Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Uma Abordagem de Sistemas Lineares Usando o Maxima e o Scilab

Messias Henrique Vieira Silva

Goiânia

2017

sistema de bibliotecas ufg

PRPG

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Messias Henrique Vieira Silva

Título do trabalho: Uma Abordagem de Sistemas Lineares Usando o Maxima e o Scilab

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 12 / 07 / 2017

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente
- Submissão de artigo em revista científica
- Publicação como capítulo de livro
- Publicação da dissertação/tese em livro

A assinatura deve ser escaneada.

Versão atualizada em maio de 2017.

Messias Henrique Vieira Silva

Uma Abordagem de Sistemas Lineares Usando o Maxima e o Scilab

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira

Goiânia

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Henrique Vieira Silva, Messias
[manuscrito] / Messias Henrique Vieira Silva. - 2017.
LXXXV, 85 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2017.
Bibliografia.
Inclui siglas, abreviaturas, gráfico, tabelas, lista de figuras.

1. Scilab. 2. Maxima. 3. Softwares Matemáticos. 4. Matrizes. 5. Sistemas Lineares. I. Rocha Vieira, Ewerton, orient. II. Título.

CDU 51

Messias Henrique Vieira Silva

“Uma Abordagem de Sistemas Lineares usando o Maxima e o Scilab”

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 4 de julho de 2017, pela Banca Examinadora constituída pelos seguintes professores:

Ewerton R. Vieira

Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira
Instituto de Matemática e Estatística – UFG
Presidente da Banca

Thaynara A. de Lima

Prof^a^. Dr^a^. Thaynara Arielly de Lima
Instituto de Matemática e Estatística – UFG

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Membro Externo – IFG/Goiânia

Messias Henrique Vieira Silva graduou-se em Matemática em 2003 pela Universidade Estadual de Goiás e atualmente é professor de Ensino Médio na rede pública de ensino do Estado de Goiás.

À memória de Lázara Vieira, minha mãe.

Agradecimentos

A Deus.

A minha esposa, Josiele, por todo apoio, amor, amizade e companheirismo nas viagens e em casa, incondicionalmente.

A minha irmã, Karina, que por acreditar em mim, sempre me incentivou.

A meu pai, João Henrique, que compreendeu todos os esforços e me apoiou.

A minha querida e amada mãe, Lázara Vieira, por tudo que me ensinou; ela não teve a oportunidade de presenciar a concretização deste sonho, mas ajudou, apoiou e torce de onde está, para o meu sucesso e felicidade.

A todos os colegas do PROFMAT, em especial ao grande amigo Wellington Tavares, companheiro de jornada e viagem durante boa etapa desse mestrado.

A meu orientador, Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira, pela paciência e compreensão durante as orientações para essa dissertação.

A CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Esta dissertação trata da utilização dos softwares matemáticos *Scilab* e *Maxima* como instrumentos de estudo e ensino de sistemas lineares. Inicialmente, é apresentado um estudo introdutório a respeito da Álgebra Linear, dos tipos de sistemas lineares e de formas manuais de resolução. Em seguida, aborda-se a utilização do *Scilab* para resolver sistemas possíveis e determinados e do *Maxima* para calcular determinantes de matrizes de ordem superior a três e ainda resolver sistemas possíveis e indeterminados. Por fim, apresenta-se uma abordagem acerca da solução de sistemas lineares através da representação gráfica de suas equações, começando em sistemas de duas equações com gráficos no plano xOy e encerrando com sistemas de três equações com gráficos no espaço tridimensional, tudo isso com a utilização do *Scilab* e do *Maxima*.

Palavras-chave

Sistemas Lineares, Matrizes, Softwares Matemáticos, *Maxima*, *Scilab*

Abstract

This dissertation address the use of mathematical software Scilab and Maxima as instruments of study and teaching of linear systems. Initially, it is presented an introductory study on: Linear Algebra, linear systems and some method applied to solve linear systems. Following, it is used Scilab to solve possible and determined systems and it is applied Maxima to calculate determinants of matrices of order higher than three to solve possible and indeterminate systems. In the end,it is presented a approach on the solution of linear systems through of the graphical representation of their equations, starting in systems of two equations with graphs in the xOy plane and ending with systems of three equations with graphics on three-dimensional space, all of this assited by Scilab and Maxima.

Keywords

Linear Systems, Matrices, Mathematical Softwares, *Maxima*, *Scilab*

Lista de Figuras

Índice

1 Introdução

O desenvolvimento de um indivíduo, nas mais diversas civilizações, passa pela necessidade de um mínimo conhecimento de Matemática. É certo que muitas vezes esse aprendizado é constituído pela necessidade de realizar determinado feito. No entanto, isso requer que o indivíduo conceba seu conhecimento a partir de uma base sólida e perfeitamente tangível. Por outro lado, quando um indivíduo é de alguma forma induzido a estudar determinado conteúdo matemático sem essa base razoável, o conhecimento fica bastante comprometido, haja vista a abstração enorme que o afasta de uma compreensão bem solidificada.

Nesse sentido, há sempre uma grande preocupação por parte dos professores de matemática em ministrar determinados conteúdos em que o aluno quase sempre não consegue enxergar com clareza esses conceitos, dentro de suas perspectivas.

Esse estudo tem o objetivo de discutir a utilização de softwares matemáticos, adventos de uma enorme evolução tecnológica, para auxiliar na resolução e principalmente na compreensão de uma parte importante da Álgebra Linear: os sistemas lineares.

Quando se trata de matrizes muito grandes, sistemas lineares muito extensos, fica extremamente difícil e desmotivante a busca de soluções para os mesmos. Com isso os softwares matemáticos empregam um grande vantagem, pois processam todos os cálculos quase que instantaneamente e ainda por cima, sem a enorme margem de erros característica em um processo manual.

Esse trabalho está estruturado em seis seções, além dessa introdução, que visam, de forma gradual, apresentar estratégias do uso de softwares matemáticos para o estudo, a pesquisa e o ensino de sistemas lineares, principalmente a nível de Ensino Médio. Considera-se essa introdução como a primeira seção; na segunda seção, é feita uma breve explanação sobre matrizes e seu tipos; na terceira, é dada uma noção a respeito de determinantes das matrizes já na quarta seção, aborda-se os sistemas lineares propriamente ditos e suas classificações quanto às possibilidades de resolução; na quinta seção, apresenta-se os dois sistemas computacionais algébricos alvos principais desse estudo: o *Scilab* e o *Maxima*; em seguida, na sexta seção, aborda-se uma interessante aplicação para esses softwares: a representação gráfica das equações dos sistemas lineares em duas e três dimensões, com as possíveis soluções, quando pertinentes; e, nesta seção também discute-se os possíveis ganhos da utilização desses softwares especificamente para esses assuntos. Por fim, tem-se as referências utilizadas para o desenvolvimento desse trabalho.

2 Matrizes

O pilar básico para esse estudo, consiste no uso de matrizes. Portanto, sem a pretensão se oferecer um estudo completo sobre o assunto, tem-se aqui uma breve abordagem a respeito de matrizes, seus tipos, operações e aplicações.

Todo o desenvolvimento deste capítulo está baseado nas referências (Steinbruch, 1989)[1] e (Boldrini,1980)[2].

2.1 Matriz de ordem m por n

Definicao 1. *Chama-se matriz de ordem m por n, o quadro de* $m \times n$ *elementos (em geral números reais) dispostos em m linhas e n colunas:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Na representação acima, encontra-se uma matriz, denominada A, onde cada um dos seus elementos, denotados por a_{ij}, se posicionam em determinada linha i e coluna j, com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Pode-se, ainda, generalizar com a notação $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Embora seja comum usar parênteses e colchetes ao delimitar lateralmente uma matriz, para ficar em consonância com a notação da maioria dos softwares de computação algébrica, opta-se aqui por utilizar apenas colchetes.

2.2 Tipos de Matrizes

Existem diversas classificações de matrizes, na literatura, (ver [2, cap. 1] [1],[3] e [4]). A seguir, são definidos alguns desses tipos.

2.2.1 Matriz Linha

A matriz que possui apenas uma linha. é chamada de *matriz linha.* Note que toda matriz linha é da forma $A = [a_{1j}]_{1\times n}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}.$$

No Exemplo 2.2.1 tem-se uma matriz linha.

Exemplo 2.2.1.

Observa-se que a matriz B, a seguir, possui apenas uma linha:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

2.2.2 Matriz Coluna

Uma matriz da forma $A = [a_{i1}]_{n\times 1}$, ou seja, que possui apenas uma coluna, é chamada de *matriz coluna*:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}.$$

A seguir, no Exemplo 2.2.2, apresenta-se uma matriz coluna.

Exemplo 2.2.2.

Nota-se que a matriz C possui apenas uma coluna:

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

2.2.3 Matriz Quadrada

Chama-se *matriz quadrada* de ordem p, a matriz que possui exatamente o mesmo número de linhas e colunas. Sua forma é denotada por $A = [a_{ij}]_{p \times p}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pp} \end{bmatrix}.$$

No Exemplo 2.2.3, apresenta-se algumas matrizes quadradas.

Exemplo 2.2.3.

Observa-se que A é uma matriz quadrada de ordem 4, enquanto que B é quadrada de ordem 3 e C é quadrada de ordem 2:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Diagonal Principal O conjunto de elementos a_{ij}, de uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem n, em que $i = j$, é chamado de *diagonal principal*. Assim, na matriz A, da definição 1, a diagonal principal é formada pelos elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$.

Exemplo 2.2.4.

Na matriz A a seguir, a diagonal principal é constituída pelos elementos $3, 6$ e 7:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 0 \\ 9 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Chama-se de *traço da matriz* A, o valor da soma de todos os elementos da diagonal principal, o qual indicamos por $tr(A)$. No Exemplo 2.2.4 o traço da matriz A é dado pela soma $(3 + 6 + 7)$, ou seja, $tr(A) = 16$.

2.2.4 Matriz Nula

Quando todos elementos (entradas) de uma matriz são iguais a zero, denomina-se a matriz como *nula*. É comum representar uma matriz nula por 0 (zero), que pode ser denotada por $0 = [0]_{m \times n}$:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

No Exemplo 2.2.5 tem-se algumas matrizes nulas.

Exemplo 2.2.5.

É interessante observar que uma matriz nula pode ser quadrada ou não, como pode ser visto:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2.5 Matriz Identidade

Denomina-se *matriz identidade* ou ainda *matriz unidade*, uma matriz quadrada A em que $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ se $i = j$, ou seja, quando cada entrada da diagonal principal for o número 1 (um) e todos os demais elementos forem nulos:

$$\text{Seja } a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}, \text{ então } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

No Exemplo 2.2.6, são apresentadas algumas matrizes identidades.

Exemplo 2.2.6.

I_1, I_2 e I_4 são as matrizes identidade, respectivamente, de ordem 1, 2 e 4:

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2.6 Matriz Transposta

Seja $A_{m\times n}$ um determinada matriz, com m linha e n colunas, denomina-se *matriz transposta de A* e denota-se por A^t a matriz tal que, para cada elemento a_{ij} pertencente a matriz $A_{m\times n}$ exista b_{ji} pertencente a $A^t_{n\times m}$ de tal modo que $a_{ij} = b_{ji}$. Em outras palavras, a transposta de uma matriz A é a matriz obtida de A, trocando-se, de forma ordenada, as suas linhas por colunas, ou ainda, suas colunas por linhas.

O Exemplo 2.2.7, apresenta dois casos de transposição de matrizes.

Exemplo 2.2.7.

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 9 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \\ 1 & 8 & 10 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 10 & -1 \end{bmatrix}.$$

Reescrevendo cada linha da matriz A como coluna da matriz A^t e cada linha da matriz B como coluna da matriz B^t, obtém-se

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 8 \\ 7 & 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B^t = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \\ 5 & 10 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

que são respectivamente as matrizes transpostas de A e B.

2.2.7 Matriz Simétrica

Dada uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{p \times p}$ em que $a_{ij} = a_{ji}$ para qualquer $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, p\}$, diz-se que A é uma *matriz simétrica*, isto é, $A = A^t$.

No Exemplo 2.2.8, tem-se a matriz A, de ordem 3, igual a sua transposta A^t, portanto A é *simétrica*.

Exemplo 2.2.8.

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$, tem-se $A^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$. Assim, $A = A^t$.

2.2.8 Matriz Antissimétrica

De modo análogo a matriz simétrica, diz-se que uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{p \times p}$ é *antissimétrica*, se $a_{ij} = -a_{ji}$ com $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, p\}$. Desse modo, necessariamente, enquanto as entradas da diagonal principal são nulas, todos os demais elementos dispostos simetricamente em relação a diagonal principal, são opostos. Observa-se que vale a igualdade $A = -A^t$.

Apresenta-se no Exemplo 2.2.9 dois casos de matrizes antissimétricas.

Exemplo 2.2.9.

Nota-se que cada uma das matrizes A e B é igual a oposta de sua transposta:

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ -4 & -6 & 0 \end{bmatrix}$, então $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & -6 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, logo, $A = -A^t$;

seja $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se $B^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, portanto, $B = -B^t$.

2.3 Matrizes Triangulares

Em geral, matrizes quadradas se caracterizam por possuírem todos os seus elementos posicionados abaixo ou acima da diagonal principal nulos.

As matrizes triangulares podem ser divididas em superiores, inferiores ou ainda diagonais.

2.3.1 Matriz Triangular Superior

Chama-se *matriz triangular superior*, a matriz quadrada da forma $A = [a_{ij}]_{p \times p}$ em que $a_{ij} = 0$, se $i > j$, isto é, cujos elementos localizados abaixo da diagonal principal são nulos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3p} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{pp} \end{bmatrix}.$$

A seguir, no Exemplo 2.3.1, tem-se dois casos de matrizes triangulares superiores.

Exemplo 2.3.1.

Observa-se que as matrizes A e B, cada qual, possui um grupo de elementos, possivelmente não nulos, em forma de um triângulo localizado na parte superior direita das mesmas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 13 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 8 & 2 & 1 \\ 0 & 12 & 13 & 50 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.3.2 Matriz Triangular Inferior

Chama-se *matriz triangular inferior* a matriz quadrada da forma $A = [a_{ij}]_{p\times p}$ em que $a_{ij} = 0$, se $i < j$, ou seja, cujos elementos que se localizam acima da diagonal principal são nulos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pp} \end{bmatrix}.$$

No Exemplo 2.3.2, tem-se dois casos de matrizes triangulares inferiores.

Exemplo 2.3.2.

Nota-se que as matrizes A e B, cada qual, possui um grupo de elementos, possivelmente não nulos, em forma de um triângulo localizado na parte inferior esquerda das mesmas:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 13 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -6 & 0 \\ 7 & 3 & 8 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.3.3 Matriz Estritamente Triangular

Uma matriz $A = [a_{ij}]_{p \times p}$ é dita *triangular estritamente superior* quando $a_{ij} = 0$, se $i \geq j$ e, *triangular estritamente inferior* quando $a_{ij} = 0$, se $i \leq j$.

Pode-se observar ainda que além de ser triangular superior ou inferior, deve-se possuir também as entradas da diagonal principal nulas.

Nas representações seguintes, tem-se A, uma matriz triangular estritamente superior enquanto que B é estritamente inferior:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{p3} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

No Exemplo 2.3.3, tem-se dois casos: matriz triangular estritamente superior e inferior.

Exemplo 2.3.3.

Observa-se que A é uma matriz triangular estritamente superior enquanto que B é estritamente inferior:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.3.4 Matriz Diagonal

Chama-se de *matriz diagonal*, a matriz quadrada cujos elementos são todos nulos, exceto as entradas da diagonal principal que podem ser diferentes de zero.

Pode-se observar ainda que, para A ser uma matriz diagonal, é necessário que ela seja triangular superior e inferior concomitantemente, isto é, da forma $A = [a_{ij}]_{p\times p}$ em que, se $i \neq j$, então $a_{ij} = 0$, como na representação,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{pp} \end{bmatrix}.$$

Nota-se que as únicas entradas não necessariamente nulas estão posicionadas na diagonal principal.

No Exemplo 2.3.4 apresenta-se dois casos de matrizes diagonais.

Exemplo 2.3.4.

Percebe-se que A e B são matrizes diagonais de ordem, respectivamente 2 e 3:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2.4 Operações com Matrizes

Dentre as diversas operações que podem ser realizadas com matrizes, apresenta-se aqui as mais básicas como a *adição, subtração* e *multiplicação*, além é claro da *inversão*, abordada mais adiante.

É importante observar que, a subseção 2.2.6 trata-se de *matriz transposta* que, implicitamente pode ser considerada como uma operação, nesse caso, denominada *transposição*, ver página 7 de [2].

2.4.1 Adição de Matrizes

Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, a operação adição ou soma, denotada por $A + B$, é a matriz $A + B = C = [c_{ij}]_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e todo j, onde $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Assim, a soma de duas matrizes A e B, de mesma ordem $m \times n$, é dada por uma matriz C, também com a mesma ordem, onde cada elemento é obtido pela soma dos elementos correspondentes em A e B.

É importante observar que só é possível efetuar a adição de duas matrizes que possuem mesma ordem.

No Exemplo 2.4.1, apresenta-se a operação de soma dentre duas matrizes.

Exemplo 2.4.1.

Dadas as matrizes A e B, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$,

tem-se que a soma $A + B$ é dada por $\begin{bmatrix} 1+2 & -2+(-1) \\ 6+5 & 0+3 \\ 3+2 & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 11 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

Para a adição de matrizes são válidas as seguintes propriedades:

- **Associativa**: $(A + B) + C = A + (B + C)$, para quaisquer matrizes A, B, C do tipo $m \times n$;
- **Comutativa**: $A + B = B + A$, para quaisquer matrizes A e B, que sejam do tipo $m \times n$;
- **Elemento neutro**: Deve existir N tal que $A + N = A$, para qualquer matriz A do tipo $m \times n$;
- **Simétrica**: Dada a matriz $A_{m \times n}$, deve existir A' tal que $A + A' = N$ (elemento neutro).

Observa-se que, caso as entradas das matrizes sejam elementos do conjunto dos números reais, é válida a igualdade $N = 0$, onde 0 é a matriz nula.

Para mais detalhes sobre as propriedades da adição de matrizes, ver [2], página 7.

2.4.2 Multiplicação de Matrizes

Em relação à operação de multiplicação envolvendo matrizes, admite-se ao menos dois tipos: a multiplicação de um número real por uma matriz e a multiplicação de uma matriz por outra.

A seguir, aborda-se cada caso:

A) Produto de um número real por uma matriz

Seja um número real λ e também a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, diz-se que o produto $\lambda \cdot A$ é a matriz $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ tal que cada elemento b_{ij} é obtido pelo produto de λ por a_{ij}, isto é, $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Em outras palavras, multiplicar um número real λ por uma matriz A equivale a multiplicar cada entrada de A pelo número real λ. Assim, obtém-se a matriz $B = \lambda \cdot A$.

No exemplo 2.4.2, apresenta-se o cálculo do produto de um número real por uma matriz.

Exemplo 2.4.2.

Seja o número real $\lambda = 3$ e a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, tem-se que o produto

$$\lambda \cdot A = \begin{bmatrix} 3.2 & 3(-4) \\ 3.5 & 3.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}.$$

Para o produto de um número real por matriz, são válidas, dentre outras, as seguintes propriedades:

- **Elemento neutro**: $1 \cdot A = A$;
- **Associatividade**: $\lambda \cdot (\alpha \cdot A) = (\lambda \cdot \alpha) \cdot A$; onde λ e α são números reais;
- **Distributiva da multiplicação em relação à adição**: $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$, onde λ e α são números reais e A e B matrizes de mesma ordem.

B) Produto entre matrizes

Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n \times p}$, chama-se de *produto* AB, a matriz $AB = C = [c_{ik}]_{m \times p}$ tal que cada um dos seus elementos seja obtido por $a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk}$, ou seja, denotado por

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

É importante observar que o produto entre duas matrizes só é possível, quando o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda. Assim, dada uma matriz $A_{m \times n}$, só será possível o produto $A.B$, se a matriz B possuir exatamente n linhas (que é o número de colunas de A).

No Exemplo 2.4.3, tem-se o produto entre duas matrizes.

Exemplo 2.4.3.

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, tem-se que

$$A{\cdot}B = \begin{bmatrix} (1).(3)+(-2).(1)+(3).(5) & (1).(-1)+(-2).(2)+(3).(4) \\ (0).(3)+(4).(1)+(6).(5) & (0).(-1)+(4).(2)+(6).(4) \\ (1).(3)+(-1).(1)+(0).(5) & (1).(-1)+(-1).(2)+(0).(4) \\ (2).(3)+(0).(1)+(-2).(5) & (2).(-1)+(0).(2)+(-2).(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 7 \\ 34 & 32 \\ 2 & -3 \\ -4 & -10 \end{bmatrix}.$$

Contudo, não existe o produto $B \cdot A$.

Nota-se que no Exemplo 2.4.3, obtém-se o produto $A \cdot B$, entretanto, não é possível obter o produto $B \cdot A$.

Observa-se, ainda no Exemplo 2.4.3, que o produto da matriz $A_{4\times 3}$ pela matriz $B_{3\times 2}$ resulta em uma matriz 2×2, ou seja, com ordem definida pelo número de linhas de A e número de colunas de B.

Quando existente, o produto entre duas matrizes, são válidas, dentre outras, as seguintes propriedades [2]:

- **Comutatividade com a matriz identidade**: $I \cdot A = A \cdot I$, onde I é a matriz identidade de mesma ordem que a matriz quadrada A;

- **Comutatividade com uma matriz nula**: $0 \cdot A = A \cdot 0 = 0$, onde, reciprocamente, o número de colunas da matriz nula 0 é igual ao número de linhas da matriz A;

- **Matriz identidade como elemento neutro**: $I \cdot A = A$, onde I é a matriz identidade de mesma ordem que a matriz quadrada A;

- **Distributiva da multiplicação em relação à adição**: $A{\cdot}(B{+}C) = A{\cdot}B{+}A{\cdot}C$, onde A, B, e C são matrizes tais que as operações são possíveis;

- **Associatividade no produto**: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, onde A, B, e C são matrizes tais que as operações são possíveis.

2.4.3 Subtração de Matrizes

Chama-se *subtração de matrizes* a operação análoga à adição, de modo que dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, a diferença $A - B$, é obtida pela soma $A + (-B)$, onde $-B$ é o produto do número real -1 pela matriz B). Assim, denota-se a subtração $A - B$ como a soma $A + (-B)$.

No Exemplo 2.4.4, apresenta-se a diferença (subtração) entre duas matrizes.

Exemplo 2.4.4.

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 8 \end{bmatrix}$, tem-se que

$$A - B = \begin{bmatrix} -1-1 & 2+1 & 7-0 \\ 1-6 & 0+3 & 6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 \\ -5 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

3 Determinantes

Em um conceito bastante simples, o *determinante* de uma matriz quadrada trata-se do operador que associa a essa matriz um número real. Outrossim, pode-se intuir ainda que associa-se a toda matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ um elemento de $\mathbb{R}$. A esse elemento chama-se determinante de A e, usualmente, denota-se por $det(A)$ ou $|A|$, ver [1] e [2].

Para abordar de forma completa o assunto, faz-se necessário um capítulo a parte, devido a extensibilidade e complexidade do tema. Mas como isso foge ao escopo desse estudo, aborda-se aqui tão somente uma breve explicação para o cálculo do determinante de matrizes quadradas de ordem 1, 2 e 3, que pode ser encontrado no capítulo 2 de [1].

Matriz quadrada de ordem 1:

Para esse caso específico, atribui-se ao determinante da matriz o próprio elemento que a compõe, haja vista que é único:

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$, de ordem 1, tem-se que $det(A) = a_{11}$.

Exemplo 3.0.1.

Este exemplo apresenta o determinante de uma matriz de ordem 1.

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$, então $det(A) = 4$.

Matriz quadrada de ordem 2:

Uma matriz quadrada de ordem 2 possui quatro elementos. Desses, dois estão contidos na diagonal principal e os outros dois estão na diagonal secundária. Posto isso, obtém-se o determinante dessa matriz pela diferença entre os produtos dos elementos da diagonal principal e secundária.

Assim, dada a matriz $A = [a_{ij}]_{2\times2}$, tem-se que $det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

No Exemplo 3.0.2, calcula-se o determinante de uma matriz de ordem 2.

Exemplo 3.0.2.

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, então $det(A) = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 12 - 10 = 2$.

Matriz quadrada de ordem 3:

Para o caso da matriz de ordem 3, pode-se usar, como técnica, a "Regra de Sarrus", ver [1] e [5], que aponta o determinante através das seguintes operações:

1) Duplica-se as duas primeiras colunas ao final da matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

2) Em seguida, faz-se o produto de cada uma das seis diagonais em destaque

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

3) Logo, obtém-se o determinante pela diferença entre a soma dos produtos das diagonais que possuem a mesma direção, ou seja, pela expressão

$$det(A) = (a_{11}.a_{22}.a_{33}+a_{12}.a_{23}.a_{31}+a_{13}.a_{21}.a_{32})-(a_{13}.a_{22}.a_{31}+a_{11}.a_{23}.a_{32}+a_{12}.a_{21}.a_{33}).$$

O Exemplo 3.0.3 mostra o cálculo do determinante de uma matriz de ordem 3, através da *regra de Sarrus*.

Exemplo 3.0.3.

Dada a matriz de ordem 3 A, aplica-se a *regra de Sarrus* a fim de obter-se o seu determinante:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow det(A) = [1.(-1).1+1.0.1+2.5.3]-[2.(-1).1+1.0.3+1.5.1] = 26.$$

Matrizes Quadradas de Ordem Maior que 3: Existem diversas técnicas para se obter o determinante de matrizes de ordem 4 ou ainda superiores, ver [1] e [5]. No entanto, para não estender nesse detalhe, omite-se aqui essa abordagem e trata-se esse caso no capítulo sobre softwares matemáticos, de modo especial, ver o Exemplo 5.2.1.

4 Sistemas Lineares

Definicao 2. *Uma equação linear de n incógnitas é uma equação polinomial de variáveis de 1º grau onde cada termo possui apenas uma incógnita e um coeficiente.*

Definicao 3. *Chama-se de sistema de equações lineares, ou apenas sistema linear o conjunto finito de equações lineares aplicadas num conjunto, igualmente finito, de variáveis.*

O estudo desse capítulo alicerça-se em [1] e [2].

No Exemplo 4.0.1, tem-se a representação de uma sistema linear através da notação comum (*delimitado à esquerda pela abertura de uma chave*).

Exemplo 4.0.1.

$$\begin{cases} 3x + 5y + 18z = 10, \\ 4x - 3y - 7z = -37, \\ x + 3y = 0. \end{cases}$$

De modo simples, entende-se por *sistema de equação linear* o instrumento de modelagem matemática que pode ser utilizado como ferramenta para solução de problemas das mais diversas áreas de conhecimento.

A aplicação desse recurso é bastante útil e difundida entres as diferentes áreas de engenharias, na economia, na administração e em praticamente qualquer situação em que seja possível modelar os contextos em equações. São ainda muito utilizados em problemas computacionais, na programação linear e em problemas de otimização.

Em geral, trata-se da associação de variáveis de algum contexto em diversas equações, onde através da manipulação dos coeficientes, dispostos eficientemente em forma de matriz, chega-se mais rapidamente às soluções investigadas no problema.

Alguns sistemas lineares são possíveis de serem resolvidos e possuem soluções plenamente determinadas, outros apesar de serem possíveis de se resolver, pode-se apenas apontar soluções indeterminadas; que são linearmente dependentes entre si. Por último, tem-se alguns tipos de sistemas que de nenhuma forma possuem soluções, a esses denomina-se sistemas impossíveis. Portanto, tem-se esses três tipos: *Sistema Possível*, *Sistema Possível Indeterminado* e *Sistema Impossível.*

Nessa seção, aborda-se brevemente exemplos de sistemas possíveis e sistemas possíveis indeterminados:

4.1 Sistemas Possíveis Determinados

Chama-se de *sistema possível determinado* ou apenas *possível*, ou ainda *sistema compatível*, o sistema que possui soluções plenamente determinadas.

Para se chegar a essas soluções existem diversas técnicas de resolução. E, apesar de não ser a única forma de resolver, a aplicação de matrizes associada ao sistema é uma das mais eficientes. Para isso, usa-se, quase sempre, técnicas de escalonamento ou ainda a regra de Cramer, dentre outras, ver [2].

No Exemplo 4.1.1, apresenta-se um sistema linear *possível determinado* com 3 incógnitas, e a sua respectiva solução.

Exemplo 4.1.1.

Dado o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 2x + y - z = 1, \\ 3x + 3y - z = 6, \end{cases}$$

observa-se que do mesmo sistema pode-se extrair as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Nota-se que $A \cdot V = B$ descreve exatamente o sistema em questão.

Nessa representação, tem-se: a matriz A formada pelos coeficientes das incógnitas x, y e z; a matriz coluna V que representa as incógnitas propriamente ditas; a matriz B formada pelos termos independentes de cada equação; a matriz E é chamada de *matriz estendida do sistema linear*, a matriz formada pela junção das matrizes A e B (como última coluna). De modo geral, é mais prático usar o sistema de "Eliminação de Gauss" aplicado diretamente nessa matriz para encontrar a solução (ver a página 37 de [2]).

Para encontrar a solução desse sistema, pode-se usar a "Eliminação de Gauss" ou também conhecida como *escalonamento* (ver a página 79 de [1]).

Esse método consiste em, através de sucessivas operações matemáticas básicas (como adição e multiplicação aplicadas às linhas da matriz), transformar, etapa a etapa, a matriz A (dos coeficientes das variáveis) em uma matriz triangular superior. Assim, para última linha obtém-se apenas um único coeficiente associado a uma incógnita. A partir da descoberta do valor dessa primeira incógnita, é possível descobrir o valor de todas as outras das linhas superiores, uma a uma:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \qquad L_2 - 2 \cdot L_1 \to L_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \qquad L_3 - 3 \cdot L_1 \to L_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & -4 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & -4 & 6 \end{bmatrix} \qquad L_3 - \left(\frac{9}{5}\right) \cdot L_2 \to L_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{21}{5} \end{bmatrix},$$

onde L_i representa a i-ésima linha e $aL_i + bL_j \to L_i$ representa uma operação linear de substituição na linha L_i, com a e b números reais.

Dessas operações, chega-se ao sistema

$$
\begin{cases}
x & -2y & +z & = & 0, \\
 & 5y & -3z & = & 1, \\
 & & \frac{7}{5}z & = & \frac{21}{5}.
\end{cases}
$$

Logo, infere-se que a solução é

$$
\begin{pmatrix}
x = 1 \\
y = 2 \\
z = 3
\end{pmatrix}.
$$

4.2 Sistemas Possíveis e Indeterminados

Observa-se, no Exemplo 4.1.1, que é possível determinar precisamente os valores de x, y e z, porque o sistema em questão é *possível determinado*. Entretanto, nem sempre é possível encontrar soluções precisamente determinadas. Em alguns casos, o sistema possui soluções, mas elas são dependentes entre si, isto é, são soluções indeterminadas.

A seguir, no Exemplo 4.2.1, resolve-se um sistema possível indeterminado.

Exemplo 4.2.1.

Dado o sistema de três equações $\begin{cases} x - 2y - z = 0, \\ 3x - y + z = 2, \\ 2x + y + 2z = 2, \end{cases}$

obtém-se, a partir dele, a seguinte matriz estendida $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Com a aplicação do método Guassiano, chega-se em

$$
\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad L_2 - 3 \cdot L_1 \rightarrow L_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2, \end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad L_3 - 2 \cdot L_1 \to L_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad L_3 - L_2 \to L_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, obtém-se

$$\begin{cases} x & -2y & -z & = & 0, \\ & 5y & +4z & = & 2, \\ & & 0 & = & 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x & -2y & -z & = & 0, \\ & 5y & +4z & = & 2. \end{cases}$$

Note que essa última representação possui três incógnitas, mas somente duas equações. Percebe-se ainda que a variável livre nesse caso é o z, então, pode-se tomar $z = \alpha$, e a partir disso obter todas as soluções em função de α.

Na segunda equação do sistema, tem-se

$$\begin{aligned} 5y + 4z &= 2, \\ 5y + 4\alpha &= 2, \\ y &= -\frac{4\alpha - 2}{5}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, na primeira equação, obtém-se

$$
\begin{aligned}
x - 2y - z &= 0, \\
x + 2\left(\frac{4\alpha - 2}{5}\right) - \alpha &= 0, \\
x &= -\frac{8\alpha - 4}{5} + \alpha, \\
x &= -\frac{3\alpha - 4}{5}.
\end{aligned}
$$

E, por fim, chega-se na solução

$$
\left(\begin{array}{l}
x = -\frac{3\alpha-4}{5} \\
y = -\frac{4\alpha-2}{5} \\
z = \alpha
\end{array}\right).
$$

Para fins de simplificação, pode-se utilizar, nos próximos capítulos, as siglas SPD, SPI e SI para fazer referência às classificações *sistema possível determinado*, *sistema possível indeterminado* e *sistema impossível*, respectivamente.

5 Softwares Matemáticos

Chama-se de "software matemático" um sistema computacional direcionado para processar operações matemáticas, efetuar cálculos com figuras e sólidos, organizar dados, prover soluções para problemas, apresentar representações gráficas e muitas outras tarefas comuns ao estudo de matemática, ver [6] e [7].

Algumas vantagens de usar um software matemático são: a grande capacidade que o computador tem de processar cálculos muito extensos em questão de frações de segundo; a maior precisão na apresentação gráfica; a diminuição de erros devido às falhas de cálculos, além de outras.

Apresenta-se, nessa seção, dois softwares matemáticos que são úteis para a resolução de problemas modelados através de sistemas lineares.

5.1 *Scilab*

O *SciLab* é um software científico matemático usado para trabalhar nos mais diversos conteúdos da matemática com forte inclinação para o cálculo numérico e a álgebra linear. Ele é um software livre, multiplataforma e um ótima alternativa para a substituição de renomados e tradicionais softwares proprietários como, por exemplo, o Matlab [8], ver [9].

Segundo a própria definição disponível no sítio oficial do *Scilab*[10], tem-se que:

> *"Scilab is free and open source software for numerical computation providing a powerful computing environment for engineering and scientific applications."*

Que em uma tradução livre, pode ser transcrito como

> *"Scilab é um software livre e de código aberto para computação numérica fornecendo um poderoso ambiente de computação para engenharia e aplicações científicas."*

5.1.1 Iniciando com o *Scilab*

É possível usar o *Scilab* em poucos minutos de aprendizado. Para isso, é necessário apenas aprender alguns conceitos e comandos básicos já bem difundidos e comuns a outros softwares semelhantes, ver [11].

Nesse texto, direciona-se o enfoque para o estudo de matrizes, sistemas lineares e álgebra linear como um todo. Portanto, apresenta-se aqui, de modo bem simples, alguns recursos, comandos e técnicas inerentes e suficientes para esse fim.

5.1.2 Obtendo e Instalando o *Scilab*

É possível fazer o download (baixar o programa) diretamente na página oficial http://www.scilab.org e instalá-lo em diversos sistemas operacionais como o Windows, Mac OS e distribuições baseadas em GNU/Linux. Entretanto, usa-se aqui, para fins de apresentação, o sistema operacional Ubuntu 16.04 LTS, que é uma distribuição GNU/Linux bem conhecida na atualidade, por sua simplicidade de uso bem como pela sua estabilidade.

Apesar de existirem diversas maneiras de se obter e instalar o *Scilab* numa distribuição Linux, faz-se aqui no Ubuntu, o uso da mais simples delas: através da central de aplicativos. Para isso, basta ir até a central de aplicativos do Ubuntu, digitar "scilab" no campo de busca e assim que for encontrado, clicar no botão instalar e pronto. Isto é tudo. A partir daí, já se tem toda a suite *Scilab* instalada, incluindo o cliente de terminal ou console, bem como uma interessante interface gráfica para facilitar a utilização de ferramentas de produtividade.

Na Figura 5.1.1, tem-se uma noção dos aplicativos que são instalados nessa ação.

Figura 5.1.1: Aplicativos do *Scilab*.

5.1.3 Usando o *Scilab*

Existem basicamente três maneiras de se utilizar o *Scilab*:

1. Usando diretamente pelo console, ou terminal, ou ainda prompt do sistema operacional, como mostra a Figura 5.1.2;

2. Através da interface gráfica que dispõe de recursos mais accessíveis a usuários iniciantes, apresentada na Figura 5.1.3;

3. Por meio de scripts (arquivos em texto) de códigos já definidos que são executados pelo *Scilab*, permitindo assim a interação com o usuário.

Tem-se, nas figuras seguintes, uma breve apresentação desses recursos:

Para utilizar o *Scilab*, é necessário aprender alguns comandos básicos, como +, - , * e / que representam, respectivamente, as operações de *adição, subtração, multiplicação*

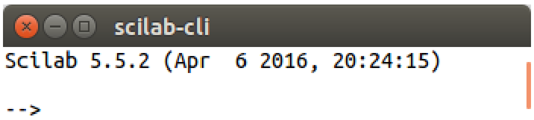

Figura 5.1.2: *ScilabCli* - *Scilab* no Console.

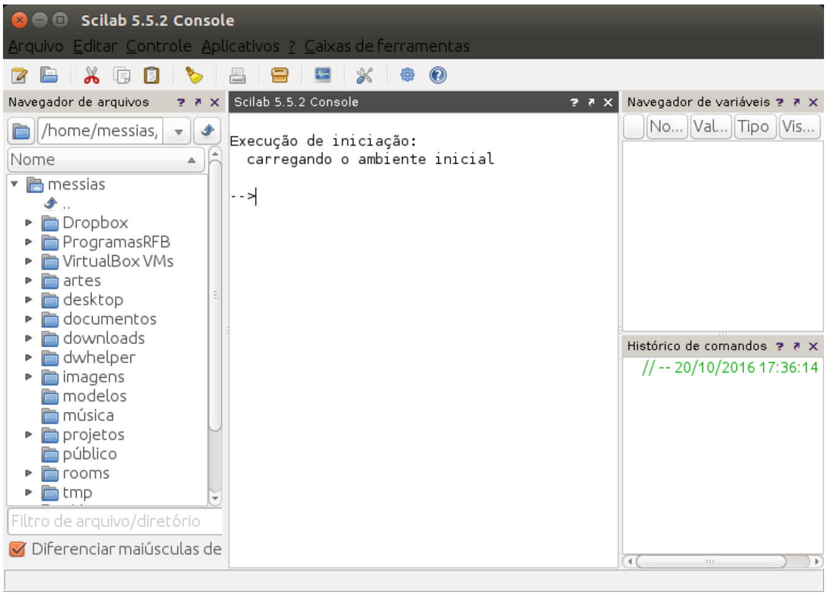

Figura 5.1.3: *Scilab* - Interface Gráfica do Sistema.

e divisão. Além desses, apresenta-se aqui uma pequena lista de comandos relativos às operações com matrizes e sistemas de equações lineares.

Comandos	Ação / Descrição
A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]	Cria a matriz $A_{3\times3}$ com as entradas "1, 2, 3, ... ,9"
zeros(3,4)	Cria uma matriz nula com três linha e quatro colunas
zeros(A)	Cria uma matriz nula com a mesma ordem da matriz A
ones(2,3)	Cria uma matriz 2x3 com todos os elementos iguais a 1
ones(A)	Cria uma matriz unitária com a mesma ordem da matriz A
eye(2,2)	Cria uma matriz identidade de ordem 2
eye(A)	Cria uma matriz identidade com o mesmo tipo da matriz A
A + B	Obtém a soma da matriz A com a matriz B
A * B	Obtém o produto da matriz A pela B
A'	Obtém a transposta da matriz A
diag(A)	Obtém a diagonal principal da matriz A
det(B)	Calcula o determinante da matriz B
inv(B)	Calcula a matriz inversa de A
rref(A)	Resolve um sistema linear através da matriz estendida
linsolve(A, -B)	Resolve o sistema A.X = B (onde X é matriz das incógnitas)

Tabela 5.1.1: Alguns comando do *Scilab* para trabalhar com matrizes.

Na Figura 5.1.4, encontra-se uma demonstração de cada comando presente na lista da Tabela 5.1.1, com exceção dos dois últimos que são demonstrados a seguir, para a resolução de sistemas lineares.

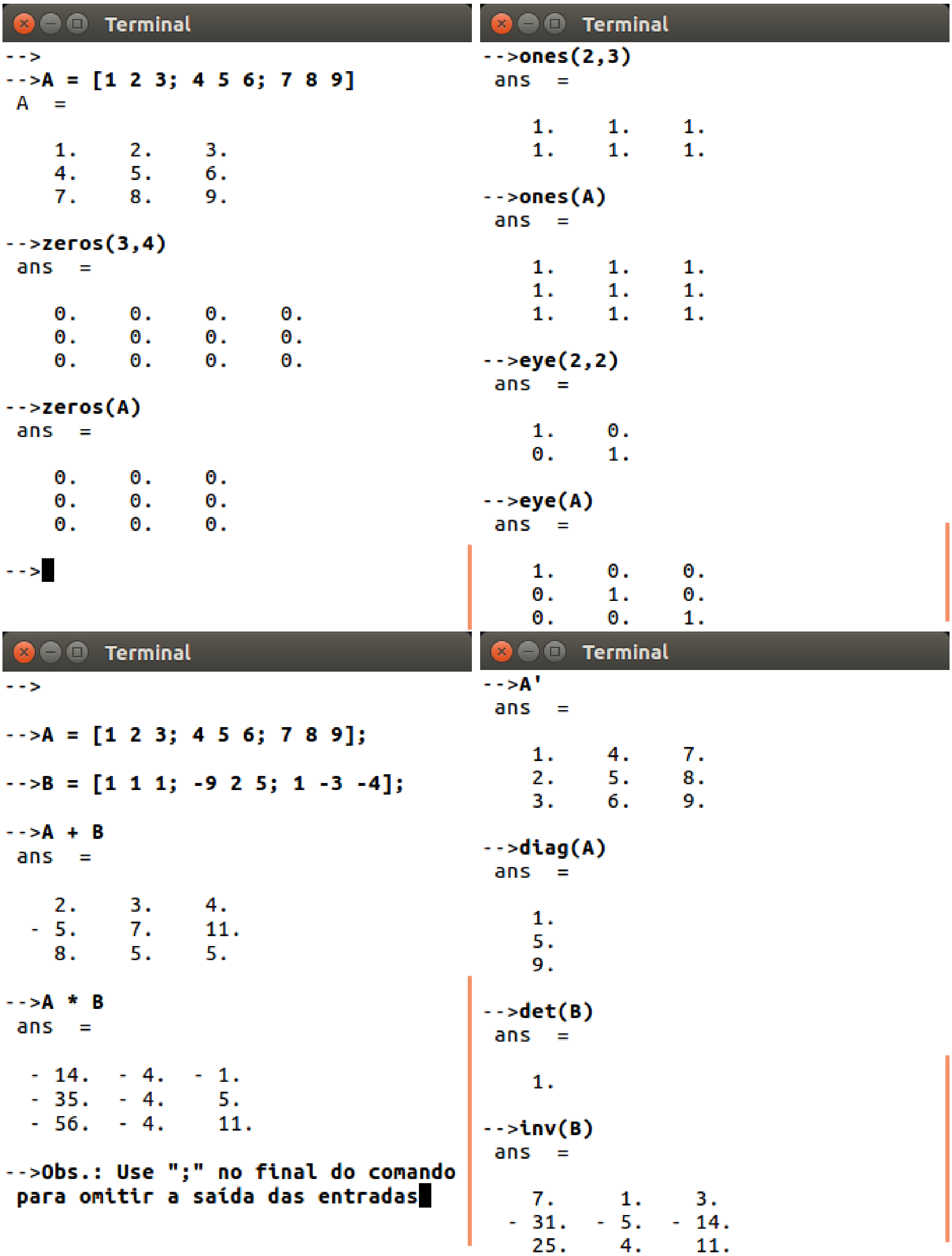

Figura 5.1.4: Demonstração dos comandos da lista.

5.1.4 Resolvendo Sistemas Lineares com *Scilab*

Há algumas maneiras de se resolver sistemas lineares usando o *Scilab*. No entanto, elas se mostram mais eficientes para os sistemas possíveis e determinados.

Para exemplificar, resolve-se passo a passo, no Exemplo 5.1.1 o mesmo sistema linear proposto no Exemplo 4.0.1 da seção 4.

Exemplo 5.1.1.

Do sistema em questão, dado por $\begin{cases} 3x + 5y + 18z = 10, \\ 4x - 3y - 7z = -37, \\ x + 3y = 0, \end{cases}$

pode-se extrair as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 18 \\ 4 & -3 & -7 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 10 \\ -37 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } E = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 18 & 10 \\ 4 & -3 & -7 & -37 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O método de resolução aqui faz uso do scilab-cli, ou seja, o console e da entrada direta dos dados dessas matrizes.

Observa-se, a princípio, que o determinante da matriz A é diferente de zero e o sistema em questão pode ser escrito, através das matrizes, como

$$A \cdot V = B.$$

Multiplicando pela inversa de A nos dois membros dessa igualdade, tem-se

$$A^{-1} \cdot A \cdot V = A^{-1} \cdot B.$$

Como $A^{-1} \cdot A$ resulta na matriz identidade I_3 , então obtém-se

$$I_3 \cdot V = A^{-1} \cdot B$$

e devido ao produto $I_3 \cdot V = V$, logo tem-se que

$$V = A^{-1} \cdot B.$$

Assim sendo, no *Scilab*, pode-se fazer do seguinte modo:

- **1º passo**: *Entrar com a matriz* **A = [3 5 18; 4 -3 -7; 1 3 0];**
- **2º passo**: *Entrar com a matriz* **B = [10; -37; 0];**
- **3º passo**: *Obter a matriz V através do comando* **V = inv(A) * B**.

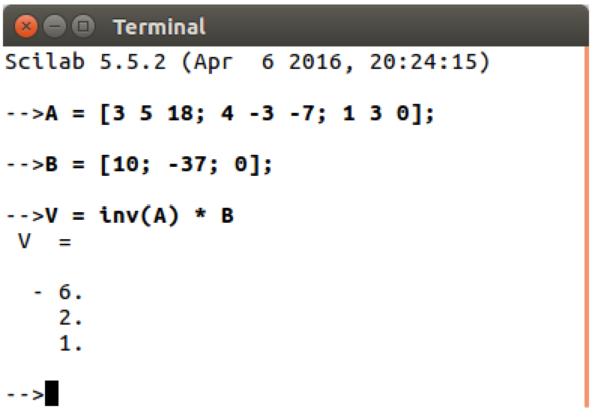

Figura 5.1.5: *Scilab* - Resolvendo com V = inv(A) * B.

Pode-se observar, na figura 5.1.5, que a operação apresenta a seguinte solução

$$\begin{cases} x = -6, \\ y = 2, \\ z = 1. \end{cases}$$

Ainda é possível resolver o mesmo problema através da matriz E, ou seja, da matriz estendida do sistema, juntamente com o comando "**rref()**", do scilab. Desse modo, no Exemplo 5.1.2, resolve-se em apenas dois passos:

- **1º passo:** *Entrar com a matriz* **E = [3 5 18 10; 4 -3 -7 -37; 1 3 0 0];**
- **2º passo:** *Resolver através do comando* **V = rref(E)**.

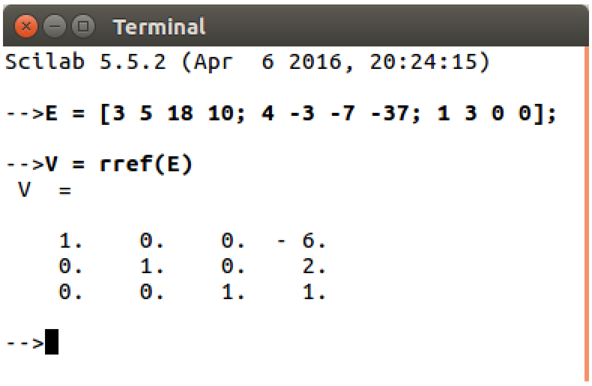

Figura 5.1.6: *Scilab* - Resolvendo com o comando rref().

Exemplo 5.1.2.

Observa-se na Figura 5.1.6, que a matriz V obtida é a matriz final do processo de escalonamento. V possui a matriz identidade de ordem 3 nas três primeiras colunas e as soluções para as incógnitas x, y e z na quarta coluna.

É importante lembrar que a matriz estendida E é formada pelos coeficientes das variáveis nas primeiras colunas e pelos termos independentes na última coluna.

Como última sugestão, é possível resolver esse sistema de outro modo. Para isso, utiliza-se, no *Scilab*, o comando **"linsolve"**. Com esse comando, procede-se tal como no Exemplo 5.1.3:

Exemplo 5.1.3.

Sabe-se que esse sistema pode ser escrito pela equação matricial

$$A \cdot V = B.$$

Então, subtraindo-se a matriz B em ambos os membros dessa igualdade, tem-se

$$A \cdot V - B = 0.$$

Com o comando "linsolve(A, -B)", resolve-se a equação passando, como parâmetros, a matriz A e a matriz B, já que ficam implícitas as incógnitas do sistema.

Para isso, segue-se três passos:

- **1º passo:** *Entrar com a matriz* **A = [3 5 18; 4 -3 -7; 1 3 0];**

- **2º passo:** *Entrar com a matriz* **B = [10; -37; 0];**

- **3º passo:** *Resolver através do comando* **V = linsolve(A,-B).**

Na Figura 5.1.7, observa-se a solução apresentada, de forma direta, na matriz V.

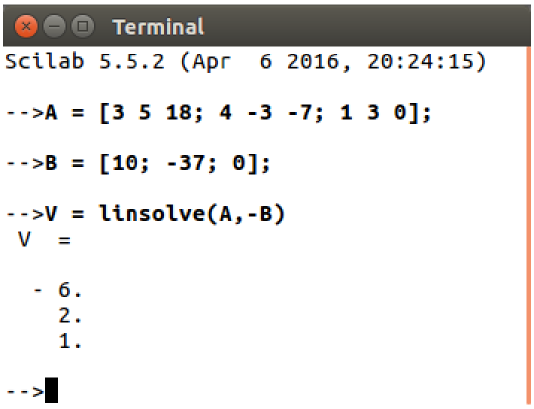

Figura 5.1.7: *Scilab* - Resolvendo com o comando linsolve(A,-B).

5.2 *Maxima*

Maxima é um poderoso sistema computacional algébrico com inúmeras funções relativas às mais diversas áreas da álgebra, do cálculo e de outros ramos da Matemática. Assim como o *Scilab*, ele também é um software livre, multiplataforma e representa uma ótima alternativa para a substituir grandes softwares proprietários como por exemplo, o *Wolfram Mathematica* [12].

Segundo a própria definição encontrada no sítio oficial do *Maxima* [13], tem-se que

> *"Maxima is a system for the manipulation of symbolic and numerical expressions, including differentiation, integration, Taylor series, Laplace transforms, ordinary differential equations, systems of linear equations, polynomials, sets, lists, vectors, matrices and tensors. Maxima yields high precision numerical results by using exact fractions, arbitrary-precision integers and variable-precision floating-point numbers. Maxima can plot functions and data in two and three dimensions.".*

Que em uma tradução livre, pode ser transcrito como

> *"Maxima é um sistema para manipulação de expressões algébricas e numéricas, incluindo derivação, integração, séries de Taylor, transformações de Laplace, equações diferenciais ordinárias, sistemas de equações lineares, polinômios, conjuntos, listas, vetores, matrizes e tensores. O Maxima consegue apresentar resultados numéricos de alta precisão usando frações exatas, inteiros de precisão arbitrária e números de ponto flutuante de precisão variável. Além disso, pode plotar funções e dados em duas e três dimensões.".*

Pela descrição acima, percebe-se que se trata de um poderoso software com ferramentas bastante abrangentes e ao mesmo tempo precisas.

5.2.1 Obtendo e Instalando o *Maxima*

Para instalar o *Maxima*, basta fazer o download do instalador diretamente na página oficial http://maxima.sourceforge.net. Existem versões para os mais diversos sistemas operacionais como o Windows, Mac OS e distribuições baseadas em GNU/Linux. Entretanto, para fins de estudo dessa sessão, usa-se novamente o sistema operacional Ubuntu 16.04 LTS, por sua simplicidade e estabilidade.

Existem alguns modos diferentes de obter e instalar o *Maxima* numa distribuição Linux, ver [14]. No entanto, no Ubuntu, uma das mais fáceis formas de se instalar é através da *central de aplicativos* ou "Ubuntu Software". Para isso, basta ir até a central de aplicativos do Ubuntu, digitar "maxima" no campo de busca e assim que aparecer a opção *"Maxima Algebra System"*, como na Figura 5.2.1 clicar no botão instalar e pronto.

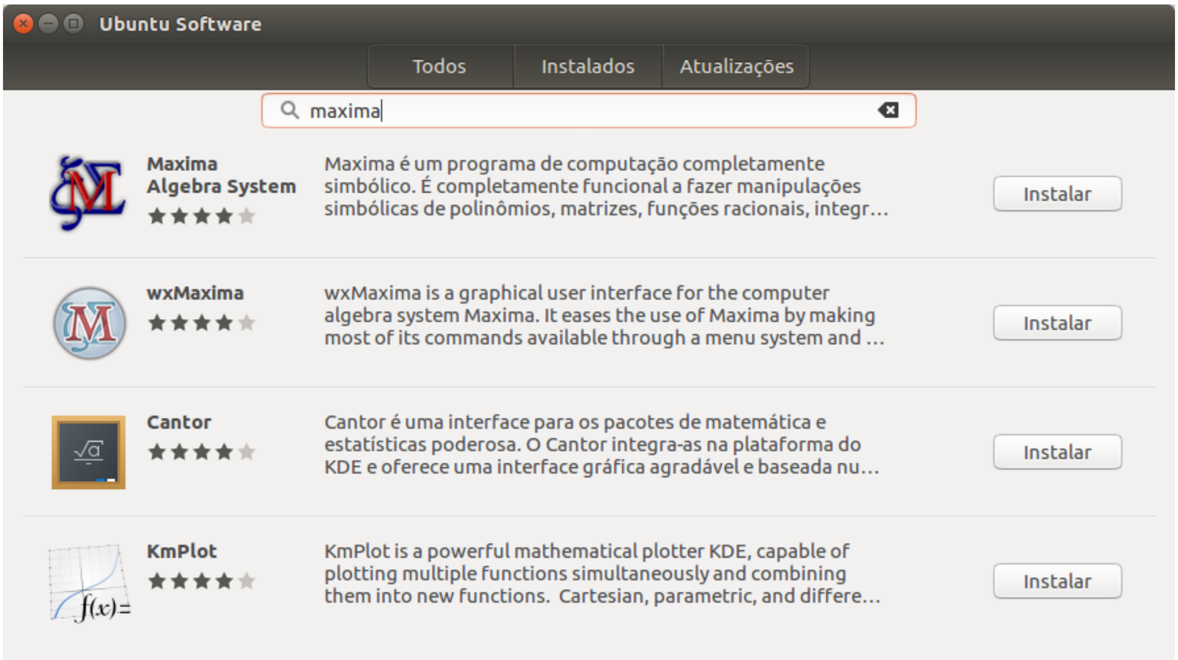

Figura 5.2.1: Instalação do *Maxima* no Ubuntu.

A partir daí, já se tem instalado o software principal, incluindo um console próprio, como mostra a Figura 5.2.2, e um browser (navegador de arquivos) que na primeira utilização já abre automaticamente um arquivo de ajuda e guia de utilização, como pode ser visto na Figura 5.2.3.

É importante observar que existem outras opções a serem instaladas, como a *"wx-Maxima"* que provê uma rica e completa interface gráfica para utilizar o *Maxima* de forma mais visual e ao mesmo tempo mais simples para usuários iniciantes. Contudo, dispensa-se aqui essa opção, já que é também muito prático usar o *Maxima* através do console próprio.

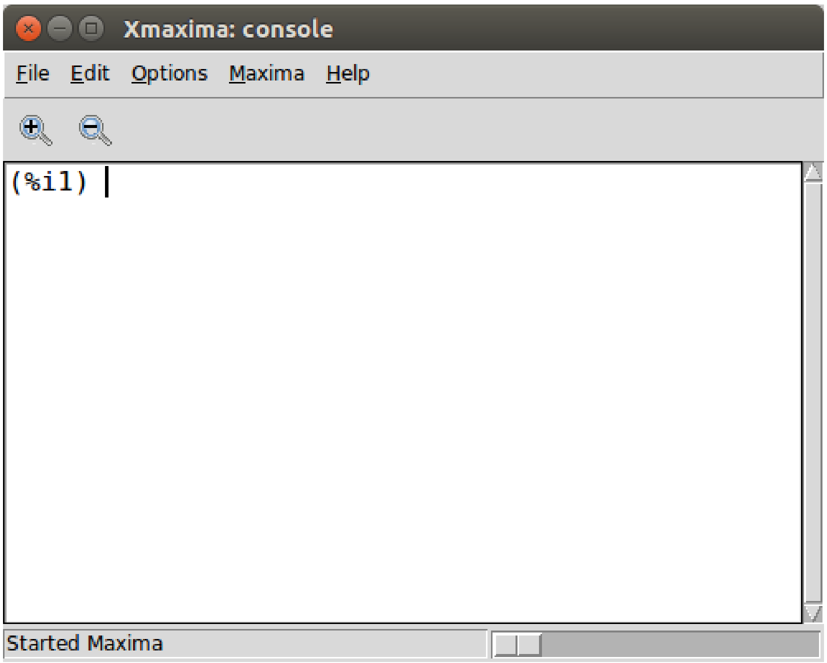

Figura 5.2.2: *Maxima* - Console.

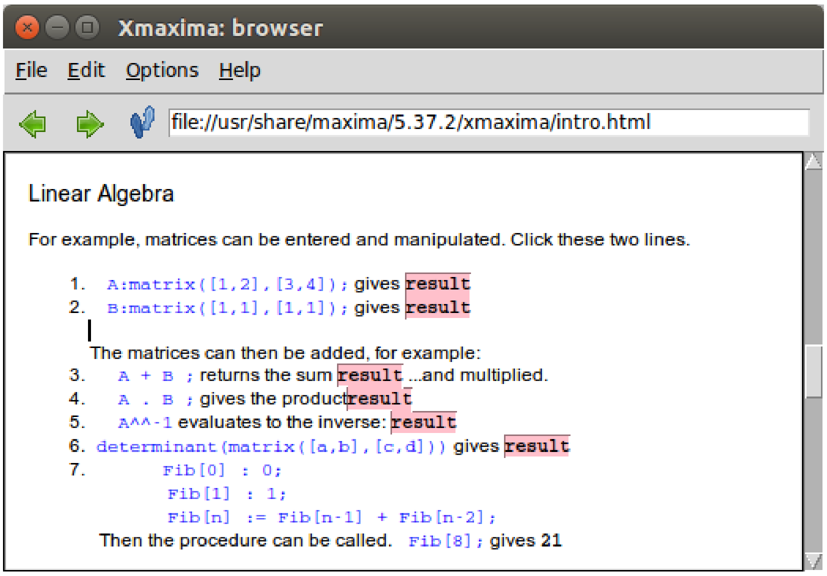

Figura 5.2.3: *Maxima* - Navegador com manual de ajuda (em inglês).

5.2.2 Conhecendo o *Maxima*

Embora, o *Maxima* possua tantas ferramentas e funcionalidades, esse estudo concentra-se em aplicações voltadas para a Algebra Linear e, mais precisamente, ao contexto do estudo de matrizes e sistemas lineares.

Além das operações básicas inerentes a todos os bons sistemas computacionais algébricos, destaca-se aqui alguns comandos úteis para se trabalhar com matrizes e sistemas lineares.

Comandos	Ação / Descrição
A:matrix([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]);	Cria a matriz A com os elementos de 1 a 9.
2*A;	Multiplica o número real 2 pela matriz A.
rowswap(A, 1, 3);	Troca, na matriz A, a linha 1 pela 3.
ident(n);	Cria a matriz identidade de ordem n.
A+B;	Obtém a soma da matriz A com a matriz B.
A.B;	Obtém o produto da matriz A pela B.
transpose(A);	Retorna a transposta da matriz A.
triangularize(A);	Retorna a forma triangular da matriz A.
echelon(A);	Retorna a forma escalonada da matriz A.
determinant(A);	Calcula o determinante da matriz A.
invert(A);	Calcula a matriz inversa de A.
solve([x+5=12],[x]);	Resolve a equação linear de incógnita x.
linsolve([x+y=12,2*x-y=3],[x,y]);	Resolve o sistema linear (incógnitas x e y).

Tabela 5.2.1: *Maxima* - Alguns comandos para matrizes e sistemas lineares.

É importante observar que todo comando digitado diretamente no console do *Maxima* deve ser encerrado com ";" (ponto e vírgula). Isso vale até mesmo para comandos que ocupam mais de uma linha.

Pode-se ver, na Figura 5.2.4, alguns comandos presentes na Tabela 5.2.1.

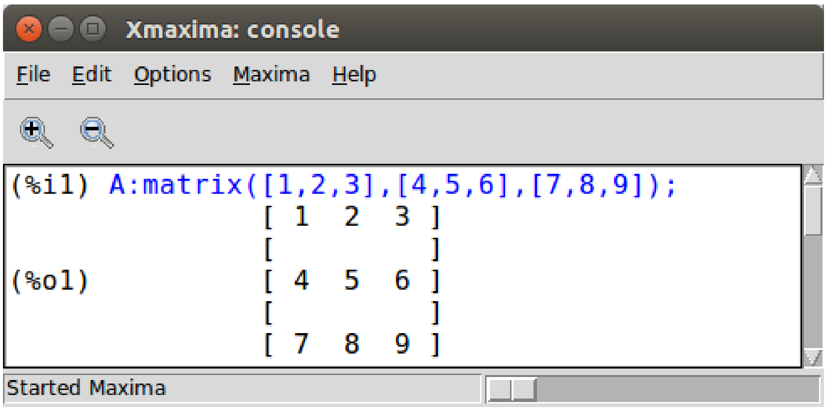

Figura 5.2.4: *Maxima* - Alguns comandos com matrizes.

Para melhor compreensão do que é exibido no console, toda linha de entrada tem como primeiros caracteres, entre parênteses, o símbolo “%” (porcentagem), a letra “i” e um número indicando a linha de entrada da qual se trata, enquanto que nas linha de saída a letra “i” é substituída pela letra “o”. Isso é bem útil quando se digita mais de um comando em uma mesma tela e se quer distinguir seus respectivos retornos, como na Figura 5.2.5.

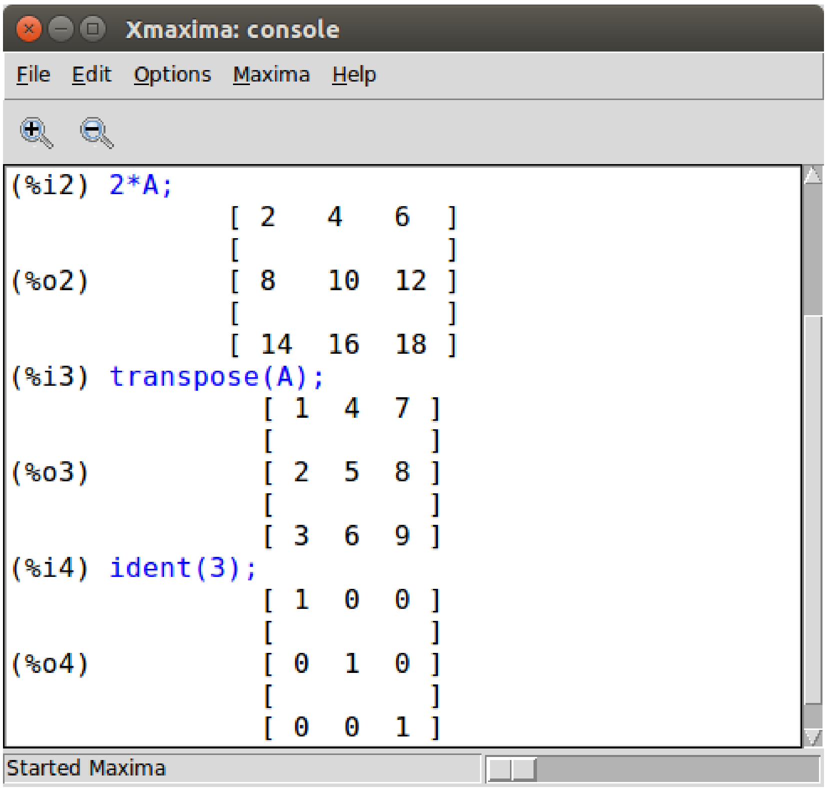

Figura 5.2.5: *Maxima* - Diferenciação dos comandos e retornos.

Além disso, no console próprio do *Maxima*, normalmente a fonte de um comando de entrada aparece colorida para proporcionar um entendimento rápido dos retornos.

É possível ainda, com uma única linha de entrada, passar mais de um comando e, consequentemente, obter mais de uma linha no retorno. Basta, para isso, separar cada comando por ";" (ponto e vírgula), como pode ser ver na Figura 5.2.6.

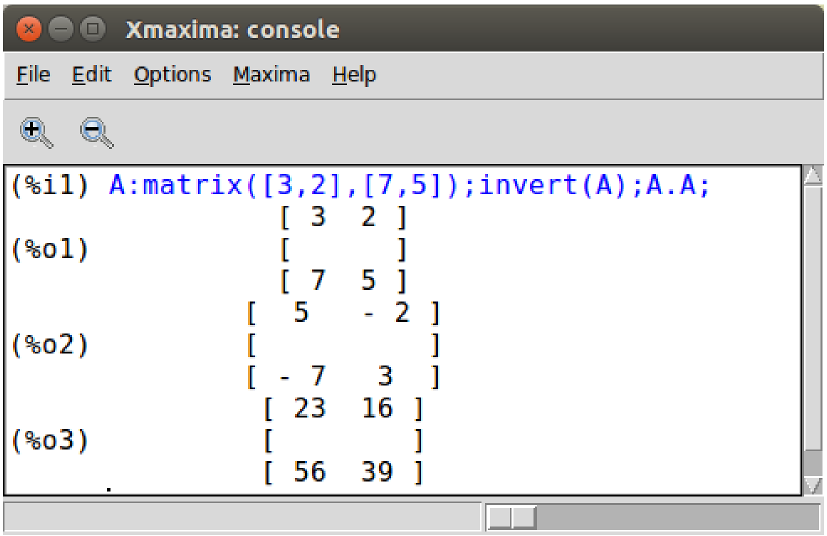

Figura 5.2.6: *Maxima* - Múltiplos retornos.

5.2.3 Calculando Determinantes com o *Maxima*

Na seção 3 (Determinantes) apresenta-se alguns modos manuais de se calcular o determinante de uma matriz quadrada. Contudo, dependendo das dimensões da matriz, o processo manual torna-se demasiadamente cansativo e improdutivo, além do quê o risco de se cometer algum erro durante os cálculos é muito maior.

Nesse ponto, softwares como o *Maxima* se mostram excelentes ferramentas. Com apenas um comando bem simples é possível obter o determinante de uma matriz quadrada de qualquer ordem. Portanto, refaz-se aqui o Exemplo 3.0.3, onde através da *Regra de Sarrus* calcula-se o determinante da matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

No *Maxima*, obtém-se o determinante de uma matriz através do comando **determinant()**. De forma rápida e direta, com esse simples comando, é possível calcular o determinante da matriz de ordem 3, como mostra a Figura 5.2.7.

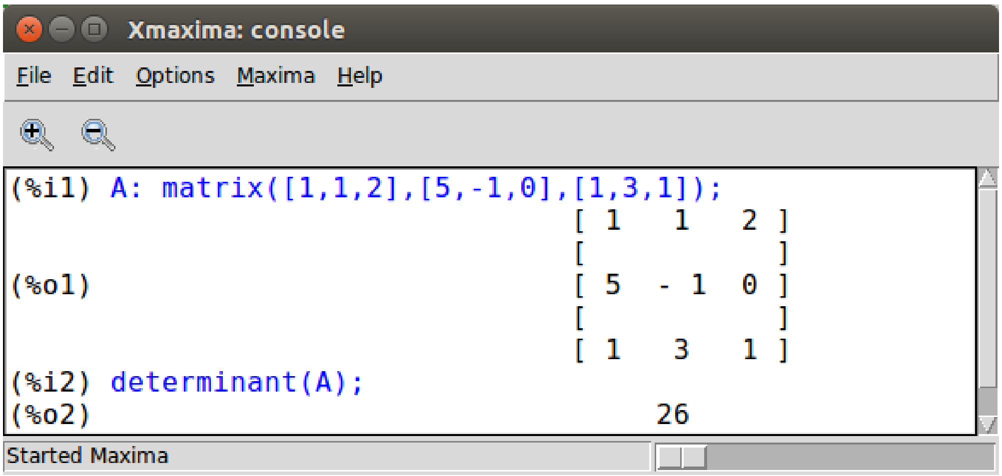

Figura 5.2.7: *Maxima* - Calculando determinante.

Agora, no Exemplo 5.2.1 calcula-se o determinante de uma matriz de ordem 5. Para casos como esse, o cálculo do determinante por processos manuais é bastante custoso e apresenta um grande risco de se cometer erros, haja vista a enorme quantidade de cálculos que precisam ser efetuados. Considera-se para esse exemplo a matriz a seguir.

Exemplo 5.2.1.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & -1 & -5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Apesar da matriz possuir 5 linhas e 5 colunas, o comando é o mesmo usado anteriormente. Isto é, não há diferença no cálculo de determinantes para qualquer ordem de matriz quadrada, quando se utiliza o *Maxima*.

Na Figura 5.2.8, pode-se ver o processo.

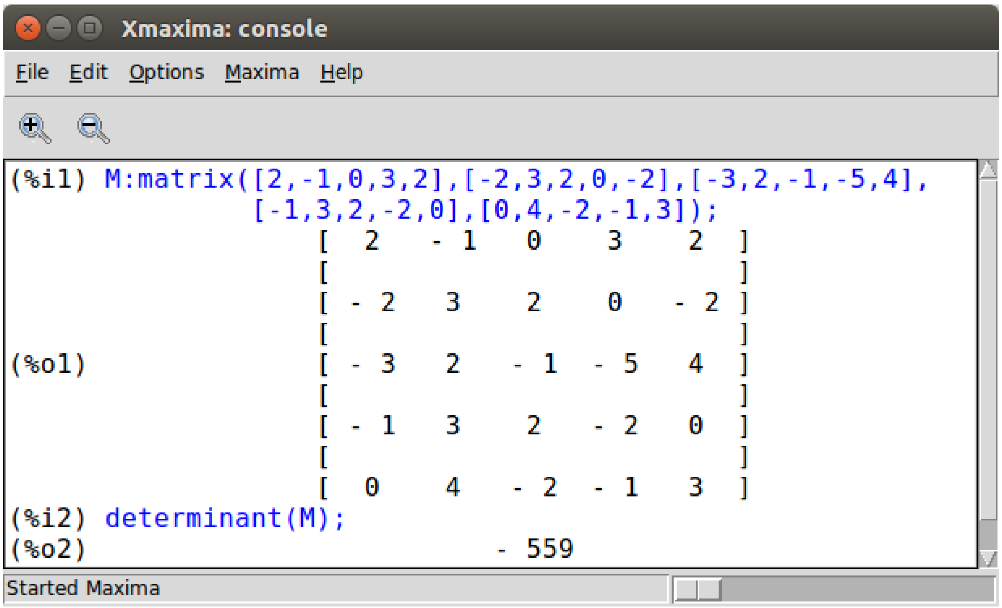

Figura 5.2.8: *Maxima* - Determinante de matriz de ordem 5.

Portanto, calcular determinantes no *Maxima* é um processo simples, objetivo e eficiente.

5.2.4 Resolvendo Sistemas Lineares com o *Maxima*

Na seção anterior, usa-se o *Scilab* para a resolução de sistemas lineares. Contudo, há a restrição de se resolver apenas sistemas possíveis e determinados. Nesse aspecto, o *Maxima* possui a enorme vantagem de manipular variáveis e incógnitas, inclusive apresentando-as no retorno das soluções.

Portanto, com o *Maxima* é possível resolver sistemas lineares possíveis e indeterminados, ou seja, com variáveis interdependentes.

Na subseção 4.2 sobre *Sistemas Lineares Possíveis e Indeterminados*, resolve-se o Exemplo 4.2.1 através do método *Guassiano*. No entanto, observa-se que além de trabalhoso, muitas vezes, dependendo das dimensões do sistema, essa solução manual torna-se impraticável devido a sua extensibilidade e complexidade. É exatamente em casos como esse que a utilização de um software de computação algébrica se justifica totalmente.

Resolve-se novamente esse mesmo sistema do Exemplo 4.2.1, porém agora através do comando **"linsolve"**, do *Maxima*.

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0, \\ 3x - y + z = 2, \\ 2x + y + 2z = 2. \end{cases}$$

Para isso, basta um único passo: Entrar comando **"linsolve"**, passando como parâmetros as equações do sistema acima e as respectivas variáveis.

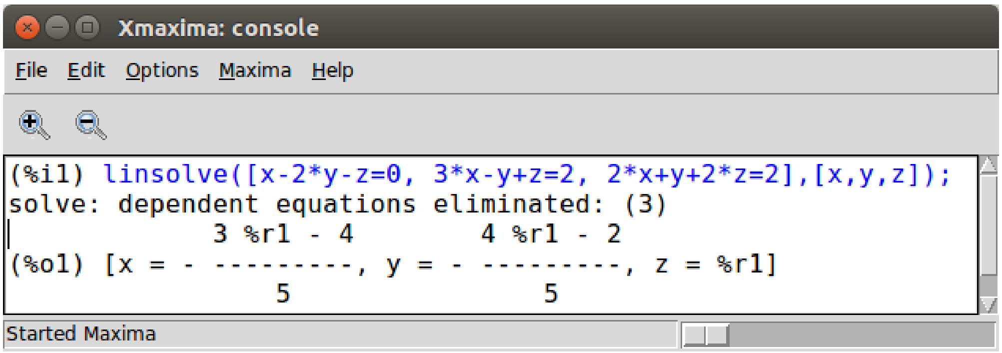

Figura 5.2.9: *Maxima* - Resolvendo um sistema indeterminado.

Nota-se, na Figura 5.2.9, que aparece, na solução, a sequência "%r1" em cada variável. E, se comparada com a solução obtida pelo processo manual executada no Exemplo 4.2.1, na subseção 4.2, percebe-se que se trata da variável de dependência α,

$$\begin{pmatrix} x = -\frac{3\alpha - 4}{5} \\ y = -\frac{4\alpha - 2}{5} \\ z = \alpha \end{pmatrix}.$$

As soluções são idênticas, inclusive com a identificação da variável livre z, onde se atribuiu α. Portanto, a utilização do *Maxima* para resolver sistemas lineares possíveis e indeterminados é bastante eficaz e objetiva.

6 Soluções Gráficas para Sistemas Lineares

Nesta seção, apresenta-se alguns métodos de investigação para as soluções de sistemas lineares de duas e três equações através da representação gráfica de suas equações. Para tanto, utiliza-se os softwares abordados na seção 5 que podem representar graficamente cada sistema através dos seus recursos de plotagem de gráficos de funções e superfícies [15].

Em particular, aborda-se aqui os sistemas duas incógnitas representados no plano bidimensional e também os sistemas de três incógnitas com representação no espaço tridimensional.

6.1 Soluções Gráficas para Sistemas de Duas Equações

Considere um sistema linear com duas equações e, naturalmente, com duas incógnitas. Desse modo, é possível associar a cada equação, uma reta tal que, a expressão de cada equação seja exatamente a equação da reta em questão, como em [2], página 41.

Exemplo 6.1.1.

Nesse exemplo, cada equação do sistema a seguir representa uma reta no plano XY.

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x - 3y = 6. \end{cases}$$

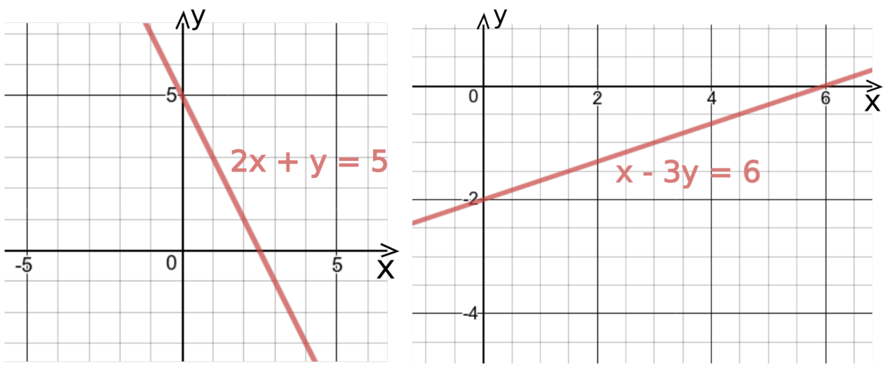

Figura 6.1.1: Representação gráfica das equações do sistema presente no Exemplo 6.1.1.

Pode-se representar graficamente cada uma dessas equações no plano de coordenadas cartesianas. Assim, percebe-se que cada uma delas trata-se de uma reta, como mostra a figura 6.1.1.

Assim, para as posições relativas das retas, têm-se as três seguintes possibilidades, [16]: *concorrentes, coincidentes e paralelas*, ver [17]. É interessante observar que para cada uma dessas possibilidades, haverá uma implicação direta no **tipo** de sistema linear representado:

1. **Concorrentes:** Devido à interseção entre as retas ser um ponto, então, há um (x_1, y_1) pertencente a determinada reta e (x_2, y_2) pertencente a outra reta tal que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Isso significa que haverá uma única solução para esse caso, ou seja, ele é **um sistema possível e determinado**.

2. **Coincidentes:** Se as retas coincidem, cada ponto de uma reta é também ponto da outra. Nesse caso, o sistema admite infinitas soluções, pois qualquer par ordenado que satisfaz determinada equação também é solução da outra equação, ver página 44 de [18]. Assim, essas retas representam um **sistema possível indeterminado**.

3. **Paralelas:** Nesse caso, como não há nenhum ponto em comum entre as retas, não haverá sequer um par ordenado (x_1, y_1) de alguma equação que também satisfaça a outra equação. Desse modo, por não possuir nenhuma solução, trata-se de um **sistema impossível**.

A seguir, apresenta-se diversos exemplos de sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas que exemplificam essas três condições.

Observa-se, no Exemplo 6.1.2, um sistema possível e determinado.

Exemplo 6.1.2.

Considere o seguinte sistema linear de duas equações

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x - y = 1. \end{cases}$$

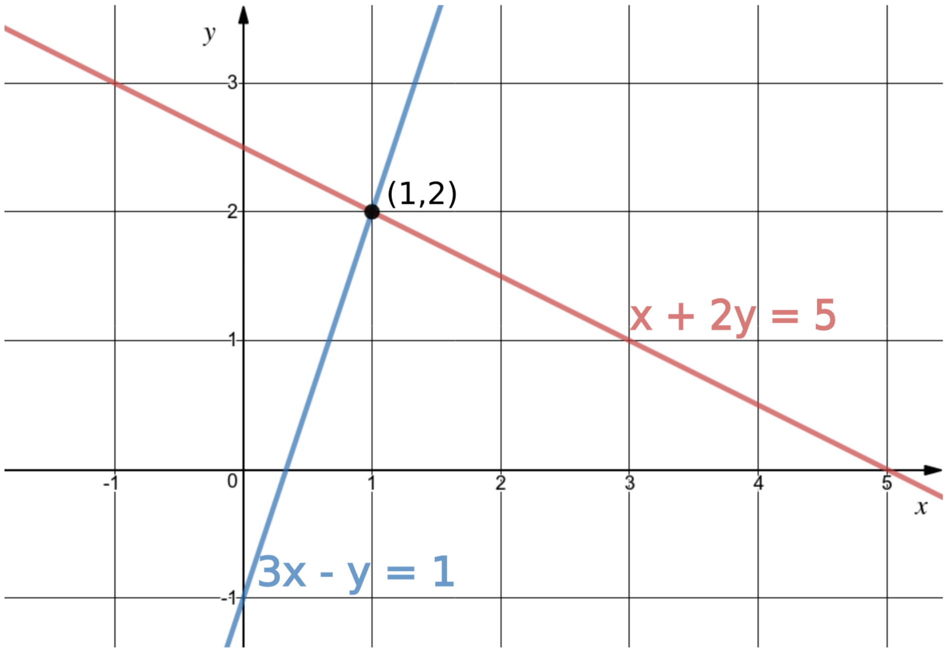

Figura 6.1.2: Representação gráfica do sistema presente no Exemplo 6.1.2.

O gráfico da Figura 6.1.2 ilustra a representação geométrica desse sistema com o esboço das retas de cada equação.

Nota-se que cada equação tem sua representação gráfica dada por uma reta e, no ponto de coordenadas $(1, 2)$, há a interseção dessas retas. Assim, as retas são concorrentes nesse ponto que é exatamente a solução do sistema em questão. Portanto, como as retas possuem apenas esse ponto em comum, consequentemente os sistema possui uma única solução, ou seja, é um sistema possível e determinado.

A seguir, observa-se a representação de um sistema possível indeterminado.

Exemplo 6.1.3.

Considere o seguinte sistema linear de duas equações

$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 3x + 6y = 12. \end{cases}$$

Na Figura 6.1.3, esboça-se, em dois planos separados, o gráfico de cada equação do sistema presente no Exemplo 6.1.3. Assim, é possível perceber que se trata de duas retas que passam exatamente nos mesmos pontos do plano. Isso se deve ao fato de que suas equações, em suma, são idênticas e, portanto, as retas dessas equações são coincidentes.

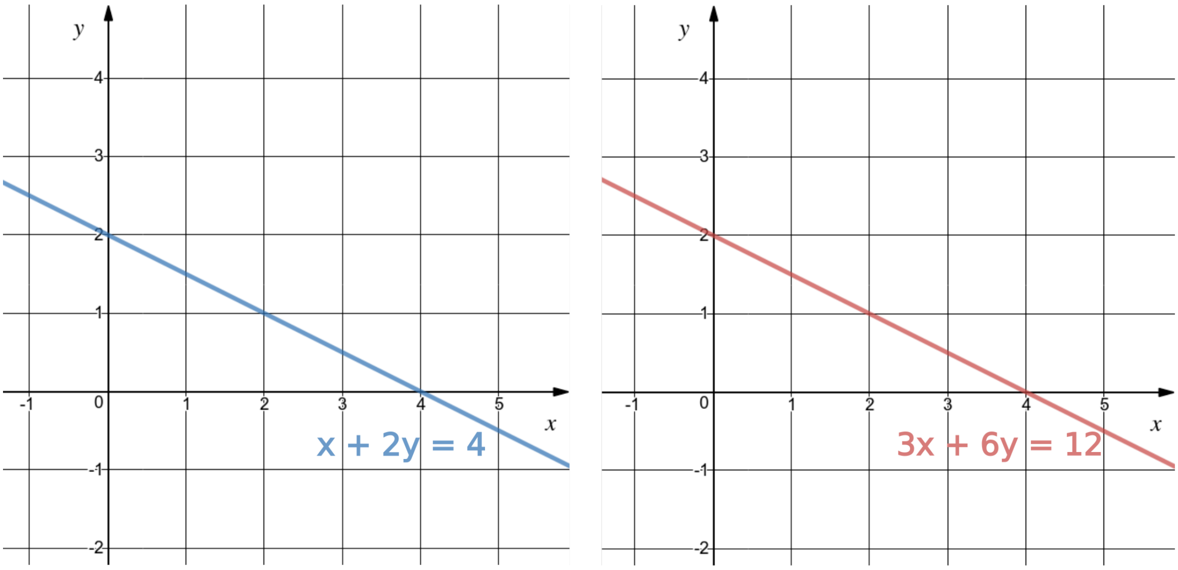

Figura 6.1.3: Representação gráfica do sistema.

É importante observar que a equação $3x + 6y = 12$, na sua forma simplificada (divide-se por três em ambos os membros), é igual a $x + 2y = 4$. Logo, o sistema se resume em duas equações idênticas.

Para representar geometricamente esse sistema, tem-se um par de retas coincidentes, como mostra a Figura 6.1.4.

É interessante observar que os pares ordenados $(-4, 4), (-2, 3), (0, 2), (2, 1)$ e $(4, 0)$, dentre outros, representam pontos por onde passam as retas em questão. Por outro lado, esses mesmos pares ordenados, são algumas das infinitas soluções existentes para esse sistema que, por isso, é dito possível e indeterminado.

Já no Exemplo 6.1.4, tem-se a representação de um sistema impossível.

Exemplo 6.1.4.

Considere o seguinte sistema linear de duas equações

$$\begin{cases} x - 2y = 4, \\ 2x - 4y = 5. \end{cases}$$

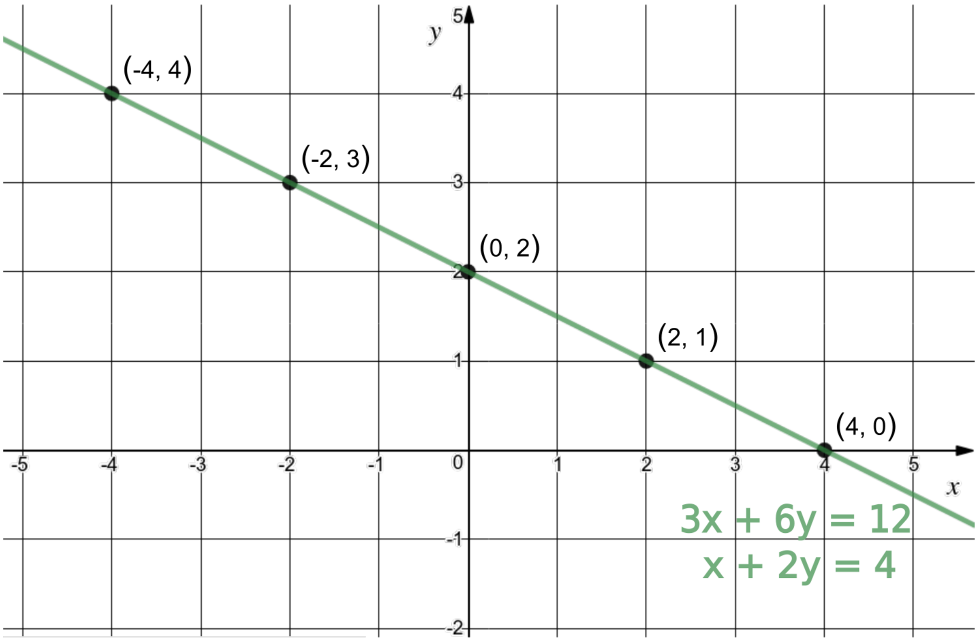

Figura 6.1.4: Representação gráfica do sistema.

É interessante observar que apesar de cada equação possuir, individualmente, infinitas soluções (x, y), nenhuma é comum as duas equações concomitantemente, ou seja, não existe nenhum par ordenado (x, y) que represente um ponto pertencente as duas retas cujas equações são $x - 2y = 4$ e $2x - 4y = 5$. Isso é melhor observado no gráfico da Figura 6.1.5.

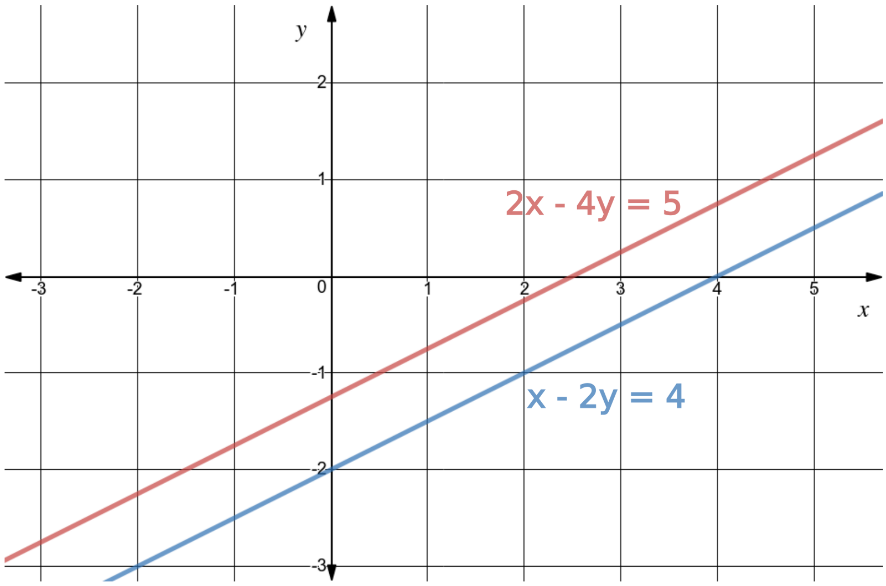

Figura 6.1.5: Representação gráfica do sistema.

Percebe-se, nesse caso, que as retas são paralelas e, portanto não possuem nenhum ponto em comum. Assim, as equações do sistema também não possuem nenhuma solução em comum e, por isso, caracteriza-se em um sistema é impossível.

6.2 Soluções Gráficas para Sistemas de Três Equações

Quando se trata de representação gráfica de um sistema linear, é muito comum explorar a abordagem para os sistemas de duas equações, principalmente pela simplicidade de se representar as equações através de retas no plano. Entretanto, apesar de incomum, é deveras interessante investigar a interpretação gráfica das possíveis soluções para os sistemas lineares de três equações.

Para os sistemas lineares de três equações e três incógnitas, é necessário que a representação gráfica possua três dimensões, logo os esboços gráficos estão apresentados aqui no espaço tridimensional.

É importante observar que para três planos no espaço tridimensional temos as oito possibilidades [19]:

1. Três planos paralelos entre si;

2. Dois planos coincidentes e um terceiro paralelo a eles;

3. Dois planos paralelos e um terceiro secante a eles;

4. Três planos secantes dois a dois definindo três retas distintas e paralelas;

5. Três planos secantes entre si com interseção em uma única reta;

6. Três planos coincidentes;

7. Dois planos coincidentes e um terceiro secante a eles;

8. Três planos secantes definindo três retas concorrentes em um só ponto;

A Figura 6.2.1 apresenta uma simples ilustração dos oito casos citados, na respectiva ordem de enumeração.

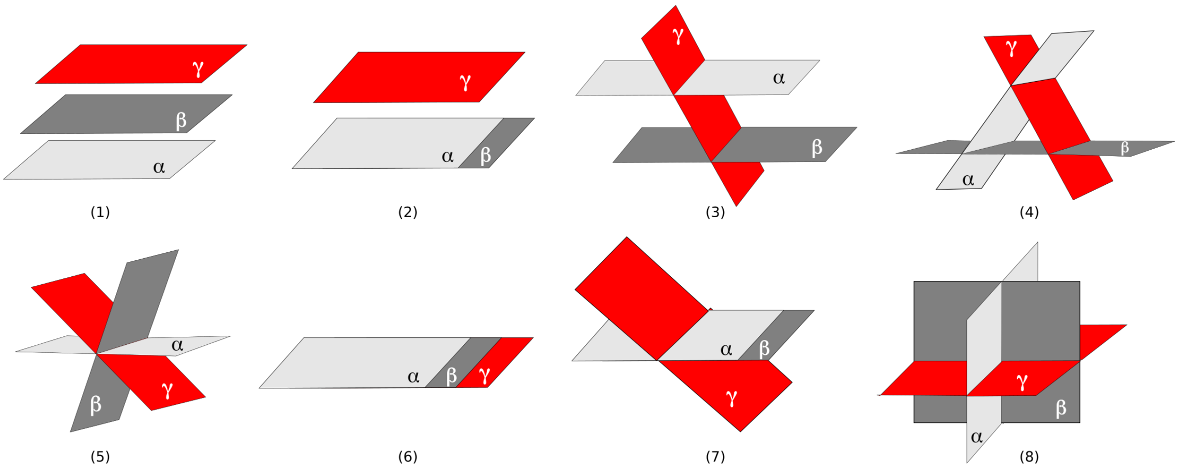

Figura 6.2.1: Posições relativas de três planos.

Na seção 4, aborda-se os tipos de sistemas lineares. Portanto aqui, apresenta-se na Tabela 6.2.1 uma relação entre os tipos de classificação de sistemas e as posições ora mencionadas.

Caso	Posições relativas dos planos	Classificação
1	Três planos paralelos entre si	Sistema Impossível;
2	Dois planos coincidentes e um terceiro paralelo a eles	
3	Dois planos paralelos e um terceiro secante a eles	
4	Três planos secantes dois a dois definindo três retas distintas e paralelas	
5	Três planos secantes entre si com interseção em uma única reta	Sistema possível indeterminado;
6	Três planos coincidentes	
7	Dois planos coincidentes e um terceiro secante a eles	
8	Três planos secantes definindo três retas concorrentes em um só ponto	Sistema possível determinado.

Tabela 6.2.1: Relação entre as posições dos planos e a classificação dos sistemas.

A verificação de cada atribuição da Tabela 6.2.1, é construída através de duas ações:

1. Tentativa de resolução do sistema utilizando-se o comando **linsolve()** do software *Maxima*;

2. Esboço dos planos de cada equação do sistema através da geração de gráficos no software *Maxima*.

Nota-se que cada equação de três incógnitas representa geometricamente um plano e algebricamente pode ser representada por uma função

$$z = f(x, y),$$

onde x, y e z são as incógnitas do sistema e, desse modo, utiliza-se z como função das duas variáveis: x e y. Note que se trata de uma mera escolha para definir quais variáveis serão independentes na função.

O Exemplo 6.2.1 apresenta um sistema que contempla o primeiro caso da Tabela 6.2.1.

Exemplo 6.2.1.

Considere o sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x + y - z = 5, \\ x + y - z = 10. \end{cases}$$

Usando, no *Maxima*, o comando **"linsolve"**, observa-se que a linha de saída "%o1" retornou um par de colchetes vazio, ou seja, não foi encontrada nenhuma solução que satisfizesse o sistema em questão, como mostra a Figura 6.2.2.

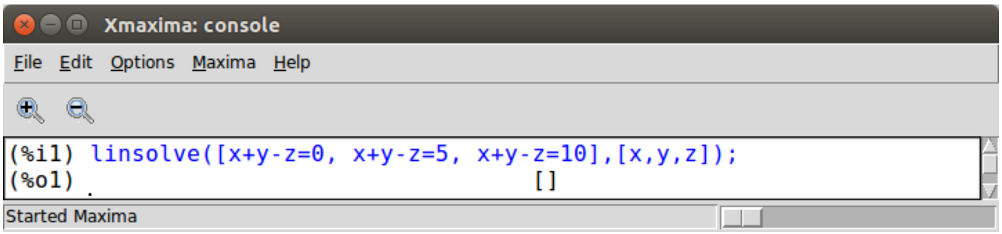

Figura 6.2.2: *Maxima* - Tentativa de solução de um SI.

Para investigar a representação gráfica desse sistema, pode-se usar ainda no *Maxima* o comando **"plot3d"**. Entretanto, para isso é necessário que cada equação seja reescrita como uma função $z = f(x, y)$, do seguinte modo

$$\begin{cases} z = x + y, \\ z = x + y - 5, \\ z = x + y - 10. \end{cases}$$

Em seguida, basta usar o comando **"plot3d"** passando como parâmetros as funções e os intervalos de representação das abscissas e ordenadas.

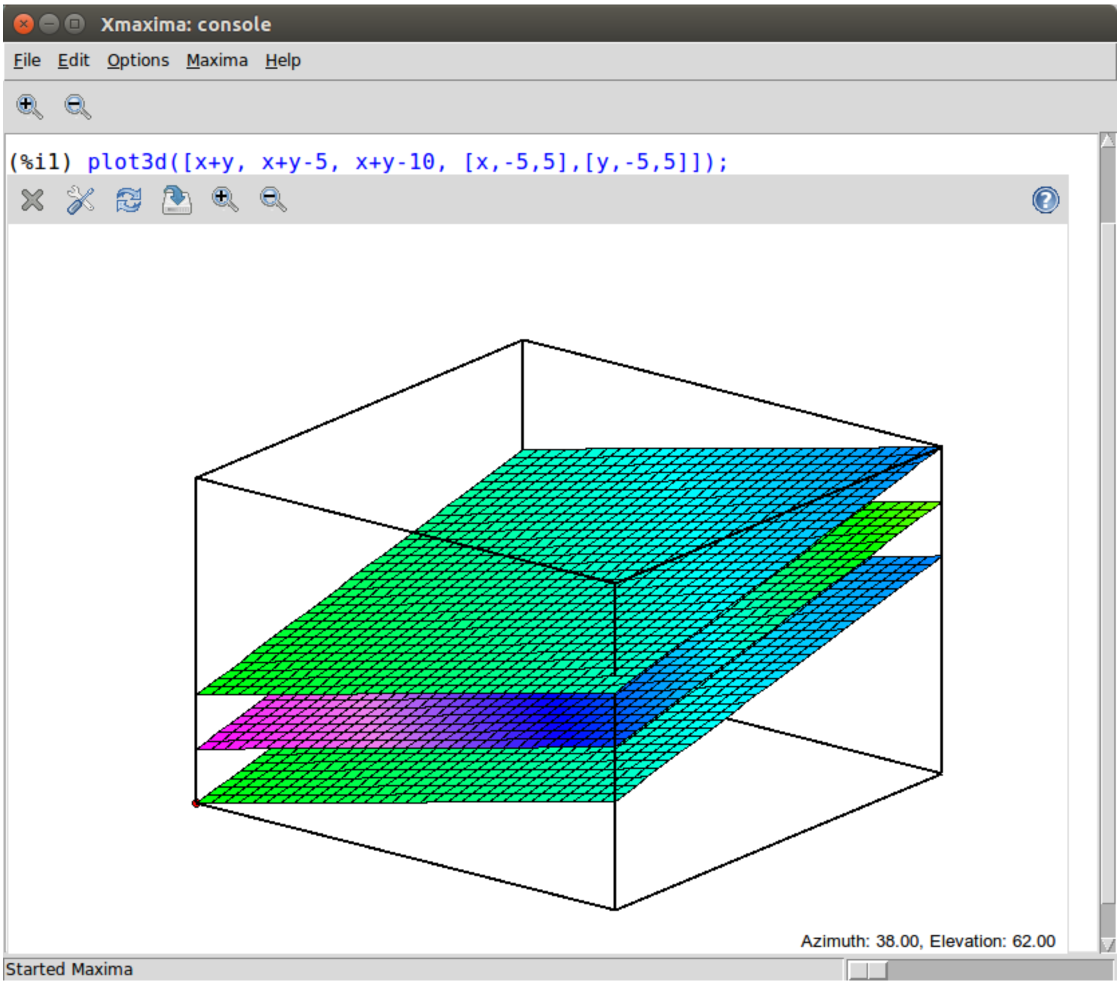

Figura 6.2.3: *Maxima* - Representação gráfica de um SI.

Percebe-se pelo gráfico apresentado na Figura 6.2.3 que se trata de três planos paralelos. Assim, não há sequer um só ponto de interseção entre os três planos, ou seja, não existe nenhum terno ordenado (x, y, z) que satisfaça o sistema representado. Logo, de fato o sistema é impossível e corrobora a atribuição do caso 1 da Tabela 6.2.1.

Também é possível fazer esse esboço através do software *Scilab*. Observa-se que para resolver esse mesmo exemplo, usa-se, no ambiente gráfico do *Scilab*, a sequência de comandos presente na Figura 6.2.4.

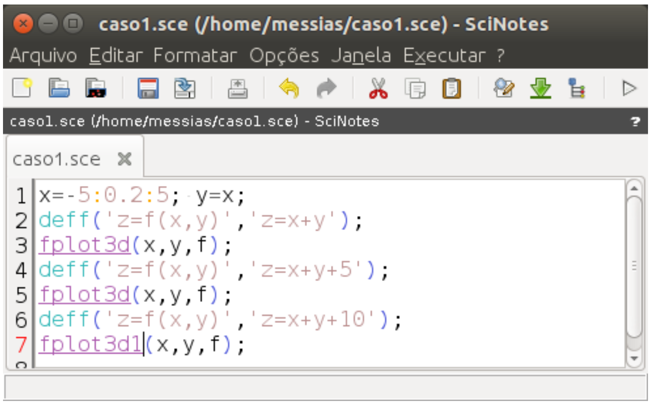

Figura 6.2.4: *Scilab* - Lista dos comandos para plotar cada plano do sistema.

Observa-se que na linha 1, define-se o intervalo e o passo para o esboço; na linha 2, usa-se o comando **"deff"** para atribuir a variável z uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$ e ao mesmo tempo definir z pela primeira equação do sistema; na linha 3, através do comando **"fplot3d"**, passando como parâmetros as variáveis x, y e a função f, obtém-se a visualização gráfica do plano espacial que representa a primeira equação. Nas linhas seguintes, ocorre a repetição dos comandos **"deff"** e **"fplot3d"** para a outras duas equações do sistema, com exceção da última, onde é utilizado o comando **"fplot3d1"** que apenas altera a superfície do gráfico para uma malha colorida, o que facilita na diferenciação dos planos.

Desse modo, os planos vão se sobrepondo na mesma janela, ver figura 6.2.5.

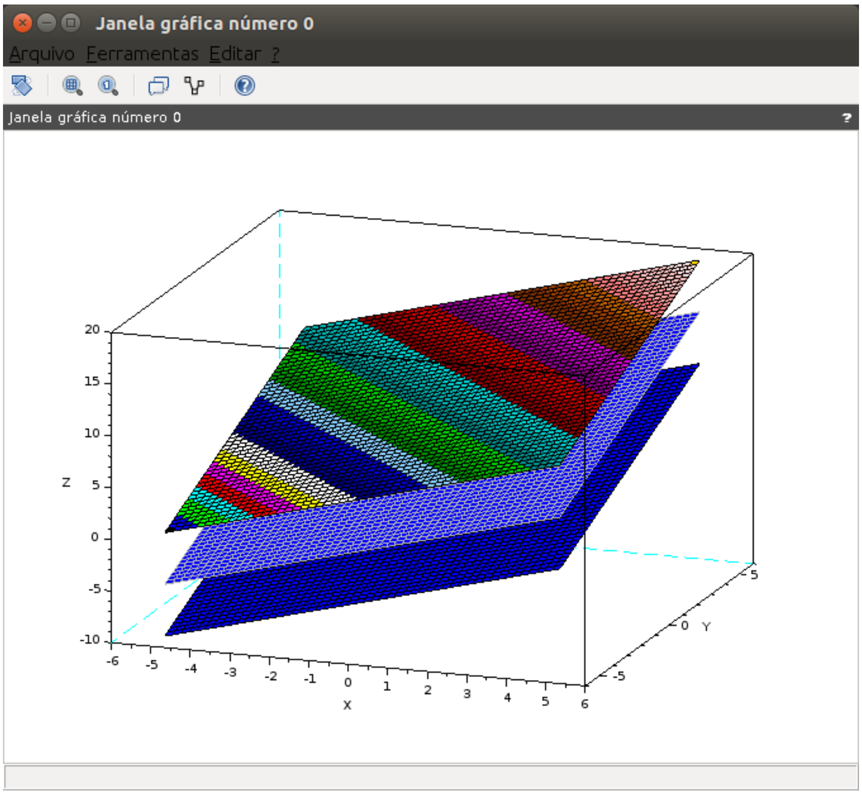

Figura 6.2.5: *Scilab* - Representação gráfica de um SI.

É interessante observar que embora a representação gráfica dos sistemas também pode ser realizada no *Scilab*, opta-se aqui por utilizar-se adiante apenas o *Maxima*, haja vista que, para essa tarefa, ele se mostra relativamente mais simples e prático.

Exemplo 6.2.2.

Para esse exemplo, considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} 3x + 5y - z = 0, \\ 6x + 10y - 2z = 0, \\ 3x + 5y - z = 10. \end{cases}$$

Utilizando o comando **"linsolve"**, nota-se que o *Maxima* devolve novamente uma par de colchetes vazio. como mostra a Figura 6.2.6.

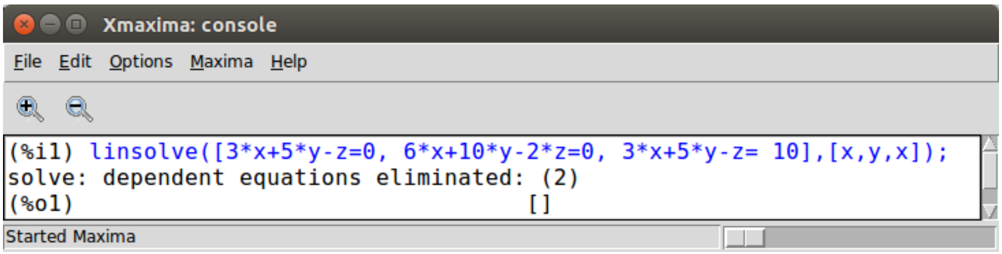

Figura 6.2.6: *Maxima* - Tentativa de solução de um SI.

Há também a informação de que há uma dependência entre duas equações. Isso se deve ao fato de que a equação $3x + 5y - z = 0$ e a $6x + 10y - 2z = 0$ são equivalentes.

A representação gráfica desse sistema através do esboço dos planos de cada função $z = f(x, y)$ é apresentada na Figura 6.2.7.

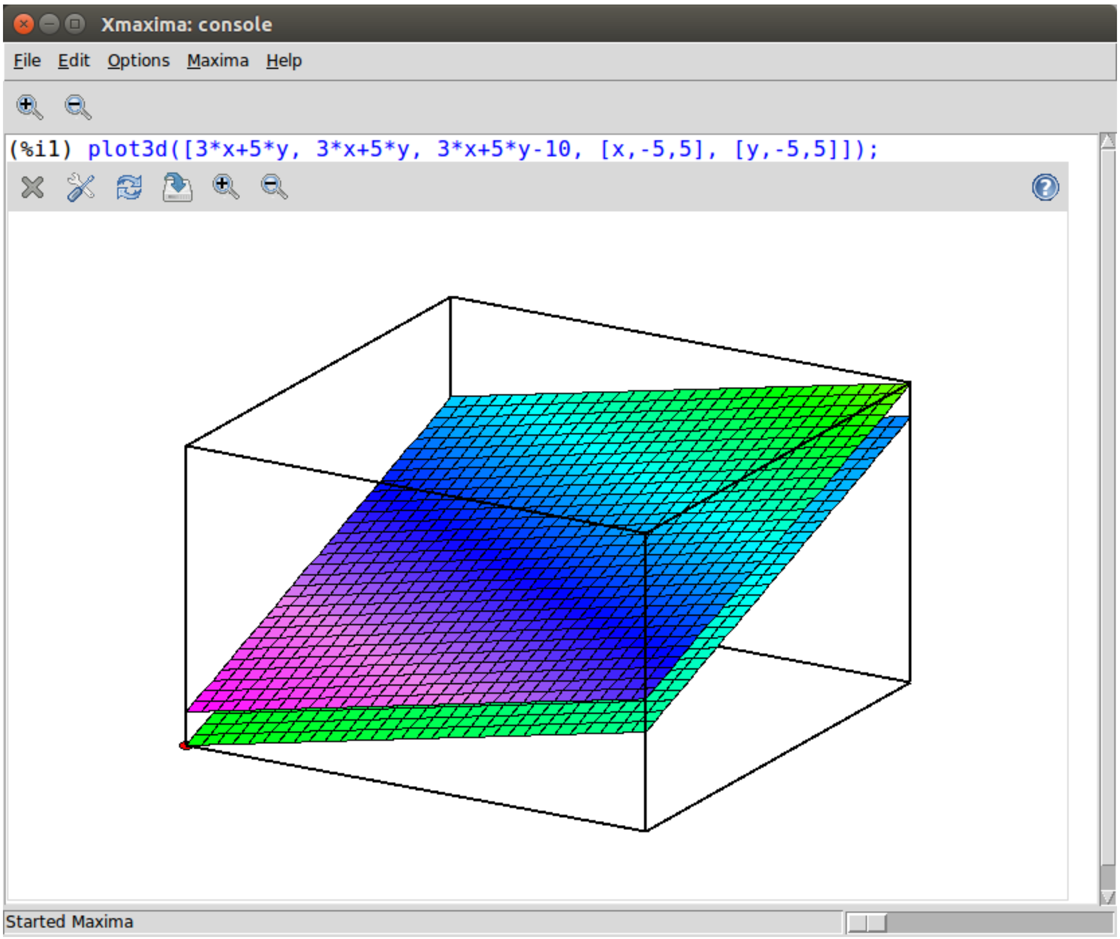

Figura 6.2.7: *Maxima* - Representação gráfica de um SI.

Percebe-se que apenas dois planos podem ser diferenciados pois, trata-se de dois planos coincidentes e um terceiro paralelo. E, é justamente esse plano paralelo quem garante que não há nenhum terno ordenado (x, y, z) que pertença aos três planos, já que essa interseção é vazia. Assim, como afirmado na atribuição do caso 2 da Tabela 6.2.1, dois planos coincidentes e um terceiro paralelo a esses dois representam um sistema linear de três equações classificado como impossível.

Exemplo 6.2.3.

Para esse exemplo, considere o sistema

$$\begin{cases} x - 2y - z = -10, \\ 3x - 6y - 3z = 6, \\ 2x + 5y - z = -4. \end{cases}$$

No *Maxima*, usa-se o comando **"linsolve"**, passando como parâmetros as três equações bem como as respectivas incógnitas e, como resposta, obtém-se um par de colchetes vazio. como mostra a Figura 6.2.8.

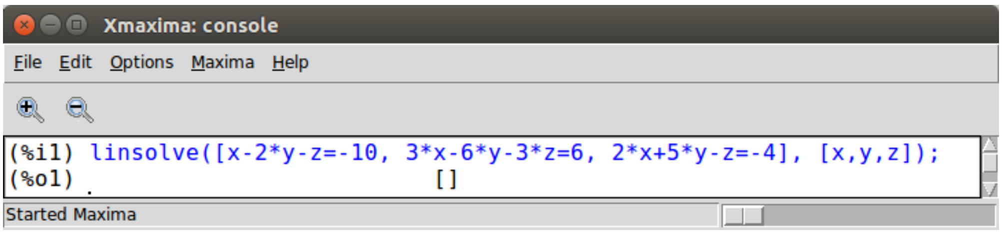

Figura 6.2.8: *Maxima* - Tentativa de solução de um SI.

Para verificar que realmente se trata de um SI, utiliza-se mais uma vez o comando **"plot3d"** do *Maxima* para fazer os esboço dos três planos que representam as três funções $z = f(x, y)$ relativas às equações do sistema, como mostra a Figura 6.2.9.

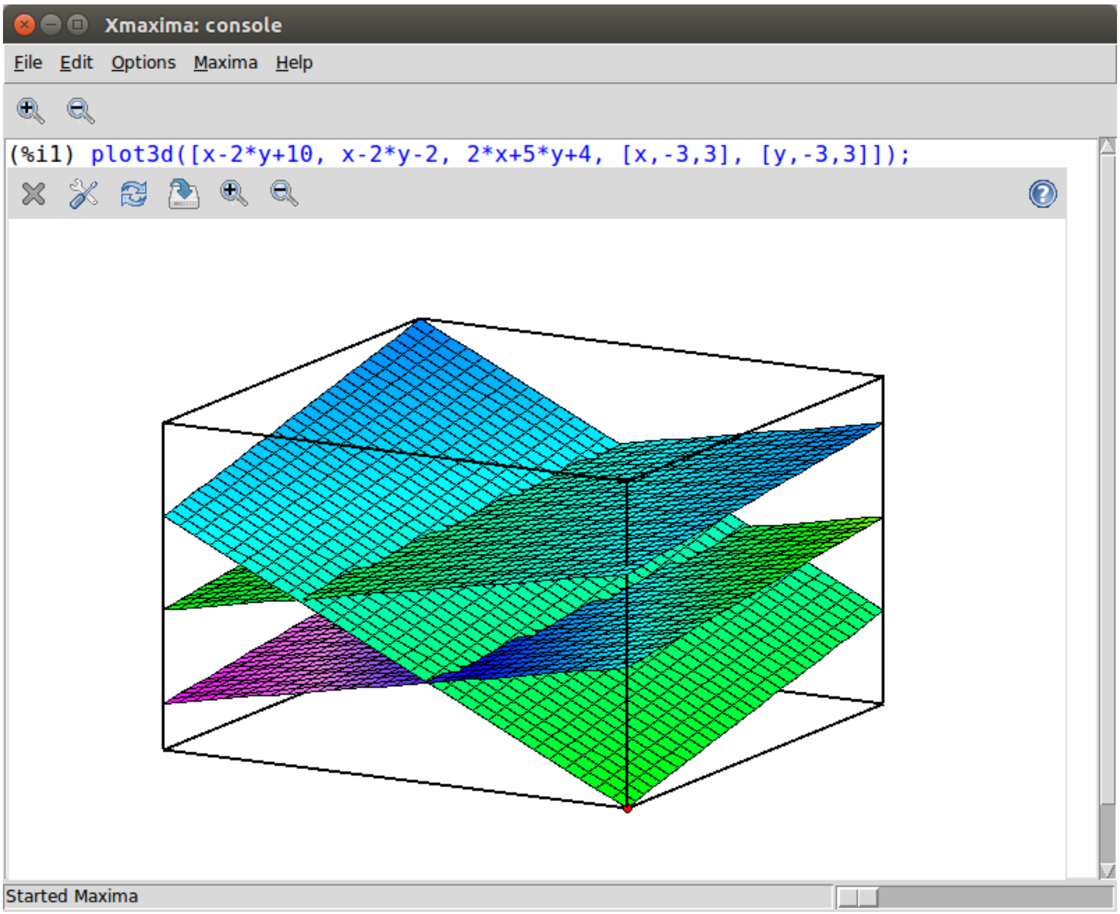

Figura 6.2.9: *Maxima* - Representação gráfica de um SI.

Nessa representação, é possível ver que o plano secante define duas retas paralelas nas interseções que faz com os outros dois planos paralelos entre si. Contudo, como os outros dois planos são paralelos, ou seja, a interseção entre eles é vazia, não existe também nenhuma interseção entre os três planos e por conseguinte não há nenhum terno ordenado (x, y, z) que pertença a interseção desses três planos. Assim, esse exemplo endossa a atribuição do caso 3 da Tabela 6.2.1.

Exemplo 6.2.4.

Considere, para esse exemplo, o sistema

$$\begin{cases} 4x - z = 0, \\ 3x + z = 0, \\ 2x - z = 2. \end{cases}$$

Por meio do comando **“linsolve”** do *Maxima*, passando como parâmetros as três equações e suas respectivas incógnitas, obtém-se, como reposta, um par de colchetes vazio. como mostra a Figura 6.2.10.

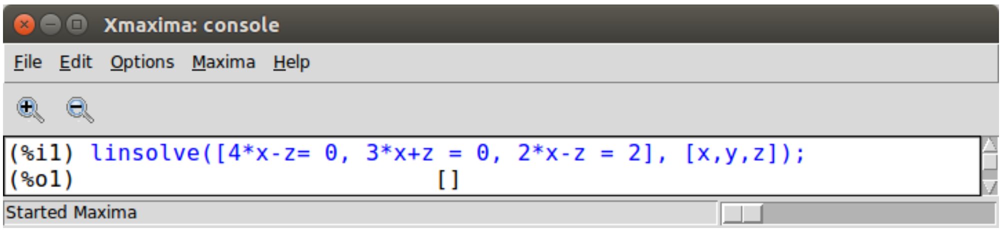

Figura 6.2.10: *Maxima* - Tentativa de solução de um SI.

Com o comando **“plot3d”** do *Maxima*, obtém-se o esboço da representação desse sistema e verifica-se que que os três planos são secantes dois a dois, como ilustra a Figura 6.2.11.

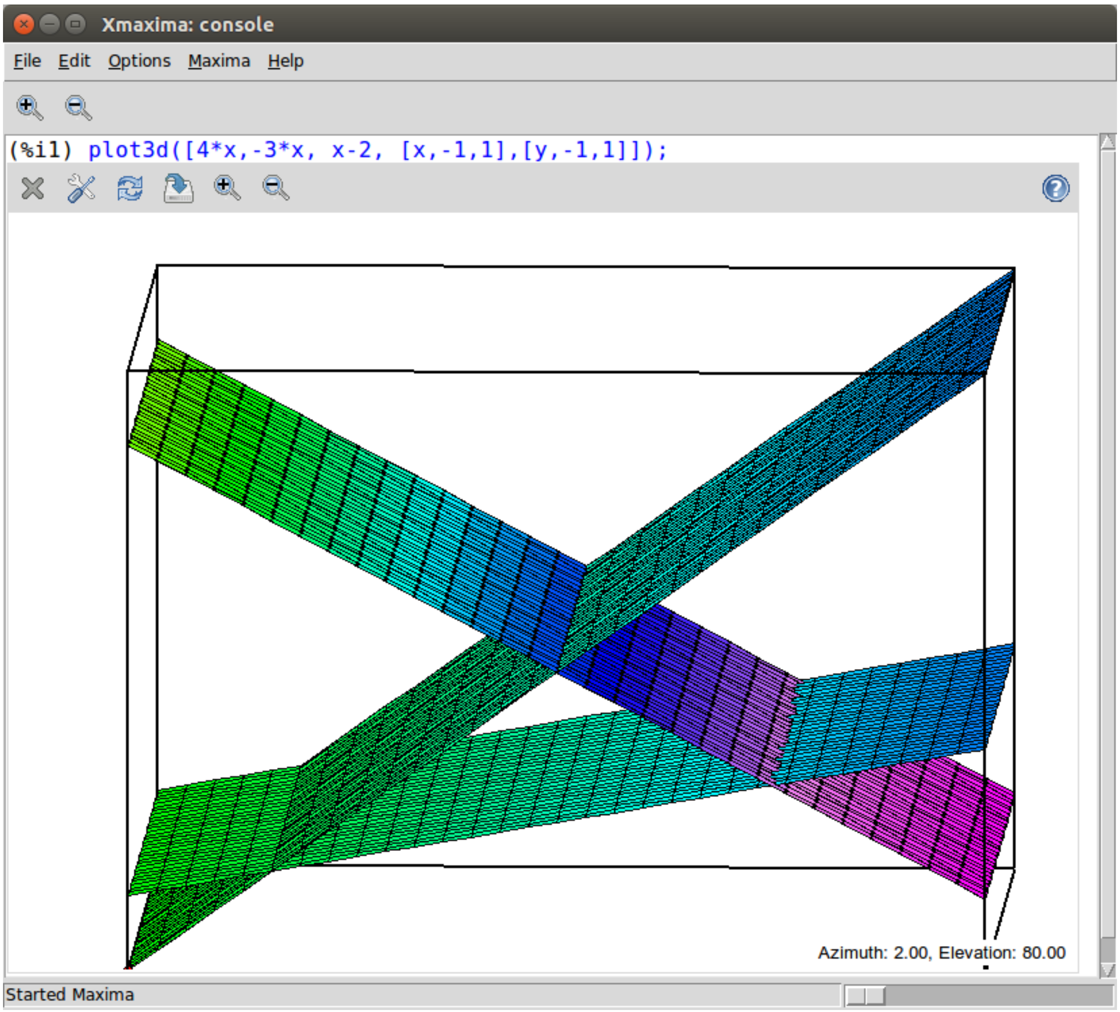

Figura 6.2.11: *Maxima* - Representação gráfica de um SI.

Observando o gráfico, percebe-se que apesar haver três retas definidas pelas interseções entre os planos, dois a dois, nota-se que ainda assim, nenhuma dessas três retas passa por todos os três planos, isto é, não existe nenhum terno ordenado (x, y, z) que pertença a interseção desses três planos. Logo, esse exemplo reafirma a atribuição do caso 4 da Tabela 6.2.1.

Exemplo 6.2.5.

Considere o sistema

$$\begin{cases} x - z = 3, \\ 4x + z = -3, \\ 4x - z = 3. \end{cases}$$

Na Figura 6.2.12, observa-se que através do comando **“linsolve”** do *Maxima*, passando como parâmetros as três equações e suas respectivas incógnitas, obtém-se a informação de que as equações são linearmente dependentes, mas ainda assim deve existir solução que satisfaça o sistema.

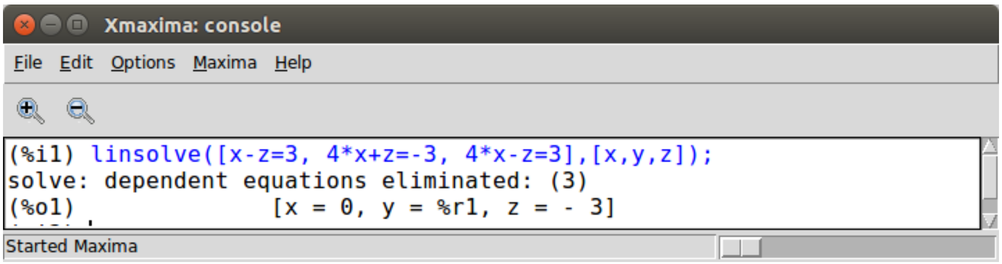

Figura 6.2.12: *Maxima* - Tentativa de solução de um SPI.

A solução é apresentada através da expressão

$$[x = 0, y = \%r1, z = -3],$$

onde, por questões se simplicidade, pode-se considerar $\alpha = \%r1$. Assim tem-se

$$[x = 0, y = \alpha, z = -3].$$

Todavia essa solução não está plenamente determinada, haja vista que depende de α. Logo, trata-se de um sistema possível indeterminado.

Verificando a sua representação gráfica, no *Maxima* com o comando **“plot3d”**, percebe-se que se trata de três planos secantes com interseção em uma única reta, como mostra a Figura 6.2.13.

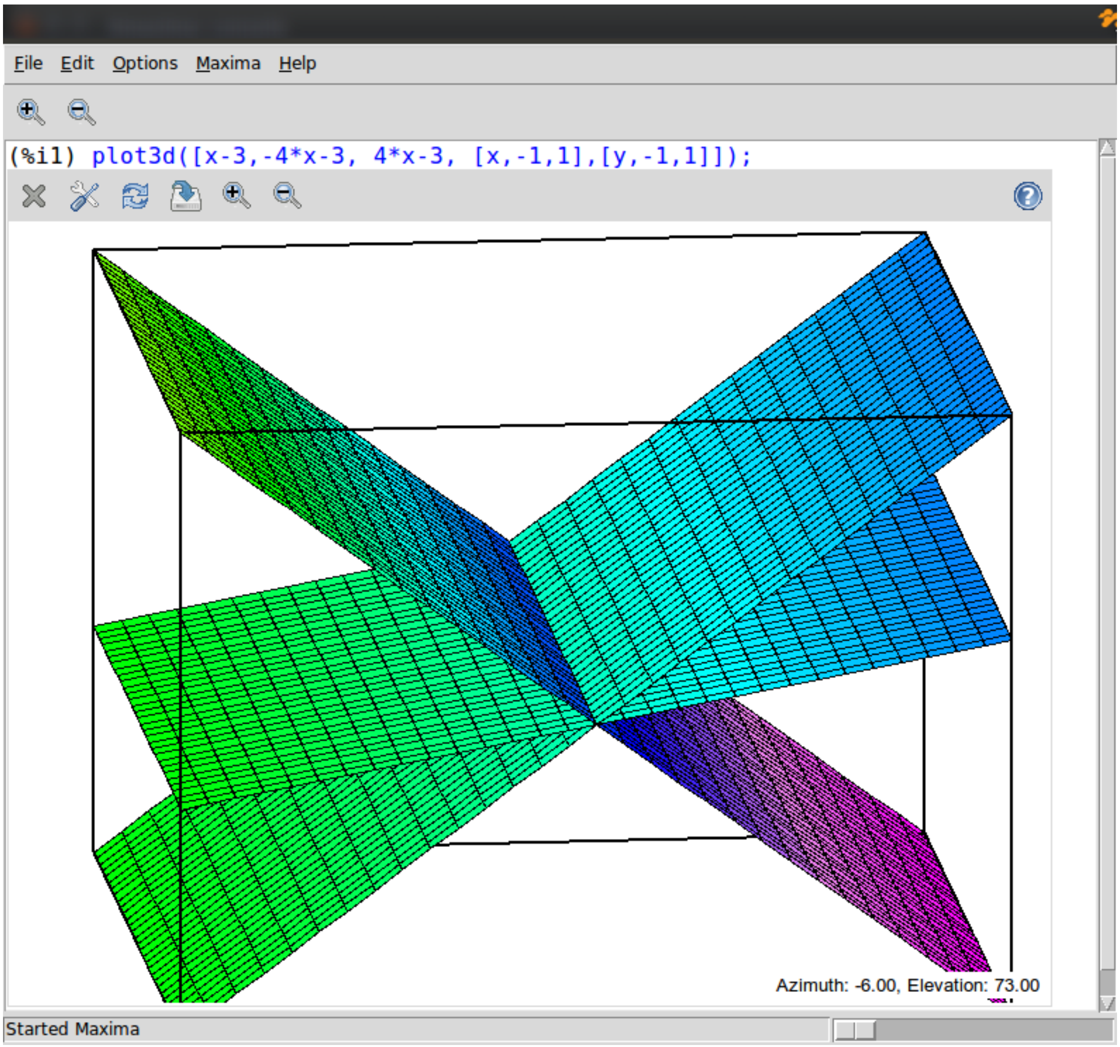

Figura 6.2.13: *Maxima* - Representação gráfica de um SPI.

Nota-se que mesmo havendo uma interseção comum aos três planos, não é possível definir um só terno ordenado (x, y, z) que pertença a essa interseção, pois todos os pontos dessa reta satisfazem o sistema. Portanto, realmente trata-se de um sistema possível indeterminado e esse exemplo corrobora a atribuição do caso 5 da Tabela 6.2.1.

Exemplo 6.2.6.

Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 2x + 4y - 2z = 6, \\ 4x + 8y - 4z = 12. \end{cases}$$

Observa-se na Figura 6.2.14, que quando é executado o comando **“linsolve”** do *Maxima*, passando como parâmetros as três equações e suas respectivas incógnitas, obtém-se a resposta de que há dependência linear entre as equações.

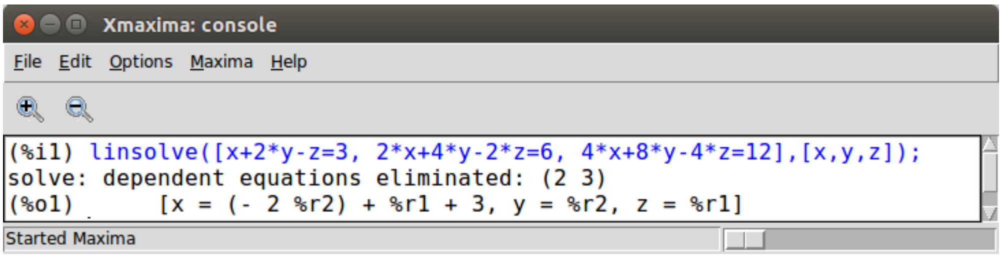

Figura 6.2.14: *Maxima* - Tentativa de solução de um SPI.

No entanto, a solução é apresentada em termos de

$$[x = (-2\%r2) + \%r1 + 3, y = \%r2, z = \%r1],$$

que, considerando $\alpha = \%r1$ e $\beta = \%r2$, pode ser simplificada em

$$[x = (-2\beta) + \alpha + 3, y = \beta, z = \alpha].$$

Contudo, a solução não está plenamente determinada, pois depende de α e β. Portanto, trata-se de um sistema possível indeterminado.

Utilizando-se o *Maxima* através do comando **“plot3d”**, e das funções $z = f(x, y)$ obtidas por meio das equações do sistema, obtém-se uma representação gráfica que pode ser vista na Figura 6.2.15.

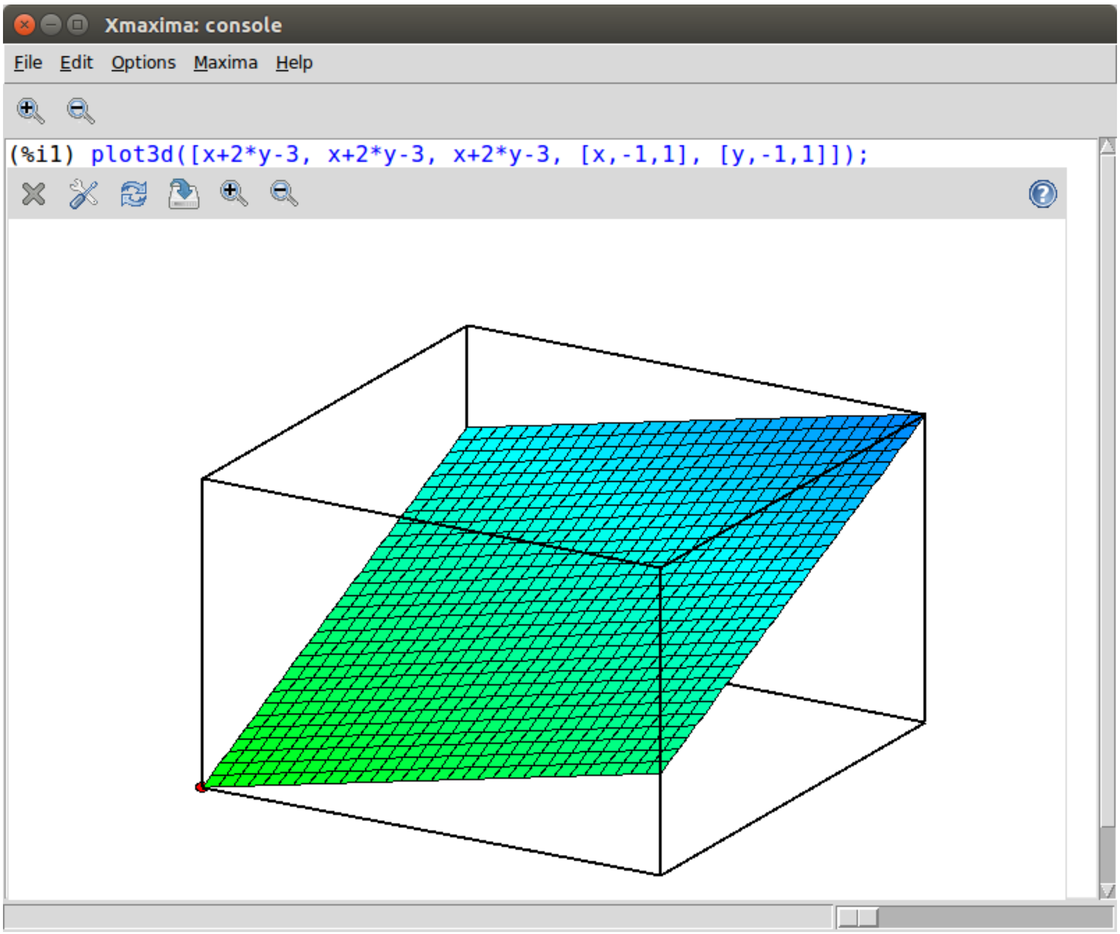

Figura 6.2.15: *Maxima* - Representação gráfica de um SPI.

Nota-se que o gráfico exibe apenas um plano. No entanto, é possível observar que as três equações quando reescritas como função $z = f(x, y)$, tornam-se idênticas, ou seja, as equações são equivalentes. Desse modo, os três planos são coincidentes.

Mesmo que a haja interseção entre os planos, não é possível determinar um único terno ordenado (x, y, z) que pertença a essa interseção, pois qualquer ponto que pertença a qualquer um desses planos satisfaz o sistema. Logo, trata-se de um SPI e esse exemplo está de acordo a atribuição do caso 6 da Tabela 6.2.1.

Exemplo 6.2.7.

Para esse exemplo, considere o sistema

$$\begin{cases} 5x + y - z = 0, \\ 10x + 2y - 2z = 0, \\ -10x + y - z = 0. \end{cases}$$

Na Figura 6.2.16, é possível observar que a execução do comando **"linsolve"** do *Maxima*, passando como parâmetros as três equações e suas respectivas incógnitas, devolve como resposta a informação de que há dependência linear entre as equações.

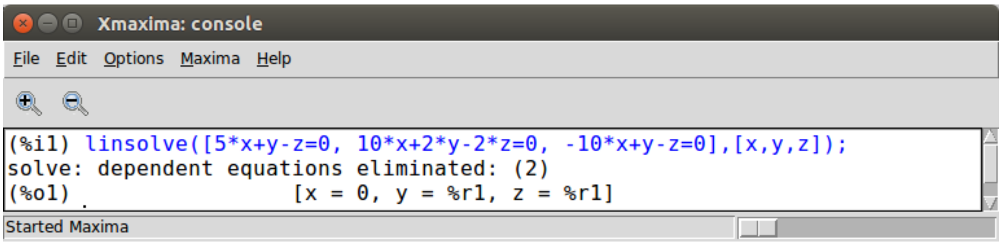

Figura 6.2.16: *Maxima* - Tentativa de solução de um SPI.

Contudo, é apresentada uma solução expressa por

$$[x = 0, y = \%r1, z = \%r1],$$

e com $\alpha = \%r1$, pode ser simplificada em

$$[x = 0, y = \alpha, z = \alpha].$$

Todavia, pelo fato de depender de α, essa solução não está plenamente determinada. Logo, trata-se de um sistema possível indeterminado.

A verificação de sua representação gráfica se dá no esboço obtido pelo *Maxima* através do comando **"plot3d"**, passando como parâmetros as funções $z = f(x, y)$ obtidas por meio das equações do sistema, como mostra a Figura 6.2.17.

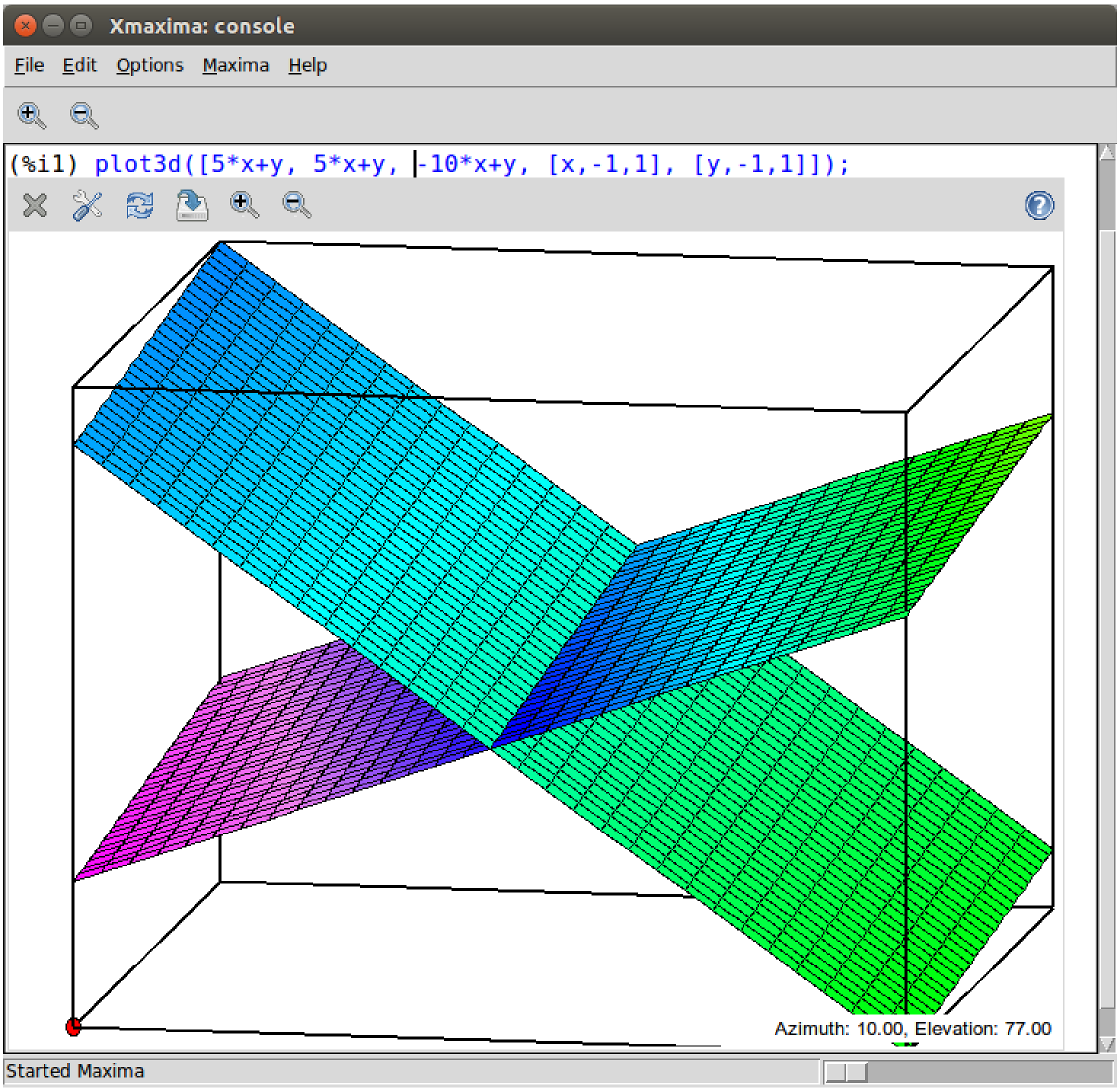

Figura 6.2.17: *Maxima* - Representação gráfica de um SPI.

Observa-se que o gráfico exibe dois planos secantes. No entanto, na realidade trata-se de dois planos coincidentes e um terceiro secante a eles. Esse fato é facilmente notado através das funções $z = f(x, y)$, que são idênticas para duas das três equações do sistema. Assim, apesar de haver uma reta como interseção entre todos os planos, ainda não é possível obter um único terno ordenado (x, y, z) que pertença a essa interseção, pois qualquer ponto pertencente a reta também satisfaz o sistema. Portanto, trata-se de um SPI e esse exemplo endossa a atribuição do caso 7 da Tabela 6.2.1.

Exemplo 6.2.8.

Considere o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 2x + y - z = 1, \\ 3x + 3y - z = 6, \end{cases}$$

Através da execução do comando **"linsolve"** do *Maxima*, passando como parâmetros as três equações e suas respectivas incógnitas, obtém-se a solução do sistema como pode ser visto na Figura 6.2.18.

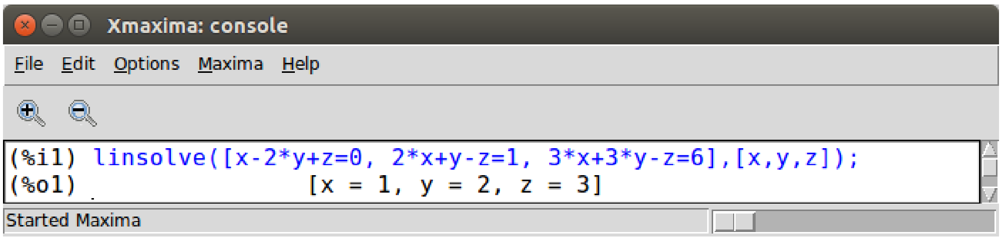

Figura 6.2.18: *Maxima* - Tentativa de solução de um SPD.

É interessante observar que não houve nenhuma variável de dependência na solução, ou seja a solução é plenamente determinada por

$$[x = 1, y = 2, z = 3].$$

Logo, se trata de um sistema possível e determinado.

A representação gráfica desse sistema pode ser obtida, no *Maxima*, através do comando **"plot3d"**, passando como parâmetros as funções $z = f(x, y)$ obtidas por meio das equações do sistema, como mostra a Figura 6.2.19.

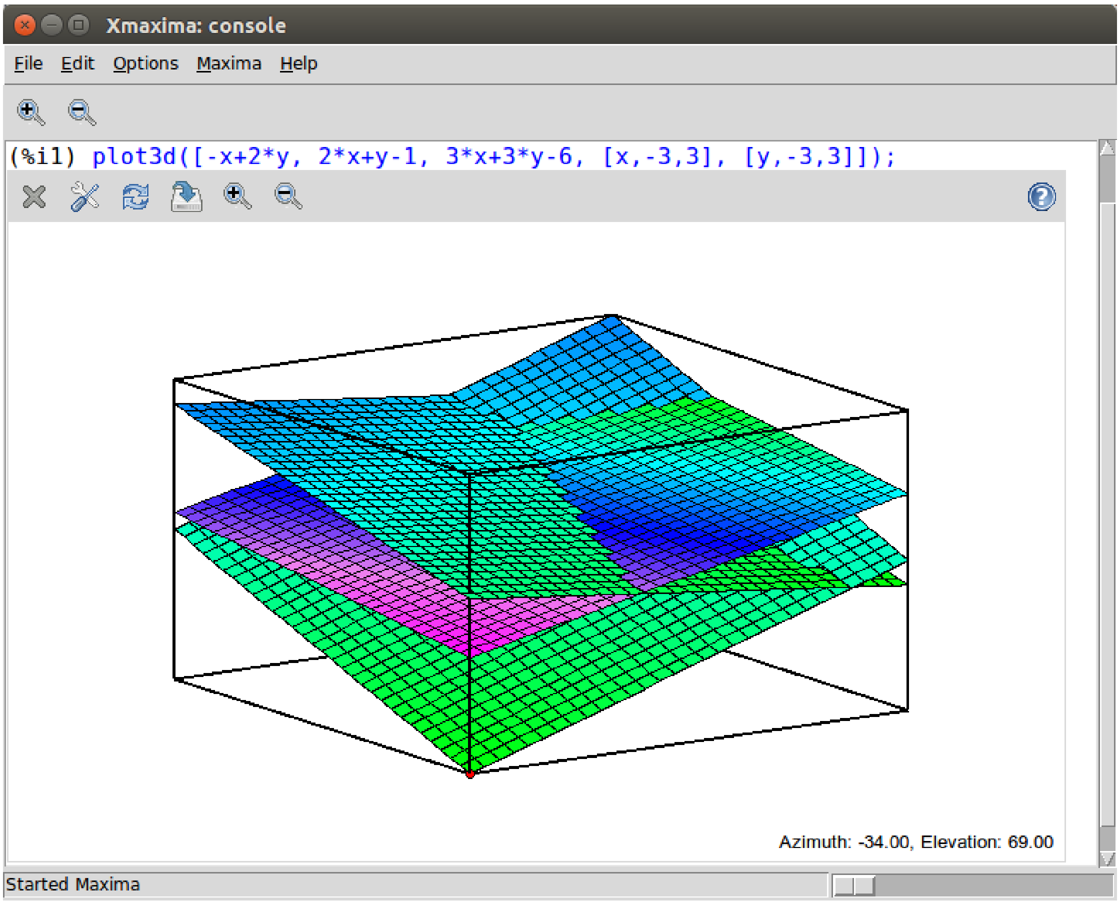

Figura 6.2.19: *Maxima* - Representação gráfica de um SPD.

Nota-se que o gráfico exibe três planos secantes, de tal modo que a interseção entre eles é definida em um único ponto. Assim, existe um só terno ordenado (x, y, z) que pertença a interseção desses três planos, do mesmo modo há apenas essa solução para o sistema. Logo, trata-se de um sistema possível e determinado e esse exemplo corrobora com a atribuição do caso 8 da Tabela 6.2.1.

Para facilitar ainda mais a interpretação desse gráfico, é possível fazer novamente o esboço desse mesmo sistema através do *Scilab*, como mostra a figura 6.2.20.

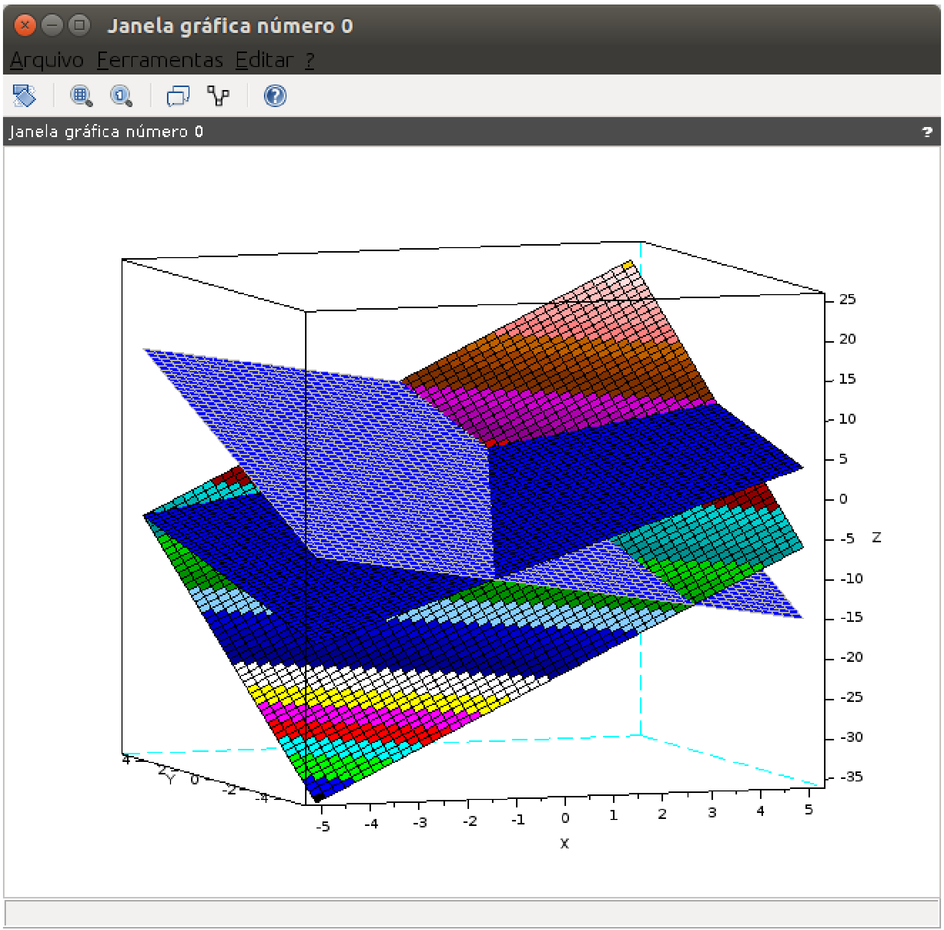

Figura 6.2.20: *Scilab* - Representação gráfica de um SPD.

7 Considerações Finais

Nota-se que os softwares matemáticos são simplesmente ferramentas para o estudo e o ensino de matemática. Contudo, em diversos casos eles apresentam significativas vantagens.

Tratando-se especificamente do *Scilab* e do *Maxima*, aplicados à álgebra linear, é fácil perceber que eles simplificam a resolução quando se tem cálculos muito extensos, apresentam os resultados de forma muito rápida e menos suscetível a erros e também realizam, facilmente, cálculos com matrizes de grandes dimensões.

Além dessas vantagens, é importante destacar que para o estudo dos sistemas lineares, eles ainda trazem o benefício de proporcionar uma representação gráfica que muitas vezes é quase impossível de ser realizada, por exemplo, em uma quadro negro, como é o caso dos esboços tridimensionais, que por questões de tempo e mesmo de dificuldade em desenhar, quase nunca são abordados em uma sala de aula de ensino médio.

Assim, através do uso desses softwares, aumenta-se consideravelmente a eficiência do ensino, estudo e pesquisa acerca de sistemas lineares bem como amplia-se a possibilidade de uma construção de conhecimento mais tangível e concreta a partir da visualização de uma solução gráfica geométrica desses sistemas.

Referências

[1] STEINBRUCH, A. *Matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares*. São Paulo: McGraw-Hill, 1989.

[2] BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I.; FIGUEREDO, V.; WETZLER, H. G. *Álgebra linear*. 4. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

[3] STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Introdução à álgebra linear*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1997.

[4] WINTERLE, P.; STEINBRUCH, A. *Álgebra linear*. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

[5] IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar*. São Paulo: Atual, 1995. v. 4.

[6] GIRALDO, V.; CAETANO, P. A. S.; MATTOS, F. R. P. *Recursos computacionais no ensino da matemática*. 1. ed. SBM, 2013.

[7] DE CARVALHO BORBA, M.; PENTEADO, M. G. *Informática e educação matemática*. Autêntica, 2016.

[8] MATLAB, M. *Sítio Oficial do MatLab*. Disponível em: `https://www.mathworks.com/products/matlab.html`. Acesso em 15 de maio de 2017.

[9] BARRETO, L. S. *Iniciação ao Scilab*. 2. ed. Costa da Caparica: Edição do autor, 2008.

[10] SCILAB. *Sítio Oficial do SciLab*. Disponível em: `http://www.scilab.org/scilab/about`, 2017. Acesso em 29 de janeiro de 2017.

[11] LEITE, M. *Scilab: uma abordagem prática e didática.* Ciência Moderna, 2009.

[12] MATHEMATICA, W. *Sítio Oficial do Wolfram Mathematica.* Disponível em: `https://www.wolfram.com/mathematica`. Acesso em 8 de maio de 2017.

[13] MAXIMA. *Sítio Oficial do Maxima.* Disponível em: `http://maxima.sourceforge.net`, 2017. Acesso em 2 de fevereiro de 2017.

[14] RIOTORTO, M. R. *Primeiros Passos no Maxima.* Disponível em `http://maxima.sourceforge.net/docs/tutorial/pt/max.pdf`, 2006. Acesso em 15 de maio de 2017.

[15] VALENTE, J. A. *Diferentes usos do computador na educação. Em Aberto*, v. 12, n. 57, 2008.

[16] KOLMAN, B.; HILL, D. R. *Introdução à álgebra linear: Com aplicações* . Grupo Gen-LTC, 2000.

[17] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. *A matemática do ensino médio.* 6. ed. Rio de Janeiro: , 2006. v. 2.

[18] OLIVEIRA, K.; CORCHO, A. J. *Iniciação à matemática.* 2. ed. Rio de Janeiro: SBM: , 2010.

[19] MELO, J. L. P. *Sistemas 3x3 no plano tridimensional.* Disponível em `http://www1.folha.uol.com.br/fsp/fovest/fo1906200705.htm`, 2007. Acesso em 18 de maio de 2017.