frac{X_0}{X_0 + Y_0 + Z_0} = \frac{95,04}{303,93} = \mathbf{0,3127}$$

$$y_0 = \frac{Y_0}{\Sigma_0} = \frac{Y_0}{X_0 + Y_0 + Z_0} = \frac{100}{303,93} = \mathbf{0,3290}$$

$$z_0 = \frac{Z_0}{\Sigma_0} = \frac{Z_0}{X_0 + Y_0 + Z_0} = \frac{108,89}{303,93} = \mathbf{0,3583}$$

7.3 Um estímulo é monocromático a 585 nanômetros. De acordo com os padrões CIE 1964, os valores triestímulos para este comprimento de onda são:

$$\bar{x}(\lambda) = 1,07, \quad \bar{y}(\lambda) = 0,83 \quad e \quad \bar{z}(\lambda) = 0$$

Quais são as coordenadas cromáticas para esta cor?

Solução

Fazendo,

$$x = \frac{\bar{x}(\lambda)}{\bar{x}(\lambda) + \bar{y}(\lambda) + \bar{z}(\lambda)} = \frac{1,07}{1,07 + 0,83 + 0} = \frac{1,07}{1,9} = 0,5631$$

$$y = \frac{\bar{y}(\lambda)}{\bar{x}(\lambda) + \bar{y}(\lambda) + \bar{z}(\lambda)} = \frac{0,83}{1,07 + 0,83 + 0} = \frac{0,83}{1,9} = 0,4368$$

$$z = \frac{\bar{z}(\lambda)}{\bar{x}(\lambda) + \bar{y}(\lambda) + \bar{z}(\lambda)} = \frac{0}{1,07 + 0,83 + 0} = \frac{0}{1,9} = 0$$

Encontramos **(0.5631, 0.4368, 0.0)**, as coordenadas tricromáticas para cor pura em 585 nanômetros.

7.4 De acordo com o exercício 7.2, o estímulo $\Phi(\lambda)$ seria monocromático?

Solução

As coordenadas tricromáticas do estímulo $\Phi(\lambda)$ são

$$x_0 = 0,3127; \quad y_0 = 0,3290; \quad z_0 = 0,3583.$$

Estas indicam que o estímulo $\Phi(\lambda)$ está próximo ao branco, cujas coordenadas são

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0,3333$$

Figura 58 – Estímulo próximo ao branco



Fonte: O autor, 2016. Mecansimo computacional WolframAlpha.

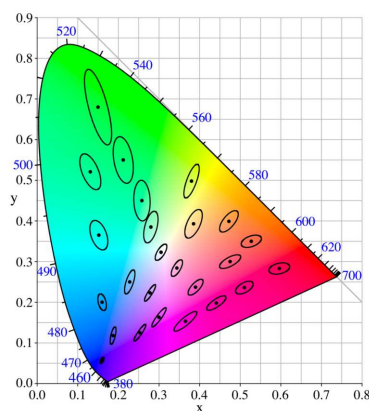
Portanto, não é um estímulo monocromático, pois sofre influência do branco, acromático.

8 UNIFORMIDADE CROMÁTICA

A percepção da cor é adaptada para interpretar todos os estímulos decorrentes de um mundo tridimensional de superfícies refletoras e fontes de luz. As mudanças contínuas em nossa resposta visual para iluminância (quantidade de luz incidente sobre uma superfície) e refletância (proporção entre o fluxo de radiação eletromagnética incidente numa superfície e o fluxo que é refletido) mantêm a experiência de cor como um atributo estável nos objetos, e minimizam a nossa consciência de mudanças na intensidade da luz. Isso produz a garantia da constância de cor - o reconhecimento da mesma cor nos mesmos objetos.

No estudo de MacAdam em um diagrama colorimétrico, padrão CIE, o tamanho da elipse simboliza a quantidade de matiz ou mudanças necessárias para produzir uma diferença visível na saturação de cor. Estas 25 elipses não são iguais em tamanho, forma ou orientação.

Gráfico 44 – Diagrama cromático e elipses de MacAdam



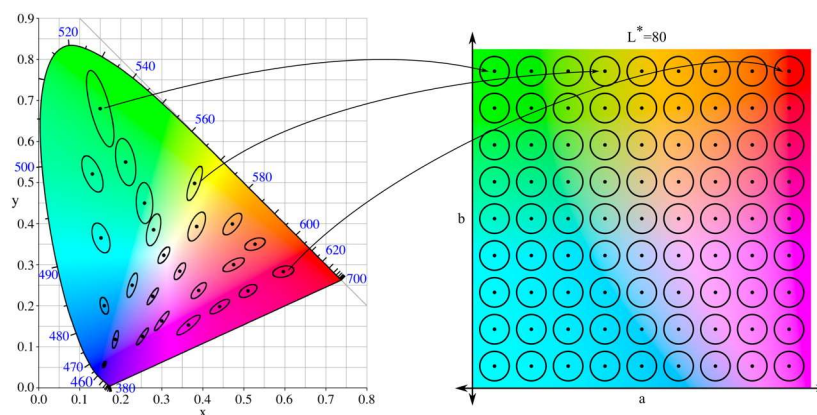
Fonte: CHOUDHURY, 2015.

Sabe-se que o diagrama acima não representa distâncias perceptuais iguais no espaço cromático. Grosseiramente, expande a área de cores verdes em relação a azuis e vermelhas. Isto é um problema quando se pretende projetar um espaço curvo de cor em uma superfície plana. É como alguns continentes parecem, erroneamente, maiores que outros num mapa mundo.

Os resultados de MacAdam estimularam vários esforços para conceber espaços de cores uniformes, que são perceptivelmente iguais em todas as dimensões e em todas as combinações de brilho (luminosidade) e tonalidade cromática. Em

princípio, estes fariam todas as elipses de MacAdam parecerem círculos de igual raio, e forneceria o quadro para os cálculos de diferença de cor precisos e consistentes.

Gráfico 45 – Elipses de MacAdam e o espaço de cor uniforme



Fonte: <http://iovs.arvojournals.org/article.aspx?articleid=2187751>.
Acesso em: 22 jan. 2016.

Muitos aspectos da geometria da cor são adaptações para melhorar a interpretação das cores sob fontes de luz natural. Talvez o fato mais significativo que surgiu das pesquisas de cores são as grandes variações individuais que caracterizam a nossa experiência coletiva de cor. Estas variações foram suprimidas na literatura de visão de cores na busca de métodos padrões de medição de cores. Mas as comparações entre diferentes observadores apresentam enormes diferenças individuais. Revisando estudos das elipses de MacAdam, num local específico no diagrama de cromaticidade, as elipses de diferentes observadores são, muitas vezes, destoantes, como a orientação, o tamanho e a forma das elipses.

As coordenadas cromáticas não fornecem, sozinhas, informações sobre a cor, o aparecimento de estímulos, uma vez que não incluem luminância. Como ocorrem mudanças de adaptação do observador, a cor corresponde a um determinado conjunto de coordenadas de cromaticidade que variam drasticamente em aparência. Muito esforço tem sido despendido na tentativa de fazer diagramas de cromaticidade uniforme, apesar de recair sempre na conversão de uma escala nominal em uma escala de intervalo.

Antes dos experimentos de MacAdam, foi descoberto que determinadas escalas de cor poderiam ser melhores representadas em um gráfico de cromaticidade projetivamente transformado, denominado espaço de cromaticidade uniforme (UCS). Tramando as elipses em tal diagrama, MacAdam revelou elipses com algumas

excentricidades, embora, não círculos. Mesmo assim, o resultado foi promissor e, através deste diagrama, foi proposta uma fórmula de diferença de cor.

$$u = \frac{4X}{X + 15Y + 3Z} = \frac{4x}{(-2x + 12y + 3)}$$

$$v = \frac{9Y}{X + 15Y + 3Z} = \frac{6y}{(-2x + 12y + 3)}$$

Sua transformação inversa:

$$x = \frac{9u}{6u - 16v + 12}$$

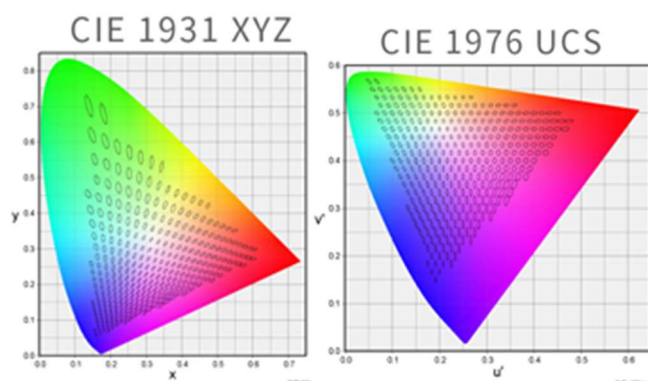
$$y = \frac{4v}{6u - 16v + 12}$$

Esta fórmula, euclidiana, calcula a diferença de cor medindo a distância entre dois pontos num espaço de cor tridimensional, usando transformação projetiva. As escalas u e v alteram as dimensões do espaço cromático, mas preservam a geometria da cor tricromática, ou seja, na CIE UCS, as Leis de Grassmann de mistura de cor (Capítulo 5) ainda são válidas: todas as cores são definidas por misturas de aditivos de três luzes primárias e, portanto, misturas de cores são descritas por linhas retas de mistura.

$$d = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + (g_1 - g_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

A CIE UCS adota a mesma estratégia para valores triestímulos da cor, mas com uma ponderação específica dos X , Y e Z , que modifica a forma e a orientação do diagrama de cromaticidade, e a localização do ponto branco dentro dele.

Gráfico 46 – Diagramas cromáticos CIE XYZ e UCS



Fonte: <http://styletin.com/archives/535>.
Acesso em: 27 jan. 2016.

A utilização de diagramas de cromaticidade deve ser evitada na maioria das circunstâncias, principalmente quando os fenômenos investigados são dependentes da natureza tridimensional da cor. É preferível utilizar o diagrama uv que o diagrama xy , pois aquele é muito útil para definir percebida saturação constante, o que é equivalente a cromaticidade constante, como também para prever a saturação relativa, ou escalas de percepção de saturação.

O diagrama CIE é apenas um plano no espaço de cores, o qual recebe as sensações de luz. Além da medição da cor, tal diagrama pode ser usado para identificá-la, permitindo sua determinação numa mistura aditiva de cores complementares.

São tantas as abordagens a respeito das cores que, no início de 1970, havia mais de 20 fórmulas para calcular diferenças de cores. Para promover uma uniformidade, a Comissão Internacional de Iluminação (CIE) recomendou dois espaços de cores, CIELAB, que estabelece uniformidade em um espaço de cor tridimensional, e CIELUV, visto anteriormente, que estabelece uniformidade no diagrama de cromaticidade, para uso em 1976.

A distância Euclidiana entre dois pontos nos espaços CIELAB e CIELUV é a medida de sua diferença de cor (ΔE_{ab}^* ou ΔE_{uv}^*).

$$\Delta E_{ab}^* = \sqrt{(L_1 - L_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

$$\Delta E_{uv}^* = \sqrt{(L_1 - L_2)^2 + (u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}$$

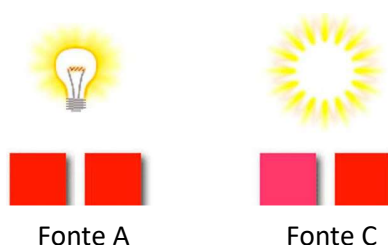
L em ambos os casos está relacionado com leveza, coordenada de luminosidade. É a diferença entre o mais claro e o mais escuro, de acordo com a figura 60.

As concentrações encontradas para cada cor podem ser usadas para misturar tintas que serão semelhantes aos valores triestímulos X, Y e Z , sob um determinado iluminante. Isto é importante para minimizar os efeitos de metamerismo nas amostras de tinta, sob diferenças de iluminação. Por exemplo, se é necessária uma mistura sob iluminante C , luz média do dia para um céu encoberto, mas o metamerismo sob iluminante A , fonte artificial de luz, precisa ser minimizado, é preciso aplicar esta função de minimização:

$$\Delta E^2 = 4\Delta E_C^2 + \Delta E_A^2,$$

já que a luz média do dia é quatro vezes mais importante que uma fonte artificial de luz.

Figura 59 - Metamerismo

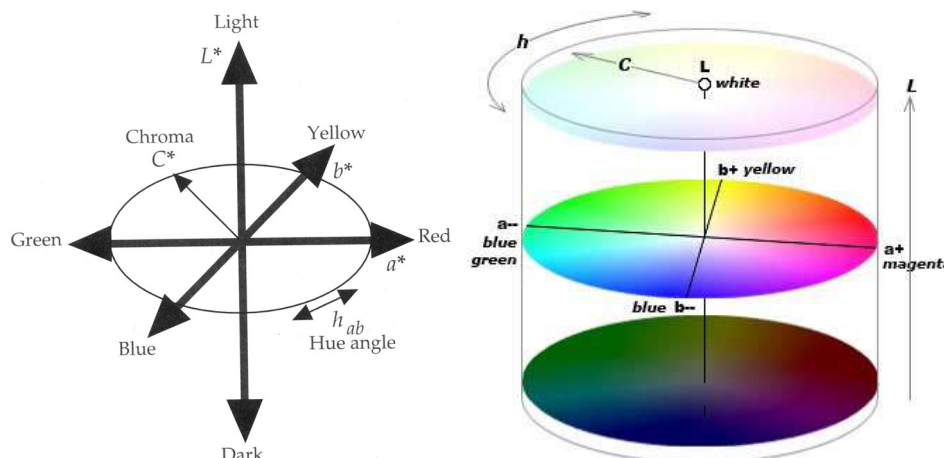


Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/538039486706873181>. Acesso em: 15 fev. 2016.

O algoritmo de correspondência descrito aqui tem benefícios importantes sobre abordagens correspondentes ao padrão triestímulo que produz um espaço de cor XYZ. Ao utilizar o sistema uniforme CIELAB, a minimização da métrica da cor ΔE corresponde à forma como os seres humanos percebem diferenças de cores.

Calculando as coordenadas CIELAB, as dimensões são combinadas como coordenadas cartesianas ou cilíndricas de modo a formar um espaço de cor tridimensional.

Figura 60 – Sistema uniforme de cor CIELAB



Fonte: <http://www.handprint.com/HP/WCL/color7.html>. Acesso em: 06 jan. 2016.

O sistema de coordenadas cilíndricas fornece valor de croma através da seguinte equação:

$$C_{ab} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Como pode observar, por Pitágoras, C (croma) é a hipotenusa no triângulo retângulo abC ; a é a coordenada cromática vermelho-verde (+a indica vermelho e -a indica verde); e, b é a coordenada cromática amarelo-azul (+b indica amarelo e -b indica azul).

E, também, o ângulo de tonalidade, em graus, de acordo com:

$$h_{ab} = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

A conversão para coordenadas cartesianas é:

$$a = C_{ab} \cdot \cos(h_{ab})$$

$$b = C_{ab} \cdot \sin(h_{ab})$$

C tem as mesmas unidades que a e b . Os estímulos acromáticos têm $C = 0$, sem croma, ou seja, a pureza $C = 0$ define um cinza neutro que, de acordo com a claridade, pode se mover entre branco e preto. Com o aumento da pureza, a distância radial C aumenta e alcança valores na grandeza de $C = 100$. O ângulo de tonalidade h é expresso em graus. Um ângulo de tonalidade $h \cong 0^\circ$ indica uma cor vermelha, $h = 90^\circ$ uma cor amarela, $h = 180^\circ$ uma cor verde e $h = 270^\circ$ uma cor azul.

Enquanto a saturação não está definida na CIELAB pela Comissão Internacional de Iluminação, uma boa aproximação à saturação percebida pode ser calculada dividindo-se C por L .

As fórmulas CIELAB correlacionam os valores triestímulos X, Y e Z de um estímulo à leveza L , à croma C e à matiz h . O eixo L é denominado eixo acromático, eixo cinza ou eixo preto-branco. A claridade de uma cor também representa uma grandeza da cor. Para um preto ideal a claridade é $L = 0$ e para um branco ideal, a claridade é $L = 100$. Um pouco menos compreensível são os eixos a vermelho/verde e b amarelo/azul. Devido a isso, demonstrou-se, por cálculo, essas coordenadas para grandezas das cores que representam sua tonalidade e sua pureza. Assim, CIELAB é uma forma simples de um modelo de aparência de cor.

A estrutura CIELUV é geralmente semelhante ao CIELAB, com as exceções da transformação de adaptação subtrativa em uv , página 134. As dificuldades com esta transformação são razões suficientes para eliminar CIELUV como um modelo de aparência de cor. Mas o sistema CIELUV tem uma definição formal para saturação, que não está presente em CIELAB.

Como os quatro tons fisiológicos, vermelho, verde, azul e amarelo, não são sensivelmente equidistantes um do outro, é necessário usar um fator de excentricidade. Principalmente entre os tons de azuis e de vermelhos, onde há uma grande gama de cores roxas perceptíveis nesse intervalo.

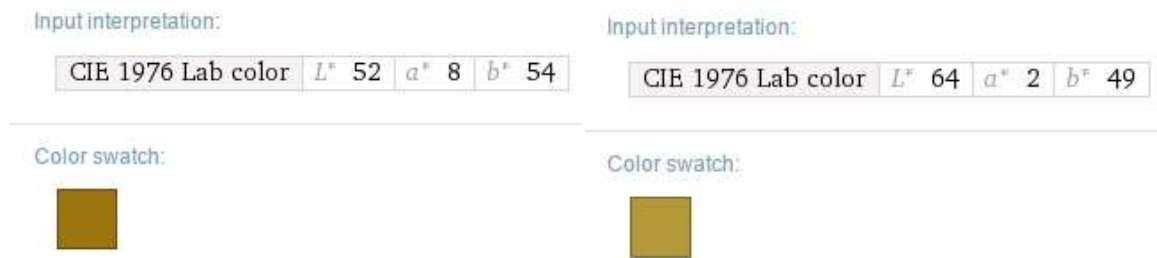
$$e = \frac{1}{4} \left[\cos \left(h \frac{\pi}{180} + 2 \right) + 3,8 \right]$$

Para este cálculo, a função cosseno é expressa em radianos, enquanto o ângulo de tonalidade h é representado em graus.

Exercício

8.1 Vamos comparar as cores abaixo:

Figura 61 – Cor obtida no espaço CIELAB



Fonte: O autor, 2016. Mecanismo computacional WolframAlpha.

Separadamente, cada uma seria classificada, simplesmente, como marrom. Mas o quanto estas cores são diferentes ?

Solução

Usando a equação:

$$\Delta E_{ab}^* = \sqrt{(L_1 - L_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2},$$

a diferença destas cores pode ser expressa como:

$$\Delta L = L_1 - L_2 = 52 - 64 = -12$$

$$\Delta a = a_1 - a_2 = 8 - 2 = 6$$

$$\Delta b = b_1 - b_2 = 54 - 49 = 5$$

A diferença total das cores será:

$$\Delta E_{ab}^* = \sqrt{(-12)^2 + (6)^2 + (5)^2} = \sqrt{144 + 36 + 25} = \sqrt{205} \cong \mathbf{14,31}$$

9 MODERNA CONCEITUAÇÃO MATEMÁTICA DAS CORES

O mundo da medição de cor é cheio de vários descritores de cor, tais como valores dos componentes tricromáticos, coordenadas cromáticas, gráficos de cromaticidade uniforme, espaços de cores uniformes e, simplesmente, espaços de cores.

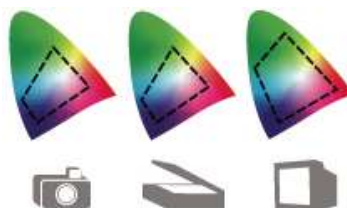
Um dos principais objetivos na criação do espaço de cores CIE XYZ era ter valores triestimulares positivos. Para isso, foi necessário selecionar um conjunto imaginário de primárias. Essencialmente, isto significa que não é possível construir um conjunto de apenas três fontes positivas de luz que, quando combinadas, são capazes de reproduzir todas as cores na gama do espectro visível.

Na prática, o espaço de cor XYZ não é apropriado para a realização de cálculos de imagem ou codificação de dados, pois há um grande número de possíveis valores X , Y e Z que não correspondem a qualquer cor física. Isto pode conduzir a uma ineficiência da menor unidade de informação que pode ser armazenada ou transmitida, usada na Computação e na Teoria da Informação. Para preservar a integridade visual, exige-se um maior processamento de bits. Portanto, não é possível criar um dispositivo de visor a cores que corresponda diretamente ao espaço de cor CIE XYZ.

Como as cores primárias correspondentes são imaginárias, uma transcodificação num espaço de dispositivo específico é necessária. Dependendo da tarefa desejada, a utilização de um espaço de cores diferente pode ser mais apropriado. Eis algumas das razões para o desenvolvimento de diferentes espaços de cores RGB:

- Realizabilidade física: sensores e monitores que tenham respostas de cores específicas (câmeras) e primárias (displays).
- Codificação eficiente: codificações de cores usadas pelos diferentes sinais de televisão (NTSC, PAL, SECAM).
- Perceptivas uniformes: espaços de cores perceptivelmente uniformes, de tal modo que a distância euclidiana é uma boa medida da diferença de percepção.
- Especificação de cor intuitiva: espaços de cores projetados para serem ligados às primárias na exibição de saída, como o monitor CRT.

Figura 62 – Espaços de cores RGB



Fonte: <https://helpx.adobe.com/br/photoshop-elements/using>. Acesso em: 04 jan. 2016.

O espaço de cores CMY, ou espaço de corantes, parte da mistura de cores subtrativas ciano, magenta e amarelo, que são complementares às cores aditivas, vermelho, verde e azul, respectivamente. Pigmentos cianos absorvem luz vermelha, magentas absorvem luz verde, e amarelos absorvem luz azul (ANEXO F). Portanto, os valores de cores RGB e CMY são conectados como segue:

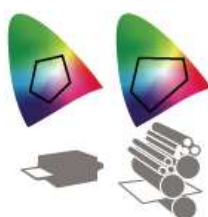
$$\begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

Na verdade, o sistema subtrativo CMY remove a luz de uma incidência luminosa.

Em geral, as cores subtrativas são dependentes das cores aditivas, de modo que a transformação linear entre elas é apenas uma aproximação, já que os espectros de absorção das cores subtrativas muitas vezes se sobrepõem uns aos outros. Ou seja, os três componentes C , M e Y não são independentes uns dos outros.

Ao contrário dos dispositivos de exibição de cores aditivas, a mistura de cores subtrativas não se comporta de forma linear. O limite da gama de visão reflete esta não linearidade, pois o tamanho e a forma dependem dos corantes utilizados e da ordem em que cores diferentes são aplicadas.

Figura 63 - Espaços de cores CMY



Fonte: <https://helpx.adobe.com/br/photoshop-elements/using>. Acesso em: 07 jan. 2016.

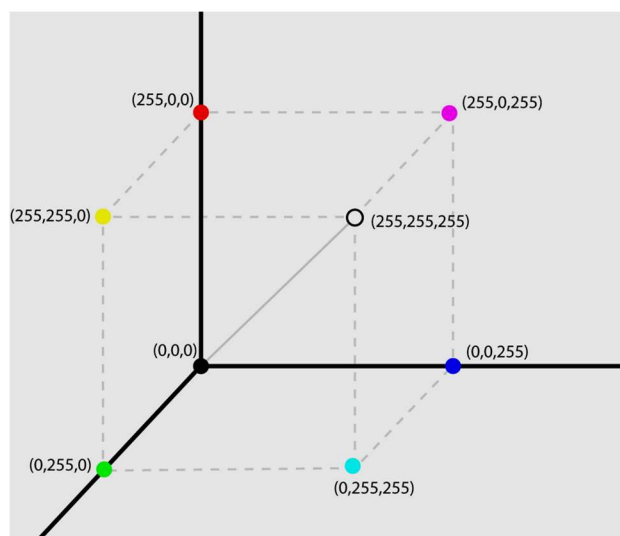
No sistema RGB, por conveniência, a maioria dos arquivos digitais atuais usam números inteiros entre 0 e 255 para especificar as quantidades de cada cor primária aditiva: vermelho, verde e azul. O número 0 indica ausência de intensidade e o número 255 indica intensidade máxima. Neste contexto, cada cor no sistema RGB é assim identificada:

$$0 \leq R \leq 255, 0 \leq G \leq 255 \text{ e } 0 \leq B \leq 255.$$

Quando os valores das três cores são iguais, o resultado é um tom de cinza neutro. Quando o valor de todos os componentes é 255, o resultado é um branco puro e, quando o valor é 0, o resultado é um preto puro.

Sendo assim, podemos associar cada cor do sistema RGB com pontos de coordenadas inteiras em um cubo com aresta de tamanho 255.

Gráfico 47 – Cubo RGB na escala inteira



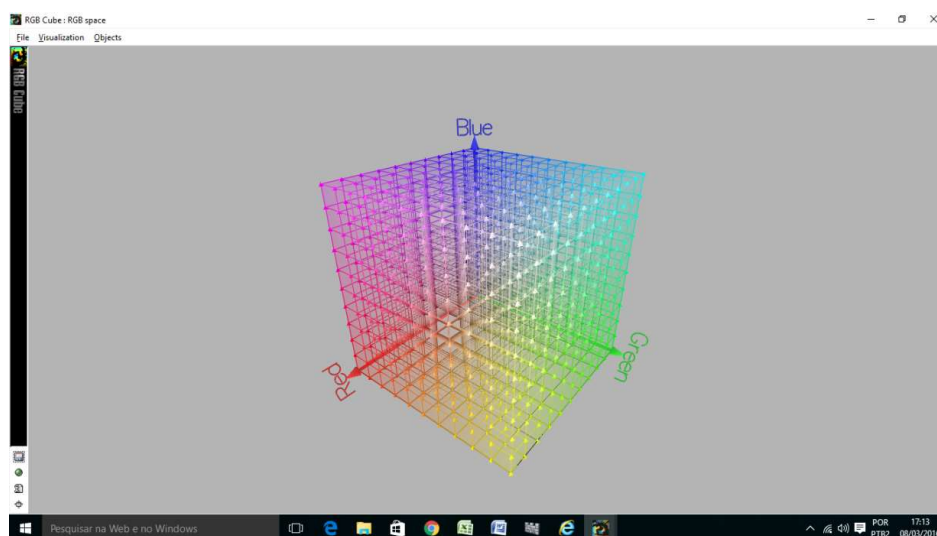
Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

Este modelo é apresentado em applets, pequeno software que executa uma atividade específica dentro de outro programa maior, geralmente como um Plugin. Applets são muito usados para alterar cor da fonte de um texto.

O modelo de cor RGB atribui valor de intensidade a cada pixel. Pixel é o menor elemento num dispositivo de exibição, ao qual é possível atribuir uma cor. Melhor, é o menor ponto que forma uma imagem digital, sendo que o conjunto de milhares de pixels formam a imagem inteira.

Nas imagens de 8 bits por canal ou cor, as três cores primárias aditivas são convertidas em 24 bits ($8 \text{ bits} \times 3 \text{ cores}$) de informações de cores por pixel. Como o bit é a menor unidade de informação num sistema binário de numeração, temos 2^8 tons, ou seja, 256 tons para cada cor primária. Portanto, para imagens de 24 bits, os três canais podem reproduzir até 16.777.216 ($256(R) \times 256(G) \times 256(B)$) cores por pixel, incluindo o zero (ANEXO G). Imagens com mais bits podem produzir mais cores.

Figura 64 – Cubo de cores



Fonte: O autor, 2016. Software RGB Cube

O sistema visual humano não é capaz de distinguir estas 16.777.216 de cores em uma única tela. Na verdade, não há pixels suficientes no visor para mostrar todas as cores ao mesmo tempo. No entanto, isso não significa que a capacidade de exibir mais cores não é útil na produção de melhor qualidade de imagem. Não sendo o número total de cores que importa, e, sim, a forma como elas são usadas.

Além de ser o modo padrão para imagens digitais, o modelo RGB é usado por monitores de computador para exibir cores. Isso significa que, ao trabalhar em modelos de cor diferentes do modelo RGB, a imagem é convertida para RGB a fim de exibir na tela. Embora o RGB seja um modelo de cores padrão, a faixa exata de cores representadas pode variar, dependendo do aplicativo ou dispositivo de exibição.

Exercícios

9.1 Quais são as coordenadas no modelo RGB correspondentes às coordenadas (0,3; 0,6; 0,9) definidas em CMY?

Solução

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,6 \\ 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,4 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

A cor resultante no modelo RGB tem coordenadas (0,7; 0,4; 0,1).

9.2 A tela de um computador emite luzes e utiliza, em geral, o espaço RGB para esse fim. Por outro lado, as impressoras usam princípios diferentes, o CMY ou CMYK (quando inclui cor preta). Como podemos obter a cor vermelha pura em uma impressão, usando o sistema subtrativo CMY, conforme apresentada na tela de um computador?

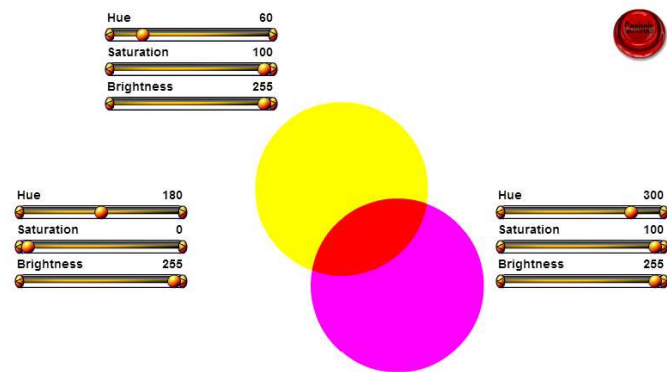
Solução

Tomemos as coordenadas (1,0,0) no modelo RGB, que corresponde ao vermelho saturado. Fazendo:

$$\begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

temos que a mistura subtrativa ciano (0%) + magenta (100%) + amarelo (100%) corresponde ao vermelho (100%).

Figura 65 – Mistura subtrativa



Fonte: O autor, 2016. Applet SubtractionMove.

9.3 Qual a cor composta por 67,87% do vermelho(R), 100% do verde(G) e 18,43% do azul(B)?

Solução

Esquemmatizando a porcentagem de cor RGB para obter tal cor, segue:

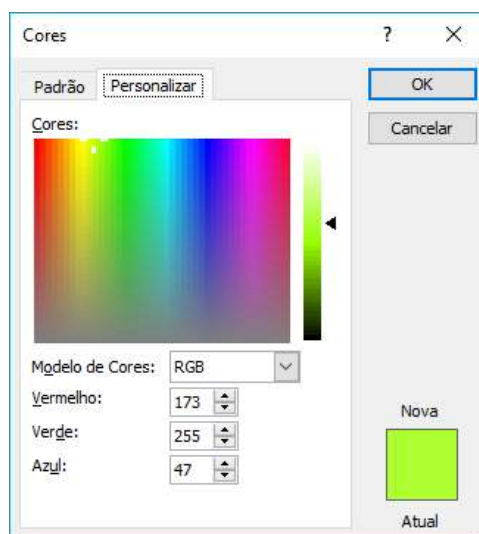
$$67,87\% = \frac{R}{255} \rightarrow R = 173$$

$$100\% = \frac{G}{255} \rightarrow G = 255$$

$$18,43\% = \frac{B}{255} \rightarrow B = 047$$

É fácil visualizar a cor resultante no Applet para alterar cor da fonte de texto no Word:

Figura 66 – Cor escolhida no Applet do Word



Fonte: O autor, 2016. Print Screen da tela ao alterar cor da fonte do Word.

De acordo com a tabela de cores:

Figura 67 – Tabela de cores

dourado escuro	(184,134,11)
oliva	(128,128,0)
greenyellow	(173,255,47)
yellowgreen	(154,205,50)
olivedrab	(107,142,35)

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Tabela_de_cores. Acesso em: 12 jan. 2016.

Esta é a cor amarela esverdeada no sistema RGB.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o poder que a matemática tem de explicar quase tudo na natureza, o espectro de luz visível não seria diferente. Cor é um assunto curioso e bonito aos olhos, e a matemática dá mais vida ao nosso mundo colorido quando a explica por números. Desde a criação do universo, cores são as mesmas, o que muda é a forma como muitos a interpretaram matematicamente. A harmonia de suas diversas tonalidades com as notas musicais, sua influência na percepção psicológica, a perfeição na paleta de um pintor, e, resolução perfeita de uma imagem digital, são atribuições das cores no mundo que nos rodeia. Para compreender melhor todos estes aparatos das cores, a matemática torna tudo mais simples. Ao fazer conexões lógicas, a compreensão do comportamento da mistura de luzes e tintas se torna mais atraente.

Quando se questiona sobre a união de todas as cores em uma cor branca, ou ausência de luz em uma cor preta, são pormenores que não passam de simples curiosidades. Mas a matemática é capaz de transformar os menores questionamentos em perfeitos esclarecimentos. Portanto, este trabalho tentou, com certo aprofundamento teórico, uma forma de conciliar matemática, cores nos primórdios de sua compreensão, cores no desenrolar de sua utilidade e cores na tecnologia, de modo categórico.

Este trabalho pode parecer um pouco meticuloso, por vezes complexo, mas tem por objetivo envolver o leitor com álgebra e geometria para mostrar o que acontece por trás de algo tão atraente e simples como cores. De fato, algo tão comum desde sempre aos nossos olhos tomou proporções diferenciadas quando percebidas por grandes matemáticos, físicos, célebres artistas e analistas de design. A importância das cores para cada profissional não o limita a utilizá-las somente em sua área de atuação, sempre será necessário recorrer aos fundamentos lógicos para que se possa atingir a perfeição. Na área acadêmica, a interação da matemática e da física foi importante para dedução de algoritmos, gráficos e diagramas para compreender o espectro de luz visível; na arte, a mistura de tintas é harmoniosa a partir de técnicas de quantização das misturas subtrativas; e, na tecnologia, o processamento de imagem digital depende de modelos matemáticos. Portanto, a matemática está intrínseca no entendimento do espectro de luz visível... das cores.

REFERÊNCIAS

- CAPILLA, P.; ARTIGAS, J. M; PUJOL, J. *Fundamentos de Colorimetría*. Espanha: Universitat de Valencia, 2002.
- KUEHNI, R. G. *Color Space and Its Divisions: Color Order from Antiquity to the Present*. New Jersey: John Wiley & Sons, Ltd, 2003.
- KUEHNI, R. G; SCHWARTZ, A. *Color Ordered: A Survey of Color Order Systems from Antiquity to the Present*. New York: Oxford University Press, 2008.
- LOSANO, R. D. *El color y su medicion*. Buenos Aires: Editorial Américalee, 1978.
- MEYER, B.; ZOLLINGER, H. R. *Colorimetria*. [S.L.]: Clariant, 1998.
- OLEARI, C. *Standard Colorimetry: Definitions, Algorithms and Software*. New York: John Wiley & Sons, 2015.
- OTHA, N.; ROBERTSON, A. *Colorimetry: Fundamentals and Applications*. New York: John Wiley & Sons, 2005.
- SILVEIRA, L. M. *Introdução à Teoria da Cor*. Paraná: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2011.
- WYSZECKI, G.; STILES, W. S. *Color Science, Concepts and Methods*, 2.ed. New York: John Wiley & Sons, Ltd, 1982.

REFERÊNCIAS COMPLEMENTARES

- ALBERS, J. *A interação da cor*. São Paulo: Martins Fontes, 2009.
- BACELLAR, S. *Espaço de cores*. Rio de Janeiro, 1999. Disponível em: <<http://www.inf.puc-rio.br/~bacellar/cores/espaco.htm>>. Acesso em: 07 dez. 2015.
- BACKHAUS, W.; KLIEGL, R.; WERNER, J. S. *Color vision: Perspectives from different disciplines*. Boston: Walter de Gruyter, 1998.

BACON, F.; BLACKBOURNE, J.; FABYAN, G. *The works of Francis Bacon*, vol. 3. New York: Impensis R. Gosling, 1730. Digitalizado em 2010.

CELESTINO SILVA, C.; MARTINS, R. de A. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 18, nº 4. São Paulo: UNICAMP, 1996. A nova teoria sobre luz e cores de Isaac Newton: Uma tradução comentada.

CHOUDHURY, A. K. R. *Principles of colour appearance and measurement: Visual measurement of colour, colour comparison and management*, vol. 2. Cambridge: Woodhead Publishing Limited, 2015.

CRONE, R. A. *A History of Color: The Evolution of Theories of Lights and Color*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

DE MARTINO, J. M. *Sistemas de informações gráficas*. Disponível em: <<http://www.dca.fee.unicamp.br/~martino/disciplinas/ea978/na2.pdf>>. Acesso em: 04 jan. 2016.

DESCARTES, R. *The Philosophical Writings of Descartes*. Inglaterra: Cambridge University Press, 1984.

EXPOSIÇÃO VISÕES DA LUZ, 2015-2016, MAST, Rio de Janeiro. *A luz, a cor e a arte*.

FAIRCHILD, M. D. *Color Appearance Models*, 2.ed. New York: John Wiley & Sons Ltd, 2005.

FERREIRA, S. B. L. *Modelos de cor: Espectral ou RGB*. São Paulo: Anais do SIBGRAPI V, 1992.

GOETHE, J. W. *Doutrina das cores*. Apresentação, seleção e tradução Marco Gianotti. São Paulo: Nova Alexandria, 1993. (Originalmente publicado entre 1749-1832).

GOMIDA, A. *Geometria da programação linear*. São Paulo: notas de aula do curso IA 881 Otimização Linear da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Unicamp.

GUIMARÃES, L. *A cor como informação: a construção biofísica, linguística e cultural da simbologia das cores*. São Paulo: Annablume, 2000. Originalmente apresentada como dissertação sob o título *Cor, corpo e cultura: interferência biofísica na percepção cultural*. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 1997.

HALL, G. S.; TITCHENER, E. B. *The American Journal of Psychology*, vol. 23. Baltimore: N. Murray, 1912.

INSTITUTO DE FÍSICA - UFRJ. *Luz e cor*. Rio de Janeiro, [2002?]. Disponível em: <<http://www.if.ufrj.br/teaching/luz/cor.html>>. Acesso em: 11 jan. 2016.

JUDD, D. B. *Bureau of Standards Journal of Research*, vol. 7. Washington: 1931. A general formula for the computation of colorimetric purity. Disponível em: <<https://archive.org/details/BureauOfStandardsJournalOfResearchVol.7>>. Acesso em: 11 jan. 2016.

KLETTE, R. *Concise Computer Vision: An Introduction into Theory and Algorithms*. Alemanha: Springer Science & Business Media, 2014.

KOLMAN, B. *Introdução à Álgebra Linear com Aplicações*, 6.ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, 1998.

LIMA, L. S. *O uso das cores na arquitetura e na cidade*. 2007. 63f. Dissertação (Mestrado em Arquitetura e Urbanismo) – Programa de Pós-Graduação em Arquitetura e Urbanismo, Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 2007.

LONG, J.; LUKE, J. T. *The new Munsell student color set*, 2.ed. New York: Fairchild Pubns, 2015.

MOROVIC, J.; LUO, M. *Calculating Medium and Image Gamut Boundaries for Gamut Mapping*. Reino Unido: Colour & Imaging Institute, 2000.

NEWTON, I. *Opticks*. Londres: Royal Society, 1704.

PAUL, B. *RGB colour space*. [S.L.]: 1995. Disponível em: <http://paulbourke.net/texture_colour/colourspace/>. Acesso em: 19 jan. 2016.

PARRAMAN, C. *Colour coded*. Inglaterra: Society of Dyers and Colourists, 2010.

QUEIROZ, G.; BARBOSALIMA, M. C.; SANTIAGO, R.; VIANA, J. C. Luz: Ciência, Arte e Ensino de Física. In: EPEF – ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM ENSINO DE FÍSICA, 9., 2004, Jaboticatubas (MG). *Anais...* São Paulo: SBF - Sociedade Brasileira de Física, 2004.

QUILLER, S. *Color choices making sense out of Color*. New York: Watson-Guptill, 1989.

SCHUBRING, G. *Hermann Gunther Grassmann (1809-1877): Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar*, vol. 187. Alemanha: Springer-Science & Business Media, 1996.

SOARES, P. T. *O mundo das cores*. São Paulo: Editora Moderna, 1991.

X-RITE INCORPORATED. *A Guide to Understanding Color Communication*. 2007. Disponível em: <<http://www.xrite.com>>. Acesso em: 27 jan. 2016.

Sites auxiliares:

<<http://www.archive.org>>

<<http://www.cie.co.at>>

<<http://www.color.org>>

<<http://www.efg2.com>>

<<http://www.huevaluechroma.com>>

<<http://www.munsell.com>>

<<http://www.wikipedia.org>>

APÊNDICE A - Exercícios propostos a respeito do tema

Exercícios propostos a respeito do tema, dirigidos aos professores que pretendem expor aos alunos como atividades em sala de aula. Mostrando uma matemática entrelaçada à física como forma de aprendizagem.

Diferentes abordagens que podem ser utilizadas dependendo do foco do ensino em questão, desde que se destine em bons resultados para os alunos. Os exercícios variam de simples obtenção de uma cor a complexo método de sua posição no espectro de luz visível.

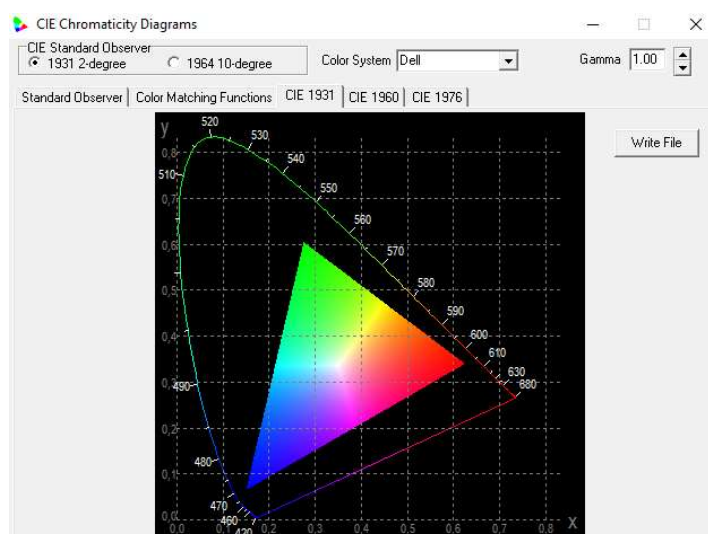
EXERCÍCIO 1

A gama de visão sob o Iluminante **D65**, correspondente à luz média do dia, está representada no Diagrama de Cromaticidade CIE-1931 abaixo. Por definição, o espectro de um branco perfeito é constante ao longo de todo o espectro visível, desde que,

$$r = g = b = 1/3$$

Percebe-se, no diagrama, que o ponto branco tem por coordenada $x = 0,333 \dots$. Prove, matematicamente, que o ponto acromático “branco” corresponde às coordenadas cromáticas $(0,333\dots; 0,333\dots)$.

Gráfico 48 – Gama de cores sob o Iluminante **D65**



Fonte: O autor, 2016. Software CIE Chromaticity Diagrams

Solução

Sob o Iluminante **D65**, as coordenadas cromáticas x e y apresentam, de acordo com o capítulo 3, a seguinte relação quadrática:

$$y = -3x^2 + 2,87x - 0,275.$$

Portanto, para $x = 0,333 \dots$, temos:

$$\begin{aligned} y &= -3x^2 + 2,87x - 0,275 = -3(0,333 \dots)^2 + 2,87(0,333 \dots) - 0,275 = \\ &= (-3 \times 0,111 \dots) + (2,87 \times 0,333 \dots) - 0,275 = -0,333 \dots + 0,956 \dots - 0,275 \cong \mathbf{0,333 \dots} \end{aligned}$$

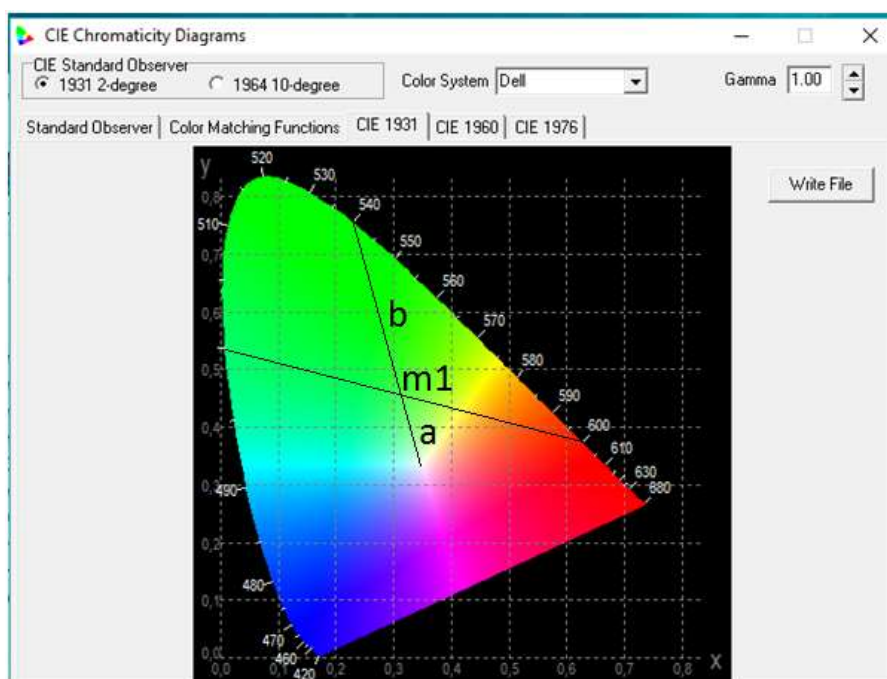
EXERCÍCIO 2

Qual a cor resultante ao misturarmos quantidades iguais de 500 nanômetros e 600 nanômetros, e a partir da mistura obtida misturarmos duas vezes mais de 510 nanômetros?

Solução

Primeiramente, conectamos os pontos 500 e 600 nanômetros do locus do espectro, em um diagrama de cromaticidade, por um segmento de reta; encontramos o ponto médio ($m1$) deste segmento, já que se trata de quantidades iguais; unimos o ponto correspondente ao branco ($1/3, 1/3$) com o ponto médio ($m1$) e prolongamos até intersectar o locus do espectro. O ponto desta interseção corresponde ao comprimento de onda dominante da mistura, 540 nanômetros.

Gráfico 49 – Mistura de cores no diagrama de cromaticidade



Fonte: O autor, 2016. Software CIE Chromaticity Diagrams

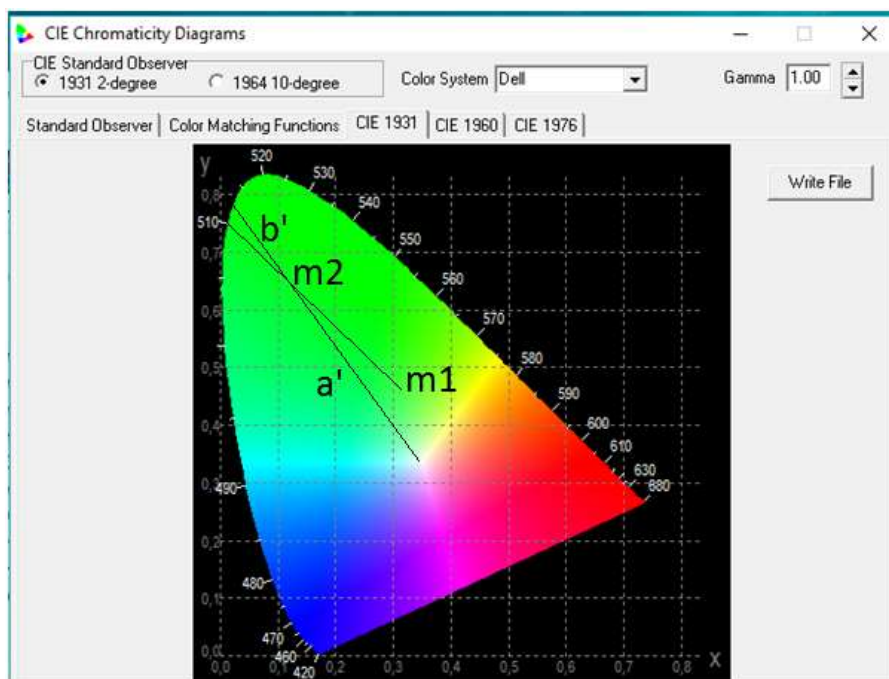
A distância relativa (a) da amostra até o branco é a medida de sua pureza colorimétrica. De acordo com a representação tridimensional das cores por Grassmann, capítulo 4, temos:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{0,11}{0,11+0,365} = \frac{0,11}{0,475} \cong 0,231$$

A cor resultante tem comprimento de onda $\lambda = 540 \text{ nanômetros}$ com parâmetro aproximado $\rho = 0,231$.

Agora, conectamos os pontos ($m1$) e 510 nanômetros do locus do espectro, no diagrama de cromaticidade, por um segmento de reta; utilizamos $2/3$ deste segmento, já que há duas vezes mais quantidade de 510 nanômetros; unimos o ponto correspondente ao branco ($1/3, 1/3$) com $2/3$ deste segmento de reta e prolongamos até intersectar o locus do espectro. O ponto ($m2$) desta interseção corresponde ao comprimento de onda dominante da mistura, 513 nanômetros.

Gráfico 50 – Mistura de cores no diagrama de cromaticidade



Fonte: O autor, 2016. Software CIE Chromaticity Diagrams

A distância relativa (a') da amostra até o branco é a medida de sua pureza colorimétrica:

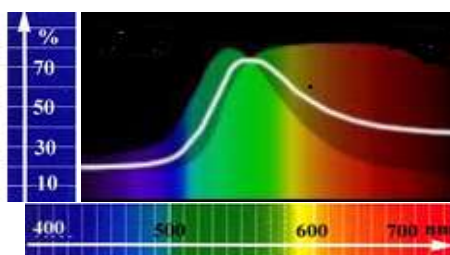
$$\frac{a'}{a' + b'} = \frac{0,46}{0,46 + 0,19} = \frac{0,46}{0,65} \cong 0,707$$

A cor resultante tem comprimento de onda $\lambda = 513 \text{ nanômetros}$ com parâmetro $p = 0,707$, um tom de verde bem saturado.

EXERCÍCIO 3

De acordo com a mistura de tintas no gráfico abaixo:

Gráfico 51 – Curva de refletância



Fonte: <http://www.handprint.com>.
Acesso em: 10 mai. 2016.

O vermelho reflete 90% de um comprimento de onda "vermelho específico" de 650 nanômetros; já o verde reflete apenas 20% deste comprimento de onda. Esta mistura refletirá quanto do comprimento de onda de 650 nanômetros?

Solução

De acordo com o capítulo 5, a curva de refletância da mistura de tintas é aproximadamente a média geométrica das suas refletâncias em cada comprimento de onda no espectro. Nesta mistura, para 650 nanômetros, temos:

$$\sqrt{0,9 \times 0,2} = \sqrt{0,18} \cong 0,424$$

Então, esta mistura reflete aproximadamente **42%** da luz de comprimento de onda de 650 nanômetros, como está representado no gráfico 51.

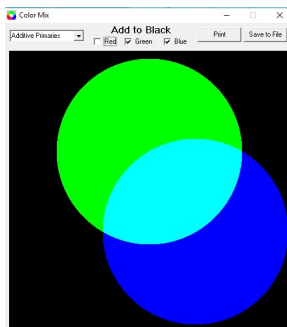
EXERCÍCIO 4

Uma luz amarela brilha sobre uma folha de papel contendo uma mistura de quantidades iguais de pigmentos azuis e verdes. Qual seria a aparência no papel?

Solução

A mistura de pigmentos azuis e verdes, na mesma quantidade, apresenta a cor ciana.

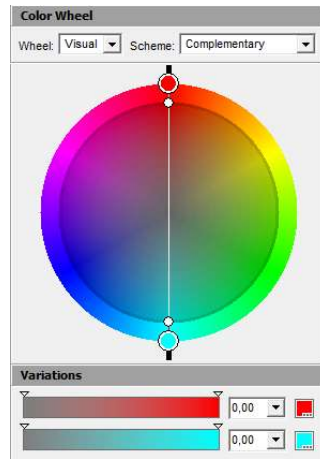
Figura 68 – Mistura de cores aditivas



Fonte: O autor, 2016. Software Color Mix.

A luz amarela consiste de luz vermelha e luz verde. O pigmento ciano absorve a luz vermelha, seu complementar.

Figura 69 – Cores complementares

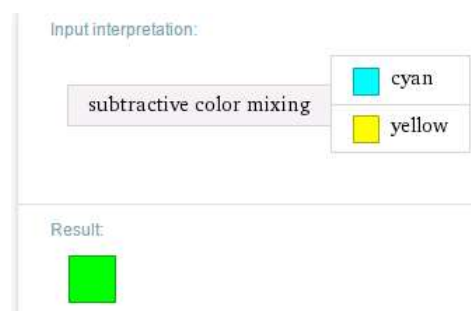


Fonte: O autor, 2016. Software Color Wheel Pro.

Assim, vermelho é subtraído da luz que incide sobre o papel, refletindo apenas a luz verde.

$$\begin{aligned} Y + C &= (R + G) + (G + B) = ((R + G + B) - B) + ((R + G + B) - R) = \\ &= (R + G + B) - (R + B) = W - (R + B) = G \end{aligned}$$

Figura 70 – Mistura de cores subtrativas



Fonte: O autor, 2016. Mecanismo computacional WolframAlpha.

EXERCÍCIO 5

Há uma relação não linear entre luminosidade (V) e o fator CIE de luminância (Y). Qual seria a luminância real de uma cor, se o brilho percebido desta, na escala de valor Munsell, fosse 5 CD/m^2 ?

Solução

De acordo com o capítulo 6, a equação que permite calcular luminância (Y) em função do brilho (V) é:

$$Y = 1,2219V - 0,23111V^2 + 0,23951V^3 - 0,021009V^4 + 0,0008404V^5$$

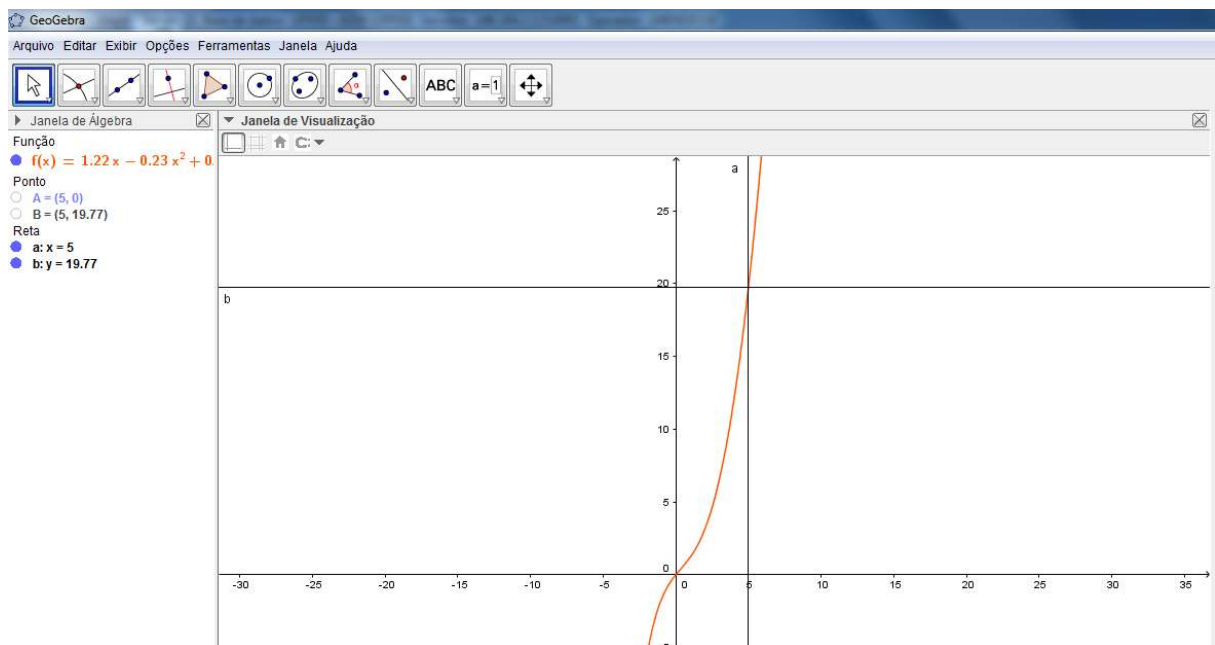
Assim,

$$Y = 1,2219 \cdot (5) - 0,23111 \cdot (5)^2 + 0,23951 \cdot (5)^3 - 0,021009 \cdot (5)^4 + 0,0008404 \cdot (5)^5$$

$$Y = 1,2219 \cdot (5) - 0,23111x25 + 0,23951x125 - 0,021009x625 + 0,0008404x3125$$

$$Y = 6,1095 - 5,77775 + 29,93875 - 13,130625 + 2,62625 \cong \mathbf{19,766125 \text{ CD/m}^2}$$

Gráfico 52 – Luminância x Luminosidade (Valor Munsell)



Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

Logo, o brilho percebido de 5 CD/m^2 de uma cor, corresponde a, aproximadamente, $19,77 \text{ CD/m}^2$ da luminância real desta mesma cor.

EXERCÍCIO 6

A distribuição espectral de um estímulo está associada com a cor:

$$\vec{C} = R_c \vec{R} + G_c \vec{G} + B_c \vec{B}$$

Qual o valor de R_c , cuja cor $\vec{C}$ corresponde aos valores tricromáticos $G_c = 0,14$ e $B_c = 0,02$; e à coordenada tricromática $r = -1,285$?

Solução

De acordo com o capítulo 7, qualquer distribuição espectral de um estímulo está associada com uma cor, cujos valores tricromáticos estão associados às coordenadas tricromáticas r , g e b . Desta forma:

$$r = \frac{R_c}{R_c + G_c + B_c}$$

$$g = \frac{G_c}{R_c + G_c + B_c}$$

$$b = \frac{B_c}{R_c + G_c + B_c}$$

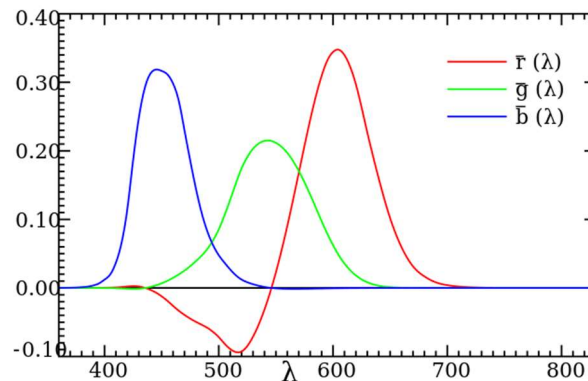
Assim, $\vec{C} = R_c \vec{R} + 0,14 \vec{G} + 0,02 \vec{B}$ tem por coordenada tricromática r :

$$r = \frac{R_c}{R_c + G_c + B_c} = \frac{R_c}{R_c + 0,14 + 0,02} = \frac{R_c}{R_c + 0,16} = -1,285$$

Logo,

$$R_c = -1,285R_c - 0,205 \rightarrow 2,285R_c = -0,205 \rightarrow R_c \cong -0,089$$

Gráfico 53 – Componentes tricromáticos RGB em função do comprimento de onda



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/CIE_1931_color_space. Acesso em: 19 nov. 2015.

De acordo com o gráfico acima, a cor $\vec{C} = -0,089\vec{R} + 0,14\vec{G} + 0,02\vec{B}$ tem cerca de 510 nanômetros de comprimento de onda.

EXERCÍCIO 7

Quais os valores triestímulos $\overline{x(\gamma)}$, $\overline{y(\gamma)}$ e $\overline{z(\gamma)}$ de uma determinada cor, cujas coordenadas tricromáticas são: $\overline{r(\gamma)} = 0,1$; $\overline{g(\gamma)} = 0,1$ e $\overline{b(\gamma)} = 1$, no sistema beta RGB sob o Iluminante **D50**, luz do dia com temperatura de cor de 5000K?

Solução

A transformação linear $[\overline{r(\gamma)}; \overline{g(\gamma)}; \overline{b(\gamma)}] \rightarrow [\overline{x(\gamma)}; \overline{y(\gamma)}; \overline{z(\gamma)}]$ no Sistema beta RGB sob o Iluminante **D50**, de acordo com o ANEXO E, é definida por, aproximadamente:

$$\begin{bmatrix} \overline{x(\gamma)} \\ \overline{y(\gamma)} \\ \overline{z(\gamma)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{r(\lambda)} \\ \overline{g(\lambda)} \\ \overline{b(\lambda)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6712537 & 0.1745834 & 0.1183829 \\ 0.3032726 & 0.6637861 & 0.0329413 \\ 0.0000000 & 0.0407010 & 0.7845090 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{r(\lambda)} \\ \overline{g(\lambda)} \\ \overline{b(\lambda)} \end{bmatrix}$$

Logo, encontram-se, aproximadamente, as seguintes funções de combinação de cores:

$$\overline{x(\lambda)} = 0,6712537 \overline{r(\gamma)} + 0,1745834 \overline{g(\gamma)} + 0,1183829 \overline{b(\gamma)}$$

$$\overline{y(\lambda)} = 0,3032726 \overline{r(\gamma)} + 0,6637861 \overline{g(\gamma)} + 0,0329413 \overline{b(\gamma)}$$

$$\overline{z(\lambda)} = 0,0000000 \overline{r(\gamma)} + 0,0407010 \overline{g(\gamma)} + 0,7845090 \overline{b(\gamma)}$$

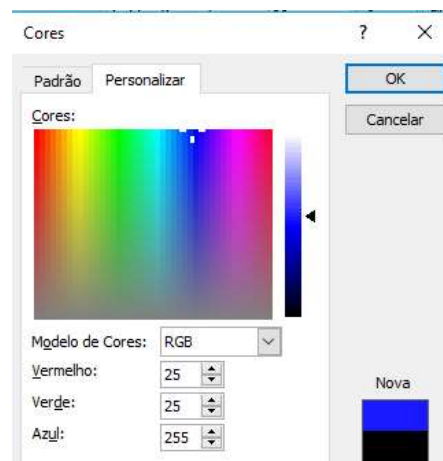
Para $\overline{r(\gamma)} = 0,1$; $\overline{g(\gamma)} = 0,1$ e $\overline{b(\gamma)} = 1$, temos:

$$\begin{aligned}\overline{x(\lambda)} &= 0,6712537 \times 0,1 + 0,1745834 \times 0,1 + 0,1183829 \times 1 = \\ &= 0,06712537 + 0,01745834 + 0,1183829 = \mathbf{0,20296661}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{y(\lambda)} &= 0,3032726 \times 0,1 + 0,6637861 \times 0,1 + 0,0329413 \times 1 = \\ &= 0,03032726 + 0,06637861 + 0,0329413 = \mathbf{0,12964717}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{z(\lambda)} &= 0,0000000 \times 0,1 + 0,0407010 \times 0,1 + 0,7845090 \times 1 = \\ &= 0,00407010 + 0,7845090 = \mathbf{0,7885791}\end{aligned}$$

Figura 71 – Cor resultante de $\overline{r(\gamma)} = 0,1$; $\overline{g(\gamma)} = 0,1$ e $\overline{b(\gamma)} = 1$



Fonte: O autor, 2016. Print Screen da tela ao alterar cor da fonte no PowerPoint.

EXERCÍCIO 8

Seria possível encontrar o valor triestímulo X de uma determinada cor, sabendo apenas o valor triestímulo $Y = 0,369$, e os parâmetros $x = 0,257$ e $y = 0,132$?

Solução

$$X = X \cdot \frac{(X + Y + Z)}{(X + Y + Z)} = \frac{X}{(X + Y + Z)} \cdot (X + Y + Z) = \frac{X}{(X + Y + Z)} \cdot \frac{Y}{\frac{Y}{(X + Y + Z)}}$$

De acordo com o capítulo 7, temos a relação entre valores triestímulos e os seguintes parâmetros:

$$x = \frac{X}{X + Y + Z}$$

$$y = \frac{Y}{X + Y + Z}$$

Assim,

$$\frac{X}{(X + Y + Z)} \cdot \frac{Y}{\frac{Y}{(X + Y + Z)}} = x \cdot \frac{Y}{y}$$

Portanto,

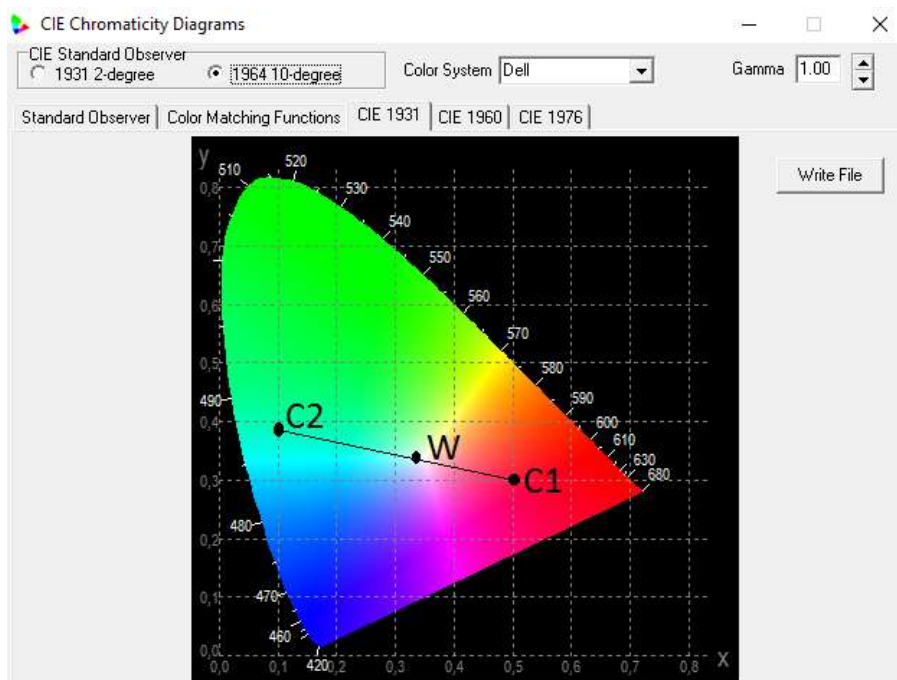
$$X = x \cdot \frac{Y}{y} = 0,257 \cdot \frac{0,369}{0,132} = 0,257 \cdot 2,759 \cong \mathbf{0,709}$$

É possível encontrar X , sabendo apenas valores de x , y e Y .

EXERCÍCIO 9

A partir do diagrama de cromaticidade abaixo, determine a saturação da mistura das cores C_1 e C_2 .

Gráfico 54 – Pureza de excitação luminosa



Fonte: O autor, 2016. Software CIE Chromaticity Diagrams

Solução

De acordo com o capítulo 7, a saturação de um estímulo de cor é expressa pelo termo pureza de excitação luminosa. Este termo indica a distância de um estímulo qualquer a um estímulo acromático no diagrama de cromaticidade. Como a pureza de excitação p_e é definida como a razão entre distâncias.

Fazendo: $Branco = (x_w, y_w)$, $C_1 = (x_1, y_1)$ e $C_2 = (x_2, y_2)$. Tem-se:

$$p_e = \begin{cases} \frac{x_1 - x_w}{x_2 - x_w}, & \text{se } x_1 - x_w \geq y_1 - y_w \\ \frac{y_1 - y_w}{y_2 - y_w}, & \text{se } x_1 - x_w < y_1 - y_w \end{cases}$$

A pureza de excitação com maior numerador resulta no menor erro de precisão.

Partindo das coordenadas do ponto acromático “branco” (0,333; 0,333), temos:

$$x_1 - x_w = 0,5 - 0,333 = 0,167 \quad \text{e} \quad y_1 - y_w = 0,3 - 0,333 = -0,033,$$

onde $x_1 - x_w > y_1 - y_w$.

Portanto,

$$p_e = \frac{x_1 - x_w}{x_2 - x_w} = \frac{0,5 - 0,333}{0,1 - 0,333} = \frac{0,167}{-0,233} \cong -0,716$$

A pureza de excitação luminosa é de, aproximadamente, - 71,6%.

EXERCÍCIO 10

O Sistema de cores CIELUV foi criado para estabelecer uniformidade no diagrama de cromaticidade, diante das diferenças de cores. Determine a diferença das cores ΔE_{uv}^* , apresentadas abaixo, sabendo que a coordenada de luminosidade $L_1 = 53,66$ corresponde aos valores triestímulos $X = 0,11, Y = 0,19$ e $Z = 0,32$; e $L_2 = 55,58$, aos valores triestímulos $X = 0,1, Y = 0,2$ e $Z = 0,3$.

Figura 72 – Cores obtidas no sistema XYZ



Fonte: O autor, 2016. Mecanismo computacional WolframAlpha.

Solução

De acordo com o capítulo 8, a diferença das cores ΔE_{uv}^* é a distância Euclidiana entre dois pontos no espaço CIELUV, ou seja:

$$\Delta E_{uv}^* = \sqrt{(L_1 - L_2)^2 + (u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}.$$

É necessário encontrar u_1 , u_2 , v_1 e v_2 . Com a fórmula proposta através do gráfico de cromaticidade uniforme (UCS), é possível encontrar as escalas u e v :

$$u_1 = \frac{4X}{X + 15Y + 3Z} = \frac{4 \cdot 0,11}{0,11 + 15 \cdot 0,19 + 3 \cdot 0,32} = \frac{0,44}{0,11 + 2,85 + 0,96} = \frac{0,44}{3,92} = 0,112$$

$$v_1 = \frac{9Y}{X + 15Y + 3Z} = \frac{9 \cdot 0,19}{0,11 + 15 \cdot 0,19 + 3 \cdot 0,32} = \frac{1,71}{0,11 + 2,85 + 0,96} = \frac{1,71}{3,92} = 0,436$$

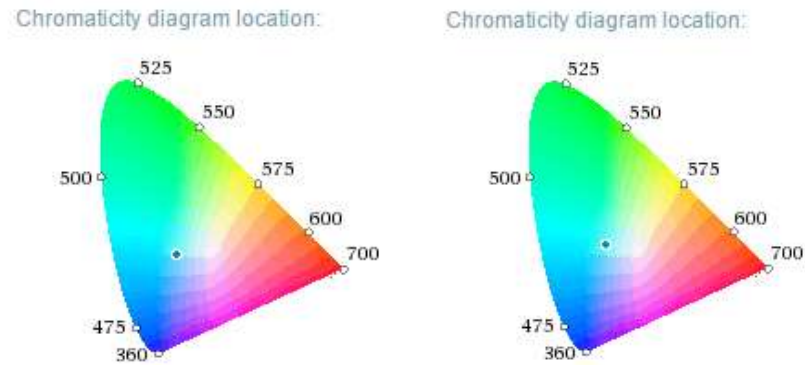
$$u_2 = \frac{4X}{X + 15Y + 3Z} = \frac{4 \cdot 0,1}{0,1 + 15 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,3} = \frac{0,4}{0,1 + 3 + 0,9} = \frac{0,4}{4} = 0,1$$

$$v_2 = \frac{9Y}{X + 15Y + 3Z} = \frac{9 \cdot 0,2}{0,1 + 15 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,3} = \frac{1,8}{0,1 + 3 + 0,9} = \frac{1,8}{4} = 0,45$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta E_{uv}^* &= \sqrt{(L_1 - L_2)^2 + (u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} = \\ &= \sqrt{(53,66 - 55,58)^2 + (0,112 - 0,1)^2 + (0,426 - 0,45)^2} = \\ &= \sqrt{(1,92)^2 + (0,012)^2 + (-0,024)^2} = \sqrt{3,686 + 0,0001 + 0,0005} = \sqrt{3,686} \cong 1,919 \end{aligned}$$

Figura 73 – Localização das cores obtidas no diagrama cromático



Fonte: O autor, 2016. Mecanismo computacional WolframAlpha.

EXERCÍCIO 11

De acordo com o capítulo 8, entre os tons vermelhos (+a) e tons azuis (-b) há uma grande gama de cores roxas perceptíveis nesse intervalo. Por isso é necessário usar um fator de excentricidade. Qual o fator de excentricidade entre as coordenadas cromáticas $a = 1$ e $b = -1$ no sistema uniforme de cores CIELAB?

Solução

O fator de excentricidade (e) é calculado através da seguinte fórmula, segundo o capítulo 8:

$$e = \frac{1}{4} \left[\cos \left(h \frac{\pi}{180} + 2 \right) + 3,8 \right], \quad (1)$$

onde h é o ângulo de tonalidade, em graus.

A relação entre o ângulo de tonalidade h e as coordenadas cromáticas a e b , é:

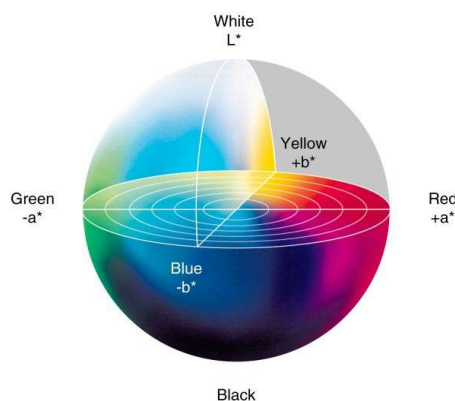
$$h_{ab} = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) = \arctan \left(\frac{b}{a} \right)$$

Assim,

$$\tan(h_{ab}) = \frac{b}{a} = \frac{-1}{1} = -1$$

De acordo com o capítulo 8, no sistema uniforme de cores CIELAB, o ângulo de tonalidade $h \cong 0^\circ$ indica uma cor vermelha e, $h = 270^\circ$, uma cor azul. O que corresponde ao quarto quadrante.

Figura 74 – Espaço de cor CIELAB



Fonte: <http://www.rpdms.com/cielch/labsphere2.jpg>. Acesso em: 12 mai. 2016.

Portanto, $h_{ab} = 315^\circ$.

Substituindo $h_{ab} = 315^\circ$ em (1), temos:

$$e = \frac{1}{4} \left[\cos \left(315 \frac{\pi}{180} + 2 \right) + 3,8 \right] = \frac{1}{4} \left[\cos \left(\frac{7\pi}{4} + 2 \right) + 3,8 \right] = \frac{1}{4} [0,99 + 3,8] \cong 1,19$$

EXERCÍCIO 12

Na construção de uma imagem digital há milhares de pixels. Se determinada imagem em um monitor, no sistema de cores RGB, apresenta apenas uma cor, cujos pixels possuem como valor 172, quais são as coordenadas desta cor correspondentes a um dispositivo de impressão no sistema CMY?

Solução

De acordo com o ANEXO G, o valor do pixel igual a 172 corresponde a 255, 6 e 6, quantidades de vermelho, verde e azul, respectivamente.

Tomemos as coordenadas (255,6,6) no modelo RGB, onde a intensidade máxima de uma cor é 255. Fazendo:

$$\begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255 \\ 255 \\ 255 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255 \\ 255 \\ 255 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 255 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 249 \\ 249 \end{pmatrix},$$

temos uma mistura subtrativa: ciano (0%) + magenta (98%) + amarelo (98%) corresponde ao vermelho:

Figura 75 – Cor obtida no sistema CMY

Color swatch:



Nearest representations:

24-bit RGB	red 255 green 6 blue 6
fractions	red 1 green 0.02 blue 0.02
CMYK	cyan 0% magenta 98% yellow 98% black 0%

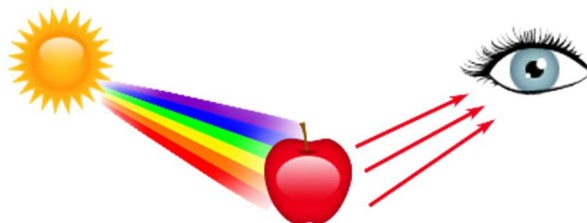
Fonte: O autor, 2016. Mecansimo computacional WolframAlpha.

As coordenadas para esta cor no sistema CMY são (0, 249, 249).

EXERCÍCIO 13

A quantidade real de luz na superfície de uma maçã, por exemplo, influencia o brilho da cor vermelha que percebemos. Ou seja, existe uma relação entre luminância (Y) e luminosidade (V – *Valor Munsell*). Se a intensidade de luz refletida da maçã for de 9 CD/m^2 , qual é o brilho que esta mesma maçã apresenta?

Figura 76 – Brilho percebido



Fonte: <http://subetai.blackdragoncompany.com>.
Acesso em: 12 mai. 2016.

Solução

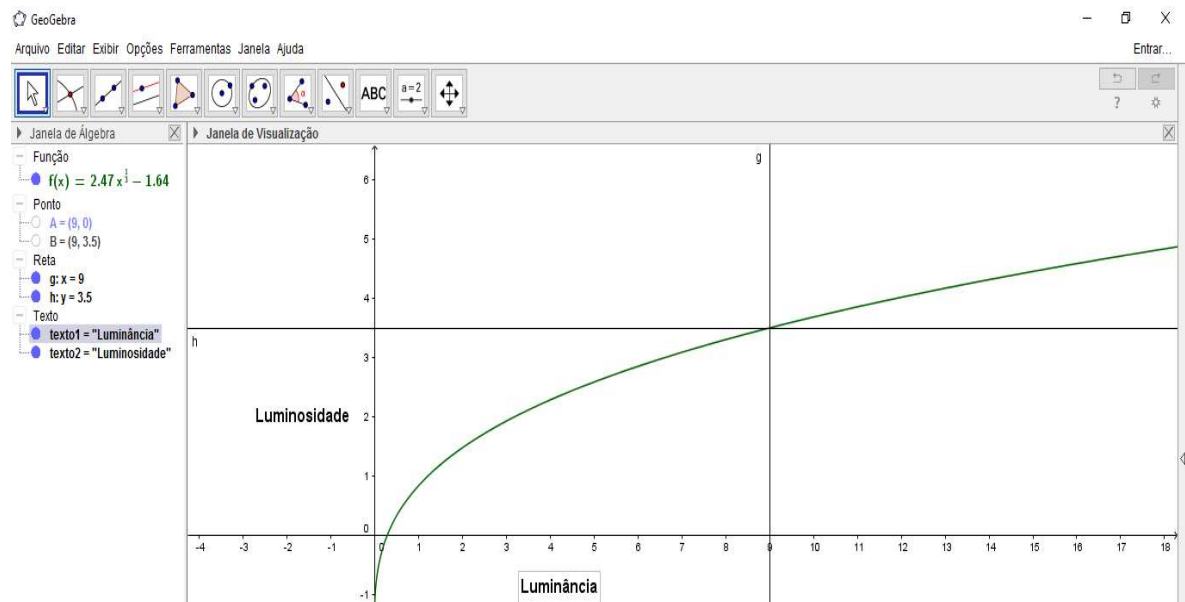
Conforme o capítulo 6, existe uma relação não linear entre a luminância (Y) e a luminosidade (V), através da seguinte fórmula:

$$V = 2,468Y^{1/3} - 1,636.$$

Então, para $Y = 9 \text{ CD/m}^2$, temos,

$$V = 2,468Y^{1/3} - 1,636 = 2,468(9)^{1/3} - 1,636 = 2,468 \times 2,078 - 1,636 \cong 3,492 \text{ CD/m}^2$$

Gráfico 55 – Função $V = 2,468Y^{1/3} - 1,636$



Fonte: O autor, 2016. Software Geogebra.

EXERCÍCIO 14

Determine os valores tricromáticos da cor representada pelos valores triestímulos $\overline{x(\gamma)} = 0,7$, $\overline{y(\gamma)} = 0,4$ e $\overline{z(\gamma)} = 0,5$, no sistema de cores NTSC RGB sob o Iluminante C – luz média do dia para um céu encoberto.

Figura 77 – Cor resultante de $\overline{x(\gamma)} = 0,7$, $\overline{y(\gamma)} = 0,4$ e $\overline{z(\gamma)} = 0,5$

Input interpretation:

XYZ color	X 0.7	Y 0.4	Z 0.5
-----------	-------	-------	-------

Color swatch:



Fonte: O autor, 2016. Mecansimo computacional
WolframAlpha.

Solução

De acordo com o ANEXO E, a transformação linear $[\overline{x(\gamma)}; \overline{y(\gamma)}; \overline{z(\gamma)}] \rightarrow [\overline{r(\gamma)}; \overline{g(\gamma)}; \overline{b(\gamma)}]$ no sistema de cores NTSC RGB sob o Iluminante C, tem por valores:

$$\begin{bmatrix} \overline{r(\lambda)} \\ \overline{g(\lambda)} \\ \overline{b(\lambda)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x(\gamma)} \\ \overline{y(\gamma)} \\ \overline{z(\gamma)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,9099961 & -0,5324542 & -0,2882091 \\ -0,9846663 & -0,0283082 & 1,9991710 \\ 0,0583056 & 0,8975535 & -0,1183781 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x(\gamma)} \\ \overline{y(\gamma)} \\ \overline{z(\gamma)} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\overline{r(\gamma)} = 1,9099961 \overline{x(\gamma)} - 0,5324542 \overline{y(\gamma)} - 0,2882091 \overline{z(\gamma)}$$

$$\overline{g(\gamma)} = -0,98466630 \overline{x(\gamma)} - 0,0283082 \overline{y(\gamma)} + 1,9991710 \overline{z(\gamma)}$$

$$\overline{b(\gamma)} = 0,0583056 \overline{x(\gamma)} - 0,8975535 \overline{y(\gamma)} - 0,1183781 \overline{z(\gamma)}$$

Para valores triestímulos $\overline{x(\gamma)} = 0,7$, $\overline{y(\gamma)} = 0,4$ e $\overline{z(\gamma)} = 0,5$, temos:

$$\begin{aligned} \overline{r(\gamma)} &= 1,9099961 \times 0,7 - 0,5324542 \times 0,4 - 0,2882091 \times 0,5 = 1,336 - 0,212 - 0,144 \\ &\cong \mathbf{0,98} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{g(\gamma)} &= -0,98466630 \times 0,7 - 0,0283082 \times 0,4 + 1,9991710 \times 0,5 = \\ &= -0,689 - 0,011 + 0,999 \cong \mathbf{0,299} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{b(\gamma)} &= 0,0583056 \times 0,7 - 0,8975535 \times 0,4 - 0,1183781 \times 0,5 = 0,04 - 0,359 - 0,059 = \\ &\cong \mathbf{-0,378} \end{aligned}$$

ANEXO A – Tabela comparativa: cor e nota musical

Nota	Frequência (Hz)	Cor	Compr. Onda (nm)	Frequência (Hz $\times 10^{12}$)
DO	523,3	Verde	521	575
DO#	554,4	Azul	492	610
RE	587,3	Anil	464	646
RE#	622,3	Violeta	438	684
MI	659,3	Violeta	414	725
FA	698,5	Violeta	390	768
FA#	739,9	Vermelho	377	812
SOL	783,9	Vermelho	364	858
SOL#	830,6	Vermelho	353	906
LA	877,1	Laranja	343	957
LA#	924,8	Amarelo	334	1010
SI	973,8	Verde	325	1065

Fonte: <http://culturadigital.br/dacio/2011/06/04/convertendo-sons-em-cores>.
Acesso em: 03 nov. 2015.

ANEXO B – Notação de Munsell para a matiz em seu sistema de cores

Munsell Hue Circle		Hue	Symbol	Hue	Symbol
		 Red	R	 Blue-Green	BG
		 Yellow-Red	YR	 Blue	B
		 Yellow	Y	 Purple-Blue	PB
		 Green-Yellow	GY	 Purple	P
		 Green	G	 Red-Purple	RP

Fonte: https://www.pantone.com/downloads/articles/pdfs/L10_315_Defining_Color_Munsell_en.pdf.
Acesso em 08 dez. 2015.

ANEXO C – Cores primárias correspondentes aos comprimentos de onda

Wavelength(nm)	r	g	b	Wavelength(nm)	r	g	b
390	0,00	0,00	0,01	480	-0,38	0,34	0,35
395	0,00	0,00	0,02	485	-0,41	0,41	0,26
400	0,01	0,00	0,04	490	-0,43	0,47	0,18
405	0,02	-0,01	0,09	495	-0,45	0,55	0,13
410	0,04	-0,01	0,18	500	-0,44	0,63	0,09
415	0,05	-0,02	0,31	505	-0,41	0,71	0,06
420	0,07	-0,03	0,47	510	-0,37	0,79	0,04
425	0,08	-0,03	0,62	515	-0,28	0,87	0,02
430	0,07	-0,03	0,76	520	-0,19	0,95	0,01
435	0,06	-0,03	0,88	525	-0,04	0,99	0,00
440	0,03	-0,02	0,98	530	0,13	1,02	0,00
445	0,00	0,00	1,00	535	0,31	1,04	-0,01
450	-0,05	0,03	1,00	540	0,54	1,05	-0,01
455	-0,10	0,06	0,91	545	0,77	1,04	-0,01
460	-0,16	0,11	0,83	550	1,01	1,00	-0,01
465	-0,22	0,16	0,74	555	1,27	0,97	-0,01
470	-0,28	0,22	0,61	560	1,56	0,92	-0,01
475	-0,33	0,28	0,47	565	1,85	0,86	-0,01
Wavelength(nm)	r	g	b	Wavelength(nm)	r	g	b
570	2,15	0,78	-0,01	675	0,17	0,00	0,00
575	2,43	0,70	-0,01	680	0,12	0,00	0,00
580	2,66	0,60	-0,01	685	0,09	0,00	0,00
585	2,92	0,51	-0,01	690	0,06	0,00	0,00
590	3,08	0,42	0,00	695	0,04	0,00	0,00
595	3,16	0,34	0,00	700	0,03	0,00	0,00
600	3,17	0,26	0,00	705	0,02	0,00	0,00
605	3,10	0,19	0,00	710	0,01	0,00	0,00
610	2,95	0,14	0,00	715	0,01	0,00	0,00
615	2,72	0,09	0,00	720	0,01	0,00	0,00
620	2,45	0,06	0,00	725	0,00	0,00	0,00
625	2,17	0,04	0,00	730	0,00	0,00	0,00
630	1,84	0,02	0,00	735	0,00	0,00	0,00
635	1,52	0,01	0,00	740	0,00	0,00	0,00
640	1,24	0,00	0,00	745	0,00	0,00	0,00
645	1,01	0,00	0,00	750	0,00	0,00	0,00
650	0,78	0,00	0,00	755	0,00	0,00	0,00
655	0,59	0,00	0,00	760	0,00	0,00	0,00
660	0,44	0,00	0,00	765	0,00	0,00	0,00
665	0,33	0,00	0,00	770	0,00	0,00	0,00
670	0,24	0,00	0,00	775	0,00	0,00	0,00
				780	0,00	0,00	0,00

Fonte: <http://cvrl.ucl.ac.uk/>. Acesso em: 16 nov. 2015.

ANEXO D - Iluminantes e suas referências aos valores triestímulos

Illuminant	X	Y	Z
A	1.09850	1.00000	0.35585
B	0.99072	1.00000	0.85223
C	0.98074	1.00000	1.18232
D50	0.96422	1.00000	0.82521
D55	0.95682	1.00000	0.92149
D65	0.95047	1.00000	1.08883
D75	0.94972	1.00000	1.22638
E	1.00000	1.00000	1.00000
F2	0.99186	1.00000	0.67393
F7	0.95041	1.00000	1.08747
F11	1.00962	1.00000	0.64350

Fonte: http://www.bruceindbloom.com/index.html?Eqn_RGB_XYZ_Matrix.html. Acesso em: 28 nov. 2015.

ANEXO E – Matrizes para transformação linear RGB/XYZ em um espaço RGB específico e sob determinado iluminante

Espaço RGB	Branco referência	RGB para XYZ [M]			XYZ RGB [M] ⁻¹		
Adobe RGB (1998)	D65	0.5767309	0.1855540	0.1881852	2.0413690	-0,5649464	-0,3446944
		0.2973769	0.6273491	0.0752741	-0,9692660	1,8760108	0,0415560
		0.0270343	0.0706872	0.9911085	0,0134474	1,0154096	-0,1183897
Apple RGB	D65	0.4497288	0.3162486	0.1844926	2.9515373	-1,2894116	-0,4738445
		0.2446525	0.6720283	0.0833192	-1,0851093	1,9908566	0,0372026
		0.0251848	0.1411824	0.9224628	0,0854934	1,0912975	-0,2694964
melhor RGB	D50	0.6326696	0.2045558	0.1269946	1.7552599	-0,4836786	-0,2530000
		0.2284569	0.7373523	0.0341908	-0,5441336	1,5068789	0,0215528
		0.0000000	0.0095142	0.8156958	0,0063467	1,2256959	-0,0175761
beta RGB	D50	0.6712537	0.1745834	0.1183829	1.6832270	-0,4282363	-0,2360185
		0.3032726	0.6637861	0.0329413	-0,7710229	1,7065571	0,0446900
		0.0000000	0.0407010	0.7845090	0,0400013	1,2723640	-0,0885376
Bruce RGB	D65	0.4674162	0.2944512	0.1886026	2.7454669	-1,1358136	-0,4350269
		0.2410115	0.6835475	0.0754410	-0,9692660	1,8760108	0,0415560
		0.0219101	0.0736128	0.9933071	0,0112723	1,0132541	-0,1139754
CIE RGB	E	0.4887180	0.3106803	0.2006017	2.3706743	-0,9000405	-0,4706338
		0.1762044	0.8129847	0.0108109	-0,5138850	1,4253036	0,0885814
		0.0000000	0.0102048	0.9897952	0,0052982	1,0093968	-0,0146949
ColorMatch RGB	D50	0.5093439	0.3209071	0.1339691	2.6422874	-1,2234270	-0,3930143
		0.2748840	0.6581315	0.0669845	-1,1119763	2,0590183	0,0159614
		0.0242545	0.1087821	0.6921735	0,0821699	1,4559877	-0,2807254
Don RGB 4	D50	0.6457711	0.1933511	0.1250978	1.7603902	-0,4881198	-0,2536126
		0.2783496	0.6879702	0.0336802	-0,7126288	1,6527432	0,0416715
		0.0037113	0.0179861	0.8035125	0,0078207	1,2447743	-0,0347411
ECI RGB	D50	0.6502043	0.1780774	0.1359384	1.7827618	-0,4969847	-0,2690101
		0.3202499	0.6020711	0.0776791	-0,9593623	-0,0275807	1,9477962
		0.0000000	0.0678390	0.7573710	0,0859317	1,3228273	-0,1744674
Ekta Espaço PS5	D50	0.5938914	0.2729801	0.0973485	2.0043819	-0,7304844	-0,2450052
		0.2606286	0.7349465	0.0044249	-0,7110285	1,6202126	0,0792227
		0.0000000	0.0419969	0.7832131	0,0381263	1,2725438	-0,0868780
NTSC RGB	C	0.6068909	0.1735011	0.2003480	1.9099961	-0,5324542	-0,2882091
		0.2989164	0.5865990	0.1144845	-0,9846663	-0,0283082	1,9991710
		0.0000000	0.0660957	1.1162243	0,0583056	0,8975535	-0,1183781
PAL/SECAM RGB	D65	0.4306190	0.3415419	0.1783091	3.0628971	-1,3931791	-0,4757517
		0.2220379	0.7066384	0.0713236	-0,9692660	1,8760108	0,0415560
		0.0201853	0.1295504	0.9390944	0,0678775	1,0693490	-0,2288548
ProPhoto RGB	D50	0.7976749	0.1351917	0.0313534	1.3459433	-0,0511118	-0,2556075
		0.2880402	0.7118741	0.0000857	-0,5445989	1,5081673	0,0205351
		0.0000000	0.0000000	0.8252100	0,0000000	0,0000000	1,2118128
SMPTE-C RGB	D65	0.3935891	0.3652497	0.1916313	3.5053960	-1,7394894	-0,5439640
		0.2124132	0.7010437	0.0865432	-1,0690722	1,9778245	0,0351722
		0.0187423	0.1119313	0.9581563	0,0563200	1,0502026	-0,1970226
sRGB	D65	0.4124564	0.3575761	0.1804375	3.2404542	-1,5371385	-0,4985314
		0.2126729	0.7151522	0.0721750	-0,9692660	1,8760108	0,0415560
		0.0193339	0.1191920	0.9503041	0,0556434	1,0572252	-0,2040259
Wide Gamut RGB	D50	0.7161046	0.1009296	0.1471858	1.4628067	-0,1840623	-0,2743606
		0.2581874	0.7249378	0.0168748	-0,5217933	1,4472381	0,0677227
		0.0000000	0.0517813	0.7734287	0,0349342	1,2884099	-0,0968930

Fonte: http://www.brucelindbloom.com/Eqn_RGB_XYZ_Matrix.html. Acesso em: 28 nov. 2015.

ANEXO F – Correlação entre a cor e a cor complementar

Comprimento de onda da luz (nm)	Cor	Cor complementar
400-430	Violeta	Amarelado
430-480	Azul	Amarelo
480-490	Azulado	Laranja
490-510	Esverdeado	Vermelho
510-530	Verde	Púrpura
530-570	Amarelado	Violeta
570-580	Amarelo	Azul
580-600	Laranja	Azulado
600-680	Vermelho	Esverdeado
680-750	Púrpura	Verde

Fonte: <https://sec.s bq.org.br/cd29ra/resumos/T0116-2.pdf>.

Acesso em: 04 jan. 2016.

ANEXO G – Tabela de valor do pixel baseada no sistema RGB

Valor do Pixel	Quantidade de Vermelho	Quantidade de Verde	Quantidade de Azul
0	0	0	0
1	3	3	0
2	6	6	0
3	9	9	0
4	12	12	0
5	15	15	0
...	...	...	...
81	245	245	0
82	248	248	0
83	251	251	0
84	255	255	0
85	255	255	0
86	255	251	0
87	255	248	0
88	255	245	0
...	...	...	...
167	255	6	0
168	255	3	0
169	255	0	0
170	255	0	0
171	255	3	3
172	255	6	6
...	...	...	...
251	255	245	245
252	255	248	248
253	255	251	251
254	255	255	255
255	255	255	255

Fonte: <http://neuron.tuke.sk/hudecm/programing/Grafika/Grafika/SciVisColor.html>. Acesso em: 07 jan. 2016.