HUGO DE CARVALHO BRITO

CONTEXTUALIZAÇÃO PARA O MELHOR ENSINO DE FUNÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2017

HUGO DE CARVALHO BRITO

CONTEXTUALIZAÇÃO PARA O MELHOR ENSINO DE FUNÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 07 de fevereiro de 2017.

Ady Cambraia Junior

Alexandre Miranda Alves

Mercio Botelho Faria
(Orientador)

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus que me capacitou e me deu suporte para tudo que consegui em minha vida.

Agradeço à minha esposa Marcela, porto seguro, que sempre me apoiou em minha jornada. Seu incentivo em momentos difíceis foi extremamente importante na conclusão deste mestrado.

Agradeço à minha filha Amanda, presente de Deus, que nasceu durante o período do mestrado para alegrar ainda mais nossas vidas.

Agradeço à minha família, que sempre me apoiou.

Agradeço à minha mãe Maria Luiza, que sempre me incentivou a buscar a ascensão em minha carreira.

Agradeço ao meu pai Vanderlei, pelo companheirismo nos importantes momentos de lazer.

Agradeço ao meu orientador Mércio Botelho Faria, por acreditar no meu trabalho, pela compreensão e colaboração quando precisei.

Agradeço a todos os professores da UFV que tornaram possível este trabalho.

Agradeço à CAPES, pelo suporte financeiro.

Agradeço aos amigos e colegas do Profmat. Agradeço em especial aos meus amigos Reinaldo e Geórgia, que foram essenciais nessa conquista. Agradeço ao Leonardo, pela hospedagem e parceria em tantas visitas à Viçosa e, por último, mas não menos importante, agradeço ao Marcelo, que me ajudou em todo curso com conhecimento e exemplo de perseverança, foi um verdadeiro professor.

Não conseguiria alcançar esse objetivo sem esse suporte. É com muita satisfação que digo: obrigado a todos.

RESUMO

BRITO, Hugo de Carvalho, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2017. **Contextualização para o melhor ensino de Funções**. Orientador: Mércio Botelho Faria.

Esse trabalho aborda os conceitos de função. Citamos fatos históricos sobre o desenvolvimento do conteúdo de funções e a importância da resolução de problemas no raciocínio e aprendizado matemático. Utilizamos exemplos de Física, Química, Biologia e Geografia associados ao conteúdo de função com o objetivo de estreitar a relação da Matemática, em especial a função, com as disciplinas mencionadas.

ABSTRACT

BRITO, Hugo de Carvalho, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, february de 2017. **Contextualization for the better teching of function**. Adviser: Mércio Botelho Faria.

This work addresses the concepts of functions. We quote historical facts related to the development of the functions content, as well as the importance of the resolution of problems on the reasoning and learning of mathematics. We make use of examples from Physics, Chemistry, Biology and Geography associated with the functions content with the objective of narrowing the relation of mathematics, especially functions, with the aforementioned disciplines.

.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Desde a criação dos primeiros conceitos matemáticos, há milhares de anos atrás, existe a relação de dependência entre grandezas. Obter uma grandeza a partir da variação de outra é um conceito antigo, que está presente não só no cotidiano do aluno, mas também em qualquer profissão em que ele tenha interesse.

Uma pessoa, ao organizar suas finanças, ao tomar um táxi para uma viagem, ao comprar em qualquer loja, dentre outras situações cotidianas, estabelece uma relação funcional do valor a ser pago e a quantidade de produto adquirido (alimentos, roupas, quilômetros rodados e etc.), ou seja, a relação funcional está presente no cotidiano de qualquer um. Essa associação com os fatos diários é importante no processo de assimilação do conteúdo pelo aluno, uma vez que os exemplos são facilmente contextualizados em suas realidades.

O que abordaremos nesse trabalho é uma recomendação extremamente importante, abordada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (**PCN**) de Matemática, que é a associação do conteúdo matemático com as demais ciências (Física, Química, Biologia e Geografia). Esse elo entre as funções e as disciplinas mencionadas já acontece em boa parte dos materiais estudados, porém, essa ligação só é feita quando o aluno já possui certo conceito em relação ao que é uma função e suas principais características.

O objetivo é utilizar conceitos matemáticos adquiridos no Ensino Fundamental e, juntamente com as disciplinas mencionadas, elaborar exemplos e situações para iniciar a explicação do conteúdo de função. Esse tipo de abordagem não só despertaria o interesse do aluno na matéria Função, como também ajudaria, desde o início do Ensino Médio, a estabelecer a conexão com as demais Ciências.

No capítulo 1, logo após o contexto histórico de função e da resolução de problemas, definiremos os conceitos iniciais de função e algumas situações que são utilizadas para explicá-los e servir de exemplo nos materiais de apoio.

O trabalho foi dividido nos capítulos 2, 3 e 4, que são os de Função do 1º grau, Função do 2º grau, Função Exponencial e Logarítmica, respectivamente, para facilitar o acesso a cada lei de formação.

Em cada um desses capítulos mencionados abordamos os conceitos básicos de cada lei de formação e, a partir desse ponto, mostramos alguns exemplos utilizando os conceitos básicos de Física, Química, Geografia ou Biologia, para a explicação dos conceitos de função.

A estratégia que queremos seguir é utilizar não só os exemplos cotidianos, mas darmos foco nos exemplos aplicados às outras Ciências estudadas no final do Ensino Fundamental e no decorrer do Ensino Médio. Essa ideia de interdisciplinaridade entre as demais disciplinas mencionadas e a função é uma estratégia que deve ser seguida em toda a extensão do Ensino Médio, mas principalmente, nos tópicos iniciais da função.

Após a demonstração de como seriam feitas essas ligações em cada capítulo, elaboramos um capítulo síntese [5] com os conceitos iniciais de função, separados em tópicos, com respectivas sugestões para explicação, utilizando obviamente, as ciências mencionadas no começo dessa introdução.

CAPÍTULO 1

FATOS HISTÓRICOS E CONCEITOS

Não houve uma criação do conceito de função, mas sim o desenvolvimento de uma ideia no decorrer da histórica matemática e, para que ele acontecesse, foram necessários vários personagens intelectuais.

Mostraremos nesta primeira seção o quão importante foi a resolução de problemas para a evolução da Matemática. Em seguida apresentaremos alguns pontos importantes na evolução do conteúdo de função e, após esse contexto histórico, como é abordada a função nos PCN e nos Parâmetros Curriculares Nacionais no Ensino Médio (PCN +).

A história do conteúdo de funções, bem como a evolução da didática da resolução de problemas, ocupa uma grande parte da história matemática. Abordaremos aqui alguns tópicos relevantes ao trabalho. Para maior aprofundamento, consultar [9].

Após a contextualização histórica da função, resolução de problemas e a abordagem desse tema proposto nos PCN e PCN+, faremos a conceituação, a nível de Ensino Médio, dos conteúdos iniciais de função para servir de base para o desenvolvimento desse trabalho.

1.1 História da Matemática

1.1.1 Didática Matemática e a Resolução de Problemas

Atualmente, no Ensino Fundamental, os materiais didáticos citam matemáticos pioneiros em diversas áreas, linha essa que se segue pelo Ensino Médio. Assim acontece com Tales de Mileto, Arquimedes, Pitágoras, Euclides, Platão, entre outros nomes famosos e também vários de menor expressão.

Os teoremas criados ou descobertos por esses pensadores foram frutos de várias situações problema. O teorema de Tales, por exemplo, estratégia criada por Tales de Mileto, que atuou por volta do século VI a.C., define que: se duas retas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre quaisquer dois segmentos determinados em uma das transversais é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.

A história supõe que Tales viveu no Egito por volta do século VI a.C. e foi chamado, por sua fama em geometria descritiva, para medir a altura de uma pirâmide. Como não dispunha de muitos ou nenhum recurso para realizar tal façanha, ele desenvolveu a estratégia mencionada como Teorema de Tales, que lhe rendeu muita fama.

Podemos perceber que a criação de uma ideia nova teve como combustível a resolução de um problema que instigava e desafiava a imaginação de quem o confrontasse. Essa situação aconteceu com Pitágoras, Platão, Arquimedes, entre outros filósofos matemáticos. As histórias desses matemáticos podem ser encontradas em (EVES, 2004).

Se percebemos que o berço da matemática tem origem na resolução de problemas, porque atualmente é tão difícil despertarmos esse interesse no aluno? Porque eles apresentam tanta dificuldade para interpretar e aplicar os conteúdos estudados?

Esses problemas têm todo um contexto histórico que se agrava por um fator determinante: a época das descobertas matemáticas.

Nossos principais axiomas matemáticos foram criados em uma época em que conhecimento era restrito a uma classe muito privilegiada. Poucas pessoas tinham acesso ao conteúdo matemático, bem como a suas descobertas e evoluções. Os filósofos e matemáticos pertenciam a uma classe muito alta dentro do sistema daquela época, ou seja, o conhecimento não era disponibilizado a todos.

Além disso, por conta principalmente do pensamento conservador, linguagem muito culta e falta de instrumentos para demonstração, a matemática foi desenvolvida a partir de teoremas e textos de difícil compreensão, até para quem tinha acesso, restringindo ainda mais o entendimento.

Somente com o passar do tempo, após a evolução gradativa do pensamento intelectual da população mundial, juntamente com a necessidade de expandir e aprimorar o conhecimento, o conteúdo matemático começou a ser estudado, simplificado e traduzido para ser acessível à população.

Graças a essa evolução, o estudo para demonstrar o conteúdo matemático para crianças foi começado a ser questionado e estudado e, por volta do século XVI, o educador tcheco Jan Amos Komenský (GASPARIN, 1994), conhecido como Comênio em português (1592-1670), introduziu a palavra "didática"para o ensino da Matemática, que fazia referência aos estudos sobre os métodos de ensino mais eficazes em sala de aula.

Para Comênio, a prática escolar deveria ser semelhante às práticas da natureza e para ele a relação entre professor/aluno teria que levar em conta a necessidade de aprendizado do aluno. Ele foi um dos primeiros que defendeu o "ensino de tudo para todos". Buscar a realidade social do aluno para sala de aula, fazendo uso das tecnologias disponíveis, foi uma de suas principais ideias.

No século XX, dois nomes surgem para o estudo da didática, mais especificamente no estudo para crianças: Lev Vygotsky (1896-1934) e Jean Piaget (1896-1980). Vygotsky desenvolveu conceitos imprescindíveis no processo de aprendizagem. Um deles, que está ligado diretamente à proposta dessa pesquisa, é o de Zona de Desenvolvimento Próxima, que identifica e relaciona as atividades que a criança consegue realizar sozinha e as atividades que, embora não consiga realizar sozinha, é capaz de resolvê-las com a ajuda de alguém com mais experiência ou conhecimento. Relação professor/aluno para resolver problemas.

No campo matemático, bem como suas áreas de atuação, a didática matemática vem se desenvolvendo e esse trabalho teve como precursor o francês Guy Brousseau, que desenvolveu uma teoria que leva à melhor compreensão entre as relações que acontecem entre professor e aluno. Ele considerava também que além do professor e do aluno existe um outro fator de suma importância que afeta diretamente o aprendizado matemático: o meio em que a situação evolui.

Brousseau criou a Teoria das Situações Didáticas, disponível em [10], a qual diz que "cada conhecimento ou saber pode ser determinado por uma situação", usando a relação entre duas pessoas, no caso, professor e aluno. Para uma situação ser solucionada é necessário que o aluno, por exemplo, crie estratégias com os conteúdos que já conhece, para resolver o problema do jeito dele.

O objetivo desse procedimento é fazer com que o professor auxilie na comprovação da veracidade da estratégia usada pelo aluno. O professor deixa de explicar o conteúdo pré-requisito para essa tarefa, para que o próprio aluno crie uma estratégia e, com o auxílio do professor, verifique se ela pode realmente ser aplicada para qualquer situação semelhante.

Tal teoria nos mostra uma visão inovadora do erro, que passa a ser um obstáculo precioso e é valorizado como parte do novo conhecimento adquirido. Podemos vê-lo como efeito do conteúdo anterior, que já foi útil, mas agora se transforma numa ideia falsa e inadequada.

1.1.2 A Evolução do Conceito Matemático de Função

Boa parte da história matemática foi desenvolvida através dos estudos sobre o comportamento entre determinadas grandezas. Filósofos matemáticos já estudavam por volta do século XIII o comportamento de algumas grandezas em relação ao tempo, temperatura, velocidade, distância entre outros problemas da época. Dedicavam grande parte de suas vidas estudando variações entre as grandezas e, no século XIV, descreveram essas oscilações por meio de um sistema de duas dimensões, horizontal e vertical, no qual conseguiam demonstrar as intensidades dessas grandezas (eixo vertical) em função do tempo (eixo horizontal).

Esses estudos deram suporte para que, com a ajuda do desenvolvimento da álgebra, Descartes e Fermat, no século XVII, definissem um sistema de eixos coordenados no plano, associando variações dessas coordenadas às expressões algébricas que representavam curvas de diferentes naturezas. A curva formada nesse plano era formada por todos os pontos, cujas coordenadas satisfizessem uma determinada equação. Essas variações das coordenadas que anteriormente eram associadas em tabelas, agora ganhariam forma no plano cartesiano.

É importante destacar a participação de Newton no desenvolvimento e consolidação do conteúdo das funções. Em uma de suas teorias, Newton idealizava curvas cujas variações eram contínuas e que atualmente podemos associar às imagens de um domínio real.

Porém, o termo função só foi realmente citado pelo filósofo alemão Von Leibniz, na década de 1690, que o utilizou para descrever as coordenadas dos pontos para formação de uma determinada curva, posteriormente para representar inclinações de reta que futuramente usaria nas teorias de integral.

Ao longo do tempo, outros matemáticos definiram o conceito de função e, depois, foram moldando essas definições até termos as definições conhecidas hoje em dia.

Bernoulli, em 1718, define função de uma variável como uma quantidade composta de alguma maneira qualquer dessa variável e de constantes. Definição bem complexa e bem superficial.

Já Lagrange, em 1797, cita que: "Chama-se de função de uma ou várias quantidades variáveis qualquer expressão para cálculo em que essas quantidades entrem em alguma forma qualquer, misturadas ou não com outras quantidades, que são consideradas como dadas, e valores invariáveis enquanto as quantidades da função podem tomar todos os valores possíveis". (MENDES, 1994)

Bernoulli e Lagrange traduzem de forma algébrica o que é uma função, ou seja, que ela só pode ser descrita por meio de uma expressão algébrica com duas ou mais varáveis. O que diferencia das definições atuais são as representações geométricas dessas grandezas, o que ajuda a demonstrar o comportamento que as expressões analíticas tomam.

"Em geral, a função f(x) representa uma sucessão de valores ou ordenadas, cada uma das quais arbitrárias. Sendo dada uma infinidade de valores para a abscissa x, haverá um número igual de ordenadas f(x). Todas têm valores numéricos verdadeiros, ou positivos, ou negativos, ou nulos. Nós não supomos que essas ordenadas estão sujeitas a uma lei comum; elas sucedem umas as outras em alguma maneira arbitrária qualquer, e cada uma delas é dada como se fosse uma quantidade isolada"(FOURIER, 1822). A definição detalhada de Fourier (1822) traduz o conceito de eixos coordenados abordado anteriormente, o que dá uma exemplificação do que acontece com as funções no plano.

Posteriormente, estabelecida a teoria do conjunto dos números reais e o surgimento de novos problemas devido à aparição de novas tecnologias, foram sendo estruturados novos conceitos para a definição de função. Conceitos que não eram necessariamente compostos por conjuntos numéricos, como citado anteriormente.

Podemos concluir que as definições de função, bem como suas aplicações, foram desenvolvidas e criadas a partir dos problemas com que os matemáticos se deparavam. Com isso o conteúdo foi se aperfeiçoando e se adaptando.

O conceito de função tem base na ideia de correspondência, ou seja, estudar a associação ou não de dois conjuntos. Antes de qualquer material matemático explicar o que é uma função, é preciso entender intuitivamente o conteúdo. Matemáticos como Caraça (2000) e Eves (2004) defendem, sim, a importância da definição formal de função, mas exaltam a necessidade inicial de desenvolver uma interpretação intuitiva da disciplina.

Ao abrir o leque do conhecimento de funções, Caraça cita a noção de variável. Segundo ele, para tornar a função de fácil manejo é necessária uma associação simbólica aos conjuntos. "Essa representação simbólica consegue-se introduzindo o conceito de variável, o que se faz da seguinte forma: Seja (E) um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou infinito, e convencionamos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por ex. x. A esse símbolo, representativo de qualquer um dos elementos do conjunto (E), chamamos variável."(CARAÇA, 2000).

Essa definição proposta por Caraça ratifica sua posição quanto à necessidade da interpretação do conceito de dependência de grandezas de forma contextualizada e abrangente.

Estabelecido o conceito de variável, ele constrói o conceito de domínio de uma função: "uma variável é o que for determinado pelo conjunto numérico que ela representa - a sua substância, o seu domínio como daqui em diante diremos". (Caraça, 2000).

Após explicar os termos utilizados, Caraça define função utilizando três conceitos que se conectam para o melhor entendimento do conteúdo. Inicialmente ele cria ideia baseada na teoria de conjuntos:

> Sejam x e y duas variáveis representadas de conjuntos de números, diz-se que y é função de x e escreve-se $y = f(x)$ se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \longrightarrow y$. A x chama-se variável independente, a y variável dependente (Caraça, 2000).

Essa definição é semelhante às usadas em boa parte dos autores de Ensino Médio. O foco do pensamento em Caraça é que, além dessa definição, ele define também a função de maneira analítica, que significa a aplicação do conteúdo de função por meios de expressões polinomiais, criando assim uma associação de dependência de grandezas. Ou seja, a definição analítica mencionada por ele é a função sendo utilizada como ferramenta das outras ciências.

Por fim ele cita a chamada definição geométrica de uma função, na qual trabalha com o ‘sistema de referência cartesiano’ para representar uma curva que representa todos os pares (x, y) que satisfazem a condição da função em sua definição analítica.

Podemos concluir que o autor aborda esses três conceitos para facilitar o manuseio do conteúdo. Identificamos uma preocupação por parte de Caraça em relação à parte didática do conceito de função, criando estratégias para explicar com melhor eficácia o conteúdo de função.

Essas são as estratégias que teremos como base para desenvolvermos esse trabalho ao longo dos capítulos que se seguem.

1.2 Ensino de Função no PCN e PCN +

O PCN’s, em seu volume de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, aborda que o ensino matemático e de conteúdos relacionados sejam mostrados para o educando de maneira mais abrangente, relacionando todo o universo do aluno. Trabalhando com o conteúdo, de forma que o educando consiga interpretar situações em sua vida para aplicar o conhecimento adquirido em sala de aula, ou seja, para que o conteúdo seja realmente útil em seu cotidiano.

Por isso destacamos o seguinte trecho:

> [...] uma proposta para o Ensino Médio que, sem ser profissionalizante, efetivamente propicie um aprendizado útil a vida e ao trabalho, no qual as informações, o conhecimento, as competências, as habilidades e os valores desenvolvidos sejam instrumentos reais de percepção, satisfação, interpretação, julgamento, atuação, desenvolvimento pessoal ou de aprendizado permanente, evitando tópicos cujos sentidos só possam ser compreendidos em outra etapa de escolaridade. (BRASIL, 1998)

Além disso, os PCN’s mencionam que o aprendizado tem que ser mais amplo e não restrito aos conhecimentos com aplicações profissionais ou formação técnica. Os objetos de ensino precisam incentivar o aluno a desenvolver conhecimentos contextualizados com a vida cotidiana.

Para conseguir êxito nesse trabalho, os PCN’s abordam que o conteúdo precisa ser desenvolvido em um universo interdisciplinar, de forma a mostrar que o papel da Matemática no Ensino Médio é de associar as demais ciências e abrir a mente do aluno para compreender de maneira mais clara, cada uma das ciências estudas. Por esse motivo eles citam que o conteúdo matemático é “insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenação, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver”(BRASIL, 2002).

De acordo com os PCN’s, a Matemática deve ser vista pelos alunos como uma linguagem, de tal forma que, ao aprender esse conteúdo, o aluno consiga interpretar o mundo a sua volta. Portanto os alunos devem compreender o vocabulário matemático para que eles consigam utilizá-lo de forma adequada a cada situação diária que eles enfrentarem.

Para exercitar esse vocabulário, a estratégia mais eficiente é através da 'resolução de problemas'. Ao elaborar questões, o professor direciona o aluno para que ele consiga, com as ferramentas matemáticas adquiridas, bolar resoluções para resolvê-las. Por isso, os problemas propostos têm que ser o mais fiel possível à rotina de situações que o aluno irá enfrentar cotidianamente.

> [...] a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas (BRASIL, 1998).

Cabe ao professor mostrar ao aluno que o papel da Matemática é quebrar esse pré-conceito de que o conteúdo matemático é um emaranhado de fórmulas sem conexão com nada do interesse do adolescente do Ensino Médio. O papel da Matemática no Ensino Médio é ser um despertador de ideias para que o jovem estudante encare com outra visão o mundo fora da escola.

Com relação a matéria sobre funções, os PCN's são bem claros quanto a sua importância. Mencionam que é de suma relevância o aprendizado desse conteúdo no Ensino Médio por conta da sua característica de interagir disciplinas distintas (Física, Biologia, Química, etc) com a Matemática.

Mostram que alguns conteúdos da própria Matemática são exemplos e precisam ser explicados fazendo associações com a função, caso das sequências aritmética e geométrica e juros simples e compostos na Matemática financeira. Tais associações ajudam a ratificar o conceito algébrico das funções bem como suas interpretações.

Para os PCN's é importante que o ensino da Matemática garanta que o aluno adquira alguma flexibilidade para identificar o conceito de função em áreas diversificadas e, utilizando dos recursos aprendidos na Matemática, buscar soluções a partir da lapidação desse conteúdo estudado, desenvolvendo estratégias para interpretar e resolver problemas através da investigação matemática. Isso se confirma no PCN + (2002).

A principal diferença presente no PCN + é a respeito da divisão do conteúdo ensinado a partir de tópicos. A conteúdo estudado em cada tópico seria requisito para a continuação do ensino dos demais tópicos seguintes. Nesse sistema de lista, as disciplinas são vistas de forma isolada em relação as outras. O PCN + não defende essa divisão, que é bastante usada por autores nas principais escolas atualmente.

A defesa é baseada na elaboração de estratégias, dentro de cada matéria e no âmbito de diferentes áreas, com o objetivo de ser mais dinâmico e coerente com as necessidades atuais, como as novas tecnologias.

O PCN + defende esse conceito baseado no trabalho de interação entre as disciplinas. Cita, por exemplo, o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) que cada vez mais usa a ideia de interdisciplinaridade no Ensino Médio.

Voltando para a Matemática do Ensino Médio, o PCN + propõe três temas estruturadores, que seriam trabalhados em toda a extensão do Ensino Médio. Os temas são: álgebra, número e funções, geometria e medidas e análise de dados.

> Cada tema estruturador é um campo de interesse com organização própria em termos de linguagens, conceitos, procedimentos e, especialmente, objetos de estudo. Apesar da unidade característica de cada tema estruturador, para organizar o planejamento do ensino, cada um deles foi dividido em unidades temáticas, que, por sua vez, são parcelas autônomas de conhecimentos específicos, que podem ser organizadas dentro do projeto pedagógico de cada professor ou escola em função das características de seus alunos e dos tempos e espaços para sua realização. (PCN +, 2002).

No tema números e funções, em que encontramos a abordagem que interessa ao nosso trabalho, existe a instrução de que o conteúdo sobre funções seja introduzida na primeira série do Ensino Médio, com conceitos iniciais básicos, ideias de fácil compreensão e interpretação de problemas não muito complicados.

Somente depois do desenvolvimento dessa introdução, daríamos continuidade ao conteúdo com sequências numéricas, associando com estudo de função afim e exponencial, funções quadráticas e logarítmicas, sempre associando à interpretação de gráficos e resolução algébrica.

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria Matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (PCN +, 2002, p.164)

Vale ressaltar também que os estudos relacionados a conjuntos e relações não são essenciais para a compreensão matérias que envolvem função, seja o conceito ou qualquer outra função específica. O PCN + propõe que já comecemos pelo conceito de função.

O material estudado nos dá um amplo material de desenvolvimento no que diz respeito à resolução de problemas. Os problemas não devem somente ser passados aos alunos com intuito de colocar em prática os conhecimentos adquiridos, mas utilizar tais problemas para motivar e despertar o aprendizado de funções. "A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. "(PCN +, 2002)

Podemos concluir que, dentro desse contexto, as aplicações com problemas são a principal ferramenta para introduzir funções, inicialmente com problemas básicos e logo depois associando os diversos conteúdos matemáticos aos de outras disciplinas, pois interagindo com outras matérias o conteúdo será melhor estruturado e o aprendizado será de uma eficiência cada vez maior.

1.3 Conceitos

Antes de começarmos a trabalhar com o conteúdo de funções, precisaremos estabelecer alguns símbolos e termos que serão frequentemente utilizadas no decorrer desse trabalho. Dentre os conjuntos numéricos teremos:

i) Para o conjunto dos números Naturais utilizaremos $\mathbb{N}$

ii) Para o conjunto dos números Inteiros utilizaremos $\mathbb{Z}$

iii) Para o conjunto dos números Racionais utilizaremos $\mathbb{Q}$

iv) Para o conjunto dos números Reais utilizaremos $\mathbb{R}$

v) Para o conjunto dos números Irracionais utilizaremos $\mathbb{I}$

Além disso, utilizaremos também os símbolos para subconjuntos:

i) Para um subconjunto com **elementos não negativos** teremos: $\mathbb{Z}_+$,$\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{I}_+$ e $\mathbb{R}_+$;

ii) Para um subconjunto com **elementos não positivos** teremos: $\mathbb{Z}_-$,$\mathbb{Q}_-$, $\mathbb{I}_-$ e $\mathbb{R}_-$;

iii) Para um subconjunto com **ausência do número zero** teremos: $\mathbb{Z}^*$,$\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{N}^*$ e $\mathbb{R}^*$.

Quando queremos relacionar grandezas variáveis, utilizamos na maioria das vezes o conceito de função.

Desde o século XVII, matemáticos vêm desenvolvendo esse conteúdo até a definição que utilizamos atualmente. Abordaremos um pouco essa evolução no próximo tópico.

Podemos exemplificar esse conceito em várias situações cotidianas e também em várias áreas das Ciências.

Nesse tópico iremos ressaltar algumas definições sobre a função de maneira geral, a nível de Ensino Médio. Para a elaboração e discussão das definições, neste e nos demais capítulos, tomamos como base autores utilizados no Ensino Superior, como Elon Lages Lima [15], mas enfatizando a linguagem e colocação a nível de Ensino Médio presente em [12], [16], [19] e [17].

Definição 1.1. *Dado dois conjuntos, A e B, não vazios, dizemos que f é uma* ***função*** *de A em B se, e somente se, para cada elemento x de A, existe um único elemento correspondente y em B. Notação:*

$$f : A \longrightarrow B$$

$$x \longmapsto f(x) = y$$

Definição 1.2. *O conjunto A é determinado* ***Domínio*** *da função, $\mathbb{D}om(f)$, enquanto o conjunto B é determinado* ***Contradomínio*** *da função.*

$$x \in A$$

$$y \in B$$

Nessas condições x é denominado ***Variável Independente*** *e y é denominado* ***Variável Dependente****.*

Definição 1.3. *O elemento do Domínio que se associa a um elemento do Contradomínio denotamos como* ***Imagem****, $\mathbb{I}m(f)$, ou seja, dado um $x_1 \in A$ sua imagem será determinada como $f(x_1)$. Dizemos então que* ***y está em função de x****.*

$$f(x) = y$$

Definição 1.4. *O Conjunto que tem como elementos* ***todas as imagens*** *da função é chamado de* ***Conjunto Imagem*** *que, consequentemente, é um subconjunto do Contradomínio. O conjunto imagem será denotado por I_m.*

Definição 1.5. *A lei que rege a associação de um elemento x do Domínio à sua imagem $f(x)$ no Contradomínio é chamada de* ***Lei de formação****. Essa Lei de Formação define o comportamento da função, assim como suas características. Existem infinitos tipos de funções, porém, neste trabalho abordaremos as principais vistas no início do Ensino Médio ou final do Ensino Fundamental. Como por exemplo:*

i) ***Função do 1º grau*** *que tem como modelo $f(x) = ax + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$;*

ii) ***Função Quadrática*** *que tem como modelo $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e $c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$;*

iii) ***Função Exponencial*** *que tem como estrutura básica* $f(x) = a^x$*, onde* $\{a \in \mathbb{R} \,|a > 1\}$*;*

iv) ***Função Logarítmica*** *que tem como estrutura básica* $f(x) = log_b x$*, onde* $\{b \in \mathbb{R}_+ \,|b \neq 1\}$*.*

Nos próximos capítulos, vamos estabelecer alguns conceitos, a nível de Ensino Médio, das funções mencionadas. Esses conceitos serão mostrados para servir de auxílio nas aplicações dessas funções nas ciências mencionadas, como Física, Química, Biologia e Geografia. Os conceitos mencionados serão baseados nos autores [15] e [17].

O exemplo a seguir caracteriza uma construção de uma lei de formação da Função Afim bem como a identificação do Domínio e Imagem da função.

Exemplo 1.6. *Uma empresa particular de transporte que está cada vez mais comum em grandes cidades do Brasil é a* ***UBER****, que oferece um serviço semelhante ao que encontramos nos táxis. Em uma determinada cidade, onde existe esse tipo de serviço, o motorista de um carro UBER cobra o valor fixo de R$ 5,50 para a prestação do serviço de transporte acrescido de uma taxa variável, por quilômetro rodado, de R$ 2,50.*

Esse problema cotidiano traduz a dependência entre duas grandezas. O valor a ser pago por um cliente **está em função** da quantidade de quilômetros que ele permanecerá dentro do carro UBER. Determinando que y é o valor pago pela viagem de x quilômetros, podemos escrever uma **lei de formação** que associa essas duas variáveis.

$$y = 5,5 + 2,5 \cdot x$$

Percebemos que essa lei de formação tem a característica de uma função afim que mencionamos anteriormente e que detalharemos no próximo capítulo.

$$f(x) = 5,5 + 2,5 \cdot x$$

Definimos ainda que o domínio dessa função pode ser descrito pelo conjunto A de tal forma que

$$A = \{x \in \mathbb{Q}_+\}$$

Concluímos também que o conjunto imagem é tal que

$$Im = \{y \in \mathbb{Q} \,|y \geqslant 5,5\}$$

Essas conclusões estão na interpretação do problema. Nesse contexto não podemos assumir valores negativos para x e também não podemos assumir valores negativos para y. De acordo com esse exemplo, um cliente que permanecer dentro do carro UBER por exatamente 3 quilômetros terá que pagar um valor de R$ 13,00. Em linguagem de função temos que

$$f(3) = 5,5 + 2,5.3 \Longrightarrow f(3) = 5,5 + 7,5$$

$$f(3) = 13$$

Dizemos que 13 é imagem de 3.

1.3.1 Representação de uma função por meio de Diagramas

Considere uma função f qualquer, que relaciona os elementos do Domínio A com os elementos do Contradomínio B como já vimos anteriormente. Podemos expressar esse comportamento por meio de **Diagramas**.

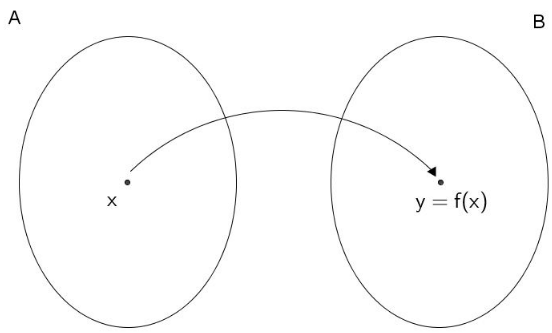


Figura 1.1: Representação por Diagramas

A exemplificação por meio de diagrama nos permite visualizar com mais clareza situações que podem ou não caracterizar uma função. Observaremos isso no problema a seguir.

Exemplo 1.7. *Sabendo que* $A = \{1, 4, 9\}$ *e que* $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 15\}$*, determine se as equações a seguir representam uma função de A em B e, se sim, determine seu conjunto imagem.*

a) $g : y - x = 1$

b) $f : y^2 - x = 0$

c) $h : y - 2x + 3 = 0$

Em todas as alternativas escreveremos as equações de maneira que y fique isolado. Teremos então:

a) $g : y = x + 1$

b) $f : y^2 = x$

c) $h : y = 2x - 3$

Na alternativa a) temos o seguinte diagrama:

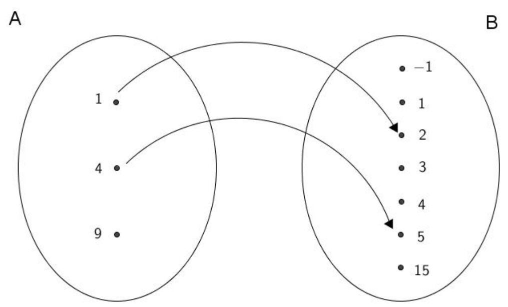


Figura 1.2: Alternativa a)

Observamos que ao substituir o valor de x pelos elementos 1 e 4 obtemos um correspondente no conjunto B, pois $f(1) = 2$ e $f(4) = 5$. Entretanto, o valor de $f(9) = 10$ não pertence ao conjunto B, ou seja, não faz parte do Contradomínio. Portanto existe elemento em A que não possui imagem em B.

Portanto g **não é uma função** de A em B.

Na alternativa b) temos o seguinte diagrama:

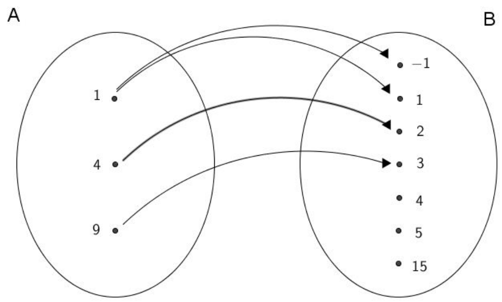


Figura 1.3: Alternativa b)

Apesar de todos os elementos do Domínio A possuírem um correspondente no Contradomínio B, não podemos classificar a equação f como função, pois ela vai contra a Definição 1.1 que afirma que cada elemento x pode possuir uma única imagem. De acordo com o diagrama, visivelmente temos dois valores para $f(1)$.

Portanto f **não é uma função** de A em B.

Quando analisamos o esquema de diagramas da alternativa c) percebemos a diferença entre os anteriores.

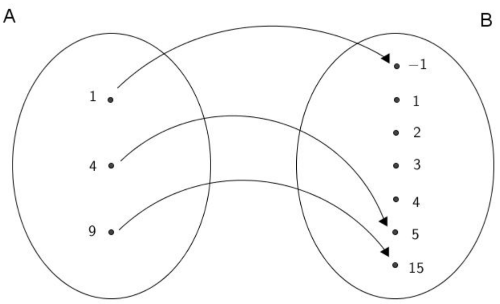


Figura 1.4: Alternativa c)

Observamos que esse esquema está de acordo com a definição 1.1, pois para cada um dos três elementos do conjunto A temos um único correspondente no conjunto B.

Portanto h **é uma função** de A em B.

1.3.2 Representação Gráfica de uma Função

No decorrer deste trabalho, estaremos em constante contato com a representação gráfica das funções, bem como seu comportamento no plano. Para isso, temos que ter a noção bem construída do plano cartesiano.

De acordo com [17], o **Plano Cartesiano** é um plano determinado pelo sistema de eixos ortogonais x (eixo das abscissas) e y (eixo das ordenadas), que o dividem em quatro regiões denominadas de **quadrantes**. Cada um dos pontos do plano cartesiano é composto por uma coordenada horizontal (x) e uma coordenada vertical (y). Esse ponto pode ser chamado também de **par ordenado**. Portanto, o ponto A é formado por x_A e y_A,

$$A = (x_A, y_A)$$

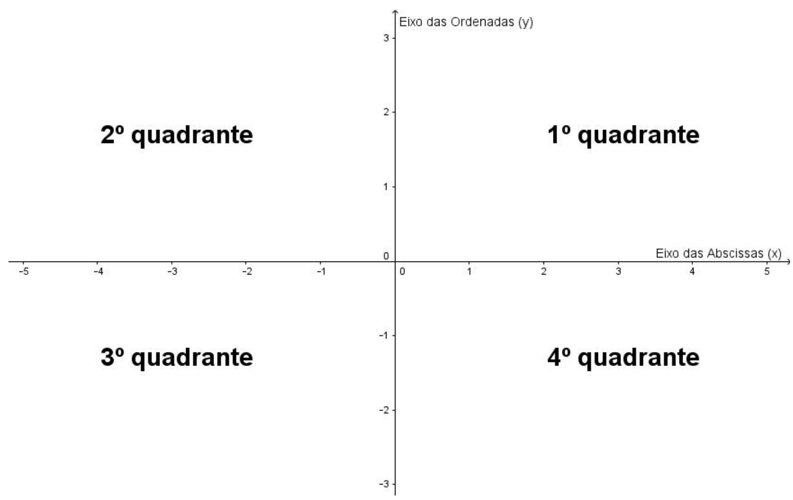


Figura 1.5: Plano Cartesiano

A respeito do plano cartesiano podemos fazer algumas observações importantes, como:

i) Cada par ordenado representa um ponto específico no plano cartesiano.

ii) Para identificar em qual quadrante um determinado ponto se encontra é necessário analisar os sinais de suas coordenadas. Dado um ponto $A = (x, y)$ temos que:

   I) se $x > 0$ e $y > 0$ o ponto A pertencerá ao 1º quadrante.

   II) se $x < 0$ e $y > 0$ o ponto A pertencerá ao 2º quadrante

   III) se $x < 0$ e $y < 0$ o ponto A pertencerá ao 3º quadrante

   IV) se $x > 0$ e $y < 0$ o ponto A pertencerá ao 4º quadrante

Definição 1.8. *O gráfico de uma função é o conjunto de todos os pontos* (x, y) *do plano cartesiano de tal forma que satisfaça a condição de* $y = f(x)$.

No exemplo a seguir, poderemos visualizar o comportamento de uma função, bem como a construção de seu gráfico.

Exemplo 1.9. *Uma pesquisa sobre a reprodução de um determinado réptil constatou que sua população aumentava de acordo com o tempo, levando em consideração um ambiente favorável e sem ações externas que alterassem os dados colhidos. Foi criado um modelo matemático para estabelecer a quantidade de répteis* $(P(x))$ *de acordo com o passar dos anos* (x)*, cuja lei de formação é* $P(x) = 5 \cdot 2^x$.

A partir dessas informações, vamos esboçar o gráfico e ressaltar informações importantes.

Percebemos inicialmente que o Domínio (A) é dado em anos e é contado a partir do início do experimento. Portanto o Domínio não poderá ser negativo. Outra observação importante é em relação ao Conjunto Imagem (Im). Como estamos trabalhando com números de animais, só poderemos ter números inteiros não negativos. Portanto teremos:

$$A = \{x \in \mathbb{Q}_+\}$$

Percebemos também que a imagem no **instante inicial**, para $t = 0$, é 5, ou seja, $P(0) = 5$. Portanto teremos que o Conjunto Imagem será

$$Im = \{x \in \mathbb{Z}/x \geqslant 5\}$$

Vamos analisar a partir de alguns valores o comportamento dessa função bem como a construção do seu gráfico. Já vimos o valor de $P(0)$ e com poucos cálculos encontramos os valores de $P(1) = 10$, $P(2) = 20$ e $P(3) = 40$

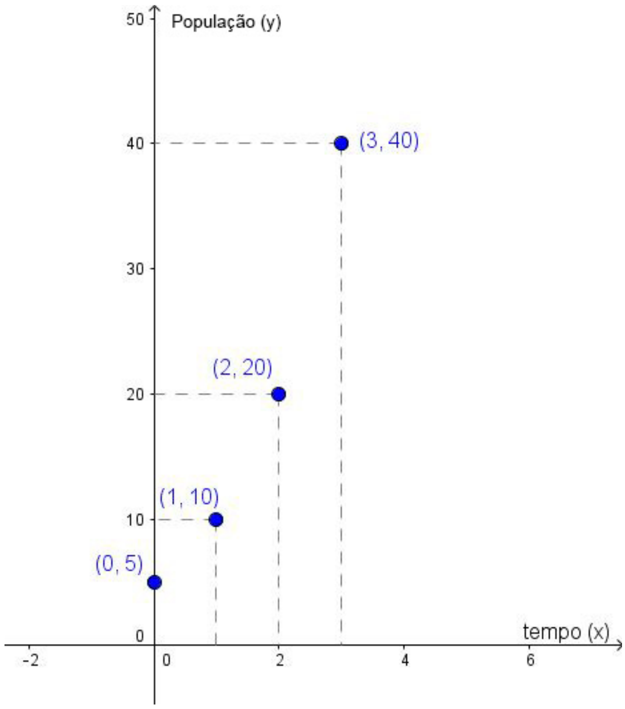


Figura 1.6: Determinação dos Pontos

Observamos, depois das marcações dos pontos, o comportamento do gráfico e a característica da curva que a função define.

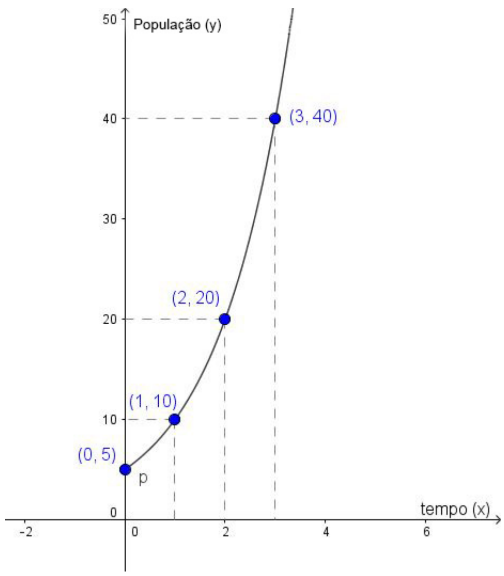


Figura 1.7: Esboço do Gráfico da Função $P(x)$ do Exemplo 1.9

1.3.3 Identificação de uma função a partir do gráfico

De acordo com a definição 1.1, ao atribuir um valor para a variável x, obtemos uma única imagem y correspondente. Com base nessa definição, conseguimos identificar se um gráfico representa ou não uma função. Observe os gráficos a seguir:

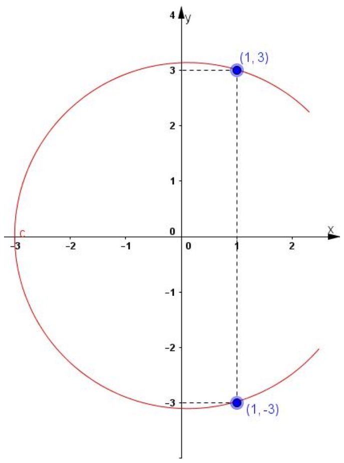


Figura 1.8: Gráfico 1

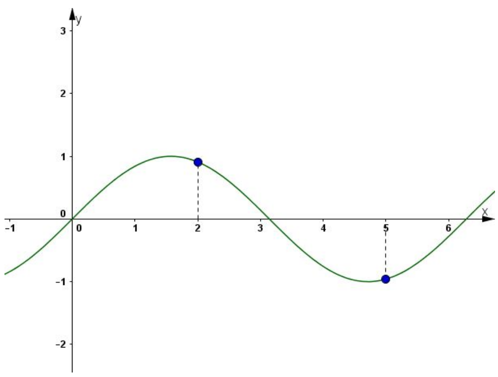


Figura 1.9: Gráfico 2

O Gráfico 1, Figura 1.8, não representa uma função. Observe que para $x = 1$ temos dois correspondentes no eixo das ordenadas, $y = 3$ e $y = -3$

Já no Gráfico 2, Figura [1.9], temos a representação de uma função. Observe que para cada valor de x temos um único correspondente em y.

1.3.4 Raízes e sinais de uma função

Nesse tópico estudaremos os sinais de uma função bem como seu comportamento. Para melhor exemplificar o que queremos vamos esboçar o gráfico da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cuja lei de formação será $f(x) = 4 - x^2$. A curva que obteremos é chamada de **parábola**. No capítulo 3 abordaremos as características da função quadrática com maiores detalhes e mostraremos suas aplicações.

x	y
-3	-5
-2	0
-1	3
0	4
1	3
2	0
3	-5

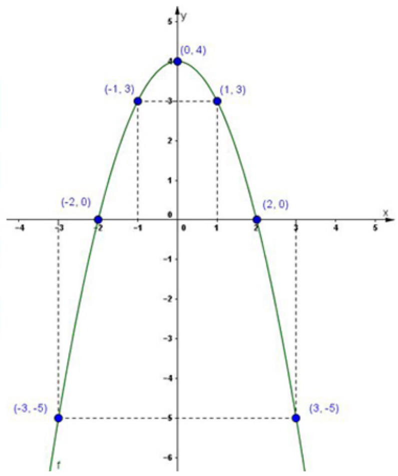


Figura 1.10: Gráfico $f(x) = 4 - x^2$

Definição 1.10. *Os pontos de interseção de uma função com o eixo das abscissas são chamados de* ***Raízes*** *da função, ou seja, para que um ponto seja denominado* ***raiz*** *da função, sua ordenada é igual a zero.*

Na parábola 1.10 identificamos duas raízes, os pontos $(-2, 0)$ e $(2, 0)$

De acordo com a Definição [1.2], a variável y está em função da variável x. Ao estudar o **Sinal da Função** podemos dizer que iremos estudar o sinal de y em relação ao comportamento de x. Pelos conceitos de plano cartesiano, y será positivo no 1º e 2º quadrantes e será negativo no 2º e 4º quadrantes. No gráfico a seguir, percebemos que:

$$f(x) \geqslant 0 \forall x \in \{-2 \leqslant x \leqslant 2\}$$

$$f(x) < 0 \forall x \in \{x < -2\} \cup \{x > 2\}$$

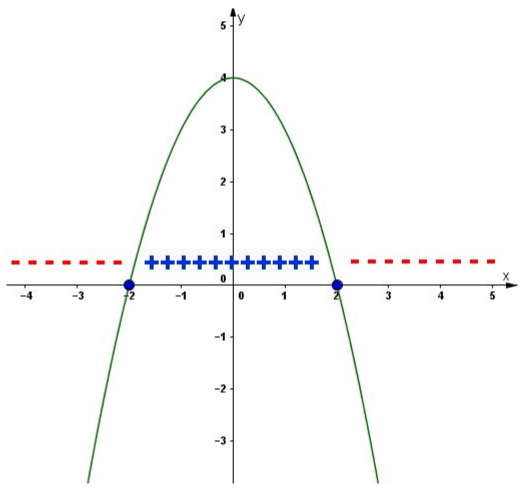


Figura 1.11: Estudo do Sinal

Definição 1.11. *Em uma função f de A em B, considere dois números quaisquer* ***a*** *e* ***b*** *do Domínio e suas respectivas imagens* ***f(a)*** *e* ***f(b)****. Se $a > b$ e $f(a) > f(b)$ chamamos essa função f de uma função* ***crescente*** *naquele intervalo analisado.*

Definição 1.12. *Em uma função f de A em B, considere dois números quaisquer* ***a*** *e* ***b*** *do Domínio e suas respectivas imagens* ***f(a)*** *e* ***f(b)****. Se $a > b$ e $f(a) < f(b)$, chamamos essa função f de uma função* ***decrescente*** *naquele intervalo analisado.*

Para exemplificar essas duas definições anteriores, podemos analisar o gráfico da Figura [1.10]. Em particular, nessa função quadrática, conseguimos identificar um intervalo **crescente** e um outro **decrescente** a partir do ponto $(0, 4)$. A figura a seguir deixa bem claro esses intervalos.

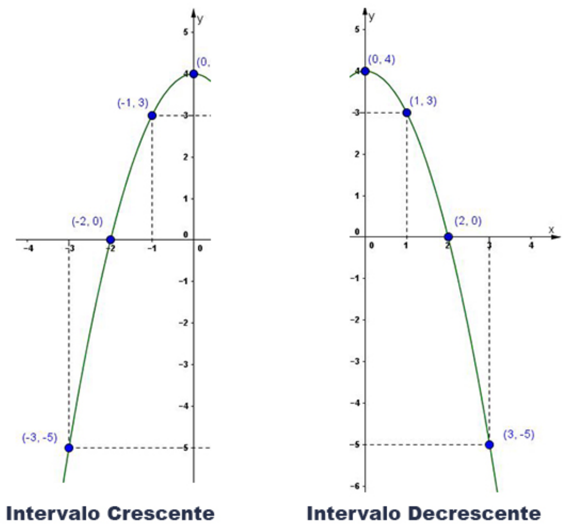


Figura 1.12: Intervalos Crescente e Decrescente

Nesse gráfico, para $x < 0$ temos a função f **crescente** e para $x > 0$ temos a função f **descrescente**.

1.3.5 Função Par e Função Ímpar

Definição 1.13. *Dada uma função f que satisfaz a condição de $f(x) = f(-x)$ para todo x pertencente ao Domínio da função, essa função é classificada como* ***Função Par****.*

Por exemplo: Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^4$. Podemos esboçar seu gráfico da seguinte maneira:

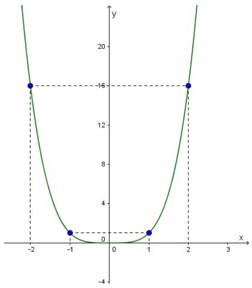


Figura 1.13: Função Par

Podemos notar que $f(1) = f(-1) = 1$, $f(-2) = f(2) = 16$ e assim sucessivamente. Além disso, podemos observar que o gráfico da função f é **simétrico** em relação a y. Dizemos então que essa função f é uma **função par**.

Definição 1.14. *Dada uma função f que satisfaz a condição de $f(-x) = -f(x)$ para todo x pertencente ao Domínio da função, essa função é classificada como* ***Função Ímpar****.*

Por exemplo: Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^3$. Podemos esboçar seu gráfico da seguinte maneira:

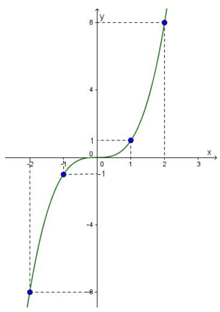


Figura 1.14: Função Ímpar

Destacamos $f(1) = 1$, $f(2) = 8$, $f(-1) = -1$ e $f(-2) = -8$. Claramente observamos a condição destacada na Definição 1.14 e ainda destacamos que o gráfico de f é simétrico em relação à origem. Portanto f é uma **função ímpar**.

1.3.6 Função Injetora, Sobrejetora e Bijetora

Definição 1.15. *Uma função $f : A \longrightarrow B$ é chamada de* ***Injetora*** *quando cada elemento de A tem uma imagem* ***distinta*** *de qualquer outra imagem em B.*

Portanto, dados x_1 e x_2 em A tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definição 1.16. *Uma função $f : A \longrightarrow B$ é chamada de* ***Sobrejetora*** *quando o Conjunto Imagem [Im] de f é igual a B, ou seja, todo elemento do contradomínio é imagem da função f.*

Definição 1.17. *Uma função $f : A \longrightarrow B$ é chamada de **Bijetora** quando ela é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora.*

O exemplo a seguir, nos dará uma representação das definições anteriores.

Exemplo 1.18. *Classificaremos a função $f : A \longrightarrow B$ em Injetora, Sobrejetora ou Bijetora. Com $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$ e $f(x) = x + 2$.*

A solução em diagrama nos permite ter uma vizão clara do comportamento dessa função.

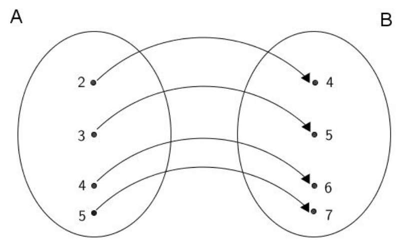


Figura 1.15: Exemplo de Bijeção

Observamos que cada elemento de A possui um único e diferente correspondente em B, portanto Injetora. Percebemos também que todos os elementos de B são imagens de algum elemento de A, portanto Sobrejetora. Concluímos que a função f é **Bijetora**.

1.3.7 Função Composta

Definição 1.19. *Dadas duas funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$, podemos chamar de **Função Composta** de g com f a função $g(f(x)) : A \longrightarrow C$ para qualquer $x \in A$. Notação: $g(f(x)) = g \bigcirc f(x)$*

A situação a seguir pode exemplificar bem claramente o comportamento e a utilização da função composta.

Exemplo 1.20. *Um técnico de um site de downloads de músicas decidiu criar uma relação que permitia calcular a quantidade média de downloads em Megabytes (MB) por hora. Para isso ele usou dois dados que possuía: e sabia que, em média, ocorriam uns 15 acessos por hora e também que a cada acesso, em média, seriam feitos 22 MB de download. Crie uma função f que faça a relação que esse técnico necessita.*

Incialmente moldaremos as duas funções que conhecemos com seus respectivos domínios e imagens, assim como as letras para definir as grandezas que trabalharemos.

A será o conjunto das horas transcorridas, B o conjunto dos números de acessos e C o conjunto das quantidades de MB de downloads. As horas transcorridas, números de acessos e quantidade de download serão, respectivamente, **t**, **a** e **d**. Portanto teremos a função $f : A \longrightarrow B$ e a função $g : B \longrightarrow C$. Portanto teremos:

$$f \mapsto a = 15 \cdot t$$

$$g \mapsto d = 22 \cdot a$$

Para criar a relação de d e t, substituiremos f em g e obteremos:

$$g = 22 \cdot (15 \cdot t) \longrightarrow g(t) = 330 \cdot t$$

Portanto

$$g \bigcirc f = 330t$$

A construção de um esquema de diagramas deixa bem evidente o que acontece em uma função composta. Veja o esquema a seguir:

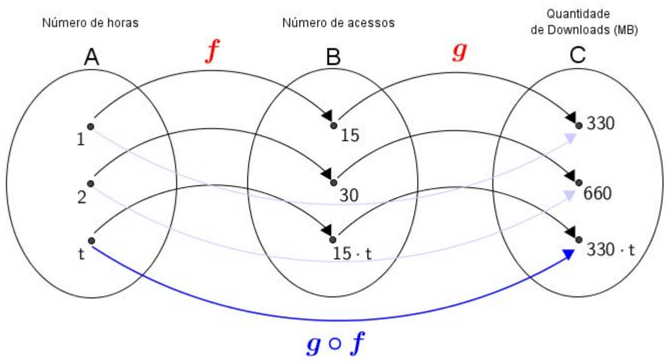


Figura 1.16: Função Composta

1.3.8 Função Inversa

Definição 1.21. *Sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$, funções* ***Bijetoras****. Considere um $a \in A$ e um $b \in B$ quaisquer, de tal modo que $f(a) = b$. Se $g(b) = a$, para todo a e b, então podemos classificar que a função g é* ***Inversa*** *de f. Notação*

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

O exemplo a seguir nos permite analisar mais claramente como se comporta uma função inversa.

Exemplo 1.22. *Considere um cubo de lado x. Vamos analisar duas funções,* ***f*** *e* ***g*** *bijetoras, em relação a esse cubo. A função f irá relacionar o lado do cubo com seu volume e a função g irá relacionar o volume do cubo com seu respectivo lado.*

Podemos criar facilmente as duas leis de formação, para $x \in \mathbb{R}_+$.

$$f(x) = x^3$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x}$$

Com alguns pares, podemos exemplificar a situação com diagramas:

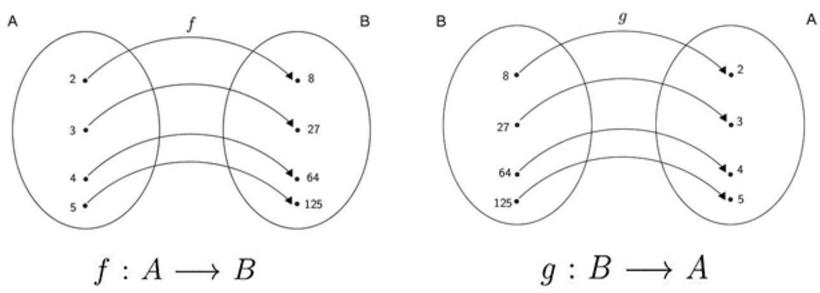


Figura 1.17: Função Inversa

Existe uma característica presente em todas as Funções Inversas. Se um ponto $A = (a, b)$ pertence a uma função bijetora f, então podemos afirmar que o ponto $B = (b, a)$ pertence à inversa de f. Com isso, o gráfico de $f(x)$ será **simétrico** ao gráfico de $f^{-1}(x)$ em relação à **bissetriz dos quadrantes ímpares** ($y = x$).

Para determinar a lei de formação de uma função inversa, podemos utilizar uma estratégia interessante que será apresentada a seguir e chamada de **regra prática** da função inversa. Essa regra é utilizada para funções do 1º grau [2.1].

Observação 1.23. ***Regra Prática da Função Inversa:***

Dada uma função $f(x)$, bijetora, a lei de formação de sua inversa $f^{-1}(x)$ será determinada seguindo as seguintes estratégias:

i) Na lei de formação original, troca-se o x por $f(x)$, ou seja, troca-se x por y.

ii) Em seguida, isola-se y em função de x para obter a lei de formação da inversa.

O exemplo a seguir permite visualizar melhor essa regra, bem como a simetria dos gráficos.

Exemplo 1.24. *Esboce o gráfico das funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sabendo que $f(x) = 2x - 1$ e $g(x)$ é a inversa de $f(x)$.*

Solução: Aplicando a regra prática da função inversa [1.23], teremos que $g(x)$ será:

Escreveremos a função $f(x)$ como $y = 2x - 1$.

i) Primeiro trocaremos y por x.

$$x = 2y - 1$$

ii) Em seguida isolaremos y

$$2y = x + 1 \Longrightarrow y = \frac{x+1}{2}$$

Portanto temos que $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$. Em seguida, esboçaremos os dois gráficos pedidos.

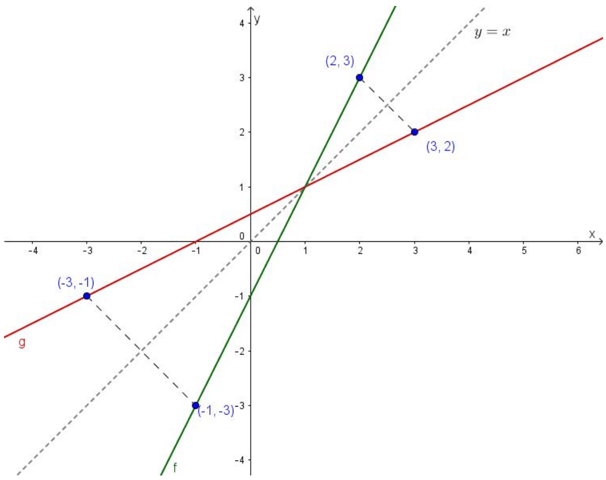


Figura 1.18: Gráfico da Função Inversa

■

Observamos os pontos destacados em suas funções bem como seus respectivos simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Nos capítulos 2, 3 e 4, apresentaremos contextualizações para as definições propostas nesse capítulo com as ciências abordadas no Ensino Médio (Química, Física, Biologia e Geografia).

CAPÍTULO 2

FUNÇÃO DO 1º GRAU E SUAS APLICAÇÕES

Neste capítulo, definiremos os conceitos básicos da função do 1º grau a nível de Ensino Médio e, posteriormente, contextualizaremos essa função destacando os conceitos básicos de função estudados no Capítulo [1] desse trabalho. Para realizar tal análise, utilizaremos exemplos de outras disciplinas como Física, Química e Geografia.

As definições presentes nesse capítulo foram escritas com base no estudo de títulos como [12], [15], [17], [18], [19], [21] e [22].

2.1 Função do 1º grau

Definição 2.1. *Uma função $f(x)$ é denominada* ***função do 1º grau*** *quando sua lei de formação é um polinômio do 1º grau. Portanto sua lei de formação é*

$$f(x) = a \cdot x + b$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e a é chamado de ***coeficiente angular*** *e b é chamado de* ***coeficiente linear***.

2.1.1 Gráfico da Função do 1º grau

O gráfico da função do primeiro grau comporta-se **linearmente**, ou seja, o esboço desse gráfico é uma linha reta no plano cartesiano. Essa característica linear é resultado da variável x de expoente 1 multiplicado pela constante real a que representa a inclinação dessa reta.

Definição 2.2. *O* ***Coeficiente Angular*** *a, também chamado de* ***taxa de variação***, *é responsável pela inclinação do gráfico da função do 1º grau. Este coeficiente é constante em todo intervalo do Domínio.*

Para calcular essa constante, utilizaremos dois pontos, $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$, que pertencem ao gráfico de uma função do 1º grau $f(x) = ax + b$.

O coeficiente a é a tangente do ângulo α que é formado pelo gráfico da função com o eixo das abscissas.

Calculando a tangente de α teremos:

$$a = tg\alpha = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

A partir dessa definição, podemos concluir que o comportamento do gráfico da função do 1º grau varia de acordo com essa inclinação α e, portanto, afirmar que quando $0^o < \alpha < 90^o$ essa função será **crescente**, quando $90^o < \alpha < 180^o$ a função será **decrescente** e quando $\alpha = 0$ sua função será **constante**. Os gráficos a seguir demonstram essas afirmações.

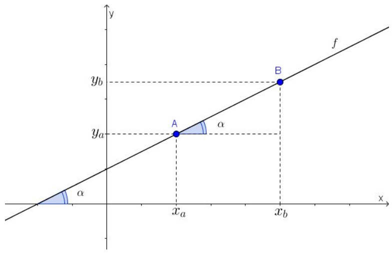


Figura 2.1: $tg\alpha > 0$ pois $0 < \alpha < 90^o$

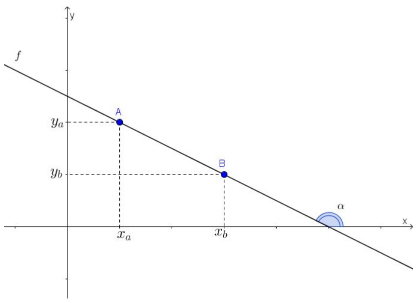


Figura 2.2: $tg\alpha < 0$ pois $90^o < \alpha < 180^o$

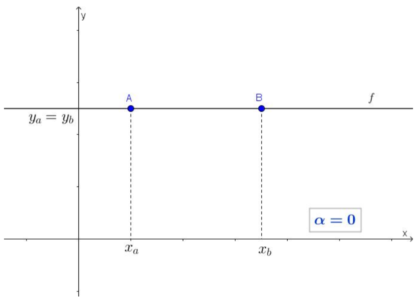


Figura 2.3: $tg\alpha = 0$ pois $\alpha = 0$

Podemos resumir que:

$$a > 0 \longrightarrow \text{ função crescente.}$$

$$a < 0 \longrightarrow \text{ função decrescente.}$$

$$a = 0 \longrightarrow \text{ função constante.}$$

Observação 2.3. ***Ângulo igual a 90º*** *Quando $\alpha = 90^o$, a reta representada no plano cartesiano será paralela ao eixo das ordenadas como mostra a figura seguir:*

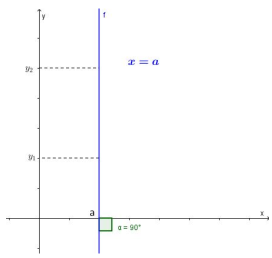


Figura 2.4: $\alpha = 90^{\text{o}}$

A equação, cujo modelo é $x = a$ com $a \in \mathbb{R}$, não atende à Definição [1.1], pois o domínio a possuirá mais de uma imagem em y. Portanto gráficos do tipo $x = a$ ***não representam funções****.*

2.1.2 Pontos de interseção com os Eixos Coordenados

Os pontos de interseção da função do 1º grau com os eixos x e y são extremamente cobrados em exercícios em diversos vestibulares. Baseado nessa relevância, apresentaremos as seguintes definições:

Definição 2.4. *O ponto de interseção com o eixo das ordenadas implica que sua abscissa é igual a zero ($x = 0$). Substituindo esse valor na lei de formação $f(x) = ax + b$ teremos o ponto $(0, b)$.*

Podemos afirmar que uma reta no plano cartesiano sempre terá sua interseção no eixo das ordenadas na altura do coeficiente linear b.

Definição 2.5. *O ponto de interseção com o eixo das abscissas x, raiz da função, implica que sua ordenada é igual a zero ($y = 0$). Substituindo na lei de formação teremos:*

$$y = ax + b \Longrightarrow ax + b = 0$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Além da função constante, crescente e decrescente que observamos em [2.1], [2.2] e [2.3], respectivamente, podemos classificar a função quanto à variação do coeficiente linear:

Definição 2.6. *Quando, em uma função do primeiro grau* $f(x) = ax + b$, $b = 0$ *podemos denominá-la de* ***função linear****, cuja característica é a interseção com o ponto* $(0, 0)$ *(Origem dos eixos coordenados).*

$$f(x) = ax$$

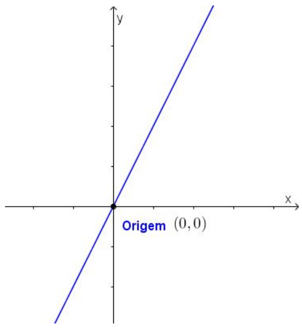


Figura 2.5: Função Linear $\longrightarrow f(x) = ax$

Uma observação bastante relevante quando trabalhamos com a função linear é que as variáveis x e y são **diretamente proporcionais**, a razão entre elas será sempre uma constante. Essa constante de proporcionalidade é o coeficiente angular a.

Se $f(x) = y$, de acordo com a definição [2.6] teremos:

$$y = a \cdot x \longrightarrow a = \frac{y}{x}$$

Dizemos que y é diretamente proporcional a x e que $x \neq 0$.

Definição 2.7. *Quando temos, em uma função do primeiro grau* $f(x) = ax + b$, *com* $a, b \neq 0$ *podemos denominá-la de* ***função afim****.*

O gráfico a seguir, destaca os pontos de interseção citados nesta subseção.

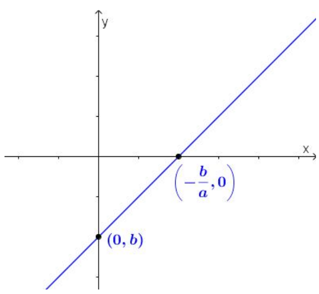


Figura 2.6: Pontos de interseção da Função Afim

2.2 Aplicações

Nesta seção vamos utilizar algumas contextualizações para função do 1º grau com o objetivo de identificar os conceitos iniciais da matéria função, mencionadas do Capítulo [1].

O objetivo deste capítulo, assim como nos demais, é utilizar algumas situações contextualizadas com outras disciplinas para identificar a aplicação do conteúdo de funções. Não temos a intenção de mostrar todas as situações envolvendo a função do 1º grau, bem como as demais funções que serão abordadas, nosso foco é utilizar alguns exemplos envolvendo-as.

2.2.1 Física

Na cinemática, parte da física que estuda a característica dos movimentos de corpos ou partículas, conseguimos várias associações com função. Dentro desse conteúdo, podemos ter variações de velocidade, aceleração e posição de objetos em relação a um determinado tempo. Em cada tipo de movimento diferente, temos uma função associada e, assim, comportamentos diferentes dos gráficos.

Esses tópicos em física são importantes ferramentas no ensino do conteúdo de funções, pois essas ideias são facilmente contextualizadas no cotidiano do aluno, do final do Ensino Fundamental e início do Ensino Médio. Exemplos como deslocamento, aceleração e velocidade de automóveis, lançamento de bolas, dardos ou qualquer objeto de fácil acesso ao aluno e a própria gravidade da terra não exigem uma explicação muito complexa para que o aluno perceba o comportamento da função, bem como suas características, despertando assim o interesse no principal conteúdo desse trabalho.

A seguir definiremos alguns tópicos da cinemática para nos ajudar a relacionar com o estudo de funções. Os conteúdos que serão apresentados, sintetizados, através de pesquisas com materiais de Ensino Médio de física, como [8] e [19], tem como objetivo apresentar de forma superficial e objetiva a ideia central das disciplinas, para criar um elo com o conteúdo de função. Para maiores detalhes dos conteúdos definidos em sequência, consultar os títulos mencionados nesse parágrafo.

Definição 2.8. *A velocidade escalar média (V_m) é a razão entre a distância percorrida (ΔS) pela variação do tempo (Δt).*

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

A variação da distância (ΔS) é a diferença entre a posição final (S) pela posição inicial (S_0) do objeto, ou seja, $\Delta S = S - S_0$.

A variação da tempo (Δt) é a diferença entre o tempo final (t) pelo tempo inicial (t_0) do objeto, ou seja, $\Delta t = t - t_0$.

A velocidade, instantânea, escalar ou média, no Sistema Internacional de Medidas (SI), é medida em metros por segundo, ou seja, $\dfrac{metros}{segundo} = \dfrac{m}{s}$.

Definição 2.9. *Quando um determinado objeto desloca-se por uma distância ΔS, em um determinado intervalo de tempo Δt e mantém uma velocidade constante, nomeamos esse movimento como **Movimento Uniforme** (MU). A velocidade v é constante em todo o trajeto. Portanto $v = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$*

Assumindo que o tempo inicial t_0 de um movimento é igual a zero, ou seja, $t_0 = 0$, teremos a seguinte equação:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \longrightarrow v = \frac{S - S_0}{t - t_0}$$

$$S = S_0 + v \cdot t \text{ (Função horária da posição no MU)}$$

Vamos utilizar o conteúdo do Movimento Uniforme para destacar características de uma função no exemplo a seguir:

Exemplo 2.10. *(FUVEST - SP - 2009) Marta e Pedro combinaram encontrar-se em um certo ponto de uma autoestrada plana, para seguirem viagem juntos. Marta, ao passar pelo marco zero da estrada, constatou que, mantendo uma velocidade média de 80 km/h, chegaria na hora certa ao ponto de encontro combinado. No entanto, quando ela já estava no marco do quilômetro 10, ficou sabendo que Pedro tinha se atrasado e, só então, estava passando pelo marco zero, pretendendo continuar sua viagem a uma velocidade média de 100 km/h. Mantendo essas velocidades, seria previsível que os dois amigos se encontrassem próximos a um marco da estrada com indicação de*

a) km 20

b) km 30

c) km 40

d) km 50

e) km 60

Aplicações em Função:

Utilizando a função horária da posição citada na Definição [2.9] conseguiremos montar uma função para Pedro e uma para Marta. O exercício pede que descubramos o marco da estrada (posição) em que Pedro e Marta se encontrarão depois de terem se deslocado por um tempo **t**. Para construir nossas funções vamos inicialmente denotar a posição de Marta em função do tempo por $S_m(t)$ e a posição de Pedro em função do tempo como $S_p(t)$.

i) **Leis de Formação**

Quando Pedro inicia seu deslocamento no marco zero da estrada, Marta já está no marco de 10 km, portanto, para trabalharmos com a mesma unidade tempo utilizaremos que a posição inicial de Marta, quando Pedro começa a se deslocar, é 10 km, ou seja, no tempo $t = 0$ Marta estava na posição de 10 km enquanto Pedro estava começando seu deslocamento no marco 0 km da rodovia.

Como a velocidade em ambos é constante, podemos afirmar que para cada unidade de hora, Marta se deslocará 80 km e Pedro 100 km. Observado essa regularidade podemos afirmar que a posição de Marta ($S_m(t)$) e a posição de Pedro ($S_p(t)$) em função do tempo t será:

$$S_m(t) = 10 + 80 \cdot t$$

$$S_p(t) = 100 \cdot t$$

Comparando com os tópicos estudados nesse capítulo, conseguimos perceber que ambas funções, $S_m(t)$ e $S_p(t)$ são do primeiro grau. A função S_m tem os coeficientes angular e linear diferentes de zero, portanto podemos classificá-la como uma **função afim**[2.7]. Já a função $S_p(t)$ tem o coeficiente linear igual a zero, característica de uma **função linear**[2.6].

ii) **Domínio e Conjunto Imagem da Função**

A proposta do exercício é que Marta e Pedro permaneçam nas respectivas funções (posição S em função do tempo t) $S_m(t)$ e $S_p(t)$ até se encontrarem no ponto requisitado para, a partir daí, seguirem viagem juntos. Vamos considerar esse ponto de encontro como E, cujas coordenadas serão t_e (tempo) e s_e (posição), e logo em seguida determinar o domínio e Imagem das funções.

Percebemos, ao analisar as leis de formação e comparar com as definições propostas no capítulo, que ambas são funções crescentes, de acordo com a Definição [2.1]. O tempo do trajeto percorrido por Pedro varia de zero até o tempo que eles precisam para se encontrar (tempo final). Portanto o Domínio da função $S_p(t)$ de Pedro será:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,|0 \leqslant x \leqslant t_e\}$$

No Domínio da função $S_m(t)$ o tempo final será o mesmo (tempo para o encontro), mas quando $t = 0$, momento em que Pedro começa seu deslocamento, Marta já estava se movimentando na estrada. Para descobrirmos qual foi o tempo inicial em que Marta começou seu movimento, em relação ao tempo zero proposto pelo exercício, iremos considerar que nesse momento a posição na estrada de Marta é no marco zero, portanto $S_m(t) = 0$. Teremos então o seguinte tempo:

$$S_m = 0 \longrightarrow 0 = 10 + 80 \cdot t \longrightarrow t = -\frac{1}{8}$$

$$t = -\frac{1}{8} \text{ ou } t = -0,125$$

O sinal negativo do tempo significa que ele foi considerado antes do tempo zero, ou seja, antes da hora em que Pedro iniciou seu movimento, como já sabíamos pelo enunciado. Descobrimos então que o Domínio da função de S_m será:

$$D = \left\{ t \in \mathbb{R} \middle| -\frac{1}{8} \leqslant t \leqslant t_e \right\}$$

O Conjunto Imagem de ambas funções terão a coordenada s_p como posição final, mas seus valores iniciais serão diferentes. Para $t = 0$, valor inicial do domínio de Pedro, teremos $S_p(t) = 0$. O conjunto imagem de $S_p(t)$ será:

$$I_m = \{ s \in \mathbb{R} \,|0 \leqslant s \leqslant s_e \}$$

O conjunto imagem de $S_m(t)$ será a partir da posição $S_m = 0$ quando seu tempo será de $t = -0,125$, como vimos anteriormente. Portanto o conjunto imagem de $S_m(t)$ será:

$$I_m = \{ x \in \mathbb{R} \,|0 \leqslant x \leqslant s_e \}$$

iii) **Ponto de Interseção das Funções**

O ponto $E = (t_e, s_e)$ traduz, na prática, quanto tempo (t_e) Marta e Pedro irão precisar para chegarem na mesma posição (s_e). Para descobrir a posição de encontro teremos $S_m(t) = S_p(t)$ que implica:

$$S_m(t) = S_p(t) \longrightarrow 10 + 80 \cdot t = 100 \cdot t$$

$$20 \cdot t = 10 \longrightarrow t = \frac{10}{20}$$

$$t = 0,5 \text{ horas}$$

Substituindo o valor $t = 0,5$ em uma das funções, S_m por exemplo, teremos o valor da posição de encontro.

$$S_m(0,5) = 10 + 80 \cdot (0,5) \longrightarrow S_m(0,5) = 10 + 40$$

$$S_m(0,5) = 50 \text{ km}$$

Pode-se concluir que Marta e Pedro se encontraram no marco de 50 km da estrada em que estavam depois de 30 minutos de viagem.

iv) **Esboço do Gráfico das Funções**

Com as informações adquiridas no subitem [iii)], podemos esboçar o gráfico das funções $S_m(t)$ e $S_p(t)$.

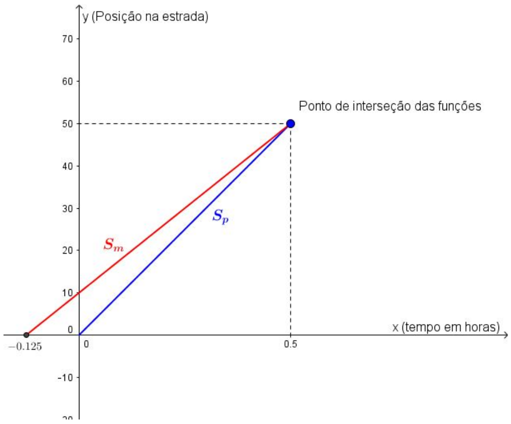


Figura 2.7: Gráfico de $S_p(t)$ e $S_m(t)$

O ponto de interseção destacado no gráfico traduz o ponto de encontro exigido pelo problema.

v) **Função Inversa**

Pela Definição 1.15, podemos perceber pela característica da função do primeiro grau e também pela análise do gráfico, que ambas funções são **injetoras**. Considerando que os contradomínios das funções $S_m(t)$ e $S_p(t)$ são iguais aos seus respectivos conjuntos imagem, afirmamos que $S_m(t)$ e $S_p(t)$ são **sobrejetoras** e, com isso, concluímos que elas serão **bijetoras**.

A partir das conclusões no parágrafo anterior, $S_m(t)$ e $S_p(t)$ possuirão uma função inversa que será denominada de S_m^{-1} e S_p^{-1}, respectivamente.

Aplicando a regra prática da função inversa [1.23], teremos que as leis de formação de $S_m^{-1}(x)$ e $S_p^{-1}(x)$ serão:

$$S_m^{-1}(x) = \frac{x-10}{80}$$
$$S_p^{-1}(x) = \frac{x}{100}$$

Assim teremos o tempo S^{-1} em função da posição **x**. Esboçando os gráficos das inversas no plano cartesiano, teremos:

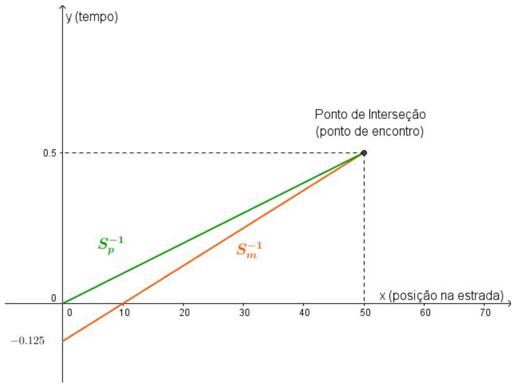


Figura 2.8: Inversas de $S_m^{-1}(x)$ e $S_p^{-1}(x)$

vi) **Função Ímpar**

Vamos tomar a equação da posição de Pedro em função do tempo, porém, com Domínio e Contradomínio igual ao conjunto dos números Reais $\mathbb{R}$. Chamando essa função de $f(x)$ teríamos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f(x) = 100x$.

Tomando um valor **a** do Domínio, teríamos que $f(a) = 100 \cdot a$ e, tomando o tempo oposto, **-a** do Domínio, teríamos que

$$f(-a) = 100 \cdot (-a) \longrightarrow f(-a) = -100 \cdot a$$

.

Portanto $f(-a) = -f(a)$, o que caracteriza uma **função ímpar**, de acordo com Definição 1.14.

Podemos afirmar, ainda, pela demonstração anterior, que uma função horária da posição no Movimento Uniforme é **ímpar** se o movimento se inciar na posição zero, ou seja, se ela for linear.

■

Percebemos com esse exercício e as aplicações nele contidas o quão importante é a contextualização de uma disciplina com a introdução do conteúdo de função. Uma vez que é associado a introdução de função às variações de movimento, por exemplo, o aluno deixa de resolver um exercício de forma mecânica (somente utilizando fórmulas) e passa a enxergar cada exercício sobre funções, ou, nesse caso, de movimento uniforme, como um exercício que requer interpretação e associação de disciplinas que, no entendimento do aluno, seriam independentes.

Uma outra classe de movimento, ainda em cinemática, é aquele em que a velocidade não é constante, mas varia com o passar do tempo, ou seja, a velocidade apresenta variações em determinados intervalos de tempo, classificamos esse movimento como **Movimento Acelerado**. Essa variação é denominada de **aceleração**

escalar instantânea, a, que representa a variação da velocidade por uma variação do tempo. Podemos calculá-la da seguinte maneira:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

No sistema internacional de medidas (SI), temos que ΔV é dado em metros por segundo ($\frac{m}{s}$) e o Δt em segundos (s), portanto, no SI, a aceleração a será em $\frac{m}{s^2}$ (metros por segundo ao quadrado).

Definição 2.11. *Quando temos um movimento acelerado em que a aceleração é constante em todo seu percurso, podemos chamá-lo de **Movimento Uniformemente Variado** (MUV).*

Neste movimento podemos escrever a aceleração como

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \longrightarrow a = \frac{V_1 - V_0}{t_1 - t_0}$$

Desenvolvendo essa igualdade e considerando $t_0 = 0$ (tempo inicial igual a zero), teremos:

$$t_1 \cdot a = V_1 - V_0 \longrightarrow V_1 = V_0 + a \cdot t_1$$

Definição 2.12. *A igualdade $V = V_0 + a \cdot t$ é denominada de **função horária da velocidade**, em que V é a velocidade no instante t, V_0 a velocidade inicial e a, a aceleração.*

Podemos perceber que a equação da função horária é uma lei de formação de função do 1º grau, Definição 2.1, ou seja, representa no plano (velocidade X tempo) uma reta, como na figura a seguir:

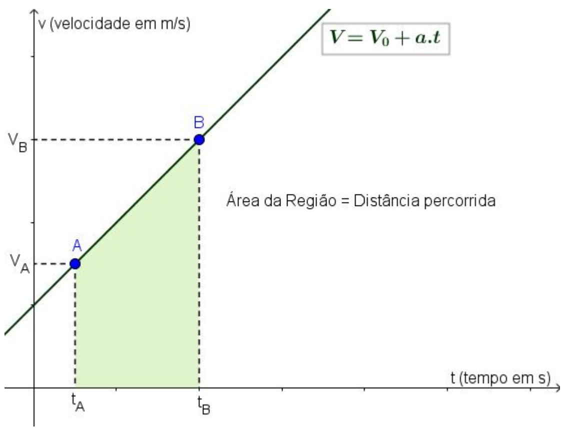


Figura 2.9: Velocidade x Tempo = Distância Percorrida

Definição 2.13. *Dado um plano cartesiano Velocidade X Tempo temos que a **área sob a curva do gráfico**, em um dado intervalo de tempo, é numericamente igual ao deslocamento percorrido pelo móvel estudado.*

Calculando a área do trapézio destacado na Figura 2.9 teremos:

$$\Delta S = \frac{(V_B + V_A) \cdot (t_B - t_A)}{2}$$

Considerando V_B como a função horária $V = V_0 + a \cdot t$, $V_A = V_0$, $t_A = 0$ e $t_B = t$ teremos uma nova relação no MUV:

$$\Delta S = \frac{(V_0 + a \cdot t + V_0) .t}{2} \longrightarrow \Delta S = V_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

Definição 2.14. *Vamos considerar essa equação como* ***função horária da posição****. Considerando $\Delta S = S - S_0$ (variação da posição) teremos que:*

$$S = S_0 + V_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

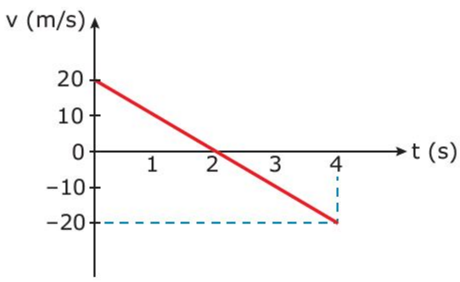
Definição 2.15. *Utilizando a função horária da velocidade $V = V_0 + a \cdot t$ [2.12] e a função horária da posição [2.14], conseguimos obter uma nova equação que não depende do tempo. Conhecida como* ***Equação de Torriceli****.*

$$V^2 = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta S$$

Essas são as principais funções utilizadas no início do Ensino Médio para trabalhar com as grandezas propostas no Movimento Uniformemente Variado. O objetivo do trabalho não é citar, detalhadamente, o conteúdo de MUV, para um estudo mais aprofundado e teórico sobre o conteúdo citado pode-se consultar [8].

O exemplo a seguir, da Universidade Federal de Santa Maria, nos permite analisar alguns pontos importantes de uma função como análise de Domínio e Conjunto Imagem, lei de formação, entre outros comportamentos.

Exemplo 2.16. *(UFSM - 2012) O gráfico a seguir representa a velocidade de um objeto lançado verticalmente para cima, desprezando-se a ação da atmosfera.*



Assinale a afirmativa ***INCORRETA****:*

a) O objeto atinge, 2 segundos após o lançamento, o ponto mais alto da trajetória.

b) A altura máxima atingida pelo objeto é 20 metros.

c) O deslocamento do objeto, 4 segundos após o lançamento, é zero.

d) A aceleração do objeto permanece constante durante o tempo observado e é igual a 10 m/s^2.

e) A velocidade inicial do objeto é igual a 20 m/s.

Aplicações em Função:

i) **Interpretação do Gráfico - Domínio e Conjunto Imagem**

O gráfico apresentado no exercício relaciona a velocidade (eixo das ordenadas), em metros por segundo, com o tempo (eixo das abscissas), em segundos. A curva mostrada possui intervalos no Domínio (possíveis valores de t) e no o Conjunto Imagem (possíveis valores de v), que serão:

$$D = \{t \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leqslant t \leqslant 4\}$$

$$I_m = \{v \in \mathbb{R} \,|\, -20 \leqslant v \leqslant 20\}$$

ii) **Lei de Formação da Função**

No gráfico, a velocidade diminui de acordo com o decorrer do tempo. Com base nessas informações adquiridas no gráfico, afirmaremos que esse gráfico é **decrescente**.

Podemos perceber que a curva em questão é reta, que é uma das características principais da função do 1º grau, cuja lei de formação é $f(x) = a \cdot x + b$. Para melhor associação, chamaremos $x = t =$ (tempo) e $f(t) = v$ (velocidade) e logo em seguida descobriremos as constantes reais a e b utilizando dois dos pontos presentes no gráfico: O ponto $(0, 20)$ e o ponto $(2, 0)$.

Para o ponto $(0, 20)$, teremos:

$$20 = a \cdot 0 + b \longrightarrow b = 20$$

Utilizando o ponto $(2, 0)$ e sabendo que $b = 20$, teremos:

$$0 = a \cdot 2 + 20 \longrightarrow 2 \cdot a = -20 \longrightarrow a = -10$$

Teremos que a lei que rege essa reta é $f(t) = -10 \cdot t + 20$.

A partir dessa informação, associada com a análise do gráfico, podemos testar a veracidade de algumas alternativas do exercício.

Podemos afirmar que a velocidade inicial do objeto, no momento $t = 0$, é 20 m/s e que, no decorrer do movimento, sua velocidade vai diminuindo até chegar em 0 m/s, quando $t = 2$. Esse decrescimento é característica de uma aceleração negativa de $-10\ m/s^2$. Como o lançamento foi verticalmente para cima, concluímos que no instante $t = 2$ o objeto deixa de subir e passa a descer a partir do instante $t = 2$, portanto quando $t = 2$ o objeto atinge sua altura máxima.

Concluímos, então, pela análise das informações, que as alternativas **a** e **e** são verdadeiras, enquanto **d** é falsa.

iii) **Gráfico da Posição x Tempo**

Utilizando a função horária da posição, presente na Definição 2.14, e atribuindo os valores descobertos $V_0 = 20$ m/s, $S_0 = 0$ e $a = -10\ m/s^2$, teremos:

$$S(t) = 20 \cdot t - \frac{10 \cdot t^2}{2}$$

Como a lei de formação é uma função do 2º grau, que será trabalhada mais detalhadamente no próximo capítulo, o gráfico será uma **parábola** cujo Domínio será o intervalo fornecido $D = \{t \in \mathbb{R}\,|0 \leqslant t \leqslant 4\}$. Esboçando o gráfico em questão, teremos:

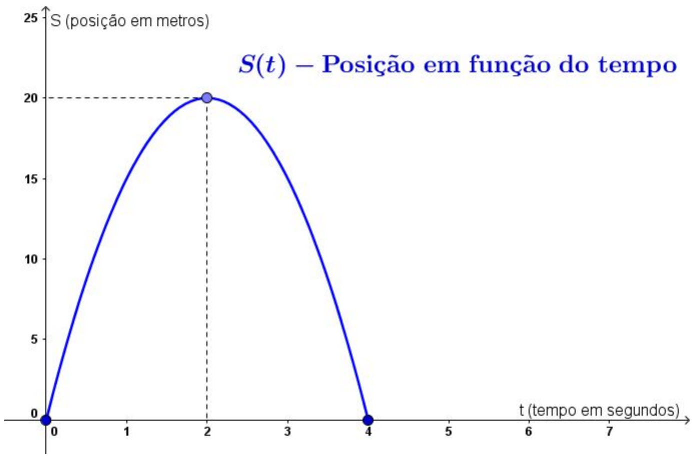


Figura 2.10: Posição X tempo

Analisando a parábola esboçada pela função descrita, é claro o comportamento do objeto no decorrer do tempo. Fica visível que o ponto máximo da função ocorre no instante $t = 2$ quando sua altura é de 20 metros e que, no final dos 4 segundos, o objeto retorna a sua posição inicial $S = S_0$, portanto seu deslocamento é zero.

Com os dados fornecidos pelo exercícios e, depois de uma análise no gráfico, percebemos que o conjunto imagem da função da Posição $S(t)$ em relação ao tempo t será:

$$I_m = \{x \in \mathbb{R}\,|0 \leqslant x \leqslant 20\}$$

Após essa análise, confirmamos a veracidade das alternativas **b** e **c**.

■

2.2.2 Química

Assim como na Física, boa parte dos conteúdos da Química podem ser representados através do conteúdo de funções. Os conteúdos que iremos citar, não só na função do primeiro grau, são ideias que podem ser facilmente contextualizadas com o cotidiano do aluno do Ensino Médio para que ele possa, com uma linguagem menos detalhada, mas bem intuitiva, associar o conteúdo de função dentro da Química.

Um bom exemplo de se trabalhar função é com a pressão de um gás dentro de um recipiente fechado utilizando a teoria do **Gás Perfeito** ou **Gás Ideal**. Esse tópico da química admite que o gás, dito ideal, é aquele gás cujas partículas não interagem entre si e, consequentemente, possuem movimentos aleatórios fazendo com o que o gás não mude de fase (sólido ou líquido).

Alguns gases, em condições de temperatura e pressão normais, possuem a característica muito próxima à dos Gases Ideais, portanto podem ser excelentes exemplos para trabalharmos esse conteúdo. Para contextualizar esse conteúdo da Química, teremos a nosso favor exemplos como a bola de futebol, basquete, vôlei e etc, buzinas a ar, pneus de automóveis e outros objetos que exigem pressão de um gás para seu funcionamento. Utilizando esses ou outros exemplos, conseguimos estabelecer uma relação da **variação da pressão** em função de características como **temperatura**, **volume do recipiente** e **volume do gás**.

Estabeleceremos algumas definições para podermos trabalhar com o conteúdo mencionado. Faremos um resumo desse estudo para conseguirmos trabalhar com a associação ao tópico principal do trabalho que é a função.

Para as definições a seguir, vamos considerar uma quantidade fixa da matéria do gás, quantidade essa que chamaremos de **n**.

A primeira definição que faremos será uma relação entre a pressão de um gás com a variação do volume em que ele se encontra, mantendo a temperatura do experimento constante. Essa relação é chamada de **Lei de Boyle**.

Definição 2.17. *A Lei de Boyle define que, em um experimento fechado onde a quantidade de matéria do gás e sua temperatura não se alteram (experimento isotérmico), afirma-se que a pressão (P) é **inversamente proporcional** ao volume (V) do recipiente que armazena o gás. Em que k é a constante de proporcionalidade.*

$$P \cdot V = k$$

Quando dizemos que duas grandezas são inversamente proporcionais, podemos afirmar que o produto delas será sempre constante. O gráfico a seguir mostra o comportamento dessa variação.

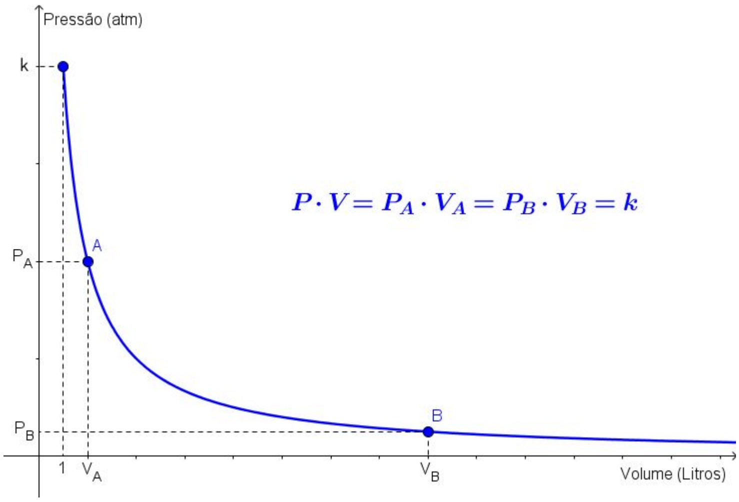


Figura 2.11: Pressão X Volume

Nessas e demais definições, utilizaremos Atmosfera (atm) como a unidade de medida para pressão e para volume utilizaremos a escala do Litro (L).

Na definição seguinte relacionaremos a pressão do gás mediante a variação da temperatura quando não há oscilação do volume do recipiente (experimento isovolumétrico). Essa associação é conhecida como **Lei de Charles**.

Definição 2.18. *A Lei de Charles define que, em um experimento fechado onde a quantidade de matéria do gás e seu volume não se alteram, podemos afirmar que a pressão (P) é **diretamente proporcional** à variação de sua temperatura T.*

$$\frac{P}{T} = k$$

Em que k é a constante de proporcionalidade.

Ao considerar duas grandezas diretamente proporcionais, afirmamos que razão entre elas sempre respeitará uma constante. Perceberemos o comportamento do gráfico dessa relação a seguir:

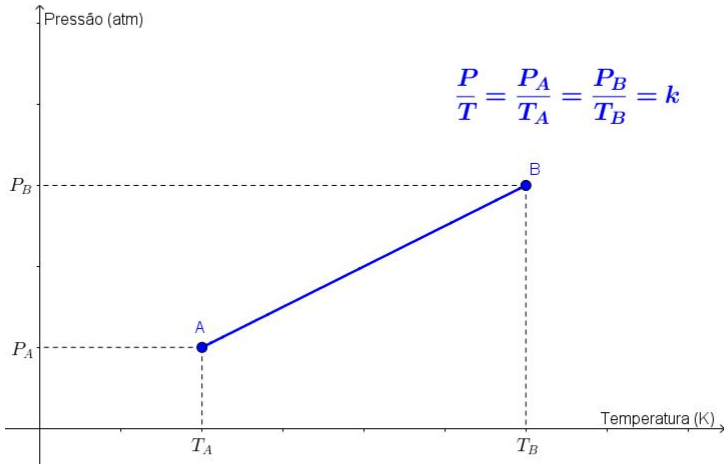


Figura 2.12: Pressão X Temperatura

No SI, a temperatura será medida na escala de Kelvin (K) e a pressão na unidade de atmosfera (atm).

Outra relação estudada por Joseph Louis Gay-Lussac (1778-1850) foi a que associa o volume de acordo com a variação da temperatura, mantendo a pressão constante (experimento isobárico). Essa regra é conhecida como **Lei de Gay-Lussac**.

Definição 2.19. *A Lei de Gay-Lussac define que, em um experimento fechado onde a quantidade de matéria do gás e sua pressão não se alteram, podemos afirmar que o volume (V) do recipiente é* ***diretamente proporcional*** *à variação de sua temperatura (T).*

$$\frac{V}{T} = k$$

Em que k é a constante de proporcionalidade.

O comportamento dessa relação pode ser representado de acordo com gráfico a seguir:

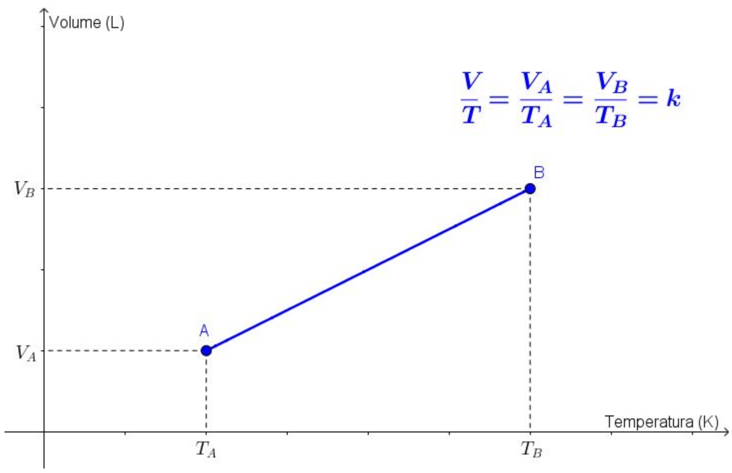


Figura 2.13: Volume X Temperatura

Utilizando as definições anteriores como parâmetros, foi desenvolvido uma relação que define a pressão de um gás em função das grandezas volume do recipiente (V), temperatura (T) e quantidade de matéria do gás (n). Essa associação é chamada de **Equação de Estado dos Gases**, que possui a seguinte definição:

Definição 2.20. *Em um experimento fechado, a pressão de um gás ideal (P) é diretamente proporcional à temperatura (T) e à quantidade de matéria do gás (n) e inversamente proporcional ao volume do recipiente (V).*

$$\frac{P \cdot V}{n \cdot T} = R$$

Em que R é chamado de ***constante universal*** *dos gases, que só irá variar de acordo com a unidade de pressão trabalhada.*

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Na Definição 2.18 e Definição 2.19 percebemos o comportamento de uma **função linear** em um determinado intervalo da temperatura. As características da função linear começam desde a lei de formação, que não possui o termo independente **b** [2.4], e também o comportamento do gráfico que pode ter origem no ponto (0,0) no plano cartesiano, caso a temperatura seja zero.

O docente possui a sua disposição um grande leque de exemplos, de fácil interpretação, para associar o conteúdo de função com tópicos relevantes de Química, estabelecendo assim um elo importante entre as duas disciplinas, desde o início do Ensino Médio.

Essa estratégia é de extrema importância no desenvolvimento do conteúdo de função e de química ao longo do desenvolvimento do Ensino Médio. A razão é que, com cada vez mais frequência, os vestibulares nacionais mais importantes, assim como o ENEM, estão exigindo que o aluno de Ensino Médio saiba interpretar, não só as ciências isoladamente, mas a associação delas, e a matéria função tem um papel de grande relevância nesse elo.

Para mostrar esse vínculo mencionado, utilizaremos uma questão do vestibular de 2007 da Universidade Mackenzie, de São Paulo. Para melhor aproveitamento do estudo, faremos uma alteração na questão para destacar ainda mais a importância do conteúdo.

Exemplo 2.21. *(Mackenzie-SP-2007-modificada) Um cilindro metálico de 41 litros contém 150 mols de argônio (massa de um mol = 40 g) e foi exposto a uma temperatura de 27 º C. Esse cilindro, fechado, foi aquecido até a temperatura de 50 º C, alterando assim sua pressão interna. Qual foi a variação percentual aproximada que a pressão sofreu com o aumento da temperatura?*

Dado: $R = 0,082$ *atm.L/(mol.K)*

a) 9%

b) 8,7%

c) 7%

d) 7,7%

e) 8,2%

Solução: Esse é um exercício tradicional de pressão de gases dentro de um recipiente fechado e para resolvê-lo utilizaremos a equação de estado dos gases presente na Definição 2.20.

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Utilizaremos essa equação para descobrir a pressão inicial (quando a temperatura é de 27º C) e a pressão depois do aumento da temperatura (para 50º C) e, depois desses dados, calcular a porcentagem de variação da pressão. Antes de efetuar qualquer cálculo devemos lembrar que a temperatura tem que ser convertida para a escala Kelvin, portanto os 27 º C serão iguais a 300 K e os 50º C serão 323 K.

Chamando a pressão inicial de P_0, teremos:

$$P_0 \cdot 41 = 150 \cdot 0,082 \cdot 300 \longrightarrow P_0 = 90 \text{ atm}$$

Utilizando a mesma fórmula, calcularemos P, que será a pressão final do experimento:

$$P \cdot 41 = 150 \cdot 0,082 \cdot 323 \longrightarrow P_0 = 96,9 \text{ atm}$$

Calculando a porcentagem através de uma proporção teremos:

$$\frac{90}{100} = \frac{96,9}{x} \longrightarrow x \approx 7,7$$

■

Aplicações em Função:

Apesar da fórmula utilizada na resolução do exercício possuir 5 grandezas variáveis, o enunciado deixou claro que três delas, volume, quantidade de mols de argônio e a constante R, não variam, portanto é claro que temos uma relação de duas grandezas somente, pressão e temperatura.

Após concluirmos a análise, teremos a seguinte relação:

$$P(T) = \frac{150 \cdot 0,082 \cdot T}{41} \longrightarrow P(T) = 0,3 \cdot T$$

Onde $P(T)$ é a pressão do gás em função da temperatura T em Kelvin.

Percebemos o que já nos foi definido na relação **pressão com temperatura** [2.12], que a função em questão é uma função linear [2.6] e, consequentemente, pressão é diretamente proporcional à temperatura. O gráfico da função $P(T)$ pode ser esboçado da seguinte maneira:

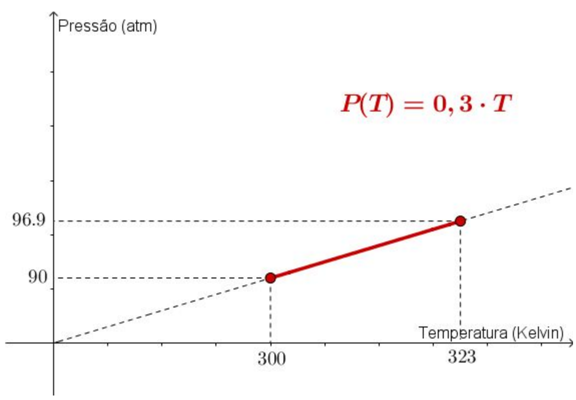


Figura 2.14: Pressão x Temperatura

Assim como as grandezas em questão, a porcentagem também é uma grandeza diretamente proporcional à pressão, portanto diretamente proporcional à temperatura.

Utilizando os conhecimentos matemáticos de porcentagem e os relacionados ao comportamento e às características de uma função linear, o professor pode induzir o aluno a uma resolução mais prática.

Então, para responder o questionamento do exercício (Qual foi a variação percentual aproximada que a pressão sofreu com o aumento da temperatura?), basta que o aluno calcule a variação percentual da temperatura em Kelvin que, pela relação da **função linear**, estará calculando também a variação da pressão.

$$\frac{\text{Kelvin}}{\text{Porcentagem}} = \frac{300}{100} = \frac{23}{x}$$
$$x \approx 7,7$$

Com isso, percebemos o quão prática a resolução se faz quando somos munidos do conhecimento de função dentro da disciplina de química

■

2.2.3 Geografia

A presença de gráficos de tabelas, setores, colunas, infográficos e etc é constante na disciplina Geografia. Eles são essenciais para demonstrar dados de uma pesquisa, bem como o comportamento desses dados, através de frequências absolutas e relativas, ou seja, são uma das maneiras mais claras de se analisar o que acontece no sistema estudado, em qualquer ramificação da Geografia (política, física e etc).

Figura 2.15: http://www.lugli.org/2008/02/grafico-de-linhas/

O gráfico de linhas, que se assemelha com uma função no plano cartesiano (como na Figura 2.15), na maioria das vezes não possui uma lei que rege sua curva, ou seja, são dados aleatórios colhidos através de uma pesquisa e, portanto, não obedecem um padrão (lei de formação).

Porém, alguns tópicos importantes na geografia podem ser associados e bastante utilizados no auxílio prático de algumas funções. Escala em maquetes e mapas, crescimento e desenvolvimento populacional, densidade demográfica em determinada região, são alguns dos tópicos nos quais se pode trabalhar função com os alunos, a nível de Ensino Médio.

A **Escala** e a **Densidade Demográfica** são assuntos abordados pelos materiais didáticos a nível de Ensino Fundamental que se estendem até no final do Ensino Médio, presente inclusive em vestibulares de grandes universidades e no ENEM. Na ocasião eles são trabalhados como razões entre grandezas, ou seja, grandezas diretamente proporcionais que, para nosso trabalho, é abordado com uma função linear.

Utilizando como base os títulos do Ensino Fundamental e Ensino Médio [16], [18] e [22], vamos definir, a seguir, os tópicos mencionados.

Para se reproduzir figuras planas (desenhos) ou regiões tridimensionais (maquetes) em tamanhos reduzidos ou aumentados, utilizamos a **escala cartográfica** para mantermos uma proporção fiel às dimensões originais do que queremos reproduzir.

Definição 2.22. ***Escala Cartográfica*** *é a razão entre uma medida de comprimento no desenho e a medida de comprimento correspondente na realidade.*

$$E = \frac{\textit{distância na figura}}{\textit{distância real}}$$

A escala cartográfica é amplamente utilizada na interpretação de distâncias dentro de um mapa de uma determinada região.

O exemplo a seguir nos permite abordar mais claramente como utilizamos esse conteúdo e também o vínculo que ele possui com a disciplina principal deste trabalho.

Exemplo 2.23. *(ENEM/2011) Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala 1:250. Que medidas de comprimento e largura, em cm, o aluno utilizará na construção da maquete?*

a) 4,8 e 11,2

b) 7,0 e 3,0

c) 11,2 e 4,8

d) 28,0 e 12,0

e) 30,0 e 70,0

Aplicações em Função:

A escala 1 : 250 significa que a cada unidade de medida na maquete corresponde a 250 unidades, da mesma medida, no dimensão original.

i) **Lei de Formação**

Vamos considerar que a dimensão da maquete ($f(x)$) estará em função das dimensões originais da quadra (x). Utilizando a escala 1:250, teremos a seguinte equação:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{250} \longrightarrow y = \frac{x}{250}$$

Pela estrutura da lei de formação, vamos ter uma função do 1º grau [2.1] e, ainda, uma função sem o coeficiente b, portanto uma função linear [2.6]. Como estamos trabalhando com distâncias, o Domínio (D) terá que ser maior ou igual a zero, assim como o Conjunto Imagem (I_m).

$$D = \{x \in \mathbb{R}_+\}$$

$$I_m = \{f(x) \in \mathbb{R}_+\}$$

ii) **Construção do Gráfico**

O gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{250} \cdot x$ será uma reta e, como toda função linear, interceptará a origem (0,0).

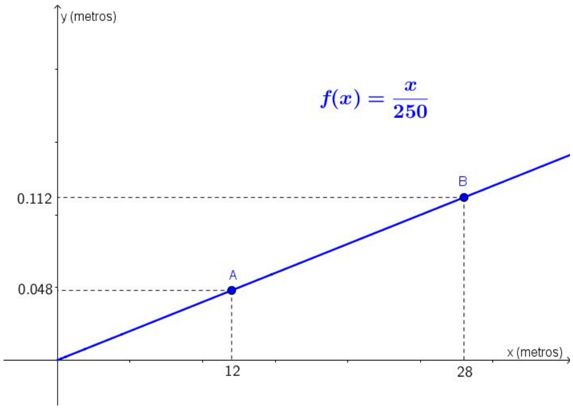


Figura 2.16: Escala de $f(x)$ em metros

Percebemos que a escala presente no enunciado (1:250) representa o **coeficiente angular** da função proposta.

Para definir a reta do gráfico, utilizamos as dimensões da quadra de esportes, 12 metros de largura por 28 metros de comprimento e, utilizando a lei de formação $f(x)$, descobrimos seus valores na maquete que são $0,048$ metros e $0,112$ metros, respectivamente. Ou seja, $f(12) = 0,048$ e $f(28) = 0,112$.

Convertendo as imagens, que estão em metros, para centímetros vamos ter dimensões iguais a $4,8$ e $11,2$.

iii) **Função Inversa**

De acordo com o gráfico e pelas definições estudadas, a função linear é uma **função bijetora** [1.17] e, consequentemente, possui uma função inversa. Aplicando a regra prática da função inversa [1.23] para obter $f^{-1}(x)$, teremos:

$$f^{-1}(x) = 250 \cdot x$$

Em que x passa a ser a dimensão da maquete e $y = f^{-1}(x)$ passa a ser a dimensão real, cujo gráfico será:

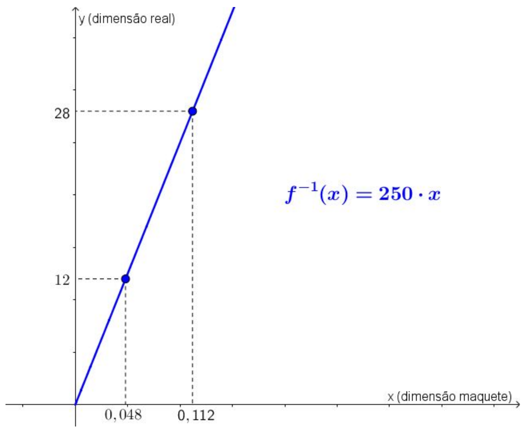


Figura 2.17: Inversa da Escala

O conteúdo de escala, pré-requisito para o Ensino Médio, é uma ferramenta de grande auxílio na interpretação das características de funções. Por ser um conteúdo bastante trabalhado dentre o ensino regular, ela se torna uma grande aliada na contextualização da função. ∎

Ainda utilizando a proporcionalidade, uma razão bastante utilizada no Ensino Fundamental e que pode ser trabalhada associada à função, é a **Densidade Demográfica**.

Definição 2.24. *Densidade demográfica de uma região é a razão entre o número de habitantes por sua área.*

$$Den.\ Demográfica = \frac{n^o\ de\ Habitantes}{Área}$$

Segundo essa definição, associada ao conhecimento de proporcionalidade, podemos dizer que o número de habitantes é diretamente proporcional à área analisada.

O exemplo a seguir nos permite trabalhar com essa informação a nível de Ensino Médio e demonstrando o quão atual esse conteúdo pode ser.

Exemplo 2.25. *(ENEM - 2011) Cerca de 20 milhões de brasileiros vivem na região coberta pela caatinga, em quase 800 mil km^2 de área. Quando não chove, o homem* *do sertão e sua família precisam caminhar quilômetros em busca da água dos açudes. A irregularidade climática é um dos fatores que mais interferem na vida do sertanejo.*

Disponível em: http://www.wwf.org.br. Acesso em: 23 abr. 2010.

Segundo este levantameno, a densidade demográfica da região coberta pela caatinga, em habitantes por km^2*, é de*

a) 250

b) 25

c) 2,5

d) 0,25

e) 0,025

Aplicações em Função:

i) **Lei de Formação, Domínio e Imagem**

Assim como na densidade demográfica, vamos criar uma função que associa a densidade demográfica ($f(x)$) ao número de habitantes (x) dentro da área descrita pelo exercício. Vamos ter então:

$$f(x) = \frac{x}{8 \cdot 10^5}$$

Como estamos trabalhando com unidade de pessoas e área, não poderemos ter valores negativos nessa função e, ainda, os valores de x só poderão pertencer ao conjunto dos números Naturais [i]. Portanto o Domínio da função será:

$$D = \{x \in \mathbb{N}\}$$

Como a razão da população pela área, na maioria das vezes, não será um valor exato o Conjunto Imagem dessa função será:

$$I_m = \{f(x) \in \mathbb{Q}\}$$

Na lei de formação $f(x)$ percebemos que não há o coeficiente b [2.4], o que confirma a teoria de a função ser linear.

ii) **Gráfico da Função**

Esboçando o gráfico de $f(x)$ e ressaltando o ponto para quando $x = 20$ milhões de habitantes, teremos:

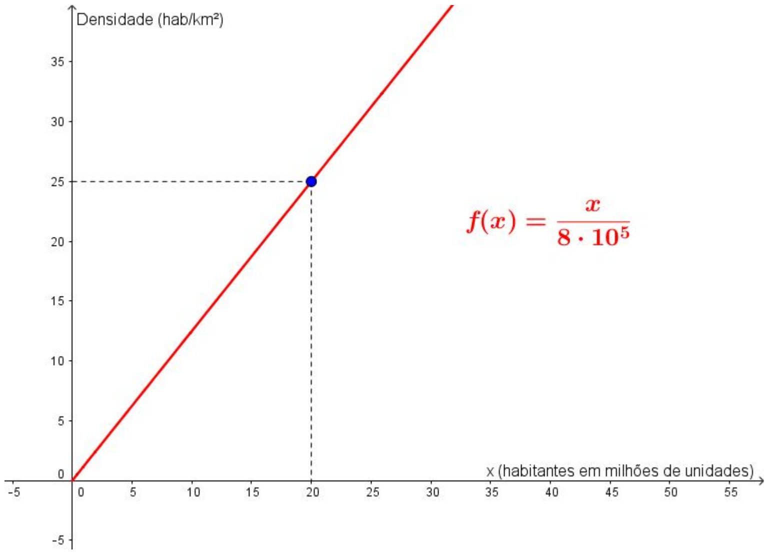


Figura 2.18: Densidade Demográfica

A imagem $f(20.10^6) = 25$ é o resultado que o exercício espera.

iii) **Bijetividade e Função Inversa**

Assim como na função linear expressa pela escala cartográfica, a função da densidade demográfica também é uma função bijetora e, consequentemente, possui uma função inversa $f^{-1}(x)$. Aplicando a regra prática [1.23], teremos:

$$f^{-1}(x) = 8 \cdot 10^5 x$$

Cujo gráfico será:

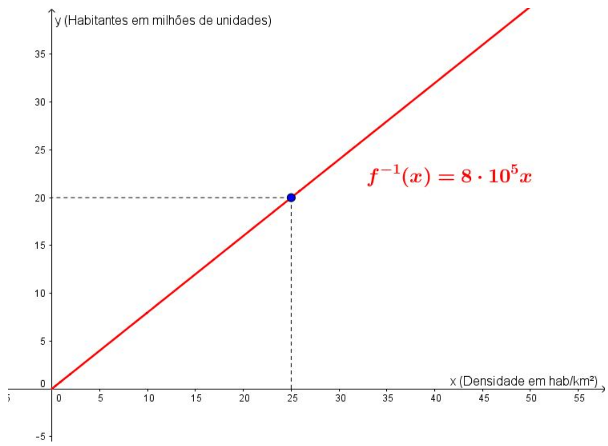


Figura 2.19: Inversa da Densidade Demográfica

■

Além da **Pressão dos gases**, com [2.18] e [2.19], **Densidade Demográfica** [2.24] e **Escala Cartográfica** [2.22], citadas neste capítulo, existem outras grandezas diretamente proporcionais, muito utilizadas nas ciências estudadas pelo aluno, que são estratégias excelentes na explicação e contextualização de tópicos, como: identificação de Domínio e Conjunto Imagem, bijetividade da função, função crescente, raiz da função, estudo do sinal da função, função inversa, função ímpar e função composta.

Utilizar esses exemplos, alguns deles pré-requisitos de Ensino Médio, são de extrema importância para o melhor entendimento da matéria, despertando, assim, maior interesse do aluno no aprofundamento posterior.

CAPÍTULO 3

FUNÇÃO QUADRÁTICA E APLICAÇÕES

Nesse capítulo faremos uma breve introdução às características da função polinomial do 2º grau utilizando os títulos [12], [15], [17] e [18] como referências.

Logo após essa introdução, aplicaremos, com o auxílio de exemplos contextualizados, os conceitos mencionados no Capítulo 1.

Assim como no capítulo anterior, mostraremos neste capítulo possíveis aplicações para a introdução do conteúdo de função. Esses exemplos foram contextualizados com Física utilizando o comportamento da função quadrática, ensinada no Ensino Médio.

3.1 Conceitos da Função Quadrática

Definição 3.1. *A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que* ***a***,***b*** *e* ***c*** *são constantes reais e $a \neq 0$, é chamada de* ***Função Quadrática*** *ou função polinomial do 2º grau.*

O gráfico de uma função quadrática é uma curva denominada de **parábola**. Essa curva é definida geometricamente pela interseção de um cone de revolução e um plano paralelo à geratriz desse cone. A figura a seguir ilustra essa situação.

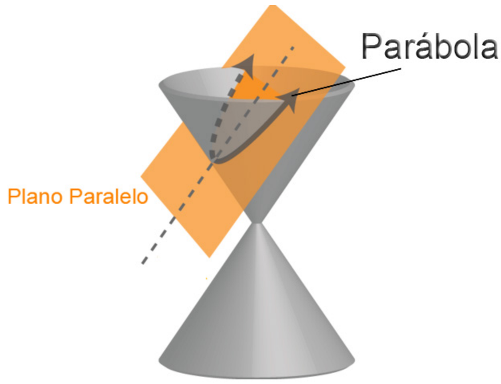


Figura 3.1: Parábola no Cone

3.1.1 Construção do Gráfico

Para construir o gráfico de uma função quadrática, são necessários alguns processos e alguns pontos merecem destaque:

i) **Concavidade da Parábola**

Para determinar a concavidade da parábola, devemos analisar o coeficiente **a**. Se $a > 0$, teremos a concavidade da parábola voltada para cima e se $a < 0$, teremos concavidade voltada para baixo.

ii) **Raízes da Função e a Fórmula de Bhaskara**

Os pontos de interseção com o eixo das abscissas ($f(x) = 0$), se houverem, são chamados de raízes da função. Para descobrir esses pontos utilizaremos a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Portanto, teremos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = -c$$

Multiplicando os dois membros da equação por $4a$, temos:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Somando b^2 a ambos os membros, teremos no 1^o membro um trinômio do quadrado perfeito e, com isso, poderemos fatorá-lo e em seguida isolar o x:

$$4a^2x^2 + 4bx + b^2 = b^2 - 4ac \Rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$2ax + b = \pm\sqrt[2]{b^2 - 4ac} \Rightarrow 2ax = -b \pm \sqrt[2]{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão $b^2 - 4ac$ que se encontra dentro da raiz quadrada será representada pela letra grega Δ. Portanto:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt[2]{\Delta}}{2a} \tag{3.1}$$

Essa equação é chamada de Fórmula de Bhaskara. Ao analisar o sinal de Δ, temos que: Se $\Delta > 0$, teremos duas raízes reais e distintas, x_1 e x_2. Se $\Delta < 0$, não teremos raízes reais. Se $\Delta = 0$, teremos duas raízes reais e iguais, $x_1 = x_2$.

iii) **Vértice da Parábola**

O **Vértice da Parábola** é o ponto de interseção da parábola com o seu **eixo de simetria**. O ponto vértice terá as coordenadas $V = (x_v, t_v)$. Como x_v pertence ao eixo de simetria e as raízes são equidistantes ao eixo de simetria, podemos descobrir x_v pela média aritmética das raízes.

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Substuindo x_v na lei de formação $f(x)$, obtemos y_v.

$$y_v = a.(x_v)^2 + b.x_v + c$$
$$y_v = a.\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b.\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$
$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$
$$y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4c}$$
$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

iv) **Interseção com o eixo das ordenadas**

O ponto de interseção com o eixo das ordenadas (Oy). Como a abscissa desse ponto é $x = 0$ temos que o ponto tem coordenadas $(0, c)$.

Depois de determinado esses pontos, basta esboçar a parábola como no exemplo a seguir.

Exemplo 3.2. *Esboce o gráfico da função* $f(x) = x^2 - 5x - 6$.

i) Concavidade: podemos afirmar que a concavidade da parábola é voltada para cima, pois $a > 0$.

ii) Interseção com O_y: o ponto de interseção com o eixo Oy é $(0, -6)$

iii) Raízes: pela fórmula de Bhaskara, temos:

$$\Delta = (-5)^2 - 4.1.(-6) \Rightarrow \Delta = 49$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt[2]{49}}{2} \Rightarrow x = \frac{5 \pm 7}{2}$$

Então as raízes são $x_1 = 6$ e $x_2 = -1$

iv) Vértice: jogando na fórmula das coordenadas do Vértice teremos:

$$x_v = -\frac{(-5)}{2} \Rightarrow x_v = \frac{5}{2}$$

$$y_v = -\frac{49}{4} \Rightarrow y_v = \frac{-49}{4}$$

Após esses processos, esboçamos o gráfico de $f(x)$.

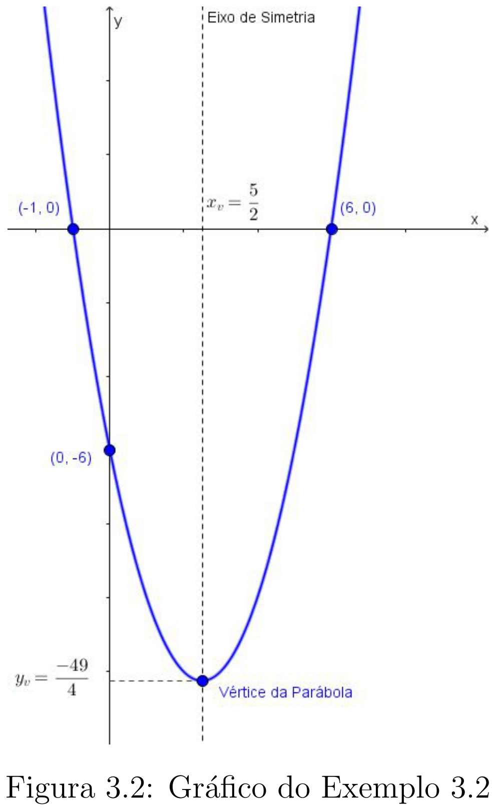


Figura 3.2: Gráfico do Exemplo 3.2

3.1.2 Valor Máximo e Mínimo da Função Quadrática

Quando analisamos o valor máximo ou mínimo da **função**, estamos analisando o valor máximo e mínimo de y, pois y está em função de x. Para isso, teremos que analisar duas situações:

i) Quando $a > 0$, teremos a concavidade da parábola para cima, como mostra o esboço a seguir:

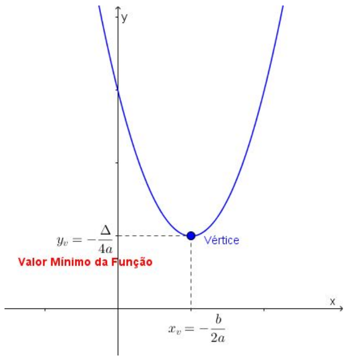


Figura 3.3: Valor Mínimo

Percebemos que $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é o **valor mínimo da função**, com isso, a menor imagem. Podemos concluir que o Conjunto Imagem (Im) é:

$$Im = \left\{ y \in \mathbb{R} \middle| y \geqslant -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

ii) Quando $a < 0$, teremos a concavidade da parábola para baixo, como mostra o esboço a seguir.

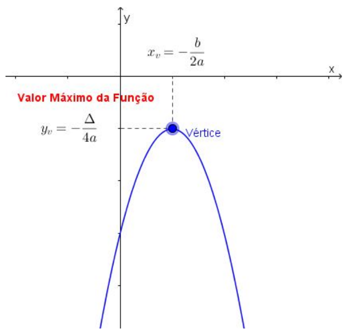


Figura 3.4: Valor Máximo

Percebemos que $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é o **valor máximo da função**, com isso, a maior imagem. Podemos concluir que o Conjunto Imagem (Im) é:

$$Im = \left\{ y \in \mathbb{R} \middle| y \leqslant -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

3.2 Aplicações

3.2.1 Física

Uma excelente aplicação do comportamento da função quadrática é através do **Lançamento Oblíquo**, na Física. O lançamento oblíquo consiste em um lançamento de um objeto formando um ângulo menor que 90º com a horizontal, a partir dele, faz-se uma análise de sua altura, velocidade e aceleração com o decorrer do tempo. Estuda-se nesse processo o movimento de subida e descida que, em descrição física sem interferência do ar, são análogos.

O exemplo que mostraremos a seguir, da PUC de Campinas, permite-nos mostrar o comportamento desse lançamento e fazer uma análise detalhada da associação deste conteúdo com o conteúdo estudado de função.

Exemplo 3.3. *(PUC CAMPINAS SP) Observando a parábola do dardo arremessado por um atleta, um matemático resolveu obter uma expressão que lhe permitisse calcular a altura y, em metros do dardo em relação ao solo, decorridos t segundos do instante de seu lançamento ($t = 0$). Se o dardo chegou a altura máxima de* 20 *m e atingiu o solo* 4 *segundos após o seu lançamento, então, desprezada a altura do atleta, a expressão que o matemático encontrou foi:*

a) $y = -5t^2 + 20t.$

b) $y = -5t^2 + 10t.$

c) $y = -5t^2 + t.$

d) $y = -10t^2 + 50.$

e) $y = -10t^2 + 10.$

Aplicações em Função: Incialmente vamos estudar o comportamento desse lançamento, bem como as características do conteúdo de funções presentes nesse exemplo.

i) **Análise das grandezas**

Analisaremos a altura do dardo h em função do tempo t transcorrido a partir do lançamento. Portanto podemos afirmar que o **Domínio da função** é o tempo t e o **Conjunto Imagem** as alturas h que esse dardo atinge no decorrer deste lançamento.

O próprio exercício determinou o Domínio da função ao especificar o início do lançamento, para $t = 0$, e o final, quando o dardo toca o chão, para $t = 4$. Portanto, o Domínio D será:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 4\}$$

O conjunto imagem I_m da função também foi descrito no enunciado. Como a imagem é a variação da altura h, temos que o dardo parte da altura $h = 0$, na mão do atleta, e atinge a altura máxima de 20 metros, ou seja, a variação será

$$I_m = \{y \in \mathbb{R} \,|0 \leqslant y \leqslant 20\}$$

ii) **Comportamento do Gráfico**

Podemos interpretar e fazer um esboço do gráfico com os dados do enunciado do exercício, conhecimento do esporte mencionado, conceitos básico de lançamento oblíquo e, a partir desse esboço, fazer uma associação com a função quadrática.

Ficou claro no enunciado que a função tem dois comportamentos, ou seja, em um determinado intervalo é crescente, quando o dardo sai da mão do atleta até atingir sua altura máxima, e em outro decrescente, quando o dardo deixa a altura máxima e atinge o solo. Além disso, sabemos que durante todo o deslocamento vertical do dardo, sua velocidade na horizontal é constante, pois não há ação de uma aceleração na horizontal, conceito básico do deslocamento horizontal. Com essa informação, podemos afirmar que a altura máxima foi atingida no ponto médio do tempo transcorrido no lançamento do dardo, ou seja, 2 segundos após o lançamento. Após essa análise, teremos o seguinte gráfico:

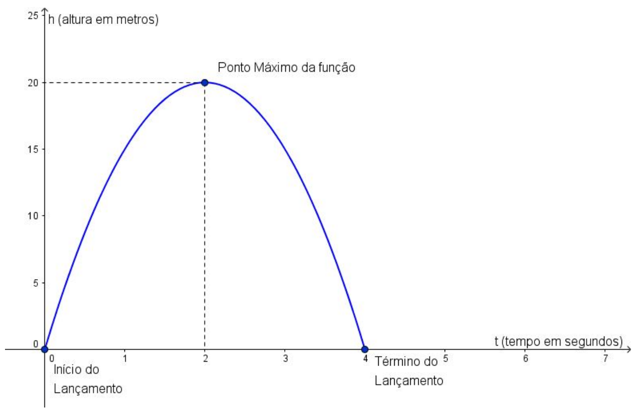


Figura 3.5: Esboço do Lançamento

iii) **Injetividade e Sobrejetividade**

Analisando a definição de uma função injetora, podemos afirmar que a função $h(t)$, representada no gráfico anterior, não é injetora. Percebemos que, para diferentes valores no tempo, o dardo atinge alturas iguais, o que vai contra a Definição 1.15.

Como o texto do exercício não especificou um contradomínio, podemos presumir que seria qualquer altura que o dardo atinja, fazendo com que essa função não seja sobrejetora.

Essas duas classificações **impedem** que essa função tenha uma **função inversa**. Se tivéssemos um gráfico da inversa de $h(t)$, ele seria o seguinte:

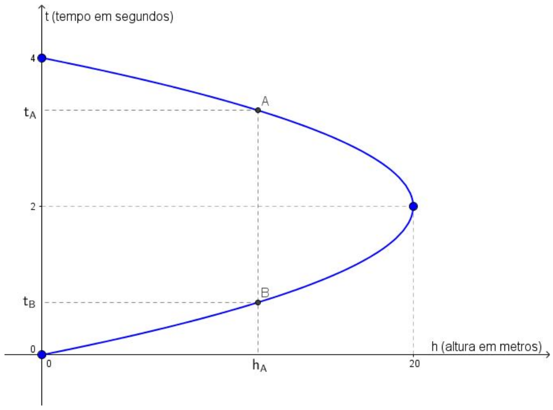


Figura 3.6: Inversa do Lançamento

Percebemos no gráfico que para um determinado h_A no domínio da função, conseguimos obter duas imagens no eixo vertical t, impossibilitando que $h(t)$ tenha uma função inversa.

iv) **Lei de Formação de** $h(t)$

O comportamento parabólico de $h(t)$ nos permite fazer a associação com a função quadrática, cujo modelo é $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Como a função intercepta o eixo ordenado na origem, podemos afirmar que o termo independente c da função é igual a zero.

Para descobrirmos os valores dos números reais a e b, utilizaremos os outros dois pontos dados, o outro ponto de interseção com o eixo horizontal, $A = (4, 0)$, e o ponto máximo da função, $B = (2, 20)$. Substituindo o ponto A, na função teremos:

$$f(4) = 0 \Longrightarrow 16a + 4b = 0 \Longrightarrow 4b = -16a$$

$$b = -4a \text{ (I)}$$

Substituindo o ponto B na lei de formação, teremos:

$$f(2) = 20 \Longrightarrow 4a + 2b = 20 \text{ (II)}$$

Substituindo a equação (I) em (II), teremos:

$$4a + 2 \cdot (-4a) = 20 \Longrightarrow 4a - 8a = 20 \Longrightarrow -4a = 20$$

$$a = -5$$

Substituindo em (I) para descobrir b, teremos:

$$b = -4 \cdot (-5) \Longrightarrow b = 20$$

Portanto, podemos afirmar que a lei de formação de $h(t)$ será

$$h(t) = -5 \cdot x^2 + 20x$$

A lei de formação em questão já é a solução do problema.

$\blacksquare$

Outra Solução: Vamos mostrar como faríamos esse exercício utilizando as fórmulas de física utilizadas no conteúdo de lançamento oblíquo. Para definir uma função da altura y em função do tempo transcorrido t, utilizaremos a seguinte fórmula:

$$y = v_0 \cdot t + \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Em que v_0 é a velocidade inicial do dardo e g a aceleração da gravidade. Para descobrirmos v_0, dado que não foi fornecido, utilizaremos a equação de Torricelli, que associa a velocidade V em uma determinada altura h.

$$V^2 = V_0^2 + 2 \cdot g \cdot h$$

Utilizando a equação de Torricelli no instante em que o dardo atinge a altura máxima 20 metros e considerando a aceleração da gravidade como $-10m/s^2$, descobriremos V_0 em metros por segundo (m/s):

$$V = 0 \Longrightarrow 0 = V_0^2 + 2 \cdot (-10).(20) \Longrightarrow 0 = V_0^2 - 400$$

$$V_0^2 = 400 \Longrightarrow V_0 = 20m/s$$

Substituindo esse dado na equação da posição para determinar a relação da altura y em função do tempo t:

$$y = (20) \cdot t + \frac{(-20) \cdot t^2}{2} \Longrightarrow y = 20t - 5t^2$$

$\blacksquare$

Em Física, outro contexto bastante prático de ser trabalhado com função quadrática é o de **Energia Cinética**. Como o conceito de Energia é um tópico que todos possuem uma ideia, mesmo que vaga, é prático ao professor contextualizar superficialmente esse conteúdo para associá-lo ao estudo de função.

Definição 3.4. *O fato de um corpo estar em movimento implica que existe uma energia associada a ele. Para um corpo adquirir movimento, uma força precisa ser aplicada a ele para que ele realize um deslocamento, consequentemente realize trabalho e, assim, gere energia. Essa energia associada ao movimento é chamada de* ***Energia Cinética***.

A Energia Cinética é calculada através do produto da massa do objeto, em gramas, pela sua velocidade ao quadrado, dividido por dois, ou seja:

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Em que E_c é a energia cinética medida em Joules (J), m é a massa em gramas e v é a velocidade do objeto em metros por segundo $\left(\frac{m}{s}\right)$.

No exemplo a seguir trabalharemos alguns pontos importantes da Energia Cinética e Movimento Uniformemente Acelerado associados com função.

Exemplo 3.5. *(PUC-RIO) Sabendo que um corredor cibernético de* 80 *kg, partindo do repouso, realiza a prova de* 200 *metros em* 20 *segundos mantendo uma aceleração constante de* $a = 2,0\ m/s^2$*, pode-se afirmar que a energia cinética atingida pelo corredor no final dos* 200 *metros, em joules, é:*

a) 24000

b) 36000

c) 42000

d) 48000

e) 64000

Solução: Para descobrirmos a energia cinética exigida pelo exercício, precisamos da massa do corredor e da sua velocidade. A massa de 80 kg foi fornecida, porém não temos sua velocidade no final dos 200 metros. Para descobrirmos essa velocidade, utilizaremos uma das equações do Movimento Uniformemente Variado (MUV) que relaciona V, velocidade final, com V_0, velocidade inicial, a, aceleração constante, e o tempo t:

$$V = V_0 + a \cdot t$$

Como o corredor parte do repouso, $V_0 = 0$, o tempo dado é de $t = 20$ segundos e sua aceleração $a = 2\ m/s^2$. Substituindo esses valores, teremos:

$$V = 0^2 + 2 \cdot 20 \Longrightarrow V = 40$$

$$V = 40m/s$$

Com o valor da Velocidade final demonstrado anteriormente, podemos agora substituir os valores na fórmula da energia cinética:

$$E_c = \frac{80 \cdot (40)^2}{2} \Longrightarrow E_c = \frac{80 \cdot 1600}{2}$$

$$E_c = 64000 \text{ Joules}$$

Alternativa correta é a letra e. ■

Aplicações em Função:

i) **Identificação das funções: Domínio e Conjunto Imagem**

Nesse exercício temos a presença de duas funções. Primeiro, a função da Energia Cinética, $f(v)$, em função da velocidade v, dado uma massa constante 80 kg e, segundo, uma função implícita, $g(t)$, que tem a velocidade final do corredor em função do tempo t dada uma aceleração constante.

Em ambas, temos o Domínio limitado:

$$D = \{v \in \mathbb{R} \,|0 \leqslant v \leqslant 40\}$$

O conjunto imagem de $f(t)$ podemos que afirmar que também é limitado, pois o corredor parte do repouso $t = 0$ e sua Energia Cinética é zero, pois não há movimento e atinge seu ápice quando $t = 20$, fazendo sua energia cinética ser de 64000 Joules. Portanto:

$$I_m = \{x \in \mathbb{R} \,|0 \leqslant x \leqslant 64000\}$$

O conjunto imagem de $g(t)$, assim como em $f(t)$, também parte da origem, $V_0 = 0$ e atinge seu ápice aos $t = 20$ segundos, quando a velocidade será 40 m/s. Portanto:

$$I_m = \{x \in \mathbb{R} \,|0 \leqslant x \leqslant 40\}$$

ii) **Esboço dos Gráficos** O gráfico de $f(v)$ será uma parábola crescente, limitada no domínio e imagem descritos anteriormente. A seguir o esboço de $f(v) = \dfrac{80 \cdot v^2}{2}$.

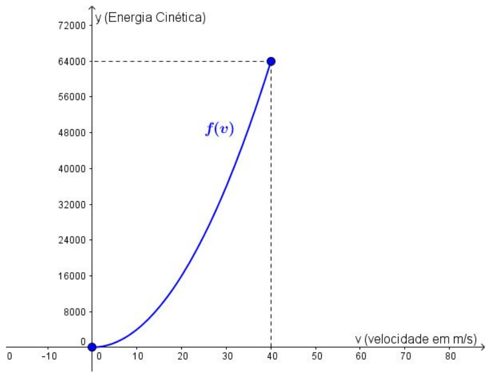


Figura 3.7: Energia Cinética $f(v)$

Percebemos que a parábola de $f(v)$ foi limitada de seu vértice $(0, 0)$ ao ponto $(20, 16000)$, portanto podemos afirmar que $f(v)$ é crescente em todo seu domínio.

Na função $g(t) = a \cdot t$, temos o modelo de uma função do primeiro grau. Como $a = 2$, teremos uma reta crescente. Portanto, o gráfico de $g(t)$ será:

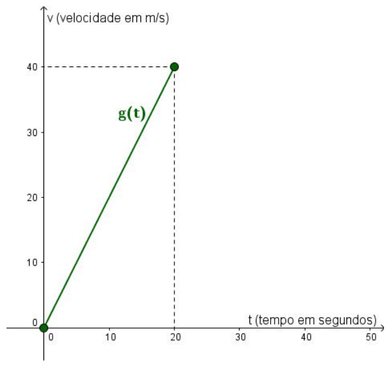


Figura 3.8: Velocidade em função do tempo $g(t)$

iii) **Função Inversa**

A função $g(t)$, como sua lei de formação é do primeiro grau, é inversível, pois é bijetora. A função $f(v)$, como é crescente em toda sua extensão, também será injetora, será sobrejetora para um contradomínio igual ao seu conjunto imagem e, consequentemente, bijetora, fazendo com que ela possua uma função inversa $f^{-1}(v)$.

Utilizando a regra prática da função inversa, presente na Observação 1.23 teremos:

$$f^{-1}(v) = \sqrt[2]{\frac{v}{40}}$$

O gráfico da função inversa de $f(v)$ será simétrico à reta $y = x$, portanto teremos o seguinte esboço:

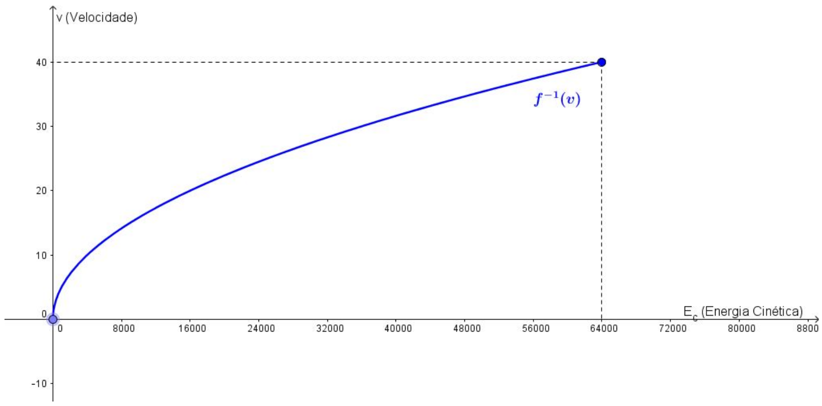


Figura 3.9: Inversa $f^{-1}(v)$

Pode-se observar que a função $f(v)$, mesmo que seja uma função quadrática, possui uma inversa, pois é bijetora em todo o intervalo descrito.

iv) **Função Composta**

O que fizemos para descobrir a resposta pedida no exercício foi utilizar uma função alternativa, $g(t)$, para depois utilizar esse valor na função da energia cinética $f(v)$. Essa conexão entre duas funções é exatamente o objetivo do conteúdo da função composta. Com a função $f(v) = 40{\cdot}v^2$ e a função $g(t) = 2{\cdot}t$, poderíamos criar a função composta $f \bigcirc g(t)$:

$$f \bigcirc g(t) = 40 \cdot (2 \cdot t)^2 \longrightarrow f \bigcirc g(t) = 160 \cdot t^2$$

Um esquema com diagramas pode nos mostrar como se comporta essa função composta:

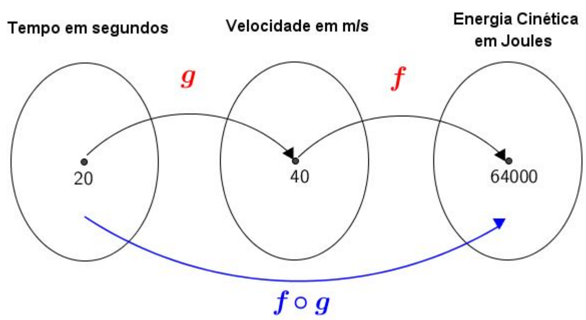


Figura 3.10: Composta: Energia Cinética em função do Tempo

De acordo com essa nova função, teremos um gráfico da Energia Cinética (E_c) em função do tempo t que terá o mesmo Domínio de $g(t)$ e o conjunto imagem de $f(v)$:

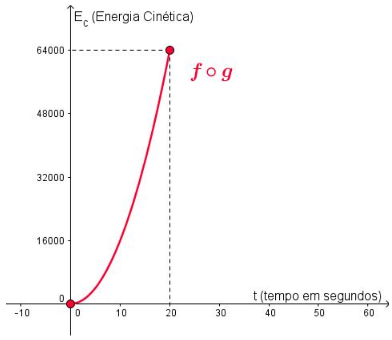


Figura 3.11: Gráfico: Energia Cinética em função do Tempo

■

CAPÍTULO 4

FUNÇÃO EXPONENCIAL, FUNÇÃO LOGARÍTMICA E APLICAÇÕES

O objetivo deste capítulo é estabelecer as principais características da função exponencial e logarítmica a nível de Ensino Médio e, posteriormente, suas aplicações em outras ciências. Utilizamos como referência neste capítulo os títulos [15], [17] e [18]

4.1 Função Exponencial

Definição 4.1. *A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, cuja lei de formação é $f(x) = a^x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$, é chamada de **função exponencial**.*

4.1.1 Gráfico

i) A função será **crescente** para $a > 1$.

Um exemplo do comportamento mencionado pode ser mostrado pela função real $f(x) = 2^x$, a seguir:

x	y
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

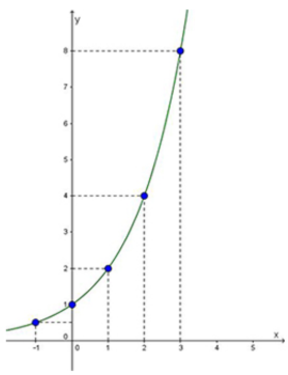


Figura 4.1: Função Crescente

ii) A função será **decrescente** para $a < 0 < 1$.

O exemplo da função real $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ a seguir mostra o comportamento do gráfico decrescente:

x	y
-2	9
-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$

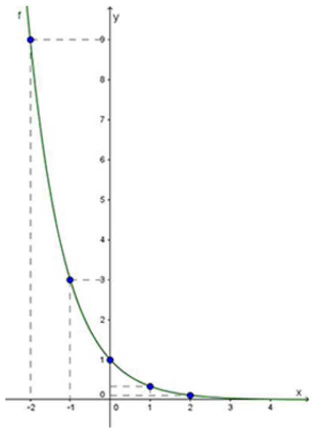


Figura 4.2: Função Decrescente

O gráfico de função exponencial é uma curva que possui uma **assíntota horizontal**. Assíntota de uma função é uma reta de onde os pontos da função se aproximam à medida que se percorre a função. A assíntota de uma função exponencial $f(x) = a^x + b$ é a reta $g(x) = b$. Ao procurar o ponto de interseção das funções $f(x)$ e $g(x)$, ou seja, $f(x) = g(x)$, teríamos que ter $a^x = 0$. Tal equação não possui solução nos reais. Na função crescente, percebemos que ao diminuir o valor de x a curva se aproxima cada vez mais da assíntota $y = 0$ e o mesmo acontece com a função decrescente que, ao aumentarmos o valor de x, tem o mesmo comportamento quanto a assíntota.

Ao analisar o gráfico de uma função exponencial, $f(x) = a^x$,$a > 0$ e $a \neq 1$, obteremos:

i) $\mathbb{D}om(f) = \mathbb{R}$ e f é injetora;

ii) $\mathbb{I}m(f) = \mathbb{R}_+^*$;

iii) O ponto de interseção com o eixo das ordenadas (Oy) será o ponto $(0, 1)$.

4.1.2 Equação Exponencial

Quando a variável de uma equação aparece no expoente, ela é chamada de **equação exponencial**. Para resolver uma equação na variável x, temos que igualar as bases de ambos os membros da equação e, por sua vez, igualar os expoentes:

$$\text{Se } a^x = a^y \Longrightarrow x = y \tag{4.1}$$

Para resolver uma equação exponencial, teremos que ter o conhecimento das propriedades da potenciação e, uma vez ou outra, usar o processo de substituição de variáveis. Os exemplos a seguir deixam claro essa observação:

Exemplo 4.2. *Vamos determinar o conjunto solução da equação* $4^{(x+1)} = 32$*, com* $U = \mathbb{R}$.

Solução: Vamos inicialmente igualar as bases de ambos os membros:

$$2^{2\cdot(x+1)} = 2^5 \Longrightarrow 2^{(2x+2)} = 2^5$$

Com as bases iguais, trabalharemos com os expoentes:

$$2x + 2 = 5 \Longrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

■

Exemplo 4.3. *Determine o conjunto solução da equação* $3^x - 3^{2-x} = 8$*, com* $U = \mathbb{R}$.

Solução: Ao analisar a equação, percebemos que não é possível igualar as bases de ambos os membros. Para dar continuidade na resolução, usaremos o processo de substituição de variável:

$$3^x - 3^{2-x} = 8 \Longrightarrow 3^x - \frac{3^2}{3^x} = 8$$

Usando a substituição de $3^x = h$, teremos a seguinte equação:

$$h - \frac{9}{h} = 8$$

Multiplicando toda a equação por h, concluiremos nossa solução:

$$h^2 - 9 = 8h \Longrightarrow h^2 - 8h - 9 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau por Bhaskara [3.1], teremos:

$$\Delta = 100$$

$$h_1 = \frac{8+10}{2} \text{ e } h_2 = \frac{8-10}{2}$$

$$h_1 = 9 \text{ e } h_2 = -1$$

Depois de encontrar a variável h, substituiremos por 3^x:

$$3^x = 9 \Longrightarrow 3^x = 3^2 \Longrightarrow x = 2$$

$$3^x = -1 \Longrightarrow \text{ não existe solução em } \mathbb{R}$$

Portanto, nosso conjunto solução é:

$$S = \{2\}$$

■

4.1.3 Inequação Exponencial

Quando temos uma desigualde onde a variável aparece no expoente, podemos denominá-la de **inequação exponencial**, como nos exemplos a seguir:

i) $5^x < 125$

ii) $4^{x+1} \leqslant 32^x$

iii) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \geqslant \dfrac{1}{8}$

Para resolver uma inequação exponencial, devemos proceder como em 4.1, e em seguida analisar os seguintes casos:

Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$.

i) Se $a > 1$.

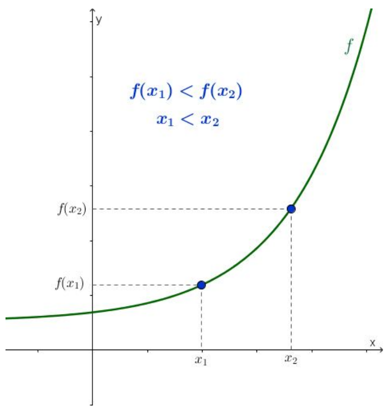


Figura 4.3: $a > 1$

Para $a > 1$, teremos a função exponencial crescente. Portanto, de acordo com a Definição 1.11, temos:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Longrightarrow x_1 > x_2$$

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Longrightarrow x_1 < x_2$$

ii) Se $a < 1$

Para $a < 1$, teremos a função exponencial decrescente. Portanto, de acordo com a Definição 1.12, temos:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Longrightarrow x_1 < x_2$$

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Longrightarrow x_1 > x_2$$

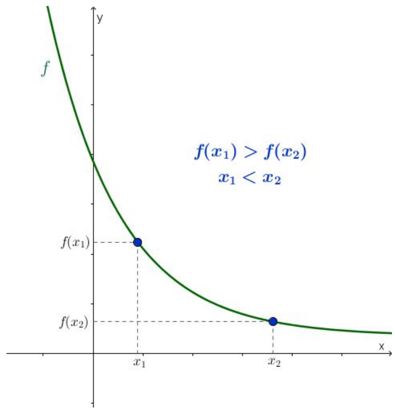


Figura 4.4: $a < 1$

4.2 Logaritmo

Definição 4.4. *Dados dois números reais **a** e **b** e positivos, com $b \neq 1$, definimos **logaritmo** de **a** na base **b** o expoente real **x** que aplicaremos em **b** para obtermos o resultado igual a **a**. Notação:*

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Nessa notação, temos:

i) b é chamado de base.

ii) a é chamado de logaritmando.

iii) x é chamado de logaritmo.

Para resolver um logaritmo, utilizaremos propriedades da potenciação e alguns procedimentos vistos nos exemplos com equação exponencial na seção 4.1. Nos exemplos a seguir, podemos visualizar esses procedimentos:

Exemplo 4.5. *Defina o valor dos logaritmos a seguir:*

a) $\log_8 \sqrt{32}$

b) $\log_{81} 0,333...$

Solução:

a)

$$\log_8 \sqrt{32} = x \Longrightarrow 8^x = \sqrt{32}$$

$$(2^3)^x = \sqrt{2^5} \Longrightarrow 2^{3x} = 2^{\frac{5}{2}}$$

Portanto, temos:

$$3x = \frac{5}{2} \Longrightarrow x = \frac{5}{6}$$

b)

$$\log_{81} 0,333... = x \Longrightarrow 81^x = 0,333...$$

$$(3^4)^x = \frac{1}{3} \Longrightarrow 3^{4x} = 3^{-1}$$

Portanto, temos:

$$4x = -1 \Longrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

■

Podemos destacar também a escrita de dois logaritmos cujas bases são bastante comuns em aplicações em outras disciplinas, como Química, Biologia e Física.

i) Quando a base do logaritmo é 10, podemos chamá-lo de **logaritmo decimal** e, quando isso acontece, podemos omitir essa base. Assim, $\log_{10} a$ pode ser representado como $\log x$.

ii) Quando a base do logaritmo é a constante irracional e, podemos denominar esse logaritmo de **logaritmo neperiano** ou **logaritmo natural**. Notação:

$$\log_e x = \ln x \Longrightarrow \text{ logaritmo natural de x}$$

Definição 4.6. *O número* ***e*** *é uma constante irracional cujo valor aproximado é* $e = 2,7182...$. *Ele é chamado de* ***número neperiano*** *pela referência ao matemático escocês John Napier (1550-1617), precursor da Teoria dos Logaritmos.*

4.2.1 Consequências da definição de logaritmo

De acordo com a Definição 4.4, podemos notar algumas consequências que são extremamente úteis na resolução de problemas. Elas são:

i) $\log_b b = 1$. Pois $b = b^1$.

ii) $\log_b 1 = 0$. Pois $b^0 = 1$.

iii) $\log_b b^x = x$. Pois $b^x = b^x$.

iv) $\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c$. Pois se $b^x = a$ e $b^x = c$ temos que $a = c$.

v) $b^{\log_b c} = c$. Da consequência iv).

4.2.2 Propriedades dos Logaritmos

Definiremos algumas propriedades dos logaritmos que serão muito importantes para resolução de exercícios envolvendo logaritmos. Para uma definição mais detalhada de cada uma dessas propriedades, podemos consultar [15] ou [17].

Seja **a**, **b** e **c** números reais positivos e que $b \neq 1$, teremos:

i) $\log_b a + \log_b c = \log_b(a \cdot c)$

ii) $\log_b a - \log_b c = \log_b \left(\dfrac{a}{c}\right)$

iii) $\log_b a^k = k \cdot \log_b a$ para $k \in \mathbb{R}$

iv) $\log_{b^k} a = \dfrac{1}{k} \cdot \log_b a$ para $k \in \mathbb{R}$

v) **Mudança de Base**

$\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$ para $c \neq 1$.

vi) Como consequência da propriedade anterior v), podemos moldar uma nova propriedade para $c = a$:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} \text{ com a } \neq 1$$

Essa propriedade pode ser escrita também como:

$$(\log_a b) \cdot (\log_b a) = 1$$

Podemos perceber alguns exemplos algébricos da aplicação dessas propriedades a seguir.

Exemplo 4.7. *Determine o valor dos logaritmos a seguir considerando as duas aproximações* $\log 2 = 0,3$ *e* $\log 3 = 0,48$.

a) $\log 2,4$

b) $\log_{100} 8$

c) $\log_4 12$

a) **Solução:** O objetivo é utilizar as propriedades para encontrarmos os dados que o enunciado nos forneceu. Portanto utilizaremos a transformação de decimal em fração e fatoração numérica em seguida:

$$\log 2,4 = \log\left(\frac{24}{10}\right) = \log 24 - \log 10$$

$$\log(2^3 \cdot 3) - \log 10 = \log 2^3 + \log 3 - \log 10 = 3 \cdot \log 2 + \log 3 - \log 10$$

Depois de aplicarmos as propriedades, só resta substituir os valores:

$$3 \cdot \log 2 + \log 3 - \log 10 = 3 \cdot 0,3 + 0,48 - 1$$

Temos então:

$$\log 2,4 = 0,38$$

■

b) **Solução:** Utilizaremos a fatoração nesse caso também:

$$\log_{100} 8 = \log_{10^2} 2^3 = \frac{3}{2} \cdot \log 2$$

Substituindo o valor de $\log 2$, teremos:

$$\log_{100} 8 = \frac{3}{2} \cdot 0,3$$

$$\log_{100} 8 = 0,45$$

■

c) **Solução:** Nesse exemplo utilizaremos a propriedade de mudança de base, pois a base de $\log_4 12$ não pode ser transformada em 10:

$$\log_4 12 = \frac{\log 12}{\log 4} = \frac{\log(2^2 \cdot 3)}{\log 2^2} = \frac{2 \cdot \log 2 + \log 3}{2 \cdot \log 2}$$

Substituindo os valores, teremos:

$$\log_4 12 = \frac{0,6 + 0,48}{0,6}$$

$$\log_4 12 = 1,8$$

■

4.3 Equação Logarítmica

Equações logarítmicas são equações onde a incógnita pode estar presente no logaritmando ou na base do logaritmo.

Para resolver uma equação logarítmica, teremos que utilizar a Definição 4.4, consequências e propriedades dos logaritmos, como nos exemplos a seguir:

Exemplo 4.8. *Determinaremos o conjunto solução de cada uma das equações a seguir, considerando $U = \mathbb{R}$.*

a) $\log_x(4x - 3) = 2$

b) $\log_2(10x - 4) = \log_2(5 + x)$

c) $\log_3(2x + 1) - \log_3(x - 4) = -2$

d) $\log_2(x^2 - 1) = 3$

a) **Solução:** Antes de começar a resolver a equação em si, como se trata de um logaritmo, temos que analisar sua condição de existência (C.E.), ou seja, analisar os possíveis valores para base e logaritmando de $\log_x(4x - 3)$. De acordo com a Definição 4.4, temos:

$$x > 0 \text{ e } x \neq 1$$

e

$$4x - 3 > 0 \Longrightarrow x > \frac{3}{4}$$

. Portanto, temos que $x > \frac{3}{4}$ e $x \neq 1$. Resolvendo $\log_x(4x - 3) = 2$, teremos:

$$\log_x(4x - 3) = 2 \Longrightarrow x^2 = 4x - 3 \Longrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

Resolvendo por Bhaskara, temos:

$$\Delta = (-4)^2 - 4.1.3 \Longrightarrow \Delta = 4$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2} \Longrightarrow x_1 = 3 \text{ e } x_2 = 1$$

Analisando (C.E.), podemos desconsiderar x_2. Portanto $S = \{3\}$. ■

b) **Solução:** Inicialmente a condição de existência (C.E.):

$$10x - 4 > 0 \Longrightarrow x > \frac{2}{5} \text{ e } 5 + x > 0 \Longrightarrow x > -5$$

Portanto, temos que $x > \frac{2}{5}$. Utilizando as consequências de logaritmo [v], teremos:

$$10x - 4 = 5 + x \Longrightarrow 9x = 9 \Longrightarrow x = 1$$

Portanto $S = \{1\}$. ■

c) **Solução:** Inicialmente a condição de existência (C.E.):

$$2x - 1 > 0 \Longrightarrow x > \frac{1}{2} \text{ e } x - 4 > 0 \Longrightarrow x > 4$$

Portanto, temos que $x > 4$. Utilizando as propriedades de logaritmo [4.2.2], teremos:

$$\log_3(2x+1) - \log_3(x-4) = -2 \Longrightarrow \log_3\left(\frac{2x+1}{x-4}\right) = -2$$

$$\frac{2x+1}{x-4} = \frac{1}{9} \Longrightarrow 18x + 9 = x - 4 \Longrightarrow x = -\frac{13}{17}$$

O resultado de x não satisfaz a (C.E.), portanto $S = \emptyset$. ■

d) **Solução:** Inicalmente a condição de existência (C.E.):

$$x^2 - 1 >= 0$$

Resolvendo a inequação do 2º grau, temos que:

$$x < -1 \text{ ou } x > 1$$

Resolvendo o logaritmo pela definição [4.4], teremos:

$$\log_2(x^2 - 1) = 3 \Longrightarrow x^2 - 1 = 8 \Longrightarrow x_1 = -3 \text{ e } x_2 = 3$$

Ambas soluções pertencem à condição de existência, portanto $S = \{-3, 3\}$. ■

4.4 Função Logarítmica

Definição 4.9. *A função $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $f(x) = \log_b x$, com $0 < b \neq 1$, é denominada de **função logarítmica**.*

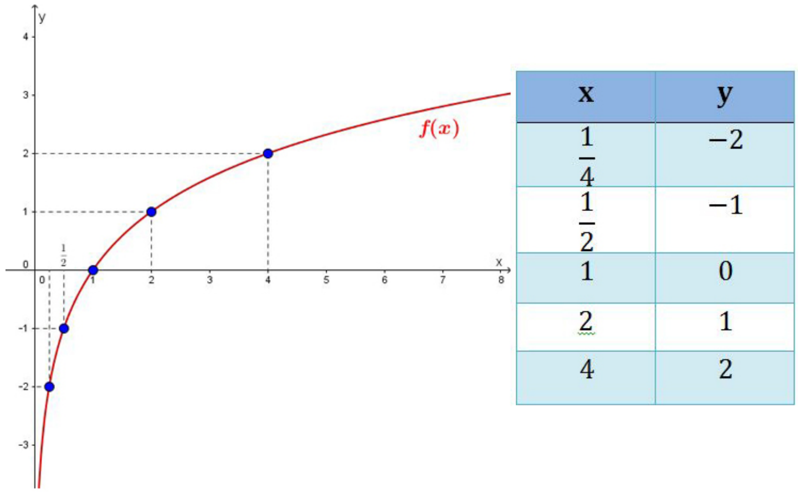
4.4.1 Gráfico da Função Logarítmica

Assim como na função exponencial, o gráfico da função logarítmica é uma curva que possui comportamento assintótico.

Para exemplificar o gráfico de uma função logarítmica iremos esboçar dois gráficos: $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ para $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

Considerando o modelo da função logarítmica $f(x) = \log_b a$, teremos:

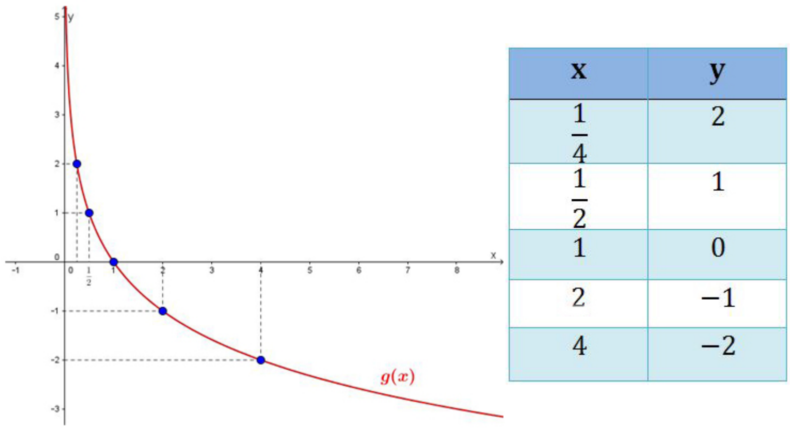
i) Na função $f(x)$, temos que $b > 1$. Portanto a função f será **crescente**.



x	y
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2

Figura 4.5: Função Crescente f

ii) Na função $g(x) = \log_b x$, temos que $0 < b < 0$. Portanto a função g será **decrescente**.



x	y
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2

Figura 4.6: Função Decrescente g

4.4.2 Inequação Logarítmica

Uma inequação logarítmica é toda desigualdade cuja variável aparece no logaritmando ou na base. Assim como nas demais funções mencionadas, temos dois casos de inequação logarítmica:

Utilizaremos a função logarítmica $f(x) = \log_b x$ para demonstrar os casos a seguir:

i) Quando $b > 1$

Como vimos anteriormente na Figura 4.5, para $b > 1$ temos uma função crescente. Nessa função, temos que, se $x_2 > x_1$ então $f(x_2) > f(x_1)$.

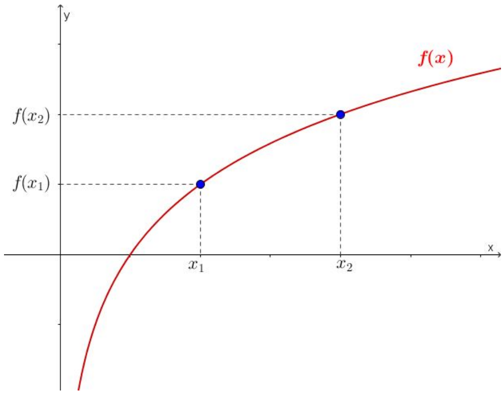


Figura 4.7: Função para $b > 1$

ii) Quando $0 < b < 1$

Como vimos anteriormente em [4.6], para $0 < b > 1$ temos uma função decrescente. Nessa função, temos que, se $x_2 > x_1$, então $f(x_2) < f(x_1)$.

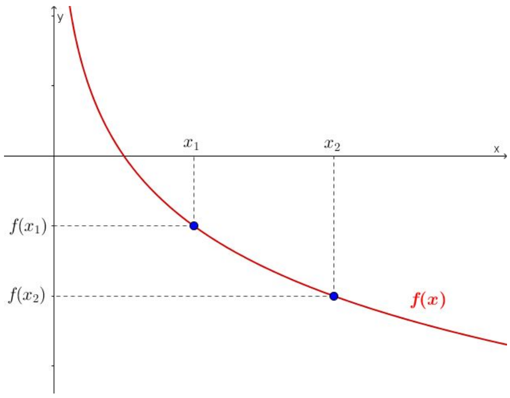


Figura 4.8: Função para $0 < b < 1$

4.5 Aplicações

Utilizaremos algumas ciências que utilizam o conceito de logaritmo como ferramenta para estudo.

4.5.1 Química

Uma contextualização bastante conhecida para função exponencial e logarítmica é a perda de radiação de um composto químico, também conhecida como **meia vida** ou período de **semidesintegração** de um determinado composto radioativo.

Através de um processo químico chamado transmutação, que pode ser de forma natural ou induzida artificialmente, os núcleos instáveis emitem radiações e, com o tempo, essa emissão diminui devido à queda do número de átomos radioativos.

Utilizaremos dois exemplos, um da Fundação Edson Queiroz (Universidade de Fortaleza - UNIFOR) e um exemplo do ENEM que, consequentemente, será resolvido, mas não como objetivo principal. A ideia é utilizar uma questão e assunto atuais para contextualizar alguns tópicos iniciais de função, como construção do gráfico, comportamento, domínio e imagem dentre outros.

Exemplo 4.10. *(UNIFOR - 2014) A medida de tempo na qual metade da quantidade do material radioativo se desintegra é denominada de meia-vida ou período de semidesintegração* $\boldsymbol{P}$. *Esse valor é sempre constante para o mesmo elemento químico radioativo. Assim, a cada período de tempo* t*, a quantidade de material radioativo reduziu-se à metade da anterior, sendo que a quantidade de material radioativo a qualquer tempo é dada por:* $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(t/p)}$*, onde* N_0 *é a quantidade inicial de material radioativo,* t *é o tempo decorrido e* p *é o período de semidesintegração do material radioativo considerado. Sabendo-se que são necessários* 5 *anos para que o cobalto-*60 *perca metade de sua radioatividade, a porcentagem de sua atividade original que permanecerá no fim de* 10 *anos é de :*

a) 20%

b) 25%

c) 30%

d) 35%

e) 40%

Aplicações em Função:

i) **Identificação de Domínio da função**

No Exemplo 4.10, temos uma relação entre a quantidade de material radioativo N em função do tempo t, dado em anos. Portanto, temos que os possíveis valores de t representam o conjunto **domínio** e o **contradomínio**, os possíveis valores de N.

De acordo com o enunciado do Exemplo 4.10, podemos mostrar que o domínio dessa função é todo valor t a partir do início do experimento, portanto $t \geqslant 0$:

$$D = \{t \in \mathbb{R}\,|t \geqslant 0\}$$

ii) **Gráfico da função e conjunto imagem**

Vamos apresentar alguns valores para t para estudarmos o comportamento do gráfico. Substituiremos esses valores na função $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(t/p)}$, onde $p = 5$ portanto:

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(t/5)}$$

Como temos na função a fração $\frac{t}{5}$, atribuiremos valores múltiplos de 5, começando pelo valor inicial do experimento, $t = 0$.

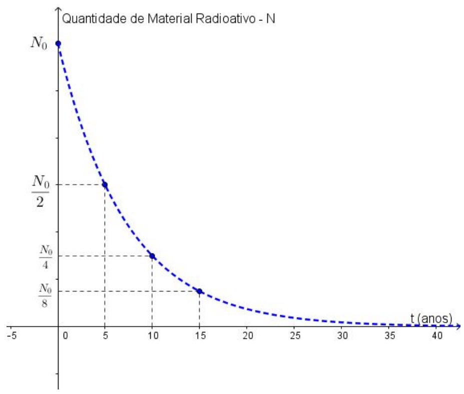


Figura 4.9: Esboço do Gráfico

Podemos perceber pelo comportamento do gráfico que a função $N(t)$ é uma **função decrescente** e que, para cada valor que aumentamos de t, a imagem $N(t)$ se reduzirá em toda a extensão da função.

Analisando o **conjunto imagem da função** $\mathbb{I}m$, teremos que, ao decorrer do tempo t, a quantidade material radioativo se reduzirá, mas sempre será uma fração própria com numerador $N_0 > 0$, portanto a imagem será sempre positiva.

$$\mathbb{I}m = \{N \in \mathbb{R}\,|0 < N \leqslant N_0\}$$

iii) **Injetividade e Sobrejetividade**

De acordo com o comportamento da função $N(t)$ podemos classificá-la em **injetora**. De acordo com a Definição 1.15, podemos perceber que um determinado valor de N só será atingido com um tempo específico e, exclusivo, em t. Portanto, para qualquer t_1 e t_2 pertencente ao Domínio $[D]$, teremos $N(t_1) \neq N(t_2)$.

Para definirmos $N(t)$ como sobrejetora, temos que afirmar que seu contradomínio seja limitado ao intervalo igual ao do conjunto imagem I_m, caso contrário, essa classificação não se aplicaria. Portanto, se o contradomínio for, $CD = \{x \in \mathbb{R}\,|0 < x \leqslant N_0\}$, teremos $N(t)$ **Sobrejetora**.

iv) **Inversa de $N(t)$**

De acordo com a classificação anterior, a função $N(t)$ é classificada como **bijetora**, classificação essencial para definirmos uma função **inversa**.

Para definir a função inversa de $N(t)$, vamos utilizar a regra prática, presente na Observação 1.23. Vamos considerar $N(t) = y$, portanto teremos:

$$y = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(t/5)}$$

Seguindo o processo da regra prática, trocaremos y por t na lei de formação e, em seguida, isolaremos y:

$$t = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(y/5)}$$

$$\frac{t}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(y/5)}$$

Para conseguirmos isolar a variável y, precisaremos introduzir logaritmo em ambos os membros da igualdade e, consequentemente, utilizar as definições presentes na seção 4.2. Escrevendo como logaritmo decimal em ambos os membros, temos:

$$\log\left(\frac{t}{N_0}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right)^{(y/5)} \Longrightarrow \log\left(\frac{t}{N_0}\right) = \frac{y}{5} \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{y}{5} = \frac{\log\left(\dfrac{t}{N_0}\right)}{\log\left(\dfrac{1}{2}\right)}$$

Reduzindo o segundo membro a um só logaritmo, teremos:

$$\frac{y}{5} = -\log_2\left(\frac{t}{N_0}\right) \Longrightarrow y = -5 \cdot \log_2\left(\frac{t}{N_0}\right)$$

Ao esboçar o gráfico da função $N(t)$ e de sua inversa $N^{-1}(t)$, teremos:

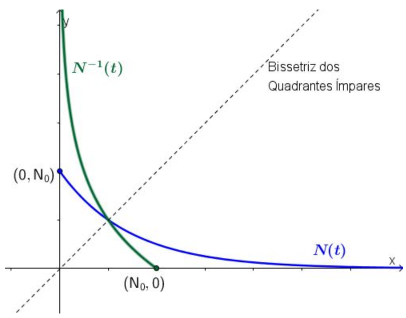


Figura 4.10: $N(t)$ e sua inversa $N^{-1}(t)$

A função inversa $N^{-1}(t)$ tem como objetivo analisar há quanto tempo o composto radioativo está perdendo sua radiação a partir da quantidade de radiação emitida por ele.

■

Solução: O exercício exige a porcentagem da atividade radioativa do composto original depois de 10 anos. Por isso calcularemos $N(10)$:

$$N(10) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(10/5)} \Longrightarrow N(10) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$N(10) = N_0 \cdot \frac{1}{4} \Longrightarrow N(10) = 0,25 \cdot N_0$$

Portanto restará 25% do composto original depois de 10 anos. ■

Exemplo 4.11. *(ENEM-2013) Em setembro de* 1987*, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza a metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão o* $M(t) = A.(2,7)^{kt}$*, onde* A *é a massa inicial e* k *uma constante negativa.*

Considere $0,3$ *como aproximação para* $\log 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% *da quantidade inicial?*

a) 27

b) 36

c) 50

d) 54

e) 100

Aplicações em Função:

i) **Construção da Lei de Formação da Função**

Essa questão do ENEM apresenta uma fórmula que calcula o material radioativo do césio-137 ao longo de um tempo t dado em anos. Vamos, a partir dos conceitos de potenciação, criar uma lei de formação de mais fácil associação e entendimento para conseguir chegar no mesmo resultado proposto pelo exercício.

Para cada período de "meia vida"[4.5.1] do composto, multiplicaremos a concentração inicial pela fração $\frac{1}{2}$. Como o período de meia vida do composto em questão é de 30 anos, podemos elaborar uma estratégia matemática de tal forma que, a cada múltiplo de 30, multiplicaremos a concentração inicial A por $\frac{1}{2}$. Com isso, teremos:

$$M(t) = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$$

ii) **Construção do Gráfico da Função**

Com essa lei de formação esboçaremos o gráfico de $M(t)$:

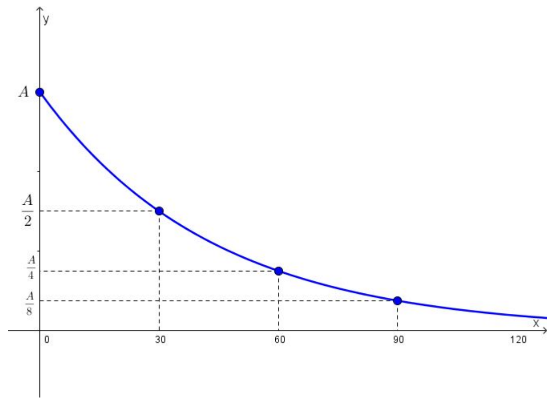


Figura 4.11: Meia vida do Césio-137

■

Solução: Iremos resolver essa questão utilizando as duas leis de formação. Primeiro utilizaremos a lei proposta pelo autor da questão e, em seguida, faremos uma solução alternativa utilizando a lei de formação proposta nas aplicações.

i) **Solução pelo enunciado.**

De acordo com os dados do exercício, a meia vida o césio-137 é de 30 anos. Portanto $M(30) = \frac{A}{2}$.

$$\frac{A}{2} = A \cdot (2,7)^{30.k} \Longrightarrow \frac{1}{2} = (2,7)^{30.k} \text{ (I)}$$

Utilizaremos essa informação para substituir na equação quando $M(t) = \frac{A}{10}$:

$$\frac{A}{10} = A \cdot (2,7)^{k.t} \Longrightarrow \frac{1}{10} = (2,7)^{k.t}$$

Elevando os dois membros à 30ª potência, teremos:

$$10^{-30} = (2,7)^{30.k.t} \Longrightarrow 10^{-30} = \left[(2,7)^{30.k}\right]^t \ \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$10^{-30} = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Escrevendo em forma de logaritmos decimais ambos os membros e aplicando suas propriedades, teremos:

$$\log(10)^{-30} = \log\left(\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow -30 = -t \cdot \log 2$$

De acordo com o dado, $\log 2 = 0,3$, concluímos que:

$$t = \frac{30}{0,3} \Longrightarrow t = 100$$

ii) **Solução alternativa**

Consideraremos a lei de formação criada anteriormente i), $M(t) = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$, e substituiremos $M(t)$ por $\frac{A}{10}$:

$$\frac{A}{10} = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}} \Longrightarrow \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$$

Utilizando a definição de logaritmo em ambos os membros e já utilizando o dado fornecido de $\log 2 = 0,3$ podemos escrever que:

$$\log\left(\frac{1}{10}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}} \Longrightarrow -\log 10 = -\frac{t}{30} \cdot \log 2$$

$$-1 = -\frac{t}{30} \cdot 0,3 \Longrightarrow t = 100$$

■

4.5.2 Biologia

Reprodução de bacteriana ou viral, evolução de uma epidemia e ação de um determinado medicamento no corpo humano são alguns dos exemplos que podemos contextualizar o conteúdo de função exponencial e logarítmica na disciplina de biologia.

Esse tópicos mencionados em função do tempo transcorrido são gráficos com comportamento exponencial e, eventualmente, são conteúdos utilizados em provas de vestibulares. Mas, além desse ponto, o que chama a atenção desses títulos em biologia é que o aluno, com uma explicação básica do conteúdo, consegue identificar o comportamento da curva proposta utilizando o conhecimento adquirido no Ensino Fundamental.

A partir daí o professor de matemática por transitar entre as disciplinas buscando o melhor entendimento do conteúdo de função. Esses tópicos mencionados são excelentes ferramentas para despertar, nos alunos que almejam faculdades em áreas biológicas, o interesse pelo estudo de função, melhorando assim o aprendizado futuro.

O comportamento na reprodução de bactérias e vírus é semelhante. O aumento do número desses seres em função do tempo tem um comportamento exponencial e sofre influência de vários fatores externos, como temperatura, umidade e etc. Não iremos aprofundar em tais fatores, faremos apenas uma associação entre a quantidade de determinada espécie em função do tempo transcorrido. Para informações mais detalhadas do comportamento na reprodução de algumas bactérias ou vírus pode-se consultar [11].

Cada espécie de bactéria possui uma fator de crescimento específico que define como será o comportamento da sua população em **função** de um tempo determinado. O exemplo a seguir deixa claro essa associação:

Exemplo 4.12. *(PUC-SP-2015) Num mesmo instante, são anotadas as populações de duas culturas de bactérias:* P_1*, com* 32000 *elementos, e* P_2*, com* $12,5\%$ *da população de* P_1*. Supondo que o número de bactérias de* P_1 *dobra a cada* 30 *minutos enquanto que o de* P_2 *dobra a cada* 15 *minutos, quanto tempo teria decorrido até que as duas culturas igualassem suas quantidades de bactérias?*

a) 2 horas e 30 minutos.

b) 2 horas.

c) 1 hora e 45 minutos.

d) 1 hora e 30 minutos.

e) 1 hora.

Aplicações em Função: Esse exercício utiliza duas funções, a população de P_1 em função do tempo t, e a população P_2 em função do tempo t, tempo esse dado em minutos.

i) **Lei de formação das Funções**

Na função P_1, a população dobra a cada 30 minutos, ou seja, a população inicial em P_1 será multiplicada por 2 para cada tempo, em minutos, múltiplo de 30. Podemos escrever essa função como:

$$P_1(t) = 32000 \cdot (2)^{\frac{t}{30}}$$

Na função P_2, a população dobra a cada 15 minutos, ou seja, a população inicial, $12,5\%$ de 32000, em P_2 será multiplicada por 2 a cada tempo, em minutos, múltiplo de 15. Portanto a função P_2 será:

$$P_2(t) = 4000 \cdot (2)^{\frac{t}{15}}$$

ii) **Domínio e Conjunto Imagem das funções**

O Domínio D de ambas funções é o mesmo, pois trabalhamos com variação de tempo a partir do início, quando $t = 0$. Teremos então:

$$D = \{t \in \mathbb{R} \,|t \geqslant 0\}$$

No conjunto imagem teremos conjuntos diferentes em P_1 e P_2, pois os valores iniciais são distintos. Temos que $P_1(0) = 32000$, $P_2(0) = 4000$ e que ambas as funções são **crescentes**, pois a base da variável t é maior que 1 [4.1]. Concluímos que $P_1(0)$ e $P_2(0)$ são os valores mínimos de das funções P_1 e P_2, respectivamente. Portanto o conjunto imagem de P_1, I_{m1} será:

$$I_{m1} = \{x \in \mathbb{R} \,|x \geqslant 32000\}$$

O conjunto imagem de P_2, I_{m2} será:

$$I_{m2} = \{x \in \mathbb{R} \,|x \geqslant 4000\}$$

iii) **Construção do Gráfico de $P_1(t)$ e $P_2(t)$**

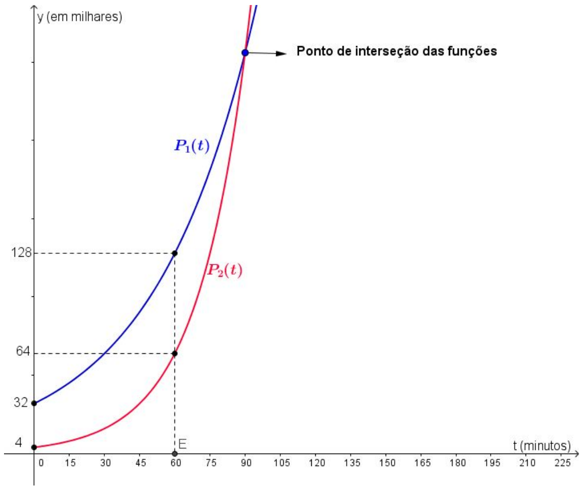


Figura 4.12: Esboço de $P_1(t)$ e $P_2(t)$

O **ponto de interseção** das funções, destacado na Figura, é o momento onde as populações P_1 e P_2 são iguais.

■

Solução: O problema pede o tempo necessário t para que as populações sejam iguais. Portanto queremos a coordenada t do ponto de interseção das duas funções, destacado na Figura 4.12. Para isso, teremos que resolver $P_1(t) = P_2(t)$.

$$P_1(t) = P_2(t)$$

$$32000 \cdot (2)^{\frac{t}{30}} = 4000 \cdot (2)^{\frac{t}{15}} \Longrightarrow \frac{(2)^{\frac{t}{30}}}{(2)^{\frac{t}{15}}} = \frac{4000}{32000}$$

$$(2)^{\frac{t}{30}-\frac{t}{15}} = \frac{1}{8} \Longrightarrow (2)^{-\frac{t}{30}} = 2^{-3}$$

Trabalhando somente com os expoentes teremos:

$$-\frac{t}{30} = -3 \Longrightarrow t = 90$$

Portanto a resposta será 90 minutos ou **1 hora e 30 minutos**.

■

Outra área da biologia que pode despertar um grande interesse no aluno é o desenvolvimento (crescimento) de seres vivos, plantas ou animais. Essa estratégia seria uma excelente ferramenta no ensino de funções para incentivar o estudo por parte dos alunos que tem maior afinidade para áreas biológica, como medicina, farmácia, enfermagem e etc.

Boa parte dos seres vivos que estão no nosso cotidiano tem uma linha de crescimento semelhante, eles apresentam uma variação de desenvolvimento maior nos primeiros períodos de tempo e, como o passar do tempo, essa variação diminui. O crescimento de um ser humano, por exemplo, fica mais evidente nos primeiros anos de vida e, com o passar do tempo, esse crescimento vai se reduzindo até um momento que ele se torna imperceptível. Esse mesmo processo é semelhante ao que acontece com outros animais, e até mesmo plantas.

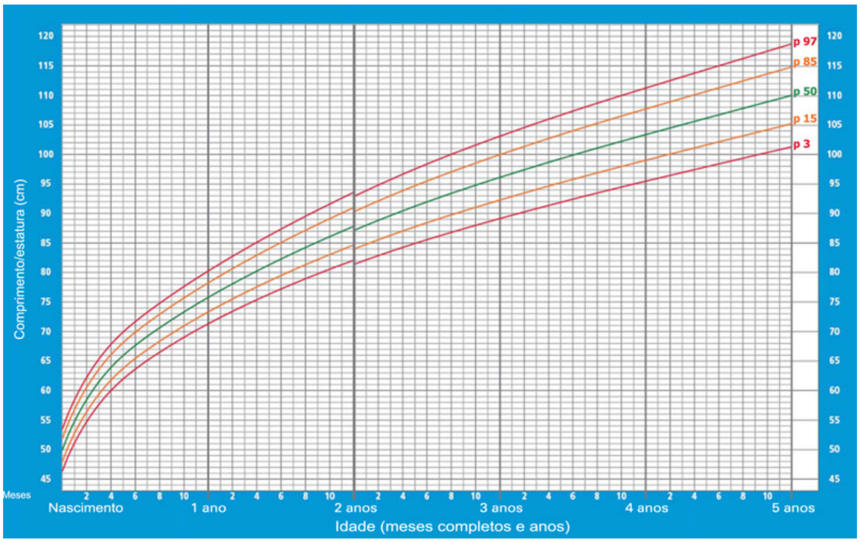


Figura 4.13: Curva de Crescimento - Altura x Tempo

Disponível em: http://veja.abril.com.br/especiais_online/crescimento-saudavel/curvas-crescimento.shtml. Acesso em: 25 de outubro de 2016.

A Figura 4.13, que representa a variação do comportamento ideal da altura de um menino até os 5 anos de idade, é um exemplo da associação da altura em função do tempo. A característica presente nesse exemplo, assim como em outros tipos de desenvolvimento, é semelhante ao comportamento de uma função logarítmica.

As várias curvas demonstradas na figura são possíveis comportamentos que a criança pode ter no decorrer do tempo. Essas variações acontecem por fatores externos que comprometem a regularidade do crescimento, essa variação pode acontecer com qualquer ser vivo que apresente comportamento semelhante ao que foi demonstrado na Figura 4.13.

O objetivo desse trabalho matemático não é estudar tais ações externas, mas sim esboçar um comportamento ideal dessa curva para trabalhos a função de duas variáveis, que é o foco do Ensino Médio.

O exemplo a seguir, do vestibular da UNESP (Universidade Estadual de São Paulo), traduz o comportamento mencionado e, a partir dele, aplicaremos os tópicos mais relevantes de funções como feito em outros exemplos no decorrer do trabalho.

Exemplo 4.13. *(Vunesp-SP) Numa plantação de certa espécie de árvore, as medidas aproximadas da altura e do diâmetro do tronco, desde o instante em que as árvores são plantadas até completarem 10 anos, são dadas respectivamente pelas funções:*

Altura: $H(t) = 1 + (0,8) \cdot \log_2(t+1)$
Diâmetro do Tronco: $D(t) = (0,1) \cdot 2^{\frac{t}{7}}$
Com $H(t)$ *e* $D(t)$ *em metros e* t *em anos.*

a) Determine as medidas aproximadas da altura, em metros, e do diâmetro do tronco, em centímetros, das árvores no momento em que são plantadas.

b) A altura de uma árvore é de $3,4$ *metros. Determine o diâmetro aproximado do tronco dessa árvore, em centímetros.*

Aplicações em Função:

i) **Domínio e Conjunto Imagem das funções**

De acordo com o enunciado do exercício, ambas funçõe ($H(t)$ e $D(t)$) variam do momento em que as árvores são plantadas, quando $t = 0$ até os 10 anos de idade, quando $t = 10$, Portanto teremos Domínios iguais nas duas funções, que será:

$$D = \{t \in \mathbb{R} \,|0 \leqslant t \leqslant 10\}$$

A função $H(t)$ é uma função logarítmica [4.9] crescente pois a base é maior que 1 e, consequentemente, teremos seu mínimo para $t = 0$ e seu máximo para $t = 10$. Para $t = 0$ teremos:

$$H(0) = 1 + 0,8 \cdot \log_2 1 \Longrightarrow H(0) = 1$$

Para $t = 10$, teremos $H(10)$:

$$H(10) = 1 + 0,8 \cdot \log_2 11 \Longrightarrow H(10) \approx 3,78$$

A função $D(t)$, também crescente, é uma função exponencial [4.1] e, por isso, terá seu valor mínimo quando $t = 0$ e máximo para $t = 10$.

$$D(0) = 0,1 \cdot 2^0 \Longrightarrow D(0) = 0,1$$

Para $t = 10$, teremos $D(10)$ igual a:

$$D(10) = 0,1 \cdot 2^{\frac{10}{7}} \Longrightarrow D(10) \approx 0,268$$

Pode-se afirmar que ambas funções são **bijetoras**.

ii) **Gráfico das Funções**

Vamos destacar, em cada gráfico, os pontos máximo e mínimo e também o ponto requisitado pelo item **b)**, quando a altura da árvore é 3,4 metros.

O gráfico de $H(t)$ será:

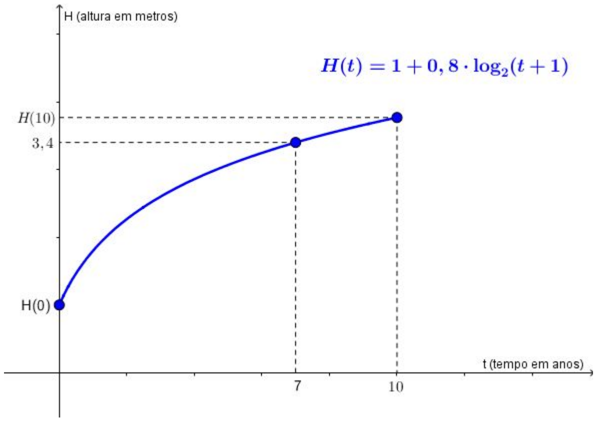


Figura 4.14: Altura H em função do tempo t

O gráfico de $D(t)$ será:

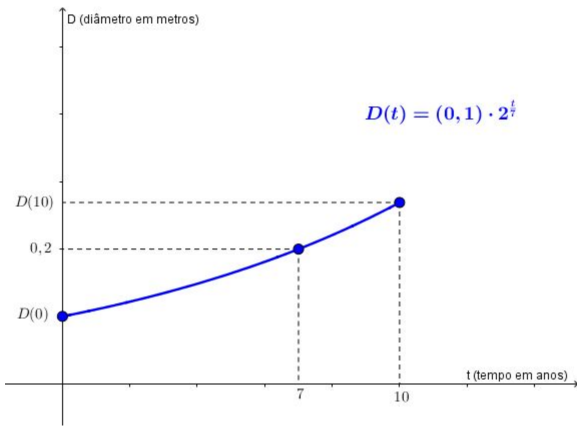


Figura 4.15: Diâmetro D em função do tempo t

iii) **Função Inversa**

O exercício forneceu a altura da árvore para, com essa informação, descobrir o diâmetro da mesma. Não temos uma função do diâmetro em relação à altura, portanto precisamos descobrir primeiro o tempo, em anos, que essa árvore gastou para atingir essa altura e depois, com esse dado, descobrir o diâmetro.

Temos que descobrir o tempo utilizando a altura de 3,4 metros. Como a função $H(t)$ traduz a altura da árvore em função do tempo, podemos dizer que sua **inversa**, trabalhará com o tempo em função de uma determinada altura. Aplicando a regra prática da inversa, obteremos $g(x)$, que será a inversa de $H(t)$.

$$g(x) = 2^{\frac{x-1}{0,8}} - 1$$

Onde x representa a altura da árvore. Portanto $g(3,4)$ será:

$$g(3,4) = 2^{\frac{3,4-1}{0,8}-1} \Longrightarrow g(3,4) = 2^3 - 1$$

$$g(3,4) = 7 \text{ anos}$$

Outro ponto interessante que pode ser mostrado é o comportamento exponencial quando aplicamos a função inversa de uma função logarítmica. Esse comportamento pode ser percebido no gráfico a seguir.

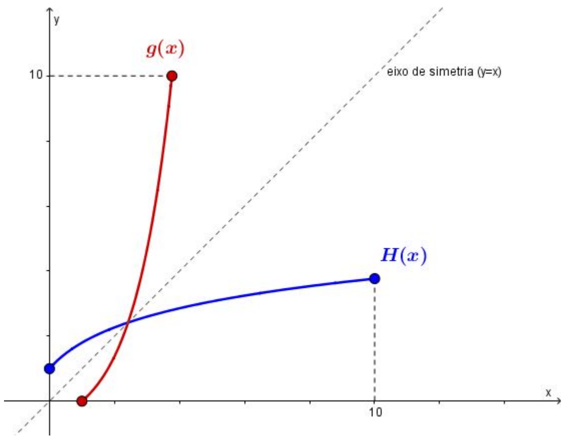


Figura 4.16: Inversa da Altura da Árvore

iv) **Função Composta**

A partir do valor descoberto com a função inversa $g(x)$, iremos utilizá-lo na função $D(t)$ para descobrir o tamanho do diâmetro dessa árvore. Teremos então o valor de $D(7)$ que será:

$$D(7) = 0,1 \cdot 2^{\frac{7}{7}} \Longrightarrow D(7) = 0,1 \cdot 2 \Longrightarrow D(7) = 0,2 \text{ metros}$$

O que podemos destacar neste exercício, no ponto de vista matemático e utilizando a função como ferramenta, é a presença de uma função composta [1.19].

Quando precisamos de uma função para descobrir um determinado valor e, em seguida, utilizamos o valor encontrado para substituir em uma outra função, teremos a aplicação da função composta. Depois de descobrir $g(3,4)$, substituímos este valor em $D(t)$ para chegar no resultado final 0,2 metros. Podemos dizer então, que utilizamos a função composta $D(g(x))$.

Teremos então a função composta $D \bigcirc g(x)$. Portanto vamos ter:

$$D \bigcirc g(3,4) = 0,2 \text{ metros}$$

$\blacksquare$

CAPÍTULO 5

APLICAÇÃO DO ESTUDO

Nos capítulos anteriores fizemos uma breve definição das principais funções abordadas no início do Ensino Médio, com suas respectivas aplicações, com o objetivo de ajudar a explicação dos conteúdos básicos de funções.

Identificar uma função pelo gráfico, construir a lei de formação de uma função, classificar em crescente e decrescente, descobrir domínio e conjunto imagem de uma função, classificar se uma função é injetora, sobrejetora, bijetora, par e ímpar, identificar se uma função pode possuir uma inversa e como é aplicação de funções compostas são tópicos básicos e iniciais da disciplina e independentes do tipo de lei de formação que rege a função.

Nesse capítulo mostraremos, através de uma síntese, como seria essa aplicação e quais exemplos poderíamos utilizar para cada tópico mencionado no capítulo inicial desta pesquisa. Demonstraremos exemplos e contextos para despertar o interesse no conteúdo de funções tendo como foco o elo entre as disciplinas mencionados anteriormente, Física, Química, Biologia e Geografia.

Para isso, consideraremos que o aluno que ingressa no ensino médio já possui algumas disciplinas cursadas no ensino fundamental, essenciais para o aprendizado de função, que são: manipulação algébrica, resolução de equações do 1º grau e 2º grau, estudo do tipo de gráficos e manipulação de coordenadas cartesianas. Chegamos nessa conclusão pelos estudos de [16], [17] e [22].

5.1 Identificação, construção do Gráfico, Domínio e Conjunto Imagem de uma Função

Para identificar uma função, a relação entre grandezas tem que respeitar a Definição [1.1], que podemos resumir em duas características: primeira, que todo elemento do domínio possua uma imagem e, segunda, que ela seja única.

Para identificar essas características, os autores estudados utilizam leis de formação sem contextualização e alguns exemplos contextualizados com o cotidiano do aluno. A partir destes exemplos, estuda-se a construção do gráfico e a análise de seu comportamento. Esses exemplos cotidianos são de grande valia na explicação do conteúdo, porém, é importante que paralelamente à esses exemplos utilizemos associações com as ciências que os alunos estudaram no Ensino Fundamental e irão estudar no Ensino Médio.

Identificaremos aqui algumas relações de grandezas que podem ser utilizadas pelo professor para que ele possa, a partir delas, desenvolver o conceito de função, construir gráficos e analisar os conjuntos de Domínio e Imagem da função.

5.1.1 Exemplos Cotidianos

i) **Comércio**: relação entre preço pago por determinado produto e a quantidade vendida desse produto. Pode-se relacionar também um salário de um vendedor em função da quantidade vendida (salário por comissão). Faturamento ou rendimento, em dinheiro, de uma empresa em função do número de produtos vendidos ou serviços prestados.

ii) **Transporte**: relação entre preço da locação do transporte e distância percorrida (táxi, uber, ônibus e etc). Utilizando a proporção, podemos estabelecer uma relação entre distância percorrida de um automóvel e seu consumo de combustível.

iii) **Problemas Domésticos**: utilizando a proporção, pode-se relacionar por exemplo, quantidades de ingredientes de uma determinada receita culinária, sucos concentrados em relação à água, quantidade de um produto de limpeza em relação a sua área de atuação (rendimento).

Com variações desses problemas, dentre outros não mencionados, os autores de livros didáticos propõem situações problemas para que o professor consiga moldar o conteúdo de funções para o aluno do primeiro ano do Ensino Médio.

5.1.2 Exemplo nas Ciências do Ensino Médio

Mesmo apresentando certo nível de eficácia, essa estratégia já é utilizada no Ensino Fundamental e, portanto, não desperta tanto interesse quanto uma informação inédita.

O que propomos nessa pesquisa é a utilização de novos contextos, retiradas das ciências da natureza, para que o estudante tenha uma nova visão sobre a utilização da matemática, em especial, usando o conceito de função como elo de aprendizagem.

Para demonstrar os princípios básicos de uma função, poderíamos utilizar exemplos como:

i) **Física**

Utilizando a proporção, podemos utilizar o conceito de velocidade média [2.8]. Mantendo uma das grandezas constantes, pode-se mostrar o comportamento da relação entre as outras duas.

Ainda em MU [2.9], que possui a função horária da posição $S = S_0 + v \cdot t$, podemos fixar duas dessas variáveis e estudar o comportamento das outras duas restantes, estabelecendo assim uma **função** entre essas grandezas.

Utilizando raciocínio semelhante, pode-se utilizar equações do MUV [2.11], mantendo sempre uma variável em função da outra.

Estabelecer uma relação, mesmo que superficial, entre o **Campo Gravitacional** de um objeto em relação a outro (atração gravitacional de planetas por exemplo), considerando que este campo esteja em **função** da distância entre eles ou da massa dos objetos.

Utilizando também uma teoria superficial, semelhante à do campo gravitacional, podemos estabelecer uma relação de dependência de grandezas entre a intensidade de um **Campo Magnético** (utilizando um ímã como exemplo) e a distância do objeto "atraído".

Utilizando exemplos como trilhos de um trem ou materiais utilizados em construção civil, podemos mostrar o comportamento da **dilatação térmica**, tópico atual e importante da termodinâmica [8]. Uma ilustração atual da importância da construção básica de uma lei de formação sobre esse tópico foi vista no ENEM de 2016, que pode ser vista a seguir:

Exemplo 5.1. *(ENEM-2016) Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3000 °C e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min.*

Use 0,477 como aproximação para $\log_{10} 3$ *e 1,041 como aproximação para* $\log_{10} 11$.

O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja 30 °C é mais próximo de

a) 22

b) 50

c) 100

d) 200

e) 400

ii) **Química**

Como mencionado anteriormente, podemos utilizar o conceito de **Pressão dos Gases** [2.20] para mostrar que a pressão está em função de grandezas como volume do recipiente e temperatura.

Utilizando os conhecimentos de potenciação que o aluno adquiriu no Ensino Fundamental, pode-se utilizar o conceito de **meia vida de composto radioativo** para estabelecer a relação entre a massa radioativa de certo composto em função do tempo que se passa. Podem ser utilizados como exemplos os acidentes nucleares que aconteceram nos últimos anos para demonstrar essa relação.

iii) **Biologia**

Mostramos nessa pesquisa como é o comportamento do desenvolvimento de plantas e animais no decorrer do tempo. Podemos estabelecer essa relação, mesmo que superficial, para mostrar a importância do conteúdo de função na biologia, desenvolvendo uma relação entre o crescimento de um determinado ser (humano ou outro mamífero qualquer por exemplo) em relação ao tempo e mostrar que, ao longo do Ensino Médio, estudaremos uma lei de formação que pode reger esse comportamento visto em um gráfico, que é a função logarítmica [4.4].

Outro conceito interessante em biologia é relacionado ao crescimento populacional de vírus e bactérias no decorrer do tempo. Esse associação é mais prática de ser trabalhada, pois abrange tópicos de Matemática que são de nível Fundamental: potenciação e juros compostos. O professor possui um excelente exemplo de função exponencial crescente para trabalhar com os alunos.

iv) **Geografia**

Utilizando conceitos da Geografia física estudados no Ensino Fundamental, pode-se solidificar esse conteúdo utilizando as noções de função e, principalmente, a demonstração em um gráfico. Densidade Demográfica e a Escala cartográfica, conteúdo muito cobrado no ENEM, são excelentes para demonstrar a relação entre grandezas.

Utilizando o crescimento exponencial como referência, podemos estabelecer relações com o crescimento populacional de alguma região no decorrer do tempo, fazendo uma associação posterior à densidade demográfica mencionada no parágrafo anterior.

Esses são alguns exemplos que podemos utilizar para tornar mais interessante o conteúdo de funções e fazer com que o aluno consiga estabelecer uma conexão com as demais ciências.

Essa exemplificação inicial é de extrema importância para que, desde o início do Ensino Médio, o estudante esteja familiarizado com essa conexão e, futuramente, no decorrer do Ensino Médio, principalmente, consiga compreender algumas relações entre grandezas que lhe serão ensinadas.

5.2 Função Crescente e Decrescente

Conceitos básicos como Domínio, Contradomínio e Conjunto Imagem, lei de formação, identificar um gráfico de função, raiz de uma função, termo independente e alguns outros pontos, são a raiz do conteúdo. Após essas explicações, estuda-se o comportamento do gráfico de uma função, **crescente** ou **decrescente**.

Esse estudo é de extremamente importante para a resolução de problemas matemáticos e também em outras ciências como Física, Química e Biologia. Muitos vestibulares utilizam questões de interpretação de gráfico no processo seletivo e que, algumas vezes, podem ser resolvidas apenas com os conceitos de função associados à teoria da ciência estudada. A partir dessa análise, pode-se dizer que o professor de Matemática que aplica, o mais cedo possível, a ligação entre o tópico de função com as demais disciplinas conseguirá um rendimento melhor do seu aluno não só em matemática, aumentando assim o poder de interpretação do aluno e elevando seu nível de preparo para o vestibular.

5.2.1 Aplicações para função Crescente e Decrescente

Definimos, no primeiro capítulo, o que caracteriza uma função crescente [1.11]. Também notamos que em cada função específica (lei de formação) existe uma característica particular que define se a função é crescente ou decrescente.

Mostraremos aqui alguns exemplos para função crescente e decrescente utilizando as ciências da natureza, Física, Química, Biologia e Geografia.

i) **Física**

Em Cinemática, existem várias possibilidades de gráficos para mostrarmos o crescimento ou decrescimento de uma função. Utilizando o conceito de proporção, já utilizado anteriormente, pode-se trabalhar com uma velocidade constante e observar o crescimento do gráfico da distância percorrida em função do tempo (função crescente). Utilizando a mesma notação de velocidade, estabelecendo uma distância fixa, podemos mostrar a relação **decrescente** da velocidade em função do tempo.

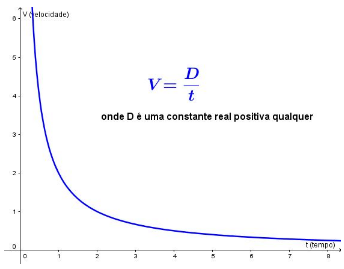


Figura 5.1: Velocidade em função tempo

Observamos no MUV, na equação $V = V_0 + a \cdot t$, que podemos ter exemplo de função crescente, decrescente ou constante dependendo da variação da aceleração.

Em um exemplo de **Queda Livre**, podemos estabelecer uma função decrescente da altura em função do tempo e, ao mesmo tempo, podemos estabelecer uma função crescente da velocidade em função do tempo.

Podemos utilizar a notação de **Força**, medida em N (Newtons), que é igual ao produto de massa por aceleração. Essa relação cai no mesmo conceito de proporção utilizado na velocidade escalar, portanto possui gráficos semelhantes.

O docente pode também trabalhar com o conteúdo de **Dilatação Térmica** [8], utilizando mais uma vez o conceito de proporcionalidade, e estabelecer uma relação (função crescente) entre a dilatação de uma barra metálica em função da temperatura que ela é submetida. Dependendo do nível de conhecimento dos alunos, pode-se trabalhar com dilatação linear ou volumétrica.

Em **Campo Magnético ou Elétrico**, podemos trabalhar a relação, decrescente, da intensidade da influência do campo (elétrico ou magnético) sobre um objeto em função da distância em que ele se encontra da fonte do campo.

ii) **Biologia**

O conteúdo já mencionado, **Crescimento populacional de seres** (bactérias, vírus e etc), representa uma função crescente, exponencial, em relação ao tempo decorrido.

O **efeito de um medicamento em um determinado organismo** é um exemplo muito interessante para função decrescente. Mesmo não estudando fatores externos, específicos da biologia, o professor consegue demonstrar o comportamento da concentração de determinado medicamento em função do tempo transcorrido após a aplicação.

O **desenvolvimento de seres vivos** (altura, comprimento, peso e etc) em função do tempo. A função crescente já foi trabalhada no Exemplo 4.13.

iii) **Química**

A **meia vida de composto radioativo** é um exemplo de função decrescente, mostra-se a emissão de radioatividade de determinado composto com o passar do tempo.

No conteúdo de **pressão de gases ideais**, podemos mostrar funções crescentes e decrescentes como mostrado nas Definições 2.17, 2.18 e 2.19. Para formatos crescentes, temos a pressão em função da temperatura ou volume em função da temperatura e, para formatos decrescentes, pressão em função do volume.

Podemos citar também a **Decomposição de objetos e substâncias** no meio ambiente com o passar do tempo. Essa função decrescente aplica-se muito bem na sustentabilidade do meio em que vivemos e é bastante cobrada em vestibulares e no ENEM.

iv) **Geografia**

Em Geografia podemos citar as já mencionadas funções crescentes, **Crescimento populacional**, **Densidade Demográfica** e **Escala cartográfica** utilizando, nessas duas últimas, a proporção como ponto de partida.

5.3 Classificação das funções em Injetora, Sobrejetora e Bijetora

Utilizando as definições presentes no capítulo [1], citaremos alguns modelos para ajudar na classificação e explicação de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras.

Trabalhando as variações de domínio e conjunto imagem, pode-se mostrar quando uma função se encaixa em alguma dessas classificações ou não.

i) **Física**

Todas as funções, não só em Física, que utilizam o princípio da proporcionalidade para serem formadas são exemplos de funções injetoras. Para cada valor do Domínio, só existe um único representante (proporcional) no contradomínio. Força, Campo Magnético, Pressão Volumétrica, Densidade e etc.

A função que relaciona a Energia Cinética, como citado na Definição 3.2.1, com a velocidade escalar é um excelente exemplo de função sobrejetora e, dependendo de seu domínio, pode ser classificada como injetora ou não.

ii) **Química**

Todas as funções em Química citadas até aqui possuem classificação de injetora. A classificação de sobrejetora dependerá do contradomínio utilizado e, caso ela se enquadre em uma função sobrejetora, poderemos classificá-la em bijetora.

iii) **Biologia**

Assim como na Química, as funções apresentadas até agora são injetoras. Pode-se trabalhar mais claramente com essa injetividade utilizando **Reprodução de Vírus e Bactérias**, pois são assuntos muito atuais.

Utilizando diferentes contradomínios, pode-se facilmente classificar essas funções em sobrejetoras e, automaticamente, em bijetoras.

5.4 Função Inversa

De acordo com a Definição 1.21, só podemos estabelecer uma função inversa de uma função se, e somente se, ela for bijetora.

Todas as funções classificadas como bijetoras, portanto, podem ser exemplos para demonstrar o comportamento e o objetivo da função inversa.

Utilizando as funções bijetoras presentes em Biologia, por exemplo, fica mais claro para o aluno perceber o comportamento do gráfico de uma função inversa em relação à sua função de origem.

5.5 Função Composta

O conteúdo de função composta é bastante utilizado no decorrer do Ensino Médio, principalmente em Física, para resolver questões que envolvem mais de uma função.

O conceito de função composta é utilizado para estabelecer um elo entre duas funções, ou seja, utiliza-se uma função para chegar em um resultado necessário para se aplicar a uma segunda função com o objetivo de chegar no resultado final.

Para exemplificar esse resumo temos:

i) **Física**

No Exemplo [3.5], para descobrir a **Energia Cinética**, é necessário que se descubra a velocidade média, utilizando a função horária da velocidade e a partir deste valor utiliza-se a função da Energia.

Podemos perceber essa teoria sendo aplicada em **Força Elétrica** e **Campo Elétrico**.

Em **Corrente Elétrica**, pode-se se estabelecer diversas relações de função composta. Se um exercício fornecer, por exemplo, a potência elétrica e a corrente elétrica máxima que um produto suporta e pedir o valor da resistência desse produto, utilizam-se duas funções para fazer essa associação de valores. É necessário descobrir a voltagem em uma função e, com esse valor em mãos, descobrir a resistência pedida.

Esse tipo de estratégia é bastante utilizado na Cinemática e outras áreas da Física.

Movimento Circular, com as forças em **Leis de Newton**, **Leis da Termodinâmica** e etc, são exemplos que podem ser abordados pelo professor para ajudar no entendimento, pelo menos teórico, de qual é o objetivo da função composta.

ii) **Biologia**

No exemplo de crescimento de plantas observamos a necessidade, no item b, de utilizar a função $H(t)$, com o intuito de descobrir o tempo (t), e, a partir daí, substituirmos em $D(t)$ para descobrirmos o diâmetro da árvore.

Essa mesma teoria pode ser abordada no desenvolvimento de outros seres vivos. No ser humano, por exemplo, existem diversas relações que associam crescimento altura, peso, aumento da circunferência abdominal ou de qualquer outro membro e etc, todas em função da idade da pessoa (tempo). A função composta tem o papel de fazer a conexão dessas funções.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi elaborado com o objetivo de estabelecer um elo inicial das disciplinas Física, Química, Biologia e Geografia com os conceitos iniciais de função abordados no Ensino Médio.

Nossa pesquisa defende que seria de grande importância a contextualização inicial das funções com outras disciplinas e até mesmo com o cotidiano do aluno, para que o aprendizado seja mais eficiente e possua um desenvolvimento melhor ao longo do Ensino Médio.

Citamos, no capítulo inicial, fatos históricos que demonstram o objetivo central do conteúdo de matemática, que é a resolução de problemas. A necessidade de resolver problemas de comércio, transporte, unidades de medida, ciências biológicas e etc mostra como a matemática foi crescendo como a principal ferramenta no desenvolvimento do conhecimento dentro das ciências.

Mostramos, com o conhecimento adquirido no ensino fundamental, que é possível fazer ligações com o conteúdo de funções e as disciplinas mencionadas. Trabalhar a dependência entre grandezas dentro dos vários universos que a Matemática habita.

Este trabalho mostra que é possível construir leis de formação utilizando os conceitos básicos trabalhados no ensino fundamental, como proporção, potenciação e equações. Mas, mais importante que construir essas leis, é associá-las às outras disciplinas, algumas vezes inéditas, do ensino médio.

O trabalho foi dividido em capítulos por tipo de lei de formação. Dentro de cada um utilizamos exemplos de vestibulares atuais para mostrar como podemos trabalhar o conteúdo de função em outras disciplinas.

Por fim, no capítulo de síntese [5], mostramos, em tópicos, algumas sugestões de conteúdos que podemos utilizar como exemplo para despertar a curiosidade e o interesse na explicação de função.

Não propomos uma explicação detalhada dos conteúdos que utilizamos como exemplo, mas sim uma abordagem superficial, utilizando exemplos de processos seletivos renomados, dos conteúdos das disciplinas mencionadas, exaltando sua relação com o conteúdo de função.

Esses elos entre as disciplinas são detectados atualmente em um dos maiores processos seletivos a nível de Ensino Médio, o ENEM.

Boa parte das aplicações propostas nessa pesquisa são abordadas pelos autores que utilizamos como referência. Porém, esse trabalho é feito somente no capítulo específico de cada lei de formação, ou seja, existe a contextualização, mas ela só é feita depois que o aluno já possui os conceitos básicos de função. Defendemos aqui a necessidade dessa associação da função com as demais disciplinas no início da matéria pesquisada, ou seja, no primeiro contato do aluno com o conteúdo.

Este material suporte que construímos mostra uma ideia da associação da matemática com as demais disciplinas em torno do tópico inicial de função. Mas essa pesquisa tem como objetivo ir além. Temos, como ideal, incentivar as pesquisas relacionadas à interdisciplinaridade dos conteúdos, em especial da matemática, com qualquer uma das ciências, buscando melhorar o aprendizado dos estudantes do Ensino Médio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais. "matemática"(PCN)**. Brasília: Ministério da Educação, 1998.

[2] BRASIL, **Parâmetros Curriculares, Ensino Médio, e I. V. Parte. "Ciências humanas e suas tecnologias."(PCN+)** Brasília: Ministério da Educação, 2002.

[3] MENDES, Maria Helena Monteiro. **O Conteúdo de Função:Aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau**. Diss. Dissertação de mestrado. PUC: Rio de Janeiro, 1994.

[4] FOURIER, Joseph BJ. **Theorie analytique de la chaleur** Chez Firmin Didot, père et fils, 1822.

[5] GASPARIN, João Luiz. **Comênio ou da arte de ensinar tudo a todos.**,1994.

[6] CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Gradiva, 2000.

[7] BRITO, Maria Regina Ferreira de, **Soluções de problemas e a matemática escolar.** Campinas, São Paulo: Alinea, 2006.

[8] ALVARENGA, B.; MÁXIMO, A. **Curso de física**. Vol. 1 e 2. São Paulo: Scipione, 2000.

[9] EVES, H. **Introdução à história da matemática**; tradução Higyno H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

[10] TEIXEIRA, Paulo J. M. **Um pouco da teoria das situações didáticas de Guy Brousseau**; Universidade Estadual de Campinas, 2014, Disponível em ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/download/4327/5110 .

[11] JÚNIOR, C. S. **Biologia 2**, 11. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

[12] PNLD 2015 **Guia de livros didáticos: Matemática Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014.

[13] SANTOS, W. L. P.; MÓL, G. S. **Química cidadã**. Vol. 2. 2. ed. São Paulo: Editora AJS, 2013.

[14] TORRES, C. M. A. **Física - Ciência e Tecnologia: Mecânica**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

[15] LIMA, Elon Lages, **"A matemática do ensino médio."**. Vol, 1, 2 e 3, SBM 2012.

[16] SOUZA, Joamir, and Patrícia Moreno Pataro. **Vontade de saber Matemática.** São Paulo: FTD 2012.

[17] MELLO, José Luiz Pastore. **Matemática: construção e significado.** Volume único 1 2005.

[18] SMOLE, Kátia Cistina Stocco. **Matemática: ensino médio: volume 1** Kátia Cristina Stocco Smole, Maria Ignez de Souza Vieira Diniz. 2010.

[19] FONSECA,Fred **Coleção Estudo EM1**. Belo Horizonte: Editora Bernoulli, 2016.

[20] ANTUNES, Murilo Tissoni. **Ser Protagonista** Vol. 1 e 2. São Paulo, SM, 2ª edicão, 2013.

[21] SILVA, Claudio Xavier da, e Benigno BARRETO FILHO. **Matemática aula por aula.** São Paulo: FTD, 2005.

[22] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. São Paulo: Editora Ática, 1ª edição, 2014.