Universidade Federal de Viçosa

Dissertação de Mestrado

Camila de Souza Costa

Alguns Grupos de Simetrias na Geometria Euclidiana

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2017

Camila de Souza Costa

ALGUNS GRUPOS DE SIMETRIAS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2017

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal

T

C837a
2017

Costa, Camila de Souza, 1989-
Alguns Grupos de Simetrias na Geometria Euclidiana / Camila de Souza Costa. - Florestal, MG, 2017.
vii, 45f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndice.
Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.45.

1. Simetria (Matemática). 2. Teoria dos grupos. 3. Geometria. I. Universidade Federal de Viçosa. Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 519.5

Camila de Souza Costa

ALGUNS GRUPOS DE SIMETRIA NA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

Aprovada: 22 de fevereiro de 2017.

Gil Fidelix de Souza

Mehran Sabeti

Alexandre Alvarenga Rocha
(Coorientador)

Luís Felipe Gonçalves Fonseca
(Orientador)

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família, que sempre acreditou nos meus sonhos, principalmente, aos meus pais José e Catarina; à minha irmã Priscila e ao meu digníssimo esposo Sandro.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, primeiramente, por não me abandonar nos momentos turbulentos deste mestrado.

Ao meu marido Sandro que sempre esteve ao meu lado.

Aos meus pais: José e Catarina; e a minha irmã Priscila que me apoiaram e me hospedaram nos finais de semana.

Aos meus novos amigos do PROFMAT pelas infinitas caronas, hospedagens e pelos momentos de alegria (mesmo com todo sofrimento das disciplinas).

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) por todo apoio financeiro, pois sem ele não teria condições de seguir com o curso.

Às minhas tias Zulmira e Maria de Fátima pela revisão ortográfica e tradução desta dissertação.

Aos mestres que me proporcionaram um mundo de conhecimentos que eu nem imaginava um dia chegar a conhecer, em especial meu eterno agradecimento ao meu querido orientador Luís Felipe Gonçalves Fonseca pelo conhecimento compartilhado e compreensão das minhas limitações acadêmicas e geográficas, pois nem sempre era possível deslocar de Bambuí a Florestal com a mesma facilidade que meus colegas por estarem em Belo Horizonte.

Enfim agradeço a todos que diretamente e indiretamente contribuíram para o meu crescimento intelectual, durante estes dois anos, e pelos pensamentos positivos e orações.

Biografia

Camila de Souza Costa, natural de Belo Horizonte é professora da rede estadual de ensino, atualmente leciona na Escola Estadual João Batista de Carvalho no município de Bambuí.

Em 2008, ingressou no curso Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa, graduando-se em setembro de 2013.

Em 2015, ingressou no Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal, em nível de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, submetendo-se à defesa da dissertação em fevereiro de 2017.

Resumo

COSTA, Camila de Souza, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2017. **Alguns Grupos de Simetrias na Geometria Euclidiana**. Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca. Coorientador: Alexandre Alvarenga Rocha.

Projeto desenvolvido de forma linear nas áreas e propostas do trabalho: definições de grupos, grupos de permutações, subgrupos, classes laterais e homomorfismo de grupos. Dentro da proposta foram abordados as propriedades do grupo simétrico de grau n, simetrias dos polígonos regulares e a dualidade dos sólidos platônicos. Quanto aos sólidos, temas abordados e explorados: rotações do tetraedro, cubo e dodecaedro. Conclusão do projeto com abordagem do relato da aula prática sobre simetrias.

Abstract

COSTA, Camila de Souza, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2017. **Some Groups of Simmetry in the Euclidian Geometry**. Adviser: Luís Felipe Gonçalves Fonseca. Co-adviser: Alexandre Alvarenga Rocha.

This project has been developed in the linear form at the areas the proposals of the work: definitions and exchanges of the groups, sub-groups, lateral classes and homomorphism groups. In the proposal, some subjects were analyzed like: the proprieties of the symmetric groups of degree n, regular polygons' symmetry and the duality of the platonic solids. In relation to the solids, we have explored the rotations of the tetrahedron, cube and the dodecahedron. The conclusion of this project has some approaches derived from simmetries practical classes.

Sumário

1

Introdução

Caro leitor, você sabe o que é simetria? Já escutou esta palavra no seu cotidiano? Conhece a estrutura matemática por trás de uma simetria de reflexão de um polígono regular? As respostas para estas perguntas encontram-se no decorrer desta dissertação, que apresenta a seguinte estrutura:

As definições de grupos, grupos de permutações, subgrupos, classes laterais, homomorfismo de grupos, propriedades do grupo simétrico de grau n e a dualidade dos sólidos platônicos, capítulo 2. Todo conteúdo citado será a base para o projeto. Simetrias dos polígonos regulares e rotação dos sólidos platônicos, capítulo 3. Quanto aos sólidos, exploração das rotações do tetraedro, cubo e dodecaedro; pois o cubo é dual com o octaedro e o dodecaedro com o icosaedro.

Capítulo 4, o relato da aula prática sobre simetrias. Projeto executado na Escola Estadual João Batista de Carvalho, com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. Análise das simetrias no nosso cotidiano, introdução das simetrias dos polígonos regulares e as rotações do tetraedro.

É necessário que o leitor tenha um conhecimento prévio sobre elementos de aritmética de um curso de graduação em matemática. Para mais consulte [11].

Vale salientar que as demonstrações dos teoremas que antecedem a parte dos grupos de simetrias dos polígonos regulares não é o foco. E sim, utilizar os teoremas para justificar os resultados sobre as simetrias de reflexão e rotação dos polígonos regulares e as rotações dos sólidos platônicos.

Os exemplos encontrados nesta dissertação foram extraídos dos livros cujas referências são [10] e [12].

As informações contidas nesta introdução norteiam o percurso estruturado em conceitos, pesquisas, experimentos e descobertas; galgando em um universo matemático implícito nos conteúdos ministrados de forma abstrata.

Esse projeto é uma porção não mágica, mas cheio de magia e aguçador aos apreciadores dos polígonos regulares e dos sólidos platônicos.

E lembre-se: "A magia da matemática é ofuscante e exclusiva de seus eternos apreciadores" Rômulo Alexandre da Silva Fernandes.

Boa leitura!

2

Elementos de um Grupo, Grupos de Permutação e Dualidade dos Poliedros Platônicos

Neste capítulo, apresentaremos as definições de grupos, grupos de permutação, subgrupos, classes laterais, homomorfismos de grupos, algumas propriedades do grupo simétrico de grau n e a dualidade dos sólidos platônicos.

2.1 Grupos

Definição 2.1: Um grupo $(G,*)$ é formado por um conjunto $G \neq \varnothing$ e uma operação binária $(x,y) \mapsto x * y$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- Associatividade
  $(a * b) * c = a * (b * c)$, quaisquer que sejam $a,b,c \in G$.

- Elemento Neutro
  Existe $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$, qualquer que seja $a \in G$.

- Inverso
  Para todo $a \in G$, existe $b \in G$, tal que $a * b = b * a = e$.

Um grupo $(G,*)$ é chamado abeliano se a operação $*$ for comutativa, ou seja, para todos $a,b \in G$, temos $a * b = b * a$.

Propriedades

- O neutro $e \in G$ é único.
  De fato, se e e e' são neutros, então $e = e * e' = e'$.

- O inverso de um elemento $a \in G$ é único.
  Com efeito, se a e b são inversos de c então, $a = a * e = a * (c * b) = (a * c) * b = e * b = b$.
  Daí, denotamos c^{-1} o inverso de c.

- Para todos $a,b \in G$, temos $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.
  De fato,
  $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = (a * (b * b^{-1})) * a^{-1} = (a * e) * a^{-1} = a * a^{-1} = e$
  $(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = (b^{-1} * (a^{-1} * a)) * b = (b^{-1} * e) * b = b^{-1} * b = e$

Exemplo 2.1.1: $(\mathbb{Z},+)$ é grupo

- Fechamento
  Para todos a, $b \in \mathbb{Z}$, temos $a + b \in \mathbb{Z}$.

- Associatividade
  Para todos $a,b,c \in \mathbb{Z}$, temos $a + (b + c) = (a + b) + c$.

- Elemento Neutro
  $a + 0 = 0 + a$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.

- Inverso
  Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe $(-a) \in \mathbb{Z}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Exemplo 2.1.2: $(\mathbb{Z},.)$ não é grupo.
Observe que a propriedade do inverso não é satisfeita.

- Sejam x e $x' \in \mathbb{Z}$ tais que, $x \neq 1$ e -1
  $x.x' = 1$ temos $x' = \dfrac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$ e $x'.x = 1$. Logo $x' = \dfrac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.1.3: $(\mathbb{Z}_4,+)$ é um grupo.
Observe a tabela de $\mathbb{Z}_4$ com a operação da adição

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

Por meio da tabela pode-se verificar que $(\mathbb{Z}_4,+)$ respeita a associatividade, possui elemento neutro, $\overline{0}$, e todos seus elementos possuem inverso, $(\overline{0})^{-1} = \overline{0}$, $(\overline{1})^{-1} = \overline{3}$, $(\overline{2})^{-1} = \overline{2}$ e $(\overline{3})^{-1} = \overline{1}$.

Definição 2.2: Seja $(G,*)$ um grupo finito. Definimos a ordem do grupo $O(G)$ como sua cardinalidade, $O(G) = \mid G \mid$

Definição 2.3: Chama-se grupo de Klein, o grupo formado pelo conjunto $\{e, a, b, c\}$, de ordem 4, em que $a^2 = b^2 = c^2 = e$, onde e é o elemento neutro.

Exemplo 2.1.4: Tábua de Klein é um grupo.

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Observando a tabela, pode-se verificar que ocorre a associatividade, temos o elemento neutro e todos os elementos possuem inverso.

2.2 Grupos de Permutação

Definição 2.4: Permutação é uma bijeção de um conjunto não-vazio nele mesmo.

Proposição 2.1: A coleção de todas as permutações de um conjunto não vazio X constituirá o grupo das permutações do conjunto X, S_X, com a operação de composição de funções, $(S_X, \circ)$.

Demonstração: Seja X um conjunto não vazio. Considere o conjunto $A(X) = \{\beta : X \longrightarrow X; \beta \text{ é uma bijeção}\}$. Vamos mostrar que $A(X)$ com a operação de composição de funções é um grupo.

Fechamento - Sejam β_1 e $\beta_2 \in A(X)$. Queremos mostrar que $\beta_2 \circ \beta_1 \in A(X)$.

- $\beta_2 \circ \beta_1$ é injetora

Tome x,$y \in X$ e suponha que $\beta_2(\beta_1(x)) = \beta_2(\beta_1(y))$. Observe que β_1 e β_2 são invertíveis, daí
$\beta_2(\beta_1(x)) = \beta_2(\beta_1(y)) \Rightarrow \beta_2^{-1}(\beta_2(\beta_1(x))) = \beta_2^{-1}(\beta_2(\beta_1(y))) \Rightarrow \beta_1(x) = \beta_1(y) \Rightarrow \beta_1^{-1}\beta_1(x) = \beta_1^{-1}\beta_1(y) \Rightarrow x = y$
Logo $\beta_2 \circ \beta_1$ é injetora.

- $\beta_2 \circ \beta_1$ é sobrejetora

Devemos mostrar que todo elemento de X é imagem de algum elemento de X por $\beta_2(\beta_1(x))$.
Como $\beta_1(x)$ é bijetora então $\beta_1(x)$ é sobrejetora, logo todo $y \in X$ se escreve como $\beta_1(x) = y$ para algum $x \in X$.
Do mesmo modo, $\beta_2(y) = z$, para todo $z \in X$.

Assim, $z = \beta_2(y) = \beta_2(\beta_1(x))$, para todo $z \in X$. Logo $\beta_2(\beta_1(x))$ é uma função sobrejetora.
Portanto mostramos o fechamento, ou seja, a composição de funções de $A(X)$ resulta em uma função em $A(X)$.

Associatividade - Para todos β_1,β_2,$\beta_3 \in A(X)$ temos $\beta_3 \circ (\beta_2 \circ \beta_1) = (\beta_3 \circ \beta_2) \circ \beta_1$.

Elemento Neutro - A função identidade $I(x) = x$ está em $A(X)$ e
$I(\beta(x)) = \beta(I(x)) = \beta(x)$, $\forall \beta \in A(X)$.
Inverso - Como todas as funções β em $A(X)$ são bijetoras, para cada β existe β^{-1} tal que $\beta \circ \beta^{-1} = \beta^{-1} \circ \beta = Id$.
Assim, S_X é de fato um grupo. ■

Se X é um conjunto infinito, então S_X será um grupo infinito. E quando $X = \{1,2,3,...,n\}, n \in \mathbb{N}$, S_X será denotado por S_n e será chamado de *Grupo Simétrico de Grau n*.

Segue da Análise Combinatória que a ordem de S_n é $n!$, ou seja, o número de permutações de um conjunto de n elementos é igual a $n!$.

Exemplo 2.2.1: S_3 é formado por todas as permutações possíveis dos inteiros 1, 2 e 3.
Permutando os números 1, 2 e 3, chegamos a 123, 132, 321, 213, 231 e 312.

Podemos associar cada resultado a uma matriz que representa cada elemento de S_3. Assim temos as seguintes associações:

$$123 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Essa permutação envia o número 1 para o número 1, o número 2 para o número 2 e o número 3 para o número 3.

A seguir veremos as outras associações:

$$132 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$321 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$213 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$231 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$312 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A notação matricial se torna inviável quando o valor de n é grande. Logo temos outra notação para representar a mesma permutação, o ciclo. Por exemplo, o elemento β de S_6 definido por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

pode ser representado pelo ciclo (134562). Observe que 3 é a imagem do 1, 4 é a imagem do 3, ..., 2 é a imagem do 6 e 1 é a imagem do 2. Quando uma permutação é representada por um único ciclo, chamamos de permutação cíclica. Um r-ciclo é um ciclo com r números. Neste exemplo, temos um 6-ciclo.

Considere o próximo exemplo, o elemento α em S_6 definido por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

pode ser representado pelo ciclo $(15)(2)(34)(6) = (15)(34)$. Temos que os elementos fixos, no caso 2 e 6, são omitidos nesta notação em ciclo.

Agora vamos representar S_3 em forma de ciclos. Temos as seguintes associações entre matrizes e ciclos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow (1)(2)(3) = Id\,;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow (1)(23) = (23)\,;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (13)(2) = (13)\,;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow (12)(3) = (12)\,;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (123)\,;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow (132)\,.$$

Logo os elementos de S_3, escritos em formato de ciclos, são:

$$S_3 = \{Id,(12),(13),(23),(123),(132)\}\,.$$

Como $(S_x,\circ)$ é um grupo, para operar o elemento $\alpha\beta$, primeiro operamos β e depois α.

Exemplo 2.2.2: Sejam $\alpha = (123)$ e $\beta = (132)$. Operando $\alpha\beta$, temos:

$$\alpha\beta = (123)(132) = (1)(2)(3) = Id$$

2.3 Subgrupos

Definição 2.5: Seja $(G,*)$ um grupo. Um subconjunto não vazio $H \subset G$ é um subgrupo de G quando as seguintes condições são satisfeitas:
1) Para todos $a,b \in H$, $a * b \in H$;
2) Para todo $a \in H$, $a^{-1} \in H$.

Notação: Se H é um subgrupo de G, escrevemos $H \leq G$.

Proposição 2.2: Sejam G um grupo e H um subconjunto não vazio de G. H é subgrupo de G se, e somente se, para quaisquer $a,b \in H$, tem-se que $a * b^{-1} \in H$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Se H é um subgrupo de G e $a,b \in H$, sabemos que b^{-1} deve estar em H. Assim como o produto $a * b^{-1}$ também deve pertencer a H.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que H seja um subconjunto não-vazio de G e que $a * b^{-1} \in H$ sempre que $a,b \in H$.
Se $a \in H$, então $e = a * a^{-1} \in H$ e $e * a^{-1} = a^{-1} \in H$.
Assim, se $a,b^{-1} \in H$ temos $a * b = a * (b^{-1})^{-1} \in H$.
Portanto, H é m subgrupo de G. ∎

Definição 2.6: ***Subgrupos triviais de*** G**:** $\{e_G\} \leq G$ e $G \leq G$

Exemplo 2.3.1: Seja F o conjunto das funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Então

$$H = \{f \in F; f(1) = 0\}$$

é um subgrupo aditivo de $(F,+)$.

O conjunto $H \neq \varnothing$, pois $f(x) = 0 \in H$. Ocorre o fechamento. Sejam $f_1,f_2 \in H$ tais que $f_1(1) = 0$ e $f_2(1) = 0$. Assim, $(f_1 + f_2)(1) = f_1(1) + f_2(1) = 0 + 0 = 0$. Isto mostra que $f_1 + f_2 \in H$. E por último, temos o inverso. Considere $f_1 \in H$. Então $f_1(1) = 0$ e $-f_1(1) = -(f_1(1)) = -0 = 0$, logo $-f_1(1) = 0 \in H$. Portanto H é um subgrupo aditivo de $(F,+)$.

Exemplo 2.3.2: Seja F o conjunto das funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e seja

$$G = \{f \in F; f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

O subconjunto $H = \{f \in G; f(0) = 1\}$ é um subgrupo multiplicativo de $(G,\cdot)$.

O conjunto $H \neq \varnothing$, pois $f(x) = x+1 \in H$. Sejam $f_1,f_2 \in G$. Como $f_2(0) = 1 \neq 0$

temos $f_2^{-1}(0) = \dfrac{1}{f_2(0)} = 1$. Daí, $(f_1.f_2^{-1})(0) = f_1(0).f_2^{-1}(0) = 1.1 = 1 \in H$. Isto mostra, com base em 2.2, que H é um subgrupo de G.

Exemplo 2.3.3: Considere o conjunto $n\mathbb{Z}$, conjunto formado pelos múltiplos de n. Iremos mostrar que $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}$. O elemento neutro aditivo de $\mathbb{Z}$ é o 0 e $0 \in n\mathbb{Z}$, pois $0 = n.0$. Vamos mostrar se dois elementos de $n\mathbb{Z}$ sejam eles nz_1 e nz_2 quando operamos nz_1 e $-nz_2$ obtemos um elemento de $n\mathbb{Z}$. Assim $nz_1 + (-nz_2) = nz_1 - nz_2 = n(z_1 - z_2) \in n\mathbb{Z}$. Logo, $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$.

Seja S um subconjunto não-vazio do grupo G, o conjunto

$$\{a_1a_2...a_n; n \in \mathbb{N}, a_i \in S \, ou \, a_i \in S^{-1}\}$$

será denotado por $\langle S \rangle$.

Proposição 2.3: Sejam G um grupo e S um subconjunto não-vazio de G. Então o conjunto $\langle S \rangle$ é um subgrupo de G. [10]

Definição 2.7: Sejam G um grupo e S um subconjunto não-vazio de G. Então $\langle S \rangle$ é o subgrupo gerado por S.

2.4 Classes Laterais

Definição 2.8: Sejam $H \leq G$ e $g \in G$. O conjunto $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ é chamado de uma classe lateral à direita de H em G.
Analogamente, $gH = \{gh \mid h \in H\}$ é uma classe lateral à esquerda.

Estas classes laterais são disjuntas ou coincidem. A prova desta afirmação pode ser vista em [13].

Exemplo 2.4.1: Seja $S_3 = \{Id,(12),(13),(23),(123),(132)\}$ e $H = \{Id,(12)\}$ com $H \leq S_3$. Iremos determinar as classes laterais à esquerda e à direita de H em S_3.

- Classe lateral à esquerda

$$(Id)H = \{Id,(12)\}$$
$$(12)H = \{(12),Id\}$$
$$(13)H = \{(13),(123)\}$$
$$(23)H = \{(23),(132)\}$$
$$(123)H = \{(123),(13)\}$$
$$(132)H = \{(132),(23)\}$$

- Classe lateral à direita

$$H(Id) = \{Id,(12)\}$$
$$H(12) = \{(12),Id\}$$
$$H(13) = \{(13),(132)\}$$
$$H(23) = \{(23),(123)\}$$
$$H(123) = \{(123),(23)\}$$
$$H(132) = \{(132),(13)\}$$

2.5 Teorema de Lagrange

Definição 2.9: A cardinalidade do conjunto das classes laterais à esquerda é o índice de H em G; ele será denotado por $(G : H)$.

Teorema 2.1: Sejam G um grupo finito e H um subgrupo de G. Então $\mid G \mid = \mid H \mid \cdot (G : H)$. Em particular, a ordem e o índice de H dividem a ordem de G.[10]

Exemplo 2.5.1: Determine a cardinalidade do conjunto das classes laterais de $H = \{Id,(12)\}$ em S_3.

Como S_3 é um grupo finito e $H \leq S_3$ temos pelo Teorema de Lagrange que, $\mid S_3 \mid = \mid H \mid \cdot (S_3 : H)$. Logo $(S_3 : H) = 3$.

Analisando o exemplo 2.4.1, podemos perceber que

- Classes laterais à esquerda
  $(123)H = (13)H$, $(132)H = (23)H$, $(12)H = (Id)H$
- Classes laterais à direita
  $H(123) = H(23)$, $H(132) = H(13)$, $H(12) = H(Id)$

2.6 Homomorfismos de Grupos

Definição 2.10: Sejam $(G,*)$ e $(H,\triangle)$ grupos. Uma função $f : G \longrightarrow H$ é um homomorfismo de grupos se para todos $g_1,g_2 \in G$ temos

$$f(g_1 * g_2) = f(g_1) \triangle f(g_2).$$

Exemplo 2.6.1: Considere a aplicação $f : (\mathbb{R}^*,\cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^*,\cdot)$ definida por $f(x) = \mid x \mid$. Veremos que f é um homomorfismo.

Sejam $x,y \in \mathbb{R}^*$, temos:

$$f(x \cdot y) = \mid x \cdot y \mid = \mid x \mid \cdot \mid y \mid = f(x) \cdot f(y)$$

Logo f é um homomorfismo.

Exemplo 2.6.2: Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 + 1$. Verificaremos que g não é um homomorfismo.

Observe que $g(3 + 2) = g(5) = 26$ e $g(3) + g(2) = 10 + 5 = 15$.

Assim $g(3 + 2) \neq g(3) + g(2)$.

Logo g não é um homomorfismo.

Definição 2.11: Se a função $f : G \longrightarrow H$, com $(G,*)$ e $(H,\triangle)$ grupos, é um homomorfismo bijetor então f é chamada de isomorfismo.

Exemplo 2.6.3: Considere a função $ln : (\mathbb{R}^*_+,\cdot) \longrightarrow (\mathbb{R},+)$. Sabemos que $ln(x)$ é uma função bijetora. Além disso, $\forall x,y \in \mathbb{R}^*_+$ temos $ln(x \cdot y) = ln(x) + ln(y)$.

Logo $ln(x)$ é um isomorfismo.

Denotamos um isomorfismo entre dois grupos $(G,*)$ e $(H,\triangle)$ por $G \backsimeq H$.

2.7 Propriedades do Grupo Simétrico de Grau n

Seguem algumas propriedades do grupo simétrico de grau n que serão usadas ao longo do trabalho.

Definição 2.12: Um 2-ciclo é chamado de transposição.

Proposição 2.4: Seja $\alpha \in S_n$, $\alpha \neq id$. Então a permutação α é um produto de transposições disjuntas; tal fatoração é única a menos da ordem dos fatores. [10]

A paridade do número de transposições numa permutação é bem definida.

Definição 2.13: Um elemento α de S_n é uma permutação par quando α se escreve como um produto de um número par de transposições disjuntas. [10]

Definição 2.14: Um elemento α de S_n é uma permutação ímpar quando α se escreve como um produto de um número ímpar de transposições disjuntas. [10]

Definição 2.15: O conjunto das permutações pares de S_n será indicado por A_n e será chamado grupo alternado de grau n. [12]

Proposição 2.5: Para todo $n > 1$, o conjunto A_n é um subgrupo de ordem $\frac{n!}{2}$. [12]

Proposição 2.6: O grupo A_n, $n \geq 3$, é gerado pelo conjunto de todos os 3-ciclos de S_n. [11]

2.8 Dualidade dos Poliedros Platônicos

Segundo [8] para conceituar os poliedros platônicos duais, podemos usar a definição:

Definição 2.16: Poliedros duais são formados por dois poliedros, um dentro do outro, de modo que os vértices do sólido interior coincidam com o centro das faces do sólido exterior.

Assim temos que o tetraedro é dual consigo mesmo, o octaedro é dual do cubo e o icosaedro é dual do dodecaedro. Esta definição de dualidade dos sólidos platônicos

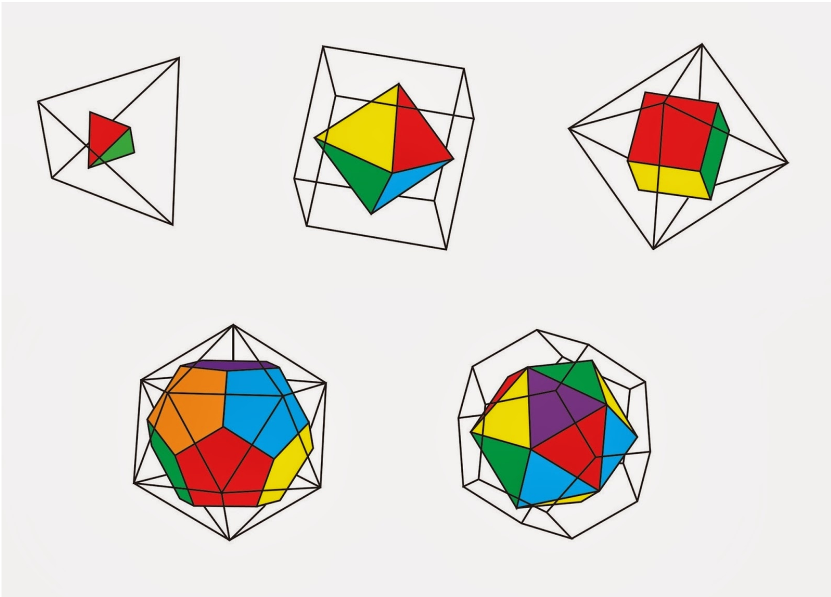


Figura 2.1: Sólidos Platônicos Duais.[2]

é fundamental para trabalhar simetrias de rotação dos poliedros. Estudaremos esse assunto no próximo capítulo.

3

Alguns Grupos de Simetrias na Geometria Euclidiana

Neste capítulo, apresentaremos as definições dos grupos de simetrias dos polígonos regulares e do grupo de rotações dos cinco poliedros platônicos.

3.1 Grupo de Simetrias dos Polígonos Regulares

Antes da apresentação dos grupos de simetrias dos polígonos regulares: definição de figura, isometria e simetria.

Definição 3.1: Compreendemos por uma figura um conjunto X de pontos de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. [5]

Definição 3.2: Uma isometria é uma transformação no plano que preserva distância.

Definição 3.3: [5] Dada um figura X, uma simetria de X é uma aplicação $f : X \longrightarrow X$ com as seguintes propriedades:

- f é uma isometria
- f é sobrejetiva

Desta forma, simetria é uma aplicação que preserva a forma da figura.

Agora vamos investigar os grupos de simetrias do triângulo equilátero e do quadrado.

3.1.1 Grupo de Simetrias do Triângulo Equilátero

Considere o triângulo equilátero da figura 3.1, com vértices P,Q e R e as retas x,y e z que passam pelo baricentro O, do triângulo e os vértices P,Q e R respectivamente.

Sejam Id, θ, θ^2 as rotações com arcos de $0, \dfrac{2\pi}{3}$ e $\dfrac{4\pi}{3}$ radianos em torno do baricentro,

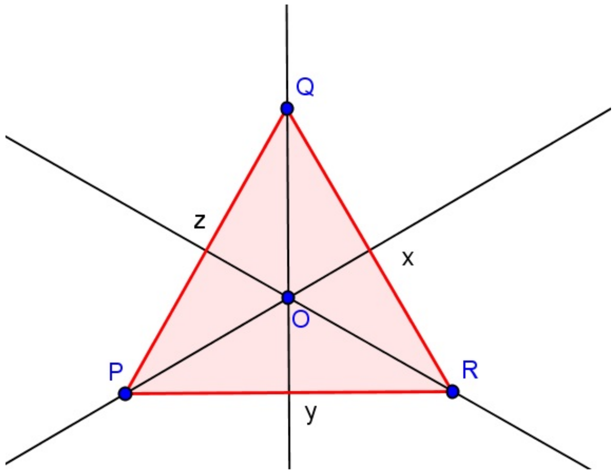


Figura 3.1: Triângulo Equilátero

em sentido anti-horário. E R_x,R_y e R_z as reflexões de π radianos em torno das retas x,y e z, respectivamente.

Estes seis movimentos mencionados, formam o conjunto das simetrias do triângulo equilátero, que é representado pelo conjunto $D_3 = \{Id, \theta, \theta^2, R_x, R_y, R_z\}$.

Verifique que a composição de dois elementos de D_3, ainda, é um elemento de D_3.

Veja o exemplo das composições:

Exemplo 3.1.1: As composições $\theta \circ R_z = R_x$ e $R_z \circ \theta = R_x$ estão representadas nas figuras 3.2 e 3.3.

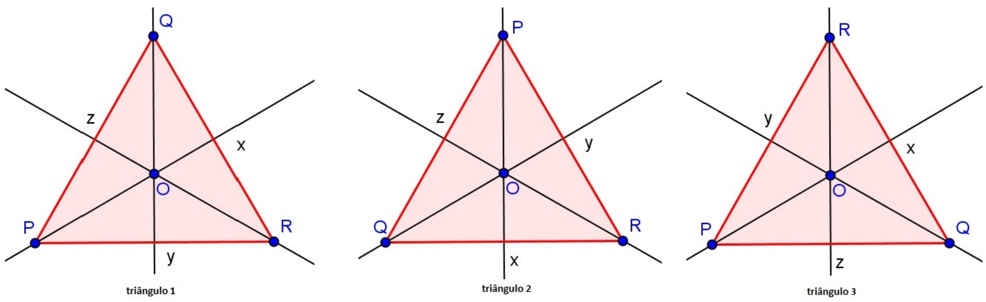


Figura 3.2: Exemplo de composição de triângulo equilátero, $\theta \circ R_z = R_x$

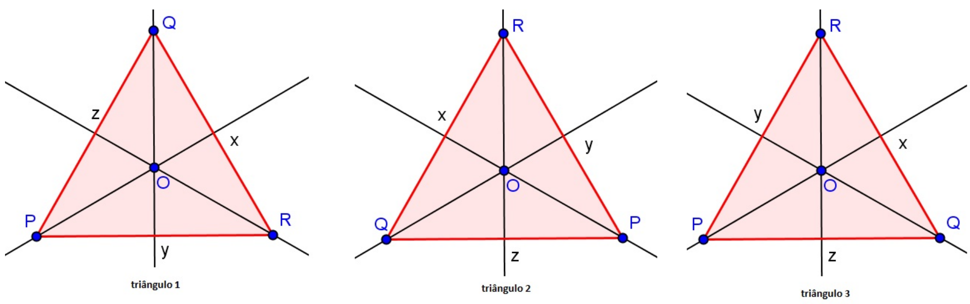


Figura 3.3: Exemplo de composição de triângulo equilátero, $R_z \circ \theta = R_x$

Logo, as composições resultaram em uma simetria do triângulo equilátero.

Observe a tabela com todas as composições possíveis do conjunto de simetrias do triângulo.

$\circ$	Id	θ	θ^2	R_x	R_y	R_z
Id	Id	θ	θ^2	R_x	R_y	R_z
θ	θ	θ^2	Id	R_y	R_z	R_x
θ^2	θ^2	Id	θ	R_z	R_x	R_y
R_x	R_x	R_y	R_z	Id	θ	θ^2
R_y	R_y	R_z	R_x	θ^2	Id	θ
R_z	R_z	R_x	R_y	θ	θ^2	Id

Pela tabela, o conjunto de simetrias do triângulo equilátero com a operação composição de funções é um grupo não abeliano.

A associatividade ocorre, uma vez que a composição de funções é associativa.

O elemento neutro é a identidade (Id), ou seja a rotação 0 rad ou 2π rad.

Observe que cada elemento possui um inverso:

$$Id^{-1} = Id\,, \theta^{-1} = \theta^2, (\theta^2)^{-1} = \theta\,, R_x^{-1} = R_x\,, R_y^{-1} = R_y\,, R_z^{-1} = R_z.$$

Portanto o conjunto de simetrias do triângulo equilátero com a operação composição é um grupo.

Como $R_x \circ R_y = \theta$ e $R_y \circ R_x = \theta^2$, não vale a comutatividade. Logo o grupo não é abeliano.

Retornando à tabela, verificamos que $\theta^2 = \theta \circ \theta$, $R_y = \theta \circ R_x$ e $R_z = \theta \circ R_y = \theta \circ \theta \circ R_x = \theta^2 \circ R_x$.

Notação: $Id = \theta^0$ Reescrevendo D_3, temos:

$$D_3 = \{\theta^0\,, \theta\,, \theta^2\,, R_x\,, \theta \circ R_x\,, \theta^2 \circ R_x\}.$$

Assim D_3 é gerado por θ e R_x.

Numa última análise da tabela, não é difícil observar que $\{Id\,, \theta\,, \theta^2\}$ forma um subgrupo de S_3.

3.1.2 Grupo de Simetrias do Quadrado

Seja o quadrado com vértices P, Q, R e S, as retas diagonais x e y e retas w e z que passam pelos pontos médios dos lados PS, QR, PQ e RS, respectivamente conforme figura 3.4.

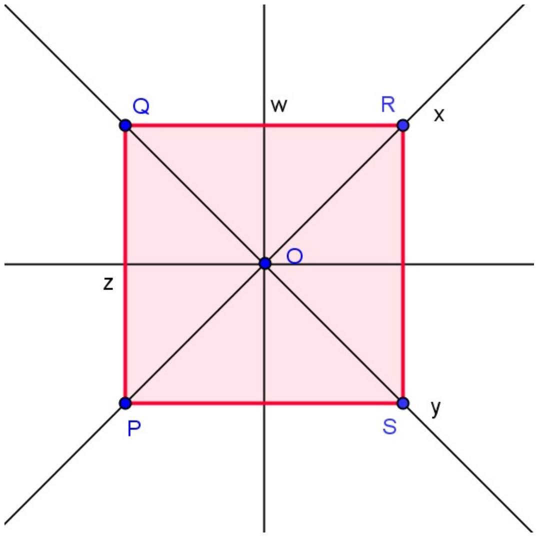


Figura 3.4: Quadrado

Sejam Id, θ, θ^2 e θ^3 as rotações com arcos de $0\,, \dfrac{\pi}{2}\,, \pi\,, \dfrac{3\pi}{2}$ radianos, respectivamente, em torno do centro O, em sentido anti-horário. E $R_x\,, R_y\,, R_w\,, R_z$ as reflexões de π radianos em torno das retas x,y,w e z respectivamente.

Estes oito movimentos determinam o conjunto das simetrias do quadrado. Denotaremos este conjunto por $D_4 = \{Id\,, \theta\,, \theta^2\,, \theta^3\,, R_x\,, R_y\,, R_w\,, R_z\}$.

Analisando a composição entre as simetrias $R_y \circ \theta^2 = R_x$ e $\theta^2 \circ R_y = R_x$ nas figuras 3.5 e 3.6 obtemos:

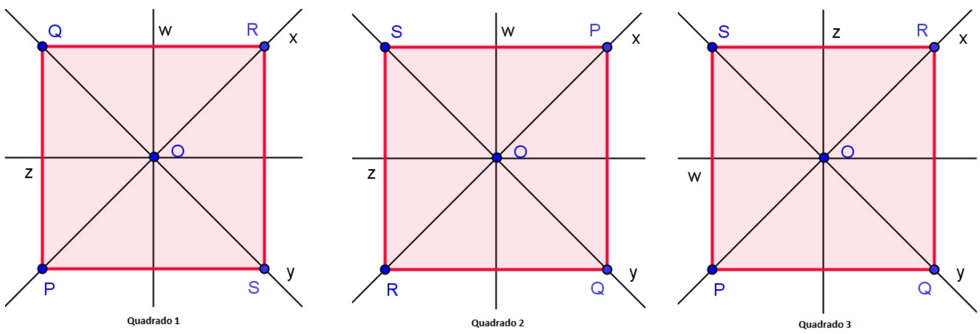


Figura 3.5: Exemplo de composição do quadrado, $R_y \circ \theta^2 = R_x$

Observe que as composições resultaram em um elemento de D_4.

Investigando todas as composições possíveis do conjunto de simetrias do quadrado,

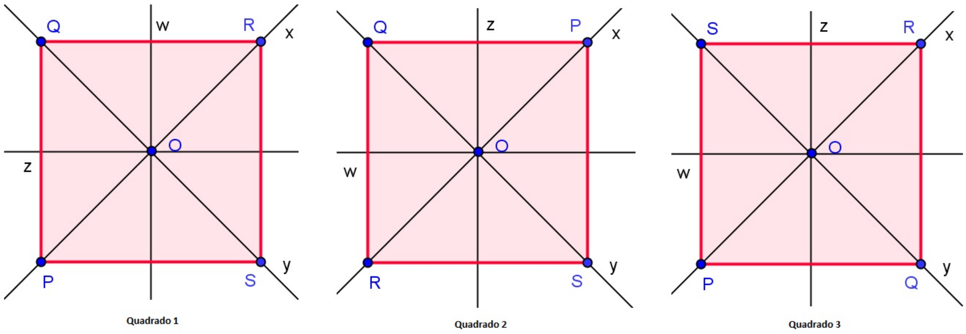


Figura 3.6: Exemplo de composição do quadrado, $\theta^2 \circ R_y = R_x$

obtemos a tabela:

$\circ$	Id	θ	θ^2	θ^3	R_x	R_y	R_w	R_z
Id	Id	θ	θ^2	θ^3	R_x	R_y	R_w	R_z
θ	θ	θ^2	θ^3	Id	R_w	R_z	R_y	R_x
θ^2	θ^2	θ^3	Id	θ	R_y	R_x	R_z	R_w
θ^3	θ^3	Id	θ	θ^2	R_z	R_w	R_x	R_y
R_x	R_x	R_w	R_y	R_z	Id	θ^2	θ	θ^3
R_y	R_y	R_z	R_x	R_w	θ^2	Id	θ^3	θ
R_w	R_w	R_y	R_z	R_x	θ^3	θ	Id	θ^2
R_z	R_z	R_x	R_w	R_y	θ	θ^3	θ^2	Id

Pela tabela, D_4 (com a operação composição de funções) é um grupo não abeliano.

De fato, temos a Id, ou seja, a rotação de 0 radiano que é o elemento neutro. Observe que, cada elemento de D_4 possui um inverso: $Id^{-1} = Id$, $\theta^{-1} = \theta^3$, $(\theta^2)^{-1} = \theta^2$, $(\theta^3)^{-1} = \theta$, $R_x^{-1} = R_x$, $R_y^{-1} = R_y$, $R_w^{-1} = R_w$ e $R_z^{-1} = R_z$.

Logo o conjunto de simetrias do quadrado com a operação composição de funções é um grupo.

Como $R_x \circ R_w = \theta$ e $R_w \circ R_x = \theta^3$ temos que não vale a propriedade comutativa, assim o grupo não é abeliano.

Verificando a tabela, ocorre o seguinte: $Id = \theta^0$, $\theta^2 = \theta \circ \theta$, $\theta^3 = \theta \circ \theta^2$, $R_y = \theta^2 \circ R_x$, $R_w = \theta \circ R_x$, $R_z = \theta \circ R_y = \theta \circ \theta^2 \circ R_x = \theta^3 \circ R_x$.

Reescrevendo D_4, temos:

$$D_4 = \{\theta^0, \theta, \theta^2, \theta^3, R_x, \theta^2 \circ R_x, \theta \circ R_x, \theta^3 \circ R_x\}$$

Assim D_4 é gerado por θ e R_x.

Após a investigação de todas as composições possíveis de D_4 concluímos que: a composta de duas rotações é uma rotação, a composta de duas reflexões é uma rotação e a composta de rotação com reflexão ou reflexão com rotação resulta em uma reflexão. Com isso e pela análise da tabela, o conjunto das rotações em D_4 também formam um grupo com a operação composição de funções.

3.1.3 Grupo de Simetrias do Polígono Regular com $2n$ Lados, $n \in \mathbb{N}$

Sejam $1, 2, ..., 2n$ os vértices do polígono, conforme figura 3.7, $d_1, d_2, ..., d_n$ suas retas diagonais que passam pelo centro e a_1,a_2,...,a_n retas que passam pelo ponto médio de um lado e o ponto médio do lado oposto a este lado inicial. Considere o ponto O como centro do polígono.

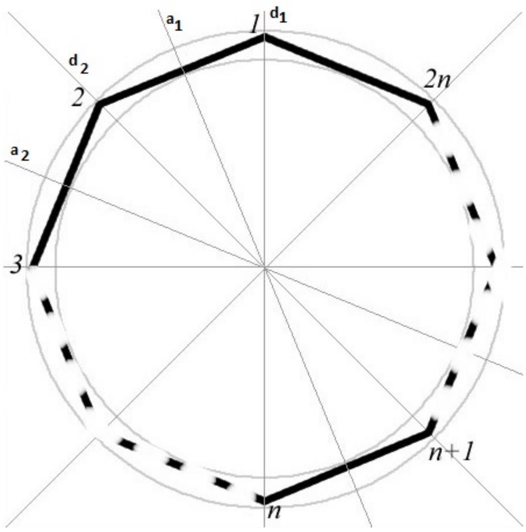


Figura 3.7: Polígono regular com número par de lados. [4]

Separando as simetrias, temos:

- Rotações
  As rotações θ de $\dfrac{2\pi}{2n} = \dfrac{\pi}{n}$ radianos em torno do centro do polígono. Com o total de $2n$ rotações. $\left\{k\left(\dfrac{\pi}{n}\right); k \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 2n\right\}$.

- Reflexões
  As reflexões R_{d_i} e R_{a_j} de π radianos em torno da reta a_n, onde

$$\{i,j \in \mathbb{N}; 1 \leq i,j \leq n\}.$$

  Com um total de $2n$ reflexões, pois temos n diagonais e n retas que passam pelos pontos médios dos lados opostos do polígono.

Assim, o conjunto de todas as simetrias do polígono regular com um número par de lados é

$$D_{2n} = \{Id\,, \theta\,, \theta^2\,, ...\,, \theta^{2n-1}\,, R_{d_1}\,, R_{d_2}\,, ...\,, R_{d_n}\,, R_{a_1}\,, R_{a_2}\,, ...\,, R_{a_n}\}.$$

Podemos representar o conjunto D_{2n} apenas com a rotação θ de $\dfrac{\pi}{n}$ radianos e a reflexão $R = R_{d_1}$ de π radianos, como segue

$$D_{2n} = \{\theta^0\,,\theta\,,\theta^2\,,\ldots\,,\theta^{2n-1}\,,R\,,R\circ\theta\,,R\circ\theta^2\,,\ldots\,,R\circ\theta^{2n-1}\}.$$

Como nos dois casos anteriores, temos que $(D_{2n},\circ)$ é um grupo. Além disso, pode-se demonstrar que o grupo D_{2n} é gerado pelos elementos θ e R, ou seja, com apenas uma rotação e uma reflexão geramos D_{2n}.

3.1.4 Grupo de Simetrias do Polígono Regular com $2n+1$ Lados, $n \in \mathbb{N}$

Sejam $1, 2, ..., 2n, 2n{+}1$ os vértices do polígono, conforme figura 3.8, $b_1, b_2, ..., b_{2n+1}$ as retas que passam pelo vértice e o ponto médio do lado oposto a este vértice (passando pelo centro) e O o centro do polígono.

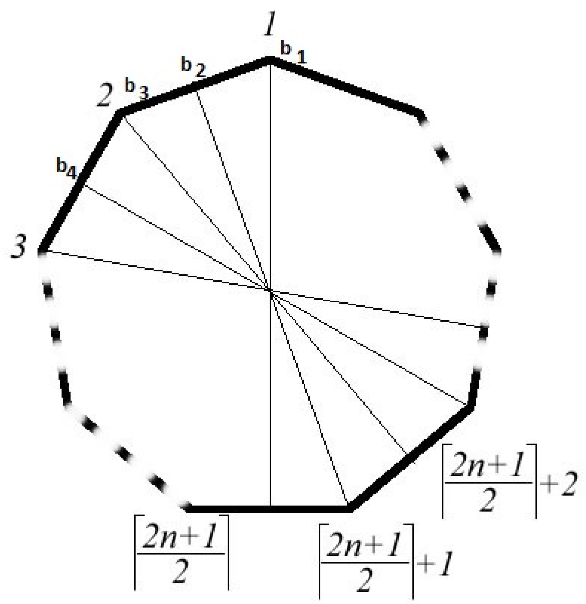


Figura 3.8: Polígono regular com número ímpar de lados. [4]

Separando as simetrias, temos:

- Rotações
  As rotações θ de $\dfrac{2\pi}{2n+1}$ radianos em torno do centro do polígono com o total de $2n+1$ rotações. $\left\{k\left(\dfrac{2\pi}{2n+1}\right),k\in\mathbb{N},0\leq k<2n+1\right\}$
- Reflexões
  As reflexões R de π radianos em torno da reta b_n. Com um total de $2n+1$ reflexões, pois temos $2n+1$ vértices e $2n+1$ pontos médios dos lados.

Assim, o conjunto de todas as simetrias do polígono regular com um número ímpar de lados é

$$D_{2n+1} = \{Id\,,\theta\,,\theta^2\,,\ldots\,,\theta^{2n}\,,R_{b_1}\,,R_{b_2}\,,\ldots\,,R_{b_{2n+1}}\}.$$

Podemos representar o conjunto D_{2n+1} apenas com a rotação θ de $\dfrac{2\pi}{2n+1}$ radianos e a reflexão $R = R_{b_1}$ de π, como segue

$$D_{2n+1} = \{Id\,,\theta\,,\theta^2\,,\ldots\,,\theta^{2n}\,,R\,,R\circ\theta\,,R\circ\theta^2\,,\ldots\,,R\circ\theta^{2n}\}.$$

Logo D_{2n+1} e a operação composição é um grupo e esse grupo é gerado pelos elemento θ e R, ou seja, com apenas uma rotação e uma reflexão geramos D_{2n+1}.

Após as generalizações, conclui-se que o número de simetrias de um polígono regular de n (aqui n pode ser par ou ímpar) lados é $2n$, ou seja, o dobro do número de lados. D_n é um grupo gerado por apenas dois elementos, uma rotação e uma reflexão.

Assim o grupo D_n é chamado grupo diedral de grau n.

Vale ressaltar, que no grupo diedral D_n o conjunto das rotações

$$\theta_n = \{Id\,,\theta\,,\theta^2\,,\ldots\,,\theta^{n-1}\}$$

com a operação de composição de função formam um grupo.

3.2 Grupo de Simetrias de Rotação dos Sólidos Platônicos

Para auxiliar a compreensão das rotações dos sólidos platônicos, segue a planificação de cada sólido.

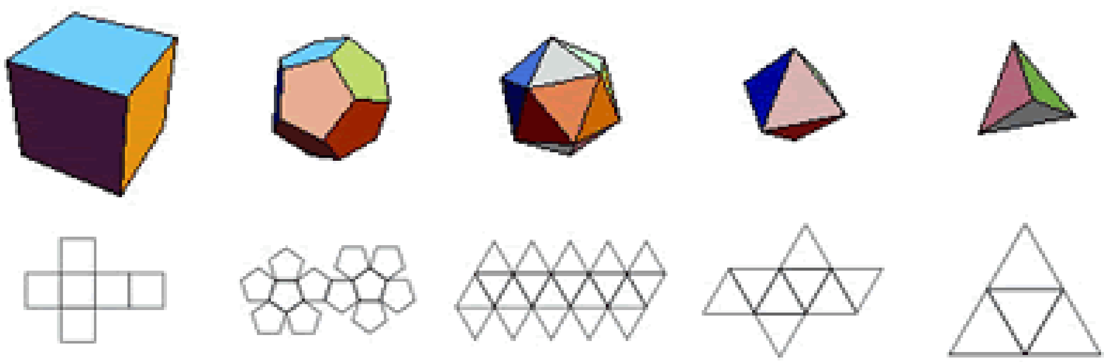


Figura 3.9: Planificação dos sólidos platônicos. [6]

3.2.1 Grupo de Simetrias de Rotação do Tetraedro

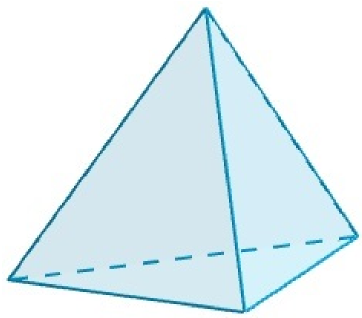


Figura 3.10: Tetraedro. [1]

O tetraedro contém dois tipos de rotações: uma com o eixo de rotação passando por um dos vértices e pelo baricentro da face oposta ao vértice; outra com o eixo passando nos pontos médios das arestas opostas.

Identificação do número de simetrias de rotação do tetraedro.

- Eixo passando por um dos vértices e pelo baricentro da face oposta.

  São duas rotações diferentes da identidade, uma segundo um ângulo de $\frac{2\pi}{3}$ e outra segundo um ângulo de $\frac{4\pi}{3}$. Como temos 4 vértices no tetraedro, obtemos 4 eixos de rotação, cada eixo com 2 rotações. Assim temos:

  $$4 \times 2 = 8$$

  rotações com o eixo passando por um dos vértices e pelo baricentro.

  Na figura 3.11, temos esses eixos de rotação representados pelas retas de cores verdes.

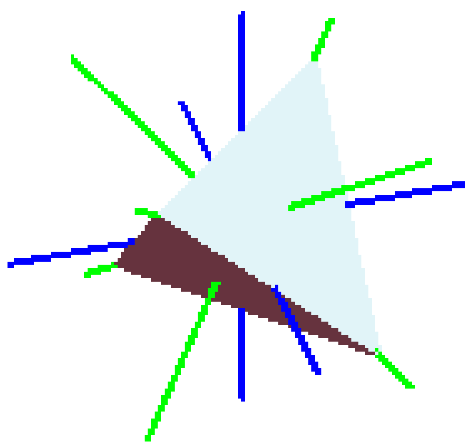


Figura 3.11: Eixos de Rotações do Tetraedro. [3]

- Eixo passando pelos pontos médios das arestas opostas.
  São rotações diferentes da identidade e com ângulos de π. São 3 pares de arestas opostas no tetraedro. Logo:
  $$3 \times 1 = 3$$
  rotações com o eixo passando pelos pontos médios das arestas opostas.

  Na figura 3.11, temos esses eixos de rotação representados pelas retas de cores azuis.

Daí temos $8 + 3 + 1 = 12$ rotações, incluindo a identidade.

O conjunto das rotações munido com a operação composição de funções é um grupo. Fica à cargo do leitor interessado, verificar essa afirmação.

Portanto, o grupo de simetrias de rotação do tetraedro possui 12 elementos.

3.2.2 Simetrias de Rotação do Cubo

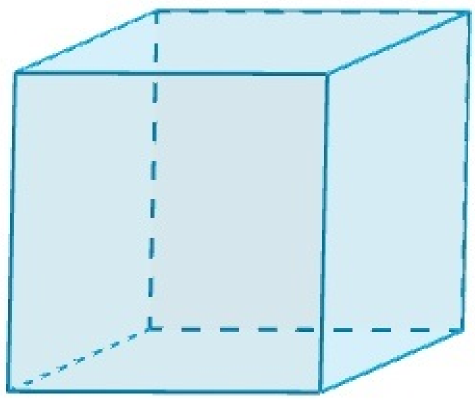


Figura 3.12: Cubo. [1]

O cubo é composto de três tipos de rotações: uma com o eixo de rotação passando pelos pontos centrais das faces opostas; outra com o eixo passando pelos pontos médios das arestas opostas; e a última com o eixo passando pelos vértices opostos.

Enumeração das simetrias de rotação do cubo:

- Eixo passando pelos pontos centrais das faces opostas.
  São três rotações diferentes da identidade, uma segundo um ângulo de $\frac{\pi}{2}$, outra segundo um ângulo de π e, por último, segundo um ângulo de $\frac{3\pi}{2}$. Como temos 3 pares de faces opostas no cubo. Logo, são
  $$3 \times 3 = 9$$
  rotações com o eixo passando pelos pontos centrais das faces opostas.

Na figura 3.13, temos esses eixos de rotação representados pelas retas de cores amarelas.

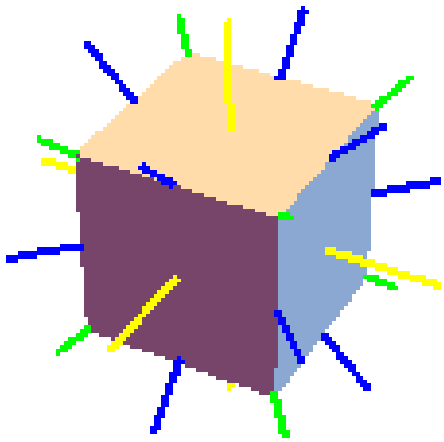


Figura 3.13: Eixos de Rotações do Cubo. [3]

- Eixo passando pelos pontos médios das arestas opostas.
  São rotações diferentes da identidade e segundo um ângulo de π. Como há 6 pares de arestas opostas no cubo, temos

  $$6 \times 1 = 6$$

  rotações com o eixo passando pelos pontos médios das arestas opostas.

  Na figura 3.13, temos esses eixos de rotação representados pelas retas de cores azuis.

- Eixo passando pelos vértices opostos.
  São duas rotações diferentes da identidade, uma segundo um ângulo de $\frac{2\pi}{3}$ e a outra segundo um ângulo de $\frac{4\pi}{3}$. Como temos 4 pares de vértices opostos no cubo, são

  $$4 \times 2 = 8$$

  rotações com o eixo passando pelos vértices opostos.

  Na figura 3.13, temos esses eixos de rotação representados pelas retas de cores verdes.

Com a identidade, temos $9 + 6 + 8 + 1 = 24$ rotações.

O conjunto das rotações munido com a operação composição de funções é um grupo. Fica à cargo do leitor interessado, verificar essa afirmação.

Portanto, o grupo de simetrias de rotação do cubo possui 24 elementos.

3.2.3 Simetrias de Rotação do Dodecaedro

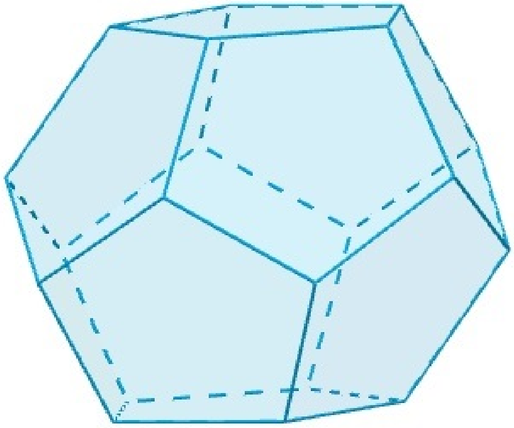


Figura 3.14: Dodecaedro. [1]

O dodecaedro possui três tipos de rotações: uma com o eixo de rotação passando pelos pontos centrais das faces opostas; outra com o eixo passando pelos pontos médios das arestas opostas e por último; eixo passando pelos vértices opostos.

Vale lembrar que o dodecaedro possui 12 faces, 30 arestas e 20 vértices.

Como nos casos anteriores, enumeramos as simetrias de rotação.

- Eixo de rotação passando pelos pontos centrais das faces opostas.
  São quatro rotações diferentes da identidade e segundo os ângulos de $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$ e $\frac{8\pi}{5}$. Como temos 6 pares de faces opostas no dodecaedro, são
  $$6 \times 4 = 24$$
  rotações com o eixo passando pelos pontos centrais das faces opostas.

  Na figura 3.15, temos esses eixos de rotação representados pelas retas de cores vermelhas.

- Eixo de rotação passando pelos pontos médios das arestas opostas.
  São rotações diferentes da identidade e segundo um ângulo de π. Como temos 15 pares de arestas opostas no dodecaedro, são
  $$15 \times 1 = 15$$
  rotações com o eixo passando pelos pontos médios das arestas opostas.

  Na figura 3.15, temos esses eixos de rotação representados pelas retas de cores azuis.

- Eixo de rotação passando pelos vértices opostos.
  São duas rotações diferentes da identidade: uma segundo um ângulo de $\frac{2\pi}{3}$ e

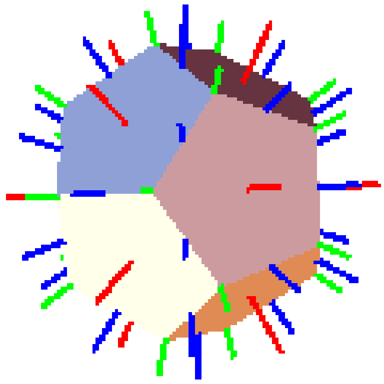


Figura 3.15: Eixos de Rotações do Dodecaedro. [3]

outra segundo um ângulo $\frac{4\pi}{3}$. Como temos 10 pares de vértices opostos no dodecaedro, são

$$10 \times 2 = 20$$

rotações com o eixo passando pelos vértices opostos.

Na figura 3.15, temos esses eixos de rotação representados pelas retas de cores verdes.

Ao todo, são $24 + 15 + 20 + 1 = 60$ rotações (incluindo a identidade).

O conjunto das rotações munido com a operação composição de funções é um grupo. Fica à cargo do leitor interessado, verificar essa afirmação.

Portanto, o grupo de simetrias de rotações do dodecaedro possui 60 elementos.

3.2.4 Simetrias de Rotação do Octaedro e Icosaedro

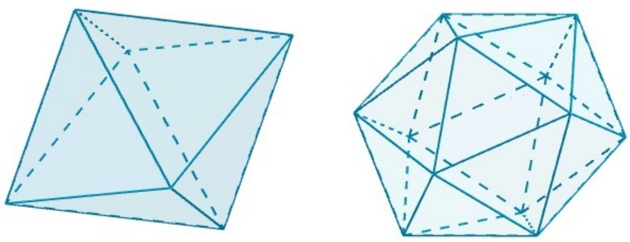


Figura 3.16: Octaedro e Icosaedro. [1]

Como o octaedro é o dual do cubo, e o icosaedro é o dual do dodecaedro, o grupo de simetrias de rotação do octaedro e do icosaedro são isomorfos aos do cubo e do dodecaedro, respectivamente. Logo, o grupo de simetrias de rotação do

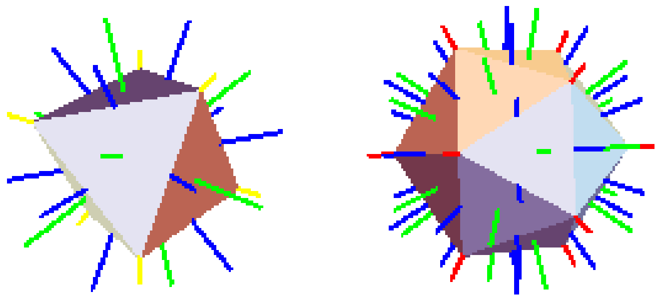


Figura 3.17: Eixos de Rotações do Octaedro e Icosaedro. [3]

octaedro possui 24 elementos; e o grupo de simetrias de rotação do icosaedro possui 60 elementos.

3.2.5 Uma Análise dos Grupos de Rotações dos Sólidos Platônicos

Nesta seção iremos identificar os isomorfismos entre cada grupo de rotação dos sólidos platônicos com algum subgrupo de S_n.

Para estudo complementar, o leitor poderá consultar [14] e [9].

Grupo das Simetrias de Rotação do Tetraedro e A_4

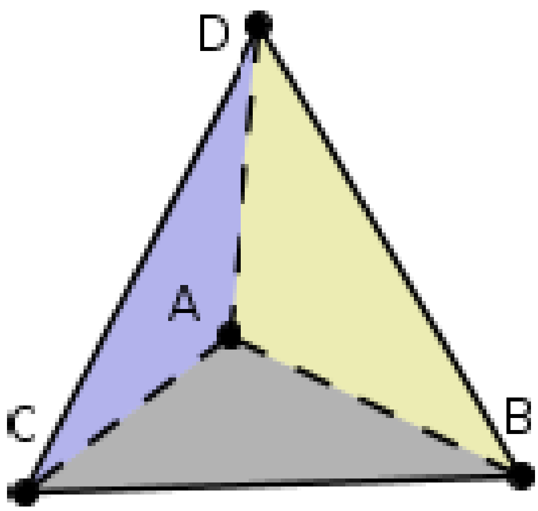


Figura 3.18: Tetraedro. [7]

Vamos denotar, nesta seção, o grupo das simetrias de rotação do tetraedro por Σ, que possui 12 elementos.

As rotações permutam os vértices do tetraedro. Como temos 4 vértices neste sólido, veja a figura 3.18, Σ é isomorfo a um subgrupo de S_4.

Os subgrupos de S_4 são:

$$S_4, \{e\}, S_3, S_2, K_4, A_4.$$

Sendo a ordem de cada subgrupo:

$$\mid S_4 \mid= 24, \ \mid \{e\} \mid= 1, \ \mid S_3 \mid= 6, \ \mid K_4 \mid= 4, \ \mid A_4 \mid= 12.$$

Assim $\Sigma \simeq A_4$.

Grupo das Simetrias de Rotações do Cubo e S_4

Vamos considerar, nesta seção, o grupo das simetrias de rotação do cubo. Este denotado por Ψ. Recorde-se que ele possui 24 elementos.

Nossa análise não será com vértices, como no tetraedro, e sim com as diagonais do cubo.

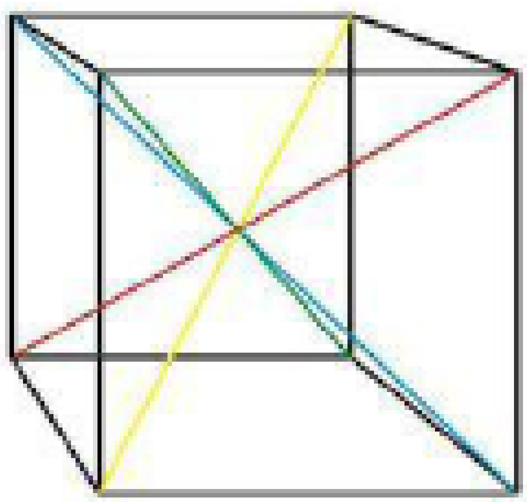


Figura 3.19: Diagonais do Cubo. [1]

As rotações permutam as diagonais. Como temos 4 diagonais no cubo, veja a figura 3.19, Ψ é isomorfo a um subgrupo de S_4.

Observe que S_4 possui 24 elementos.

Logo $\Psi \simeq S_4$.

Grupo das Simetrias de Rotações do Dodecaedro e A_5

Vamos considerar nesta seção o grupo das simetrias de rotação do dodecaedro. Este será denotado por Ω, que possui 60 elementos.

Nossa associação não será com vértices e diagonais, e sim, com 5 cubos inscritos no dodecaedro, veja a figura 3.21.

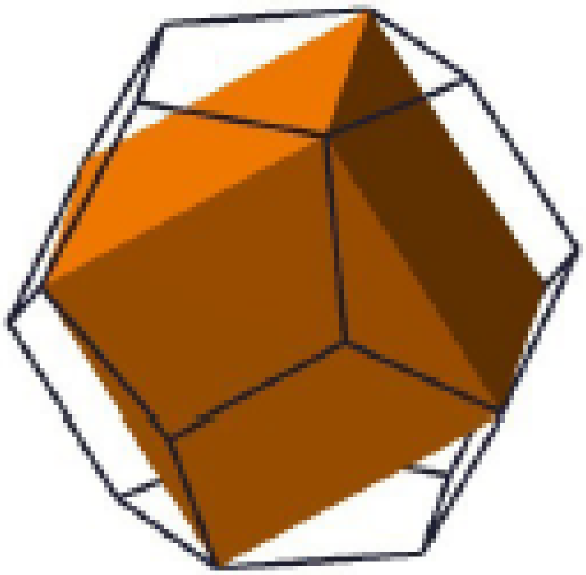


Figura 3.20: Cubo inscrito no dodecaedro. [1]

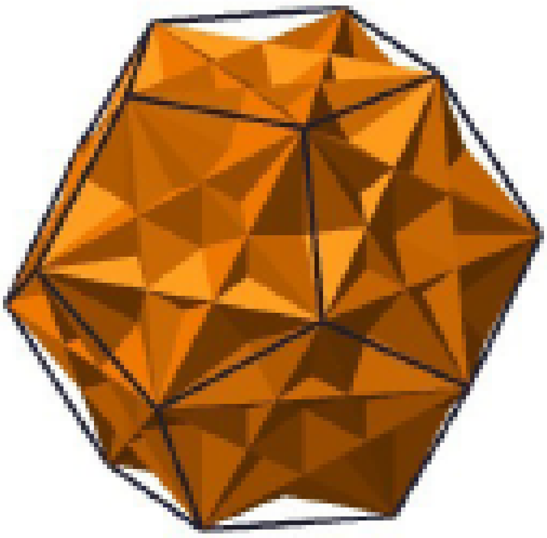


Figura 3.21: Cinco cubos inscritos no dodecaedro. [1]

As rotações permutam os cinco cubos inscritos. Assim, Ω é isomorfo a um subgrupo de S_5. Denote este subgrupo por Δ.

Temos $(S_5 \colon \Delta) = 2$ e S_5 possui um único subgrupo de índice 2, a saber: A_5. Para maiores detalhes consulte [10].

Logo $\Omega \simeq A_5$.

Assim através desta análise dos grupos de rotações dos sólidos platônicos, encontramos uma representação geométrica para os grupos S_4, A_4 e A_5.

4
Relato da Aula Prática

Aula prática realizada na Escola Estadual João Batista de Carvalho, na cidade de Bambuí, Minas Gerais, com alunos do 8º ano do ensino fundamental.

O primeiro desafio foi desenvolver um plano de aula sobre alguns grupos de simetrias na geometria euclidiana. Os alunos desconheciam os polígonos regulares e os poliedros regulares.

Outro agravante: o conteúdo do ano letivo extenso e o projeto demandando de, no mínimo, três aulas para o desenvolvimento. Assim foi acordado com a direção e supervisão da escola a realização da aula prática para o mestrado, sábado, 24 de setembro de 2016 de 13:30h às 16:30h.

A supervisora solicitou um projeto, da aula prática para anexar ao arquivo da escola. No apêndice seguem o projeto, bilhete para os responsáveis, o certificado entregue aos alunos que participaram e a lista de exercícios desenvolvidos durante a aula.

Estrutura e comentários do plano de aula:

- 1º Momento

  Apresentação de sete figuras do cotidiano, seis contendo simetrias de rotação ou reflexão e uma sem simetria. Induzir aos alunos à percepção da diferença entre a figura não simétrica e as demais.
  Somente um aluno, dentre os 27 presentes, conseguiu perceber a diferença entre a figura que não possuía simetria. Oportunizando a explicação à turma da definição de simetria.

- 2º Momento

  Distribuir uma folha de exercícios para cada aluno e pedir para citar cinco simetrias que encontramos em nosso cotidiano.
  Todos realizaram esta atividade, alguns desenhando outros escrevendo. Figuras produzidas: triângulo, folha de papel ofício, óculos, coração, borboleta, folha de uma árvore, lápis de escrever, boca, maçã, o número 8, laranja, olhos, letras do alfabeto como a letra M, um rosto de uma menina e o brasão da UFV que estava no cabeçalho da folha de atividade. Dos itens mencionados, podem

Figura 4.1: Seis simetrias do cotidiano e uma imagem sem simetria. Figura trabalhada durante o 1º momento.

conter figuras não simétricas de acordo com sua formação. Exemplo, uma maçã possuindo um lado maior que o outro, mas os desenhos continham simetria.

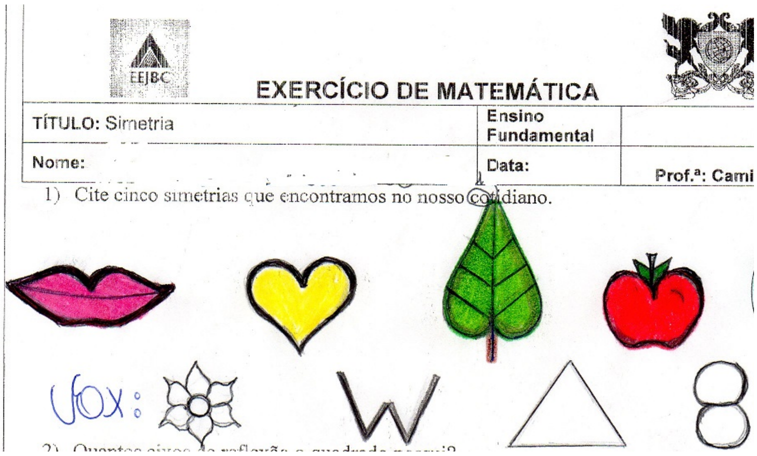


Figura 4.2: Atividade 01 da aula prática feita por um aluno. Atividade trabalhada no 2º momento.

- 3º Momento

  Definir uma simetria de reflexão e uma simetria de rotação.
  Exploração das figuras apresentadas inicialmente e classificação em simetria de reflexão, rotação ou ambas simetrias.

- 4º Momento

  Apresentar os polígonos regulares.
  Durante a exposição dos polígonos, alguns demonstraram conhecimento e outros desconheciam inclusive o nome, hexágono.

- 5º Momento

  Trabalhar as simetrias de reflexão do triângulo equilátero e do quadrado.
  Construção dos eixos das simetrias de reflexão: Com um pedaço de papel no formato de um triângulo equilátero, a figura foi dobrada, obtendo duas imagens iguais. Após as dobraduras, concluiu-se que o triângulo equilátero possui três eixos de reflexão.
  Foi distribuído aos alunos um pedaço de papel com o formato de um quadrado para confecção dos eixos de simetrias de reflexão do quadrado. Após confecção e observação, na folha de atividade, registraram o número de eixos de simetrias de reflexão do quadrado. O procedimento de dobraduras, garantiu a execução da atividade sem dificuldades acentuadas. Com exceção de um aluno, a turma identificou quatro eixos.

Figura 4.3: Atividade com dobradura para determinar os eixos de simetrias de rotação do quadrado. Atividade trabalhada no 5º momento.

- 6º Momento

  Investigar as simetrias de rotação do triângulo equilátero e do quadrado.
  Procedimentos, dinâmicas e material, aplicados nas simetrias de reflexão do triângulo equilátero, foram utilizados nas simetrias de rotação do triângulo equilátero. Seus vértices foram nomeados A, B e C. Em outro pedaço de papel cartão, cópia do triângulo contendo vértices A, B e C. Sobrepondo a figura do triângulo no desenho da folha e rotacionando a figura de maneira que sua nova posição seja idêntica a inicial. As atividades desenvolvidas viabilizaram a determinação das simetrias de rotação do triângulo equilátero com êxito. Como sondagem de consolidação, utilizou-se instrumento para mensurar: o procedimento utilizado para o triângulo agora com o quadrado. Atividade executada com rapidez.

- 7º Momento

  Apresentar os poliedros regulares.
  O momento divisor de águas da aula; alunos sujeitos no processo ensino-aprendizagem: descobrindo o óbvio, a semelhança do cubo ao dado. A euforia,

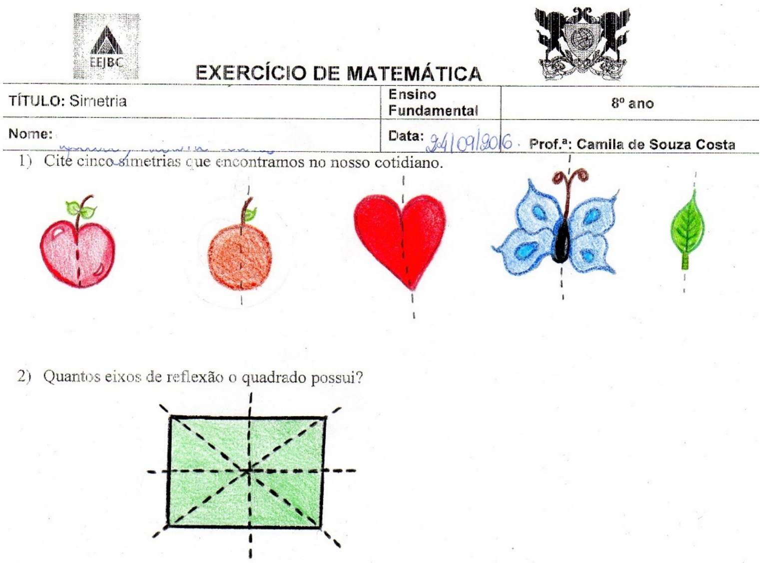


Figura 4.4: Atividade 02. Determinar os eixos de simetrias de reflexão do quadrado, resolvida da forma correta por um aluno. Exercício trabalhado no 5º momento.

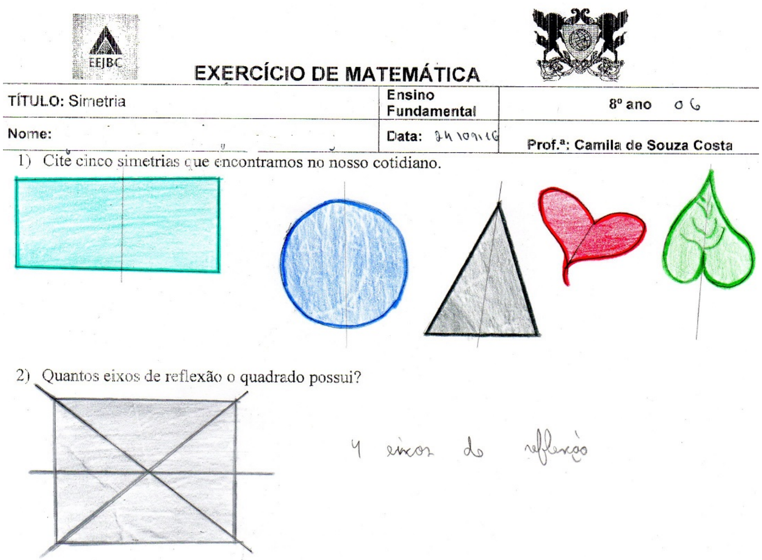


Figura 4.5: Atividade 02. Determinar os eixos de simetrias de reflexão do quadrado, resolvida da forma incompleta. Exercício trabalhado no 5º momento.

gerada pela descoberta, transformou a atmosfera do contexto e dos alunos; pois vários alunos desconheciam os sólidos, fato que valorizou em demasia o 7º momento.

- 8º Momento

  Trabalhar as simetrias de rotação do tetraedro.
  Confecção do tetraedro com palitos e bala de goma. Era previsível as dificuldades de alguns alunos ao montar o sólido. Após a confecção, momento mais desafiante da aula: explicar as simetrias de rotação do tetraedro. Dois casos foram explicados: um vértice com o baricentro da face oposta ao vértice

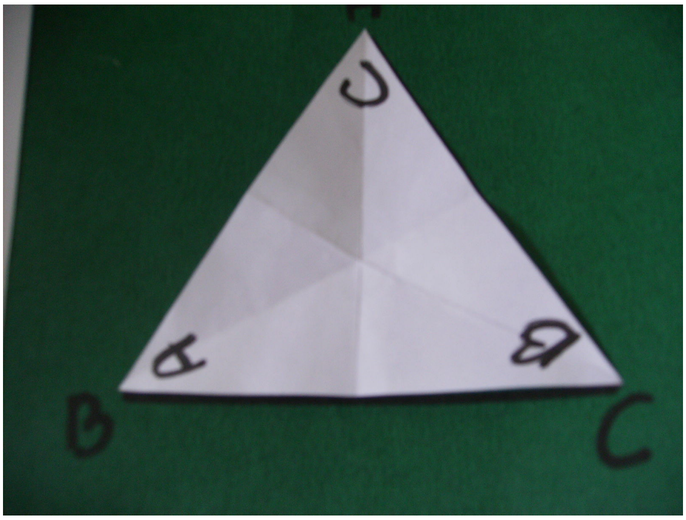


Figura 4.6: Exemplo com o triângulo equilátero. Trabalhado no 6º momento.

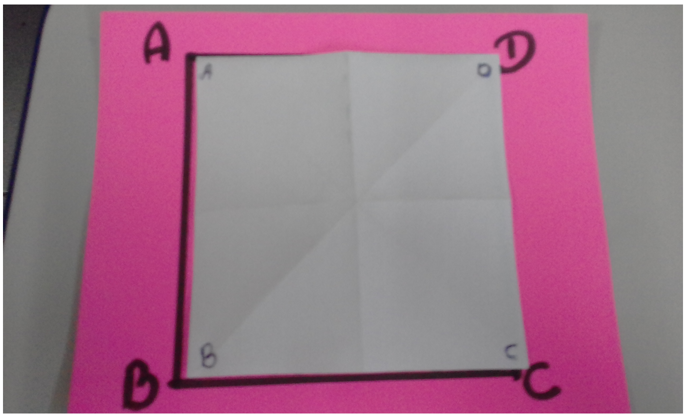


Figura 4.7: Material construído por um aluno para determinar as simetrias de rotação do quadrado. Trabalhado no 6º momento.

Figura 4.8: Material concreto realizado pelos alunos para determinar as simetrias de rotação do quadrado.

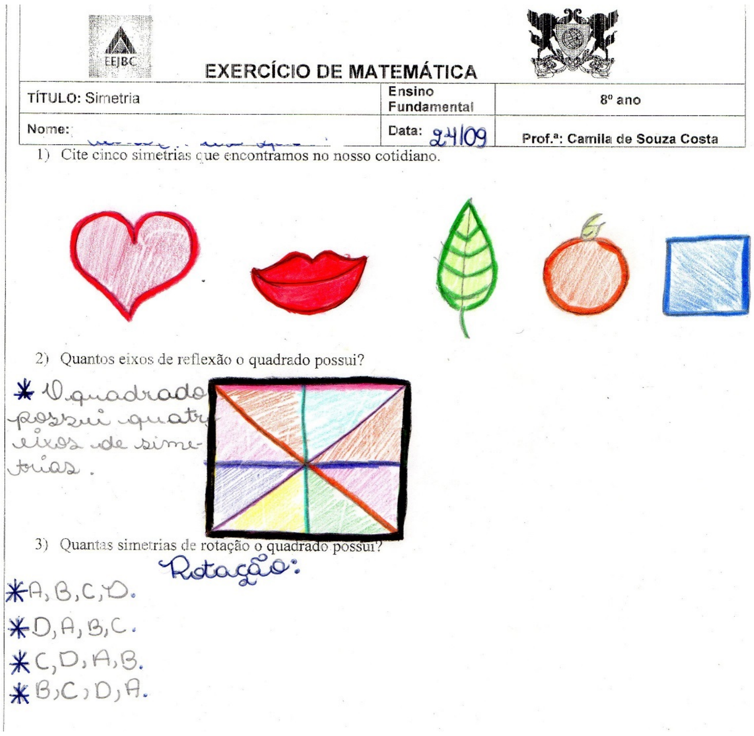


Figura 4.9: Atividade 03. Determinar as simetrias de rotação do quadrado. Exercício trabalhado no 6º momento.

e os pontos médios de duas arestas opostas. Foi solicitado aos alunos que registrassem o número de simetrias de rotação do tetraedro. Durante o registro foi observado respostas previstas; pois o grau de dificuldade é um pouco elevado. Um aluno se destacou acertando, explicou aos colegas e o 8º momento culminou com a aprendizagem dos colegas.

Figura 4.10: Construção do tetraedro com palito e bala de goma. Trabalhado no 8º momento.

A aula finalizou com a entrega dos certificados aos alunos pela supervisora Luciene Rezende.

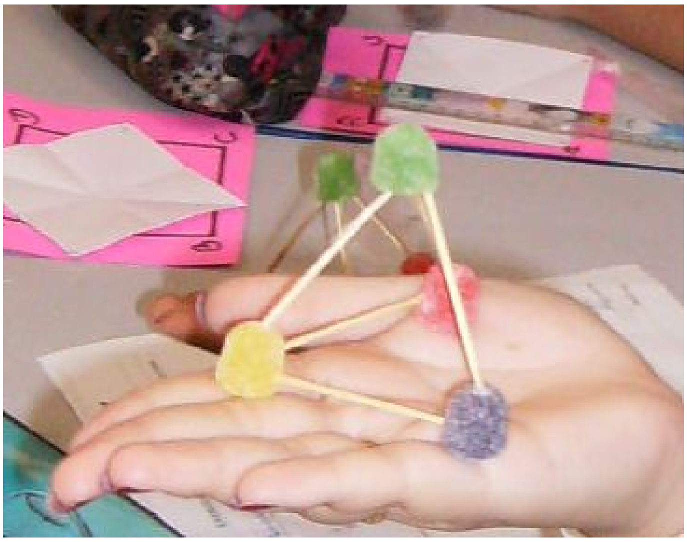
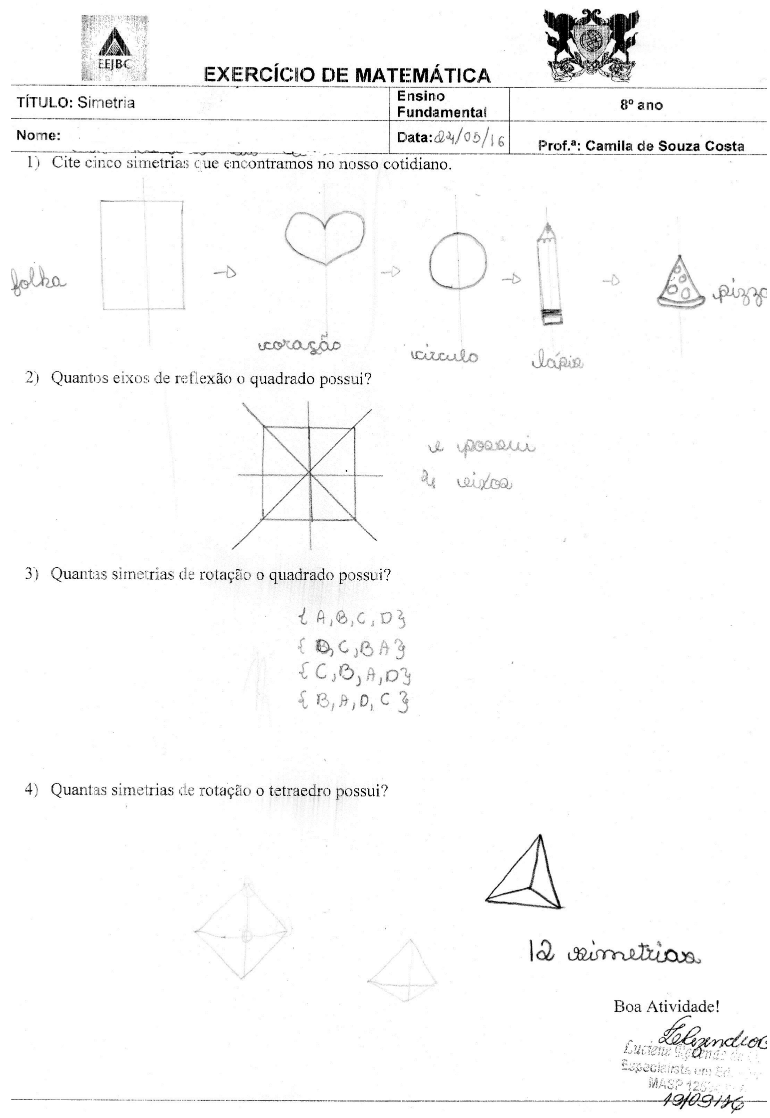


Figura 4.11: Tetraedro finalizado. Sólido trabalhado no 8º momento.

Figura 4.12: Explicando as rotações no tetraedro. Atividade trabalhada no 8º momento.



EXERCÍCIO DE MATEMÁTICA

TÍTULO: Simetria	Ensino Fundamental	8º ano
Nome:	Data: 24/05/16	Prof.ª: Camila de Souza Costa

1) Cite cinco simetrias que encontramos no nosso cotidiano.

folha → coração → circulo → lápis → pizza

2) Quantos eixos de reflexão o quadrado possui?

e possui 4 eixos

3) Quantas simetrias de rotação o quadrado possui?

{A, B, C, D}
{D, C, B, A}
{C, B, A, D}
{B, A, D, C}

4) Quantas simetrias de rotação o tetraedro possui?

12 simetrias

Boa Atividade!

Figura 4.13: Atividade 04, o aluno determinou todas as 12 simetrias de rotação do tetraedro. Exercício trabalhado no 8º momento.

Figura 4.14: Aluno explicando as simetrias de rotação do tetraedro. Atividade trabalhada no 8º momento.

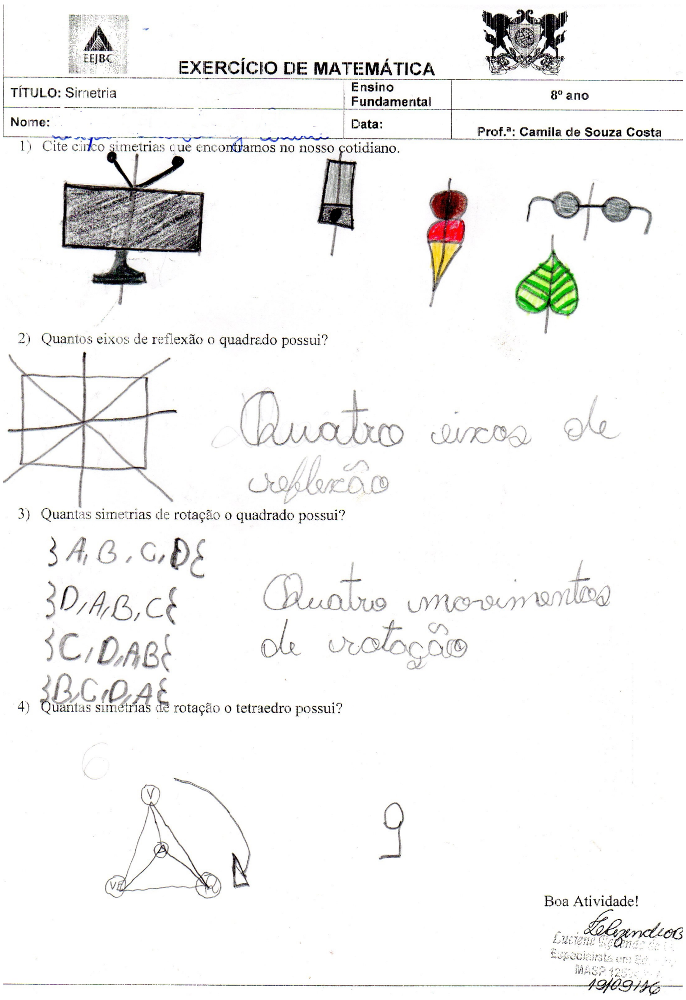


Figura 4.15: Atividade 04, o aluno não determinou todas as 12 simetrias de rotação do tetraedro. Exercício trabalhado no 8º momento.

5

Considerações Finais

O planejar, o executar e o observar do projeto fomentaram o relato da aula prática e esse gerou uma nova perspectiva sobre, a existência de um outro universo matemático velado no conteúdo lecionado no ensino fundamental. Parte do pressuposto ao explicar simetrias para alunos do 8º ano saber que, uma simetria é uma bijeção que preserva a forma da figura. Em contrapartida, há uma estrutura algébrica para chegar em determinados resultados que ensinamos aos alunos.

Esperamos que este trabalho: Alguns Grupos de Simetrias na Geometria Euclidiana, possa auxiliar os alunos da graduação que pretendam seguir a área da pesquisa acadêmica através da iniciação científica; e a extensão universitária, tendo esse como eixo principal, o relato da aula prática.

Assim acreditamos que este material seja de grande valia para alunos da graduação e do mestrado profissional.

A

Apêndice da Aula Prática

Projeto Simetria		
Camila de Souza Costa	Ensino Fundamental	2016

Público-Alvo: Alunos do 8º Ano doEnsino Fundamental

Duração do projeto: Três horas

Local de execução: Sala de aula

Introdução

O projeto de pesquisa do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) Simetria, está em andamento. A dissertação, a qual está em construção, trata sobre algumas simetrias nas geometrias plana e espacial. A proposta desta aula é aplicar o conteúdo da dissertação na prática.

Justificativa

O estudo das simetrias nem sempre é abordado em sala de aula, pois a grade curricular é extensa e se ocupa com outros conteúdos.

Objetivos

Objetivos Gerais: O projeto **Simetria** tem o objetivo de estimular o raciocínio dos alunos nas áreas lógica e espacial.

Objetivos Específicos: Através dessa proposta pretende-se que o aluno aprenda:

- ✓ A simetria no Cotidiano;
- ✓ Simetria de Reflexão e Rotação;
- ✓ Polígonos Regulares e Simetrias;
- ✓ Sólidos Platônicos e Simetrias de Rotação;

Metodologia

O projeto será realizado em três horas e terá a seguinte ordem:

- ✓ Simetria no Cotidiano;
- ✓ Atividade 1 - Listar 5 simetrias;
- ✓ Simetria de Reflexão e Rotação;
- ✓ Polígonos Regulares;

Figura A.1: Projeto da aula prática entregue à escola - parte 01

- ✓ Simetria de Reflexão e Rotação do Triângulo Equilátero;
- ✓ Atividade 2 - Listar as simetrias de rotação e reflexão do quadrado
- ✓ Sólidos Platônicos
- ✓ Atividade 3 - Simetria de Rotação do Tetraedro

Avaliação

Por meio das atividades, poderemos identificar a dificuldade de cada aluno.

Recursos Pedagógicos

Data show, papel ofício, papel colorido, palito e bala de goma para montar o tetraedro.

Referências Bibliográficas

- ✓ MUNIZ, A. C. Geometria. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Coleção PROFMAT.
- ✓ Simetria e transformações. Disponível em :<http://www.pucsp.br/tecmem/Artista/simetria.htm#reflexão>. Acesso: 28 de Agosto de 2016.

Figura A.2: Projeto da aula prática entregue à escola - parte 02.

Srs. Pais/Responsáveis,

Comunicamos que seu (sua) filho (a)________________________________

foi selecionado para participar do CURSO de MATEMÁTICA "SIMETRIA", que acontecerá na E.E. "João Batista de Carvalho", porque para ser bem-sucedido, é fundamental que o estudante tenha visão de futuro, dedique-se para alcançar seus objetivos e supere as expectativas do mercado, demonstrando estar bem capacitado sendo protagonista de seu próprio desenvolvimento.

Haverá entrega de **Certificado** para quem participar do Curso.

Dia: 24/09/16 (sábado)

Horário: 13h30-16h30

Contamos com a sua colaboração. Atenciosamente,

Equipe Pedagógica

****

Bambuí, _______/______/20 ______.

CIENTE:____________________________

Figura A.3: Bilhete enviado aos responsáveis, comunicando sobre a aula prática.

CERTIFICADO

Certificamos que

Participou do

CURSO DE MATEMÁTICA "SIMETRIA"

realizado na Escola Estadual "João Batista de Carvalho", em 24/09/16, na qualidade de aluno (a), perfazendo um total de 3 horas.

Bambuí, 24 de setembro de 2016.

Camila de Souza Costa
Professora Matemática

Leonardo Henrique Soares Magalhães
Diretor – MASP 1127463-6

ESCOLA ESTADUAL "JOÃO BATISTA DE CARVALHO
Lei 3562 de 16/11/65 PORTARIA 115/116 de 22/03/66
Praça Antônio Carlos, 48 – Centro CEP-38.900-000
Telefone (37) 3431-1638
BAMBUÍ-MG

Figura A.4: Certificado entregue aos alunos.

EXERCÍCIO DE MATEMÁTICA

TÍTULO: Simetria	**Ensino Fundamental**	**8º ano**
Nome:	**Data:**	**Prof.ª: Camila de Souza Costa**

1) Cite cinco simetrias que encontramos no nosso cotidiano.

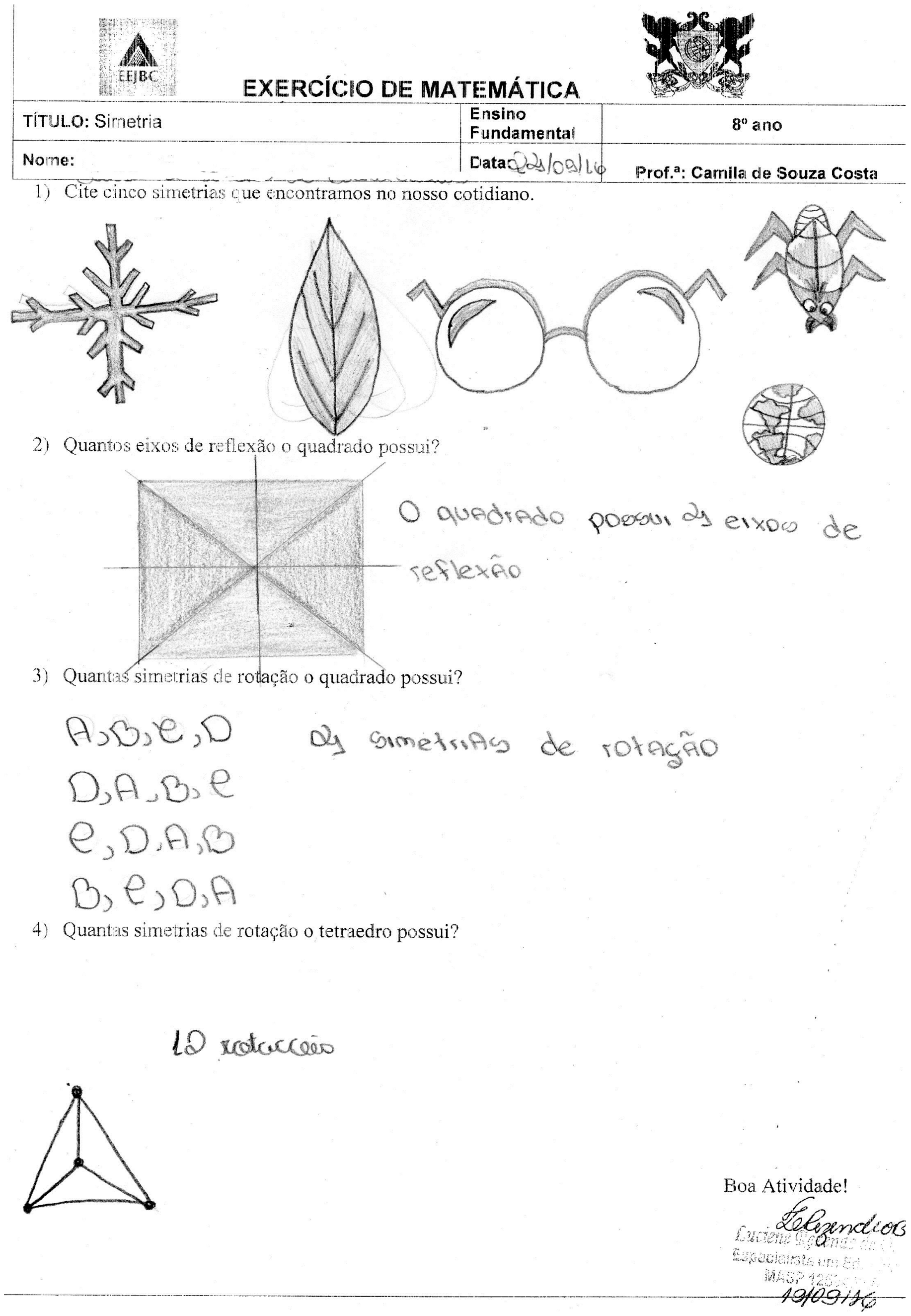
2) Quantos eixos de reflexão o quadrado possui?

3) Quantas simetrias de rotação o quadrado possui?

4) Quantas simetrias de rotação o tetraedro possui?

Boa Atividade!

Figura A.5: Atividade entregue aos alunos.



EEJBC

EXERCÍCIO DE MATEMÁTICA

TÍTULO: Simetria	Ensino Fundamental	8º ano
Nome:	Data: 22/09/16	Prof.ª: Camila de Souza Costa

1) Cite cinco simetrias que encontramos no nosso cotidiano.

2) Quantos eixos de reflexão o quadrado possui?

O quadrado possui 4 eixos de reflexão

3) Quantas simetrias de rotação o quadrado possui?

A, B, C, D
D, A, B, C
C, D, A, B
B, C, D, A

4 simetrias de rotação

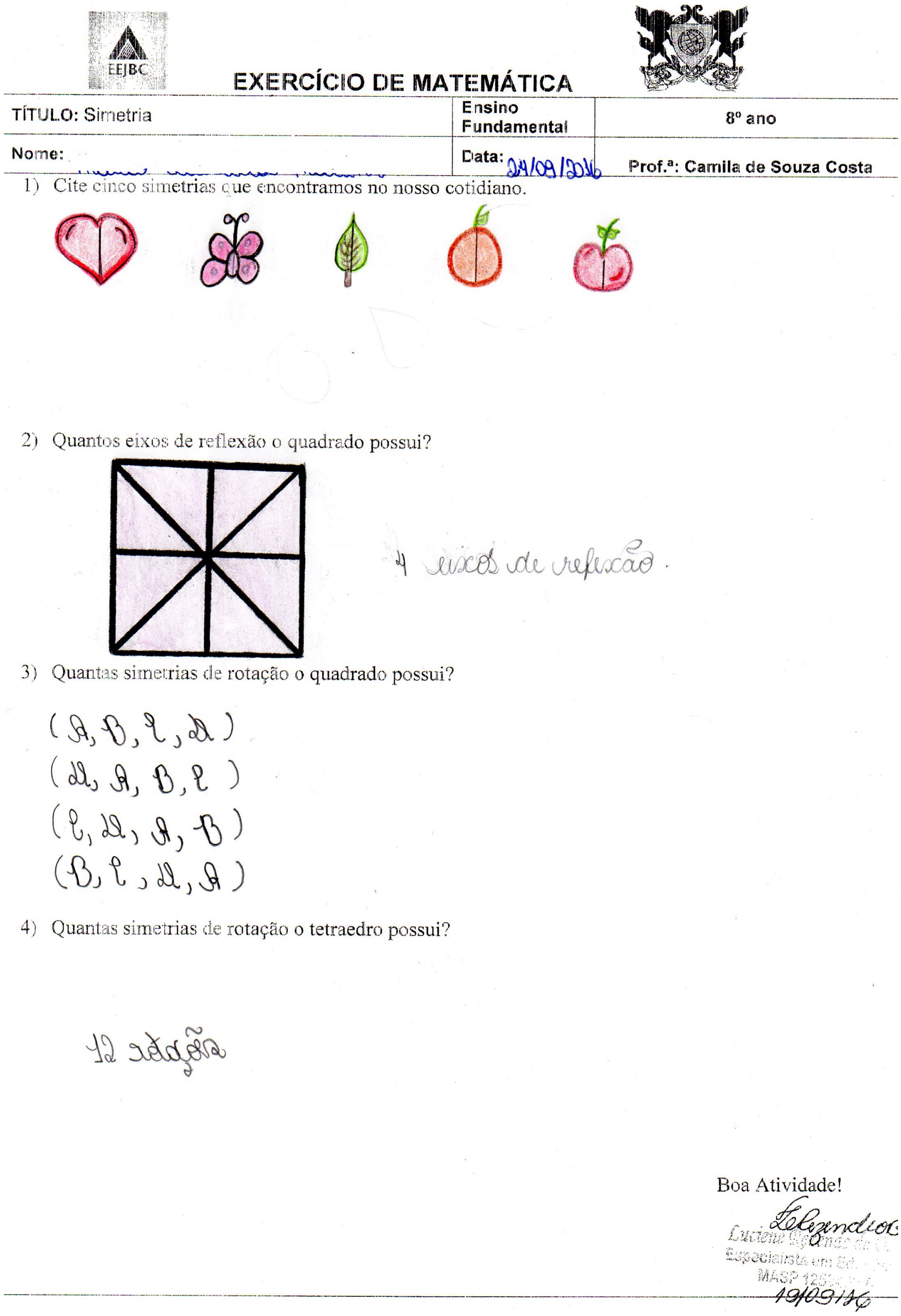
4) Quantas simetrias de rotação o tetraedro possui?

12 rotações

Boa Atividade!

19/09/16

Figura A.6: Atividade dos alunos.



EEJBC

EXERCÍCIO DE MATEMÁTICA

TÍTULO: Simetria	Ensino Fundamental	8º ano
Nome:	Data: 24/09/2016	Prof.ª: Camila de Souza Costa

1) Cite cinco simetrias que encontramos no nosso cotidiano.

2) Quantos eixos de reflexão o quadrado possui?

4 eixos de reflexão.

3) Quantas simetrias de rotação o quadrado possui?

(A, B, C, D)
(D, A, B, C)
(C, D, A, B)
(B, C, D, A)

4) Quantas simetrias de rotação o tetraedro possui?

12 rotações

Boa Atividade!

19/09/16

Figura A.7: Atividade dos alunos.

Bibliografia

[1] *Cuerpos Geométricos.* http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/cuerpos-geometricos/. Acessado em 17/11/2016.

[2] *El rombododecaedro estrellado: arte, abejas y puzzles (primera parte).* http://culturacientifica.com/2014/02/26/el-rombododecaedro-estrellado-arte-abejas-y-puzzles-primera-parte/. Acessado em 10/11/2016.

[3] *Generating 3D Rotation Groups and Polyhedron Sculpture with Mathematica.* http://mathandcode.com/2016/06/06/polyhedramathematica.html. Acessado em 09/01/2017.

[4] *Movimentos simétricos de um polígono regular de n lados.* http://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/mono01.pdf. Acessado em 17/11/2016.

[5] *O Teorema de Burnside e Aplicações.* http://docplayer.com.br/13908050-O-teorema-de-burnside-e-aplicacoes-jose-plinio-o-santos-e-.eduardo-bovo-universidade-estadual-de-campinas.html. Acessado em 17/11/2016.

[6] *UOL Educação - Poliedro.* http://educacao.uol.com.br/matematica/poliedro.jhtm. Acessado em 21/12/2016.

[7] Almeida, Cristian Roberto Miccerino de: *Sólidos de Platão e seus duais: Construção com material concreto e representações por GeoGebra.*

[8] Bairral, Marcelo Almeida: *Instrumentação do ensino da geometria*, volume 1. 2010, ISBN 85-7648-074-3.

[9] Foster, Lorraine L.: *On the Symmetry Group of the Dodecahedron.* Mathematics Magazine, 63(2):106–107, 1990.

[10] Garcia, Arnaldo e Yves Lequain: *Elementos de Álgebra.* 2005, ISBN 8525501907.

[11] Gonçalves, Adilson: *Introdução à Álgebra.* 2012, ISBN 9788524401084.

[12] Hygino, Domingues H. e Gelson Iezzi: *Álgebra Moderna.* 4^a reformulada edição.

[13] Pinto, Maria Manuela Pereira: *Grupos e Simetrias.*

[14] Silva, André Ricardo Belotto da e Lucia Satie Ikemoto Murakami: *Grupos e Simetria.* https://www.ime.usp.br/~cpq/main/arquivos/outros/Andre%20Ricardo%20Belotto%20da%20Silva.pdf. Acessado em 18/01/2017.