



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Tieko Hiraga Artiles Siqueira


**Matemática na escola e conscientização ecológica:
perigo de extinção dos miquis**

Rio de Janeiro

2016

Tieko Hiraga Artiles Siqueira

**Matemática na escola e conscientização ecológica:
perigo de extinção dos miquis**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Prof.^a Dra. Jeanne Denise Bezerra de Barros

Coorientadora: Prof.^a Dra. Rosa María García Márquez

Rio de Janeiro

2016

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

S618 Siqueira, Tiekó Hiraga Artiles.

Matemática na escola e conscientização ecológica: perigo de extinção dos Muriquis/ Tiekó Hiraga Artiles Siqueira. - 2016.
83 f. : il.

Orientadora: Jeanne Denise Bezerra de Barros.
Coorientadora: Rosa María García Márquez
Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro,
Instituto de Matemática e Estatística

1. Modelagem matemática – Teses. 2.– Educação ambiental - Teses. I. Barros, Jeanne Denise Bezerra de. II. Márquez, Rosa María García . III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 519.87

Autorizo apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Tieko Hiraga Artilis Siqueira

**Matemática na escola e conscientização ecológica:
perigo de extinção dos miquis**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 29 de julho de 2016.

Banca Examinadora:

Prof.^a Dra. Jeanne Denise Bezerra de Barros (Orientadora)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof.^a Dra. Rosa María García Márquez (Coorientadora)
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

Prof.^o Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dra. Maria Eiko Nagaoka
Faculdade de Tecnologia de São Paulo

Rio de Janeiro

2016

DEDICATÓRIA

Ao meu pai que, se estivesse entre nós, estaria orgulhoso por mais esta vitória.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço ao meu Deus amado por Ele ter renovado as minhas forças a cada dia. Sem Ele, eu não teria chegado até o fim.

Agradeço ao meu querido esposo João Carlos por seu companheirismo, sua compreensão e ajuda incansável em todos os momentos. Sem ele, tudo teria sido muito mais difícil.

À minha filha Caroline, meu tesouro, pela compreensão da minha falta de tempo e dedicação, nesse período.

À minha querida mãe pela ajuda importantíssima dada, durante as aulas do mestrado. Principalmente, nas épocas das provas.

Aos meus irmãos e sobrinhas pelo incentivo dado durante todo o mestrado.

Às minhas queridas orientadoras Jeanne e coorientadora Rosa por toda dedicação, amizade, ajuda e compromisso dados a mim com relação a este trabalho. Sem elas, certamente essa dissertação não seria a mesma.

Aos professores do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional da UERJ por tudo o que compartilharam comigo através de suas aulas.

Também agradeço aos meus colegas de trabalho, Diogo Silva, que me forneceu algumas bibliografias importantes para essa dissertação, Adriana Morgado, pelas sugestões e correções efetuadas na conclusão do TCC e todos aqueles que torceram por mim até o fim.

Agradeço a minha querida irmã Emiko pelo auxílio dado nas traduções.

Aos meus alunos pela participação nas atividades em sala de aula, aqui inseridas.

Às pesquisadoras Cecília Cronemberger e Fabiane Pereira, ambas do PARNASO, pela dedicação e boa vontade em me fornecer dados para serem utilizados nos modelos matemáticos.

À CAPES pela bolsa concedida durante os dois primeiros anos do mestrado.

E, por fim, agradeço aos meus colegas de turma do PROFMAT pelo convívio agradável e divertido nesse período.

RESUMO

SIQUEIRA, Tiekio H. A. Matemática na escola e conscientização ecológica: perigo de extinção dos muriquis, 2016, 83 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

O presente trabalho tem como objetivo apresentar e desenvolver os assuntos do programa da disciplina de Matemática do 7º ano do Ensino Fundamental, de forma contextualizada, através de uma aula multidisciplinar, a fim de despertar o interesse dos alunos para os problemas sobre a fauna e flora brasileiras. Em particular, pretende-se informar os alunos do iminente risco de extinção do Macaco Muriqui (*Brachyteles arachnoides* e *Brachyteles hypoxanthus*), através de pesquisa, debate em sala de aula, questionário e elaboração de questões envolvendo operações de adição e multiplicação, razão, proporção, porcentagem e interpretação gráfica. Também é realizada uma adaptação de modelos matemáticos ao número estimado de Muriquis, determinando a taxa de crescimento e/ou decréscimo desta espécie, e à relação existente entre os Muriquis e as espécies de plantas existentes na Mata Atlântica. Conjuntamente, são realizados um estudo analítico e um estudo numérico, com o objetivo de prever o tempo limite para salvar essa espécie.

Palavras-chave: Modelagem matemática. Ecologia na matemática do Ensino Fundamental. Macaco Muriqui. Modelo de May.

ABSTRACT

SIQUEIRA, Tiekó H. A. Mathematics in school and ecological awareness: endangered species of spider monkeys , 2016 , 83 f . Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

This study aims to present and develop the subjects of Mathematics course program of the 7th year of elementary school, in context, through a multidisciplinary class, in order to arouse the interest of students to the problems of the Brazilian fauna and flora. In particular, it is intended to inform students of the imminent risk of extinction Muriqui monkey (*Brachyteles arachnoides* and *Brachyteles hypoxanthus*), through research, debate in the classroom, questionnaire and preparation of issues involving addition and multiplication operations, ratio, proportion, percentage and graphical interpretation. It is also performed an adaptation of mathematical models to estimated Muriquis, determining the growth rate and / or decrease of this species, and the relationship between Muriquis and species of plants in the Atlantic Forest. Together they are conducted an analytical study and a numerical study, with the goal of predicting the time limit to save this species.

Keywords: Mathematical modeling. Ecology in Mathematics of Elementary School. Muriqui monkey. May's Model.

SUMÁRIO

| | |
|---|----|
| INTRODUÇÃO | 8 |
| 1 MACACO MURIQUI | 10 |
| 1.1 Classificação zoológica | 10 |
| 1.2 Características biológicas | 12 |
| 1.3 Habitat | 13 |
| 1.4 Alimentação | 14 |
| 1.5 Comportamento | 14 |
| 1.6 Reprodução | 15 |
| 1.7 Distribuição geográfica e densidade populacional | 16 |
| 1.8 Principais ameaças à espécie | 16 |
| 1.9 Mutualismo: Muriqui e as espécies de plantas da Mata Atlântica | 17 |
| 1.9.1 <u>Mutualismo</u> | 17 |
| 1.9.2 <u>Macaco Muriqui: um dispersor de sementes</u> | 19 |
| 1.9.3 <u>Mata Atlântica</u> | 20 |
| 2 MODELOS MATEMÁTICOS POPULACIONAIS | 22 |
| 2.1 Modelagem e Modelos Matemáticos | 22 |
| 2.2 Exemplo de Modelagem Matemática | 24 |
| 2.3 Modelos Clássicos | 27 |
| 2.3.1 <u>Modelo de Malthus</u> | 27 |
| 2.3.2 <u>Modelo Logístico de Verhulst</u> | 29 |
| 2.3.3 <u>Modelo de Gompertz</u> | 30 |
| 2.4 Modelo de Gordon-Schaefer | 31 |
| 2.5 Mutualismo e o Modelo de May | 32 |
| 2.5.1 <u>Modelos para Interação Populacional</u> | 32 |
| 2.5.2 <u>Modelo de May para Mutualismo</u> | 33 |
| 2.6 Análise Qualitativa | 34 |
| 3 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS | 40 |
| 3.1 Modelo de Verhulst e Muriquis | 40 |
| 3.2 Modelo de Gordon-Schaefer e Muriquis | 44 |
| 3.3 Modelo de Verhulst e Mata Atlântica | 45 |

| | | |
|-------|--|----|
| 3.4 | Mutualismo entre Muriquis e a Mata Atlântica | 49 |
| 4 | ATIVIDADES EM SALA DE AULA | 54 |
| 4.1 | Primeira Atividade: Conhecendo a Flora e a Fauna | 54 |
| 4.2 | Segunda Atividade: Aprendendo a Pesquisar | 55 |
| 4.3 | Terceira Atividade: Debate e Questionário | 56 |
| 4.3.1 | <u>Análise das respostas do Questionário da 3ª Atividade</u> | 57 |
| 4.4 | Quarta Atividade: Problemas multidisciplinares | 62 |
| 4.4.1 | <u>Análise das respostas do Questionário da 3ª Atividade</u> | 63 |
| | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 70 |
| | REFERÊNCIAS | 72 |
| | ANEXO A - Atividades aplicadas em sala de aula | 75 |
| | ANEXO B - Termo de Consentimento Informado | 83 |

INTRODUÇÃO

A Educação é um elemento indispensável para a transformação da consciência ambiental.

Seja no âmbito da escola formal, seja na organização comunitária, a Educação Ambiental pretende provocar processos de mudanças sociais e culturais que visam obter do conjunto da sociedade tanto a sensibilização à crise ambiental e à urgência em mudar os padrões de uso dos bens ambientais quanto o reconhecimento dessa situação e a tomada de decisões a seu respeito (CARVALHO, 2008, p. 158).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), temas da atualidade exigem uma permanente atualização, pois estão em contínuo desenvolvimento. Fazer essa atualização junto com os alunos é uma ótima oportunidade para que eles vivenciem o desenvolvimento de procedimentos elementares de pesquisa e construam, na prática, formas de sistematização da informação, medidas, considerações quantitativas, apresentação e discussão de resultados etc. O papel dos professores como orientadores desse processo é de fundamental importância. Essa vivência permite aos alunos perceber que a construção e a produção dos conhecimentos são contínuas e que, para entender as questões ambientais, há necessidade de atualização constante.

Até para o ambientalista a falta de informação sobre os problemas ecológicos é um grave obstáculo ao seu trabalho e atua de forma negativa na preservação de muitas espécies de animais e plantas. Em sala de aula, infelizmente, não há tempo suficiente para introduzir, com exclusividade, esses problemas tão importantes para a sobrevivência de espécies, em particular, para a nossa própria sobrevivência.

Diante do exposto acima e de tantas evidências sobre a extinção de mais de 200 espécies de animais somente no estado do Rio de Janeiro¹, este trabalho tem como objetivo apresentar e desenvolver os assuntos do programa da disciplina de Matemática do 7º ano do Ensino Fundamental, de forma contextualizada, a fim de despertar o interesse dos alunos para os problemas sobre a fauna e flora brasileiras. Em particular, pretende-se informar os alunos do iminente risco de extinção do Macaco Muriquí (*Brachyteles arachnoides* e *Brachyteles hypoxanthus*), também conhecido como Mono Carvoeiro. O trabalho com os alunos começa com questionário em sala de aula para avaliar o conhecimento sobre a fauna brasileira. A

¹ Dado obtido em:

[Lista da Fauna Ameaçada de Extinção – Rio de Janeiro - Instituto LIFE](http://institutolife.org/wp-content/uploads/.../Lista-da-Fauna-Ameacada-de-Extincao-RJ.pdf)
institutolife.org/wp-content/uploads/.../Lista-da-Fauna-Ameacada-de-Extincao-RJ.pdf

construção do conhecimento é feita através de pesquisa como trabalho para casa, debate em sala de aula e resolução de exercícios de Matemática elaborados de forma a associar cada questão com o tema ecológico escolhido. Foram elaboradas questões envolvendo operações de adição e multiplicação, razão, proporção, porcentagem e interpretação de gráficos. Aproveitando o tema, foi realizada uma adaptação de modelos matemáticos ao número estimado de Muriquis, determinando a taxa de crescimento e/ou decrescimento desta espécie, e à relação existente entre os Muriquis e a Mata Atlântica, para suporte do trabalho de pesquisa do autor.

No primeiro capítulo são descritos os Muriquis e a Mata Atlântica. No segundo capítulo, são descritos os modelos matemáticos sobre o crescimento populacional: os modelos clássicos de Malthus, Verhulst e Gompertz; modelo de Gordon-Schaefer, de Lotka-Volterra e de May. Logo a seguir, é realizada uma análise do modelo de May.

No terceiro capítulo, são apresentadas algumas simulações, onde dados reais obtidos nas pesquisas realizadas foram utilizados, dos modelos expostos no capítulo anterior.

No quarto e último capítulo, é apresentado o relato das atividades aplicadas em sala de aula, utilizadas como motivação para o estudo da Matemática, trabalhando a multidisciplinaridade.

As atividades utilizadas em sala de aula, que são parte do material utilizado como referência, estão anexadas ao texto escrito em formato digital (ANEXO DIGITAL).

1 MACACO MURIQUI

Neste capítulo são apresentados uma descrição e os dados estatísticos sobre o primata encontrado apenas no Brasil, chamado de Muriqui. A palavra indígena Muriqui, que significa “povo manso da floresta”, foi atribuída a esses indivíduos devido ao seu comportamento passivo e este foi um dos motivos para que fossem candidatos a mascote oficial das Olimpíadas de 2016, no Rio de Janeiro.

Graças à preservação da Mata Atlântica pelo fazendeiro Feliciano Abdala e das pesquisas e anos de dedicação dos primatologistas Karen Strier (Universidade de Wisconsin), Mauricio Talebi, Fabricio de Melo entre outros, tem-se coletados vários dados sobre essa espécie.

Atualmente, nossos alunos reconhecem facilmente uma girafa, um leão, um urso panda etc, sabem do problema de extinção dos gorilas na África, mas tem pouca informação sobre a fauna brasileira [22].

O que se segue é parte do material recolhido em leituras sobre o macaco Muriqui e contribuiu, de forma relevante, para a criação das atividades desenvolvidas nesse trabalho (em sala de aula, ou em simulações).

1.1 Classificação zoológica

Os macacos Muriquis, conhecidos também por Mono Carvoeiros, pertencem à família Atelidae da ordem dos Primatas e são divididos em duas espécies: o Muriqui do sul (*Brachyteles arachnoides*) (Figura 1) e o Muriqui do norte (*Brachyteles hypoxanthus*) (Figura 2).

Figura 1 - Muriqui do sul (*Brachyteles arachnoides*)



Fonte: Miguel Rangel Jr., 2015.

Figura 2 - Muriqui do norte (*Brachyteles hypoxanthus*) está na lista dos 25 primatas mais ameaçados do mundo



Fonte: Peter Schoen, 2010

1.2 Características biológicas

O Muriqui, espécie endêmica² da Mata Atlântica, é conhecido como o maior primata não humano das Américas. Quando adulto, o macho pode pesar, aproximadamente, de 12 a 15kg e a fêmea, de 9 a 12kg, podendo medir mais de um metro de altura, se suspenso pelos longos braços. Apesar do seu tamanho, é um primata ágil, que se movimenta por braquiação, com o auxílio dos braços e mãos, em forma de gancho, além de uma longa cauda preênsil (Figura 3). Essa cauda é tão forte que suporta todo o peso do seu corpo enquanto ele está se alimentando ou se socializando com outros indivíduos. Também pode utilizar a locomoção quadrúpede e realizar saltos. Os Muriquis do norte possuem expectativa de vida de 28 anos (STRIER, 2012) e os do sul, 32 anos (SBRONIWSKI, 2011). Os machos possuem um escroto avantajado e as fêmeas, um clitóris proeminente, facilitando a identificação dos sexos. Outra característica marcante é que, tanto jovens quanto adultos, de ambos os sexos, possuem uma região abdominal projetada formando uma barriga, provavelmente devido à grande quantidade de folhas ingeridas. Isso dificulta a identificação de fêmeas gestantes em semanas iniciais de gestação (STRIER, 1994).

Há, porém, diferenças morfológicas e genéticas entre os Muriquis do norte e do sul. Os do norte apresentam as faces e a genitália manchadas de rosa e branco (despigmentadas), possuem um polegar vestigial e a pelagem é espessa e macia, recobrando todo o corpo. A coloração muitas vezes não é uniforme, podendo ser de cor amarelo oliváceo, de tons ferrugíneos ou acinzentados (AGUIRRE, 1971; NISHIMURA, 1979; ASSUMPÇÃO, 1983). Já os do sul, a coloração facial e genital é totalmente preta, não possuem nenhum vestígio do polegar e a pelagem, embora seja também espessa e macia, possui cor predominantemente bege-marrom-amarelada.

² Uma espécie endêmica é aquela espécie animal ou vegetal que vive somente em uma determinada área ou região geográfica. O endemismo é causado por quaisquer barreiras físicas, climáticas e biológicas que delimitem com eficácia a distribuição de uma espécie ou provoquem a sua separação do grupo original.

Figura 3 - Movimento por braquiação com auxílio dos braços, das mãos e de uma longa cauda preênsil



Fonte: Luciano Candisani, 2010

1.3 Habitat

Esses grandes macacos habitam áreas de florestas primárias e secundárias (Figura 4). São encontrados preferencialmente em altitudes entre 600 a 1800 metros e no extrato mais alto da mata. Porém, em áreas alteradas, eles podem ser vistos explorando a mata desde o chão até as copas superiores.

Figura 4: Distribuição geográfica das duas espécies de Muriqui



Fonte: Plano de Ação Nacional Para a Conservação dos Muriquis / (Série Espécies Ameaçadas nº 11). ICMBIO, 2011.

1.4 Alimentação

Os Muriquis do norte são essencialmente folívoro-frugívoros. Porém flores (Figura 5), brotos de bambu e de samambaias também fazem parte da dieta deles.

Figura 5: *Mabea fistulifera* é uma flor que produz um néctar açucarado que eles adoram



Fonte: Andre Seale, 2007.

A dieta do Muriqui do sul também é essencialmente herbívora, composta basicamente por folhas jovens e maduras e frutos verdes e maduros, mas também inclui uma grande diversidade de itens como brotos, flores, sementes, néctar, casca de árvores, lianas e epífitas (STRIER, 1991; TALEBI et al., 2005).

1.5 Comportamento

São primatas diurnos e passam a metade do dia descansando. A alimentação e o deslocamento alternam-se como segunda atividade mais frequente, dependendo da estação do ano, temperaturas médias e/ou distribuição de alimentos. Vivem em grandes grupos, formados por machos e fêmeas, que podem passar dos 50 membros. São nômades e se deslocam por longas distâncias à procura de alimentos. Em um único dia, um grupo pode percorrer mais de 4 km e a área usada pelo bando pode passar dos 800 hectares (8 km²). Possuem locais preferidos para procurar alimentos e dormir. Deslocam-se em fila, passando pelas mesmas árvores e, muitas vezes, pelos mesmos galhos, a fim de que os riscos de quedas diminuam. Os adultos sempre cuidam dos mais jovens e fazem pontes com o próprio corpo para facilitar a passagem de filhotes de uma árvore para outra. Ao contrário de outras espécies de primatas, os muriquis adultos convivem em uma sociedade sem estrutura hierárquica, na qual muito raramente se envolvem em ações agressivas, apresentando grande tolerância entre indivíduos

e demonstrando passividade, inclusive na hora de compartilharem alimentos e fêmeas aptas à reprodução. Demonstrações de afeto são comuns entre indivíduos de qualquer sexo ou idade, sendo os demorados abraços grupais uma característica marcante desses macacos (Figura 6). Por conta de toda essa harmonia, eles são chamados pelos índios de “povo manso da floresta”.

Esse animal dócil e curioso também desempenha uma função importante na Mata Atlântica. Ele atua como polinizador e dispersor de sementes de diferentes espécies de plantas e é essencial para manter a diversidade da floresta.

Como na maioria da sociedade dos primatas, os machos são filopátricos, ou seja, permanecem a vida toda no seu grupo familiar, enquanto que as fêmeas dispersam de seu grupo natal para outros grupos, aproximadamente aos 6 anos de idade, antes de atingirem a puberdade.

Figura 6: Abraço coletivo



Fonte: Carla B. Possamai, 2011

1.6 Reprodução

No sistema reprodutivo dos Muriquis, cada fêmea adulta no cio costuma copular com vários machos, em um curto espaço de tempo, sem que haja monopólio ou tentativas de interrupção, uma vez que os machos não competem diretamente pelas fêmeas.

A partir dos 5 anos de idade, ambos já possuem condições físicas para as primeiras cópulas. Porém, as fêmeas só têm os seus primeiros filhotes pelo menos dois anos após se juntarem a um novo grupo social, o que ocorre por volta dos nove anos.

A gestação dura pouco mais de sete meses e, embora haja registro de nascimento de gêmeos, normalmente, as mães dão à luz a um único filhote que é carregado exclusivamente por elas, em contato com o ventre, até os oito meses de vida, aproximadamente. Após esse período, o filhote permanece em suas costas até o desmame. Aos poucos, ele vai se tornando independente, até que por volta dos dois anos, permanece apenas próximo da mãe, sem necessitar diretamente dela. Passados de dois a três anos, desde a gestação e a criação de um filhote, a mãe Muriqui está pronta para gerar uma nova vida.

1.7 Distribuição geográfica e densidade populacional

A distribuição original dos Muriquis abrangia uma grande parte da Mata Atlântica do litoral brasileiro, cobrindo uma área quase contínua que ia do Sul da Bahia, atravessava o Estado do Espírito Santo, Rio de Janeiro, o leste de Minas Gerais, bem como parte da região montanhosa do Estado de São Paulo até o norte do Paraná. Estima-se que a população desses primatas era de 400 000 indivíduos, no ano de 1500, e passou para 3000, em 1971. Em 2009, não restavam mais do que 2200, divididos em aproximadamente 1300 Muriquis-do-Sul que sobreviveram no que restou da Mata Atlântica no Rio de Janeiro, leste de São Paulo e norte do Paraná e os Muriquis-do-Norte, com cerca de 900 indivíduos em 13 áreas do Espírito Santo e Minas Gerais. De acordo com a lista da União Internacional para a Conservação da Natureza (2008) e a lista das Espécies da Fauna Brasileira Ameaçada (2014), as duas espécies estão ameaçadas de extinção, porém os Muriquis-do-Norte encontram-se listados como criticamente em perigo, que é a classificação mais extrema.

1.8 Principais ameaças à espécie

À medida que a população humana cresce, ocorre uma diminuição dos habitats dos animais selvagens e uma consequente diminuição do número desses animais. Como a ocupação do Brasil aconteceu justamente na costa litorânea, onde a Mata Atlântica representava 15% do território nacional, com cerca de 1 306 421 km², e foi reduzida a, aproximadamente, 8,5% do seu tamanho original [26], os Muriquis, sendo endêmicos dessa mata, sofreram os efeitos da pressão antrópica de que esse bioma foi vítima desde a época do descobrimento e, como consequência, tiveram sua população reduzida a níveis críticos. Além disso, a caça ilegal, os baixos investimentos em vigilância e fiscalização e a fragmentação do habitat em ilhas de florestas constituem as principais ameaças à existência dessa espécie.

1.9 Mutualismo: Muriqui e as espécies de plantas da Mata Atlântica

1.9.1 Mutualismo

Mutualismo é uma interação que ocorre na natureza entre duas espécies, em que ambas se beneficiam.

O mutualismo pode ser:

- Obrigatório – Nessa relação, há dependência entre as espécies envolvidas, ou seja, elas não conseguem sobreviver se estiverem separadas uma da outra. Um exemplo clássico dessa relação é o líquen, que é formado pela associação entre certos fungos e algas clorofíceas ou cianobactérias. A alga fornece ao fungo parte da matéria orgânica que produz e recebe dele proteção, umidade e sais minerais;
- Facultativo – Também conhecido por protocooperação, as espécies se beneficiam da interação, porém conseguem viver separadamente, sem prejuízo para a sua sobrevivência. Um bom exemplo é a polinização das flores por insetos e aves e a dispersão de sementes por aves e mamíferos.

Quanto às categorias, o mutualismo pode ser:

- Trófico – Cada um dos envolvidos fornecerá os nutrientes necessários ao outro, que, por motivos limitantes, eles não conseguem obter sozinhos. É o caso, por exemplo, das bactérias do tipo *Rhizobium* (Figura 7) que são capazes de extrair o nitrogênio do solo e nutrir as raízes de certas plantas, que por sua vez fornecem carboidratos àquelas bactérias.

Figura 7: Bactéria *Rhizobium* e raízes de leguminosas



Fonte: Blog de Biologia, 2015

- Defensivo – Uma das espécies receberá proteção contra seus predadores ou parasitas. Em troca, oferece algum outro recurso. Um exemplo clássico é a associação entre formigas e plantas (Figura 8). Em troca de alimentos, como néctar floral e corpúsculo perolado, as formigas protegem a planta contra herbívoros.

Figura 8: Relação entre formigas e Acácias.



Fonte: PhytoImages.siu.edu, 2008

- Dispersivo – Insetos, aves e mamíferos se relacionam com plantas, de modo a obter alimentos, como o néctar e os frutos (Figuras 9 e 10). Em troca, realizam a polinização do pólen e a dispersão das sementes, espalhando-as por longas distâncias, em locais ou ambientes mais adequados para germinação.

Figura 9: Interação entre abelha e planta



Fonte: Apiterapia culiacan, 2010

1.9.2 Macaco Muriqui: um dispersor de sementes

A dispersão de sementes é um fator crítico no ciclo biológico das plantas, possibilitando o recrutamento de plântulas (embriões vegetais que começam a se desenvolver pelo ato da germinação) em ótimas condições para a perpetuação das espécies, tais como menor competição por nutrientes e menor risco de predação.

Grandes mamíferos exercem um considerável impacto no recrutamento de plantas nas florestas tropicais e são apontados como os principais dispersores de sementes devido ao grande volume corporal e o grande deslocamento realizado por eles. O Muriqui (*Brachyteles Arachnoides*), ameaçado de extinção, é juntamente com a anta o maior frugívoro terrestre e arborícola da Floresta Atlântica Brasileira. Na pesquisa realizada por Bueno, 2010, foi constatado que os Muriquis dispersaram pelo menos 28 espécies de plantas, com média de 23,3 sementes por defecação. Eles espalham sementes de 2 mm a 23,4 mm de largura por sua área de convívio. Constatou-se também que um único Muriqui dispersa, no mínimo, 918 sementes por mês. Em cerca de 1000 hectares, ele pode dispersar mais de 11000 sementes por ano. Portanto, o Muriqui é um animal fundamental e complementar para a dispersão de sementes na Mata Atlântica.

Figura 10: Mutualismo entre Muriqui-do-norte e Mata Atlântica



Fonte: Adriano Gambarini, 2010

1.9.3 Mata Atlântica

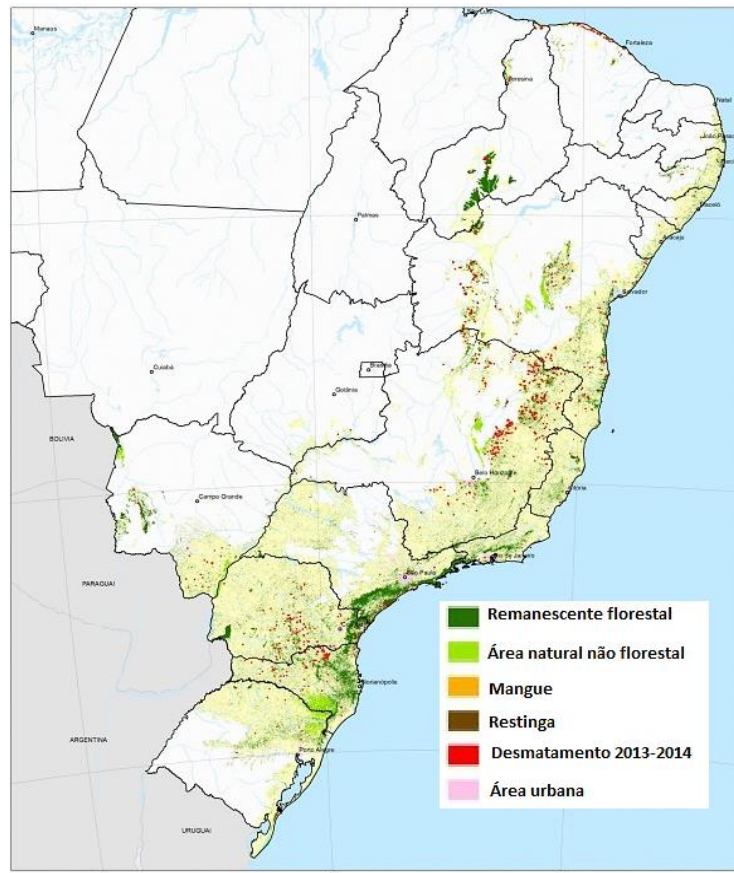
No século XVI, quando os portugueses chegaram ao Brasil, a Mata Atlântica cobria a maior parte do litoral do país, cerca de 15% do território brasileiro, uma área equivalente a 1.306.421 km². Já nos primeiros momentos da colonização, a floresta começou a ser destruída, com a extração do pau-brasil. Em seguida, o desmatamento em massa ocorreu devido ao plantio de culturas de cana-de-açúcar e de café, mineração, entre outras atividades. Foi nos domínios da Mata Atlântica que surgiram os primeiros núcleos populacionais e, depois, as grandes cidades.

Hoje, restam apenas 8,5% de remanescentes florestais acima de 100 hectares (1 km²) ou 12,5%, se somados todos os fragmentos de florestas nativas acima de 3 hectares (0,03 km²), do que existiam inicialmente (Figura 11). Seu território original abrangia áreas de Argentina, Paraguai e também áreas localizadas em 17 Estados brasileiros da Costa Atlântica, incluindo as maiores metrópoles (consequentemente, as cidades mais poluidoras) do país: São Paulo, Rio de Janeiro, Belo Horizonte e Curitiba, em um espaço total onde habitam 72% da população brasileira, isto é, mais de 151 milhões de pessoas, agregando 3000 municípios.

Atualmente, o desmatamento e a degradação do bioma ainda ocorrem em grande escala, especialmente em Minas Gerais, Paraná e Santa Catarina, e as principais causas são: a exploração dos terrenos nos setores imobiliários, extração ilegal de madeira, abastecimento de siderúrgicas com carvão vegetal, o contínuo plantio de monoculturas como a da cana-de-açúcar e o do café, a agropecuária, a expansão urbana desorganizada, construção de vias, introdução de novas espécies (plantas e/ou animais) e, acima de tudo, a poluição ambiental provocada pelo homem, principalmente, nas grandes cidades.

A sobrevivência do ecossistema está diretamente ligada à conservação dos remanescentes da mata, pois nela se encontra a maioria das bacias hidrográficas brasileiras, consequentemente, ela regula o fluxo dos mananciais de água, assegura a fertilidade do solo, além de controlar o clima e proteger as encostas. Sem esses serviços naturais da floresta, a vida se tornará cada vez mais difícil na região desmatada e no planeta Terra em geral.

Figura 11: Atlas dos Remanescentes Florestais da Mata Atlântica 2013-2014



Fonte: <https://www.sosma.org.br/projeto/atlas-da-mata-atlantica>, 2015

A destruição (desmatamento e consequente fragmentação) teve um efeito devastador sobre os animais da Mata Atlântica. Mais da metade dos 633 ameaçados de extinção no Brasil vivem nesta floresta, como é o caso do Muriqui, o maior primata das Américas e símbolo da mata.

Mesmo reduzido e fragmentado, o bioma Mata Atlântica ainda é um dos mais ricos do mundo em diversidade de plantas e animais. São cerca de 20 mil plantas (8 mil delas são endêmicas) e 2181 espécies de animais distribuídas em 992 espécies de pássaros, 372 de anfíbios, 350 de peixes, 270 espécies conhecidas de mamíferos (podendo ainda haver outras não catalogadas) e 197 espécies de répteis.

2 MODELOS MATEMÁTICOS POPULACIONAIS

Neste capítulo são apresentados alguns modelos matemáticos sobre o crescimento populacional, que em geral são descritos por equações diferenciais autônomas. Os mais conhecidos são o de Malthus, o de Verhulst e o de Gompertz. Novas teorias e outros modelos matemáticos surgiram a partir desses modelos como, por exemplo, o modelo de dinâmica populacional de Lotka e Volterra (1825), o modelo de May (1976), modelo de Ayala, Gilpin Ehrenfeld (1973), dentre outros.

2.1 Modelagem e Modelos Matemáticos

Modelo matemático é uma representação abstrata, conceitual, gráfica ou visual de algum fenômeno físico, biológico etc. Segundo Bassanezi (2002, p. 16),

A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.

A modelagem admite a multidisciplinaridade, indo ao encontro das novas tendências que procuram quebrar as fronteiras entre as diversas áreas de pesquisa. O emprego da modelagem proporciona vantagens que podem ser constatadas nos avanços obtidos em vários campos, tais como a Física, a Química, a Biologia e a Astrofísica, entre outros. Particularmente, na área das Ciências Biológicas, a Matemática tem servido de base para modelar, por exemplo, os mecanismos que controlam a dinâmica de populações, a epidemiologia, a ecologia, a neurologia, a genética e os processos fisiológicos.

Ainda segundo Bassanezi (2002, p.20), modelo matemático é “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado”. Um modelo, portanto, consiste na formalização, através de um sistema artificial, de argumentos e parâmetros considerados essenciais, obtidos de uma porção da realidade, quando se procura refletir sobre a mesma, na tentativa de explicar, de entender ou de agir sobre ela.

Para que um modelo matemático seja eficiente, é necessário que ele possua uma linguagem concisa, que expresse as ideias de maneira clara e sem ambiguidades. Além disso, para que ele seja aplicável em uma determinada população, é preciso observar uma série de restrições, tais como: um modelo pode ser muito bom apenas para um determinado período de tempo, ou que ele pode ser útil até que a população atinja seu nível de saturação, ou ainda,

que ele pode ser aplicado caso não haja algum fator externo como predadores, condições ambientais desfavoráveis etc.

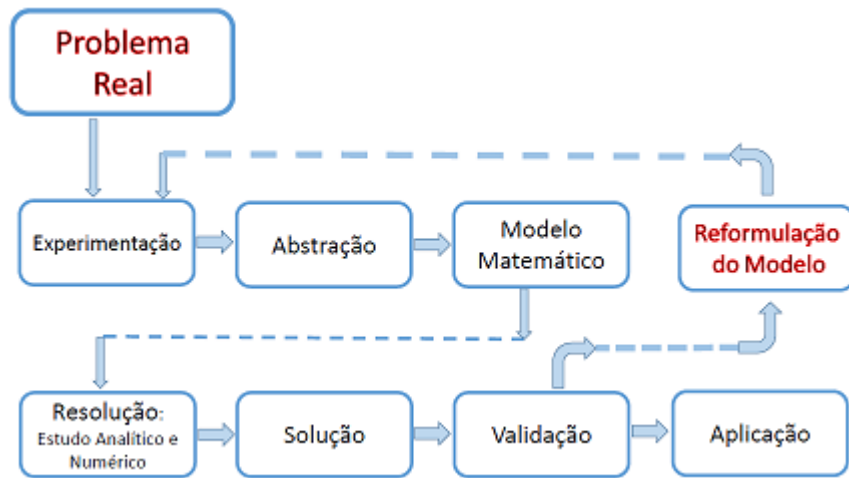
Modelagem matemática, portanto, é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos, que pode sempre ser melhorada. Ela será eficiente, desde que se tenha em mente que o trabalho está sendo elaborado baseado em aproximações da realidade, ou seja, que a sua elaboração está sendo realizada sobre representações de um sistema ou parte dele.

Para Bassanezi, a modelagem matemática envolve as seguintes etapas:

- 1) **Experimentação:** É a fase em que os dados são colhidos;
- 2) **Abstração:** É o procedimento que deve conduzir à formulação do modelo matemático;
- 3) **Resolução:** O modelo matemático é obtido quando a linguagem natural das hipóteses é substituída por uma linguagem matemática coerente;
- 4) **Validação:** É o processo no qual o modelo proposto é aceito ou não. Nesta etapa, os modelos devem ser testados com os dados empíricos, com a finalidade de comparar suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real. Dependendo do grau de aproximação desejado destas previsões, o modelo será aprovado ou não;
- 5) **Modificação:** Nenhum modelo deve ser considerado definitivo, podendo sempre ser melhorado. Reformular modelos é uma das partes fundamentais do processo de modelagem, pois deve-se considerar que:
 - 5.a) Os fatos conduzem constantemente a novas situações;
 - 5.b) Qualquer teoria é passível de modificações;
 - 5.c) As observações são acumuladas gradualmente de modo que novos fatos suscitam novos questionamentos;
 - 5.d) A própria evolução da Matemática fornece novas ferramentas para traduzir a realidade (por exemplo, a teoria do Caos, teoria Fuzzy etc).

Essas etapas podem ser observadas na Figura 12.

Figura 12: Esquema de Modelagem Matemática



Fonte: Livro: Equações Diferenciais Ordinárias: Teoria básica e aplicações com o uso do Maple.

De acordo com Bassanezi (2002, p.31), a modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender, enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças.

Na próxima seção um modelo é dado seguindo as cinco etapas dadas acima.

2.2 Exemplo de Modelagem Matemática

Um exemplo de modelagem matemática pode ser dado através do modelo elaborado³ para o crescimento populacional da bactéria *Salmonella*, responsável por elevada taxa de mortalidade e que possui grande impacto socioeconômico.

1) Experimentação

No ser humano, algumas das infecções causadas pela bactéria *Salmonella* são a gastroenterite e a febre tifoide. A contaminação do paciente ocorre, principalmente, através da ingestão de alimentos portadores dessas bactérias, por água imprópria para o consumo ou pela falta de higiene de quem manipula esses alimentos.

No crescimento populacional dessa bactéria foram observadas, por diversos pesquisadores, as seguintes fases:

Fase Lag⁴: Segundo Cardoso e Carvalho (2006), os sintomas aparecem de 12 a 36 horas após o contato com o alimento contaminado e a doença pode durar de um a

³ Exemplo retirado do Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado do Profmat - pólo UERJ de autoria de Carlos Eduardo Bezerra dos Santos.

quatro dias ou, em casos crônicos, até quatro semanas. Para esse modelo, considerou-se que essa fase tem a duração de 6 horas.

Fase Exponencial: O gênero *salmonella* é mesófilo, isto é, apresenta ótimo crescimento em temperaturas próximas a do ambiente, sendo a temperatura ideal de crescimento 37°C. Após a fase de adaptação, as células começam a reproduzir-se, com tempo de geração de 40 minutos. Aqui, supôs-se que o caso da doença (Salmonelose) é brando e que o doente é tratado tão logo receba o diagnóstico.

Fase Estacionária: Supondo-se que, após três dias, os nutrientes se esgotem e que a população de bactérias atinja o limite máximo de sustentabilidade (momento em que a curva de crescimento é quase constante), ou seja, o número de células que se duplicam é praticamente o mesmo daquelas que morrem.

Fase de Morte (decrecimento): Considerando que o paciente se submeta a um tratamento específico, o tamanho da população de *Salmonella* deve decrescer. Portanto, o parâmetro associado à taxa de decrecimento é negativo.

2) Abstração

Para os primeiros dias do desenvolvimento da doença, o autor utilizou o modelo de Malthus⁵, no qual foi suposto que o hospedeiro tenha ingerido 10 unidades formadoras de colônias (UFC)⁶ por mililitro, além de ter sido considerado que, após a fase de adaptação, a bactéria se duplica a cada $\frac{2}{3}$ de hora (40 minutos). Então, considerando essas peculiaridades da *Salmonella*, obteve-se o parâmetro $r \cong 1,04$, associado à taxa de crescimento. Como o modelo de Gompertz tem um comportamento parecido ao de Malthus nos primeiros dias, o autor adaptou o modelo de Gompertz para os 6 primeiros dias, na fase exponencial.

Portanto, o modelo matemático que simulou a infecção por *salmonella*, com tratamento médico, é da forma

⁴ A curva de crescimento populacional, em um meio limitado, possui quatro fases: fase de adaptação (ou lag), fase exponencial (ou log), fase estacionária e fase de morte.

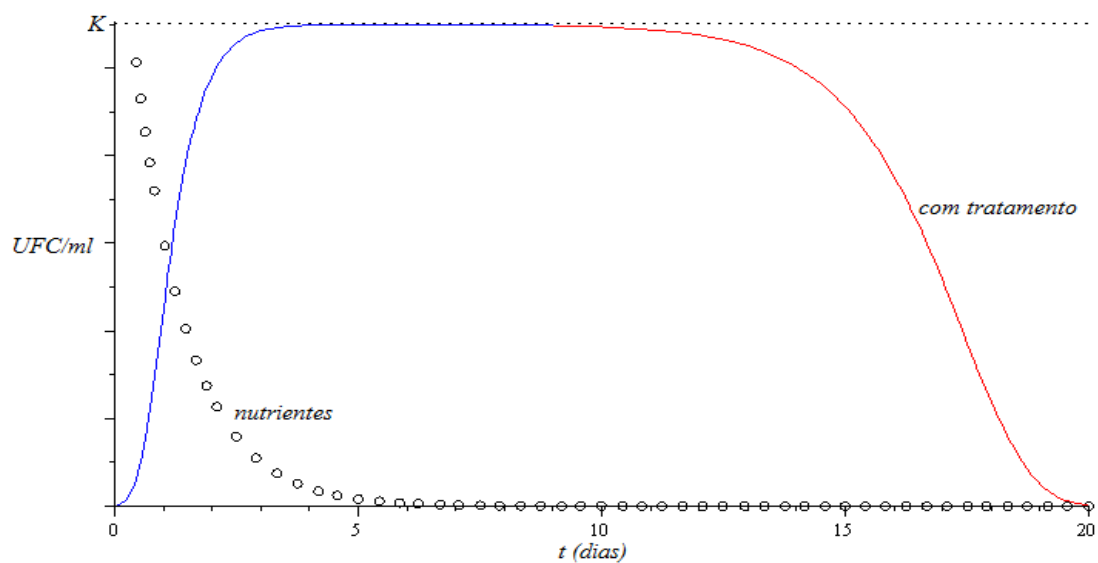
⁵ O modelo de Malthus, assim como o de Gompertz, é apresentado na seção 2.3.

⁶ Em microbiologia, existem maneiras diretas e indiretas de quantificar a população microbiana de uma determinada amostra. A contagem direta pode ser feita através das células totais (inclusive as mortas) ou das células viáveis, que são capazes de se reproduzir, também chamadas de Unidades Formadoras de Colônias (UFC).

$$P'(t) = \begin{cases} bP(t) \ln\left(\frac{K}{P(t)}\right) & t \in [0, 6[\\ -cP(t) \ln\left(\frac{K}{P(t)}\right) & t \in [6, 12[\end{cases} \quad (2.1)$$

onde $P(t)$ representa o número de UFC/ml, K é o nível de saturação, b é a taxa de crescimento e c é a taxa de decrescimento.

Figura 13: Crescimento populacional de *Salmonella* segundo o modelo de Gompertz e nutrientes disponíveis no hospedeiro



Fonte: Carlos Eduardo Bezerra dos Santos, 2014.

3) Resolução

O Modelo Matemático 2.1 obtido é uma equação diferencial ordinária, que foi resolvida pelo método de substituição, supondo $K = 11000$ UFC/ml.

4) Validação

Como se observa na Figura 13, a curva de crescimento da *Salmonella* condiz com a curva de crescimento típico de populações bacterianas. Descreve de forma bem adequada o tempo gasto no processo de infecção e tratamento clínico de um caso. Assim, fica validado o modelo proposto por Bezerra dos Santos (2015).

2.3 Modelos Clássicos

Os modelos matemáticos que descrevem o crescimento de populações das espécies são geralmente descritos por equações diferenciais ordinárias autônomas. A seguir, apresentamos os modelos de Malthus, Verhulst, Gompertz, Gordon-Schaefer e May.

Das equações disponíveis, o modelo de Malthus é o mais simples e serviu para a formulação de modelos mais complexos na descrição da dinâmica populacional.

2.3.1 Modelo de Malthus

Thomas Robert Malthus, economista e demógrafo inglês, foi pioneiro no estudo de dinâmica populacional. Em seu livro *An Essay on the Principle of Population*, ele previu que a superpopulação poderia provocar a extinção da raça humana em 1880, afirmando que a tendência do crescimento populacional ocorre em progressão geométrica, enquanto que a oferta de alimentos cresce em progressão aritmética.

Por esse motivo, Malthus acreditava que o crescimento demográfico iria ultrapassar a capacidade produtiva da terra gerando fome e miséria.

Na tentativa de evitar essa catástrofe, ele defendia a redução da taxa de natalidade através do controle da quantidade de filhos por família nos países pobres e da proibição de que casais muito jovens tivessem filhos. Também defendia o salário de subsistência. Além disso, ele achava que desastres como a fome, a epidemia e a guerra eram benéficas, uma vez que ajudavam também no controle do crescimento da população.

Thomas Malthus é considerado o *pai da demografia* por sua teoria para o controle populacional, conhecida como malthusianismo, que é uma teoria demográfica, econômica e sociopolítica.

O argumento de Malthus explicitado em termos de Equações Diferenciais é o seguinte: Considere $P(t)$ o tamanho da população e $A(t)$ a quantidade total de alimentos no instante t .

- Como $P(t)$ cresce em forma exponencial (progressão geométrica), temos

$$\frac{dP(t)}{dt} = r P(t), \quad (2.2)$$

onde r é a taxa proporcional ao seu tamanho.

- Como $A(t)$ aumenta em progressão aritmética, então

$$\frac{dA(t)}{dt} = kA_0, \quad (2.3)$$

onde k é a taxa de crescimento e A_0 é a quantidade inicial de alimentos.

A solução da Equação 2.2⁷, é determinada pelo método da separação de variáveis e é dada por

$$P(t) = P_0 e^{rt} \quad (2.4)$$

onde $P(0) = P_0$ representa a população inicial.

A única solução de equilíbrio (estacionária) da Equação 2.2 é $P(t) = 0$; $t \geq 0$. Das Equações 2.2 e 2.4, podemos observar que:

- Se $r > 0$, ou seja, nasce mais indivíduos do que morre, e $P_0 > 0$, então $P'(t) > 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \infty$, o tamanho da população cresce exponencialmente à medida que o tempo passa;
- Se $r = 0$, ou seja, o número de mortes é igual ao número de nascimento, então, o tamanho da população é constante, para todo t positivo;
- Se $r < 0$, ou seja, morre mais indivíduos do que nasce, e $P_0 > 0$, então $P'(t) < 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 0$, portanto o tamanho da população decresce, tendendo a zero.

Ao resolver a Equação 2.3, encontramos $A(t) = kA_0 t + c$.

Considerando $A(0) = A_0$, temos $c = A_0$.

Segue,

$$A(t) = A_0(kt + 1) \quad (2.5)$$

Das Equações 2.4 e 2.5, obtemos

$$R(t) = \frac{A(t)}{P(t)} = \frac{A_0(kt + 1)}{P_0 e^{rt}}$$

Logo,

$$R(t) = R_0(kt + 1)e^{-rt} \quad (2.6)$$

⁷ Para maiores detalhes, consulte o Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado do Profmat - pólo UERJ de autoria de Carlos Eduardo Bezerra dos Santos.

onde $R(t)$ representa a quantidade de alimento por pessoa; P_0 , a população inicial; A_0 , a quantidade inicial de alimentos e $R_0 = \frac{A_0}{P_0}$, a quantidade inicial de alimentos por pessoa.

Observemos que, à medida que o tempo aumenta, a razão entre a quantidade de alimentos e a população tende a zero, isto é, $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0$, $\bar{t} > 0$. Portanto, não haveria alimentos suficientes para a população crescente.

O modelo de Malthus não é fiel ao crescimento populacional quando o tempo é muito longo e, menos ainda, quando condições adversas são agregadas, tais como superpopulação em um ambiente com efeitos negativos, contaminação e excesso de demanda de alimentos, combustível e etc. Entretanto, esse modelo impulsionou novas pesquisas em diversas áreas, buscando estabelecer novas previsões do controle populacional.

2.3.2 Modelo Logístico de Verhulst

Em 1837, um modelo mais realista que o de Malthus foi proposto pelo matemático belga Pierre François Verhulst.

O modelo de Verhulst, também conhecido como modelo logístico, supõe que uma população deverá crescer até um limite máximo, ou seja, a população tende a se estabilizar. Essa estabilidade está relacionada à capacidade de sustentação do meio em que esta população vive.

O modelo proposto por Verhulst é uma adaptação do modelo de Malthus e é descrito pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right), \quad (2.7)$$

onde r é a taxa de crescimento intrínseco; $P(t)$ é o tamanho da população no tempo t e K representa o nível de saturação ou a capacidade de suporte.

Na Equação 2.7, é possível perceber que, quando P é muito pequeno em relação a K , a razão $\frac{P}{K}$ está próxima de zero, logo a Equação 2.7 se assemelha à Equação de Malthus 2.2.

A solução da Equação 2.7 é dada por

$$P(t) = \frac{Kr}{r + ce^{-rt}},$$

onde c é uma constante arbitrária.

Se $P(t)$ é a solução da Equação 2.7, que satisfaz a condição inicial $P(0) = P_0$, temos

$$P(t) = \frac{KP_0}{(K - P_0)e^{-rt} + P_0}$$

As soluções de equilíbrio (estacionárias) da Equação 2.7 são $P(t) = 0$ e $P(t) = K$ para todo t . Se $P(t)$ é a solução da Equação 2.7, que passa pelo ponto $(0, P_0)$, então:

- Se $r > 0$ e $P_0 > K$, então $P'(t) < 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = K$;
- Se $r > 0$ e $0 < P(0) = P_0 < K$, então $P'(t) > 0$, logo $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = K$;
- Se $r < 0$ e $P(0) = P_0 < K$, então $P'(t) < 0$, portanto $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 0$;
- Se $r < 0$ e $P(0) = P_0 > K$, então $P'(t) > 0$, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 0$.

2.3.3 Modelo de Gompertz

O modelo de Gompertz é um refinamento do modelo demográfico de Malthus e foi desenvolvido, em 1825, pelo matemático inglês Benjamin Gompertz.

A principal diferença entre esse modelo e o de Malthus está no fato de que Gompertz considera que uma população é limitada e não cresce exponencialmente o tempo todo.

Segundo Bassanezi (2002, p.343), a taxa de crescimento, nesse modelo, é grande no início do processo, mudando rapidamente para um crescimento mais lento. É um modelo bastante adequado para traduzir crescimentos celulares (plantas, bactérias, tumores), onde todas as células no início são meristemáticas⁸, perdendo essa propriedade em um pequeno intervalo de tempo.

A equação diferencial proposta por Gompertz sobre o crescimento populacional é da forma

$$\frac{dP}{dt} = rP \ln\left(\frac{K}{P}\right), \quad (2.8)$$

onde r é a taxa de crescimento intrínseco, $P(t)$ é o número de indivíduos no tempo t e K representa o nível de saturação.

A solução da Equação 2.8 é determinada pelo método de separação de variáveis e é dada por

⁸ Células meristemáticas são compostos de células indiferenciadas que se dividem continuamente.

$$P(t) = Ke^{-e^{-(rt+c)}}$$

Observemos que:

- Se $r > 0$, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = K$, desde que $0 < P_0 < K$;
- Se $r < 0$, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 0$, desde que $0 < P_0 < K$.

2.4 Modelo de Gordon-Schaefer

Com o reconhecimento da existência de recursos finitos para a capacidade de carga de um ecossistema, foi necessária a introdução de modelos que não sustentam o crescimento exponencial indefinidamente. Uma versão mais simples desse modelo é obtida quando se considera um fator de predação. O modelo de Gordon-Schaefer, deriva do modelo de Schaefer (ARAÚJO, 2011) e sua importância se deve ao esclarecimento do efeito, em termos econômicos, sobre a pesca de peixes (BOYCE et al, 1999).

O modelo de Gordon-Schaefer considera a taxa de captura $Ey(t)$ e é dado por

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K} \right) y - Ey \quad , \quad (2.9)$$

onde y representa a biomassa populacional; r , a taxa intrínseca de crescimento da população; K , a capacidade de carga do ambiente e E , o esforço de pesca⁹, que é positiva e medida em unidades inversa do tempo.

Os pontos de equilíbrio ou soluções triviais da Equação 2.9 são:

$$y_1 = 0 \text{ (extinção)} \quad \text{e} \quad y_2 = K \left(\frac{r-E}{r} \right)$$

E a solução geral é da forma

$$y(t) = \frac{K(E-r)}{cKe^{(E-r)t}(E-r) - r} \quad ,$$

onde c é uma constante arbitrária.

Será admitido, por razões óbvias, que $E < r$ (para que $y(t)$ seja positivo). Observe que:

- $y' > 0$ se $0 < y < y_2$;
- $y' < 0$ se $y_2 < y$.

⁹ Esforço de pesca é a quantidade de operações ou de tempo de operação das artes de pesca numa determinada pescaria, durante um período determinado.

Portanto, o ponto de equilíbrio $y_2 = K \left(\frac{r-E}{r} \right)$ é assintoticamente estável, enquanto o ponto $y_1 = 0$ é instável. O produto do esforço de pesca E pela solução assintoticamente estável Ey_2 é chamado de produção sustentável, denotada por P_s , que é a taxa na qual os peixes podem ser capturados sem afetar significativamente a biomassa.

Em termos de equação, temos

$$P_s = Ey_2 = KE \left(1 - \frac{E}{r} \right) = KE - \left(\frac{K}{r} \right) E^2 .$$

2.5 Mutualismo e o Modelo de May

Nesta seção é abordado o modelo populacional de May (1976), tendo em vista a interação entre os Muriquis e as espécies de plantas da Mata Atlântica.

2.5.1 Modelos para Interação Populacional

Na natureza, os seres vivos interagem de três maneiras não-mutuamente exclusivas: competição, predação e mutualismo. Esses tipos de interações são complexas e podem mudar com o tempo, como mostra o seguinte exemplo:

Num ambiente normal e equilibrado, as formigas pastoreiam os pulgões e também servem de transporte, levando-os para habitar novos brotos e, como simbiose se alimentam de seus excrementos. Quando os alimentos das formigas se tornam escassos então elas se alimentam dos pulgões. (BASSANEZI, 2011, p.161)

Os modelos populacionais clássicos descrevem a dinâmica de apenas uma espécie. O primeiro modelo de interação entre duas espécies (animais, plantas e/ou humanos) em coexistência foi desenvolvido de forma independente por Lotka (1925) e Volterra (1926), atualmente conhecido como modelo de Lotka-Volterra. Esse modelo é uma extensão dos modelos logísticos.

As populações interagem de diversas formas. Duas espécies em coexistência, permanente ou temporária, podem se relacionar de seis maneiras fundamentais, conforme a Tabela 1, onde o símbolo “0” significa que a espécie não é afetada pela presença da outra; o símbolo “+” significa que a espécie é favorecida ou necessita da presença da outra; e o símbolo “-” significa que a espécie é prejudicada pela presença da outra.

Tabela 1: Ações mútuas entre duas espécies (1 e 2) diferentes

| Tipo de interação | Espécie 1 | Espécie 2 | Exemplo |
|---------------------|-----------|-----------|---|
| Neutral | 0 | 0 | Nenhuma das duas espécies afeta a outra |
| Competição direta | - | - | Predação mútua |
| Competição indireta | - | - | Consumo de recursos limitados |
| Predação | + | - | A espécie 1 consome a espécie 2 |
| Comensalismo | + | 0 | A espécie 1 se beneficia da presença da espécie 2 |
| Mutualismo | + | + | As duas espécies se favorecem mutuamente |

Fonte: S. Dunbar, 1986 apud Mehran Sabeti

O modelo simplificado de predador-presa é da forma

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(a - bN_2) \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2(-c + dN_1) \end{cases}, \quad (2.10)$$

onde N_1 representa a população de presas; N_2 , a de predadores; a , b , c e d são constantes positivas.

Na ausência de predadores, a população de presas cresce exponencialmente. Porém, quando os predadores estão presentes, supõe-se que a população de presas diminui de forma proporcional ao número de encontros com os predadores. Diversos autores realizaram um estudo qualitativo e quantitativo do Modelo 2.10. Boyce (2015, p.452), Bassanezi (2011, p.145), Hirsch e Smale (1974 p. 258), são alguns deles.

O modelo de Lotka-Volterra (1926) foi amplamente estudado e adaptado por diversos pesquisadores, entre eles o engenheiro físico-químico Robert May (1976) que acrescentou alguns termos para descrever o mutualismo entre duas espécies.

Neste trabalho, é realizada uma análise do modelo de May para a rede mutualista entre os macacos Muriquis e as espécies de plantas da Mata Atlântica, os quais possuem uma relação de mutualismo do tipo facultativo, cuja categoria é a dispersiva.

2.5.2 Modelo de May para Mutualismo

O modelo de May é dado por

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = r_1 C \left(1 - \frac{C}{K_1} + \alpha \frac{M}{K_1} \right) \\ \frac{dM}{dt} = r_2 M \left(1 - \frac{M}{K_2} + \beta \frac{C}{K_2} \right) \end{cases}, \quad (2.11)$$

onde K_1 , K_2 , α e β são constantes positivas;

C : representa a população de uma determinada espécie;

M : representa a população da outra espécie que participa da interação mutualista;

K_1, K_2 : representam os limites de capacidade de suporte para ambas as espécies;

r_1, r_2 : representam as taxas associadas ao crescimento natural das espécies;

α : representa o incremento diferencial da população de C na presença de M ;

β : representa o incremento diferencial da população M na presença de C .

O modelo de May, representado no Sistema 2.11, é uma forma simplificada de descrever o mutualismo entre duas espécies (neste caso, o macaco Muriqui e as espécies de plantas da Mata Atlântica), pois na verdade estamos negligenciando diversos fatores externos (como a poluição, desmatamento, fragmentação da mata e a consequente inibição da reprodução, aquecimento global, caça indevida, entre outros).

No modelo de interações mutualistas, a densidade populacional pode explodir em tempo finito, apesar de cada espécie estar limitada. Nas palavras de Robert May,

para mutualismos que são suficientemente fortes, esses modelos simples levam ambas as populações a um crescimento exponencial ilimitado, em uma orgia de benefício recíproco.

A solução do Sistema 2.11 não é dada em termos de funções elementares, então realizaremos um estudo qualitativo e, posteriormente, algumas simulações numéricas.

2.6 Análise Qualitativa

Nesta seção é realizado um estudo em torno dos pontos críticos com a finalidade de se obter uma ideia do comportamento das soluções.

Reescrevendo o Modelo 2.11, temos

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = \frac{r_1}{K_1} C(K_1 - C + \alpha M) \\ \frac{dM}{dt} = \frac{r_2}{K_2} M(K_2 + \beta C - M) \end{cases}, \quad (2.12)$$

onde $\frac{r_1}{K_1}$ representa a limitação intraespecífica da espécie C e $\frac{r_2}{K_2}$ representa a limitação

intraespecífica da espécie M .

Para realizar o estudo qualitativo do Sistema 2.12, é necessário determinar seus pontos de equilíbrio. Para isso, igualamos a zero o lado direito e, assim, obtemos as seguintes equações:

$$\frac{r_1}{K_1} C(K_1 - C + \alpha M) = 0 \Leftrightarrow C = 0 \quad \text{ou} \quad K_1 = C - \alpha M \quad (2.13)$$

$$\frac{r_2}{K_2} M(K_2 + \beta C - M) = 0 \Leftrightarrow M = 0 \quad \text{ou} \quad K_2 = M - \beta C \quad (2.14)$$

Fazendo as combinações entre as Equações 2.13 e 2.14, temos os pontos de equilíbrio triviais $(0,0)$, $(K_1, 0)$ e $(0, K_2)$ (2.14b)

e resolvendo as equações das retas:

$$\begin{cases} K_1 = C - \alpha M \\ K_2 = -\beta C + M \end{cases}, \quad (2.15)$$

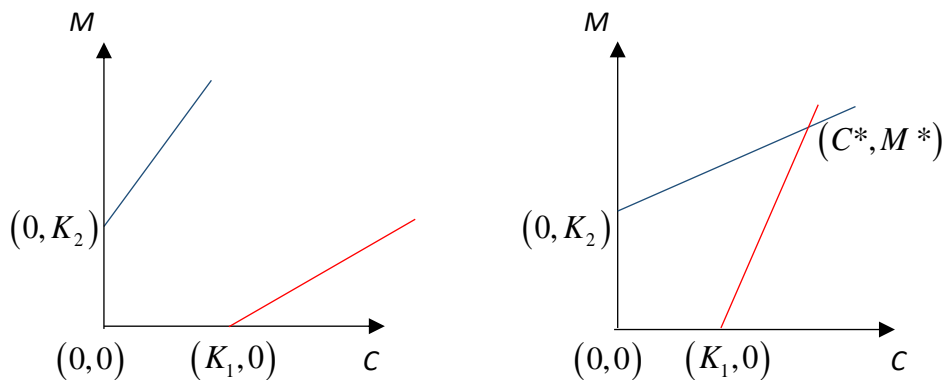
para $1 - \alpha\beta \neq 0$, obtém-se o ponto de equilíbrio não trivial:

$$(C^*, M^*) = \left(\frac{K_1 + \alpha K_2}{1 - \alpha\beta}, \frac{K_2 + \beta K_1}{1 - \alpha\beta} \right). \quad (2.16)$$

As retas, em 2.15, são denominadas *nulidades das variáveis populacionais*, pois correspondem aos pontos onde as suas variáveis são nulas.

- Se $1 - \alpha\beta < 0$, então o Sistema 2.12 admite apenas três pontos de equilíbrio no primeiro quadrante: $\{(0,0), (K_1,0), (0, K_2)\}$ (Figura 14a);
- Se $1 - \alpha\beta > 0$, então o Sistema (2.12) admite quatro pontos de equilíbrio no primeiro quadrante: $\{(0,0), (K_1,0), (0, K_2), (C^*, M^*)\}$ (Figura 14b).

Figura 14: Trajetórias de fase do modelo de mutualismo para duas espécies com capacidades de carga limitada dadas por um sistema adimensional.



a) Se $1 - \alpha\beta < 0$, há um crescimento ilimitado de ambas as espécies.

b) Se $1 - \alpha\beta > 0$, há coexistência entre as duas espécies.

O estudo em torno dos pontos críticos nos fornece uma ideia do comportamento das soluções. Portanto, realizaremos, a seguir, um estudo qualitativo em torno de cada ponto crítico.

Denotemos por

$$f(C, M) = \frac{r_1}{K_1} C(K_1 - C + \alpha M) \quad \text{e} \quad g(C, M) = \frac{r_2}{K_2} M(K_2 - M + \beta C)$$

Para linearizar o Sistema 2.12, expandimos as funções f e g em torno do ponto de equilíbrio (C_0, M_0) através do desenvolvimento de Taylor

$$\begin{cases} f(C, M) = f(C_0, M_0) + \frac{\partial f}{\partial C}(C_0, M_0)(C - C_0) + \frac{\partial f}{\partial M}(C_0, M_0)(M - M_0) + E_1(C, M) \\ g(C, M) = g(C_0, M_0) + \frac{\partial g}{\partial C}(C_0, M_0)(C - C_0) + \frac{\partial g}{\partial M}(C_0, M_0)(M - M_0) + E_2(C, M) \end{cases}, \quad (2.17)$$

onde $f(C_0, M_0) = 0$, $g(C_0, M_0) = 0$ e E_1, E_2 são funções tais que

$$\lim_{(C, M) \rightarrow (C_0, M_0)} \frac{E_1(C, M)}{\|(C, M) - (C_0, M_0)\|} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{(C, M) \rightarrow (C_0, M_0)} \frac{E_2(C, M)}{\|(C, M) - (C_0, M_0)\|} = 0 .$$

Como as funções E_1, E_2 tendem a zero nas proximidades do ponto crítico (C_0, M_0) , podemos analisar o comportamento das trajetórias próximas a esse ponto utilizando apenas a parte linear de 2.17 e desprezando E_1, E_2 . Portanto, o Sistema 2.12 linearizado é da forma:

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = \frac{\partial f}{\partial C}(C_0, M_0)(C - C_0) + \frac{\partial f}{\partial M}(C_0, M_0)(M - M_0) \\ \frac{dM}{dt} = \frac{\partial g}{\partial C}(C_0, M_0)(C - C_0) + \frac{\partial g}{\partial M}(C_0, M_0)(M - M_0) \end{cases}, \quad (2.18)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial C}(C_0, M_0) &= \frac{-r_1}{K_1}(2C_0 - K_1 - \alpha M_0); & \frac{\partial f}{\partial M}(C_0, M_0) &= \frac{r_1}{K_1}(\alpha C_0); \\ \frac{\partial g}{\partial C}(C_0, M_0) &= \frac{r_2}{K_2}(\beta M_0); & \frac{\partial g}{\partial M}(C_0, M_0) &= \frac{r_2}{K_2}(\beta C_0 + K_2 - 2M_0). \end{aligned}$$

❖ Estudo analítico em torno do ponto crítico (0,0)

Substituindo $(C_0, M_0) = (0, 0)$ no Sistema 2.18, temos

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = r_1 C \\ \frac{dM}{dt} = r_2 M \end{cases} .$$

Escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} C' \\ M' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}}_{A_1} \begin{pmatrix} C \\ M \end{pmatrix} .$$

Para determinar os autovalores da matriz A_1 , encontramos as raízes do polinômio característico associado a essa matriz, que é da forma

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} r_1 - \lambda & 0 \\ 0 & r_2 - \lambda \end{vmatrix} = (r_1 - \lambda)(r_2 - \lambda)$$

Esse polinômio admite duas raízes reais $\lambda_1 = r_1$ e $\lambda_2 = r_2$.

- 1) Se as duas raízes reais são positivas, então a origem é um repulsor, por conseguinte, é instável (Boyce & DiPrima, 1999);
- 2) Se as duas raízes são negativas, então a origem é um atrator;
- 3) Se uma raiz é positiva e a outra negativa, a origem é um ponto de sela.

❖ Estudo analítico em torno do ponto $(K_1, 0)$

Substituindo $(C_0, M_0) = (K_1, 0)$ no Sistema 2.18, temos

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = \frac{\partial f(K_1, 0)}{\partial C} (C - K_1) + \frac{\partial f(K_1, 0)}{\partial M} M \\ \frac{dM}{dt} = \frac{\partial g(K_1, 0)}{\partial C} (C - K_1) + \frac{\partial g(K_1, 0)}{\partial M} M \end{cases} . \quad (2.19)$$

Fazendo a mudança de variável $\hat{C} = C - K_1$ e $\hat{M} = M$ em 2.19, temos $\frac{d\hat{C}}{dt} = \frac{dC}{dt}$ e

$\frac{d\hat{M}}{dt} = \frac{dM}{dt}$, logo podemos restringir a análise em torno da origem. Assim,

$$\begin{cases} \frac{d\hat{C}}{dt} = -r_1 \hat{C} + r_1 \alpha \hat{M} \\ \frac{d\hat{M}}{dt} = 0 \hat{C} + \frac{r_2}{K_2} (K_2 + \beta K_1) \hat{M} \end{cases} .$$

Escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \hat{C}' \\ \hat{M}' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -r_1 & r_1\alpha \\ 0 & \frac{r_2}{K_2}(K_2 + \beta K_1) \end{pmatrix}}_{A_2} \begin{pmatrix} \hat{C} \\ \hat{M} \end{pmatrix} .$$

O polinômio característico associado à matriz A_2 tem como raízes $\lambda_1 = -r_1$ e

$$\lambda_2 = \frac{r_2}{K_2}(K_2 + \beta K_1) .$$

- 1) Se $r_1 < 0$ e $r_2 > 0$ as duas raízes reais são positivas, então o ponto $(K_1, 0)$ é um repulsor;
- 2) Se $r_1 > 0$ e $r_2 < 0$ as duas raízes são negativas, então o ponto $(K_1, 0)$ é um atrator;
- 3) Se $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ ou $r_1 < 0$ e $r_2 < 0$ uma raiz é positiva e a outra negativa, portanto o ponto $(K_1, 0)$ é um ponto de sela, porém instável (Boyce & DiPrima, 1999).

❖ Estudo analítico em torno do ponto $(0, K_2)$

Substituindo $(C_0, M_0) = (0, K_2)$ no Sistema 2.18, temos

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = \frac{\partial f(0, K_2)}{\partial C} C + \frac{\partial f(0, K_2)}{\partial M} (M - K_2) \\ \frac{dM}{dt} = \frac{\partial g(0, K_2)}{\partial C} C + \frac{\partial g(0, K_2)}{\partial M} (M - K_2) \end{cases} . \quad (2.20)$$

Fazendo a mudança de variável $\hat{C} = C$ e $\hat{M} = M - K_2$ em 2.18, temos $\frac{d\hat{C}}{dt} = \frac{dC}{dt}$ e

$$\frac{d\hat{M}}{dt} = \frac{dM}{dt} . \text{ Assim,}$$

$$\begin{cases} \frac{d\hat{C}}{dt} = \frac{r_1}{K_1}(K_1 + \alpha K_2)\hat{C} \\ \frac{d\hat{M}}{dt} = r_2\beta\hat{C} - r_2\hat{M} \end{cases} .$$

Escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \hat{C}' \\ \hat{M}' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} r_1 + \frac{r_1\alpha K_2}{K_1} & 0 \\ \beta r_2 & -r_2 \end{pmatrix}}_{A_3} \begin{pmatrix} \hat{C} \\ \hat{M} \end{pmatrix} .$$

O polinômio característico associado à matriz A_3 tem como raízes $\frac{r_1(K_2\alpha + K_1)}{K_1}, -r_2$.

- 1) Se $r_1 < 0$ e $r_2 > 0$ as duas raízes reais são negativas, então o ponto $(0, K_2)$ é um atrator;
- 2) Se $r_1 > 0$ e $r_2 < 0$ as duas raízes são positivas, então o ponto $(K_1, 0)$ é um repulsor;
- 3) Se $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ ou $r_1 < 0$ e $r_2 < 0$ uma raiz é positiva e a outra negativa, portanto o ponto $(0, K_2)$ é um ponto de sela, porém instável (Boyce & DiPrima, 1999).

❖ **Estudo analítico em torno do ponto** $(C^*, M^*) = \left(\frac{K_1 + \alpha K_2}{1 - \alpha\beta}, \frac{K_2 + \beta K_1}{1 - \alpha\beta} \right)$

O Sistema 2.18 em torno do ponto (C^*, M^*) é da forma

$$\begin{cases} \frac{d\hat{C}}{dt} = \frac{\partial f(C^*, M^*)}{\partial C} \hat{C} + \frac{\partial f(C^*, M^*)}{\partial M} \hat{M} \\ \frac{d\hat{M}}{dt} = \frac{\partial g(C^*, M^*)}{\partial C} \hat{C} + \frac{\partial g(C^*, M^*)}{\partial M} \hat{M} \end{cases}, \quad (2.21)$$

onde $\hat{C} = C - C^*$ e $\hat{M} = M - M^*$. Substituindo as derivadas parciais das funções f e g em 2.21 e escrevendo na forma matricial, temos

$$\begin{pmatrix} \hat{C}' \\ \hat{M}' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\left(\frac{r_1(-K_1 + 2C^* - \alpha M^*)}{K_1} \right) & \frac{r_1\alpha}{K_1} C^* \\ \frac{r_2\beta}{K_2} M^* & \frac{r_2(K_2 - 2M^* + \beta C^*)}{K_2} \end{pmatrix}}_{A_4} \begin{pmatrix} \hat{C} \\ \hat{M} \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz A_4 são $\lambda_{1,2} = \frac{tr(A_4) \pm \sqrt{tr(A_4)^2 - 4\det(A_4)}}{2}$, onde

$$tr(A_4) = \frac{r_1 K_2 (K_1 + K_2 \alpha) + r_2 K_1 (K_2 + K_1 \beta)}{-K_1 K_2 (1 - \alpha\beta)} \quad \text{e} \quad \det(A_4) = \frac{r_1 r_2 (K_1 + \alpha K_2)(K_2 + \beta K_1)}{K_1 K_2 (1 - \alpha\beta)}.$$

Substituindo os valores de $tr(A_4)$ e $\det(A_4)$, temos

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\left(\frac{r_1 C^*}{K_1} + \frac{r_2 M^*}{K_2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{r_1 C^*}{K_1} + \frac{r_2 M^*}{K_2} \right)^2 - 4(1 - \alpha\beta) \frac{r_1 r_2 C^* M^*}{K_1 K_2}}}{2}.$$

Dependendo dos valores dos parâmetros r_1 e r_2 , o ponto de equilíbrio (C^*, M^*) pode ser um nó atrator ou uma sela ou um repulsor.

3 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo, são realizadas algumas simulações numéricas sobre o crescimento populacional dos Muriquis, da Mata Atlântica e a interação entre eles. Iniciamos com o modelo logístico de Verhulst com a finalidade de obter um valor aproximado dos parâmetros envolvidos, tomando como base os dados estatísticos encontrados na literatura (TALEBI, 2005; RIBEIRO, 2010, entre outros). Através do modelo de Gordon-Schaefer, é simulada a caça (ou desaparecimento) dos Muriquis. Finalmente, realizamos algumas simulações numéricas para o mutualismo existente entre os Muriquis e as espécies de plantas da Mata Atlântica através do modelo de May, ajustando os parâmetros envolvidos, variando os limites de sustentabilidade, tal que a solução fique coerente com os dados reais. A escolha dos parâmetros foi realizada pensando na influência que o ser humano exerce sobre as espécies. Para a obtenção de mais dados, alguns valores são interpolados. Além disso, o *software* MAPLE é utilizado como ferramenta auxiliar para a realização das simulações e gerar os gráficos.

3.1 Modelo de Verhulst e Muriquis

Acrescentando ao modelo de Verhulst (Equação 2.7) a condição inicial $C(0) = C_0$, $C_0 > 0$, temos o problema de valor inicial (3.1) :

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = rC \left(1 - \frac{C}{K} \right) \\ C(0) = C_0 \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde C_0 e C representam, respectivamente, a população inicial e a população do macaco Muriqui (Mono Carvoeiro); K é o limite máximo de sustentabilidade e r é o parâmetro associado à taxa de crescimento/decrescimento populacional.

A solução da Equação 3.1 é da forma

$$C(t) = \frac{K C_0}{(K - C_0)e^{-rt} + C_0}. \quad (3.2)$$

Para determinar os valores dos parâmetros K e r , inicialmente recorreremos aos dados encontrados sobre a população dos muriquis no Brasil (AGUIRRE, 1971; STRIER e FONSECA, 1998, entre outros), os quais são exibidos na Tabela 2.

Tabela 2: Dados estatísticos obtidos na bibliografia pesquisada

| Ano | 1500 | 1900 | 1971 | 1994 | 1998 | 2003 | 2007 | 2009 | 2015 |
|------------------------------------|------------|------------|------|------|------|------|------|------|------|
| Número aprox. de muriquis | 400 mil | 100 mil | 3000 | 2000 | 1158 | 1200 | 1707 | 2200 | 2300 |

Fonte: a autora, 2016

Como se pode observar na Tabela 2, os dados do ano 1500 e 1900 são vagas estimativas dadas pelos pesquisadores. Inclusive, em 1960 se pensava que os Muriquis estavam extintos, mas em 1970 foram avistados alguns Muriquis e em 1971 estimaram 3000 indivíduos.

Tendo como base esses dados, é determinado o polinômio interpolador¹⁰ para estimar o tamanho desconhecido da população dos Muriquis nos outros anos.

O polinômio que passa pelos dados tabelados existe e é único e para determiná-lo há várias formas. Neste trabalho, utilizamos a forma de Lagrange.

Na forma de Lagrange o polinômio interpolador é dado por:

$$p_n(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + \dots + L_n(x)y_n, \quad (3.3)$$

onde cada $L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)(x_k-x_2)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$ é um polinômio

de grau menor ou igual a n , para $k = 0, \dots, n$. Considerando a Tabela 3,

Tabela 3

| k | $x[k]$ | y_k |
|-----|--------|-------|
| 0 | 1971 | 3000 |
| 1 | 1980* | 2350 |
| 3 | 1998 | 1158 |
| 4 | 2003 | 1300 |
| 5 | 2009 | 2200 |

Fonte: a autora, 2016

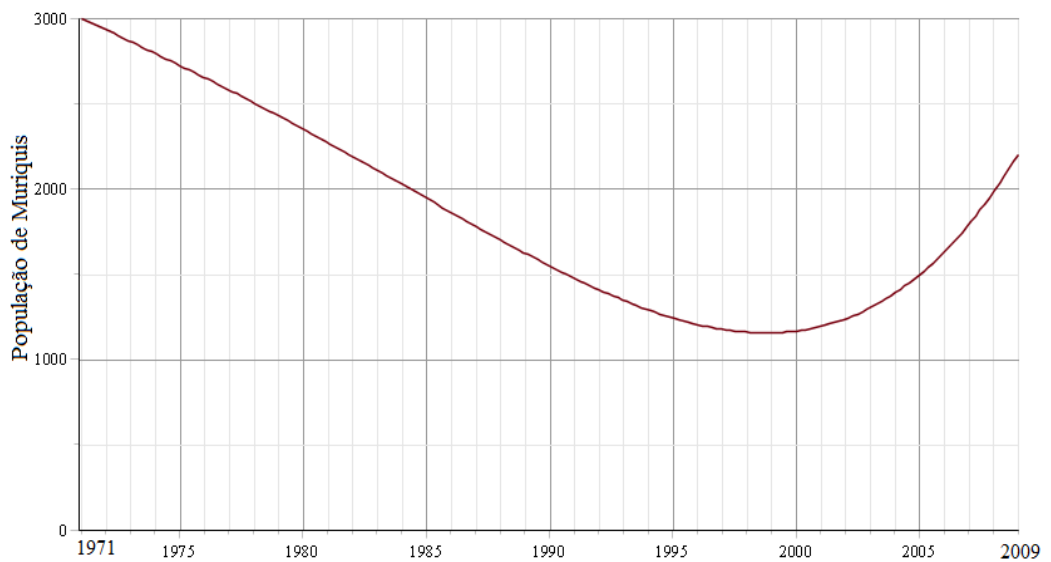
¹⁰ Interpolare é uma forma de estimar um valor desconhecido a partir de um conjunto de pontos tabelados. A interpolação polinomial consiste em determinar um polinômio $p(x)$ que passe pelos pontos tabelados.

é obtido o polinômio interpolador (Figura 15)

$$P(x) = 0.01015269655 (x - 1980) (x - 1998) (x - 2003) (x - 2009) - 0.02174838507 (x - 1971)(x - 1998)(x - 2003)(x - 2009) + 0.04332210999 (x - 1971)(x - 1980) (x - 2003)(x - 2009) - 0.05887681159 (x - 1971)(x - 1980)(x - 1998)(x - 2009) + 0.03024803388(x - 1971)(x - 1980)(x - 1998)(x - 2003)$$

Obs. O dado correspondente ao ano de 1980 foi estimado. Ele teve que ser inserido pois, caso contrário, a resposta seria contraditória, ou seja, haveria um crescimento entre 1971 e 1994 que não ocorreu.

Figura 15: Polinômio Interpolador



Fonte: a autora, 2016

Do polinômio interpolador $P(x)$, obtemos os seguintes dados da Tabela 4.

Tabela 4: Dados interpolados e dados obtidos na bibliografia pesquisada

| ano | 1971 | 1972 | 1975 | 1980 | 1990 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2005 | 2009 |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Popu- - lação | 3000 | 2931 | 2722 | 2350 | 1546 | 1158 | 1155 | 1164 | 1192 | 1236 | 1300 | 1494 | 2200 |

Fonte: a autora, 2016

Obs. Os dados que estão marcados em cinza são os dados obtidos na bibliografia pesquisada. Os outros foram interpolados.

Como se pode observar nas tabelas 3 e 4 (dados reais e interpolados), a população dos Muriquis entre 1971 a 1999 foi decrescendo, mas após cuidados dos ambientalistas e da lei de proteção à Mata (Decreto nº 6660/2008) esta população está aumentando. Algumas organizações iniciaram projetos a favor da preservação dos Muriquis. Dentre elas, podemos citar a Estação Biológica de Caratinga, MG, em 2003; a Reserva Feliciano Miguel Abdala, MG, em 2002; e a TEREVIVA, em conjunto com o IBAMA, RJ, em 2002.

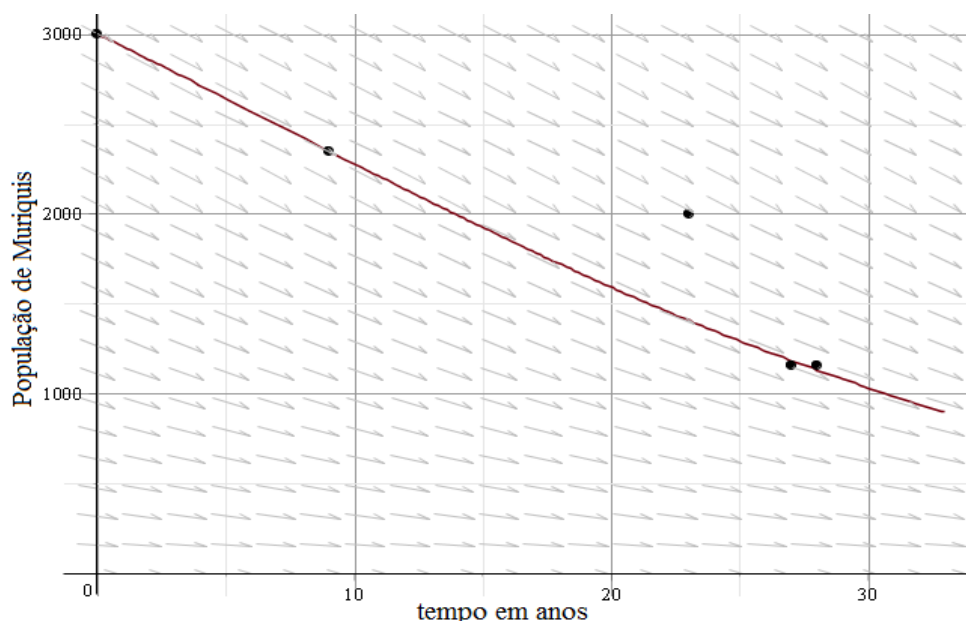
A fim de obter um valor aproximado dos parâmetros envolvidos na Equação 3.2, utilizamos os dados da tabela a partir de 1971. Em seguida, foram determinados dois valores para o parâmetro r , um entre 1971-1999 (decréscimo populacional) e outro de 2000 a 2015 (aumento populacional).

- ❖ Decréscimo populacional ocorrido entre 1971-1999: se espera que o valor do parâmetro r seja negativo.

Identificando $t = 0$ com o ano 1971, $t = 1$ com 1972 e assim por diante, temos $t = 28$ para o ano 1999. Substituindo na Equação (3.2) o valor $C(0) = 3000$ e $C(9) = 2350$, obtemos o valor de $r = -0,0584$. No gráfico da Figura 16, dá para visualizar a solução do PVI, Equação 3.2, e os pontos tabelados. Portanto, conclui-se que é um valor aceitável para o parâmetro r .

Sendo K o limite máximo de sustentabilidade e considerando a fragmentação da Mata Atlântica, o crescimento urbano, entre outros, foi suposto que o limite de sustentabilidade seja $K=5000$ muriquis.

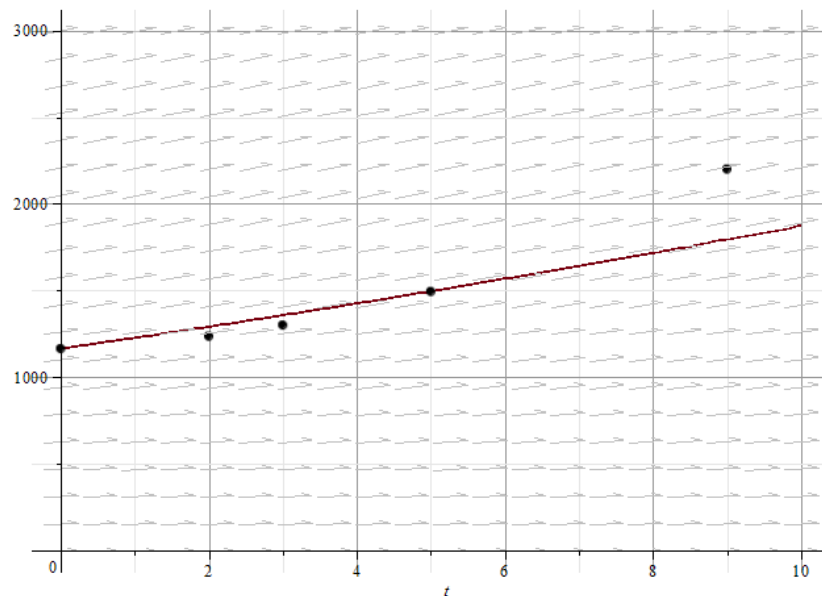
Figura 16: Decréscimo populacional $r = -0.0584$ e Solução do PVI (Eq.3.2) e dados tabelados.



- ❖ Crescimento populacional ocorrido entre 2000- 2009, se espera que o valor do parâmetro r seja positivo.

Identificando $t = 0$ com o ano 2000, $t = 1$ com 2001 e assim por diante, temos $t = 9$ para o ano 2009. Substituindo na Equação 3.2 o valor $C(0)=1164$ e $C(5)=1494$, obtemos o valor de $r = 0,068$. Na Figura 17, dá para visualizar a solução do PVI , Equação 3.2, e os pontos tabelados. Neste caso, o parâmetro utilizado não acompanha a população em 2009.

Figura 17: Crescimento populacional $r = 0.068$ e Solução do PVI (3.2) com os dados tabelados.



Fonte: a autora, 2016

3.2 Modelo de Gordon-Schaefer e Muriquis

O modelo de Gordon Schaefer, com a condição inicial $C(0) = C_o$ gera o problema de valor inicial

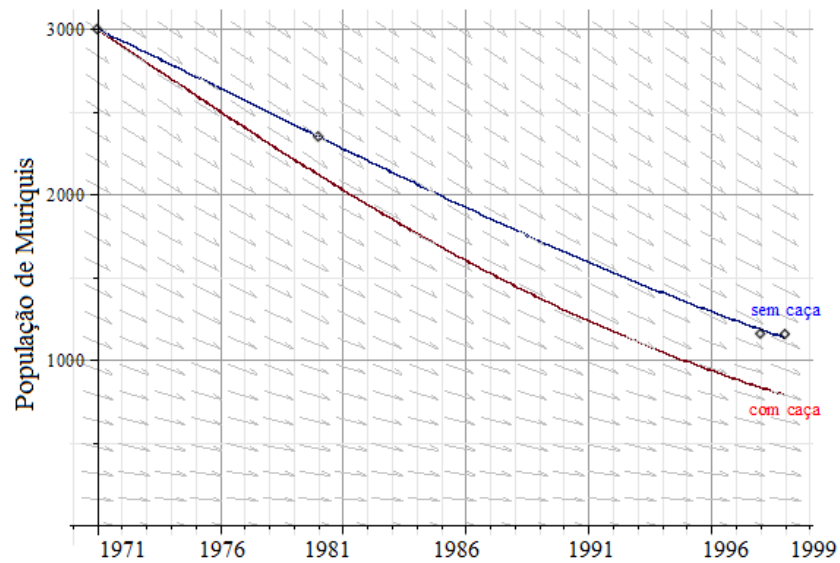
$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = rC \left(1 - \frac{C}{K}\right) - \mu C \\ C(0) = C_o \end{cases}, \quad (3.4)$$

cuja solução é da forma

$$C(t) = \frac{(r - \mu)K C_o}{(rK - \mu K - rC_o)e^{-(r-\mu)t} + rC_o}, \quad (3.5)$$

onde μ representa a caça indevida. Supondo que $\mu = 0.01$, $r = -0,0584$, $K = 5000$ e comparando com a solução de Verhulst temos a Figura 18.

Figura 18



Fonte: a autora, 2016

Este gráfico mostra que a população decresceria muito mais com a caça.

3.3 Modelo de Verhulst e Mata Atlântica

Nesta seção, vamos adaptar o modelo de Verhulst à Mata Atlântica.

O modelo de Verhulst (Equação 2.7) com a condição inicial $M(0) = M_o$ dá o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = rM \left(1 - \frac{M}{K} \right) \\ M(0) = M_o \end{cases}, \quad (3.6)$$

onde M_o e M representam, respectivamente, a população inicial e a população das espécies de plantas da Mata Atlântica; K é o limite máximo de sustentabilidade e r o parâmetro associado a taxa de crescimento ou decrescimento.

A solução da Equação 3.6 é da forma

$$M(t) = \frac{K M_o}{(K - M_o)e^{-rt} + M_o}. \quad (3.7)$$

No ano 1500 se estima que a Mata Atlântica abrangia aproximadamente 15% do território nacional (RIBEIRO, 2010) e em 1990 apenas 1,2% do território nacional, isto é, 102189,2046 km²¹¹. De acordo com esses dados, obtemos a Tabela 5.

Tabela 5: Dados encontrados

| Ano | 1500 | 1990 |
|-------------------------------|-----------|-------------|
| Área (em Km ²) | 1.306.421 | 102.189,205 |

Fonte: a autora, 2016

A Fundação SOS Mata Atlântica e o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) divulgaram dados sobre o desmatamento da Mata Atlântica no ano 2013 e a cada ano os dados são atualizados (Tabela 6).

Tabela 6 : Dados obtidos do site SOSMA e áreas aproximadas

| ANO | AREA | Área desmatada |
|-------------|-------------------|----------------|
| 1970 | 13000* | |
| 1975 | 12000* | |
| 1980 | 112000* | |
| 1985 | 107554,095 | 5364,8 |
| 1990 | 102189,295 | 5003,17 |
| 1995 | 97186,0346 | 4459,52 |
| 2000 | 92726,5146 | 1748,28 |
| 2005 | 90978,235 | 1029,38 |
| 2008 | 89948,855 | 303,66 |
| 2010 | 89645,195 | 140,90 |
| 2011 | 89504,295 | 219,77 |
| 2012 | 89284,525 | 239,48 |
| 2013 | 89045,0446 | 182,67 |
| 2014 | 88862,3746 | 184,33 |
| 2015 | 88700 | 162 |

(*)Valores supostos, intuídos pelo desmatamento desmedido.

Fonte: a autora, 2016

¹¹ Extraído de https://pt.wikipedia.org/wiki/Mata_Atlântica em maio/2016

Considerando a fragmentação da Mata Atlântica, o desmatamento excessivo antes de 1975, o crescimento urbano, entre outros, foi suposto que o limite de sustentabilidade seja $K = 150$ mil quilômetros quadrados.

A exploração madeireira da Mata Atlântica teve importância econômica nacional até muito recentemente. Segundo dados do IBGE, em meados de 1970, a Mata Atlântica ainda contribuía com 47% de toda a produção de madeira em tora no país, num total de 15 milhões de metros cúbicos — produção drasticamente reduzida para menos da metade (7,9 milhões) em 1988 devido ao esgotamento dos recursos ocasionado pela exploração não-sustentável.¹²

Considerando os dados da Tabela 7,

Tabela 7

| Ano | 1500 | 1970 | 1975 | 1980 | 1985 | 1990 | 1995 | 2000 | 2005 | 2008 | 2010 |
|--|--------|------|------|------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Km² em milha res | 1306,4 | 130* | 120* | 112* | 107,55 | 102,19 | 97,17 | 92,73 | 90,98 | 89,95 | 89,65 |

Fonte: a autora, 2016

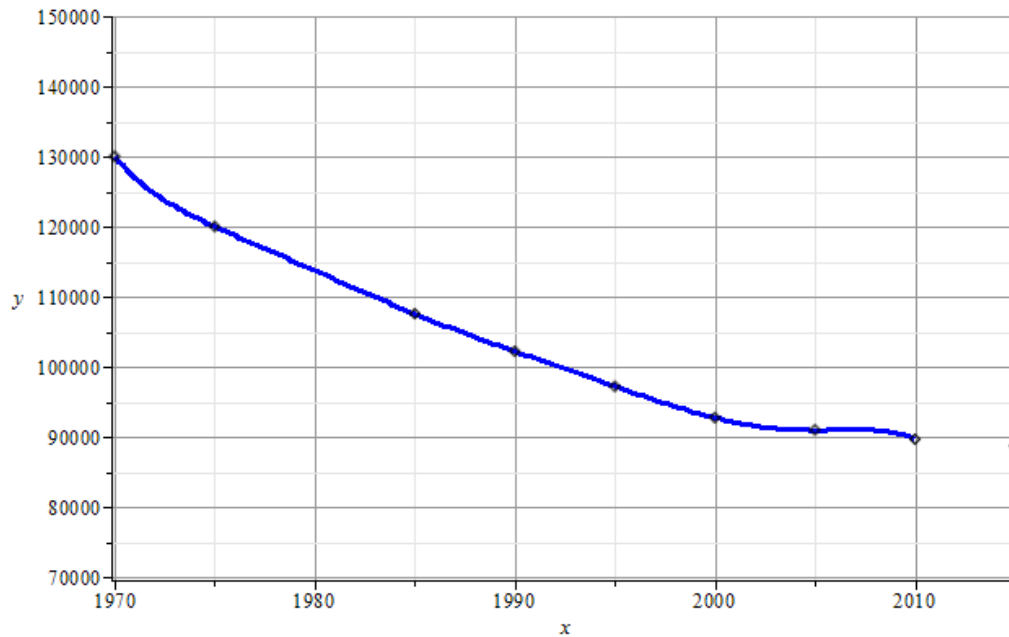
obtemos o polinômio interpolador

$$\begin{aligned}
 P(x) = & -0.00008253968255(x - 1975)(x - 1985)(x - 1990)(x - 1995)(x - 2000)(x - 2005) \\
 & (x - 2010) + 0.0003047619047(x - 1970)(x - 1985)(x - 1990)(x - 1995)(x - 2000) \\
 & (x - 2005)(x - 2010) - 0.001912071111(x - 1975)(x - 1970)(x - 1990)(x - 1995) \\
 & (x - 2000)(x - 2005)(x - 2010) + 0.004541777777(x - 1975)(x - 1970)(x - 1985) \\
 & (x - 1995)(x - 2000)(x - 2005)(x - 2010) - 0.005183253333(x - 1975)(x - 1970) \\
 & (x - 1985)(x - 1990)(x - 2000)(x - 2005)(x - 2010) + 0.003296924445(x - 1975) \\
 & (x - 1970)(x - 1985)(x - 1990)(x - 1995)(x - 2005)(x - 2010) - 0.001155276191 \\
 & (x - 1975)(x - 1970)(x - 1985)(x - 1990)(x - 2000)(x - 1995)(x - 2010) + \\
 & 0.0001707523810(x - 1975)(x - 1970)(x - 1985)(x - 1990)(x - 2000)(x - 1995) \\
 & (x - 2005)
 \end{aligned}$$

O gráfico do polinômio $P(x)$ é mostrado na Figura 19.

¹² Extraído de <http://www.educacional.com.br/reportagens/mataatlantica/default.asp>

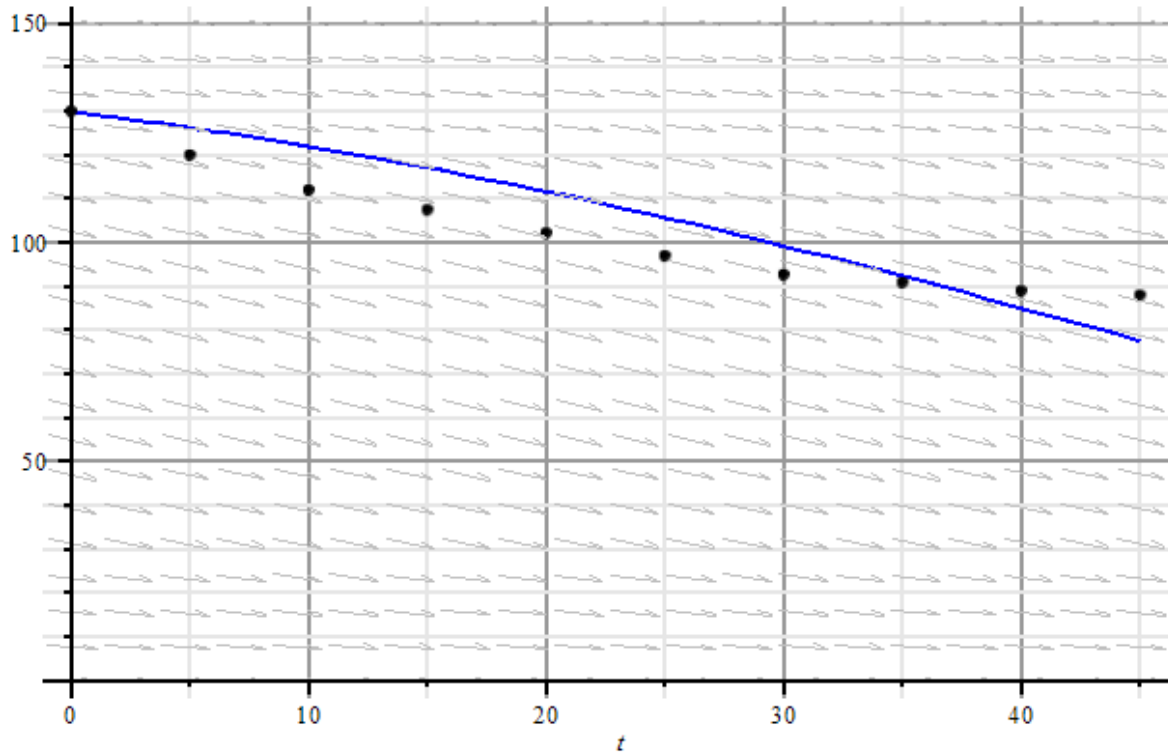
Figura 19: Polinômio interpolador e pontos tabelados



Fonte: a autora, 2016

O decréscimo da Mata Atlântica é evidente. Para determinar o parâmetro associado à taxa de decréscimo, identificamos $t = 0$ com o ano 1970, $t = 1$ com 1971 e assim por diante, temos $t = 30$ para o ano 2000 e $t = 40$ para 2010. Substituindo, na Equação 3.7, o valor $M(0) = 130$ mil km^2 e $C(20)=102,19$, obtemos o valor de $r = -0,0556$. No entanto, comparando graficamente a solução de Verhulst e os dados tabelados, foi observado que $r = -0,4$ se ajusta melhor. Na Figura 20, dá para visualizar a solução do PVI, Equação 3.7, e os pontos tabelados. Portanto, conclui-se que é um valor aceitável para o parâmetro r .

Figura 20: Modelo de Verhulst e dados tabelados



Fonte: a autora, 2016

3.4 Mutualismo entre Muriquis e a Mata Atlântica

Nesta seção, adaptamos o modelo de May (Equação 2.11) para tentar descrever a coexistência entre os Mono Carvoeiros e a Mata Atlântica.

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = \frac{r_1}{K_1} C(K_1 - C + \alpha M) \\ \frac{dM}{dt} = \frac{r_2}{K_2} M(K_2 + \beta C - M) \end{cases}, \quad (3.8)$$

onde K_1 , K_2 , α e β são constantes positivas;

C : representa a quantidade de Muriquis (macaco Mono Carvoeiro);

M : extensão da Mata Atlântica em quilômetros quadrados;

K_1, K_2 : representam os limites de capacidade de suporte para ambas as espécies;

r_1, r_2 : representam as taxas associadas ao crescimento/decrescimento natural das espécies;

α : representa o incremento diferencial de C na presença de M (reprodução, alimento);

β : representa o incremento diferencial de M na presença de C , sendo C o dispersor de sementes em M .

- Se $\alpha = 0$, poderíamos afirmar que o crescimento da população dos Muriquis cresce de acordo com o modelo de Verhulst, o que não é verdade! Pois, com a Mata fragmentada, sua população é limitada e, sem a Mata, eles vão se extinguindo.
- Se $\beta = 0$, muitas plantas típicas da Mata desaparecem, pois, segundo Bueno (2010), a extinção desse megafrugívoro pode afetar negativamente o recrutamento de diversas espécies de plantas, especialmente aquelas com sementes grandes que ocorrem na Mata Atlântica (como a *Sapotaceae* e a *Chrysobalanaceae*) que possuem o Muriqui como um dos seus últimos dispersores de sementes.

Se $1 - \alpha\beta > 0$, o Sistema 3.8 admite quatro pontos de equilíbrio no primeiro quadrante:

$$\{(0, 0), (K_1, 0), (0, K_2), (C^*, M^*)\},$$

$$\text{onde } (C^*, M^*) = \left(\frac{K_1 + \alpha K_2}{1 - \alpha\beta}, \frac{K_2 + \beta K_1}{1 - \alpha\beta} \right).$$

Segundo as pesquisas de Bueno (2010), os Muriquis dispersaram pelo menos 918 sementes por mês e além disso esta espécie é endêmica da Mata Atlântica. Portanto, existe um mutualismo do tipo facultativo entre eles, pois as espécies de plantas da Mata são favorecidas e os Muriquis se sentem protegidos nesse habitat (sem incluir os pequenos fragmentos).

Na seção 3.1 e 3.3, foram obtidos valores para os parâmetros r_1, r_2, K_1 e K_2 , mas ao confrontar os dados obtidos com os resultados numéricos foram estimados novos valores para estes parâmetros. Os parâmetros α e β são valores aproximados, baseados nos exemplos apresentados por Algarra (2012) e nos dados reais encontrados na literatura. Reunindo os dados, obtemos a Tabela 8.

Tabela 8

| Ano | 1970 | 1975 | 1980 | 1985 | 1990 | 1995 | 2000 | 2005 | 2009 |
|-------------------------------|---------|--------|--------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|
| Carvoeiros | 3000 | 2722 | 2350 | 1945 | 1546 | 1242 | 1164 | 1494 | 2200 |
| Km² de Mata | 130.000 | 120000 | 112000 | 107.554 | 102.189 | 97.186 | 92.727 | 90.978 | 90.589 |

Fonte: a autora, 2016

Nessa Tabela 8, observa-se que tanto a Mata como os Carvoeiros estão decrescendo entre 1970-1999. Depois os Muriquis aumentam muito pouco.

São realizadas 3 iterações:

- a primeira para os anos 1970-1999. Neste caso, r_1, r_2 são negativos e são considerados $K_1 = 5000$ e $K_2 = 150000$ (Figura 21) ;
- a segunda para os anos 2000-2015. Neste caso, r_1 é positivo e r_2 é negativo. As estimativas para K_1 e K_2 são diminuídas devido aos problemas ecológicos (Figura 22);
- a terceira para os anos 2000-2015, supondo que r_1, r_2 são positivos. Embora existam leis de preservação da Mata, criação de corredores etc, a Mata não aumenta significativamente (Figura 23).

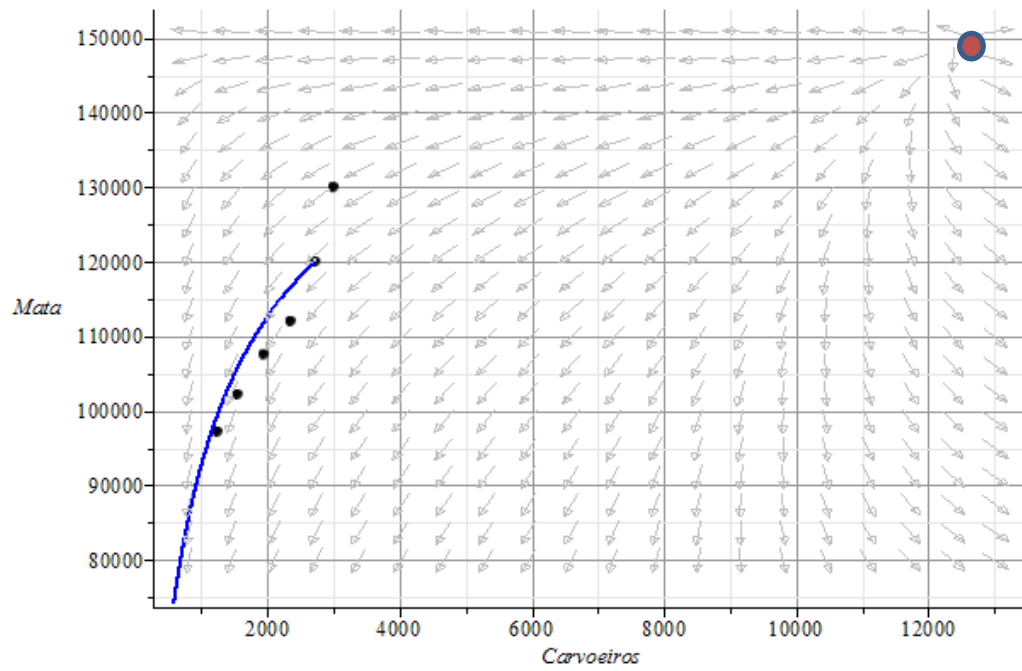
Nas simulações são considerados os valores que constam na Tabela 9.

Tabela 9

| <i>Dados</i> | r_1 | K_1 | r_2 | K_2 | α | β | $1 - \alpha \beta > 0$ |
|-----------------------------|-------|-------|---------|---------|----------|---------|------------------------|
| 1ª simulação (1970-1999) | -0,03 | 5000 | -0,047 | 150.000 | 0,05 | 0,001 | 0,999 |
| 2ª simulação (2000-2015) | 0,001 | 3000 | -0,0015 | 100000 | 0,05 | 0,001 | 0,999 |
| 3ª simulação (2000-2015) | 0,02 | 3000 | 0,047 | 100000 | 0,05 | 0,001 | 0,999 |

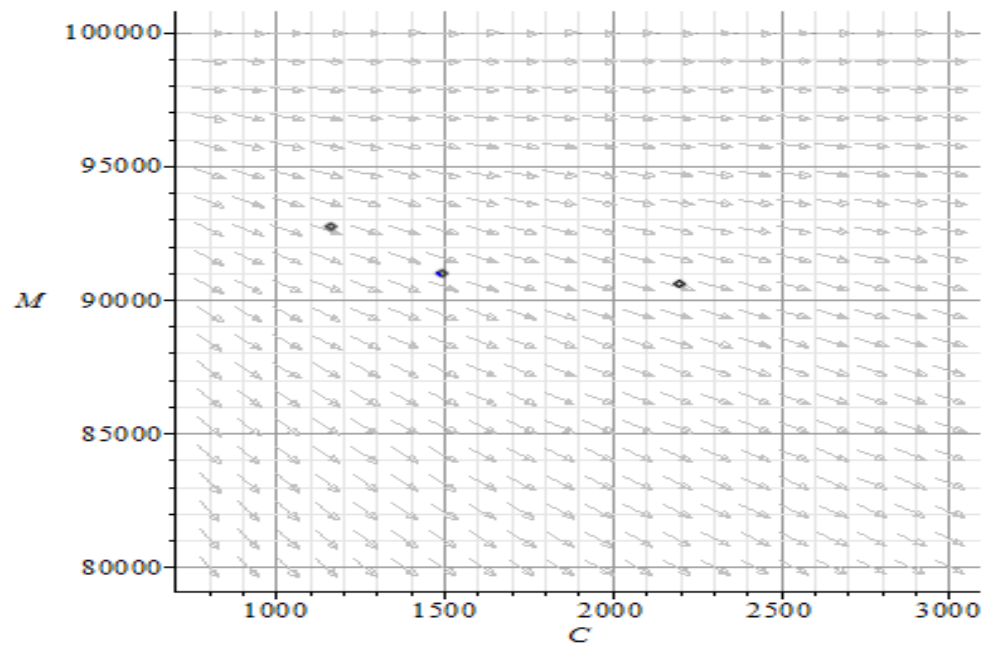
Fonte: a autora, 2016

Figura 21: Gráfico da primeira simulação de mutualismo. O ponto crítico (C^*, M^*) é um repulsor.



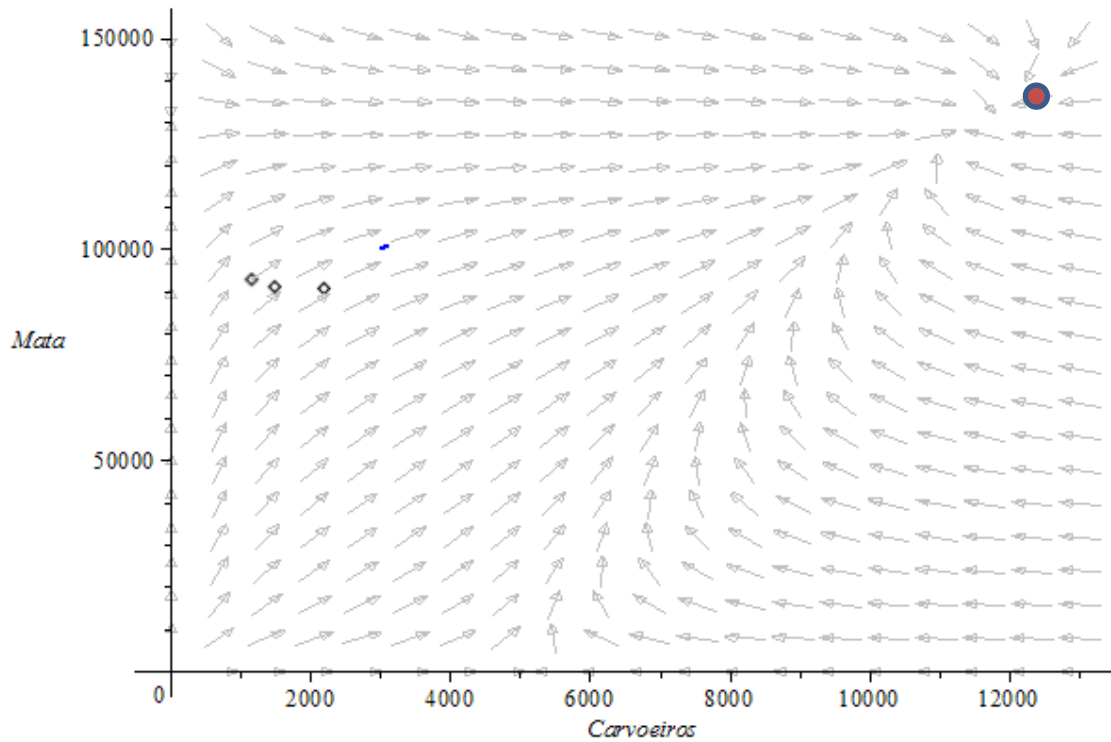
Fonte: a autora, 2016

Figura 22: Gráfico da segunda simulação de mutualismo. O ponto crítico (C^*, M^*) é um ponto de sela.



Fonte: a autora, 2016

Figura 23: Gráfico da terceira simulação de mutualismo. O ponto crítico (C^*, M^*) é um atrator.



Fonte: a autora, 2016

A Figura 22 mostra um resultado contraditório com os dados pontuais, pois o crescimento da Mata Atlântica é irrisório.

Assim, os dados estatísticos encontrados são verificados através do modelo matemático de May para mutualismo mostrando que os Muriquis estão ameaçados de extinção e esta extinção está estreitamente ligada ao desmatamento (conseqüentemente, à fragmentação) da Mata Atlântica, conforme podemos observar na Figura 21, onde tanto a extensão da Mata quanto à população dos Muriquis diminuem simultaneamente. Graças aos corredores e as atividades dos ambientalistas (proteção) esta espécie aumentou um pouco a partir do ano 2000 (Figura 22). Porém, não o suficiente para retirá-la da lista do Livro Vermelho da Fauna Brasileira Ameaçada de Extinção.

4 ATIVIDADES EM SALA DE AULA

Neste capítulo é apresentado o relato das atividades aplicadas em sala de aula, utilizadas como motivação para o estudo da Matemática, trabalhando a multidisciplinaridade.

Com o intuito de informar os alunos (que serão futuros profissionais e divulgadores dos conhecimentos assimilados) da ameaça de extinção, não apenas do macaco Muriqui, mas também de outras espécies da fauna brasileira, bem como promover a integração do estudante com a finalidade de contribuir diretamente ou indiretamente com a preservação da Mata Atlântica (além de enriquecer seu vocabulário), neste capítulo são apresentadas atividades envolvendo a flora e fauna brasileiras, em especial o macaco Muriqui e a Mata Atlântica.

O público alvo foram os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal Menezes Côrtes, situada no Rio de Janeiro. Foram aplicadas 4 atividades, em 3 dias: um *quiz* contendo figuras de bichos da fauna brasileira, uma pesquisa sobre o macaco Muriqui, um debate sobre o tema pesquisado seguido de um questionário e um teste elaborado com questões envolvendo o conteúdo matemático do 7º ano, a Mata Atlântica e o macaco Muriqui. Os tempos disponíveis para a realização das atividades foram: no 1º dia, o *quiz* foi aplicado, em 1 tempo de aula de 50 minutos; no 2º dia, foi realizado o debate e, em seguida, o questionário, em 2 tempos de aula de 50 minutos cada; e no 3º dia, foi aplicado o teste, em grupos de 4 alunos, em 2 tempos de aula de 50 minutos cada. Essas atividades encontram-se no ANEXO A.

4.1 Primeira Atividade: Conhecendo a Flora e a Fauna

Esta primeira atividade é baseada em um teste proposto pela programação da Rede Record do dia 27/09/2010, chamado de *quiz*.

Objetivo: Fazer um levantamento do nível de conhecimento desses alunos sobre a fauna brasileira e trazer informações sobre os dez animais citados no *quiz*.

Duração: 30 minutos.

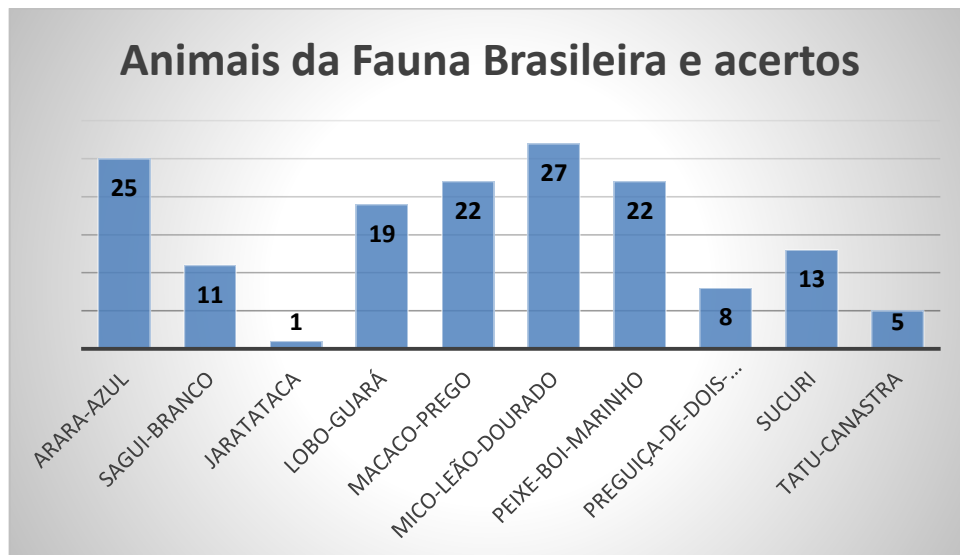
Data da aplicação: 10/05/2016

Com o auxílio de um *notebook* e de um *data show*, foram apresentadas as fotografias de dez animais típicos do Brasil, mencionados no teste do *quiz*. A fim de que fosse possível marcar as suas opções, cada um dos 29 alunos participantes recebeu uma folha contendo fotografias de dez espécies em perigo de extinção da fauna brasileira.

No *quiz*, cada imagem é acompanhada com três opções (ANEXO A). Após mostrar cada fotografia, é feita a pergunta: “Você sabe como eles se chamam?” . Em seguida, é apresentada a resposta correta conjuntamente com uma breve explanação sobre a espécie. Por exemplo, o animal da questão (1) é uma arara-azul, nativa da floresta amazônica, do cerrado e, também, do pantanal. Está em risco de extinção devido à caça ilegal e condições desfavoráveis de seu habitat natural.

Após a correção, na qual foi realizada a leitura sobre cada animal, constatou-se que o mico-leão-dourado foi o animal mais reconhecido, com aproximadamente 93% de acerto, seguido da arara-azul, com 86%; e o animal menos conhecido foi a jaratataca, com apenas 3,5% de acertos, seguido do tatu-canastra, com 17%, conforme mostra o Gráfico 1.

Gráfico 1



Fonte: a autora, 2016

Esta atividade funcionou como um jogo, causando grande euforia, pois os estudantes fizeram uma competição para ver quem acertava o maior número de respostas possíveis.

4.2 Segunda Atividade: Aprendendo a Pesquisar

Objetivo: Pesquisar sobre o macaco Muriqui. Incentivar a leitura.

Duração: Não foi dimensionada. Tarefa para casa.

Data: 11/05/2016

A proposta dessa atividade foi fazer com que os alunos adquirissem o maior conhecimento possível sobre o Muriqui, principalmente, o problema da ameaça de extinção, a

fim de que pudéssemos fazer um debate sobre o assunto. Outra finalidade, foi estimular o aluno à prática de pesquisa propriamente dita.

Os 29 participantes trouxeram as pesquisas obtidas de sites da internet. Os assuntos foram diversificados: uns focaram nas características físicas do macaco Muriqui; alguns, no comportamento e na alimentação; e outros, no problema da extinção. Isso possibilitou realizar um debate interessante, no qual cada aluno fez a leitura do texto pesquisado.

4.3 Terceira Atividade: Debate e Questionário

Objetivo: Debater sobre o tema, em foco, em sala de aula e aplicar o questionário a fim de que fosse avaliado o quanto o assunto foi apreendido.

Duração: 25 minutos para o debate e 40 minutos para o questionário.

Data da aplicação: 17/05/2016

O propósito do debate foi despertar o interesse dos alunos e sensibilizá-los para o problema da fauna e flora brasileiras, com destaque para o macaco Muriqui e a Mata Atlântica, além de conscientizá-los da importância da contribuição de cada um para a melhoria do planeta.

Já o questionário, teve o objetivo de fixar o conhecimento e analisar o quanto o aluno conseguiu assimilar o tema proposto.

Nesse dia, compareceram 28 estudantes.

Entre os assuntos abordados no questionário, foi solicitado que se fizesse a relação entre o macaco Muriqui e a Mata Atlântica (ver questionário no ANEXO A). Algumas respostas interessantes foram dadas, destacando-se o fato de o Muriqui ser um dispersor de sementes, como podemos constatar nos exemplos: “ Eu acho que ele é importante por causa que ele é o maior macaco da América do Sul, e ele come frutas e quando ele faz suas fezes ele solta sementes dessa fruta para criar árvores no solo” e “ Como o macaco Muriqui é peludo, quando ele passa pela mata ele espalha sementes que ajudam no reflorestamento”.

Em outra questão, foi solicitada a opinião do aluno sobre o que podemos fazer para salvar não só o Muriqui, mas também outras espécies que estão em perigo de extinção. Novamente, algumas respostas interessantes foram dadas, dentre elas podemos citar: “Parar com a caça, o tráfico ilegal de animais, com o desmatamento, com as queimadas etc” , “Plantar mais árvores, investir na segurança” e “Talvez abrir uma campanha, assim eles podem ver a dor que os animais sentem”.

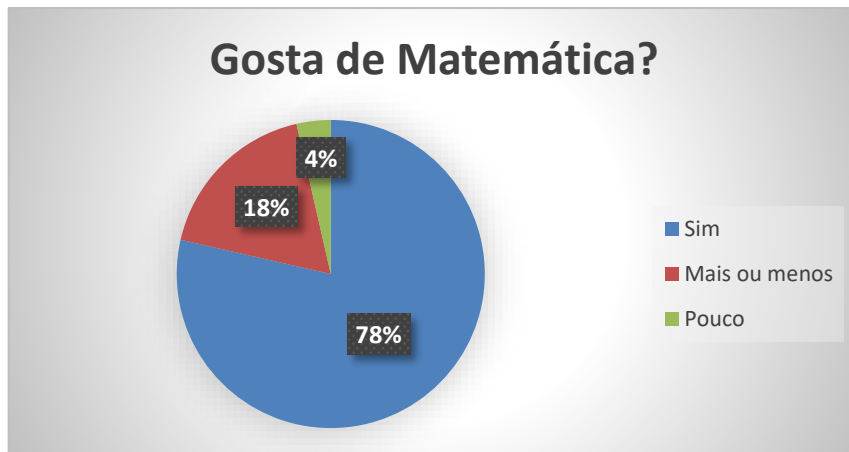
4.3.1 Análise das respostas do Questionário da 3ª Atividade

Nesta seção, foi realizada a análise das respostas dadas ao questionário aplicado na 3ª atividade, que se encontra no ANEXO A.

QUESTÃO 1) Você gosta de Matemática? Justifique a sua resposta.

De acordo com o Gráfico 2, a maioria da turma gosta de Matemática!

Gráfico 2



Fonte: a autora, 2016

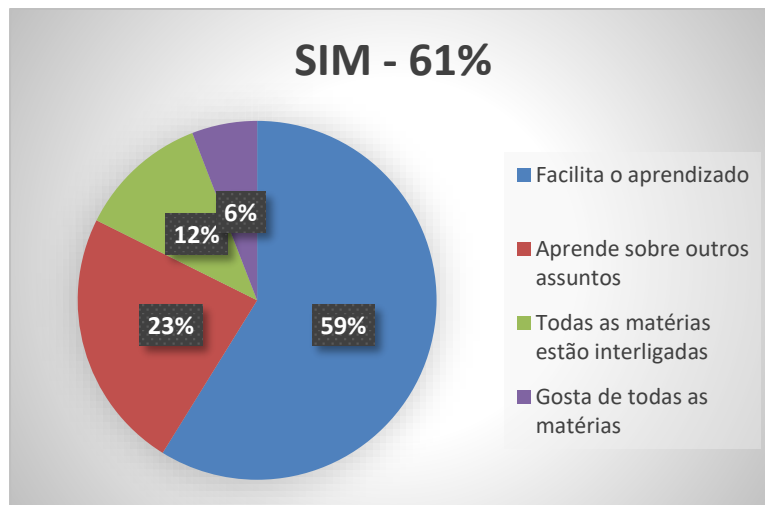
Dentre os que responderam sim: 50% disseram que sentem admiração pela Matemática; 32% veem como utilidade no futuro; 14% veem como utilidade no presente e 4% disseram que sem Matemática não haveria dinheiro. Dos que responderam mais ou menos: 60% disseram que depende da professora; 20%, porque sentem dificuldade e 20%, sem razão. E dos que responderam pouco, 100% disseram que é porque acham algumas partes da matéria difíceis.

QUESTÃO 2) Você acha interessante misturar assuntos de outras disciplinas, tais como Ciências, Geografia e História, juntamente com os conteúdos de Matemática? Por quê?

Dentre os 61% que responderam sim (Gráfico 3), 59% disseram que acham interessante fazer a interdisciplinaridade porque facilita o aprendizado; 23% disseram que aprendem sobre outros assuntos; 12% acham que todas as matérias estão interligadas e 6%, porque gostam de todas as matérias.

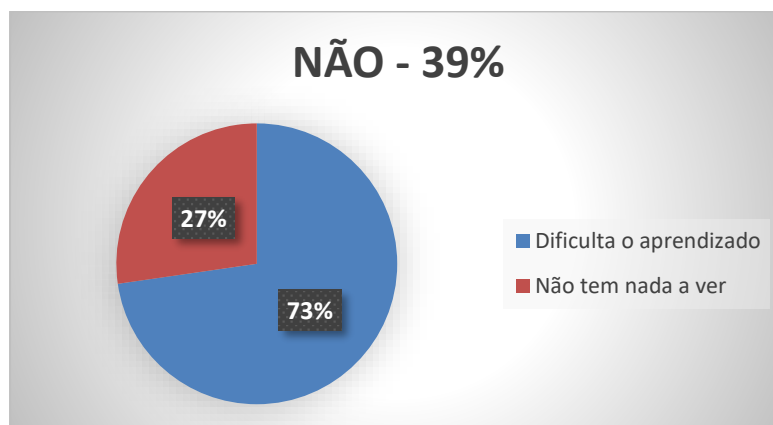
Dos que responderam não (Gráfico 4), 73% não acham a interdisciplinaridade interessante porque sentem mais dificuldade no aprendizado e 39% porque acham que uma matéria não tem nada a ver com a outra!

Gráfico 3



Fonte: a autora, 2016

Gráfico 4



Fonte: a autora, 2016

QUESTÃO 3) “Biodiversidade é a variedade de animais e plantas presentes na natureza”. Você sabia que o Brasil detém a maior biodiversidade do planeta, abrigando entre 15% a 20% de todas as espécies conhecidas no mundo?

Dos 28 alunos presentes, a maioria sabia que o Brasil possui a maior biodiversidade da Terra e apenas uma minoria desconhecia esse fato (Tabela 10).

Tabela 10

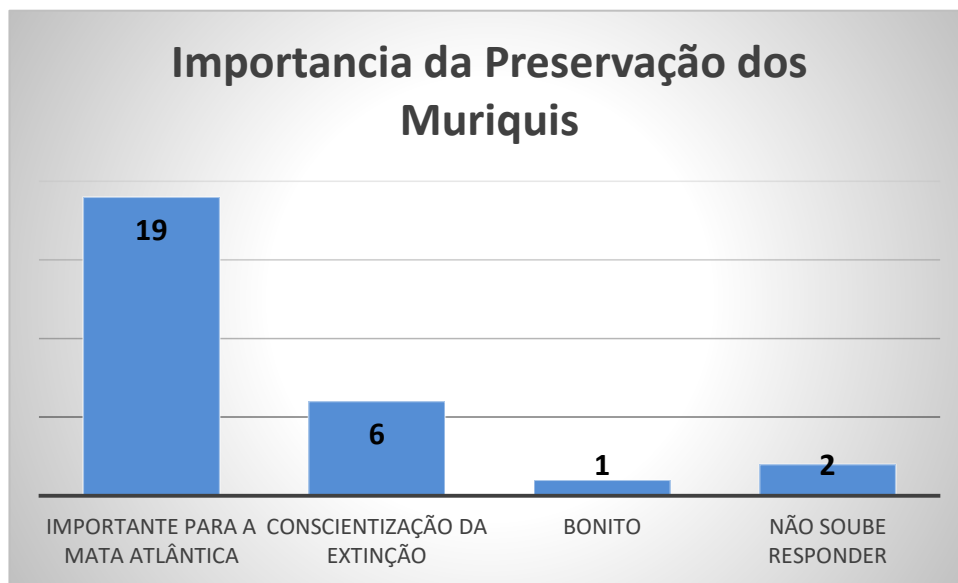
| | |
|-----|----|
| SIM | 21 |
| NÃO | 7 |

Fonte: a autora, 2016

QUESTÃO 4) Qual a importância da preservação do macaco Muriqui?

Dezenove alunos, ou seja, 68% dos que estavam presentes, responderam que a preservação do macaco Muriqui é importante para a preservação da Mata Atlântica; 6 alunos, ou seja, 21,5%, demonstraram ter a consciência da extinção dos Muriquis caso nada seja feito para a sua preservação; 3,5% responderam que deve ser porque o acham bonito e apenas 2 alunos, 7%, não souberam responder (Gráfico 5).

Gráfico 5

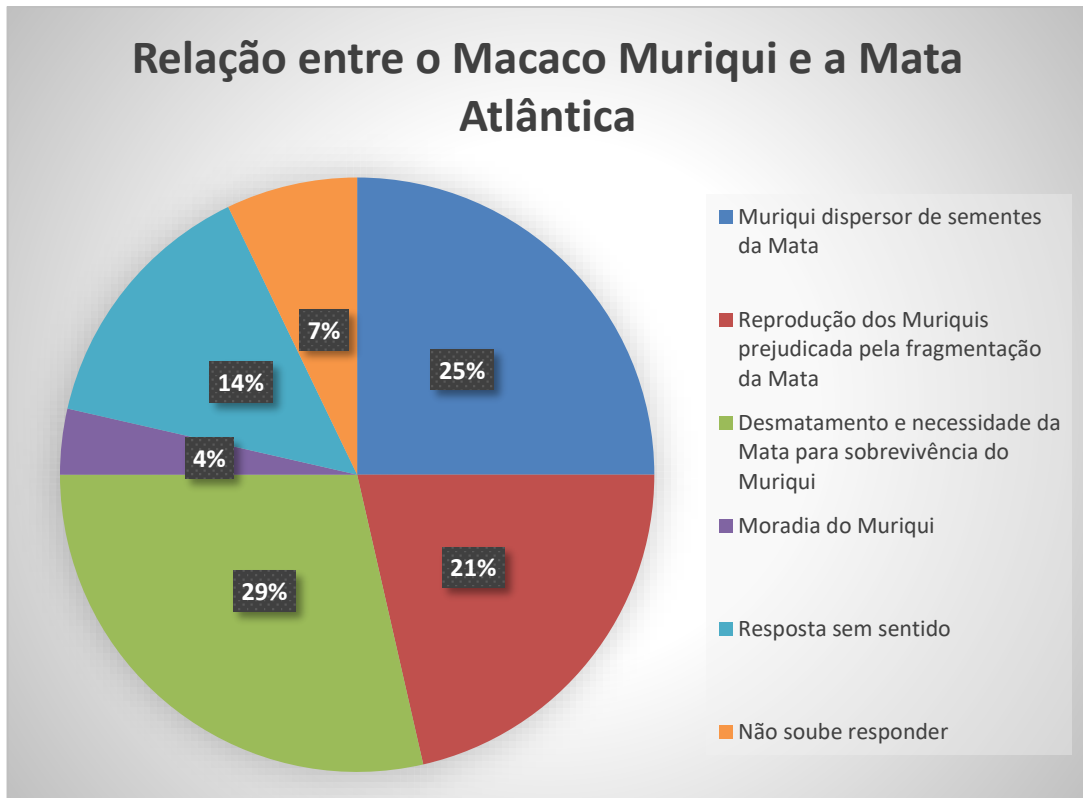


Fonte: a autora, 2016

QUESTÃO 5) Qual a relação entre o macaco Muriqui e o desmatamento da Mata Atlântica?

Conforme podemos observar no Gráfico 6, 29% dos alunos responderam que o desmatamento é a principal ameaça à sobrevivência do macaco Muriqui; 25% disseram que o Muriqui é um dispersor de sementes da Mata; 21% afirmaram que a reprodução dos Muriquis fica prejudicada com a fragmentação da Mata; 4% responderam que a Mata é a moradia deles, 14% deram respostas sem sentido e 7% não souberam responder.

Gráfico 6



Fonte: a autora, 2016

QUESTÃO 6) Na sua opinião, o que podemos fazer para salvar não só o Muriqui, mas também outras espécies que estão em perigo de extinção?

Podemos observar no Gráfico 7 que 39% da turma responderam que para salvar os animais em perigo de extinção, particularmente os Muriquis, devemos impedir a caça ilegal (não matar), não destruir as árvores e cuidar dos rios; 29% disseram que devemos investir na segurança dos Muriquis, através da fiscalização; 21% responderam que devemos fazer mais campanhas contra os desmatamentos; 4% disseram que devemos plantar mais árvores; para 3% dos alunos, devemos deixar os animais livres e 4% não souberam responder.

Gráfico 7



Fonte: a autora, 2016

QUESTÃO 7) E quanto a nossa Mata Atlântica, o que podemos fazer para socorrê-la?

Gráfico 8



Fonte: a autora, 2016

Conforme mostra o Gráfico 8, 7 alunos (25%) responderam que devemos evitar cortar árvores, preservar os rios, não jogar lixo e nem queimar as florestas; 9 alunos (32%) responderam que devemos evitar as queimadas, os desmatamentos e a caça ilegal; 6 alunos (21%) disseram que devemos fazer campanhas contra os desmatamentos; 1 aluno (4%)

acredita que investir na fiscalização é uma das soluções; 3 alunos (11%) responderam que devemos cuidar da Mata para que ela não morra; 1 aluno (4%) acha que devem ser aplicadas multas para quem desmatar e 1 aluno afirmou, demonstrando muita indignação, que “devemos parar de ser burros, pois assim o homem vai perceber a real importância da Mata Atlântica e os desmatamentos e queimadas cessarão”.

4.4 Quarta Atividade: Problemas multidisciplinares

Objetivo: Aplicar o teste contendo problemas matemáticos e ecológicos com foco nos macacos Muriquis, Mata Atlântica, assim como cumprir com parte do programa de Matemática do 7º ano do Ensino Fundamental (operações de adição e multiplicação, razão, proporção, porcentagem e interpretação gráfica) e avaliar o ensino dos conceitos matemáticos com a multidisciplinaridade.

Duração: 1 hora e 20 minutos.

Data: 24/05/2016

A finalidade dessa atividade foi trabalhar a interdisciplinaridade entre a Matemática e a Ecologia e ponderar o quanto o envolvimento do aluno com o assunto pode ajudar no aprendizado dos conceitos matemáticos.

Nesse dia, compareceram 34 estudantes que foram distribuídos em 6 grupos de 4 alunos e 2 grupos com 5 alunos.

O que se observou foi uma empolgação e um interesse maior dos alunos em resolver problemas matemáticos envolvendo problemas reais. Como consequência, obteve-se um resultado positivo nas notas do teste aplicado, pois 62,5% da turma tirou uma nota acima de 5,0 (média estipulada pela Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro): um resultado considerado bem razoável, comprovando a eficácia da multidisciplinaridade.

Ao final das atividades, percebeu-se nitidamente que eles estavam felizes com a forma diferenciada das aulas expostas. Inclusive, uma aluna me fez a seguinte pergunta: “Professora, hoje tem Muriqui?” e logo após, fez o comentário: “Eu gostei. Queria mais!”.

Também gostei. Cresci como professora e percebi que podemos melhorar a maneira de transmitir os conceitos matemáticos nas aulas, abordando temas atuais e aproveitando a oportunidade para formar cidadãos mais conscientes dos problemas do nosso planeta.

4.4.1 Análise dos resultados da 4ª Atividade

Nesta seção, foram aplicadas 8 questões com a finalidade de avaliar os conteúdos matemáticos, utilizando os dados obtidos nas pesquisas sobre o macaco Muriqui e a Mata Atlântica.

Questão 1

O Muriqui é conhecido como o maior primata não humano das Américas. Quando adulto, o macho pode pesar, aproximadamente, de 12 a 15kg e a fêmea, de 9 a 12kg. Entre os Muriquis do Sul, um pesquisador observou que uma das fêmeas pesava aproximadamente 9,4 kg e um dos machos, 12,1kg.



A massa, **em gramas**, que a fêmea e o macho citados acima pesavam juntos é:

- (A) 21,5
- (B) 21500
- (C) 11500
- (D) 215

As respostas dadas pelos alunos foram 21500 e 21,5.

62,5% da turma acertou e 37,5% da turma errou.

Os erros ocorreram porque os alunos não fizeram a conversão das unidades, mostrando que esse assunto precisa ser melhor trabalhado.

Questão 2

Os Muriquis são um retrato da paz e da cooperação. Raramente demonstram sinais de disputa ou agressividade e estão sempre atentos uns com os outros. Em vez de brigarem, eles têm o hábito de se abraçarem. Outro fato curioso é que os machos compartilham também as suas fêmeas! Num determinado dia, pesquisadores avistaram um grupo com 3 fêmeas e 4 machos. Conforme a informação dada acima, o número de casais de macho e fêmea que podem ser formados é:

- (A) 7
- (B) 9
- (C) 12
- (D) 15

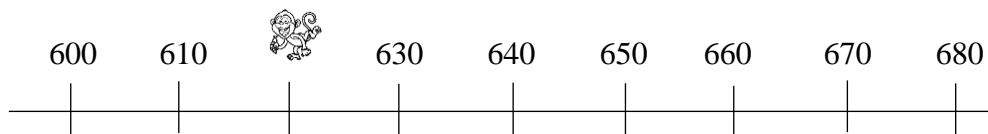
A opção correta é a letra C. As respostas dadas pelos alunos foram 12 e 7.
50% da turma acertou e 50% da turma errou.

Alguns alunos não conseguiram identificar que o problema envolvia a operação de multiplicação e somaram os valores.

Questão 3

O número aproximado de espécies da fauna brasileira que estão ameaçadas de extinção

corresponde ao número representado por  na reta numérica. Esse número é:



(A) 610

(B) 615

(C) 620

(D) 625

A resposta dada pelos alunos foi 620.

100% de acerto. Isso mostra que os alunos conseguiram obter um bom conhecimento da reta numérica envolvendo Números Naturais.

Questão 4



Os macacos Muriquis existem apenas na Mata Atlântica brasileira, onde, originalmente, havia cerca de 400.000 indivíduos. Em 2009, não restavam mais do que 2.200,

divididos em duas espécies: o Muriqui do sul (*Brachyteles arachnoides*), com cerca de 1.300 indivíduos que sobreviveram no que restou da Mata Atlântica no Rio de Janeiro, leste de São Paulo e norte do Paraná; e o Muriqui do norte (*Brachyteles hypoxanthus*), com aproximadamente 900 indivíduos no Espírito Santo e Minas Gerais. Ambas espécies estão ameaçadas, sendo que os Muriquis do norte são listados como criticamente em perigo, que é a classificação mais extrema para espécies em risco de extinção. Suas principais ameaças são a destruição de seu habitat (as florestas da Mata Atlântica) e a caça. (Fonte: Leandro Santana Moreira)

De acordo com os dados acima, a razão entre o número de Muriqui do norte e o número de Muriqui do sul é:

(A) $\frac{9}{13}$

(B) $\frac{13}{9}$

(C) $\frac{13}{22}$

(D) $\frac{9}{22}$

A opção correta é a letra A. As respostas dadas pelos alunos foram $\frac{9}{13}$, $\frac{13}{9}$ e $\frac{9}{22}$.

Apenas 2 grupos acertaram e 6 erraram.

Os alunos, que responderam $\frac{13}{9}$, erraram por não terem compreendido que, em Razão

Matemática, a ordem em que as grandezas são solicitadas deve ser respeitada. O aluno que

respondeu $\frac{9}{22}$ calculou a razão entre o número de Muriquis do Norte e o total de números de

Muriquis do Norte e do Sul.

Questão 5

A distribuição original dos Muriquis abrangia uma grande parte da Mata Atlântica do litoral brasileiro, cobrindo uma área de 1.360.000 km². Atualmente, restam apenas 50.000 km², conforme mostra o mapa a seguir.



Distribuição geográfica das duas espécies de Muriqui

Fonte: Plano de Ação Nacional Para a Conservação dos Muriquis/
(Série Espécies Ameaçadas nº 11), ICMBIO, 2011.

A área atual de distribuição dos Muriquis teve uma redução de:

- (A) 96,3%
- (B) 3,7%
- (C) 50%
- (D) 36

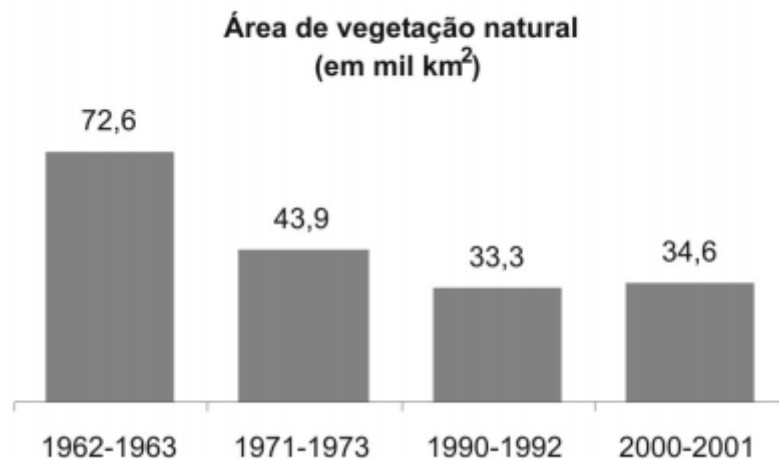
A opção correta é a letra A. As respostas dadas pelos alunos foram 3,7% e 50%.

0 acerto e 8 erros.

Embora o uso da calculadora tenha sido permitido, o número de erros nesta questão foi alto devido à falta de atenção dos alunos com relação ao enunciado, que solicitava o percentual da redução da área e não, o remanescente dela.

Questão 6

Em um estudo feito pelo Instituto Florestal, foi possível acompanhar a evolução de ecossistemas paulistas desde 1962. Desse estudo publicou-se o Inventário Florestal de São Paulo, que mostrou resultados de décadas de transformações da Mata Atlântica.



(Fonte: *Pesquisa. 91*, São Paulo: FAPESP, set/2003, p. 48.)

Examinando o gráfico da área de vegetação natural remanescente (em mil km²) pode-se inferir que:

- (A) A Mata Atlântica teve sua área devastada em 50% entre 1963 e 1973.
- (B) A vegetação natural da Mata Atlântica aumentou antes da década de 60, mas reduziu nas décadas posteriores.
- (C) A devastação da Mata Atlântica remanescente vem sendo contida desde a década de 60.
- (D) Em 2000-2001, a área de Mata Atlântica preservada em relação ao período de 1990-1992 foi de 34,6%.
- (E) A área preservada da Mata Atlântica nos anos 2000 e 2001 é maior do que a registrada no período de 1990-1992.

A resposta certa é a da letra E. As opções marcadas pelos alunos foram A, C, D e E.

Apenas 1 grupo acertou e 7 grupos erraram.

Embora a interpretação do gráfico seja de fácil entendimento, o número elevado de erros ocorreu devido ao grau de dificuldade de compreensão das opções, para o nível deles.

Questão 7 (Discursiva)

Estima-se que a população desses primatas era de 400000 indivíduos, no ano de 1500, e passou para 100000 no ano 1900. Por causa de diversos problemas, em 1971 não restavam mais do que 3000 muriquis. Em 1998, esse número caiu para 1158 muriquis. Já em 2003, foram observados 1300 e, em 2009, passou para 2200 indivíduos.

- a) Preencha a tabela a seguir:

| | | | | | | |
|-------------------------------|------|------|------|------|------|------|
| Ano | 1500 | 1900 | | 1998 | | 2009 |
| Número aproximado de muriquis | | | 3000 | | 1300 | |

b) O que se pode concluir desses dados?

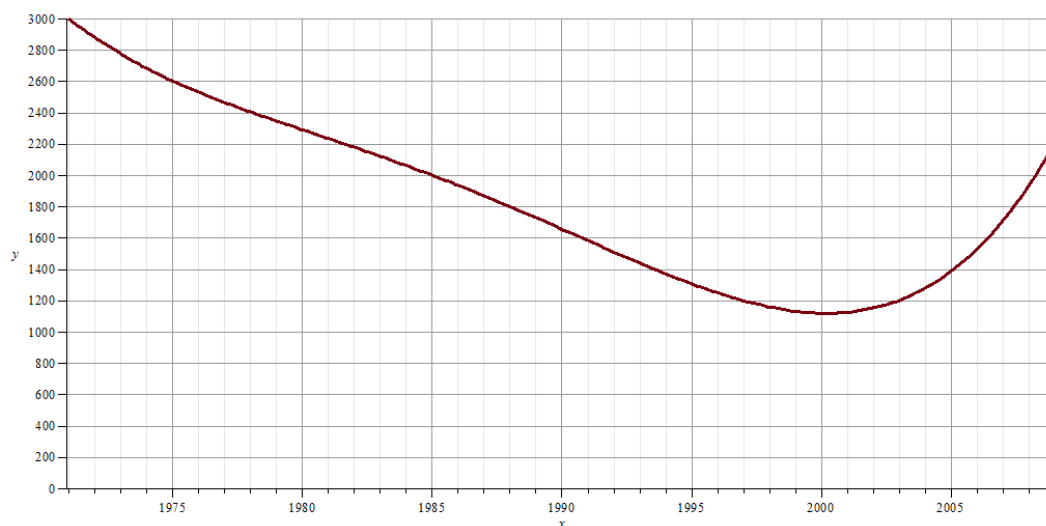
A tabela foi 100% preenchida corretamente. Porém, no item (b), apenas 1 grupo respondeu que os Muriquis estavam desaparecendo até 2003, mas que em 2009 a quantidade desses indivíduos subiu para 2200. Três grupos disseram que o número de macacos Muriquis estava diminuindo. Dois grupos responderam que o número aumentou e diminuiu a cada ano. 1 grupo fez a leitura da tabela (em 1500 o número de Muriquis era 400000, em 1900 diminuiu para 100000 e assim por diante) e o outro grupo disse que o número de Muriquis em 2009 abaixou (em comparação com o ano de 1500).

Questão 8 (Discursiva)

Interpolar é uma forma de estimar um valor desconhecido a partir de um conjunto de

pontos tabelados. Em problemas reais precisamos interpolar um novo valor \bar{x} numa tabela gerada por dados observados experimentalmente ou por uma função conhecida.

Considerando os dados da tabela da questão 7, entre 1971 a 2009, foi obtido o polinômio interpolador, cujo gráfico é o seguinte



Baseado no gráfico acima, responda:

a) Quantos Muriquis havia, aproximadamente, no ano de 1990?

b) E no ano de 2000?

Nesta questão, 4 grupos interpretaram corretamente o gráfico. Três grupos erraram, mas chegaram próximos à resposta correta (devido à dificuldade de enxergar os valores, pois alguns alunos comentaram que eles estavam muito reduzidos) e apenas 1 grupo achou valores sem nenhum sentido.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o intuito de propiciar um aprendizado significativo, o professor procura utilizar estratégias que façam com que a compreensão do aluno seja priorizada em favor de um conhecimento que seja útil na vida dele. Trazer para a sala de aula assuntos atuais que abordem problemas como doenças sexualmente transmissíveis, dengue, Zika, escassez de água potável, poluição, fauna e flora, dívidas, entre outros, é uma boa estratégia, pois esses temas costumam sensibilizar e despertar o interesse dos alunos e, conseqüentemente, eles tendem a assimilar melhor o conceito matemático a ser transmitido.

Sendo assim, essa dissertação visou apresentar e desenvolver os assuntos de parte do programa da disciplina de Matemática do 7º ano do Ensino Fundamental, de forma contextualizada, a fim de despertar o interesse dos alunos para os problemas sobre a fauna e flora brasileiras. Em particular, informar os alunos do iminente risco de extinção do Macaco Muriqui através de pesquisa, debate em sala de aula, questionário e elaboração de questões envolvendo operações de adição e multiplicação, razão, proporção, porcentagem e interpretação gráfica. A outra proposta foi determinar a taxa de crescimento e/ou decréscimo dessa espécie, através de modelos matemáticos adaptados.

O trabalho foi dividido em duas partes: primeiramente, foi realizada a pesquisa sobre o macaco Muriqui e a aplicação em sala de aula da interdisciplinaridade entre a Ecologia e o conteúdo matemático do 7º ano do Ensino Fundamental; em seguida, foi realizado um estudo, através de modelos matemáticos, sobre a dinâmica populacional dos macacos Muriquis, obtendo parâmetros coerentes com os dados reais.

No quesito da interdisciplinaridade, observou-se que houve um envolvimento considerável dos alunos com relação às informações coletadas a respeito dos Muriquis e também da Mata Atlântica, pois o tema em questão abordou o desmatamento e suas conseqüências. Também foi percebido que os alunos gostaram das aulas alternativas, devido às mudanças realizadas na rotina das aulas tradicionais através de debates, leituras das pesquisas efetuadas por eles, utilização do data show para aplicação do *quiz* – “Que bicho sou eu?” – que funcionou como um jogo, e o teste realizado em grupo. Como conseqüência, obteve-se um resultado positivo nas notas do teste aplicado. Apenas 37,5% da turma tiraram nota abaixo de 5,0 (média estipulada pela Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro): um resultado considerado bem razoável. Além disso, os estudantes alcançaram um degrau a mais no conhecimento, conscientizando-se de que devem mudar o comportamento,

respeitando mais a natureza, preservando a diversidade, não comprando animais silvestres, entre outros.

A interdisciplinaridade aliada a problemas reais evidenciou que o aluno se interessa em preservar e defender o nosso planeta, além de mostrar que a Matemática está presente em diversas áreas do conhecimento.

Na parte da dinâmica populacional, os dados estatísticos encontrados foram verificados através do modelo matemático de May (mutualismo), mostrando que os Muriquis estão ameaçados de extinção e que essa extinção está estreitamente ligada ao desmatamento (consequentemente, à fragmentação) da Mata Atlântica.

Graças à criação dos corredores ecológicos e às atividades dos ambientalistas esta espécie aumentou um pouco, a partir do ano 2000. Infelizmente, não o suficiente para dizermos que os Muriquis do Norte e do Sul estão fora da lista do Livro Vermelho da Fauna Brasileira Ameaçada de Extinção.

Com base no trabalho realizado e diante dos resultados obtidos, conclui-se que houve uma mudança significativa no comportamento dos alunos envolvidos com as questões ambientais expostas, a partir da apresentação dos conteúdos matemáticos contendo o tema do macaco Muriqui e os efeitos do desmatamento causados pela ação do homem. Além disso, devemos criar, urgentemente, estratégias a fim de salvar o maior macaco das Américas.

REFERÊNCIAS

- [1] ALGARRA, F.J.G. **Modelo Discreto Estocástico de Dinâmica Mutualista**. Tese de mestrado em Física de Sistemas Complexos. UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID, 2012.
- [2] AGUIRRE, A.C. **O Mono Brachyteles Arachnoides (E.Geoffroy) – Situação Atual da Espécie no Brasil**. Anais da Academia Brasileira de Ciência. ABC, Rio de Janeiro, p.53, 1971.
- [3] ALVES, J. E.D. **A Polêmica Malthus Versus Condorcet Reavaliada à Luz da Transição Demográfica**. Texto para discussão da Escola Nacional de Ciências Estatísticas, ENCE/IBGE, nº4 - Rio de Janeiro, 2002.
- [4] ARAÚJO, J.; MÁRQUEZ, R.G.; HUAROTO, Y. **Análise Qualitativa de Modelos Logísticos para Barcos Pesqueiros**. Caderno do IME. Série Matemática, v.23, p.133-143, Rio de Janeiro, 2011.
- [5] ASSUMPCÃO, C.T. **Ecological and Behavioral Information on Brachyteles Arachnoides**. Primates 24, p.584, University of Edinburgh, 1983.
- [6] BASSANEZI, R.C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Ed Contexto, 2002.
- [7] BASSANEZI, R.C. **Equações Diferenciais Ordinárias: Um Curso Introductório**. Disponível em: <http://gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/listas/iedo/notasdeaulas/equacoes-diferenciais-ordinarias-rodney.pdf> . Acesso em: abril, 2016.
- [8] BOYCE, W.E.; DE PRIMA, R.C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. LTC - RJ, Brasil, p.416, 1999.
- [9] BUENO, R. DA S. **Frugivoria e Efetividade de Dispersão de Sementes dos Últimos Grandes Frugívoros da Mata Atlântica: a Anta (Tapirus Terrestris) e o Muriqui (Brachyteles arachnoides)**. Dissertação de Mestrado na Universidade Estadual Paulista- Rio Claro, agosto, 2010.
- [10] BURAK, D. **Modelagem Matemática: Ações e Interações no Processo de Ensino-Aprendizagem**. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Estadual de Campinas - Campinas, 1992.
- [11] CARVALHO, I. C. de M. **Educação ambiental: A Formação do Sujeito Ecológico**. São Paulo : Ed. Cortez, 2008.
- [12] CORRÊA, J. DE A.; GARCIA, R.M.; RAYMUNDO, Y. H. **Equações Diferenciais Ordinárias : Teoria Básica e Aplicações com o uso do Maple**. Clube dos Autores, Rio de Janeiro, 2016.
- [13] COUZEMENCO, F. **Projeto Muriqui, Parceria de Futuro, Revista Século - Vitória, ES, 2003.**

- [14] JERUSALINSKY, L.; MELO, F.R.; TALEBI, M. **Plano de Ação Nacional para a Conservação dos Muriquis (Série Espécies Ameaçadas nº 11)** – Brasília: Instituto Chico Mendes de Conservação da Biodiversidade, ICMBIO, 2011.
- [15] LINHARES, S.; GEWANDSZNAJDER, F. **Biologia Hoje – Genética, Evolução e Ecologia**. São Paulo, Ed. Ática, 2012.
- [16] MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE. **Livro Vermelho da Fauna Brasileira Ameaçada de Extinção**. Biodiversidade 19. Volume I - Brasília, ICMBio, 2008.
- [17] MITTERMEIER, R.A.; VALLE, C.M.C.; ALVES, M.C.; SANTOS, I.B.; PINTO, C.A.M.; STRIER, K.B.; YOUNG, A.L.; VEADO, E.M.; CONSTABLE, I.D.; PACCAGNELLA, S.G.; LEMOS DE SÁ, R.M. **Current Distribution of the Muriqui in the Atlantic Forest Region of Eastern Brazil**. Primate Conservation 8, p.143, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 1987.
- [18] MURRAY, J.D. **Mathematical Biology**. Springer – Verlag, Berlin, p.767, 1989.
- [19] MUSEU DE ZOOLOGIA JOÃO MOOJEN DE VIÇOSA. **Bicho da Vez. Muriqui-do-Norte**. Edição 13, 2009. Disponível em: www.museudezoologia.ufv.br. Acesso em: 26/09/2015.
- [20] NISHIMURA, A. **In Search of Wolly Spider Monkey**. Reports of New World Monkeys, Primate Research Institute, p.21. Kyoto University, Kyoto, 1979.
- [21] PARQUE NACIONAL DA SERRA DOS ÓRGÃOS e TEREVIVA. Programa de Preservação do Muriqui. Disponível em: www.programamuriqui.org.br. Acesso em: 26/09/2015.
- [22] RIBEIRO, M.C. **Modelos de Simulação Aplicados à Conservação de Paisagens Fragmentadas da Mata Atlântica Brasileira**. Tese de doutorado em Ciências, na área de Ecologia – USP, 2010.
- [23] R7 ENTRETENIMENTO. **Quiz-bichos**. Disponível em : <http://entretenimento.r7.com/bichos/noticias/quiz-estes-dez-animais-sao-tipicos-do-brasil-voce-sabe-como-eles-se-chamam-20100928.html?question=10#quiz> . Acesso em: abril de 2016
- [24] SABETI, M. **Soluções de Ondas Viajantes em um Sistema Difusivo Predador-Presa Não Local**. Dissertação de mestrado na Universidade Federal do Paraná - Curitiba, 2007
- [25] SANTOS, C.E.B. **Modelos Matemáticos para a Dinâmica Populacional de Micro-organismos como Motivação para o Estudo de Potenciação, Funções Exponenciais e Logarítmicas**. Dissertação de mestrado na Universidade do Estado do Rio de Janeiro - Rio de Janeiro, 2015.
- [26] SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais : Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 1997.

[27] SOS MATA ATLÂNTICA

Disponível em: <https://www.sosma.org.br/14622/divulgados-novos-dados-sobre-a-situacao-da-mata-atlantica/> . Acesso em 26/05/2016.

[28] STRIER, K.B.; ZIEGLER, T.E. **Insights into Ovarian Function in Wild Muriqui Monkeys (*Brachyteles Arachnoides*)**. American Journal of Primatology 32, p.31, University of Wisconsin-Madison, Madison, 1994.

[29] STRIER, K.B. **Diet in One Group of Woolly Spider Monkeys, or Muriquis (*Brachyteles Arachnoides*)**. American Journal of Primatology 23, p.113, University of Wisconsin-Madison, Madison, 1991.

[30] TALEBI, M.; SOARES, P. **Conservation Research on the Southern Muriqui (*Brachyteles Arachnoides*) in São Paulo State, Brasil**, Neotropical Primates 13 (Suppl.), December, 2005.

[31] TALEBI, M.; BASTOS, A.; LEE,P. **Diet of Southern Muriquis in Continuous Brazilian Atlantic Forest**. International Journal of Primatology 26, p.1175, University of Cambridge, Cambridge, 2005.

[32] WEISS, H. **A Mathematical Introduction to Population Dynamics**. 27°, CBM, Impa, 2007.

ANEXO A – ATIVIDADES APLICADAS EM SALA DE AULA

1ª Atividade: (Fonte: <http://entretenimento.r7.com/bichos/noticias/quiz-estes-dez-animais-sao-tipicos-do-brasil-voce-sabe-como-eles-se-chamam-20100928.html>)

27/09/2010

Quiz: Estes dez animais são típicos do Brasil. Você sabe como eles se chamam?



Que bicho sou eu?

- () Ararinha-azul
- () Arara-azul
- () Arara-militar



Que bicho sou eu?

- () Sagui-branco
- () Macaco-albino
- () Mico-branco



Que bicho sou eu?

- () Gambá-bicolor
- () Jaratataca
- () Gambá-brasileiro



Que bicho sou eu?

- () Lobo-vermelho
- () Cachorro-do-mato
- () Lobo-guará



Que bicho sou eu?

- () Macaco-prego
- () Macaco-sagui
- () Macaco-aranha



Que bicho sou eu?

- Mico-leão-de-cara-dourada
- Mico-leão-dourado
- Mico-leão-preto



Que bicho sou eu?

- Peixe-boi-da-Amazônia
- Peixe-boi-anão
- Peixe-boi-marinho



Que bicho sou eu?

- Preguiça-comum
- Preguiça-de-dois-dedos
- Preguiça-coleira



Que bicho sou eu?

- Sucuri
- Jararacuçu-do-brejo
- Jararaca



Que bicho sou eu?

- Tatu-peludo
- Tatu-canastra
- Tatu-bola-da-caatinga

2ª Atividade: Pesquisa e debate sobre o Macaco Muriqui.

3ª Atividade: Questionário.

- 1) Você gosta de Matemática? Justifique a sua resposta.

- 2) Você acha interessante misturar assuntos de outras disciplinas, tais como Ciências, Geografia e História, juntamente com os conteúdos de Matemática? Por quê?

- 3) “Biodiversidade é a variedade de animais e plantas presentes na natureza”. Você sabia que o Brasil detém a maior biodiversidade do planeta, abrigando entre 15% a 20% de todas as espécies conhecidas no mundo? _____

- 4) Qual a importância da preservação do macaco Muriqui?

- 5) Qual a relação entre o macaco Muriqui e o desmatamento da Mata Atlântica?

- 6) Na sua opinião, o que podemos fazer para salvar não só o Muriqui, mas também outras espécies que estão em perigo de extinção?

- 7) E quanto a nossa Mata Atlântica, o que podemos fazer para socorrê-la?

4ª Atividade: Teste.

Muriqui, o maior primata das Américas, é candidato a mascote das Olimpíadas de 2016

Com o objetivo de apresentar o maior primata das Américas à população, tirar a espécie da lista vermelha de animais ameaçados de extinção e reintroduzir o macaco em florestas preservadas do Brasil, a ONG Instituto Ecoatlântico – com o apoio da Conservation International, do governo do Estado do Rio de Janeiro e de artistas como Gilberto Gil e Chico Buarque – criou a campanha **muriqui mascote Rio 2016**

Por: Fábio Paschoal, National Geographic Brasil

Questão 1

O Muriqui é conhecido como o maior primata não humano das Américas.

Quando adulto, o macho pode pesar, aproximadamente, de 12 a 15kg e a fêmea, de 9 a 12kg. Entre os Muriquis do Sul, um pesquisador observou que uma das fêmeas pesava aproximadamente 9,4 kg e um dos machos, 12,1 kg.



A massa, **em gramas**, que a fêmea e o macho citados acima pesavam juntos é:


- (A) 21,5 (B) 21500 (C) 11500 (D) 215

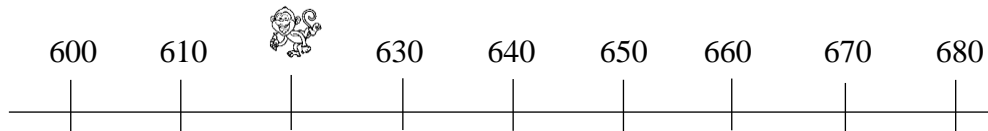
Questão 2

Os Muriquis são um retrato da paz e da cooperação. Raramente demonstram sinais de disputa ou agressividade e estão sempre atentos uns com os outros. Em vez de brigarem, eles têm o hábito de se abraçarem. Outro fato curioso é que os machos compartilham também as suas fêmeas! Num determinado dia, pesquisadores avistaram um grupo com 3 fêmeas e 4 machos. Conforme a informação dada acima, o número de casais de macho e fêmea que podem ser formados é:

- (A) 7 (B) 9 (C) 12 (D) 15

Questão 3

O número aproximado de espécies da fauna brasileira que estão ameaçadas de extinção corresponde ao número representado por  na reta numérica. Esse número é:



- (A) 610 (B) 615 (C) 620 (D) 625

Questão 4



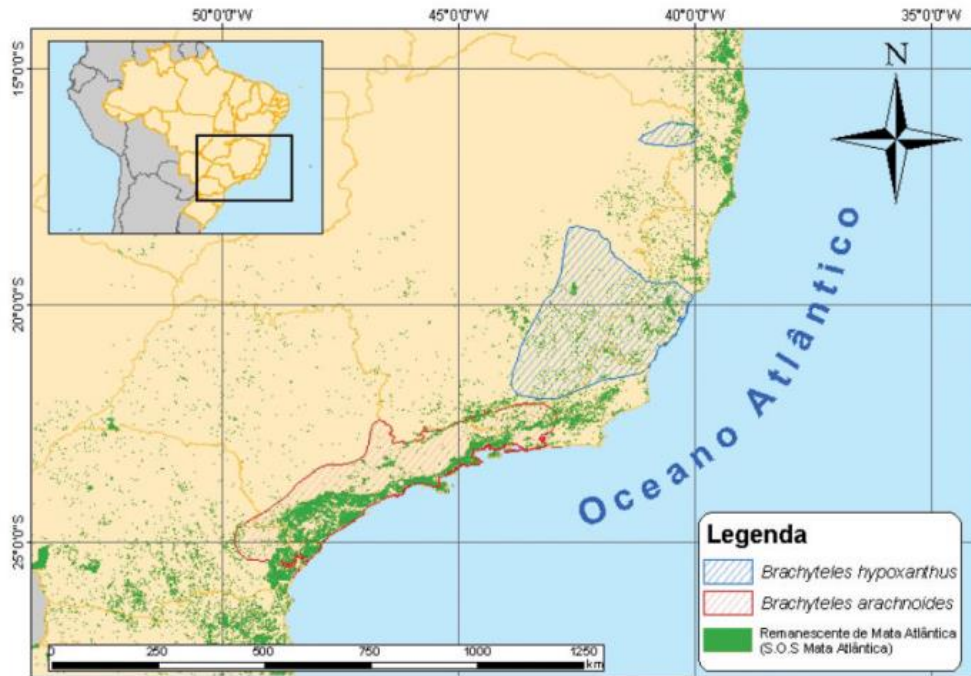
Os macacos Muriquis existem apenas na Mata Atlântica brasileira, onde, originalmente, havia cerca de 400.000 indivíduos. Em 2009, não restavam mais do que 2.200, divididos em duas espécies: o Muriqui do sul (*Brachyteles arachnoides*), com cerca de 1.300 indivíduos que sobreviveram no que restou da Mata Atlântica no Rio de Janeiro, leste de São Paulo e norte do Paraná; e o Muriqui do norte (*Brachyteles hypoxanthus*), com aproximadamente 900 indivíduos no Espírito Santo e Minas Gerais. Ambas espécies estão ameaçadas, sendo que os Muriquis do norte são listados como criticamente em perigo, que é a classificação mais extrema para espécies em risco de extinção. Suas principais ameaças são a destruição de seu habitat (as florestas da Mata Atlântica) e a caça. (Fonte: Leandro Santana Moreira)

De acordo com os dados acima, a razão entre o número de Muriqui do norte e o número de Muriqui do sul é:

- (A) $\frac{9}{13}$ (B) $\frac{13}{9}$ (C) $\frac{13}{22}$ (D) $\frac{9}{22}$

Questão 5

A distribuição original dos Muriquis abrangia uma grande parte da Mata Atlântica do litoral brasileiro, cobrindo uma área de 1.360.000 km². Atualmente, restam apenas 50.000 km², conforme mostra o mapa a seguir.



Distribuição geográfica das duas espécies de Muriqui

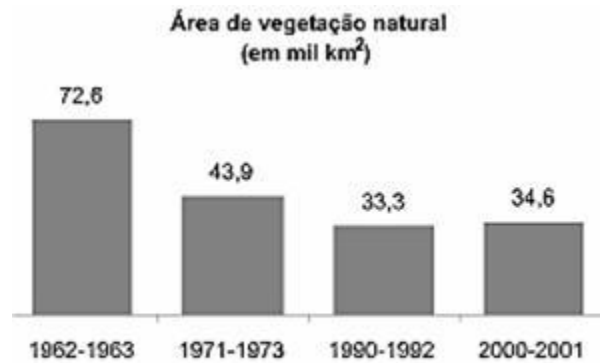
Fonte: *Plano de Ação Nacional Para a Conservação dos Muriquis/* (Série Espécies Ameaçadas nº 11).ICMBIO, 2011.

A área atual de distribuição dos Muriquis teve uma redução de:

- (A) 96,3% (B) 3,7% (C) 50% (D) 36%

Questão 6

Em um estudo feito pelo Instituto Florestal, foi possível acompanhar a evolução de ecossistemas paulistas desde 1962. Desse estudo publicou-se o Inventário Florestal de São Paulo, que mostrou resultados de décadas de transformações da Mata Atlântica.



(Fonte: Pesquisa. 91, São Paulo: FAPESP, set/2003, p. 48.)

Examinando o gráfico da área de vegetação natural remanescente (em mil km²) pode-se inferir que:

- (A) A Mata Atlântica teve sua área devastada em 50% entre 1963 e 1973.
- (B) A vegetação natural da Mata Atlântica aumentou antes da década de 60, mas reduziu nas décadas posteriores.
- (C) A devastação da Mata Atlântica remanescente vem sendo contida desde a década de 60.
- (D) Em 2000-2001, a área de Mata Atlântica preservada em relação ao período de 1990-1992 foi de 34,6%.
- (E) A área preservada da Mata Atlântica nos anos 2000 e 2001 é maior do que a registrada no período de 1990-1992.

Questão 7 (Discursiva)

Estima-se que a população desses primatas era de 400000 indivíduos, no ano de 1500, e passou para 100000 no ano 1900. Por causa de diversos problemas, em 1971 não restavam mais do que 3000 miquis. Em 1998, esse número caiu para 1158 miquis. Já em 2003, foram observados 1300 e, em 2009, passou para 2200 indivíduos.

c) Preencha a tabela a seguir:

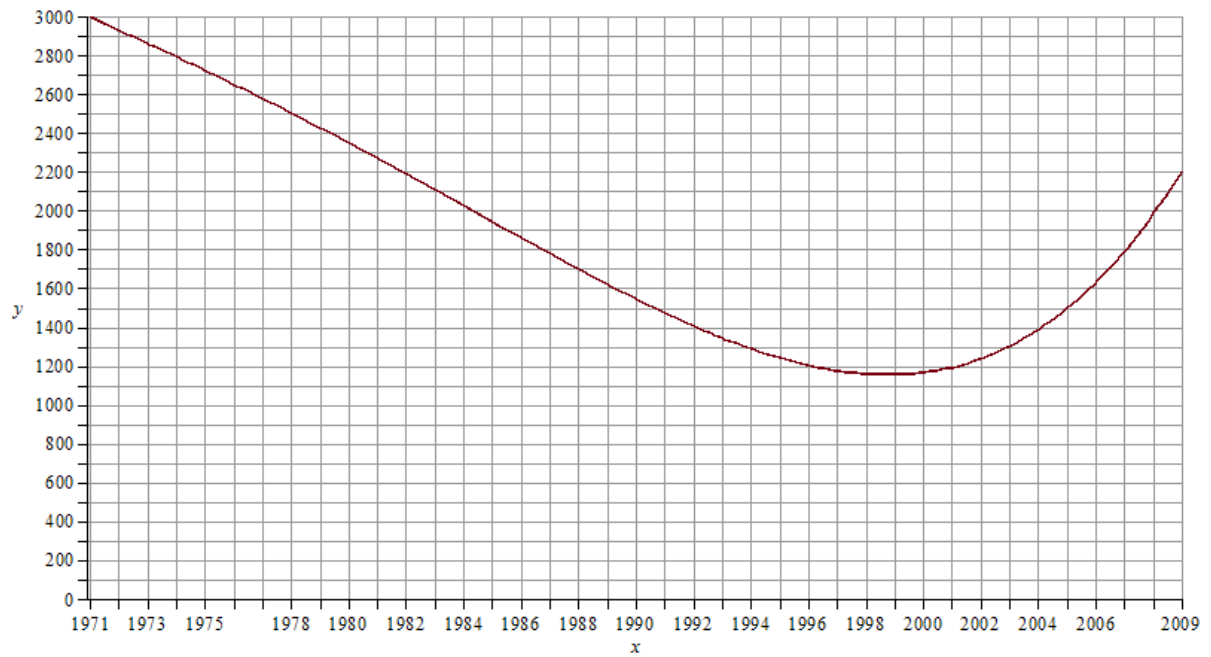
| Ano | 1500 | 1900 | | 1998 | | 2009 |
|-----------------------------|------|------|------|------|------|------|
| Número aproximado de miquis | | | 3000 | | 1300 | |

d) O que se pode concluir desses dados?

Questão 8 (Discursiva)

Interpolar é uma forma de estimar um valor desconhecido a partir de um conjunto de pontos tabelados. Em problemas reais precisamos interpolar um novo valor \bar{x} numa tabela gerada por dados observados experimentalmente ou por uma função conhecida.

Considerando os dados da tabela da questão 7, entre 1971 a 2009, foi obtido o polinômio interpolador, cujo gráfico é o seguinte



Baseado no gráfico acima, responda:

a) Quantos Muriquis havia, aproximadamente, no ano de 1990?

b) E no ano de 2000?

ANEXO B – Termo de Consentimento Informado

Obs.: O responsável por cada aluno participante mencionado ou cuja imagem está nesta pesquisa assinaram este termo.

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, _____, por meio deste termo, declaro que concordo com a participação na pesquisa de dissertação de Mestrado da Professora Tiekó Hiraga Artiles Siqueira do(a) aluno(a) _____, com temática sobre o macaco Muriqui, para o Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, sob a orientação da Professora Dra. Jeanne Denise Bezerra de Barros e coorientação da professora Rosa María García Márquez. Estou ciente de que esta pesquisa tem finalidade acadêmica e suas conclusões poderão contribuir para o aperfeiçoamento de estudos sobre o ensino de matemática e para melhoria na qualidade da educação nas instituições de ensino. O uso das informações e imagens são apenas para fins de pesquisa acadêmica (seminários, artigos, palestras, etc.).

Rio de Janeiro, _____ de _____ de 2016.

Assinatura do(a) Responsável do aluno

Assinatura da Pesquisadora

Assinatura da Orientadora