UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PAULO HENRIQUE DAS CHAGAS SILVA

ANÁLISE E AVALIAÇÃO DAS QUESTÕES DOS NÍVEIS 1 E 2 DA PRIMEIRA FASE DA OBMEP SOB UMA PERSPECTIVA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

MOSSORÓ

2017

PAULO HENRIQUE DAS CHAGAS SILVA

ANÁLISE E AVALIAÇÃO DAS QUESTÕES DOS NÍVEIS 1 E 2 DA PRIMEIRA FASE DA OBMEP SOB UMA PERSPECTIVA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, campus Mossoró, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Profº. Dr. Antônio Gomes Nunes.

MOSSORÓ-RN
2017

S586a Silva, Paulo Henrique das Chagas.
Análise e avaliação das questões dos níveis 1 e 2 da primeira fase da Obmep sob uma perspectiva de Resolução de Problemas / Paulo Henrique das Chagas Silva. - 2017.
143 f. : il.

Orientador: Antônio Gomes Nunes.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2017.

1. OBMEP. 2. Resolução de Problemas. 3. Ensino de Matemática. I. Nunes, Antônio Gomes, orient. II. Título.

PAULO HENRIQUE DAS CHAGAS SILVA

ANÁLISE E AVALIAÇÃO DAS QUESTÕES DOS NÍVEIS 1 E 2 DA PRIMEIRA FASE DA OBMEP SOB UMA PERSPECTIVA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADA EM: 24 / 02 /2017

BANCA EXAMINADORA

Dr. Antonio Gomes Nunes - UFERSA
Presidente

Drª. Fabiane Regina da Cunha Dantas Araujo - UFERSA
Membro interno

Célia Maria Rufino Franco

Drª. Célia Maria Rufino Franco - UFCG
Membro externo

MOSSORÓ/RN, 2017.

A Deus, por me mostrar que tudo na vida deve ser conquistado com esforço e dedicação e, acima de tudo, por sempre ouvir as minhas orações e estar sempre ao meu lado.

A minha mãe, Cosma Raimunda da Silva, pelo amor incondicional que tens por mim, e pelo apoio dado nas horas que eu mais precisei.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela forma como o seu amor é presente em minha vida. A sua presença me ajuda a superar todos os obstáculos diários e me dá conforto.

A minha mãe, Cosma Raimunda da Silva, e à memória de meu pai, José Francisco das Chagas Pinto, pela educação dada e pelo carinho compartilhado.

A minhas irmãs, avós, tios, primos e demais familiares, por compreenderem o quão importante o estudo é para mim, e por entenderem as minhas ausências nas reuniões familiares.

Aos meus amigos de fora da UFERSA, por sempre estarem ao meu lado e por compreenderem as vezes em que tinha que me ausentar para me dedicar a algo do mestrado. Principalmente durante a elaboração dessa dissertação.

Aos meus colegas – e amigos – de curso, por estarem comigo desde o início e pelo companheirismo.

A todos os meus professores, que contribuíram e muito para o meu crescimento intelectual e profissional.

Ao meu orientador, Profº. Dr. Antônio Gomes Nunes, pelo auxílio e dúvidas tiradas. Seu profissionalismo e competência são alvos de minha admiração.

Aos meus colegas de trabalho e aos meus irmãos da Assembleia de Deus, por compreenderam a minha ausência em algumas ocasiões e por sempre torcerem pelo meu sucesso.

"Somos todos geniais. Mas se você julgar um peixe por sua capacidade de subir em árvores, ele passará sua vida inteira acreditando ser estúpido."

(Albert Einstein).

RESUMO

A Olimpíada Brasileira de Matemática das escolas públicas (OBMEP) vem se estabelecendo como uma das mais importantes políticas públicas da Educação Básica, estando presente em quase cem por cento dos municípios brasileiros – atingindo o seu ápice em 2010, com uma participação de 19.665.928 estudantes, se tornando a maior olimpíada de matemática do mundo – ela age diretamente no sistema de ensino e influencia as avaliações de larga escala, como é o caso da Prova Brasil, auxiliando indicadores como o IDEB. Com uma proposta pautada no desenvolvimento do gosto dos estudantes pela aprendizagem em Matemática e na busca por jovens talentos, essa olimpíada é um campo fértil para se colocar em prática os estudos e técnicas de resolução de problemas. O método heurístico ou método de Polya para a resolução de problemas é uma estratégia didática/metodológica importante para o desenvolvimento intelectual do aluno e para o ensino de matemática. Sob esse aspecto, torna-se relevante procurar compreender de que forma a OBMEP pode ser trabalhada através de uma perspectiva de resolução de problemas, bem como avaliar se ela vem cumprindo o seu papel e se os pontos lá apresentados se adequam ao nível dos discentes. Este trabalho fundamenta-se principalmente nas produções de George Polya (1995) para os métodos de resolução de problemas e nos dois primeiros parâmetros da Teoria Clássica dos Testes (TCT), para o levantamento da pesquisa. A metodologia utilizada nessa dissertação inclui análise de dados e conteúdo. O estudo foi feito considerando-se uma amostra de 184 estudantes do sexto ao nono ano de uma escola pública de uma cidade interiorana do Estado do Rio Grande do Norte, e trata da análise da Primeira Fase da OBMEP de 2016, nos Níveis 1 e 2. Ao longo do mesmo percebeu-se a necessidade da Primeira Fase da OBMEP ser repensada, principalmente no que se refere ao seu nível de dificuldade, já que existem questões que precisam ser mais acessíveis ao nível dos discentes.

Palavras-chave: OBMEP. Resolução de Problemas. Ensino de Matemática.

SUMMARY

The Brazilian Mathematics Olympiads of public schools (OBMEP) has been established as one of the most important public policies of Basic Education, being present in almost one hundred percent of the Brazilian municipalities - reaching its apex in 2010, with a participation of 19,665,928 students, becoming the largest mathematical olympiad in the world - it acts directly in the education system and influences large-scale assessments, as it is the case with the Prova Brasil, supporting indicators such as the IDEB. With a proposal based on the development of students' taste for learning in Mathematics and the search for young talents, this Olympiad is a fertile field for putting into practice the studies and techniques of problem solving. The heuristic method or Polya method for solving problems is an important didactic / methodological strategy for the student's intellectual development and for teaching mathematics. In this regard, it is relevant to understand how OBMEP can be worked through from a problem-solving perspective, as well as to evaluate if it has fulfilled its role and if the points presented there fit the level of the students. This work is mainly based on the productions of George Polya (1995) for problem solving methods and on the first two parameters of the Classical Theory of Tests (CTT), to survey the research. The methodology used in this dissertation includes analysis of data and content. This study was made considering a sample of 184 students from the sixth to ninth grade of a public school in an inner city of the State of Rio Grande do Norte, and deals with the analysis of the First Phase of the OBMEP of 2016, in Levels 1 and 2. Throughout the same, it was realized that OBMEP's First Phase needs to be rethought, especially regarding to its level of difficulty, since there are issues that need to be more accessible to the students levels.

Keywords: OBMEP. Problem-solving. Mathematics Teaching.

SIGLAS

CGEE – Centro de Gestão e Estudos Estratégicos

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

IDEB – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

IMO – International Mathematical Olympiad (Olimpíada Internacional de Matemática)

IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada

MEC – Ministério da Educação

OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática

OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)

PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais

PIC – Programa de Iniciação Científica Jr

PICME – Programa de Iniciação Científica e de Mestrado

POTI – Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática

TCT – Teoria Clássica dos Testes

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Pensar matematicamente exige, entre outras coisas, uma tentativa de abstração e formalização de conceitos que requer a separação entre o pensamento e os propósitos e intenções imediatas. Mais do que isso, pensar matematicamente exige esforço, dedicação e persistência, mesmo diante dos erros. Segundo Teixeira (2004), "ensinar matemática é fazer ao aluno um convite à abstração", esse convite, no entanto, parece que só pode ser aceito quando o professor passa a adotar metodologias de ensino que possibilitem a aproximação entre o que o aluno domina e os significados matemáticos.

É função do professor aplicar em sala de aula ferramentas que possibilitem a aprendizagem do aluno e verificar se ele realmente as absorveu. Essa verificação é feita através da avaliação. É uma investigação que traz consigo etapas como: "percorrer caminhos, compreender processos, seguir vestígios e, com isso, inferir sobre o que não é diretamente observável [...]. Por este motivo, adota-se a perspectiva de avaliação da aprendizagem escolar como uma prática de investigação" (BURIASCO et. al., 2009, p. 73).

Um melhor desempenho em uma avaliação está estritamente ligado à forma como o conhecimento matemático é repassado ao aluno, como suas limitações são trabalhadas e quais as etapas que se deve cumprir para que o mesmo desenvolva o pensamento crítico e passe a usá-lo corretamente. A Resolução de Problemas pode ser vista como uma ferramenta facilitadora desse processo, tendência essa que vem ganhando cada vez mais destaque no campo educacional.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Matemática) sugerem que "no processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las". (BRASIL, 1998, p. 43). Nem toda situação pode ser considerada um problema; ela deve estar livre de procedimentos automáticos que levem a uma solução imediata e não deve exigir uma sequência de passos a serem seguidos.

As técnicas de Resolução de Problemas estão voltadas para auxiliar o professor na sua prática educacional, tornando-o um pesquisador de soluções bem fundamentadas para as questões propostas, e implementando mudanças concretas na construção de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos.

Diversas literaturas tratam desse assunto, cada uma com um certo tipo de especificidade, mas talvez a maior e mais respeitada de todas seja o método heurístico da resolução de problemas, proposto por George Polya, em seu livro “A Arte de Resolver Problemas”. Esta obra trata de quatro etapas fundamentais na tentativa de Resolução de Problemas e constitui a base de diversos trabalhos sobre o assunto. São elas: compreensão do problema; construção de uma estratégia de resolução; execução de uma estratégia escolhida e revisão da solução.

O método heurístico, aplicado à resolução de problemas, promove a aprendizagem da Matemática de forma significativa e eficiente. Indagações e pesquisas levam o discente a elaborar e questionar problemas que, por sua vez, acarretam na produção de mais problemas e questionamentos, e culminam na assimilação do conhecimento matemático.

O pensar matematicamente, principalmente através da Resolução de Problemas, tem uma grande importância no que se refere à aprendizagem em matemática e, consequentemente, pode expressá-la através de resultados e números. É aí que entra a avaliação.

> Assumir a avaliação da aprendizagem escolar como prática de investigação implica colocar-se em uma postura de investigação, o que exige, por parte do professor, o reconhecimento da existência de uma multiplicidade de caminhos percorridos pelos estudantes, a admissão de que, tal como eles, está em constante processo de elaboração de conhecimento. Sob esta perspectiva, a avaliação é então realizada como uma prática que possibilita ao professor a busca de desvelar o processo de aprendizagem dos estudantes, bem como acompanhar e participar dele (BURIASCO et. al., 2009, pg. 82).

Dentre as diversas formas de avaliação, existem as de larga escala, como a Prova Brasil, o ENEM e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), essa última, tema principal dessa dissertação. São avaliações onde se pode colocar em prática tudo o que foi assimilado nos estudos sobre a Resolução de Problemas.

No que se refere às olimpíadas de matemática, Saldanha (2014) diz que "a olimpíada se parece mais com uma pesquisa matemática, exige ideias do aluno. Os alunos mais talentosos veem formas novas de pensar no problema.” Sendo assim, a OBMEP se torna um ambiente fértil para a Resolução de Problemas, ela é repleta de questões que exigem do alunado muito mais do que a aplicação de fórmulas e conceitos.

Nesse contexto, foi desenvolvida uma análise das provas da primeira fase da OBMEP, nos níveis 1 e 2, bem como das respostas que os alunos de sexto ao nono ano do ensino fundamental apresentaram durante a realização do exame, sob uma perspectiva de Resolução de Problemas. A pesquisa fora realizada em uma escola localizada numa cidade interiorana do estado do Rio Grande do Norte. Com o estudo de caso, pretende-se contribuir para uma nova visão do professor a respeito da relevância que esse tipo de avaliação tem, no que se refere a apontar as dificuldades que os alunos apresentaram em determinadas questões e na busca por suas possíveis soluções. Esse estudo baseia-se na pela seguinte problemática: De que forma a OBMEP pode ser usada no ambiente de Resolução de Problemas?

O objetivo geral é, portanto, fazer uma análise de conteúdo dos itens das provas da OBMEP e suas respectivas respostas, pautada nos pressupostos da Resolução de Problemas.

Temos os seguintes objetivos específicos:

- Apontar a importância da Resolução de Problemas;
- Destacar o papel do professor e do aluno na Resolução de Problemas;
- Expor as etapas do processo heurístico da Resolução de Problemas;
- Apontar a importância da OBMEP;
- Fazer um estudo geral sobre o desempenho dos alunos da escola observada;
- Analisar as provas da primeira fase da OBMEP, nos níveis 1 e 2.

A escolha do tema foi motivada pela necessidade de se falar sobre um assunto tão importante para a aprendizagem em matemática, que é a Resolução de Problemas, introduzida numa das principais formas de avaliação educacional, que é a OBMEP. Logo, o presente estudo se apresenta relevante por relacionar dois pontos que têm uma importância crucial na melhoria do sistema educacional, no que se refere a matemática. Além disso, pode-se ter uma noção de como anda o desempenho dos estudantes da escola analisada e se o nível da OBMEP é adequado ao atual sistema de ensino.

A metodologia da pesquisa, que é de cunho descritivo e quantitativo, será desenvolvida com base em fontes primárias, sobre a temática que se tornaram públicos por meio de artigos, dissertações, livros, teses e revistas; como também através da análise dos gabaritos dos estudantes, por meio dos dois primeiros parâmetros da Teoria Clássica dos Testes (TCT).

Por fim, para conseguir atingir os objetivos anteriormente apontados, este trabalho apresenta-se em cinco capítulos. O primeiro capítulo trata da Resolução de Problemas, onde é feita uma breve reflexão sobre o ensino de matemática no Brasil, sobre essa tendência como metodologia de ensino e sobre a heurística da Resolução de Problemas. O segundo capítulo trata da OBMEP, destacando sua história, as olimpíadas nas quais ela se inspirou e analisando o seu impacto no sistema de ensino. O terceiro capítulo faz uma análise geral da primeira fase da OBMEP, dos níveis 1 e 2, baseada na Teoria Clássica dos Testes (TCT). Finalmente, no quarto e o quinto capítulos encontra-se uma análise individualizada do tema.

2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O professor pode tornar interessante o problema, concretizando-o.
(POLYA)

2.1 UMA REFLEXÃO SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA NO BRASIL

A matemática sistematizada, como a conhecemos hoje, nasceu na Grécia antiga e pouco mudou ao longo da História.

> Desde a obra Os Elementos de Euclides, no século III a.C., o ensino de Matemática foi fortemente influenciado pela sequência: definições, axiomas, postulados, teoremas, exercícios e problemas. Assim sendo, a exposição (em livros) do conhecimento geométrico da época, feita por Euclides, acabou sendo utilizada como uma referência para o ensino da Matemática. (BRESEGHELLO, 2016, p. 15)

O mesmo não podemos dizer sobre a forma de como o conhecimento matemático é repassado. No Brasil, desde o período colonial até o momento que nos encontramos, diversos modos de transmissão do saber matemático foram colocados em sala de aula, testados e aprovados – ou não. A criação da imprensa (1808), da biblioteca nacional (1810) e da Academia Real Militar (1881) foram todos fatos que influenciaram o estudo de Matemática no Brasil, esta última passou a oferecer cursos nessa área com duração de quatro anos.

De acordo com Braz (2013, p. 152):

> Em 1933 foi criada a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo e logo em seguida a Universidade do Distrito Federal, transformada em Universidade do Brasil em 1937. Nessas instituições inicia-se a formação dos primeiros pesquisadores modernos de matemática no Brasil.

A partir da década de 1950 – com os Congressos Nacionais de Educação Matemática em Salvador (1955), Porto Alegre (1957) e no Rio de Janeiro (1959) – intensificaram-se as discussões sobre as formas de ensino-aprendizagem em Matemática. Ainda assim, não existia quase pesquisa em didática e em novas alternativas para ensino de matemática.

Até a década de 60 os professores de matemática tinham a preocupação apenas de ensinar através de uma forma tipológica, repetitiva e que dava ênfase unicamente nas respostas dadas pelos alunos à alguma questão.

Esse fato mudou na década seguinte. A educação passou a refletir numa forma de ensino que tinha como objetivo construir, nos alunos, competências e habilidades mínimas que lhes servissem para desenvolver comportamentos e atitudes sociais. Os professores preocupavam-se em ensinar aos alunos certas habilidades básicas, porém, esse modo de ensinar pouco contribuiu para o ensino de Matemática.

O movimento conhecido como Matemática Moderna (cujo enfoque era apenas o relacionado à questão da linguagem matemática e a sua formalização), predominante no Brasil e em diversos outros países nas décadas de 1960 e 1970, não teve tanto êxito e a busca por uma metodologia de ensino que visasse preparar os discentes para o mundo exigia, mais e mais, conhecimentos revolucionários sobre a forma de ensinar. A urgência de ter um maior número de técnicos e cientistas com uma melhor formação, em conjunto ao discurso da inevitabilidade de uma formação científica mínima para concorrer, de forma justa com o processo de “tecnologização”, eram algumas das considerações para tal movimento.

De acordo com Onuchic e Allevato (2004, p. 215), essa forma de ensino “realçava muitas propriedades, tinha preocupação excessiva com abstrações Matemáticas e utilizava uma linguagem universal, precisa e concisa”. Nesta mesma linha, Pinto (2005, p. 2) diz que:

> desencadeado em âmbito internacional, esse movimento atingiu não somente as finalidades do ensino, como também os conteúdos tradicionais da Matemática, atribuindo uma importância primordial à axiomatização, às estruturas algébricas, à lógica e aos conjuntos.

Mesmo diante de tanta aceitação, esse método de ensino, ao invés de melhorar a aprendizagem em matemática, causou um agravamento dos problemas relacionados aos conceitos matemáticos, já que os estudantes absorviam ideias complexas, porém, não fixavam os conteúdos.

Em 1988 foi criada a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), na cidade de Maringá-PR, e isso oportunizou a congregação de profissionais para melhor discutirem aspectos metodológicos da sala de aula de Matemática. Essas metodologias passaram a ser denominadas tendências para a Educação Matemática.

> Temporalmente, as discussões acerca da Educação Matemática e suas tendências vêm se estendendo no Brasil por algumas décadas, e, entre suas idas e vindas, criou corpo somente nos últimos trinta anos, quando o tema adentrou as universidades e caracterizou-se como área de pesquisa. (BIZINOTO, 2016. p. 17)

Essas tendências em Educação Matemática são métodos e técnicas relativas ao ensino e aprendizagem que orientam nas formas de ensinar, aproximando os conceitos aos discentes. Elas têm buscado oferecer subsídios teóricos-metodológicos que ajudem a superação de dificuldades, tanto dos professores quanto dos alunos, durante o processo de aprendizagem e ensino da Matemática.

Segundo Flemming, Luz e Mello (2005, p. 15),

> uma tendência é uma forma de trabalho que surgiu a partir da busca de soluções para os problemas da Educação Matemática. A partir do momento que é usado por muitos professores ou, mesmo que pouca utilizada, resulte em experiências bem-sucedidas, estamos diante de uma verdadeira tendência.

É interessante notar que, em sala de aula, o professor pode optar por usar várias tendências em uma única atividade. Um dos fatos que contribuem para que isso ocorra, é a forma como essas tendências lhes foi transmitidas durante a graduação. Ele pode aproveitar esse potencial criativo e escolher atividades nas quais se usem essas várias tendências, já que a escola vive um período de transformação, necessitando assim, da introdução de novos conceitos, novos desafios.

> Quando falamos da Matemática, intrínseca a essa escola contemporânea, nos questionamos logo se aquela de outrora tem colhido os mesmos resultados agora. Por mais que esta questão germine inúmeros pontos de vista no que concerne ao sucesso ou não dos resultados, o fato é que algo parece ser consensual a toda comunidade acadêmica (não só de Matemática), profissionais de educação, pais e outros: o ensino de Matemática carece de novos modelos. (BIZINOTO, 2016, p. 19)

Essa forma de pensar, num primeiro momento, se contrapõe à aparente imutabilidade da Matemática. Mas o que se deve levar em conta é em como essa ciência deve ser introduzida em sala de aula e em como ela pode motivar o seu principal transmissor (o professor). A forma de se ensinar matemática deve adaptar-se aos novos modelos de sociedade que passamos a vivenciar.

Segundo Bizinoto (2016), mesmo não sendo – o estudo dessas metodologias de ensino – exclusivos da Educação Matemática, foi nela em que elas mais se desenvolveram e se consolidaram dentro dos programas de graduação e pós-graduação.

Dentre as principais tendências metodológicas, pode-se citar:

- História da Matemática;
- Etnomatemática;
- Jogos Matemáticos e Materiais concretos;
- Modelagem Matemática;
- Matemática Crítica;
- Tecnologias da Informação e Comunicação;
- Resolução de Problemas.

Destas tendências, destaca-se a Resolução de Problemas – objeto principal de estudo dessa dissertação.

A partir da década de 80, uma forma nova de se apresentar a resolução de problemas passou a ser evidenciado na literatura sobre educação matemática. Ela seria uma metodologia que permitiria ao aluno o prazer de superar os obstáculos, planejar ideias e vivenciar a verdadeira forma de se “fazer matemática”, os problemas passaram e ser apresentados como desafios.

A apresentação dos conteúdos partiria de uma situação-problema, passava para as definições, propriedades, exercícios e retornaria à situação-problema. Essa proposta trouxe mudanças significativas no ensino de matemática, pois os problemas passaram de meras aplicações de regras e fórmulas e tornaram-se modos eficazes da busca pelo conhecimento e pensar criticamente.

Segundo Varizo (1993), a resolução de problemas era entendida, por alguns professores da época, como um processo e, com isso, passou a haver a necessidade de desenvolver métodos, estratégias e heurísticas que fossem capazes de levar a solução de dado problema. Para esse pequeno grupo de educadores, a resposta final do problema era o que menos importava; eles destacavam o raciocínio usado durante esse processo. Embora essa forma de pensar fizesse parte da minoria daquela época, com o tempo essas ideias foram sendo aceitas como um dos principais objetivos do ensino da Matemática.

> Os adeptos desta concepção sofriam uma grande influência das teorias contidas no livro *“How to solve it?” (Como resolvê-lo?)*, de George Polya, direcionado aos professores do 2º grau, cuja primeira publicação foi em 1944. Deve-se ressaltar que desde a década de 80 até o presente momento, a grande maioria dos estudos e pesquisas relacionados à resolução de problemas têm suas bases fundamentadas nas teorias de Polya. (JREIGE, 2015, p. 36)

Sua proposta tinha como base a apresentação de técnicas de resolução de problemas matemáticos que motivassem e desenvolvessem a capacidade de resolver problemas.

Nos próximos itens, apresenta-se o estudo da Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino e a contribuição dessa tendência contribui para a busca do conhecimento matemático.

2.2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO

Trabalhar em sala de aula voltado para a resolução de problemas se encontra nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) como uma iniciativa para o desenvolvimento da atividade matemática, uma vez que “essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução” (BRASIL, 1998, p. 40).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais ainda consideram que a resolução de problemas, como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, pode ser fundamentada nos seguintes princípios:

- A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
- O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é proposta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;

- Aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;
- Um conceito matemático se constroi articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constroi um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;
- A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

A forma padrão de ensino, baseada na sequência "definição → exemplo → exercícios", é levada a um patamar superior quando inserimos o conceito de resolução de problemas. Dentro do contexto de educação matemática,

> um problema, ainda que simples, pode suscitar o gosto pelo trabalho mental se desafiar à curiosidade e proporcionar ao aluno o gosto pela descoberta da resolução, é comum os alunos passarem muito tempo tentando resolver um problema ou um desafio [...]. Nesse sentido, os problemas podem estimular a curiosidade do aluno e fazê-lo a se interessar pela Matemática. (BRAZ et. all, 2013, p. 149)

Desde que adquirimos a capacidade de raciocinar nos encontramos diante das mais diversas situações-problemas. Uma simples ida ao supermercado faz-nos refletir sobre o que será mais vantajoso comprar, levando em consideração os fatores quantidade, qualidade e preço. A compra de um eletrodoméstico, o parcelamento de uma dívida à uma determinada taxa de juros, a divisão da conta numa reunião entre amigos, tudo isso são exemplos do que podemos chamar de situações-problemas, já que, segundo Dante (2007, p. 9) elas são caracterizadas como "qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la".

Faz-se necessário, inicialmente, apontar em que o problema difere do exercício: "exercício é uma atividade de adestramento no uso de alguma habilidade ou conhecimento matemático, como algoritmo ou fórmula já conhecida, e envolve mera aplicação de resultados teóricos; problema, necessariamente, envolve invenção e/ou criação significativa”. (BÚRIGO et al., 2012, p. 18).

O que pode ser exercício para alguns, pode vir a se tornar problema para outros. Isso depende da forma como o indivíduo reage diante do questionamento e de quais ferramentas eles dispõe no momento para resolvê-lo. Uma simples equação polinomial do segundo grau pode cumprir esses dois papeis.

2.2.1 O papel do aluno

Para Dante (1998), são objetivos da resolução de problemas:

- **Fazer o aluno pensar produtivamente:** O pensamento produtivo gera novas e diferentes soluções, inventando, buscando e usando novos métodos, enquanto o pensamento reprodutivo apenas reproduz a aplicação de métodos já conhecidos.
- **Desenvolver o raciocínio do aluno:** Promovendo o desenvolvimento da habilidade de elaborar raciocínios lógicos e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que possa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia a dia.
- **Ensinar o aluno a enfrentar situações novas:** Buscando desenvolver nele iniciativa, espírito explorador, criatividade e independência.
- **Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática:** Favorecendo o desenvolvimento de uma atitude positiva do aluno em relação a matéria e o uso conveniente dos algoritmos das quatro operações ou das passagens na resolução de situações-problema.
- **Tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras:** Trabalhar de modo ativo desperta o prazer de estudar matemática, aumenta a autoestima, suscita a curiosidade e desencadeia um comportamento de pesquisa, diminuindo a passividade e conformismo.
- **Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas:** Esse mecanismo auxilia a análise e a solução de problemas em que um ou mais elementos desconhecidos são procurados e podem ser aplicadas em outras situações.

- **Dar uma boa base matemática às pessoas:** Formar cidadãos matematicamente alfabetizados, que saibam como resolver, de modo inteligente, seus problemas cotidianos, para que desenvolva desde cedo a capacidade de enfrentar situações-problema.

Esses e outros tópicos, que serão explorados no decorrer deste capítulo, são os pontos norteadores da Resolução de Problemas. O desenvolvimento de algumas dessas habilidades (e porque não dizer de todas?) é de suma importância para o aluno e a comunidade escolar em que ele está inserido.

Segundo Mendes (2009) dois fatores devem ser notados quando nos aprofundamos nos estudos de resolução de problemas. O primeiro está relacionado à verificação de como os alunos realizam essa tarefa, notando aquelas que apresentam mais facilidade durante esse processo e identificando quais são as características destes que são primordiais para essa tendência metodológica. O segundo é estimular no aluno, através do processo heurístico, a capacidade de resolver problemas, que se resume em organizar, de forma sistemática, certos passos que tenham o intuito de melhorar o desempenho dos alunos durante e execução das tarefas.

O processo de ensino de matemática, através da resolução de problemas, tem o objetivo de tirar o aluno da sua zona de conforto – em aulas que predominam a resolução de exercícios rotineiros, onde o mesmo está acostumado a seguir uma regra preestabelecida, sem que culmine na habilidade de pensar de forma crítica e reflexiva – e situá-lo em um ambiente que promova o desenvolvimento do raciocínio e o pensar criticamente. Segundo Vila e Callejo (2006, p.29),

> o ensino/aprendizagem por meio da resolução de problemas é uma tentativa de modificar o desenvolvimento habitual das aulas de matemática. Os problemas são um meio para pôr o foco nos alunos, em seus processos de pensamento e nos métodos inquisitivos; uma ferramenta para formar sujeitos com capacidade autônoma de resolver problemas, críticos e reflexivos, capazes de se perguntar pelos fatos, suas interpretações e explicações, de ter seus próprios critérios, modificando-os, se for necessário, e de propor soluções.

O hábito de resolver problemas deve ser algo comum na vida escolar do aluno, ele deve estar preparado a trabalhar com situações-problemas cada vez mais complexas, pois isso fará com que ele possa desenvolver a persistência e a vontade de buscar soluções diversas. Outro ponto é que essa busca corriqueira fará com que ele adquira autoconfiança para resolver novos problemas que se apresentarão ao longo de sua vida escolar.

Polya (1995) nos apresenta uma analogia interessante:

> A resolução de problemas é uma habilitação prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d’água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os. (POLYA, 1995, p. 3).

A imitação leva à prática e a prática desenvolve a capacidade de argumentação, ocasionando, se não na solução, pelo menos na interpretação correta do problema e no desenvolvimento da habilidade de pensar criticamente, com base nos problemas semelhantes já resolvidos.

Toda e qualquer situação pode ser reconhecida como um problema matemático, desde que

> exista um reconhecimento dela como tal, e na medida em que não se disponha de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-la de forma mais ou menos imediata, sem exigir, de alguma forma, um processo de reflexão ou tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos. (POZO e ECHEVERRÍA, 1998, p. 15).

O que deve ser posto em destaque é a questão da contextualidade e a relação que duas ou mais disciplinas da matemática têm entre si – interdisciplinaridade – isto é, na resolução de problemas essas conexões são mais do que permitidas, são essenciais. A relevância cultural do tema, dentro ou fora da matemática, sua importância ao longo da história; são todos fatos que devem ser colocados em destaque. As funções, por exemplo, podem ser vistas em conjunto com as sequências, em especial as progressões aritméticas e geométricas – que nada mais são que funções afins e exponenciais, respectivamente, só que observadas de um outro ponto de vista. O cálculo de área de triângulos estudado na geometria analítica e a sua relação com o determinante, também são exemplos interessantes da relação entre áreas aparentemente distintas da matemática.

Um dos motivos da resolução de problemas ser tão importante, está no fato dela possibilitar aos alunos a capacidade de gerenciar informações presentes tanto dentro da sala de aula, quanto fora dela. Os conceitos e procedimento matemáticos podem ser ampliados consideravelmente quando se trabalha dentro dessa perspectiva.

> É possível por meio da resolução de problemas desenvolver no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, independência e a habilidade de elaborar o raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem no seu dia a dia, na escola ou fora dela (DANTE, 2007, p. 11-12).

Esse hábito equivale a entrar numa jornada na busca pelo conhecimento matemático, já que, para encontrar uma solução, os discentes devem aplicar grande parte do que sabem. Esse caminho é, antes de tudo, uma forma de fazer matemática; onde o aluno é levado à reflexão, que auxilia no seu modo de pensar, no aprimoramento de conhecimentos adquiridos (e desenvolvimento dos que possam a vir adquirir), na sua imaginação e curiosidade – estas últimas, características indispensáveis de um bom matemático (ou de alguém que caminha para isso).

A resolução de problemas também é responsável por ligar a Matemática mais intuitiva, mais baseada na experiência (experimental, podemos assim dizer), com a Matemática formal, onde os conceitos, teoremas e proposições devem estar rigorosamente ordenados. Isso faz com que os princípios que regem esta última fiquem mais compreensivos para os estudantes, que passam a apropriar-se do conteúdo e estabelecer conexões através da experimentação e da tentativa e erro.

Ela pode também levar o aluno à busca de soluções não triviais para o que está sendo proposto, pois alguns problemas exigem o máximo de criatividade para a construção dos resultados e levam à quebra de paradigmas. Essa forma de pensamento – que aborda um problema através de uma perspectiva não usual e que, por isso, se difere do pensamento linear (tradicionalmente aplicado nas escolas) – é o que chamamos de pensamento lateral, descrito por Pereira (2013) da seguinte forma:

> O pensamento lateral pode ser definido como uma heurística para solução de problemas, através da qual o problema é analisado por vários ângulos, ao invés de ser atacado de frente. Em oposição ao pensamento linear, tradicionalmente aplicado na escola básica, o pensamento lateral visa um processo não linear de raciocínio, para checar suposições, mudar perspectivas e gerar novas ideias. (PEREIRA, 2013, p. 25)

Nessa forma de pensar por vários ângulos, o que importa não é a solução, mas sim a criatividade com a qual o aluno a alcança e isso é muito salutar, pois, apesar de muitos problemas não admitirem uma solução divergente da que se espera, essa criatividade pode ser usada como uma catapulta para a descoberta de novos meios de obtenção de respostas. Cabe ao professor lapidar essa criatividade e fazer com que o aluno passe a usá-la de forma coerente e coesa na busca pelo saber matemático.

2.2.2 O papel do professor

O papel do professor é primordial na realização do processo heurístico, pois é sua função selecionar o problema e direcionar cada etapa do método, também está a seu cargo determinar as habilidades que os discentes devem adquirir. A forma dele apresentar o problema deve "atiçar" a curiosidade dos alunos e a vontade deles de chegar à solução. Segundo Vila e Callejo (2006, p. 28) "um problema não pode ser desligado dos alunos aos quais é proposto nem da intencionalidade do professor que o selecionou para uma situação concreta de ensino-aprendizagem".

Segundo Varizo (1993), é unânime entre os professores de matemática que a resolução de problemas é importante para o processo de ensino-aprendizagem em matemática; ainda assim, não existe um tempo fixo em sala de aula para a introdução desse conceito. Ela ainda comenta as diferentes interpretações por parte dos professores no que poderia ser considerado uma solução de problema. Alguns professores acreditam que resolver problemas é encontrar uma solução correta – o que não teria relação alguma com o processo que levou o aluno até ela – e apenas sua resposta final seria avaliada, a essência do problema em si se resolveria em apenas certo ou errado. De acordo com Varizo (1993, p. 3)

> Esses professores ignoram o fato de que o *"saber como"* não implica o *"saber porque"*, nem o *"saber utilizar"*. Os alunos, ao desenvolverem operações matemáticas pela imitação e memorização, sem compreensão, têm poucas possibilidades de se apropriarem do conhecimento matemático como uma de suas ferramentas para atuar no mundo e, muito menos, como ciência.

A grande maioria das pesquisas feitas em escolas do Brasil, sobre a disciplina que o alunado sente mais dificuldades, apontará a Matemática na primeira colocação. Ela é considerada a disciplina mais difícil de ser compreendida. O que mais nos surpreende é que, quando perguntamos o porquê de tal afirmação, encontramos respostas insatisfatórias, muitas vezes monossilábicas. Com base nisso, um dos desafios que o professor de Matemática tem de superar em sala de aula é romper o paradigma de que tal disciplina está restrita somente a uma parcela privilegiada de alunos, com um grau intelectual superior aos demais e detentores do posto de melhores da turma.

Sendo assim, as dificuldades apresentadas pelos alunos em compreender a matemática como um todo – principalmente em exercícios que apresentam perguntas além do *calcule* e *determine* – devem ser superadas. A resolução de problemas é um tópico importantíssimo na concretização desse processo. Essa forma de ensinar matemática promove o questionamento e leva à pesquisa e à elaboração de estratégias de resolução, criando novos questionamentos e abrindo o caminho para se estudar novas situações-problemas. É um processo cíclico. Segundo Carvalho (1994, p. 82),

> Não se aprende Matemática para resolver problemas e, sim, se aprende Matemática resolvendo problemas. Diante dessa perspectiva, qualquer situação que vise favorecer o aprendizado deve constituir-se em situação problema para o aluno a que se destina, ou seja, a proposta de tarefa feita pelo professor deve ser tão interessante que crie, na classe, um clima de pesquisa, de busca de solução para os problemas que emergirem da proposta. Nessa perspectiva não existe "aula" de resolução de problemas e sim situações de ensino onde, a partir de pesquisas sobre problemas emergentes ou de propostas problematizadoras, é elaborado o conhecimento matemático, e essa elaboração suscita novos problemas.

Evitar a mecanização de conceitos e a memorização de fórmulas – sem a compreensão do seu verdadeiro sentido – e tornar o estudo da Matemática em algo prazeroso e além disso, significativo para o aluno, tem sido um dos maiores objetivos da prática docente nos últimos anos. Polya (1995) diz que o método de resolução de problemas é uma das principais estratégias para se atingir tal objetivo. Ele ainda diz que esse processo pode ser muito prazeroso e até mesmo desafiador para o discente:

> O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiência tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda vida, a sua marca na mente e no caráter (POLYA, 1995, p. 5).

Davis e Mckillip (1997, p. 114) comentam que esse “talvez seja o objetivo mais importante, uma vez que a resolução de problemas – em matemática, ciências, trabalho e no cotidiano – é o objetivo por excelência do estudo da matemática”. Branca (1997, p. 5) completa dizendo que “este ponto de vista influencia a natureza de todo currículo matemático e tem implicações importantes para a prática em sala de aula”.

O professor deve estar preparado para nortear o discente até o problema, para que o mesmo perceba que, muitas das vezes, a resolução do mesmo aparentemente impossível, se resume em apenas uma simples equação. É preciso pensar criticamente, inquirir, problematizar – no que se refere à formulação de perguntas relacionadas aos problemas e a separação das que serão ou não úteis na busca pela resposta – e, algumas vezes, relacionar com outro problema que ele já resolvera, talvez um pouco mais simples e claro. Deve-se procurar, em cada problema, um atrativo que se destaca no mesmo e trabalhar em cima disso.

Para Polya (1995, p. 11):

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. Por isso, se um professor “desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas” dos alunos, “apresentando-lhes problemas adequados aos seus conhecimentos” poderá despertar neles o gosto pelo pensamento independente e proporcionar-lhes alguns meios para o concretizarem.

A função de mediador no processo de ensino-aprendizagem confere ao professor as condições necessárias promover debates entre os discentes, reformular e valorizar as soluções mais adequadas. Como facilitador desse processo, ele atribui ao aluno alegria da descoberta, dando-lhes as etapas e ferramentas para o discente chegar à solução, porém, sem expor tudo de uma só vez. O trabalho em equipe também pode ser inserido nesse contexto, já que a partir disso os alunos podem confrontar opiniões e argumentar ideias – de forma sadia, obviamente. O professor ainda deve estar atento aos erros cometidos pelos alunos e utilizá-los para promover a reflexão; nessa etapa, o docente também pode verificar se o seu papel de mediador precisa sofrer algumas alterações.

> ... A melhor coisa que pode um professor fazer pelo seu aluno é propiciar-lhe, discretamente, uma ideia luminosa. As indagações e sugestões que passamos a discutir tendem a provocar tal ideia.
>
> Para sentir a posição do estudante, o professor deve pensar na sua própria experiência, nas dificuldades e sucessos que ele mesmo encontrou ao resolver problemas. (POLYA, 1995, p.9)

A matemática trabalhada em sala de aula, muitas vezes, é impregnada de etapas padronizadas, que se torna desinteressante tanto para o professor como principalmente para os alunos. O trabalho do professor se resume simplesmente ao ensino de fórmulas prontas e que não transmite ao aluno a perspectiva de criação.

Infelizmente, a maioria dos professores empregam a resolução de problemas como uma forma de treinar o uso de algoritmos. Dá-se determinado assunto e, em seguida, são selecionadas questões cuja solução depende das fórmulas memorizadas naquela aula. O pensar matematicamente é deixado de lado e o problema é rebaixado a um simples exercício.

> O aprendizado da Matemática depende muito de uma linguagem e de símbolos próprios e específicos. Essas linguagens e simbolismos a tornam, por sua vez, mais inacessível. Pode-se dizer que são um “mal necessário”. É interessante observar que esses elementos decisivos no processo da Matemática demoraram muito para se desenvolver com toda força, consolidaram-se só no século XVI com o desenvolvimento da notação e do formalismo da álgebra. (MARKARIAN, 2004, p. 276, 277).

A maioria dos professores escolhem trabalhar na sua zona de conforto, com aulas previsíveis e em tudo que pode ocorrer na sala de aula estará cuidadosamente esquematizado – não confundir isso com o plano de aula; o mesmo é indispensável – Quando saem dessa zona, através da resolução de problemas, o professor deve estar preparado para correr riscos, saber e enfrentá-los e achar o melhor caminho para o ensino-aprendizagem.

Quando apresentamos a nossa solução, apontamos os passos que demos para chegar à resposta, estamos simplesmente tornando pública a nossa maneira particular de pensar. Cada pessoa tem uma forma única de resolver um problema e o aluno, dentro desse contexto, não pode ser tratado de forma diferente. O professor deve estar preparado para analisar da melhor forma possível essa situação:

> Ao avaliar uma situação, o professor não apenas constata e pontua determinada dificuldade do aluno. O professor também decide que tipos de encaminhamentos e intervenções deve inserir em sua prática pedagógica para que o aluno supere a sua dificuldade inicial. Nesse caso, o professor considera não apenas o que o aluno foi capaz de fazer, mas também aquilo que ele já sabe fazer, para, a partir disso, planejar as atividades seguintes (CHAMORRO, 2007, p. 9).

Romanatto (2012) nos apresenta alguns tópicos indispensáveis para se ter um bom professor de Matemática; o docente dessa área deve:

- Conhecer os grandes problemas que originaram a construção de determinado assunto;
- Conhecer as orientações metodológicas empregadas na construção de determinada parte da Matemática;
- Conhecer os obstáculos epistemológicos ou didáticos relacionados aos mais diversos conteúdos da Matemática;
- Saber selecionar conteúdos adequados e que sejam acessíveis aos estudantes e suscetíveis de interesse;
- Ter algum conhecimento dos assuntos matemáticos atuais;
- Estar preparado para aprofundar conhecimentos assim como adquirir outros;
- Ter conhecimentos de pesquisas em educação matemática.

É importante dizer que todos esses tópicos podem (e devem) ser levados às outras áreas do conhecimento; bastando assim, trocar o termo matemática pela área que se deseja estudar.

A interação aluno-docente que culmina no desenvolvimento da aprendizagem deve estar pautada no estado em que se encontra o conhecimento e sob forte influência pelos interesses de ambas as partes. A parte conservadora – representada pelo docente – possui grandes dificuldades para manter-se atualizado com os conhecimentos atuais, visto que são poucos os bem remunerados e que possuem mais tempo de ter acesso às informações. Essa falta de planejamento atrapalha a sua função de mediador e, consequentemente, a aprendizagem dos alunos.

Outro ponto que vem a prejudicar a aprendizagem em matemática é que muitos alunos não sabem interpretar o que a maioria dos problemas querem dizer. A dificuldade de tradução de símbolos matemáticos para a nossa língua usual (português) ou vice-versa está entre os pontos de maior destaque para que isso aconteça.

> O aluno muitas vezes não resolve problemas de matemática, não porque não sabe matemática, mas porque não sabe ler o enunciado do problema [...] Não basta ensinar só as relações matemáticas: é preciso também o português que a matemática usa. (CAGLIARI (2003) apud ITACARAMBI, 2010, p.13-14)

> A questão da leitura de um problema pode ser um aspecto a ser considerado no trabalho com os estudantes. Dificuldades com o vocabulário ou com o simbolismo matemático podem ser determinantes para a compreensão ou não do enunciado do problema. (ROMANATTO, 2012, p. 305).

Essa relação matemática-português deve ser colocada em destaque na sala de aula. A interseção entre essas disciplinas não é vazia e isso faz com que um bom professor de matemática, também seja um bom conhecedor da língua portuguesa. Um exemplo disso, é o estudo da lógica matemática – parte essencial no estudo das demonstrações matemáticas – o domínio da mesma requer o domínio das conjunções, noções de período simples e composto e diversos outros assuntos estudados em português. O professor de matemática deve estar preparado para fazer essas conexões.

É interessante notar que essa metodologia de ensino – através da resolução de problemas – traz em seu bojo as principais dimensões do trabalho docente: o ensino, aprendizagem e a avaliação. Entretanto, ao passo em que os alunos se envolvem na tarefa de resolver problemas o professor nota que alguns se envolvem mais, outros menos e têm aqueles para os quais essa tarefa é indiferente. Com isso, diversas formas de avalição devem ser utilizadas, até aquelas mais formais.

Ao perceber que faz-se necessário essas diversas formas de avaliar, o professor desenvolve meios pelos quais o aluno pode percorrer e se aproximar do tão sonhado saber matemático.

> [...] ao se apropriarem de concepções e conhecimentos coerentes com a metodologia de ensino através da resolução de problemas, os professores podem até mesmo em um simples exercício do tipo “adicione 30 + 28”, transformá-lo em um problema para os estudantes ao solicitar que eles o resolvam de várias formas e as justifiquem. (ROMANATTO, 2012, p. 304-305).

Talvez um dos pontos principais para a implantação da metodologia de resolução de problemas em sala de aula é que o próprio professor deve ser um resolvedor de problemas. Com isso ele deve vivenciar esse tópico e, através disso, aplicar as suas próprias experiências na sala de aula. A forma como ele deve se expressar matematicamente, dando desenvolvimento ao raciocínio dedutivo, é imprescindível na busca por aulas mais voltadas para esse tema. Ele também deve estar aberto às sugestões, mudar – se for o caso – de opinião e se corrigir, quando necessário. “Nesse contexto, o professor sendo também um resolvedor de problemas pode entender melhor, especialmente, as dificuldades que os estudantes enfrentam diante de uma tarefa ou atividade cuja solução é desconhecida.” (ROMANATTO, 2012, p. 305).

O problema deve ser interessante e a sua solução não deve ser a etapa final; mas sim, a passagem para se explorar novas formas de respostas e analisar o que podemos fazer a partir disso. Será que dá para melhorar o problema? Que conceitos matemáticos eu utilizei? A partir dele, será que posso criar novos problemas?

> A resolução de problemas não deve se constituir em experiências repetitivas, através da aplicação dos mesmos problemas (com outros números) resolvidos pelas mesmas estratégias. O interessante é resolver diferentes problemas com a mesma estratégia e aplicar diferentes estratégias para resolver o mesmo problema. Isso facilitará a ação futura dos alunos diante de um problema novo (DANTE, 2007, p.59).

Deve-se aprender matemática para resolver problemas e resolver problemas para aprender matemática. Essa aprendizagem deve ser entendida como algo muito maior que memorizar fórmulas e resultados. O pensar e o saber matemático vai muito além disso; ele é construído de forma conjunta. As áreas da matemática – aritmética, álgebra, geometria, estatística, dentre outras – não são ilhas inalcançáveis e independentes; todas fazem parte dos mesmo arquipélago e a facilidade com que podemos passar de uma para a outra e retornar à anterior é absurda.

O processo de aprender matemática é lento e contínuo, baseado numa exaustiva atividade de resolução de problemas, interpretação de fórmulas, elaboração de conjecturas, capacidade de argumentação e diversos outros pontos; mas é ao mesmo tempo, prazeroso. Resolver um problema particularmente difícil causa uma sensação única naquele que se arrisca em se aventurar por essa área do conhecimento.

2.3 A HEURÍSTICA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tendo compreendido a importância da resolução de problemas, faz-se necessário apresentar os seus diferentes tipos e, principalmente, os métodos que podem ser considerados nas tentativas de resolução.

2.3.1 Os tipos de Problemas

Nas inúmeras literaturas sobre a resolução de problemas, podemos encontrar diversas listas e tópicos acerca dos tipos de problemas que possam existir. Tais classificações nem sempre são fáceis. “Pode-se prestar atenção à natureza do problema ou ao contexto no qual se resolve, ao componente sintático, às relações matemáticas ou à sua estrutura lógica, etc.”. (HUETE e BRAVO, 2006, p. 139)

Com base nisso, apresentaremos a seguir cinco classificações feitas por autores que são mais condizentes com o tema desta pesquisa.

Para Varizo (1993, p.4) os problemas podem ser “[...] classificados em: problemas rotineiros, não-rotineiros, reais e recreativos”.

- **Problemas Rotineiros**

É aquele que o aluno faz uso de um algoritmo preestabelecido pelo professor e o emprega através de uma sequência lógica. São os chamados problemas de aplicação e são apresentados geralmente após a exposição do conteúdo. Não desperta no discente a curiosidade e não desenvolve o pensamento abstrato, uma vez que o único trabalho que o aluno tem é o de imitar os procedimentos feitos pelo professor.

São exemplos desse tipo de problema:

1. A terça parte de um número, somada com cinco é igual a metade desse número. Qual é esse número?
2. Resolva a equação $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 60$.

- **Problemas Não-rotineiros**

Varizo (1993, p. 5) define esse tipo de problema como “aqueles cuja estratégia de solução não está contida no enunciado, exigindo do aluno o desenvolvimento de raciocínio mais complexo do que os problemas anteriores, tais como: estabelecer um plano de solução, levantar hipóteses, fazer conjecturas, organizar dados em tabelas, elaborar gráficos”.

Esse tipo de problema exige mais do aluno e, por consequência, produzem um conhecimento mais profundo que o tipo de problema anterior. Ainda assim, a matemática utilizada para resolvê-lo está lá, o aluno só precisa reconhecê-la e usá-la da maneira adequada. Esse tipo de problema pode apresentar várias soluções e várias estratégias.

São exemplos desse tipo de problema:

1. Qual é a área de um quadrado de perímetro igual a 20 m?
2. Determine um número que quando dividido por 3 deixa resto 2, quando dividido por 4 deixa resto 3 e quando dividido por 5 deixa resto 4.

- **Problemas Reais**

É semelhante às situações-problemas e são caracterizados por perguntas que estejam contidas no convívio social do aluno, pois são problemas que estão mais próximo da realidade dos mesmos. Como no caso anterior, também pode apresentar várias soluções, mas sempre haverá aquela que mais se adequa ao problema proposto. O trabalho em grupo é mais que necessário, pois esse tipo de problema necessita a coleta e análise de informações, o que leva à uma tarefa muitas vezes exaustiva.

São exemplos desse tipo de problema:

1. Suponha que você é chefe de uma família composta por cinco pessoas (incluindo você), cuja renda é de dois salários mínimos por mês, como você administraria esse valor, sabendo que 60% deve ser usado na alimentação?
2. Pesquise na sua cidade sobre os ramos comerciais mais presentes e verifique qual é o mais rentável. Considerando que você tenha R$ 30.000,00 para aplicar, de que forma você usaria esse dinheiro?

- **Problemas Recreativos**

São os relacionados aos aspectos históricos de um determinado assunto, jogos de quebra-cabeça e lendas (como a do xadrez e a do tangram). Segundo Gardner (apud Varizo, 1993, p. 9), “a matemática recreativa pode ser considerada simplesmente como matemática, com um toque de curiosidade ou diversão”.

É um tipo de problema controverso em relação aos professores mais conservadores, que o veem apenas como uma forma de diversão e brincadeiras, que não levam à aquisição do conhecimento matemático. Isso vem mudando no decorrer do tempo, pois percebeu-se que aplicar esse tipo de problema em sala de aula auxilia na introdução de aspectos sociais, racionais, legislativos, lúdicos, cognitivo e interpretativo pois os alunos trabalham em grupo, montam estratégias que podem levar à vitória, devem cumprir as regras, têm prazer em resolvê-lo, além de aprender ou reforçar conteúdos matemáticos que estão relacionados à solução do problema.

São exemplos desse tipo de problema:

1. Jogo do Nim.
2. Torre de Hanoi.

Polya (1995), um dos autores mais citados no corpo dessa dissertação e protagonista do próximo tópico desse capítulo, também deu a sua contribuição no processo de classificação dos problemas. Ele dividiu-os em quatro tipos: problemas rotineiros, problemas de determinação, problemas de demonstração e problemas práticos:

> **Problemas rotineiros:** De modo geral, um problema será rotineiro se ele puder ser solucionado pela substituição de dados específicos no problema genérico antes, ou pelo seguimento, passo a passo, de algum exemplo muito batido. [...] Desse modo, o aluno de nada mais precisa, além de um pouco de cuidado e de paciência para seguir uma fórmula preestabelecida, sem ter a oportunidade de usar o seu discernimento nem as suas faculdades inventivas.
> **Problemas de determinação:** tem por objetivo encontrar um certo objeto, a incógnita. Os problemas de determinação podem ser teóricos ou práticos, abstratos ou concretos, problemas sérios ou simples enigmas. Podemos procurar determinar incógnitas de todos os tipos; podemos tentar encontrar, calcular, obter, produzir, traçar, construir todos os tipos imagináveis de objetos.
> **Problemas de demonstrações:** têm por objetivo mostrar conclusivamente que certa afirmativa, claramente enunciada, é verdadeira ou, então, que é falsa. Temos de responder à pergunta: esta afirmativa é verdadeira ou falsa? E temos de respondê-la conclusivamente, quer provando-a verdadeira, quer provando-a falsa.
> **Problemas práticos:** são diferentes, em diversos aspectos, dos problemas puramente matemáticos, muito embora os principais motivos e processos sejam essencialmente os mesmo e ambos os casos. Os problemas práticos da Engenharia geralmente envolvem problemas matemáticos. Um exemplo muito ilustrativo de problema prático é a construção de uma barragem sobre o rio. (POLYA, 1995, p. 124)

Resnick apud Sousa (2005) classifica os problemas nas seguintes categorias:

- **Sem algoritmização:** cujo caminho da resolução é desconhecido, pelo menos em grande parte.
- **Complexos:** precisam de diferentes estratégias e de um conhecimento sistemático.

- **Exigentes:** a solução só é encontrada após um intenso raciocínio e não por uma forma mecânica de resolução.
- **Exigem lucidez e paciência:** um problema com uma grande multiplicidade de dados e incertezas que exigem observação e planejamento nas ações até encontrar um caminho ideal para sua resolução.

Dante (2007, p. 16) também dá a sua contribuição e classifica os problemas e vários tipos de exercícios em seis categorias:

> - **Exercícios de reconhecimento**: onde o objetivo é fazer com que o aluno reconheça, identifique ou lembre um conceito;
> - **Exercícios de algoritmos:** servem para treinar a habilidade em executar um algoritmo e reforçar conhecimentos anteriores;
> - **Problemas - padrão:** a solução já está contida no enunciado, e a tarefa básica é transformar a linguagem usual em linguagem matemática, com o objetivo de recordar e fixar os fatos básicos através dos algoritmos das quatro operações;
> - **Problemas-processo ou heurísticos:** sua solução envolve as operações que não estão contidas no enunciado, exigem do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação;
> - **Problemas de aplicação:** também chamados de situações-problema, são aqueles que retratam situações reais do dia a dia e que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos;
> - **Problemas de quebra-cabeça:** constituem a chamada Matemática recreativa, e sua solução depende quase sempre de um golpe de sorte ou da facilidade em perceber algum truque.

Segundo Carvalho (2010, p. 30), além dos que envolvem ideias mais simples – como comparar, juntar e combinar – os problemas podem apresentar um maior grau de complexidade e serem classificados em:

> - **Problemas não convencionais:** também chamados de problemas heurísticos, por alguns autores. Para resolver esse tipo de problema, há necessidade de elaborar um raciocínio mais complexo, pois as operações não estão evidenciadas no enunciado. Esse tipo de problema desafia o aluno a usar sua criatividade na elaboração de estratégias de resolução.
> - **Problemas do cotidiano:** também chamados de problemas de aplicação, fazem parte do cotidiano da escola, do aluno. São os tipos de problemas mais interessantes, pois sua resolução envolve levantamento de dados, confecção de gráficos, tabelas, desenhos, aplicação das operações. Podem ser apresentados em forma de projetos envolvendo outras áreas do conhecimento.

Não é unânime quando se refere a quais são realmente os tipos de problemas. Esses e outros autores fazem uso de diferentes enfoques para poder classificar os problemas. Enquanto uns se baseiam nas operações matemáticas utilizadas, nas estruturas lógicas, na natureza do problema, outros se baseiam no processo de resolução e nas características do sujeito. Pozo e Echeverría (1998, p. 20) confirmam isso ao dizer que "existem inúmeras classificações das possíveis estruturas dos problemas, tanto em função da área à qual pertence e do conteúdo dos mesmos como do tipo de operações e processos necessários para resolvê-los".

2.3.2 As quatro etapas de resolução de problemas, segundo Polya[1]

A capacidade de pensar criticamente, de se posicionar frente aos desafios postos no decorrer da vida, de organizar informações e estabelecer um critério de importância para avaliá-las, são essenciais para o desenvolvimento do ser humano. É dentro desse contexto que surge a resolução de problemas. Segundo Polya (1995, p. 159) "Resolver problemas é uma atividade humana fundamental. De fato, a maior parte do nosso pensamento consciente relaciona-se com problemas. A não ser quando nos entregamos a meros devaneios ou fantasias, os nossos pensamentos dirigem-se para um fim, procuramos meios, procuramos resolver um problema".

O ensino de matemática no Brasil é pautado sob a perspectiva de resolução de problemas. Ela está entre um dos objetivos definidos pelo Ministério da Educação (MEC) para o ensino de matemática, na justificativa de que ela constroi no aluno um conhecimento científico, por causa de suas etapas sistematizadas e experimentação. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) – PCNEM (2000, p. 21), dizem que o ensino da matemática

> [...] deve contemplar formas de apropriação e construção de sistemas de pensamento mais abstratos e ressignificados, que as trate como processo cumulativo de saber e de ruptura de consensos e pressupostos metodológicos. A aprendizagem de concepções científicas atualizadas do mundo físico e natural e o desenvolvimento de estratégias de trabalho centradas na solução de problemas é finalidade da área, de forma a aproximar o educando do trabalho de investigação científica e tecnológica, como atividades institucionalizadas de produção de conhecimentos, bens e serviços.

[1] George Polya (1887-1985) foi um dos matemáticos mais importantes do século XX. [...] Sua maior contribuição está relacionada à heurística de resolução de problemas matemáticos com várias publicações relacionadas ao assunto, em especial *How To Solve It.* [...] Representa uma referência no assunto, uma vez que suas ideias representam uma grande inovação em relação às ideias de resolução de problemas existentes até então. (BRAZ et. al., 2013, p. 162-163)

A heurística da Resolução de Problemas entra dentro desse contexto. Mas, primeiramente, nos vem a seguinte pergunta: O que significa Heurística?

De acordo com Ferreira (2009, p. 1035, dicionário Aurélio):

> [Do latim: cient. heuristica (< gr.heuristiké [téchne], 'arte de encontrar', 'descobrir').] **S. f. 1.** Conjunto de regras e métodos que conduzem à descoberta, à invenção e à resolução de problemas. [Cf. heureca.] **2.** Procedimento pedagógico pelo qual se leva o aluno a descobrir por si mesmo a verdade que lhe querem inculcar. **3.** Ciência auxiliar da História, que trata da pesquisa das fontes. **4.** *Inform.* Metodologia, ou algoritmo, us. para resolver problemas por métodos que, embora não rigorosos, ger. refletem o conhecimento humano e permitem obter uma solução satisfatória.

A heurística, como ciência, tem o objetivo de compreender o processo que leva à solução do problema, com enfoque naqueles que envolvem operações mentais. Todo tipo de informação deve ser considerada e analisada rigorosamente e sobre duas vertentes: a lógica e a psicológica. Ela também é responsável por promover uma situação didática, onde a aprendizagem é predominante, para o ensino da Matemática.

No processo heurístico o professor desempenha um papel importantíssimo, pois fica a seu cargo apresentar à classe a situação-problema que será trabalhada, tomando o cuidado para ele mesmo não resolvê-la. Ele deve tomar a postura de mediador e incentivador, desenvolvendo nos alunos a vontade de encontrar uma solução, a capacidade de refletir, inventar, verificar e fazer conjecturas, modificando-as, quando necessário.

> Nesse sentido o professor assume dois papeis: o de companheiro participante do processo de resolução de problemas, indagando, questionando, averiguando, sugerindo estratégias de solução, de maneira que os alunos possam alcançar o objetivo, resolver o problema proposto; e o de analista que verifica ao final de cada etapa do processo que estratégias foram usadas e se há possibilidades de generalização, ou ainda, propondo novos problemas derivados do apresentado. (JREIGE, 2015, p. 42)

Para diminuir as dificuldades relacionadas à resolução de um problema, Polya (1995) estabelece quatro etapas sequenciais a serem seguidas: Compreensão do problema, construção de uma estratégia de resolução, execução de uma estratégia escolhida e revisão da solução.

2.3.2.1 Compreensão do problema

Essa primeira etapa geralmente é a mais difícil para o aluno, já que envolve a análise e a interpretação dos dados apresentados. Com o intuito de amenizar essa dificuldade, Polya (1995) orienta que o docente faça certos tipos de perguntas que possa auxiliá-lo na compreensão do enunciado:

> Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las? (POLYA, 1995, p. XII).

Essa etapa é composta por frequentes indagações e também pela sistematização das informações apresentadas. O passo inicial é a leitura cuidadosa do enunciado, pois é lá que se encontra todas as informações e dados importantes para se chegar à solução. Pode-se destacar as palavras-chaves, o que facilita e muito na compreensão do problema. É importante que o professor esteja ao lado do aluno, ajudando-o na compreensão do mesmo; fornecendo-lhe, quando preciso, as ferramentas necessárias para a resolução sem, porém, dá-las na íntegra. Sua postura é mais de retaguarda.

Ele deve abrir espaço para o diálogo, orientar os alunos na forma correta de se escrever matematicamente – no que se refere ao uso das notações adequadas – para que o mesmo compreenda cada etapa que está construindo na elaboração da solução.

Um passo importante é que o aluno desenvolva a capacidade de fragmentar o problema, pois isso se configura numa boa estratégia de resolução. Isso possibilita a separação do que é, e do que não é, relevante para resolvê-lo. O professor deve deixar claro que é importante conhecer cada elemento do enunciado; anotações, esquematizações também são bem-vindas.

Eles podem ser baseados em situações e experiências vividas pelos alunos na escola ou fora dela, bem como relacionados a diversas áreas do conhecimento. Bons problemas envolvem essa relação que a matemática possui com as outras áreas do conhecimento e envolvem matemáticas significativas.

Para Breseghello (2016, p. 17) são características dessas matemáticas significativas:

a) Ser construídas a partir de um conhecimento prévio;

b) Ressaltar o pensar e propiciar esse tempo;

c) Aguardar explicações ou justificativas para os possíveis questionamentos e fazer intervenções quando necessário;

d) Utilizar conceitos, princípios e procedimentos matemáticos por meio da técnica de Resolução de Problemas.

O importante é que só se deve passar para a próxima etapa do processo heurístico, quando a primeira estiver completa.

2.3.2.2 Construção de uma estratégia de resolução

A segunda etapa do processo heurístico da resolução de problemas se configura no estabelecimento de um plano. O discente deve perceber as relações que existem entre as informações apresentadas e a incógnita do problema, deve pensar em situações parecidas das quais já sabe a resposta, definir prioridades na abordagem. As estratégias de solução devem ser elaboradas e será função do professor trabalhar a criatividade e a inventividade de seus alunos. Segundo Polya (1995, p. 6) “a melhor coisa que um professor pode fazer por seu aluno é propiciar-lhe, discretamente, uma ideia luminosa”.

Nessa etapa, o aluno passa a utilizar o conhecimento que possui para criar uma estratégia de resolução e exceder à isso, valendo-se da sua intuição, utilizando a imaginação e todo o conjunto de habilidade que ele adquiriu ao longo de seus estudos em Matemática, para conseguir construir um caminho que leve à solução. Ela exige pesquisa e investigação por parte do aluno, e isso faz com que o professor seja cuidadoso e evite expor suas próprias ideias sobre a resolução, pois isso pode desmotivar o aluno na finalização dessa etapa. É preciso também que o professor auxilie o aluno no estudo detalhando do problema, para que o discente consiga fazer analogias precisas e não-contraditórias. “É importante que o aluno consiga fazer generalizações, pois esta habilidade lhe permitirá conceituar e fazer abstrações que lhe serão úteis na resolução de problemas” (JREIGE, 2015, p. 43).

Com o intuito de auxiliar os alunos, Polya fornece algumas perguntas a serem feitas sobre o problema:

> Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob forma ligeiramente diferente?
> Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.
> Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método. Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?
> É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.
> Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver um problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou dos dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as essenciais implicadas no problema? (POLYA, 1995, p. XII-XIII).

Segundo Deguime (1997), é nesse momento que o professor pode direcionar o aluno a um novo conceito matemático ou simplesmente explorar outros conceitos já conhecidos, uma vez que uma mesma situação pode ter várias abordagens distintas. Nesse sentido, um mesmo problema pode ser resolvido por tentativa ou erro ou ter uma abordagem mais algébrica.

O conhecimento prévio é exigido quando o aluno está inserido nessa segunda fase. Ele deve conhecer aquilo que pretende resolver, ou pelo menos ter uma boa base para explorá-lo. Muitas vezes, o conhecimento de um problema correlato é indispensável. Segundo Polya (1995), o aluno deve conhecer um problema correlato que possa ser utilizado para gerar um novo conhecimento. Para Polya (1995, p. 7),

> [...] é difícil ter uma boa ideia se pouco conhecemos do assunto e que é impossível tê-la se dele nada soubermos. As boas ideias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos. Para uma boa ideia, não basta uma simples recordação, mas não podemos ter uma ideia boa sem lembrar alguns fatos pertinentes. Não bastam os materiais para a construção de uma casa, mas não podemos construi-la sem lançar mão dos materiais necessários. Os materiais indispensáveis à resolução de um problema matemático são certos itens relevantes do conhecimento matemático já adquirido, tais como problemas anteriormente resolvidos e teoremas anteriormente demonstrados. Assim sendo, deve-se muitas vezes começar o trabalho pela indagação: *conhece um problema correlato?* (POLYA, 2006, p. 7)

Quando se conhece algum problema correlato, que o aluno já resolvera (ou até mesmo, que já vira alguém resolver) pode-se fazer uma conexão e empregar informações convenientes para dar a largada na tentativa de resolução. Todavia, essa inter relação nem sempre é possível, e uma forma de tentar sanar esse déficit é propor um problema auxiliar, tendo um cuidado para não distanciá-lo do problema original.

De qualquer modo, de posse de uma determinada estratégia de resolução, o próximo passo é colocá-la em prática.

2.3.2.3 Execução de uma estratégia escolhida

A terceira etapa é a execução da estratégia ou algoritmo que foi elaborado na etapa anterior. Polya (1995) recomenda que, ao executar o plano, deve-se verificar todos os passos realizados até então; examinando e demonstrando se está correto. Como nas fases anteriores, ele sugere algumas indagações que podem ser pertinentes: “Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?” (POLYA, 1995, p. XIII). Nessa etapa do processo a introdução de novos algoritmos ou métodos práticos serão bem-vindos, já que se pode generalizá-los e torná-los úteis para a resolução de outros problemas.

As interferências do professor – em menor escala – ainda são recomendadas, para que o aluno continue sendo orientado a desenvolver suas próprias conclusões. Se as etapas anteriores foram bem desenvolvidas, essa etapa se configura como a mais fácil do processo. A atenção continua sendo primordial. O aluno deve verificar minuciosamente cada passo do método, validar cada procedimento, para que isso proporcione o seu aprendizado e o diálogo com aquilo que ele está construindo.

Elaborar um plano e executá-lo são duas coisas bem diferentes. É preciso conhecimentos preestabelecidos, bom raciocínio, concentração e, muitas vezes, sorte. O plano nos mostra o caminho geral a ser seguido; não entra nesse contexto o raciocínio heurístico.

> Mas precisa-se mudar este ponto de vista quando se inicia o desenvolvimento do plano e, aí, somente deve-se aceitar os argumentos conclusivos e rigorosos, conceder atenção especial à ordem de preparação dos detalhes do plano, não omitir nenhum, e perceber a relação que há entre os que surgem e o problema como um todo; não se deve perder de vista a conexão entre os passos principais, prosseguir de acordo com uma ordem apropriada e utilizar pacientemente o raciocínio heurístico na sua concepção. (BRESEGHELLO, 2016, p. 19)

Com todas as informações selecionadas, conectadas e bem compreendidas, a execução do plano se torna muito mais fácil e, ao fazê-lo, baseia-se na intuição e na demonstração formal. Trabalhar sob essas duas perspectivas constitui-se uma prática interessante e instrutiva, pois se torna um estimulante exercício mental.

É recomendado, na execução do plano, que o aluno não se apresse em chegar logo na resposta. Ela estará sempre lá, pronta para ser descoberta, e a pressa pode contribuir para que o aluno não execute o seu plano de forma correta. Outro ponto importante que deve-se salientar é que o maior risco que o aluno pode correr é de esquecer do seu plano, isso geralmente ocorre quando a segunda etapa do método de Polya não foi atingida de forma satisfatória: o planejamento pode ter sido desenvolvido em grande parte pelo professor, ou por outro aluno. Isso deve ser evitado. É preciso que o aluno desenvolva sua própria estratégia e a execute. Encontrar a resposta será apenas uma consequência.

A terceira etapa é responsável pela solução do problema, mas o método não se encerra nele. Faz-se necessário prosseguir, analisar a solução encontrada. Revisá-la.

2.3.2.4 Revisão da solução

Embora nessa última etapa o problema já esteja solucionado, ainda há aquisição do conhecimento, pois esse momento propicia uma refinação da solução e leva à abstração. Essa promove a reflexão sobre como o processo foi realizado, aquela está relacionada à verificação dos procedimentos que foram utilizados, procurando simplificá-los. De forma simples, a quarta etapa é a análise dos resultados obtidos. Polya sugere as seguintes indagações: “É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?” (POLYA, 1995, p. XIII).

Tomando como base esses questionamentos, o professor encontra a chance de explorar novos métodos e gerar novos saberes matemáticos. É interessante que ele possa mostrar aos alunos que podem existir outros meios para chegar à mesma solução do problema.

Outro tópico que deve ser ressaltado é que muitos alunos, ao resolverem um problema, tendem a ir somente até à terceira etapa do método heurístico, ou seja, encontram a solução, mas não se preocupam em reexaminá-la e em pensar no que se pode tirar daquilo.

> Até mesmo alunos razoavelmente bons, uma vez chegados à solução do problema e escrita a demonstração, fecham os livros e passam a outro assunto. Assim fazendo eles perdem uma fase importante e instrutiva do trabalho de resolução. Se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. Um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer. Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar a resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução. (POLYA, 1995, p. 12).

Quando o professor possibilita a correção coletiva, isso faz com que os alunos percebam que podem existir outras formas de solução, diferentes da sua, mas igualmente corretas (quando o aluno obtém êxito). Também é um forma, para aqueles que não conseguiram resolver o problema, de compreender os passos que erraram e aprender com esses erros.

> A ciência está em constante movimento. Não se deve levar o aluno a pensar que só há uma forma de resolver um problema, até por que essa forma amanhã poderá estar superada. A dúvida, a pesquisa e a experimentação devem ser estimuladas em sala de aula para que nossos alunos compreendam que os conhecimentos matemáticos foram construídos por pessoas comuns e para que se sintam capazes de produzir novos conhecimentos (ROCHA, 2002, p. 26).

É na análise crítica do resultado que o aluno utilizará sua criatividade para avaliar a resposta que foi encontrada, pois ele revisa todas as etapas anteriores. Ela deve ser rigorosa; o discente deve verificar se a sua solução satisfaz as condicionantes do enunciado do problema e ver se a forma como ele resolveu é realmente a mais simples. É sugerido que ele utilize o método que desenvolvera em outros problemas semelhantes, ou que crie uma situação-problema em que trabalhe o inverso do que foi trabalhado no problema inicial; essa última sugestão é muito importante, pois se o aluno é capaz de fazer isso, é porque ele adquiriu um certo domínio da matemática que foi utilizada na resolução do problema.

É importante destacar que cada uma das etapas propostas por Polya possui o seu valor e devem ser aplicadas de forma hierárquica, mantendo a sequência; ainda que alguns alunos possam encontrar a solução do problema sem passar por todas elas. Polya (1995, p. 5) adverte sobre essa situação:

> Cada uma destas fases tem a sua importância. Pode acontecer que a um estudante ocorra uma excepcional ideia brilhante e, saltando por sobre todas as preparações, ele chegue impulsivamente à solução. Estas ideias felizes são, evidentemente, muito desejáveis, mas alguma coisa muito inconveniente e desastrosa pode resultar se o estudante deixar de lado qualquer uma das quatro fases sem dela ter uma perfeita noção. Acontecerá o pior se o estudante atirar-se a fazer cálculos e a traçar figuras sem ter compreendido o problema. É geralmente inútil executar detalhes sem perceber a conexão principal ou sem ter feito uma espécie de plano. Muitos enganos podem ser evitados se, na execução do seu plano, o estudante verificar cada passo. Muitos dos melhores efeitos podem ficar perdidos se ele deixar de reexaminar e de reconsiderar a solução completa.

A utilização do método heurístico de Polya requer um planejamento sistemático e cuidadoso e, dada a diferença de níveis de aprendizagem dos alunos, cada um pode precisar de um tempo diferente para passar pelas quatro fases. A escolha do problema também deve ser feita de forma cuidadosa, esse deve trabalhar dentro dos conhecimentos vivenciados pelos discentes e ter algum significado para os mesmos.

3 SOBRE A OBMEP

A principal razão para a existência da OBMEP são os alunos das escolas públicas, seus desempenhos, interesse e motivação pela Matemática.
(BARBOSA)

3.1 HISTÓRICO

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – conhecida pela maioria das pessoas apenas como OBMEP – é, além de uma olimpíada que trata conhecimentos em Matemática, uma das maiores avaliações em larga escala do Brasil e uma política pública, mundialmente reconhecida. Segundo Maranhão (2011, p. 13), a OBMEP é tida como

> uma das maiores iniciativas governamentais voltadas ao processo de ensino aprendizagem em Matemática, visando melhorar a motivação, o interesse e o desempenho dos alunos das escolas públicas brasileiras com cobertura em quase todo território nacional.

Com o intuito de buscar as características próprias da OBMEP, faz-se necessário um rápido histórico de como surgiram as Olimpíadas de Matemática, para que se possa compreender o seu formato que já se encontra na sua 12ª edição.

Esse tipo de competição data do século XIX, embora no século XVI já se realizassem os chamados duelos matemáticos, estes últimos com aspectos bem particulares. Eram disputas onde importantes estudiosos dessa área colocavam em jogo seu dinheiro, reputação e até suas cadeiras nas universidades italianas. A grande maioria dos matemáticos daquela época empenhavam-se em deter o maior número possível de soluções para os mais variados tipos de problemas e assim pudessem usá-las nos futuros duelos nos quais participariam, demonstrando a sua grande habilidade de resolvedor de problemas. A situação social e financeira confortável dos matemáticos com esse tipo de habilidade, vencedores de duelos, fazia com que muitos outros– menos favorecidos – os desafiassem publicamente. Os duelos, de forma geral, consistiam em um total de trinta questões (propostos por ambos), sendo o vencedor aquele que resolvesse o maior número de questões apresentadas pelo seu oponente.

Talvez o exemplo mais notável desse tipo de duelo é a competição entre Niccolò Tartaglia (1500 – 1557) e Antonio Fiore, que eram reconhecidos por resolver equações cúbicas. O duelo terminou com a vitória do primeiro, que fora capaz de resolver todos os problemas propostos por seu rival. O ocorrido despertou em Girolamo Cardano (1501 – 1576) o interesse em investigar a técnica utilizada por Tartaglia. Após muita insistência de Cardano, Tartaglia, sob sigilo, revelou o seu método (BELLOS, 2011, p. 216).

Apesar disso, Cardano acabou por contar o método a Ludovico Ferrari (1522 – 1565), seu secretário, que o aperfeiçoou e descobriu uma técnica de resolução das equações quárticas. Cardano ainda publicou o método de Tartaglia, atribuindo a este apenas a função de coinventor.

Esses dois últimos parágrafos mostram a diversidade e os diferentes tipos de intenção dada às competições Matemáticas, mas que ainda assim trouxeram benefícios conceituais à mesma. A procura por destaques nessa área do conhecimento é um dos principais objetivos desses tipos de competições.

Segundo Maciel (2009) a primeira Olimpíada de Matemática, nos padrões que se assemelham aos que conhecemos hoje, foi realizada em 1894, na Hungria, em homenagem a Jósef Kürschák. Estas competições eram chamadas de “Eotvos”.

Para melhor compreensão, segue uma linha do tempo sucinta sobre as principais Olimpíadas de Matemáticas existentes:

1894 – Acontece a 1ª Olimpíada de Matemática da história, na Hungria;

1934 – É organizada a primeira Olimpíada de Matemática “moderna”, na cidade de Leningrado (URSS).

1959 – Criada a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO);

1977 – Ocorre a primeira olimpíada do gênero no Brasil, a 1ª Olimpíada Paulista de Matemática, promovida pela Academia Paulista de Ciências;

1979 – Surge a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM);

1985 – Criada a Olimpíada Ibero-Americana de Matemática. Participam desta olimpíada 22 países da América Latina, Espanha e Portugal;

2001 – Brasil se destaca na IMO, ficando entre os 20 melhores colocados;

2005 – É realizada a primeira Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

Competições desse tipo tencionam desenvolver nos discentes o gosto e o prazer em estudar Matemática. Além disso, incita o ensino e a aprendizagem da matemática em todos os seus níveis. São os objetivos motivacional de aprendizagem e político educacional, respectivamente.

Costa (2015, p.32) evidencia e relevância desse tipo de olimpíada:

> O programa de Olimpíadas de Matemática é reconhecido em todos os países do mundo desenvolvido como eficiente instrumento para atingir o objetivo motivacional. Aproveitando o natural gosto dos jovens pelas competições, as Olimpíadas de Matemática têm conseguido estimular alunos a estudar conteúdos além do currículo escolar e, também, por outro lado, aumentar e desenvolver a competência dos professores.

Essas olimpíadas se caracterizam, de forma geral, por apresentarem problemas matemáticos que exijam de seus competidores, além de um conhecimento prévio dos assuntos abordados nas competições, uma capacidade de imaginar e interpretar, em conjunto com uma boa criatividade. Qualidades estas já apresentadas no capítulo anterior, que trata da resolução de problemas.

Antes de abordarmos a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), faz-se necessário falarmos um pouco sobre a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) e a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM).

3.2 OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

É a mais importante competição internacional em Matemática do mundo. Como dito anteriormente, foi criada em 1959 e contou com a participação de apenas sete países: Romênia, Bulgária, Hungria, Polônia e as extintas União Soviética (URSS), Alemanha Oriental e Tchecoslováquia. Nas últimas dez edições o número médio de países participantes é de 101,1. Em 2016, ano em que foi sediada em Hong Kong, a IMO chegou a 109 países, recorde até então. Em 2017 o país sede será o Brasil.

> Nas primeiras edições da IMO, cada país podia inscrever até oito alunos na competição. Em 1982, esse número foi reduzido para quatro, sendo aumentado para seis no ano seguinte, número que permanece até hoje. Os competidores devem ter menos de 21 anos de idade, com nível de escolaridade igual ou inferior ao Ensino Médio. (COSTA, 2015, p. 35)

É uma competição de caráter individual, ainda que a colocação final de cada país seja o somatório das pontuações adquiridas pelos seus seis competidores. A premiação vai desde medalhas de ouro, prata e bronze (para os melhores colocados individuais) até certificados de menção honrosa (para aqueles que tenham resolvido corretamente pelo menos um dos seis problemas propostos, mas que não tenham conseguido nenhuma medalha). No máximo metade dos estudantes voltam para casa com algum desses tipos de premiação.

A prova é composta por seis questões, cada uma valendo 7 pontos, totalizando a pontuação máxima de 42 pontos por aluno e 252 pontos por país. É aplicada em dois dias (três questões por dia) e tem a duração de 4 h e 30 mim por aplicação.

Essas seis questões são escolhidas dentre um banco de trinta – em uma votação por maioria simples, presidida por um júri que é formado pelos chefes das equipes dos países participantes e lideradas por uma comissão de quatro juízes apontados pelo país sede da olimpíada – e devem abordar assuntos relacionados ao Ensino Médio: Álgebra, Teoria dos Números, Geometria e Análise Combinatória. Os idiomas oficiais da IMO são: inglês, alemão, francês e russo. Caso seja necessário, os chefes das equipes farão a tradução para o seu idioma local.

O banco de questões é feito com base no envio de até seis questões por país participante à Comissão Organizadora da IMO.

A primeira participação do Brasil foi em 1979, sendo a competição realizada em Londres. Nesse ano o Brasil saiu sem nenhuma medalha ou menção honrosa. Esse quadro se inverteu e, a partir de 1981, ele sempre conseguiu, em todas as edições, algum tipo de premiação.

Segundo o site da OBM[2], até a última edição (2016), o Brasil acumula 9 medalhas de ouro, 41 medalhas de prata, 72 medalhas de bronze e 27 certificados de menção honrosa, perfazendo um total de 149 premiações.

Os medalhistas de ouro são os seguintes:

- Nicolau Corção Saldanha (1981);
- Ralph Costa Teixeira (1986, 1987);
- Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira (1990);
- Artur Avila Cordeiro de Melo (1995)[3];

[2] http://www.obm.org.br
[3] Vencedor da Medalha Fields, em 2014.

- Rui Lopes Viana Filho (1998);
- Gabriel Tavares Bujokas (2005);
- Henrique Pondé de Oliveira Pinto (2009);
- Rodrigo Sanches Ângelo (2009).

Outro fato que merece destaque é que desde 2006 todos os participantes brasileiros conquistaram algum tipo de premiação na IMO, somando um total de 66 premiações apenas nas últimas 11 edições, o que corresponde a cerca de quarenta e quatro por cento do total de premiações brasileiras. Isso mostra que o Brasil vem se destacando cada vez mais internacionalmente em Matemática.

De acordo com o site da IMO[4], nessa última edição o Brasil conseguiu o seu melhor desempenho, conquistando o 15º lugar geral. É importante dizer que ele já havia atingindo essa colocação em 1985, mas naquela época competiam um total de 38 países (contra 109 em 2016). Como dito anteriormente, o país-sede da 58ª IMO, em 2017, será o Brasil e a expectativa de que o mesmo – em sua 38ª participação – quebre a sua marca é a melhor possível.

3.3 OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Segundo o seu próprio site, a OBM é uma competição organizada pela SBM, com a colaboração estreita do IMPA – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, aberta a todos os estudantes do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano), Médio e Universitário das escolas públicas e privadas de todo o Brasil.

Possui os seguintes objetivos:

- Interferir decisivamente na melhoria do ensino de Matemática em nosso país estimulando alunos e professores a um desenvolvimento maior propiciado pelas condições que atualmente podemos oferecer: a realização da OBM.
- Descobrir jovens com talento matemático excepcional, e colocá-los em contato com matemáticos profissionais e instituições de pesquisa de alto nível, propiciando condições favoráveis para a formação e o desenvolvimento de uma carreira de pesquisa.

[4] http://www.imo-official.org

- Selecionar os estudantes que representarão o Brasil em competições internacionais de Matemática.
- Organizar no Brasil as diversas competições internacionais de Matemática.

Para uma melhor compreensão do avanço histórico da OBM, apresentaremos o seguinte quadro-resumo:

Tabela 1: Evolução da Olimpíada Brasileira de Matemática – OBM

Ano	**Alteração**
1979	I Olimpíada Brasileira de Matemática
1991	Dois níveis: ·*Júnior*: para alunos completando no máximo 15 anos em 1991 ·*Sênior*: para alunos cursando o ensino médio
1992	Duas fases: ·Primeira: prova com 25 questões de múltipla escolha ·Segunda: dois dias com 3 problemas em cada dia
	O nível Júnior passa a ser para alunos cursando até a 8ª. Série
1993	A 2ª. Fase do nível Júnior volta a ser realizada em um dia, com 5 problemas
1995	O nível Júnior volta a ser para estudantes de até 15 anos
1998	Três níveis: ·I: 5ª e 6ª séries ·II: 7ª e 8ª séries ·III: Ensino Médio
	Três fases: ·1ª fase: múltipla escolha com 20 ou 25 questões ·2ª fase: prova aberta com 6 questões ·3ª fase: 5 questões (níveis I e II) e 6 questões no nível III (em dois dias)
	Provas das 2 primeiras fases nas Escolas cadastradas
1999	As provas do nível II passam a ser realizadas em dois dias na fase final
2001	É criado o nível Universitário, com duas fases

Destaca-se que: os termos 5ª, 6ª 7ª e 8ª séries são empregados atualmente para designar o 6º, 7º, 8º e 9º anos, respectivamente.

Para uma melhor preparação dos alunos e um aperfeiçoamento dos professores, a OBM passou a distribuir revistas e cartazes às escolas, apresentando diversos materiais para estudo e pesquisa, contemplando faixas específicas de escolaridade.

A Olimpíada Brasileira de Matemática é realizada em quatro níveis.

- Nível 1 – para alunos matriculados no 6º ou 7º anos do ensino fundamental quando da realização da primeira fase da OBM.
- Nível 2 – para alunos matriculados no 8º ou 9º anos do ensino fundamental quando da realização da primeira fase da OBM.
- Nível 3 – para alunos matriculados em qualquer série do ensino médio quando da realização da primeira fase da OBM ou que, tendo concluído o ensino médio menos de um ano antes, não tenham ingressado em curso de nível superior até a data da realização da primeira fase da OBM.
- Nível Universitário – para alunos que ainda não tenham concluído o curso superior (normalmente estudantes universitários em nível de graduação, podendo ser estudantes de qualquer curso e qualquer período).

Quanto às fases, temos o que se segue:

1. Para os Níveis 1, 2 e 3:

- Primeira Fase – Prova de múltipla escolha com 20 a 25 questões com duração de 3 horas, realizada nas escolas cadastradas no período determinado no calendário da edição corrente.
- Segunda Fase – Prova com questões objetivas e discursivas, em um total de 6 a 9 questões, realizada apenas nas escolas que enviaram o relatório da Primeira Fase, com duração de 4 horas e 30 minutos.
- Terceira Fase – Nível 1 – uma prova discursiva com 5 problemas com duração de 4 horas e 30 minutos e realizada em local designado pelo Coordenador Regional da OBM. Níveis 2 e 3 – prova discursiva, realizada em dois dias consecutivos, em local designado pelo Coordenador Regional, com 3 problemas em cada dia e com duração de 4 horas e 30 minutos por dia.

2. Para o Nível Universitário:

- Primeira Fase – Prova discursiva, com 6 questões, com duração de 4 horas e 30 minutos, aplicada em local a ser determinado pelo Coordenador universitário.

- Segunda Fase – Prova discursiva realizada em dois dias consecutivos – com 3 questões em cada dia e com duração de 4 horas e 30 minutos por dia – em local designado pelo Coordenador Universitário da OBM.

Nos Níveis 1, 2 e 3, cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. As provas da Segunda Fase valem até 60 pontos. Já na Terceira Fase, cada questão valerá 50 pontos, fazendo com que a prova atinja um total de 250 pontos para o nível 1 e 300 pontos para os níveis 2 e 3.

Alunos que ganharam medalha de ouro, prata ou bronze na OBM de determinado ano estão automaticamente classificados para todas as fases da OBM do ano subsequente, inclusive se houver mudança de nível.

Para o Nível Universitário, a Primeira Fase valerá um total de 60 pontos (10 pontos por questão). Já a Segunda Fase valerá 300 pontos ao todo (50 pontos por questão).

Vejamos o quadro-resumo:

Tabela 2: Estrutura e Pontuação da OBM

	Primeira Fase		**Segunda Fase**		**Terceira Fase**	
	Estrutura	Pontuação	Estrutura	Pontuação	Estrutura	Pontuação
Nível I	20 a 25 questões de múltipla escolha	1 ponto cada item	Prova Mista	60 pontos no total	5 problemas discursivos	50 pontos cada problema
Nível II	20 a 25 questões	1 ponto cada item	Prova Mista	60 pontos no total	Duas provas discursivas compostas por 3 problemas em cada	50 pontos cada problema
Nível III	20 a 25 questões	1 ponto cada item	Prova Mista	60 pontos no total	Duas provas discursivas compostas por 3 problemas em cada	50 pontos cada problema
Nível Universitário	6 problemas discursivos	10 pontos por questão	6 problemas discursivos	50 pontos por questão	-	-

Para a classificação final serão considerados os pontos adquiridos em todas as fases. A partir disso, a OBM premia os alunos com medalhas de ouro, prata e bronze (na proporção 1:2:3, respectivamente) e certificados de menções honrosa, a critério da banca.

Dentre os premiados são selecionados aqueles que formam as equipes brasileiras na Olimpíada do Cone Sul (4 estudantes, com até 16 anos); na Olimpíada Internacional de Matemática (6 estudantes do ensino médio, com até 19 anos); na Olimpíada Iberoamericana (4 estudantes, com até 18 anos) e na Competição Internacional de Matemática (universitários). Estas competições são realizadas anualmente, sempre em um país diferente.

3.4 OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS

3.4.1 Números, Regulamento e Premiações

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) teve origem no ano de 2005 e hoje já se encontra em sua 12ª edição. É voltada exclusivamente para as Escolas Públicas de Educação Básica e vem se configurando, ao longo do tempo, como a maior competição em Matemática (no que se refere a números absolutos) do Mundo, “superando o último Concours Kangourou, realizado na França, que contou com a participação de quatro milhões de competidores oriundos de vários países do mundo” (MACIEL, 2009).

É uma realização do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Seu lema é “Somando novos talentos para o Brasil”.

A tabela a seguir lista o número de participantes e premiados nos últimos 12 anos:

Tabela 3: Participantes e premiados

Ano	Primeira Fase	Segunda Fase	Premiados
2005	10.520.831	457.725	31.109
2006	14.181.705	630.864	34.743
2007	17.341.732	780.333	33.003
2008	18.326.029	789.998	33.017
2009	19.198.710	841.139	33.011
2010	19.665.928	863.000	33.256
2011	18.720.068	818.566	33.202
2012	19.166.371	823.871	45.434
2013	18.762.859	954.926	44.835
2014	18.192.526	907.446	45.664
2015	17.972.333	889.018	48.784
2016	17.839.424	913.889	48.984

Com diferentes formas de divulgação (desde cartazes fixados nas escolas até propagandas na televisão) a OBMEP atinge quase que totalmente os municípios do Brasil. Em 2005, por exemplo, a olimpíada esteve presente em 93,5% dos municípios brasileiros na sua primeira fase. Esse número aumentou para 99,59% em 2016.

A OBMEP é voltada ao alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, bem como ao alunos do Ensino Médio das esferas públicas municipais, estaduais e federais. De acordo com o seu regulamento, presente no seu próprio site[5], são objetivos dessa competição:

1. Estimular e promover o estudo da Matemática entre alunos das escolas públicas.
2. Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica.
3. Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso nas áreas científicas e tecnológicas.
4. Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional.
5. Contribuir para a integração das escolas públicas com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e as sociedades científicas.

[5] http://www.obmep.org.br

6. Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

Os alunos participantes são divididos em três níveis, de acordo com o seu grau de escolaridade:

Nível 1: alunos matriculados no 6º ou 7º ano do Ensino Fundamental.
Nível 2: alunos matriculados no 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental.
Nível 3: alunos matriculados em qualquer ano do Ensino Médio.

A OBMEP é realizada em duas etapas:

Primeira Fase: aplicação de prova objetiva (múltipla escolha) a todos os alunos inscritos pelas escolas;
Segunda Fase: aplicação de prova discursiva aos alunos selecionados pelas escolas, 5% (cinco por cento) dos alunos que realizaram a primeira fase e obtiveram os melhores resultados. Havendo empate, as escolas devem divulgar previamente os critérios de desempate a serem aplicados.

A Primeira Fase da OBMEP se caracteriza pela aplicação de prova objetiva (questões de múltipla escolha) contendo vinte questões, diferenciada por níveis (1, 2 e 3). Tem uma duração de 2h30min (duas horas e trinta minutos) e são realizadas em cada escola inscrita e aplicadas pelos professores dessas escolas.

A Segunda Fase da OBMEP se caracteriza pela aplicação de prova discursiva, contendo seis questões, diferenciada por níveis (1, 2 e 3). Tem duração de 3h (três horas) e serão aplicadas por fiscais selecionados pela Coordenação Geral da olimpíada para esse fim.

A OBMEP premia alunos, professores, escolas e secretarias municipais de educação. Essa premiação baseia-se exclusivamente no resultado das provas da Segunda Fase e são feitos da seguinte forma:

1. Aos alunos:

a) 500 (quinhentas) medalhas de ouro;
b) 1.500 (mil e quinhentas) medalhas de prata;
c) 4.500 (quatro mil e quinhentas) medalhas de bronze;

d) Até 46.200 (quarenta e seis mil e duzentos) certificados de Menção Honrosa;
e) **Programa de Iniciação Científica Jr.(PIC):** Aos 6.500 alunos premiados com medalhas de ouro, prata ou bronze e matriculados em escolas públicas do ano subsequente, será oferecida a oportunidade de participar do Programa de Iniciação Científica Júnior (PIC-OBMEP). Em caso de vacância de bolsas, um medalhista poderá ser substituído por um aluno que tenha recebido uma Menção Honrosa e esteja matriculado no ensino público, a critério da coordenação do PIC.
f) **Programa de Iniciação Científica e de Mestrado (PICME):** Os medalhistas de ouro, prata ou bronze de qualquer edição da OBMEP, regularmente matriculados no ensino superior, poderão se candidatar ao Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME) oferecido por diversas Instituições de Ensino Superior.

2. Aos professores e escolas: Respeitando o limite 1.029 (mil e vinte e nove) e 495 (quatrocentos e noventa e cinco), respectivamente, as premiações são vinculadas à pontuação de seus alunos, respeitando os seguintes critérios:
   a) 10 (dez) pontos para cada aluno premiado com medalha de ouro;
   b) 8 (oito) pontos para cada aluno premiado com medalha de prata;
   c) 6 (seis) pontos para cada aluno premiado com medalha de bronze;
   d) 3 (três) pontos para cada aluno premiado com menção honrosa;
   e) 1 (um) ponto para cada aluno que compareceu à Segunda Fase e não obteve premiação.

A premiação dos professores consiste de aparelhos eletrônicos e assinaturas de revistas do professor. E são distribuídos desde kits esportivos até material didático à escola.

São também distribuídos 52 troféus às duas Secretarias Municipais de Educação de cada UF com maior pontuação em sua UF.

3.4.2 A Avaliação do Impacto da OBMEP

A OBMEP, muito mais do que uma competição que busca jovens talentos em Matemática, é uma ação de política pública importantíssima para o desenvolvimento da Educação. Ela age direto no sistema de ensino e influencia positivamente avaliações de larga escala, como é o caso do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB).

> Assim, a principal razão para a existência da OBMEP são os alunos das escolas públicas, seus desempenhos, interesse e motivação pela Matemática. Este grupo de atores individuais é o foco principal dessa política porque está no cerne de problemas existentes e inter-relacionados: o baixo desempenho dos alunos em Matemática, a importância da Matemática para o desenvolvimento tecnológico do país, a baixa adesão dos profissionais a esta carreira, a necessidade de profissionais para a formação de novos alunos (BARBOSA, 2014, p. 37).

Entre as diversas realizações da OBMEP desde sua origem, destacam-se, segundo IMPA e SBM:

- o atendimento pelo PIC de 36 mil e 500 alunos, uma oportunidade de estudar Matemática por 1 ano, com bolsa do CNPq;
- a distribuição para as escolas de material didático de qualidade, como apostilas do PIC e Banco de Questões, também disponível em sítio específico;
- o atendimento pelo PICME de cerca de 1.321 alunos;
- a preparação de medalhistas de ouro, selecionados para participar de competições internacionais, pelo PECI – Preparação Especial para Competições Internacionais;
- a preparação de competidores, em 2012, foi criado o POTI – Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo – em parceria com a OBM, com o objetivo de ampliar o acesso dos alunos brasileiros a treinamento para competições matemáticas;
- a preparação de docentes, em 2012, foi criado o PROF, programa destinado ao aperfeiçoamento dos professores de Matemática. Este programa está em seu terceiro ano no Estado de São Paulo, em parceria com a SEED;
- a preparação de estudantes, em 2013, a OBMEP lançou o programa Clubes de Matemática, que já conta com a adesão de cerca de 3000 alunos em 389 clubes em todo o Brasil;
- o lançamento do Portal da Matemática, com aplicativos e vídeo-aulas que cobrem todo o currículo da Matemática, do sexto ano do Ensino Fundamental ao terceiro ano do Ensino Médio; e
- a mobilização dos Coordenadores Regionais da OBMEP para a realização de atividades, como seminários com professores e cerimônias de premiação.

A OBMEP vai muito além desses diversos projetos citados, ela pode funcionar como um transformador social, fazendo com que o discente tome gosto pela matemática, investigue, desenvolva o pensamento crítico e consiga concluir a sua escolarização básica “alfabetizado quantitativamente”.

> Cidadãos quantitativamente alfabetizados precisam conhecer mais que fórmulas e equações. Eles precisam de uma predisposição de olhar o mundo através de olhos matemáticos, para ver os benefícios (e os riscos) de pensar quantitativamente acerca de assuntos habituais e para abordar problemas complexos com confiança no valor do raciocínio cuidadoso. Alfabetização quantitativa dá poder às pessoas ao oferecer-lhes ferramentas para que pensem por si próprias, para fazer perguntas inteligentes aos especialistas e para confrontar a autoridade com confiança. Estas são habilidades requeridas para prosperar no mundo moderno (OCED, 2014, p. 5).

Além disso, é necessário destacar que a preparação da escola para a OBMEP leva os professores a se capacitarem e aprofundarem o seu trabalho. Preparam os alunos para as diversas formas de avaliação, como a Prova Brasil ou até mesmo o ENEM. Sendo assim, os resultados obtidos pelos alunos na olimpíada podem servir como base ou parâmetro para a reflexão sobre a qualidade do Ensino de Matemática no país.

Em 2010, a OBMEP passou por uma avaliação, realizada pelo Centro de Gestão e Estudos Estratégicos (CGEE). O relatório contou com a participação de alunos, pais, professores, gestores e público em geral, num total aproximadamente 10 mil entrevistados, sendo que cerca de 93% dos respondentes contemplavam às duas primeiras classes. Um dos pontos colocados em destaque quando se trata dessa avaliação é o seu detalhamento do impacto que a OBMEP causou na vida de todos que compõe a instituição escolar, além de indicar meios para se aprimorar a olimpíada.

Segundo Maranhão (2011, p. 23), a respeito do relatório, os participantes apontaram dois pontos positivos que constituem o foco principal da competição: “existem interesse e motivação de alunos e de professores pela matemática e também o estímulo ao desenvolvimento e à melhoria do desempenho do aluno nessa disciplina.”

Isso se configura como mais um indício da necessidade de continuação da OBMEP como política pública. Todas as parcelas de entrevistados estão de acordo e apontam a existência de elementos como motivação, interesse e estímulo no que se refere à melhoria do aprendizado dos alunos em matemática.

Entre os pontos negativos da OBMEP, o relatório do CGEE apontou:

1. Alto nível de dificuldade da prova, extensa e incompatível com o atual (baixo) nível de conhecimento nas escolas públicas;
2. Conteúdo único da prova incompatível com as diferentes séries;
3. Incompreensão dos enunciados – interpretação de textos e português em geral – por parte dos alunos, que consideram as questões difíceis;
4. Contextualização das situações-problema (nas provas) com enfoque urbano e na Região Sudeste.

Esse estudo aponta que a maioria do público entrevistado considera as provas da OBMEP difíceis, seja pelo enfoque centralizado na região sudeste, seja pelo alto nível do conteúdo presente nas provas, que são muitas vezes fora da realidade da grande maioria das escolas públicas brasileiras.

Em contrapartida, esse grau de dificuldade das provas, repetidas anualmente, faz com que possa haver um incremento real na qualidade do ensino de matemática nas escolas públicas, principalmente no que se refere à geometria. Já no que se refere à interpretação dos textos, uma inter-relação mais forte entre a matemática e o português precisa ser objetivada e colocada em prática.

Das inúmeras sugestões de aprimoramento apresentada no CGEE, destacam-se:

1. Ampliar investimentos na área de formação e de educação permanente de professores e de gestores;
2. Organizar mais grupos de estudos e gincanas de simulação da OBMEP;
3. Reforçar os estudos de Interpretação de textos;
4. Enviar maiores quantidades de material didático para as escolas, com antecedência mínima de três meses em relação à realização da primeira fase das Olimpíadas;
5. Diversificar os enunciados das questões de prova de acordo com aspectos sociais e culturais das diversas regiões brasileiras;
6. Incluir um certificado digitalizado para todos os participantes da segunda fase.

Esse último tópico incentivaria cada vez mais a participação do aluno na olimpíada de matemática, uma vez que todos os participantes da 2ª fase receberiam algum tipo de premiação. O número de medalhas e certificados de menção honrosa distribuídos também poderiam ser aumentados, já que o número de participantes quase que dobrou desde a sua primeira edição. Esses e outros apontamentos, se postos em prática, acarretariam num melhor aprimoramento da OBMEP e, consequentemente, na melhoria da educação nas escolas públicas.

O que torna essa olimpíada um sucesso de público é a participação ativa de todos atores que a ela se relacionam: Desde a diretoria acadêmica, coordenadores nacionais e regionais e apoio técnico até os gestores escolares, professores, alunos e pais de alunos.

Santos e Abreu (2011, p. 49-50) apontam as atribuições desses últimos:

> O “gestor escolar” é uma importante condição de sucesso da OBMEP na medida em que cabe a ele mobilizar a comunidade escolar para participar das Olimpíadas, inscrever a escola na competição e, no caso de premiação, usufruir das possibilidades de integração com universidades públicas, institutos de pesquisa e sociedades científicas, a fim de estender os benefícios obtidos a toda a comunidade escolar. [...] Na primeira fase, cabe a ele (ao professor) gerenciar a aplicação das provas e encaminhar os resultados à coordenação da OBMEP, que assume a condução da segunda fase, que acontece de modo mais formal e controlado por atores do exterior da escola. [...] O “aluno” participante da competição, é uma incontornável condição de sucesso da iniciativa, pois há a expectativa de que ele possa usufruir do ambiente da olimpíada, independentemente de premiações e fomentos, tornando-a alavanca para o seu desenvolvimento pessoal, escolar e profissional.

O professor deve fornecer subsídios em sala de aula com o objetivo de que seus aluno possam vir a se interessar cada vez mais pela OBMEP, de forma consciente e consistente. Não é segredo para ninguém que ela funciona também como um caça-talento. Ela identifica o aluno talentoso, com a finalidade de colocá-lo em destaque e oferecer um suporte para que ele possa crescer ainda mais na área das ciências exatas e possa, futuramente, dar a sua contribuição como profissional no campo da ciência e tecnologia.

Santos e Abreu (2011) desenvolveram um estudo (que se encontra no CGEE) que busca tentar expor os motivos de diversas escolas medalhistas continuarem sendo destaques nas edições seguintes na OBMEP. Avaliaram o papel do gestor, do professor e do aluno e apresentaram uma série de proposições que delimitam o sucesso da Olimpíada nessas escolas, as quais apresentaremos a seguir.

O gestor de sucesso:

1. Assegura a infraestrutura necessária (humana, logística e financeira);

2. Promove a integração da atividade no projeto político-pedagógico da escola;
3. Oferece atividades extracurriculares preparatórias;
4. Responsabiliza um professor, com condições de trabalho diferenciadas;
5. Cria ações de formação continuada para os professores de matemática;
6. Oferece pontuação extra aos alunos por participação e por premiação obtida;
7. Incentiva a preparação específica de alunos com mais potencial;
8. Busca auxílio externo na preparação dos alunos que passam para a segunda fase;
9. Promove a aproximação entre o conteúdo da OBMEP e o conteúdo curricular de matemática;
10. Mantém as famílias envolvidas com a escola.

O professor de sucesso:

1. Organiza espaços extracurriculares de abordagem da matemática;
2. Estabelece proximidade pessoal com os alunos, que veem nele um fator de motivação;
3. Envolve os alunos em atividades de pesquisa e de matemática aplicada;
4. Explora o banco de dados da OBMEP e as provas dos anos anteriores;
5. Seleciona previamente alunos com potencial de premiação na competição;
6. Promove a criação de uma cultura geral de apreço pela disciplina;
7. Envolve alunos com maior desempenho com alunos com menor desempenho;
8. Promove estabelecimento de clima de competitividade positiva;
9. Estabelece sistema de pontuação extra para os alunos bem sucedidos na OBMEP;
10. Ministra o conteúdo de forma motivadora e desafiadora.

O aluno de sucesso:

1. Não se prepara especificamente para a Olimpíada;
2. Conta com o apoio e o incentivo de algum professor da escola;
3. Participa de atividades extracurriculares de matemática;
4. Envolve-se em aulas práticas, desafiadoras e motivantes;
5. Estuda com medalhistas de anos anteriores;
6. Tem espírito de competitividade;
7. Tem interesse nos prêmios;

8. Prepara-se resolvendo “problemas olímpicos” de anos anteriores;
9. Tem interesse na pontuação extra dada pela escola aos alunos participantes;
10. Tem apoio e acompanhamento familiar.

Um fato que pode ser colocado em destaque é que todos os alunos medalhistas ouvidos na pesquisa, sem exceção, já eram muito bons em matemática e a grande maioria fora escolhida para participar diretamente da OBMEP (no que se refere ao incentivo e treinamento dos professores) por esse motivo. Outro ponto é o interesse dos alunos medalhistas por continuarem os seus estudos de nível superior em cursos que prevalecem a matemática, como engenharia e a própria licenciatura em matemática.

Podemos destacar diversos indicadores do impacto que a OBMEP vem causando: O números de estudantes, escolas e professores envolvidos; a trajetória dos medalhistas e bolsistas e o desempenho dos alunos na Prova Brasil, este último objetivo dos próximos parágrafos.

Segundo Soares e Candian (2011, p.79):

> A Prova Brasil é uma avaliação diagnóstica do ensino fundamental brasileiro desenvolvida pelo Inep/MEC e aplicada aos alunos matriculados na 4ª série – 5º ano e 8ª série – 9º ano do ensino fundamental das escolas públicas com mais de 20 alunos nestas séries. Seu principal objetivo é medir o aprendizado dos alunos do ensino básico, através de testes padronizados de língua portuguesa, com foco em leitura, e matemática, com foco na resolução de problemas.

Além da prova os alunos respondem a um questionário contextual que fornece informações sobre fatores que podem estar associados ao seu desempenho. Professores e diretores das turmas e escolas avaliadas também respondem a questionários que coletam dados demográficos, perfil profissional e de condições de trabalho. Os resultados da Prova Brasil são utilizados no cálculo do Ideb, o principal indicador da qualidade do ensino fundamental brasileiro.

Segundo os mesmos autores, em seu relatório (também presente no CGEE), que analisa o impacto da OBMEP na Prova Brasil, se todas as escolas mudassem o máximo que lhes é possível mudar – no que se refere à preparação para a Olimpíada – o impacto na média geral dos alunos seria de 4,14 pontos, algo considerado modesto. O efeito da OBMEP nos mostra que uma escola que é capaz de se organizar para uma Olimpíada desse porte e colhe resultado, tem um projeto mais sólido e efetivo de ensino de matemática, o que garante um melhor desempenho de seus alunos em avaliações como a Prova Brasil (no que se refere ao 9º ano, obviamente).

Biondi et. al (2009, p.1) nos diz que

> A OBMEP tem efeito positivo e estatisticamente significativo nas notas médias das escolas na Prova Brasil (2007), na oitava série do ensino fundamental. Esse impacto é crescente conforme o maior número de participações das escolas nas edições anuais da OBMEP.

De acordo com o exposto, percebe-se que a OBMEP funciona bem mais que uma olimpíada para se descobrir novos talentos. Muito mais do que uma competição de grande porte, ela funciona como um transformador social, percorrendo todas as esferas que compõe o ambiente escolar, desde o alunado até a comunidade em que a escola está inserida. Indicativos como melhoria no desempenho da Prova Brasil, reconhecimento das escolas, e incentivos à continuidade dos estudos – seja através de medalhas, seja através de bolsas de estudo – faz com que ela contribua de forma significativa no estudo, desenvolvimento e importância da Matemática, disciplina alvo de tantas críticas, muitas vezes infundadas.

4 ANÁLISE GERAL DAS QUESTÕES DA PRIMEIRA FASE DOS NÍVEIS 1 E 2 DA OBMEP 2016

O que se espera de uma avaliação numa perspectiva transformadora é que os seus resultados constituam parte de um diagnóstico e que, a partir dessa análise da realidade, sejam tomadas decisões sobre o que fazer para superar os problemas constatados: perceber a necessidade do aluno e intervir na realidade para ajudar a superá-la. (VASCONCELLOS)

A OBMEP é um campo fértil para a Resolução de Problemas. Todas as questões apresentadas nas provas podem ser trabalhadas sob essa perspectiva. O que se objetiva nesse capítulo (e nos próximos) é analisar o grau de excelência das prova da primeira fase dos níveis 1 e 2. Isso é importante para que se possa verificar como anda o desempenho dos estudantes da escola alvo do estudo, na olimpíada de matemática mais importante do país; se apresentam o nível de conhecimento exigido para a resolução dos itens e se as questões – por se tratar de uma prova de larga escala – estão de acordo com a capacidade intelectual dos mesmos, e não alguns níveis acima.

4.1 MATERIAIS E MÉTODOS

Ainda que a OBMEP disponha de vários materiais para estudo, a primeira fase dos níveis 1 e 2 foi escolhida em razão deste autor lecionar em uma escola da rede estadual de ensino, no Rio Grande do Norte, que compreende até ao 9º ano do ensino fundamental, e ter acesso aos seus respectivos gabaritos, para que uma pesquisa quantitativa pudesse ser posta em prática. Por se tratar de itens de múltipla escolha, pode-se analisar os diversos caminhos (entre eles, os errôneos) utilizados pelos estudantes, o que constitui uma importante ferramenta pedagógica para os docentes que atuam nessa etapa de escolaridade.

A escola escolhida para a pesquisa localiza-se na região interiorana do RN, na qual 184 estudantes se submeteram à avaliação. Portanto, para a realização deste trabalho, utilizou-se amostragem não probabilística por conveniência, definida pela facilidade com a qual o autor desse estudo teria para recolhimento do material, bem como manter o contato com o diretor e os coordenadores da escola.

Foi solicitado ao diretor da escola os gabaritos utilizados pelos estudantes. Àqueles que passaram para a segunda fase, foram fotografados antes de serem enviados pelos correios. Para isso, foi redigito um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (que se encontra no Apêndice).

4.2 TEORIA CLÁSSICA DOS TESTES (TCT)

A análise das questões baseou-se nos pressupostos da Teoria Clássica dos Testes (TCT). Esse método de análise é usado com frequência desde o início do século XX e busca informações sobre a prova como um todo e seus resultados são expressos em escore bruto ou em porcentagem. Segundo Andrade e Borgatto (2012) as questões de uma prova relacionam-se conforme os seguintes parâmetros: índice de dificuldade, índice de discriminação e correlação bisserial.

No corpo dessa dissertação, nos ateremos somente aos dois primeiros.

O índice de dificuldade é o resultado da divisão entre o número de estudantes que acertaram a questão e o número de estudantes que responderam à questão, logo, é um valor entre 0 e 1 (incluindo-os). Quanto mais próximo de 0 for o resultado, mais difícil é a questão considerada.

Pasquali (2003) sugere que a distribuição de níveis de dificuldade de itens na prova, para que uma avaliação tenha um nível ideal, esteja conforme a tabela 4.

Tabela 4: Percentual e classificação esperada para os índices de dificuldade na TCT.

Quantitativo ideal de itens na avaliação (% esperado)	**Índice de dificuldade do item**	**Classificação do item em relação ao índice de dificuldade**
10%	Superior a 0,9	Muito fáceis
20%	De 0,7 a 0,9	Fáceis
40%	De 0,3 a 0,7	Medianos
20%	De 0,1 a 0,3	Difíceis
10%	Até 0,1	Muito difíceis

De forma geral, “para fins de avaliação de larga escala, os testes devem ser compostos de itens que alcancem todo o continuum da escala, ou seja, devem ter uma amplitude que inclua itens fáceis, medianos e difíceis” (RODRIGUES, 2006, p. 50).

Quando deseja-se diferenciar os participantes de um exame que possuem maior habilidade daqueles com menor habilidade, deve-se usar o índice de discriminação. O cálculo é feito da seguinte maneira: divide-se os participantes em três grupos. O primeiro grupo, chamado de grupo superior, é formado pelos 27% dos participantes com maiores pontuações; o segundo grupo, chamado de grupo inferior, é formado pelos 27% dos participantes com menores pontuações. O restante, chamado de grupo intermediário, corresponde ao 46% restantes. Esse parâmetro corresponde à diferença entre o percentual de acertos do primeiro e do segundo grupo. Quanto maior for essa diferença, mais bem avaliada é o item.

O índice de discriminação varia entre -1 e 1. Ele será negativo quando a porcentagem de acertos entre os alunos com maior nota for menor que a porcentagem de acertos entre os 27% de alunos com menores notas (o que, em teoria, não é para acontecer), será 0 quando a porcentagem de acertos entre os alunos com maior nota for igual a porcentagem de acertos entre os 27% de alunos com menores notas, e será positivo quando a porcentagem de acertos entre os alunos com maior nota for maior que a porcentagem de acertos entre os 27% de alunos com menores notas. Se o índice de discriminação nessa terceira situação for maior ou igual a 40, o item é considerado bom. Segundo Rabelo (2013), a tabela 5 expressa os intervalos do valor do índice de discriminação e como os itens são classificados a partir disso.

Tabela 5: Classificação dos itens de acordo com o poder de discriminação na TCT.

Valores	**Classificação**
Discriminação $<$ 0,20	Item deficiente, deve ser rejeitado
0,20 $\leq$ Discriminação $<$ 0,30	Item marginal, sujeito a reelaboração
0,30 $\leq$ Discriminação $<$ 0,40	Tem bom, mas sujeito a aprimoramento
Discriminação $\geq$ 0,40	Item bom

4.3 ANÁLISE GERAL DO INSTRUMENTO

Sobre os itens, pode-se afirmar que todos foram elaborados exclusivamente para a aplicação da avaliação, baseados em um banco de questões enviado para a escola e presente também no site oficial da OBMEP; além de estarem de acordo com a norma culta da Língua Portuguesa.

Os enunciados apresentam um único problema a ser resolvido, e são claros quanto ao objetivo da questão, não apresentado termos que expressam negação (o que costumam confundir os discentes).

No nível 1 há cinco itens convencionais que, apesar de possuírem texto-base, são questões que não exigiam de tanto raciocínio, bastando muitas vezes aplicar fórmula ou notar padrões. São eles: 3, 4, 5, 8 e 19. Ainda sobre esse nível, os itens 6, 8, 12, 13 e 20 apresentaram uma exemplificação do processo de solução.

No nível 2 há sete itens convencionais: 1, 4, 5, 10, 12, 14 e 17. Já os itens que apresentaram uma exemplificação do processo de solução são: 2, 11, 18, 19 e 20.

Para efeito da análise do comportamento dos itens que compõem a prova da Primeira Fase da OBMEP de 2016, nos Níveis 1 e 2, foram construídas as Tabelas 6 e 7, cujos parâmetros dificuldade e discriminação foram colocados em destaque.

Tabela 6: Visão geral da prova da Primeira Fase da OBMEP de 2016, Nível 1.

Item	Gabarito	Dificuldade	Discriminação
1	B	0,097	0,089
2	B	0,363	0,558
3	B	0,306	0,294
4	C	0,185	0,088
5	C	0,169	0,000
6	B	0,145	0,088
7	E	0,161	0,265
8	A	0,177	0,236
9	A	0,250	0,324
10	B	0,121	0,176
11	C	0,202	0,265
12	D	0,403	0,412
13	E	0,234	0,147
14	D	0,427	0,352
15	D	0,218	0,205
16	A	0,484	0,323
17	A	0,266	0,353
18	D	0,234	0,323
19	C	0,226	0,235
20	E	0,185	0,147

A partir da tabela 6. Observa-se que o item que apresentou o menor índice de dificuldade foi o 1, com 0,097, isso quer dizer que apenas 9,7% dos estudantes acertaram essa questão, tornando-o o item mais difícil da avaliação. Em oposição, a questão 16 foi marcada de forma correta por 48,4% dos alunos e, mesmo sendo um item mediano, é a questão mais fácil da avaliação. No que se refere ao índice de discriminação, destaca-se que no item 5, a porcentagem de acertos entre as 27% maiores notas e a porcentagem de acertos entre as 27% menores notas é a mesma, fazendo com que a discriminação seja de 0%. O item que apresenta maior discriminação foi o 2, com 0,558, isso nos mostra que a grande maioria dos estudantes que se saíram melhor na avaliação acertaram ao item.

Tabela 7: Visão geral da prova da Primeira Fase da OBMEP de 2016, Nível 2.

Item	**Gabarito**	**Dificuldade**	**Discriminação**
1	B	0,183	0,125
2	B	0,100	0,125
3	A	0,383	0,500
4	D	0,167	0,125
5	B	0,083	0,062
6	C	0,417	0,563
7	A	0,150	0,187
8	D	0,467	0,562
9	D	0,167	0,375
10	B	0,333	0,687
11	E	0,250	0,438
12	E	0,117	0,250
13	A	0,217	0,437
14	C	0,100	0,188
15	D	0,200	0,563
16	B	0,100	0,062
17	C	0,383	0,063
18	E	0,183	0,375
19	D	0,283	0,437
20	C	0,083	0,000

De acordo com a tabela 7, os itens mais difíceis da avaliação (nível 2) são os itens 5 e 20, ambos com um índice de dificuldade baixíssimo, de 0,083; isso quer dizer que apenas 8,3% dos estudantes acertaram essas questões. Já a questão 8 foi respondida corretamente por 46,7% dos alunos, tornando-se o item mais fácil da prova, ainda que tenha dificuldade mediana. O item 20 também é o que tem o menor índice de discriminação, de 0%, o que de certa forma é esperado; dado o grau de dificuldade do item, a diferença de acertos entre os melhores e piores estudantes ser pequena, apesar de não ser uma regra. O item em que a discriminação é maior é o

10, com 0,687, sendo considerado um item bem elaborado, já que a grande maioria dos estudantes que se saíram melhor na avaliação acertaram ao item.

As tabelas 8 e 9 mostram a distribuição dos itens (Níveis 1 e 2), infere-se do resultado que nenhum dos níveis apresentou itens de todas as variações de dificuldade, sugerindo uma inadequação do instrumento no processo avaliativo.

Tabela 8: Distribuição dos itens do Nível 1 em relação ao parâmetro dificuldade, segundo a TCT.

Classificação	**Valores**	**Itens**	**Percentual de itens na prova**
Muito fácil	0,9 ou mais	Nenhum	0%
Fácil	De 0,7 a 0,9	Nenhum	0%
Mediano	De 0,3 a 0,7	2, 3, 12, 14, 16	25%
Difícil	De 0,1 a 0,3	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 17, 18, 19, 20	70%
Muito difícil	Até 0,1	1	5%

De acordo com a tabela 8, a avaliação não apresenta itens de dificuldade maior do que 0,7, o que o configuraria como um item fácil ou muito fácil. Cinco questões possuem dificuldade mediana, o que corresponde a 25% das questões, abaixo do ideal, que é de 40%; o mesmo ocorre com os itens muito difíceis, onde apenas uma questão se enquadra no intervalo dado, correspondendo 5% do total de questões, um pouco abaixo do ideal (10%). Em contrapartida, 70% dos itens (o que corresponde a um total de quatorze questões) são consideradas questões difíceis, percentual muito acima do proposto por Pasquali (2003), que é por volta de 20%. Como uma avaliação geral, a prova apresentou um nível de dificuldade muito maior do que o esperado.

Tabela 9: Distribuição dos itens do Nível 2 em relação ao parâmetro dificuldade, segundo a TCT.

Classificação	**Valores**	**Itens**	**Percentual de itens na prova**
Muito fácil	0,9 ou mais	Nenhum	0%
Fácil	De 0,7 a 0,9	Nenhum	0%
Mediano	De 0,3 a 0,7	3, 6, 8, 10, 17	25%
Difícil	De 0,1 a 0,3	1, 4, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 18, 19	50%
Muito difícil	Até 0,1	2, 5, 14, 16, 20	25%

Assim como no nível 1, a avaliação no nível 2 não apresenta questões fáceis (Tabela 9). Também apresenta cinco itens considerados medianos, correspondendo a 25% do total de questões. Em relação aos itens considerados difíceis, nota-se que metade das questões se enquadram nesse quesito; algo mais próximo do ideal, que é de 20%, mas ainda assim insatisfatório. Existem cinco questões muito difíceis; uma quantidade alta, quando o ideal seria que fossem duas. Nos dois níveis, as questões com dificuldade menor que 0,3 (portanto, difíceis) correspondem a 75% do total de questões. Como uma avaliação geral, o prova apresentou um nível de dificuldade muito maior do que o esperado.

Sobre o parâmetro discriminação, infere-se dos resultados mostrados nas tabelas 10 e 11 que os dois níveis apresentaram itens de todas as variações de discriminação, ainda que o ideal fosse que se existissem apenas itens bons.

Tabela 10: Distribuição dos itens do Nível 1 em relação à discriminação, pela TCT.

Classificação	**Valores**	**Itens**	**Percentual de itens na prova**
Item deficiente	Disc. $< 0,2$	1, 4, 5, 6, 10, 13, 20	35%
Item marginal	$0,2 \leq$ Disc. $< 0,3$	3, 7, 8, 11, 15, 19	30%
Item bom, sujeito a aprimoramento	$0,3 \leq$ Disc. $< 0,4$	9, 14, 16, 17, 18	25%
Item bom	Disc. $\geq 0,4$	2, 12	10%

A prova do nível 1 apresentou sete itens deficientes, com uma discriminação menor do que 0,2 e que deveriam ser rejeitados. Os itens marginais, sujeitos a reelaboração, correspondem a 30% do total de questões. Apenas 35% das questões são consideradas boas e destas, somente 10% do total de itens são questões bem elaboradas, possuindo uma discriminação superior ou igual a 0,4. De forma geral, foi uma avaliação em que os acertos entre os 27% que apresentaram as maiores notas não se diferenciou muito dos acertos entre os 27% que apresentaram as menores notas.

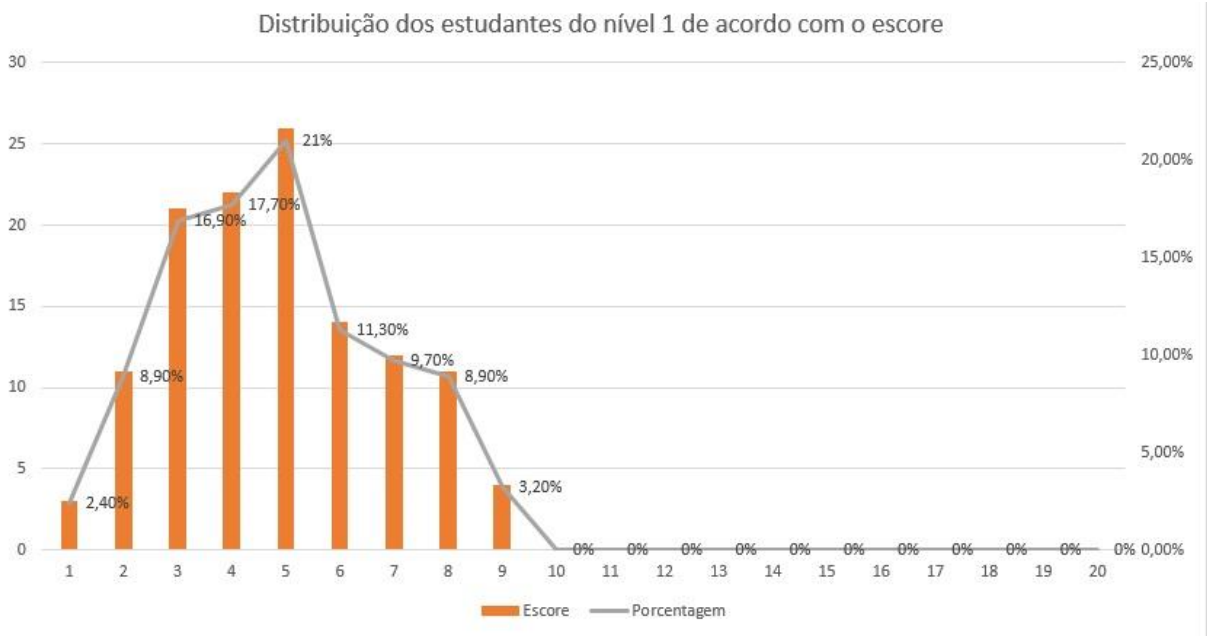
Tabela 11: Distribuição dos itens do Nível 2 em relação à discriminação, pela TCT.

Classificação	**Valores**	**Itens**	**Percentual de itens na prova**
Item deficiente	Disc. $<$ 0,2	1, 2, 4, 5, 7, 14, 16, 17, 20	45%
Item marginal	0,2 $\leq$ Disc. $<$ 0,3	12	5%
Item bom, sujeito a aprimoramento	0,3 $\leq$ Disc. $<$ 0,4	9, 18	10%
Item bom	Disc. $\geq$ 0,4	3, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 19	40%

A prova do nível 2 apresentou nove itens deficientes – dois a mais que a avaliação do nível 1 – com uma discriminação menor do que 0,2 e que deveriam ser rejeitados. Apenas o item 12 apresentou discriminação pertencente ao intervalo [0,2;0,3[, sendo classificado como um item marginal, sujeito a reelaboração. Foi uma prova bem dividida, onde metade dos itens foram considerados bons. Destaque para as oito questões que apresentaram um índice de discriminação maior ou igual a 0,4, configurando-se como questões ideais. Isso quer dizer que em 40% dos itens da avaliação os acertos entre as 27% maiores notas foram bem superiores aos acertos entre as 27% menores notas o que, em teoria, deveria sempre ocorrer.

De forma geral, os estudantes do Nível 2 tiveram um desempenho mais coerente do que os estudantes do Nível 1, mesmo que o nível mais avançado apresentasse uma quantidade maior de questões consideradas mais difíceis.

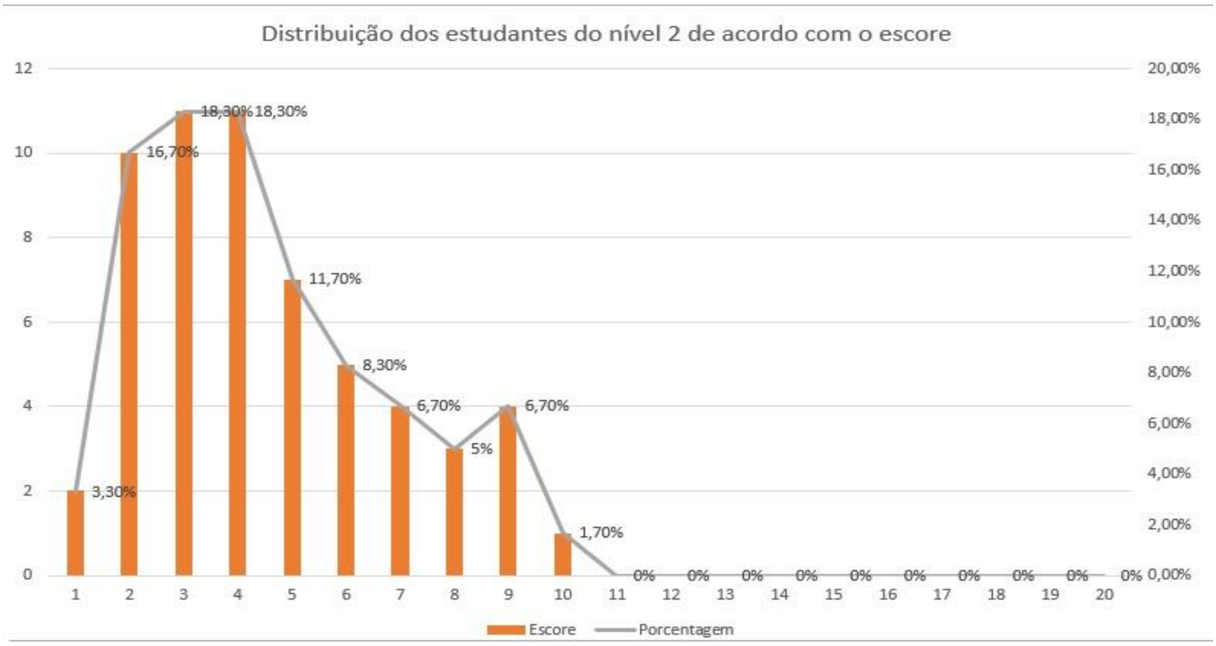
Os escores totais dos alunos do Nível 1 variaram apenas entre 1 e 9, incluindo-os, ainda que a escala fosse de 0 a 20. Obtiveram uma média aproximada de 4,82 e um desvio padrão[6] de 1,96. O gráfico a seguir contém informações extras:



O gráfico contempla a quantidade de acertos, no eixo horizontal, e as respectivas quantidade de alunos que os acertaram, no eixo vertical à esquerda. A nota mais frequente entre os alunos foi de 5 pontos (onde 1 ponto corresponde a 1 questão acertada), em um total de 26 estudantes, o que corresponde a 21% do total. Três estudantes obtiveram 1 ponto, enquanto quatro estudantes obtiveram as melhores colocações, que foi de 9 pontos. 66,9% dos alunos acertaram 5 itens ou menos, um dado preocupante, já que a avaliação possui 20 itens.

Os escores totais dos alunos do Nível 2 variaram apenas entre 0 e 10, incluindo-os, ainda que a escala fosse de 0 a 20. Obtiveram uma média aproximada de 4,37 e um desvio padrão de 2,4. O gráfico a seguir contém informações extras:

[6] Em probabilidade, o desvio padrão ou desvio padrão populacional é uma medida de dispersão em torno da média populacional de uma variável aleatória. Um baixo desvio padrão indica que os pontos dos dados tendem a estar próximos da média ou do valor esperado.



Três e quatro pontos foram as notas mais frequentes, em um total de onze estudantes cada, o que corresponde a 18,3 % do total em cada grupo. Em seguida, dez estudantes obtiveram dois pontos, conquistando 16,7 % das pontuações possíveis. Dois estudantes não acertaram nenhuma questão, enquanto apenas um aluno obteve a melhor colocação, que foi de dez pontos. Houve um ligeiro crescimento da quantidade de alunos que acertaram nove questões em relação aos que acertaram oito. Um dado preocupante é constatar que 71,6% dos alunos acertaram cinco itens ou menos, de um total de vinte itens.

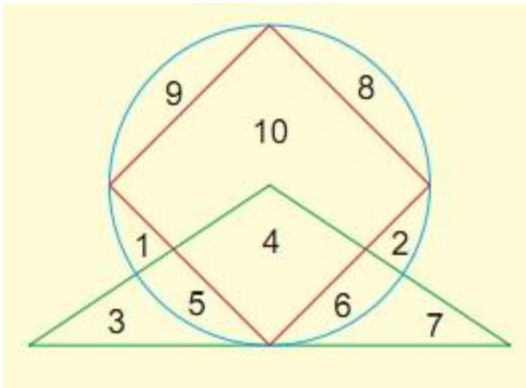
O ideal é que, em uma avaliação educacional, haja uma distribuição balanceada de acertos, onde o gráfico apresentado estivesse centralizado e com o aspecto de uma curva normal, o que claramente não ocorre nos dois gráficos apresentados.

5 ANÁLISE INDIVIDUALIZADA DAS QUESTÕES DA PRIMEIRA FASE DO NÍVEL 1 DA OBMEP

A seguir será apresentada uma análise individualizada dos itens presentes na prova de primeira fase da OBMEP 2016, nível 1. Serão expostas as questões, seguidas por suas respectivas soluções e, por fim, as análises.

QUESTÃO 1

Observe a figura. Qual é a soma dos números que estão escritos dentro do triângulo e também dentro do círculo, mas fora do quadrado?



A) 10
B) 11
C) 14
D) 17
E) 20

Uma Solução:

Os números que estão dentro do triângulo **e** dentro do círculo são: 4, 5 e 6. Destes, temos o 4 que também está dentro do quadrado, portanto devemos exclui-lo. Sobraram apenas os números 5 e 6. Então, 5 + 6 = 11.

Alternativa B.

Análise da Questão:

<table>
<tr><th colspan="2">Questão</th><th colspan="2">Gabarito</th><th colspan="2">Dificuldade</th><th colspan="2">Índice D[7]</th></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td colspan="2">B</td><td colspan="2">0,097</td><td colspan="2">0,089</td></tr>
<tr><td colspan="4">Acerto: 27% maiores notas</td><td colspan="4">Acertos: 27% menores notas</td></tr>
<tr><td colspan="4">0,118</td><td colspan="4">0,029</td></tr>
<tr><td>p(A)</td><td>p(B)</td><td>p(C)</td><td>p(D)</td><td>p(E)</td><td>p()[8]</td></tr>
<tr><td>0,218</td><td>0,097</td><td>0,185</td><td>0,121</td><td>0,371</td><td>0,008</td></tr>
</table>

---

7 Índice de Discriminação.

8 Questões com mais de uma alternativa marcada, rasuradas ou não marcadas.

Questão considerada muito difícil, já que apenas 9,7% dos alunos responderam ao item corretamente. Quanto à discriminação, infere-se que o mesmo é deficiente, devendo ser rejeitado.

Nota-se que a alternativa E correspondeu a 37,1% das marcações. Uma possível explicação é que os alunos que optaram por essa alternativa tenham somado os números 1, 2, 8 e 9, que correspondem às partes que estão “dentro do círculo” e “fora do quadrado e do triângulo”. Houve erro de interpretação.

Quanto às habilidades necessárias para resolver a questão, temos: ter a noção intuitiva de conjuntos numéricos (interseção e diferença); resolver um problema com números naturais envolvendo diferentes significados das operações, no caso adição.

QUESTÃO 2

Os anéis da figura estão entrelaçados. Qual é o menor número de anéis que devem ser cortados para que todos fiquem soltos?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Uma Solução:

Não é possível soltar todos os anéis com apenas um corte, isso é fácil de verificar: Se cortarmos o vermelho (a justificativa para o azul escuro, o verde escuro e o verde claro é a mesma) só ele se solta; se cortamos só o azul claro, ele e o vermelho se soltam, mas os outros permanecerão unidos; se cortarmos só o rosa, ele e o azul escuro se soltam e os outros permanecerão unidos. Testando se é possível soltá-los todos com dois cortes, percebemos que sim: Se cortarmos os anéis azul claro e rosa, pelo fato de que os outros quatro anéis estão soltos entre si. Logo, o menor número de anéis que devem ser cortados para que todos ficam soltos é 2.

Alternativa B.

Análise da Questão:

Questão		Gabarito		Dificuldade		Índice D
2		B		0,363		0,558
Acerto: 27% maiores notas			Acertos: 27% menores notas			
0,676			0,118			
p(A)	p(B)	p(C)	p(D)	p(E)	p()	
0,056	0,363	0,242	0,202	0,129	0,008	

O nível de dificuldade da questão é mediano, correspondendo a 36,3% das marcações. Em relação ao índice de discriminação, que corresponde a 0,558, podemos dizer que o item foi bem elaborado, já que 67,6% dos estudantes entre as 27% maiores notas acertaram o item, enquanto apenas 11,8% dos estudantes entre as 27% menores notas erraram.

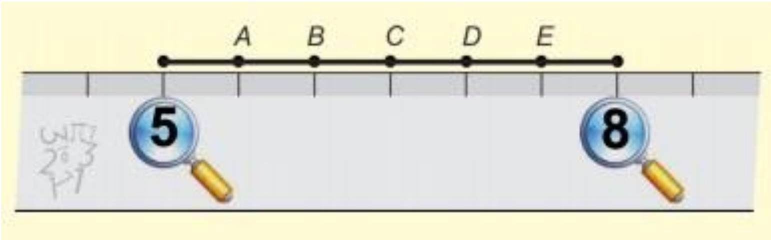
Ainda assim, o item apresenta um problema na construção das alternativas, pois o distrator A foi marcado por apenas 5,6% dos estudantes. Infere-se a respeito disso que, pela figura ser formada por 6 anéis, exista uma possível rejeição de que eles possam ser separados com apenas um corte. O mesmo acontece com a possibilidade deles serem separados com 5 cortes, já que a distrator E foi o segundo menos marcado (12,9%).

Em relação às habilidades necessárias para resolver a questão, temos: notar as dependências que um anel tem com os outros; análise das possibilidades de cortes.

QUESTÃO 3

José dividiu um segmento de reta em seis partes iguais. Ele observou que os pontos das extremidades do segmento correspondem às marcas de 5 cm e 8 cm de sua régua. Qual dos pontos corresponde à marca de 6 cm da régua?

A) A
B) B
C) C
D) D
E) E



Uma Solução:

O segmento tem comprimento 3 cm (8 cm – 5 cm). Como ele foi dividido em seis partes iguais, então cada uma delas medem 3 ÷ 6 = 0,5 cm. Para se chegar em 6 a partir do 5 devemos adicionar duas partes de 0,5 cm, o que corresponde a dizer que o 6 cm corresponde ao ponto B.

Alternativa B.

Análise da Questão:

<table>
<tr><th colspan="3">Questão</th><th colspan="3">Gabarito</th><th colspan="3">Dificuldade</th><th colspan="3">Índice D</th></tr>
<tr><td colspan="3">3</td><td colspan="3">B</td><td colspan="3">0,306</td><td colspan="3">0,294</td></tr>
<tr><td colspan="6">Acerto: 27% maiores notas</td><td colspan="6">Acertos: 27% menores notas</td></tr>
<tr><td colspan="6">0,412</td><td colspan="6">0,118</td></tr>
<tr><td colspan="2">p(A)</td><td colspan="2">p(B)</td><td colspan="2">p(C)</td><td colspan="2">p(D)</td><td colspan="2">p(E)</td><td colspan="2">p()</td></tr>
<tr><td colspan="2">0,266</td><td colspan="2">0,306</td><td colspan="2">0,145</td><td colspan="2">0,153</td><td colspan="2">0,121</td><td colspan="2">0,008</td></tr>
</table>

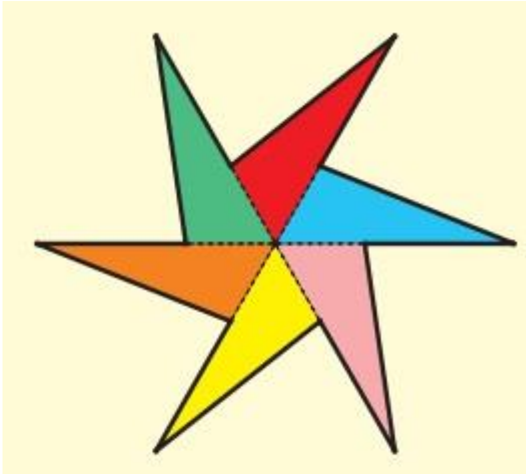
O item apresenta uma dificuldade mediana, correspondendo a 30,6% dos acertos. No que diz respeito à discriminação, o item é considerado marginal portanto, sujeito a reelaboração.

Não apresenta grandes variações de marcações, como mostra as alternativas C, D e E, com, respectivamente, 14,5%, 15,3% e 12,1% das marcações. Infere-se que os alunos que marcaram a alternativa A concluíram que cada um dos “espacinhos” media 1 cm, como normalmente acontecem com as réguas escolares, uma interpretação meio que já esperada.

As habilidades necessárias para resolver a questão são: realizar operações aritméticas com números inteiros; resolver problema que envolva variações proporcionais, diretas ou inversas entre grandezas.

QUESTÃO 4

A figura foi construída com triângulos de lados 3 cm, 7 cm e 8 cm. Qual é o perímetro da figura?



A) 60 cm
B) 66 cm
C) 72 cm
D) 90 cm
E) 108 cm

Uma Solução:

Como a figura é formada por 6 triângulos congruentes e apresenta certa harmonia (as medidas de cada triângulo consideradas para compor o perímetro da figura são as mesmas), basta calcularmos a soma das medidas dos segmentos que compõem parte do perímetro correspondente a um triângulo e multiplicarmos por 6. Então: Um triângulo "contribui" com um lado que mede 7 cm e parte do lado que mede 8, essa parte vale 8 – 3 = 5 cm (já que cada triângulo tem o lado de 3 cm apoiado no lado maior do outro triângulo). Logo, 7 + 5 = 12 e, com isso, 6 x 12 = 72 cm.

Alternativa C.

Análise da Questão:

<table>
<tr><th colspan="3">Questão</th><th colspan="3">Gabarito</th><th colspan="3">Dificuldade</th><th colspan="3">Índice D</th></tr>
<tr><td colspan="3">4</td><td colspan="3">C</td><td colspan="3">0,185</td><td colspan="3">0,088</td></tr>
<tr><td colspan="6">Acerto: 27% maiores notas</td><td colspan="6">Acertos: 27% menores notas</td></tr>
<tr><td colspan="6">0,235</td><td colspan="6">0,147</td></tr>
<tr><td colspan="2">p(A)</td><td colspan="2">p(B)</td><td colspan="2">p(C)</td><td colspan="2">p(D)</td><td colspan="2">p(E)</td><td colspan="2">p()</td></tr>
<tr><td colspan="2">0,226</td><td colspan="2">0,218</td><td colspan="2">0,185</td><td colspan="2">0,169</td><td colspan="2">0,185</td><td colspan="2">0,016</td></tr>
</table>

Questão considerada difícil, com 18,5% de acerto. Seu índice de discriminação nos indica que a questão é deficiente e deve ser rejeitada. Isso quer dizer que a diferença entre a porcentagem de acerto dos alunos entre as 27% maiores notas e a porcentagem de acerto dos alunos entre as 27% menores notas é baixa.

As alternativas possuem porcentagens de marcações bem próximas. A alternativa A, corresponde a 22,6% das marcações – a mais alta – mas nada foi inferido sobre essa possível escolha.

Em relação às habilidades necessárias para chegar na solução, temos: resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas, ou utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos; notar a ideia de sobreposição.

QUESTÃO 5

Isabel escreveu em seu caderno o maior número de três algarismos que é múltiplo de 13. Qual é a soma dos algarismos do número que ela escreveu?

A) 23
B) 24
C) 25
D) 26
E) 27

Uma Solução:

O maior número de três algarismos que é múltiplo de 13 é 988, que pode ser obtido de diferentes formas, uma delas é a seguinte: Sabemos que 999 é o maior número de 3 algarismos, a sua divisão por 13 resulta 76 e resto 11. Logo, 999 – 11 = 988. A soma dos de seus algarismos é 9 + 8 + 8 = 25.

Alternativa C.

Análise da Questão:

<table>
<tr><th colspan="2">Questão</th><th>Gabarito</th><th colspan="2">Dificuldade</th><th>Índice D</th></tr>
<tr><td colspan="2">5</td><td>C</td><td colspan="2">0,169</td><td>0,000</td></tr>
<tr><td colspan="3">Acerto: 27% maiores notas</td><td colspan="3">Acertos: 27% menores notas</td></tr>
<tr><td colspan="3">0,147</td><td colspan="3">0,147</td></tr>
<tr><td>p(A)</td><td>p(B)</td><td>p(C)</td><td>p(D)</td><td>p(E)</td><td>p()</td></tr>
<tr><td>0,210</td><td>0,089</td><td>0,169</td><td>0,395</td><td>0,129</td><td>0,008</td></tr>
</table>

Item considerado difícil, com uma porcentagem de acertos de 16,9%. A porcentagem de alunos entre as 27% maiores notas, que acertaram o item, e o seu correspondente entre as 27% menores notas é a mesma, fazendo com que o índice de discriminação seja de 0%. Portanto, é uma questão defeituosa, devendo ser rejeitada.

A alternativa D foi a mais marcada, com uma porcentagem de 39,5%. A respeito disso, infere-se que o estudante notou que 26 é o único número presente nas alternativas que é múltiplo de 13 e não continuou o seu raciocínio.

As habilidades necessárias para resolver a questão são: resolver um problema com números naturais envolvendo diferentes significados das operações; identificar padrões numéricos; identificar divisores ou múltiplos de números naturais.

QUESTÃO 6

A soma dos números das faces opostas de um dado é sempre 7. O dado da figura é girado sucessivamente sobre o caminho indicado até parar na última posição, destacada em cinza. Nessa posição, qual é o número que está na face superior do dado?

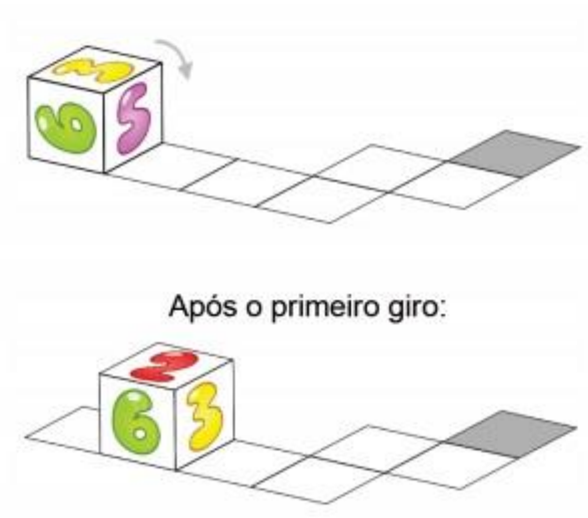
A) 1

B) 2

C) 3

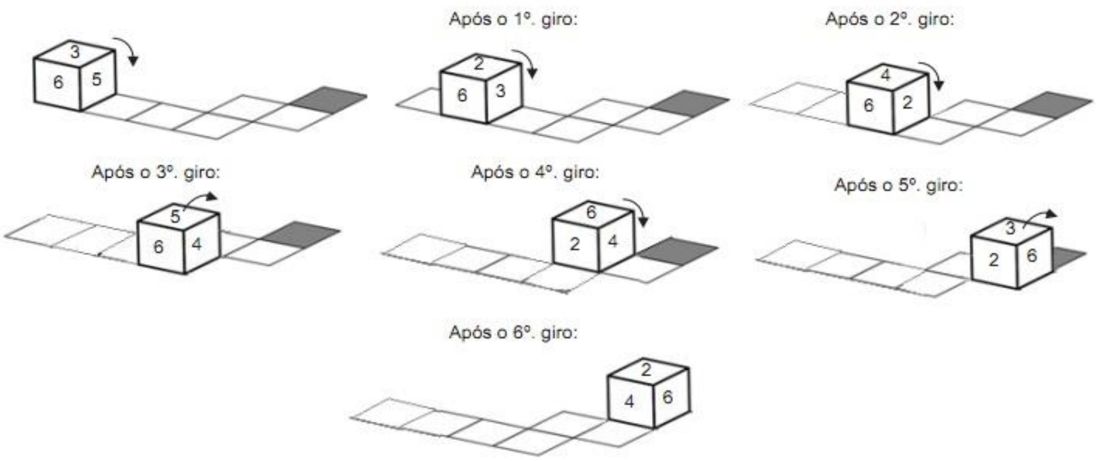
D) 4

E) 5



Uma Solução:

As imagens a seguir ilustram o comportamento do dado ao ser girado sobre o caminho até a região cinza:



Então, o número que estará na parte superior do dado, quando ele estiver sobre a região cinza, é 2.

Alternativa B.

Análise da Questão:

<table>
<tr><th colspan="2">Questão</th><th colspan="2">Gabarito</th><th colspan="2">Dificuldade</th><th colspan="2">Índice D</th></tr>
<tr><td colspan="2">6</td><td colspan="2">B</td><td colspan="2">0,145</td><td colspan="2">0,088</td></tr>
<tr><td colspan="4">Acerto: 27% maiores notas</td><td colspan="4">Acertos: 27% menores notas</td></tr>
<tr><td colspan="4">0,176</td><td colspan="4">0,088</td></tr>
</table>

p(A)	p(B)	p(C)	p(D)	p(E)	p()
0,153	0,145	0,306	0,242	0,153	0,000

Com uma dificuldade de 0,145, o item é considerado difícil. O seu índice de discriminação é 0,088, o que torna a questão deficiente, devendo a mesma ser rejeitada.

A alternativa C foi a escolhida com mais frequência pelos estudantes, com uma porcentagem de 30,6%. A justificativa é por se tratar de uma questão que necessita de uma visão espacial dos movimentos do dado, cujo passo a passo foi contado de forma errada pela maioria. O estudante pode ter encontrado valores errados para as faces que não estão à mostra e, a partir daí, desenvolver o percurso.

As habilidades necessárias para a resolução da questão são: utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problema, identificar padrões numéricos e realizar operações aritméticas com números inteiros.

QUESTÃO 7

Na figura vemos três cartelas com quatro adesivos e seus respectivos preços. O preço de uma cartela é a soma dos preços de seus adesivos.

Qual é o preço da cartela abaixo com seis adesivos?

A) R$ 18,00
B) R$ 20,00
C) R$ 21,00
D) R$ 22,00
E) R$ 23,00

Uma Solução:

Da terceira cartela temos que  +  = 5 reais

Da segunda cartela temos que  +  = 12 – 5 = 7 reais

Como a cartela com seis adesivos é igual à primeira cartela, acrescidos de  e  então ela custará 16 + 7 = 23 reais.

Alternativa E.

Análise da Questão:

<table>
<tr><th colspan="3">Questão</th><th colspan="3">Gabarito</th><th colspan="3">Dificuldade</th><th colspan="3">Índice D</th></tr>
<tr><td colspan="3">7</td><td colspan="3">E</td><td colspan="3">0,161</td><td colspan="3">0,265</td></tr>
<tr><td colspan="6">Acerto: 27% maiores notas</td><td colspan="6">Acertos: 27% menores notas</td></tr>
<tr><td colspan="6">0,294</td><td colspan="6">0,029</td></tr>
<tr><td colspan="2">p(A)</td><td colspan="2">p(B)</td><td colspan="2">p(C)</td><td colspan="2">p(D)</td><td colspan="2">p(E)</td><td colspan="2">p()</td></tr>
<tr><td colspan="2">0,323</td><td colspan="2">0,242</td><td colspan="2">0,137</td><td colspan="2">0,137</td><td colspan="2">0,161</td><td colspan="2">0,000</td></tr>
</table>

Com uma dificuldade de 16,1%, o item é considerado difícil. Seu índice de discriminação é de 0,265, fazendo com que o item seja considerado marginal portanto, sujeito a reelaboração.

A alternativa mais marcada foi a A, com 32,3% das marcações, e nada foi inferido sobre a possível marcação, além do fato de que é o valor mais próximo (seguido por 20, correspondente à alternativa B, que também tem uma boa marcação) dos valores das cartelas.

Em relação às habilidades necessárias para resolver a questão, temos: resolver problema que envolva variações proporcionais, diretas ou inversas entre grandezas; resolver um problema com números naturais envolvendo diferentes significados das operações.

QUESTÃO 8

A metade e o dobro do número 26 são números naturais de dois algarismos. Quantos são os números naturais que possuem essas mesmas propriedades?

A) 15
B) 18
C) 20
D) 22
E) 25

Uma Solução:

Primeiramente o número deve ser par, pois a metade de um número ímpar não resulta em um número natural. O menor número com essa propriedade é o 20 (já que a metade de 18 é 9 e, portanto, tem apenas um algarismo) e o maior é 48 (já que o dobro de 50 é 100, e este possui três algarismos). Então, temos a seguinte lista de números com essa propriedade:

20, 22,24,26,28,30,32,34,36,38,40,42,44,46,48.

Num total de 15 números.

Alternativa A.

Análise da Questão:

<table>
<tr><th colspan="2">Questão</th><th colspan="2">Gabarito</th><th colspan="2">Dificuldade</th><th colspan="2">Índice D</th></tr>
<tr><td colspan="2">8</td><td colspan="2">A</td><td colspan="2">0,177</td><td colspan="2">0,236</td></tr>
<tr><td colspan="4">Acerto: 27% maiores notas</td><td colspan="4">Acertos: 27% menores notas</td></tr>
<tr><td colspan="4">0,265</td><td colspan="4">0,029</td></tr>
<tr><td>p(A)</td><td>p(B)</td><td>p(C)</td><td>p(D)</td><td>p(E)</td><td>p()</td></tr>
<tr><td>0,177</td><td>0,185</td><td>0,185</td><td>0,234</td><td>0,210</td><td>0,008</td></tr>
</table>

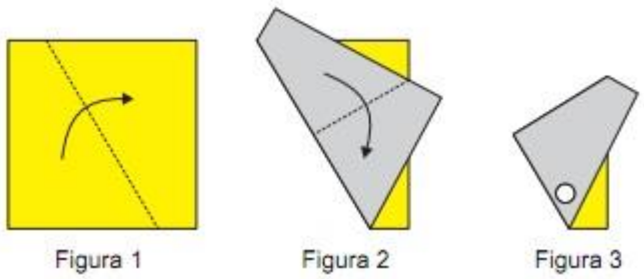
A dificuldade da questão corresponde a 17,7%, ou seja, é uma questão difícil. Seu índice de discriminação é de 0,236, fazendo com que o item seja considerado marginal, sujeito a reelaboração.

As porcentagens de marcações nas alternativas são bem próximas, sendo a alternativa D a mais marcada e a alternativa A (a correta), a menos marcada.

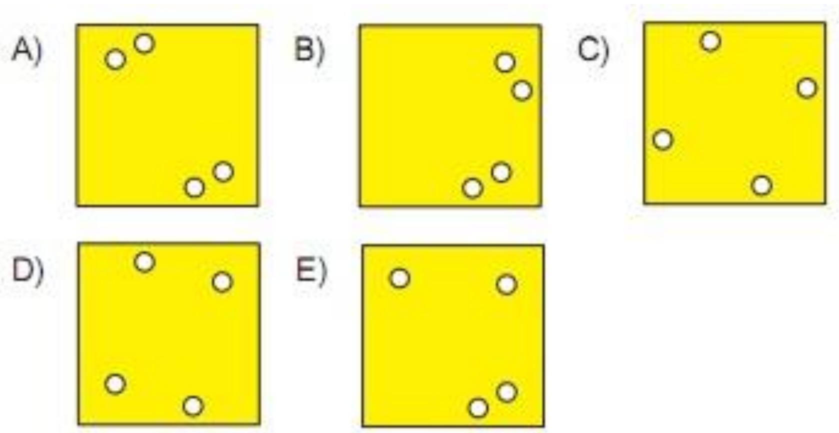
Temos as seguintes habilidades necessárias para resolver a questão: identificar padrões numéricos e realizar operações aritméticas com números inteiros.

QUESTÃO 9

Joãozinho fez duas dobras em uma folha de papel quadrada, ambas passando pelo centro da folha, como indicado na Figura 1 e na Figura 2. Depois ele fez um furo na folha dobrada, como indicado na Figura 3.

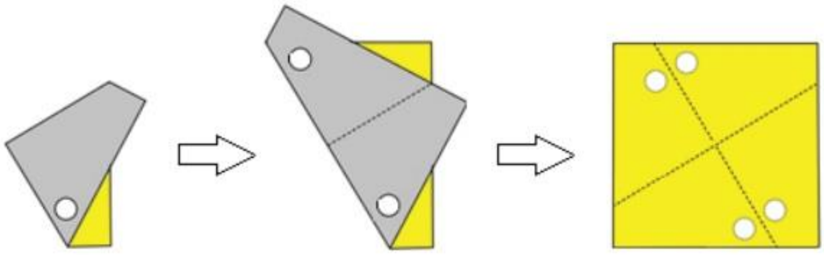


Qual das figuras abaixo representa a folha desdobrada?



Uma Solução:

O procedimento mais óbvio é imaginar onde os furos ficariam após cada desdobra. A imagem a seguir ilustra isso:



Cada um dos outros três furos aprece numa posição simétrica em relação à linha de desdobra.

Alternativa A.

Análise da Questão:

Questão	Gabarito	Dificuldade	Índice D		
9	A	0,250	0,324		
Acerto: 27% maiores notas			Acertos: 27% menores notas		
0,471			0,147		
p(A)	p(B)	p(C)	p(D)	p(E)	p()
0,250	0,153	0,274	0,202	0,113	0,008

Questão difícil, com uma porcentagem de acertos correspondentes a 25%. Seu índice de discriminação é de 0,324, sendo classificado como um item bom, mas sujeito a aprimoramento.

A alternativa mais marcada foi a C, correspondendo a 27,4% das marcações. Infere-se que a maioria dos estudantes não soube fazer o procedimento inverso (desdobra) desde o início.

As habilidades necessárias para a resolução da questão são: noções de simetria; interpretar e localizar a movimentação de objetos e sua representação no espaço bidimensional.

QUESTÃO 10

Três amigos fizeram uma aposta tentando adivinhar quantas sementes havia dentro de uma abóbora. Os palpites foram os seguintes: 234, 260 e 274. Quando abriram a abóbora e contaram as sementes, viram que um dos palpites estava errado por 17, outro por 31 e o outro por 9, para mais ou para menos. Na contagem das sementes, elas foram agrupadas em vários montinhos, cada um deles com 10, e um último montinho com menos de 10 sementes. Quantas sementes havia no último montinho?

A) 1
B) 3
C) 5
D) 7
E) 9

Uma Solução:

Devemos analisar as situações; para isso, construímos a seguinte tabela:

Palpite\Erro	- 17	+ 17	- 31	+ 31	- 9	+ 9
234	217	251	203	265	225	243
260	243	277	229	291	251	269
274	257	291	243	305	265	283

O único número presente nas três linhas é o 243 (além disso, ele respeita o enunciado do problema), que é o número de sementes da abóbora. Quando dividimos esse valor por 10 temos: 243 = 24 x 10 + 3, onde 3 é a quantidade de sementes que havia no último montinho.

Alternativa B.

Análise da Questão:

Questão	**Gabarito**	**Dificuldade**	**Índice D**
10	B	0,121	0,176

Acerto: 27% maiores notas	Acertos: 27% menores notas
0,235	0,059

p(A)	p(B)	p(C)	p(D)	p(E)	p()
0,073	0,121	0,177	0,258	0,355	0,016

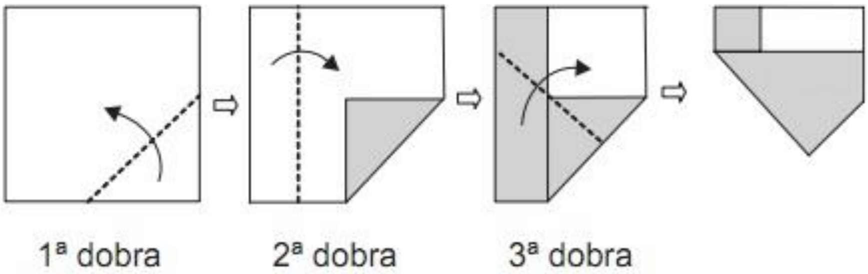
Item difícil, com uma porcentagem de acertos de apenas 12,1%. O índice de discriminação, de 0,176, indica que o item é deficiente, devendo ser rejeitado.

Com 35,5% das marcações, a alternativa E foi a mais escolhida pelos estudantes. Existem problemas na construção das alternativas, já que o distrator A possui uma porcentagem muito baixa, de apenas 7,3%.

As habilidades necessárias para a resolução da questão são: analisar os resultados obtidos e descartar os que não respeitam o enunciado; resolver um problema com números naturais envolvendo diferentes significados das operações.

QUESTÃO 11

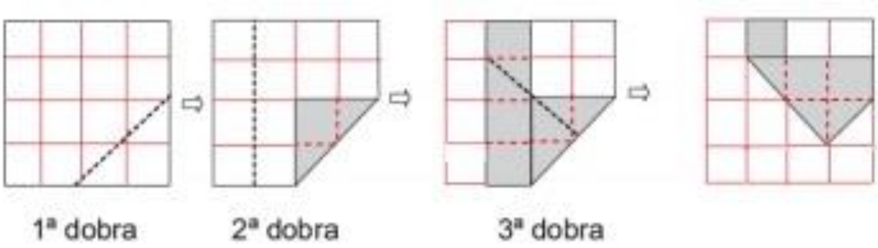
Alice fez três dobras numa folha de papel quadrada de lado 20 cm, branca na frente e cinza no verso. Na primeira dobra, ela fez um vértice coincidir com o centro do quadrado e depois fez mais duas dobras, como indicado na figura.
Após a terceira dobra, qual é a área da parte cinza da folha que ficou visível?



A) 70,5 cm^2
B) 100,5 cm^2
C) 112,5 cm^2
D) 162,5 cm^2
E) 225,5 cm^2

Uma Solução:

Podemos dividir essa folha de papel em 16 quadradinhos de 25 cm^2 de área (seu lado, consequentemente, medirá 5 cm). A imagem abaixo ilustra o processo:



A parte cinza corresponde a três desses quadradinhos mais três triângulos (de área 25/2 cada um), ou seja, a área da parte cinza é 3 x 25 + 3 x (25/2) = 112,5 cm^2.

Alternativa C.

Análise da Questão:

<table>
<tr><th colspan="3">Questão</th><th colspan="3">Gabarito</th><th colspan="3">Dificuldade</th><th colspan="3">Índice D</th></tr>
<tr><td colspan="3">11</td><td colspan="3">C</td><td colspan="3">0,202</td><td colspan="3">0,265</td></tr>
<tr><td colspan="6">Acerto: 27% maiores notas</td><td colspan="6">Acertos: 27% menores notas</td></tr>
<tr><td colspan="6">0,353</td><td colspan="6">0,088</td></tr>
<tr><td colspan="2">p(A)</td><td colspan="2">p(B)</td><td colspan="2">p(C)</td><td colspan="2">p(D)</td><td colspan="2">p(E)</td><td colspan="2">p()</td></tr>
<tr><td colspan="2">0,411</td><td colspan="2">0,202</td><td colspan="2">0,202</td><td colspan="2">0,097</td><td colspan="2">0,065</td><td colspan="2">0,024</td></tr>
</table>

Questão difícil, foi escolhida por 20,2% dos estudantes. É um item marginal, estando sujeito a reelaboração, já que o seu índice de discriminação é de 26,5%.

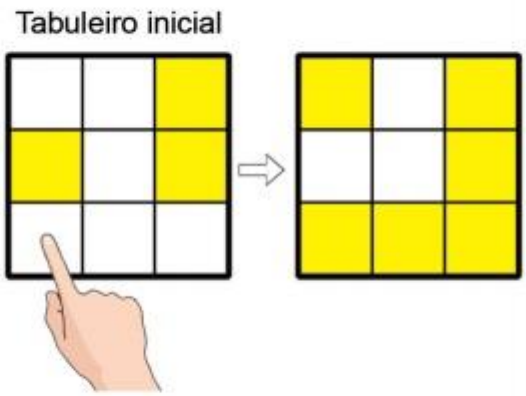
A grande maioria, o que corresponde a 41,1% marcou a alternativa A. A questão apresenta problemas na construção dos itens, já que os distratores D e E possuem baixa marcação, 9,7% e 6,5%, respectivamente. A porcentagem de alunos que anularam o item é considerável, 2,4%.

Temos as seguintes habilidades necessárias para resolver a questão: compreender a ideia de sobreposição; interpretar e localizar a movimentação de objetos e sua representação no espaço bidimensional; resolver problema envolvendo o cálculo de área de figura plana; reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, de área em figuras poligonais usando malha quadriculada.

QUESTÃO 12

Carlos tem um tabuleiro mágico 3 x 3 com casas na cor branca ou amarela. Toda vez que ele toca uma casa, ela muda de cor, bem como as demais casas na mesma linha e na mesma coluna, como mostra a figura. A partir do tabuleiro inicial, Carlos tocou no tabuleiro nove vezes, uma vez em cada casa. Após ter feito isto, quantas casas ficaram amarelas?

A) 0
B) 1
C) 3
D) 6
E) 9



Uma Solução:

Cada vez que tocamos em uma casa (ou em qualquer linha ou coluna em que ela estiver) sua cor é alterada. Se tocarmos uma quantidade par de vezes, a cor será a mesma do início; se tocarmos uma quantidade ímpar de vezes, a cor será diferente da do início. É verdade dizer que cada casa mudará de cor 5 vezes quando tocarmos em todas as casas (uma vez quando tocarmos nela e as outras quatro quando tocarmos nas duas outras casas da sua linha e nas duas outras casas da sua coluna), ou seja, no final do processo todas as casas estarão com uma cor diferente da que tinha no início. Então seis casas ficarão amarelas.

Alternativa D.

Análise da Questão:

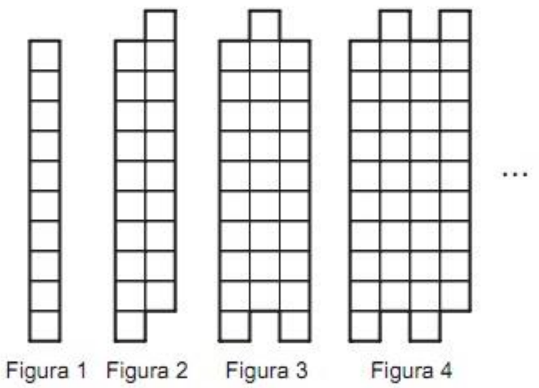
Questão	Gabarito		Dificuldade	Índice D	
12	D		0,403	0,412	
Acerto: 27% maiores notas			Acertos: 27% menores notas		
0,588			0,176		
p(A)	p(B)	p(C)	p(D)	p(E)	p()
0,056	0,032	0,177	0,403	0,323	0,008

Item de dificuldade mediana, possui 40,3% das marcações. Com um índice de discriminação de 41,2%, o item é classificado como bom; isso se justifica pelo fato da porcentagem de acertos entre as 27% maiores notas está bem acima da porcentagem de acertos entre as 27% menores notas, com 58,8% e 17,6%, respectivamente. Os distratores A e B possuem uma baixa quantidade de marcações, se configurando como alternativas não atrativas para o estudante. Infere-se que, pela imagem inicial, os estudantes consideraram a pouca possibilidade de, no final do processo, nenhuma ou apenas uma casa ficasse amarela. Em contrapartida, 32,3% dos estudantes consideraram que seria bem provável que todas as casas ficassem amarelas no final do processo.

Quanto às habilidades necessárias para resolver ao item, temos: identificar certas regularidades nas etapas do processo.

QUESTÃO 13

Abaixo temos uma sequência de figuras formadas por quadradinhos de 1 cm de lado. Cada figura da sequência, a partir da segunda, é formada acrescentando-se à figura anterior um retângulo igual ao da Figura 1, deslocando-o de um quadradinho, ora para cima, ora para baixo, como mostra a ilustração. Qual é o perímetro da figura com 1 000 quadradinhos?



A) 220 cm
B) 380 cm

C) 400 cm

D) 414 cm

E) 418 cm

Uma Solução:

A figura 1 tem perímetro igual a 22 cm, a figura 2 tem perímetro igual a 26 cm, a figura 3 tem perímetro igual a 30 cm e assim por diante. Percebemos que cada figura, a partir da segunda, tem seu perímetro aumentado em 4 unidades em relação a figura imediatamente anterior. Uma figura com 1000 quadradinhos é obtida acrescentando-se 99 figuras iguais a figura 1 (pois 10 + 99 x 10 = 1000). Então o seu perímetro será de 22 + 99 x 4 = 418 cm.

Alternativa E.

Análise da Questão:

Questão			Gabarito			Dificuldade			Índice D		
13			E			0,234			0,147		
Acerto: 27% maiores notas						Acertos: 27% menores notas					
0,353						0,206					
p(A)		p(B)		p(C)		p(D)		p(E)		p()	
0,161		0,169		0,258		0,169		0,234		0,008	

Com uma dificuldade de 0,234, o item é considerado difícil. Seu índice de discriminação mostra que a questão é deficiente, devendo ser rejeitada, uma vez que alunos que se saíram bem no exame obtiveram uma porcentagem de acertos não tão distante dos que se saíram mal.

A alternativa mais marcada foi a C, com 25,8% das marcações. Infere-se que a maioria dos estudantes perceberam que a cada acréscimo da figura 1 o perímetro aumenta 4 cm, mas não souberam interpretar esse resultado, pois simplesmente multiplicaram esse valor por 100 (que é a quantidade de figuras 1 presentes no final do processo) resultando em 400.

Sobre as habilidades necessárias para resolver a questão, podemos destacar: reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro em figuras poligonais; identificar uma expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões).

QUESTÃO 14

Em uma brincadeira, a mãe de João e Maria combinou que cada um deles daria uma única resposta correta a três perguntas que ela faria.

Ela perguntou:
– Que dia da semana é hoje?
– Hoje é quinta, disse João.
– É sexta, respondeu Maria.
Depois perguntou:
– Que dia da semana será amanhã?
– Segunda, falou João.
– Amanhã será domingo, disse Maria.
Finalmente ela perguntou:
– Que dia da semana foi ontem?
– Terça, respondeu João.
– Quarta, disse Maria.
Em que dia da semana a brincadeira aconteceu?

A) Segunda-feira
B) Terça-feira
C) Quarta-feira
D) Quinta-feira
E) Sexta-feira

Uma Solução:

Analisando a resposta dada à primeira pergunta, **hoje** é quinta para João e sexta para Maria.

Analisando a resposta dada à segunda pergunta, **hoje** é domingo para João e sábado para Maria.

Analisando a resposta dada à terceira pergunta, **hoje** é quarta para João e quinta para Maria.

Como eles falaram a verdade apenas uma vez, concluímos que a brincadeira aconteceu numa quinta-feira.

Alternativa D.

Análise da Questão:

Questão			Gabarito		Dificuldade			Índice D	
14			D		0,427			0,352	
Acerto: 27% maiores notas					Acertos: 27% menores notas				
0,676					0,324				
p(A)		p(B)		p(C)	p(D)		p(E)		p()
0,073		0,097		0,202	0,427		0,169		0,032

Item de dificuldade mediana, com 42,7% das marcações. Seu índice de discriminação é de 0,352, o que torna a questão bem elaborada, mas sujeita a aprimoramento.

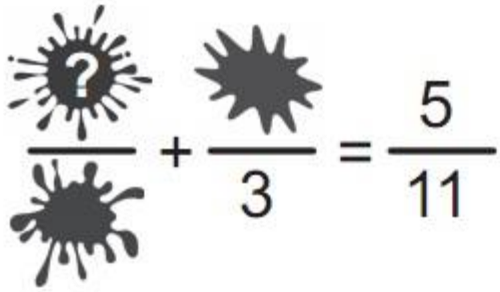
Os distratores A e B obtiveram poucas marcações, com 7,3% e 9,7%, configurando-se como alternativas pouco atrativas pelos estudantes. Esse item obteve um alto índice de anulação, de 3,2%, se tornando o maior entre todas as questões.

As habilidades necessárias para resolver o item são: resolver problemas de raciocínio lógico a partir de dedução de informações de relações arbitrárias entre objetos lugares, pessoas e/ou eventos fictícios dados, com o objetivo de maximizar o evento.

QUESTÃO 15

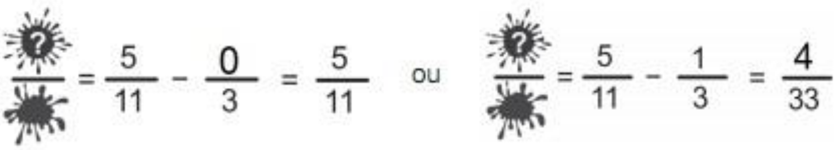
A figura mostra a fração $\frac{5}{11}$ como a soma de duas frações. As manchas encobrem números naturais. Uma das frações tem denominador 3. Qual é o menor numerador possível para a outra fração?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



Uma Solução:

Como é a soma de dois números positivos, nenhum deles pode ser maior do que $\frac{5}{11}$, isso quer dizer que o numerador da fração cujo denominador é 3 só pode ser 0 ou 1. Então,



O que nos dá 4 como menor numerador possível para essa fração.

Alternativa D.

Análise da Questão:

Questão		Gabarito	Dificuldade		Índice D
15		D	0,218		0,205
Acerto: 27% maiores notas			Acertos: 27% menores notas		
0,323			0,118		
p(A)	p(B)	p(C)	p(D)	p(E)	p()
0,177	0,323	0,153	0,218	0,113	0,016

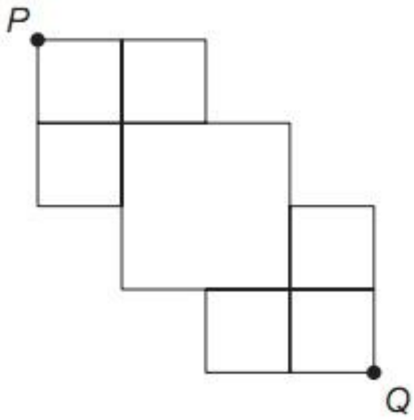
Questão considerada difícil, apresentou 21,8% das marcações. Com um índice de discriminação de 0,205, o item é considerado marginal, sujeito a reelaboração.

A alternativa B apresentou o maior índice de marcações, com 32,3%. Nada foi inferido sobre essa marcação, uma vez que não apresenta relação alguma com a resolução.

Quanto às habilidades necessárias à resolução, destacamos: resolução de problemas que envolvem operações com frações; analisar os resultados obtidos e descartar os que não respeitam o enunciado.

QUESTÃO 16

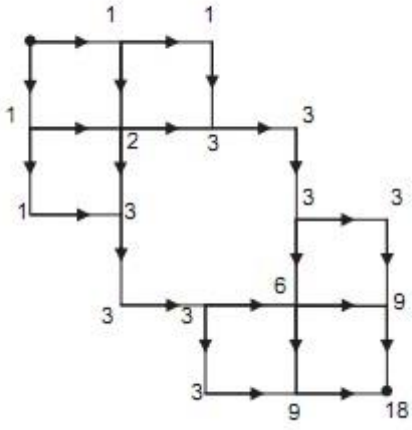
Uma formiguinha caminha pelos lados dos quadrados da figura, sempre para baixo (↓) ou para a direita (→). Quantos são os caminhos diferentes que ela pode percorrer para ir do ponto P ao ponto Q?



A) 18
B) 20
C) 22
D) 24
E) 36

Uma Solução:

A imagem a seguir mostra o números de caminhos possíveis para se chegar a cada vértice indicado, obtidos somando os números de possibilidades nos caminhos anteriores.



Alternativa A.

Análise da Questão:

<table>
<tr><th colspan="3">Questão</th><th colspan="3">Gabarito</th><th colspan="3">Dificuldade</th><th colspan="3">Índice D</th></tr>
<tr><td colspan="3">16</td><td colspan="3">A</td><td colspan="3">0,484</td><td colspan="3">0,323</td></tr>
<tr><td colspan="6">Acerto: 27% maiores notas</td><td colspan="6">Acertos: 27% menores notas</td></tr>
<tr><td colspan="6">0,676</td><td colspan="6">0,353</td></tr>
<tr><td colspan="2">p(A)</td><td colspan="2">p(B)</td><td colspan="2">p(C)</td><td colspan="2">p(D)</td><td colspan="2">p(E)</td><td colspan="2">p()</td></tr>
<tr><td colspan="2">0,484</td><td colspan="2">0,161</td><td colspan="2">0,177</td><td colspan="2">0,129</td><td colspan="2">0,048</td><td colspan="2">0,000</td></tr>
</table>

Questão mediana, já que 48,4% dos estudantes acertaram o item. Seu índice de discriminação é de 0,323, configurando-se como um item bom, mas sujeito a aprimoramento.

O distrator E possui baixo índice de marcação, com 4,8%, fazendo com que ele seja considerado pouco atrativo. Infere-se que seja por ser a alternativa que possui o maior valor (38), em contraste com a figura apresentada.

Temos as seguintes habilidades necessárias para resolver a questão: capacidade de contagem das situações favoráveis para a resolução da questão, respeitando as premissas do enunciado; resolver o problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutações e/ou combinações simples.

QUESTÃO 17

Uma praça circular é rodeada de casas. Ana e Pedro saíram de casas diferentes e deram uma volta ao redor da praça, no mesmo sentido, contando as casas pelas quais iam passando.

A quinta casa contada por Ana foi a décima segunda de Pedro e a vigésima de Ana foi a quinta de Pedro. Quantas casas existem em volta da praça?

A) 22
B) 25
C) 28
D) 31
E) 34

Uma Solução:

Pedro está 7 casas à frente de Ana, já que 12 – 5 = 7. A vigésima casa contada por Ana deveria ser a vigésima sétima casa contada por Pedro, mas foi a quinta. Isso implica que (pelo fato da praça ser circular) a casa número 5 é a casa número 27. Ou seja, ele começou a contar de novo e parou cinco casas após dar uma volta completa na praça. Então, o número de casas é 27 – 5 = 22.

Alternativa A.

Análise da Questão:

Questão		Gabarito		Dificuldade		Índice D	
17		A		0,266		0,353	
Acerto: 27% maiores notas				Acertos: 27% menores notas			
0,382				0,029			
p(A)		p(B)	p(C)		p(D)	p(E)	p()
0,266		0,282	0,153		0,153	0,145	0,000

Com uma dificuldade de 0,266, o item é considerado difícil. O seu índice de discriminação é de 0,353, fazendo com que a questão seja considerado bem elaborada, mas sujeita a aprimoramento.

A proporção de marcações entre a alternativa A (gabarito) e a alternativa B (mais marcada) é bem próxima, 26,6% e 28,2%, respectivamente. Infere-se que a maioria dos alunos percebeu que “a vigésima casa contada por Ana deveria ser a vigésima sétima casa contada por Pedro, mas foi a quinta” e, portanto, o número de casas é um valor menor do que 27.

As habilidades necessárias para a resolução da questão são: identificar padrões numéricos e realizar operações aritméticas com números inteiros.

QUESTÃO 18

Joãozinho distribuiu bolas em caixas numeradas de 1 a 2016. Ele fez isso de forma que o número total de bolas, em quaisquer cinco caixas consecutivas, fosse sempre o mesmo. Na figura abaixo estão indicadas as quantidades de bolas em algumas caixas; a figura também mostra que Joãozinho colocou 3 e 7 bolas em duas caixas vizinhas.

Quantas bolas ele colocou na última caixa?

A) 1
B) 3
C) 5
D) 7
E) 9

Uma Solução:

Chamamos de x o números de bolas da primeira caixa, de y o número de bolas na quinta caixa e de z o número de bolas na sexta caixa. Do enunciado temos que:

$$x + 5 + 9 + 1 + y = 5 + 9 + 1 + y + z$$

Logo, x = z.

Usando o mesmo raciocínio e chamando de w o número de bolas na sétima caixa, temos:

$$5 + 9 + 1 + y + z = 9 + 1 + y + z + w$$

$$5 + 9 + 1 + y + z = 9 + 1 + y + z + w$$

Logo, w = 5.

Prosseguindo com esse raciocínio, percebemos que as quantidades das bolas se repetem a cada cinco caixas. A primeira caixa pode conter 3 ou 7 bolas, vejamos as seguintes sequências:

3, 5, 9, 1, 7, 3, 5, 9, 1, 7,... e 7, 5, 9, 1, 3, 7, 5, 9, 1, 3, ...

Apenas a segunda respeita a imagem do problema. A caixa 2016 terá a mesma quantidade de bolas que a caixa número 1, pois 2016 = **5** x 403 + **1**.

Então, a caixa 2016 terá 7 bolas.

Alternativa D.

Análise da Questão:

Questão		**Gabarito**		**Dificuldade**		**Índice D**
18		D		0,234		0,323
Acerto: 27% maiores notas				Acertos: 27% menores notas		
0,382				0,059		
p(A)	p(B)	p(C)		p(D)	p(E)	p()
0,073	0,129	0,258		0,234	0,298	0,008

Questão considerada difícil, apresentado 23,4% de acertos. Seu índice de discriminação é de 0,323, tornando a questão bem elaborada, mas sujeita a aprimoramento.

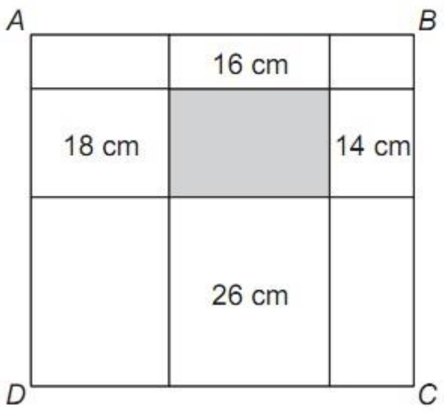
O distrator A possui baixa marcação, com 7,3%, tornando-se uma alternativa pouco atrativa. Nada foi inferido sobre esse resultado.

As habilidades necessárias para a resolução do item são: identificar padrões numéricos e realizar operações aritméticas com números inteiros; resolver situação-problema com números naturais cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

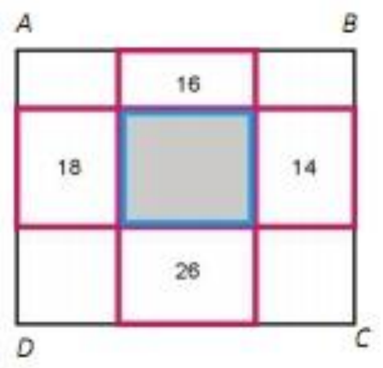
QUESTÃO 19

O retângulo ABCD foi dividido em nove retângulos menores, alguns deles com seus perímetros indicados na figura. O perímetro do retângulo ABCD é 54 cm. Qual é o perímetro do retângulo cinza?

A) 15 cm
B) 19 cm
C) 20 cm
D) 22 cm
E) 24 cm



Uma Solução:



Observando a figura, percebemos que a soma dos segmentos rosa é igual ao perímetro do retângulo ABCD (que é 54 cm). Notamos também que a soma dos segmentos rosa com os de cor azul equivale à soma dos perímetros dos retângulos cujos valores foram dados na imagem do enunciado (18 + 16 + 14 + 26 = 74 cm). Logo, o perímetro do retângulo cinza é a diferença 74 – 54 = 20 cm.

Alternativa C.

Análise da Questão:

<table>
<tr><th colspan="1">Questão</th><th colspan="1">Gabarito</th><th colspan="1">Dificuldade</th><th colspan="1">Índice D</th></tr>
<tr><td>19</td><td>C</td><td>0,226</td><td>0,235</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Acerto: 27% maiores notas</td><td colspan="3">Acertos: 27% menores notas</td></tr>
<tr><td colspan="3">0,353</td><td colspan="3">0,118</td></tr>
<tr><td>p(A)</td><td>p(B)</td><td>p(C)</td><td>p(D)</td><td>p(E)</td><td>p()</td></tr>
<tr><td>0,234</td><td>0,177</td><td>0,226</td><td>0,218</td><td>0,137</td><td>0,008</td></tr>
</table>

Questão difícil, com dificuldade de 0,226. Apresenta índice de discriminação de 0,235, classificando-se como item marginal, sujeito a reelaboração.

A alternativa mais marcada, com 23,4% das marcações, foi a alternativa A; algo curioso, já que é de se esperar que muitos alunos (na impossibilidade de fazerem os cálculos) resolvam o item por “olho” e, pela imagem, claramente percebe-se que o retângulo cinza tem perímetro maior do que 16, que é o perímetro do retângulo que está sobre ele.

As habilidades necessárias para resolver o item são: resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas, ou resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de grandezas e medidas; reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados.

QUESTÃO 20

Josefa brinca de escrever sequências de números. A partir de um número natural maior do que 1, ela procede da seguinte forma para obter o próximo número:

• Se o número for par, ela o divide por 2.

• Se o número for ímpar e tiver apenas um algarismo, ela soma 1 a esse número e divide o resultado por 2.

• Se o número for ímpar e tiver mais de um algarismo, ela apaga o algarismo das unidades.

Josefa repete o procedimento com o número obtido até aparecer o número 1, quando termina a sequência.

Por exemplo, a sequência que começa com 1101 é formada por sete números: 1101 → 110 → 55 → 5 → 3 → 2 → 1.

Quantas são as sequências formadas por três números?

A) 7
B) 12
C) 14
D) 25
E) 37

Uma Solução:

Fazendo a contagem a partir da quantidade de algarismos do número inicial.

Número inicial com 1 algarismo: Só temos duas sequências, a saber: 3→2→1 e 4→2→1.

Número inicial com 2 algarismos:

- Se o primeiro número for ímpar, o algarismos que deve corresponder às dezenas tem que ser 2 pois, nesse caso, apagamos o algarismo das unidades e sobra só o 2, cuja sequência é 2→1. Temos então 5 possibilidades.
- Se o primeiro número for par, o segundo termo é obtido dividindo esse número por 2. Nessa segunda etapa, o número deve ser ímpar e estar entre 10 e 20, para que possamos apagar o seu algarismo das unidades e sobrar o 1. Temos então 5 possibilidades.

Número inicial com 3 algarismos: Nesse caso, devemos apagar o algarismo das unidades duas vezes seguidas. Isso ocorre quando o algarismo das unidades e também o das dezenas é ímpar, e quando o algarismo das centenas é 1. Temos então 1 x 5 x 5 = 25 possibilidades.

Temos então um total de 2 + 5 + 5 + 25 = 37 sequências formadas por três números.

Alternativa E.

Análise da Questão:

<table>
<tr><th colspan="3">Questão</th><th colspan="3">Gabarito</th><th colspan="3">Dificuldade</th><th colspan="3">Índice D</th></tr>
<tr><td colspan="3">20</td><td colspan="3">E</td><td colspan="3">0,185</td><td colspan="3">0,147</td></tr>
<tr><td colspan="6">Acerto: 27% maiores notas</td><td colspan="6">Acertos: 27% menores notas</td></tr>
<tr><td colspan="6">0,265</td><td colspan="6">0,118</td></tr>
<tr><td colspan="2">p(A)</td><td colspan="2">p(B)</td><td colspan="2">p(C)</td><td colspan="2">p(D)</td><td colspan="2">p(E)</td><td colspan="2">p()</td></tr>
<tr><td colspan="2">0,323</td><td colspan="2">0,153</td><td colspan="2">0,145</td><td colspan="2">0,194</td><td colspan="2">0,185</td><td colspan="2">0,000</td></tr>
</table>

Questão difícil, com 18,5% de acertos. Seu índice de discriminação é de 0,147, tornando o item deficiente, devendo ser rejeitado.

A alternativa A obteve 32,3% das marcações, tornando-se o distrator mais atrativo para os estudantes. Infere-se que por se tratar de um número diferenciado (é o único com apenas um algarismo), essa alternativa tenha chamado a atenção dos que não fizeram os cálculos.

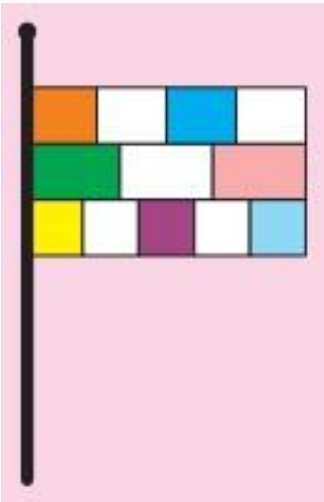
Sobre as habilidades necessárias pera a resolução da questão, temos: capacidade de analisar todos os casos possíveis; resolver o problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutações e/ou combinações simples; resolver situação-problema com números naturais, considerando as ordens e as classes de determinada base.

6 ANÁLISE INDIVIDUALIZADA DAS QUESTÕES DA PRIMEIRA FASE DO NÍVEL 2 DA OBMEP

A seguir serão apresentadas uma análise individualizada dos itens presentes na prova de primeira fase da OBMEP 2016, nível 2. Serão expostas as questões, seguidas por suas respectivas soluções e, por fim, as análises.

QUESTÃO 1

As três faixas horizontais da bandeira ao lado têm mesmo comprimento, mesma altura e cada faixa é dividida em partes iguais. A área total da bandeira é 900 cm^2. Qual é a soma das áreas dos retângulos brancos?



A) 300 cm^2
B) 370 cm^2
C) 375 cm^2
D) 450 cm^2
E) 600 cm^2

Uma Solução:

Cada faixa horizontal da bandeira tem área igual a 300 cm^2. A primeira faixa foi dividida em quatro partes iguais, cada uma com 300/4 = 75 cm^2 de área; logo, as duas regiões brancas dessa faixa somam 150 cm^2. A faixa do meio foi dividida em três partes iguais, cada uma com 300/3 = 100 cm^2 de área; logo, a região branca dessa faixa tem 100 cm^2. A última faixa foi dividida em cinco partes iguais, cada uma com 300/5 = 60 cm^2 de área; logo, as duas regiões brancas dessa faixa somam 120 cm^2. Portanto, a soma das áreas dos retângulos brancos é 150 + 100 + 120 = 370 cm^2.

Alternativa B.

Análise da Questão:

<table>
<tr><th colspan="3">Questão</th><th colspan="3">Gabarito</th><th colspan="3">Dificuldade</th><th colspan="3">Índice D</th></tr>
<tr><td colspan="3">1</td><td colspan="3">B</td><td colspan="3">0,183</td><td colspan="3">0,125</td></tr>
<tr><td colspan="6">Acerto: 27% maiores notas</td><td colspan="6">Acertos: 27% menores notas</td></tr>
<tr><td colspan="6">0,188</td><td colspan="6">0,063</td></tr>
<tr><td colspan="2">p(A)</td><td colspan="2">p(B)</td><td colspan="2">p(C)</td><td colspan="2">p(D)</td><td colspan="2">p(E)</td><td colspan="2">p()</td></tr>
<tr><td colspan="2">0,533</td><td colspan="2">0,183</td><td colspan="2">0,100</td><td colspan="2">0,117</td><td colspan="2">0,067</td><td colspan="2">0,000</td></tr>
</table>

Questão considerada difícil, já que apenas 18,3% dos estudantes acertaram o item. Seu coeficiente de discriminação é de 0,125, caracterizando um item deficiente, que deve ser rejeitado.

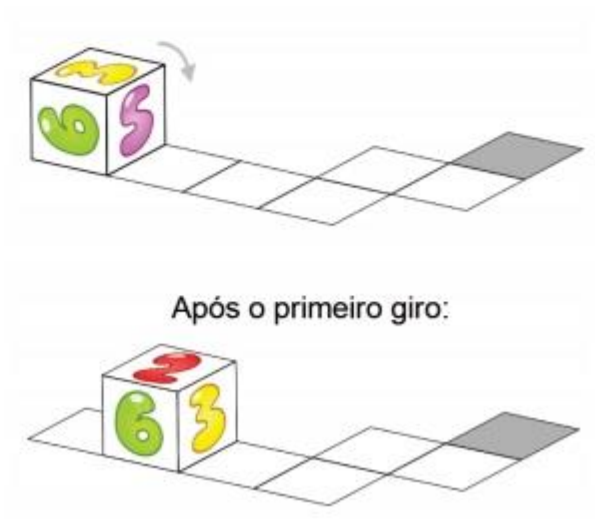
A alternativa A representa 53,3% das marcações. Infere-se a respeito disso que a grande maioria dos alunos achou que a distribuição da área de cor branca era a mesma nas três linhas da bandeira, chegando a conclusão de que 900/3 = 300 era a área pedida.

Sobre as habilidades necessárias para resolver a questão, destacamos: resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas; a resolução de situação-problema envolvendo a variação de grandezas diretamente proporcionais; reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados.

QUESTÃO 2

A soma dos números das faces opostas de um dado é sempre 7. O dado da figura é girado sucessivamente sobre o caminho indicado até parar na última posição, destacada em cinza. Nessa posição, qual é o número que está na face superior do dado?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



Uma Solução:

Questão idêntica à questão 6 do nível 1, cuja solução foi dada no capítulo anterior.

Alternativa B.

Análise da Questão:

<table>
<tr><th colspan="3">Questão</th><th colspan="3">Gabarito</th><th colspan="3">Dificuldade</th><th colspan="3">Índice D</th></tr>
<tr><td colspan="3">2</td><td colspan="3">B</td><td colspan="3">0,100</td><td colspan="3">0,125</td></tr>
<tr><td colspan="6">Acerto: 27% maiores notas</td><td colspan="6">Acertos: 27% menores notas</td></tr>
<tr><td colspan="6">0,063</td><td colspan="6">0,188</td></tr>
<tr><td colspan="2">p(A)</td><td colspan="2">p(B)</td><td colspan="2">p(C)</td><td colspan="2">p(D)</td><td colspan="2">p(E)</td><td colspan="2">p()</td></tr>
<tr><td colspan="2">0,100</td><td colspan="2">0,100</td><td colspan="2">0,100</td><td colspan="2">0,433</td><td colspan="2">0,267</td><td colspan="2">0,000</td></tr>
</table>

Questão considerada muito difícil, com grau de dificuldade igual a 0,100. Seu índice de discriminação é de 0,125, o que torna o item deficiente devendo, portanto, ser rejeitado.

Essa questão está presente no nível 1 e lá a porcentagem de acertos foi maior (14,5%). A alternativa D foi a escolhida com mais frequência pelos estudantes, com uma porcentagem de 43,3%. A justificativa é por se tratar de uma questão que necessita de uma visão espacial dos movimentos do dado, cujo passo a passo foi contado de forma errada pela maioria. O estudante pode ter encontrado valores errados para as faces que não estão à mostra e, a partir daí, desenvolver o percurso.

As habilidades necessárias para a resolução da questão são: utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problema, identificar padrões numéricos e realizar operações aritméticas com números inteiros.

QUESTÃO 3

Joãozinho fez duas dobras em uma folha de papel quadrada, ambas passando pelo centro da folha, como indicado na Figura 1 e na Figura 2. Depois ele fez um furo na folha dobrada, como indicado na Figura 3.

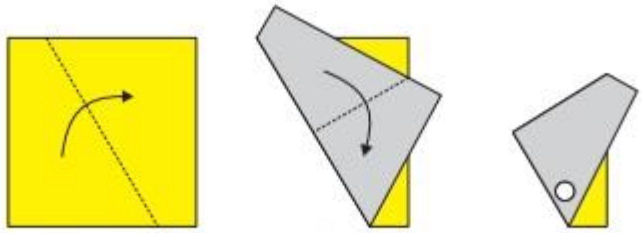
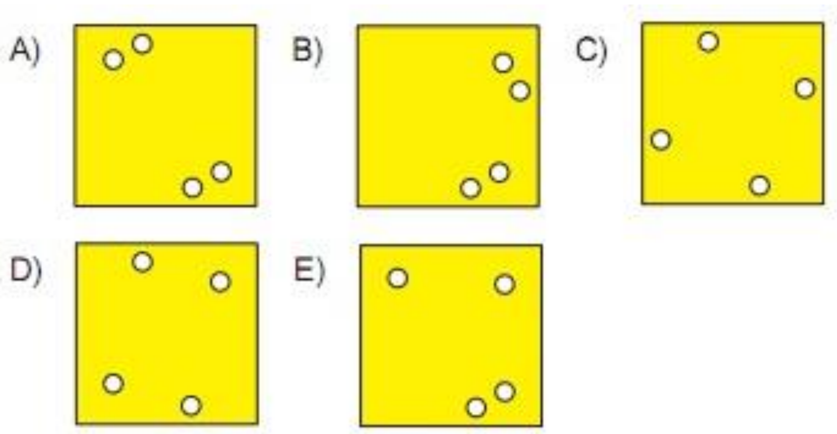


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Qual das figuras abaixo representa a folha desdobrada?



Uma Solução:

Questão idêntica à questão 9 do nível 1, cuja solução foi dada no capítulo anterior.

Alternativa A.

Análise da Questão:

Questão	Gabarito		Dificuldade	Índice D	
3	A		0,383	0,500	
Acerto: 27% maiores notas			Acertos: 27% menores notas		
0,563			0,063		
p(A)	p(B)	p(C)	p(D)	p(E)	p()
0,383	0,100	0,283	0,133	0,100	0,000

O item apresenta um índice de dificuldade de 0,385, logo, é uma questão mediana. Ela está presente no nível 1 e lá foi classificada como difícil. Seu índice de discriminação é de 0,500, sendo considerado um item bem elaborado. Pode ser um fato contraditório, já que no nível 1 o item era sujeito a aprimoramento; mas devemos estar cientes de que o público alvo é outro.

As habilidades necessárias para a resolução da questão são: noções de simetria; interpretar e localizar a movimentação de objetos e sua representação no espaço bidimensional.

QUESTÃO 4

Em um clube, as escolinhas de futebol e de basquete têm exatamente quatro atletas em comum. Eles correspondem a 10% dos atletas da escolinha de futebol e a 25% dos atletas da escolinha de basquete. Quantos atletas participam de apenas uma dessas escolinhas?

A) 35
B) 40
C) 44
D) 48
E) 56

Uma Solução:

A escolinha de futebol tem 40 alunos, pois 4 alunos correspondem a 10%, assim 40 alunos corresponderão a 100%. Já a escolinha de basquete tem 16 alunos, pois 4 alunos correspondem a 25%, assim 16 alunos corresponderão a 100%.

Os alunos que participam somente de uma escolinha é (40 – 4) + (16 – 4) = 48.

Alternativa D.

Análise da Questão:

Questão			Gabarito			Dificuldade			Índice D		
4			B			0,317			0,125		
Acerto: 27% maiores notas						Acertos: 27% menores notas					
0,188						0,063					
p(A)		p(B)		p(C)		p(D)		p(E)		p()	
0,383		0,317		0,100		0,167		0,033		0,000	

Item de nível mediano, sua dificuldade é de 0,317. Apresenta um índice de discriminação de 0,125 o que torna a questão deficiente, devendo ser rejeitada.

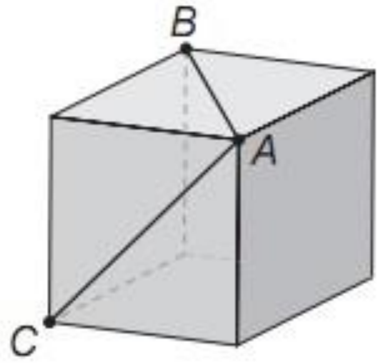
O distrator E foi escolhido por apenas 3,3% dos alunos, podendo ser considerado uma alternativa pouco atrativa. Infere-se que os estudantes que fizeram os cálculos souberam perceber a inviabilidade de apenas somar os valores 40 e 16; ainda que a maioria não tenha concluído corretamente a questão, já que a alternativa mais marcada foi a A, com 38,3% das marcações.

As habilidades exigidas para a resolução da questão são: ter a noção intuitiva de conjuntos numéricos; resolver um problema com números naturais envolvendo a utilização de porcentagem; a resolução de situação-problema envolvendo a variação de grandezas diretamente proporcionais.

QUESTÃO 5

Na figura estão desenhadas diagonais de duas faces de um cubo. Quanto mede o ângulo BÂC formado por elas?

A) 45^0
B) 60^0
C) 75^0
D) 90^0
E) 120^0



Uma Solução:

Podemos notar que AB, AC e BC são diagonais das faces de um cubo e, portanto, são iguais. Então o triângulo ABC é equilátero. Como o ângulo BÂC é um ângulo interno desse triângulo, então ele mede 60^0.

Alternativa B.

Análise da Questão:

<table>
<tr><th colspan="3">Questão</th><th colspan="3">Gabarito</th><th colspan="3">Dificuldade</th><th colspan="3">Índice D</th></tr>
<tr><td colspan="3">5</td><td colspan="3">B</td><td colspan="3">0,083</td><td colspan="3">0,062</td></tr>
<tr><td colspan="6">Acerto: 27% maiores notas</td><td colspan="6">Acertos: 27% menores notas</td></tr>
<tr><td colspan="6">0,125</td><td colspan="6">0,063</td></tr>
<tr><td colspan="2">p(A)</td><td colspan="2">p(B)</td><td colspan="2">p(C)</td><td colspan="2">p(D)</td><td colspan="2">p(E)</td><td colspan="2">p()</td></tr>
<tr><td colspan="2">0,167</td><td colspan="2">0,083</td><td colspan="2">0,233</td><td colspan="2">0,317</td><td colspan="2">0,200</td><td colspan="2">0,000</td></tr>
</table>

Questão considerada muito difícil, já que apenas 8,3% dos alunos a acertaram. O índice de discriminação é baixo, 6,2%, então podemos considerar a questão deficiente, devendo ser rejeitada. A porcentagem de alunos entre as 27% maiores notas que acertaram o item é pequena, mas é maior que a porcentagem de acerto entre as 27% menores notas.

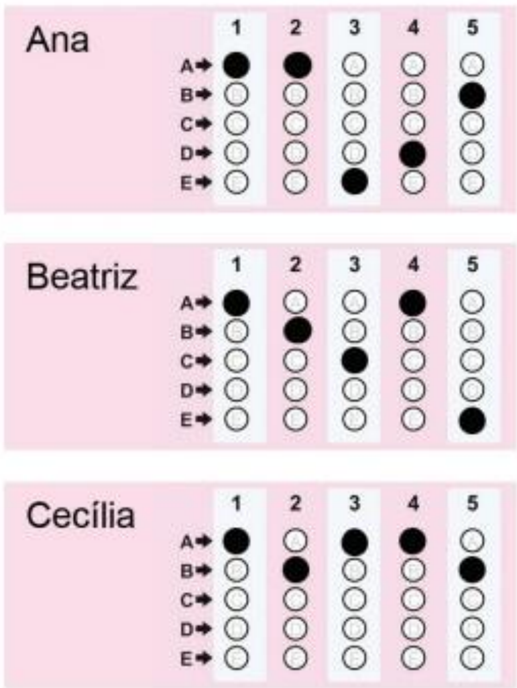
A alternativa D corresponde a 31,7% das marcações. Infere-se sobre isso que a maioria dos estudantes considerou que o ângulo fosse de 90^0 já que é esse o ângulo entre o plano que contém o segmento de reta AB e o plano que contém o segmento de reta AC.

Sobre as habilidades necessárias para a resolução da questão, temos: utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problema, resolver problema utilizando a propriedade dos triângulos: soma dos seus ângulos internos.

QUESTÃO 6

A figura mostra os cartões com as respostas de Ana, Beatriz e Cecília para uma prova de múltipla escolha, com cinco questões e alternativas A, B, C, D e E. Ana acertou quatro questões, Beatriz acertou uma e Cecília acertou três. Qual foi a questão que Ana errou?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



Uma Solução:

Analisemos as possibilidade:

- Se Ana errou a questão 1, então Beatriz também errou. Como Ana acertou as outras quatro questões e Beatriz não marcou nenhuma igual a de Ana, concluímos que Beatriz não acertou nenhuma questão. **Contradição!**
- Se Ana errou a questão 2, então Beatriz acertou a questão 1 e errou as demais. Logo, Cecília acertou a questão 1 e 5, apenas, pois a 2 está igual à de Beatriz (portanto, errada) e a 3 e a 4 está diferente da de Ana, cujas questões estão corretas. **Contradição!**

- Se Ana errou a questão 3, então Beatriz acertou a questão 1 e errou as demais. Logo, Cecília erro as questões 2 e 4, acertou as questões 1, 3 e 5.
- Se Ana errou a questão 4, então Beatriz acertou a questão 1 e errou as demais. Logo, Cecília acertou as questões 1 e 5 (porque Ana acertou) e errou a 2, a 3 e a 4 (as duas primeiras porque Ana acertou e a última porque Beatriz errou). **Contradição!**
- Se Ana errou a questão 5, então Beatriz acertou a questão 1 e errou as demais. Logo, Cecília também acertou a 1 e errou as demais. **Contradição!**

A única possibilidade que atende ao enunciado da questão é a terceira. Concluímos que Ana errou a questão 3.

Alternativa C.

Análise da Questão:

Questão	Gabarito	Dificuldade	Índice D		
6	C	0,417	0,563		
Acerto: 27% maiores notas			Acertos: 27% menores notas		
0,688			0,125		
p(A)	p(B)	p(C)	p(D)	p(E)	p()
0,100	0,267	0,417	0,133	0,067	0,017

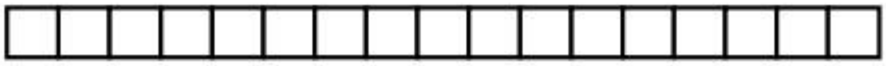
Questão de nível mediano, com 41,7% das marcações. Seu índice de discriminação (0,563) torna o item bem elaborado, ou seja, a quantidade de acertos entre as 27% maiores notas é bem maior que quantidade de acertos entre as 27% menores notas.

O distrator E apresenta poucas marcações, apenas 6,7% do total, configurando-se como uma alternativa pouco atrativa.

As habilidades necessárias para a resolução do item são: resolver problemas de raciocínio lógico a partir de dedução de informações de relações arbitrárias entre objetos, lugares, pessoas e/ou eventos fictícios dados.

QUESTÃO 7

A professora de Jurema pediu para ela escolher e pintar 13 quadradinhos consecutivos da faixa abaixo, que é formada por 17 quadradinhos.



A professora sabe que há alguns quadradinhos que serão obrigatoriamente pintados, qualquer que seja a escolha de Jurema. Quantos são esses quadradinhos?

A) 9
B) 10
C) 11
D) 12
E) 13

Uma Solução:

Qualquer que seja a escolha de Jurema, ela sempre pintará os quadradinhos que vão do 5 ao 13, incluindo-os. Totalizando 9 quadradinhos eu serão obrigatoriamente pintados. A imagem a seguir ilustra o processo:

Alternativa A.

Análise da Questão:

Questão	**Gabarito**	**Dificuldade**	**Índice D**
7	A	0,150	0,187
Acerto: 27% maiores notas		Acertos: 27% menores notas	
0,250		0,063	

p(A)	p(B)	p(C)	p(D)	p(E)	p()
0,150	0,117	0,083	0,117	0,533	0,000

A dificuldade do item é de 0,150, o que o torna um item de difícil resolução. Seu índice de discriminação, de 0,187, mostra que a questão é defeituosa, devendo ser rejeitada.

O distrator C possui apenas 8,3% das marcações e é considerada uma alternativa pouco atrativa. Já o distrator E foi escolhido pela grande maioria dos estudantes. Infere-se sobre esse último que os estudantes não compreenderam bem o enunciado da questão e deduziram que os mesmos 13 quadradinhos seriam pintados independentemente da posição. É um erro preocupante já que, entre todas as alternativas, ela é a mais clara quanto ao descarte.

Em relação às habilidades necessárias para resolver a questão, temos: identificar padrões numéricos; utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas.

QUESTÃO 8

Em uma brincadeira, a mãe de João e Maria combinou que cada um deles daria uma única resposta correta a três perguntas que ela faria.

Ela perguntou:
– Que dia da semana é hoje?
– Hoje é quinta, disse João.
– É sexta, respondeu Maria.
Depois perguntou:
– Que dia da semana será amanhã?
– Segunda, falou João.
– Amanhã será domingo, disse Maria.
Finalmente ela perguntou:
– Que dia da semana foi ontem?
– Terça, respondeu João.
– Quarta, disse Maria.
Em que dia da semana a brincadeira aconteceu?

A) Segunda-feira
B) Terça-feira

C) Quarta-feira
D) Quinta-feira
E) Sexta-feira

Uma Solução:

Questão idêntica à questão 14 do nível 1, cuja solução foi dada no capítulo anterior.

Alternativa D.

Análise da Questão:

Questão		**Gabarito**		**Dificuldade**		**Índice D**	
8		D		0,467		0,562	

Acerto: 27% maiores notas			Acertos: 27% menores notas		
0,750			0,188		
p(A)	p(B)	p(C)	p(D)	p(E)	p()
0,133	0,083	0,233	0,467	0,083	0,000

Questão mediana, com uma porcentagem de acerto de 46,7%. Seu índice de discriminação é bastante alto, de 0,562, classificando a questão como bem elaborada. Ela também está presente no nível um, mas aqui houve um aumento na dificuldade (a porcentagem de alunos que acertaram o item é maior) e na discriminação. Outro fato que se deve colocar em destaque é que 75% dos alunos entre as 27% maiores notas acertaram a questão, uma porcentagem muito alta.

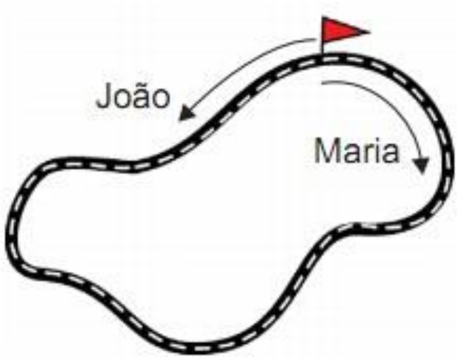
Os distratores B e E tiveram baixa porcentagem de marcações, 8,3%, sendo considerados alternativas pouco atraentes.

As habilidades necessárias para resolver o item são: resolver problemas de raciocínio lógico a partir de dedução de informações de relações arbitrárias entre objetos lugares, pessoas e/ou eventos fictícios dados, com o objetivo de maximizar o evento.

QUESTÃO 9

João e Maria correm com velocidades constantes e em sentidos contrários a partir de um mesmo ponto da pista de 3 000 metros representada na figura. Depois de correr 1 200 metros, João encontra Maria pela primeira vez. Quando ele terminar a primeira volta, quantos metros ela terá corrido?

A) 2000
B) 2500
C) 3600
D) 4500
E) 7500



Uma Solução:

Como João encontra Maria após ter corrido 1200 metros, isso significa que, naquele mesmo instante, Maria já havia corrido 3000 – 1200 = 1800 metros. Assim, para cada 1200 metros que João corre, Maria corre 1800. Isso equivale também a dizer que para cada 600 metros que João correr, Maria terá corrido 900 metros (pois as suas respectivas velocidades são constantes). Então, quando João tiver corrido 1200 + 1200 + 600 = 3000 metros, Maria terá corrido 1800 + 1800 + 900 = 4500 metros.

Alternativa D.

Análise da Questão:

<table>
<tr><th colspan="3">Questão</th><th colspan="3">Gabarito</th><th colspan="3">Dificuldade</th><th colspan="3">Índice D</th></tr>
<tr><td colspan="3">9</td><td colspan="3">D</td><td colspan="3">0,167</td><td colspan="3">0,375</td></tr>
<tr><td colspan="6">Acerto: 27% maiores notas</td><td colspan="6">Acertos: 27% menores notas</td></tr>
<tr><td colspan="6">0,438</td><td colspan="6">0,063</td></tr>
<tr><td colspan="2">p(A)</td><td colspan="2">p(B)</td><td colspan="2">p(C)</td><td colspan="2">p(D)</td><td colspan="2">p(E)</td><td colspan="2">p()</td></tr>
<tr><td colspan="2">0,200</td><td colspan="2">0,400</td><td colspan="2">0,200</td><td colspan="2">0,167</td><td colspan="2">0,033</td><td colspan="2">0,000</td></tr>
</table>

Apenas 16,7% dos estudantes acertaram o item, já que a sua dificuldade é de 0,167. Seu índice de discriminação é de 0,375, tornando o item bom, mas sujeito a aprimoramento.

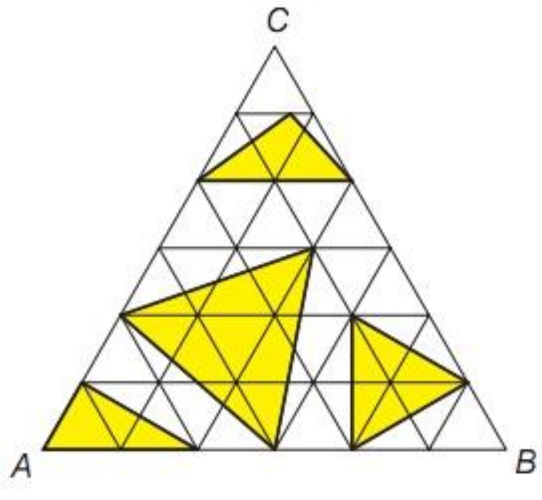
O distrator E correspondeu a apenas 3,3% das marcações, o que é esperado, já que é um dos itens mais plausíveis de descarte. Já o distrator B foi escolhido pela maioria (40%); infere-se que os estudantes não souberam interpretar bem a questão, já que a pista possui 3000 m e Maria corre mais rápido do que João. A grande maioria das marcações deveriam estar concentradas nos distratores C e D, o que não acontece.

As habilidades necessárias para a resolução da questão são: realizar operações aritméticas com números inteiros; a resolução de situação-problema envolvendo a variação de grandezas diretamente proporcionais.

QUESTÃO 10

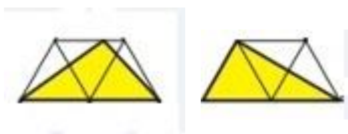
O triângulo equilátero ABC da figura é formado por 36 triângulos equiláteros menores, cada um deles com área 1. Qual é a soma das áreas dos quatro triângulos amarelos?

A) 13
B) 14
C) 15
D) 16
E) 17

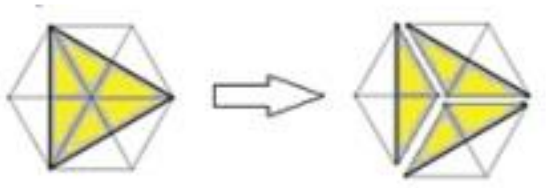


Uma Solução:

Os triângulos ao lado possuem a mesma área, pois têm a mesma base e a mesma altura. Pela imagem do enunciado, nota-se que a área desse segundo triângulo é a metade da área de um paralelogramo formado por quatro triângulos de área 1 (cuja área é 4). Logo, esses dois triângulos amarelos possuem juntos 2 + 2 = 4 unidades de área.



A segunda imagem tem área igual a 3, já que o triângulo amarelo divide cada um dos seis triângulos de área 1 ao meio.



O triângulo amarelo maior tem área igual a 7, pois podemos decompor esse triângulo em quatro regiões, onde: o triângulo do centro tem área 1 e cada um dois outros três tem área igual a 2, pois são a metade de um paralelogramo formado por quatro triângulos de área igual a 1.

Logo, a soma das áreas dos quatro triângulos amarelos é igual a 4 + 3 + 7 = 14.

Alternativa B.

Análise da Questão:

<table>
<tr><th colspan="3">Questão</th><th colspan="3">Gabarito</th><th colspan="3">Dificuldade</th><th colspan="3">Índice D</th></tr>
<tr><td colspan="3">10</td><td colspan="3">B</td><td colspan="3">0,333</td><td colspan="3">0,687</td></tr>
<tr><td colspan="6">Acerto: 27% maiores notas</td><td colspan="6">Acertos: 27% menores notas</td></tr>
<tr><td colspan="6">0,750</td><td colspan="6">0,063</td></tr>
<tr><td colspan="2">p(A)</td><td colspan="2">p(B)</td><td colspan="2">p(C)</td><td colspan="2">p(D)</td><td colspan="2">p(E)</td><td colspan="2">p()</td></tr>
<tr><td colspan="2">0,200</td><td colspan="2">0,333</td><td colspan="2">0,117</td><td colspan="2">0,233</td><td colspan="2">0,117</td><td colspan="2">0,000</td></tr>
</table>

Item de dificuldade mediana, com 33,3% das marcações. Seu índice de discriminação é muito alto, de 0,687, classificando a questão como bem elaborada. Outro fato que se deve colocar em destaque é que 75% dos alunos entre as 27% maiores notas acertaram a questão, uma porcentagem muito alta, enquanto apenas 6,3% dos alunos entre as 27% menores notas acertaram o item.

As porcentagem de marcações das questões não estão tão distantes uma das outras; ainda que a opção correta tenha tido uma leve vantagem sobre as demais.

Temos as seguintes habilidades necessárias para a resolução da questão: resolver problema envolvendo o cálculo de área de figura plana, reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, da área utilizando malhas triangulares.

QUESTÃO 11

Luciana marcou os números de 1 a 9 em uma circunferência, como na figura. A partir do número 1, ela começou a pular de 4 em 4. No primeiro pulo ela foi do 1 ao 5, no segundo, do 5 ao 9, no terceiro, do 9 ao 4 e assim por diante. Depois de pular 1000 vezes, em que número ela parou?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Uma Solução:

Vamos analisar o que ocorre após uma certa quantidade de pulos:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 1$$

Notamos que, após 9 pulos, a sequência se repete, isto é, Luciana voltará para a posição de número 1. Então, todo número que for múltiplo de 9 fará com que Luciana volte para o número 1. Como 999 é múltiplo de 9 (999 = 111 x 9), com essa quantidade de pulos ela estará sobre o número 1; logo, no milésimo pulo, ela estará na posição número 5.

Alternativa E.

Análise da Questão:

<table>
<tr><th colspan="3">Questão</th><th colspan="3">Gabarito</th><th colspan="3">Dificuldade</th><th colspan="3">Índice D</th></tr>
<tr><td colspan="3">11</td><td colspan="3">E</td><td colspan="3">0,250</td><td colspan="3">0,438</td></tr>
<tr><td colspan="6">Acerto: 27% maiores notas</td><td colspan="6">Acertos: 27% menores notas</td></tr>
<tr><td colspan="6">0,438</td><td colspan="6">0,000</td></tr>
<tr><td colspan="2">p(A)</td><td colspan="2">p(B)</td><td colspan="2">p(C)</td><td colspan="2">p(D)</td><td colspan="2">p(E)</td><td colspan="2">p()</td></tr>
<tr><td colspan="2">0,183</td><td colspan="2">0,117</td><td colspan="2">0,117</td><td colspan="2">0,333</td><td colspan="2">0,250</td><td colspan="2">0,000</td></tr>
</table>

Questão difícil, já que apenas 25% dos estudantes acertaram. Seu índice de discriminação é de 0,438, o que o torna um item bem elaborado. Destaque para o fato de que nenhum aluno entre as 27% menores notas tenha acertado a questão.

O distrator D foi a alternativa mais marcada. Infere-se a respeito disso que a maioria dos estudantes esperavam que existisse alguma relação entre o 4 da alternativa e o 4 dos intervalos de pulos.

As habilidades necessárias para a resolução da questão são: identificar padrões numéricos e realizar operações aritméticas com números inteiros; identificar uma expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números.

QUESTÃO 12

Cada livro da biblioteca municipal de Quixajuba recebe um código formado por três das 26 letras do alfabeto. Eles são colocados em estantes em ordem alfabética: AAA, AAB, ..., AAZ, ABA, ABB, ..., ABZ, ..., AZA, AZB, ..., AZZ, BAA, BAB e assim por diante. O código do último livro é DAB. Quantos livros há na biblioteca?

A) 676
B) 1352
C) 2016
D) 2028
E) 2030

Uma Solução:

Calculemos quantos livros existem começando pela letra A: Essa quantidade é igual a 26 x 26 = 676, já que no código A#& (onde # e & representam uma letra do

alfabeto, diferentes ao não) temos 26 opções de letras para # e 26 opções de letras para &. Da mesma forma, temos 676 livros que começam por B e 676 livros que começam com C. Como o código do último livro é DAB, então só temos dois livros cujo código começa por D: DAA e o próprio DAB.
Portanto, nessa biblioteca existem 3 x 676 + 2 = 2030 livros.

Alternativa E.

Análise da Questão:

Questão		Gabarito		Dificuldade		Índice D	
12		E		0,117		0,250	
Acerto: 27% maiores notas				Acertos: 27% menores notas			
0,250				0,000			
p(A)	p(B)	p(C)		p(D)	p(E)	p()	
0,250	0,200	0,267		0,167	0,117	0,000	

A dificuldade da questão é de 0,117, tornando-a difícil. Seu índice de discriminação é de 0,250, o que a encaixa como item marginal, sujeito a reelaboração. Destaque para o fato de que nenhum aluno entre as 27% menores notas tenha acertado a questão.

O distrator C correspondeu a 26,7% das marcações, sendo considerado a alternativa mais atrativa do item. Talvez o número 2016 presente no mesmo tenha influenciado algumas marcações.

As habilidades necessárias para resolver a questão são: resolver o problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutações e/ou combinações simples.

QUESTÃO 13

Janaína escreveu no quadro-negro dois números cuja soma é igual a 1357. Ela observou que um desses números poderia ser obtido apagando o algarismo das unidades do outro. Qual é esse algarismo?

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

Uma Solução:

Vamos chamar esses dois números de X e Y. Logo, X + Y = 1357. Sendo X o número obtido apagando o algarismo das unidades Y, então Y = 10X + z, onde **z** é o algarismo apagado.

Temos então o seguinte: X + 10X + z = 1357, ou seja, 11X + z = 1357, isso equivale a 11X + z = 11 . 123 + 4, como z é um número entre 0 e 9, ele só pode ser igual a 4.

Alternativa A.

Análise da Questão:

Questão			**Gabarito**			**Dificuldade**			**Índice D**		
13			A			0,217			0,437		
Acerto: 27% maiores notas						Acertos: 27% menores notas					
0,500						0,063					
p(A)		p(B)		p(C)		p(D)		p(E)		p()	
0,217		0,083		0,200		0,283		0,200		0,017	

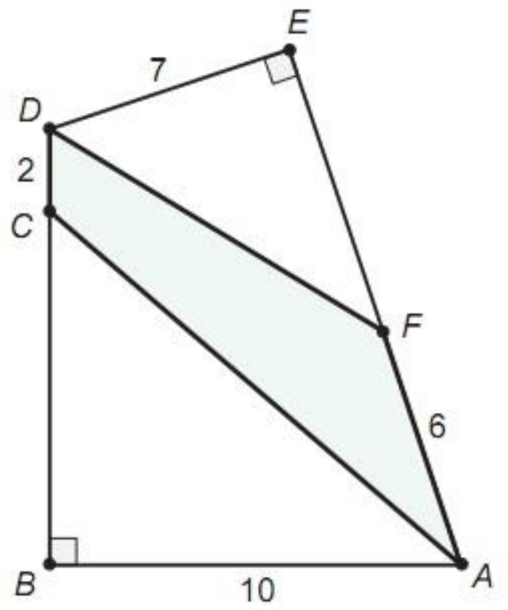
Questão difícil, com apenas 21,7% dos acertos. Apesar disso, é um item bem elaborado, já que o seu índice de discriminação é de 43,7%.

Com exceção do distrator B, que possui baixa marcação (apenas 8,3% dos alunos optaram por essa alternativa), a porcentagem de distribuição das marcações foram bem próximas.

Quanto às habilidades necessárias para resolver a questão, temos: realizar operações aritméticas com números naturais; considerar as ordens e as classes de determinada base cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

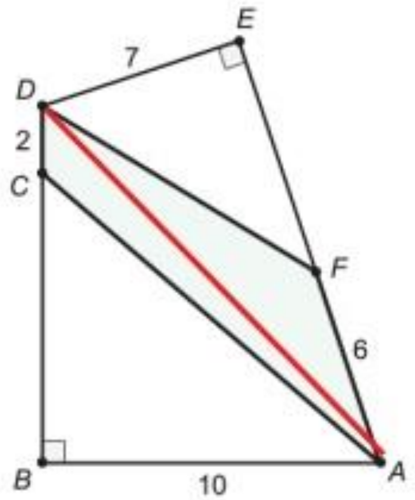
QUESTÃO 14

Na figura, os pontos C e F pertencem aos lados BD e AE do quadrilátero ABDE, respectivamente. Os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{E}$ são retos e os segmentos AB, CD, DE e FA têm suas medidas indicadas na figura. Qual é a área do quadrilátero ACDF?



A) 16
B) 21
C) 31
D) 33
E) 40

Uma Solução:



A área do quadrilátero ACDF é igual a soma das áreas dos triângulos ACD e ADF, destacados na imagem. O triângulo ACD tem base 2 e altura 10, então sua área será (2 x 10) / 2 = 10. O triângulo ADF tem base 6 a altura 7, então sua área será (6 x 7) / 2 = 21. Logo, a área pedida será 10 + 21 = 31.

Alternativa C.

Análise da Questão:

Questão		Gabarito		Dificuldade		Índice D
14		C		0,100		0,188
Acerto: 27% maiores notas				Acertos: 27% menores notas		
0,188				0,000		
p(A)	p(B)	p(C)		p(D)	p(E)	p()
0,200	0,300	0,100		0,183	0,217	0,000

Item muito difícil, apenas 10% dos alunos acertaram a questão. Seu índice de discriminação também é muito baixo, fazendo com que o item seja considerado defeituoso, devendo ser rejeitado. Destaque para o fato de que nenhum aluno entre as 27% menores notas tenha acertado a questão.

O distrator B obteve 30% das marcações, sendo considerada uma alternativa atrativa. Nada foi inferido sobre essa possível escolha.

As habilidades necessárias para a resolução da questão são: resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas; reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados (ou altura).

QUESTÃO 15

Joãozinho distribuiu bolas em caixas numeradas de 1 a 2016. Ele fez isso de forma que o número total de bolas, em quaisquer cinco caixas consecutivas, fosse sempre o mesmo. Na figura abaixo estão indicadas as quantidades de bolas em algumas caixas; a figura também mostra que Joãozinho colocou 3 e 7 bolas em duas caixas vizinhas.

Quantas bolas ele colocou na última caixa?

A) 1
B) 3
C) 5

D) 7

E) 9

Uma Solução:

Questão idêntica à questão 18 do nível 1, cuja solução foi dada no capítulo anterior.

Alternativa D.

Análise da Questão:

Questão		**Gabarito**		**Dificuldade**		**Índice D**	
15		D		0,200		0,563	
Acerto: 27% maiores notas				Acertos: 27% menores notas			
0,563				0,000			
p(A)	p(B)	p(C)		p(D)	p(E)	p()	
0,117	0,233	0,217		0,200	0,233	0,000	

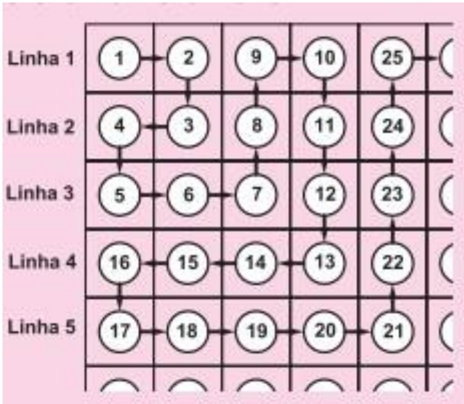
A dificuldade da questão é de 0,200, classificamos então como difícil. Ela está presente no nível 1 e a porcentagem de acertos lá foi maior (23,4%). No nível 2, ela é considerada uma questão bem elaborada (no nível 1 a questão havia sido enquadrada como boa, mas sujeito a aprimoramento). Destaque para o fato de que nenhum aluno entre as 27% menores notas tenha acertado a questão.

As habilidades necessárias para a resolução do item são: identificar padrões numéricos e realizar operações aritméticas com números inteiros; resolver situação-problema com números naturais cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

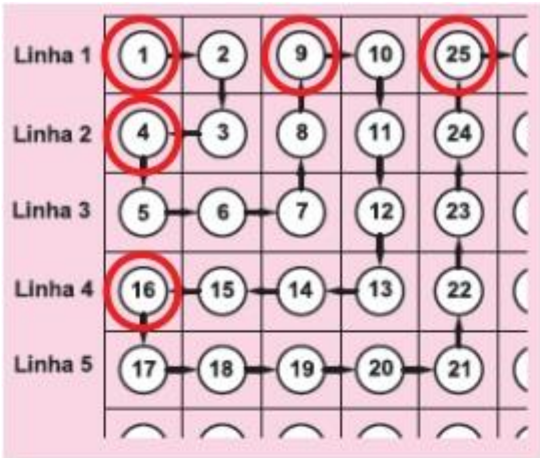
QUESTÃO 16

As casas da tabela foram preenchidas com os números inteiros positivos, de acordo com o padrão indicado pelas flechas. Em que linha aparecerá o número 2016?

A) 9
B) 10
C) 16
D) 44
E) 45



Uma Solução:



Podemos notar que as casas preenchidas formarão um quadrado sempre que o número dado for um quadrado perfeito. Se o quadrado perfeito for par, o número dado estará na primeira coluna e na linha correspondente à sua raiz quadrada; se o quadrado perfeito for ímpar, o número dado estará na primeira linha e na coluna correspondente à sua raiz quadrada. Por exemplo, o número 16 (que é 4^2) está na primeira coluna e na quarta linha; já o número 25 (que é 5^2) estará na primeira linha e na quinta coluna. Observamos que o número 2025 (que é 45^2) estará na primeira linha e na 45ª coluna; como 2016 = 2025 – 9, então esse número estará na mesma coluna, mas 9 linhas abaixo, ou seja, estará na linha 10.

Alternativa B.

Análise da Questão:

Questão		Gabarito		Dificuldade		Índice D	
16		B		0,100		0,062	
Acerto: 27% maiores notas				Acertos: 27% menores notas			
0,125				0,063			

p(A)	p(B)	p(C)	p(D)	p(E)	p()
0,133	0,100	0,300	0,233	0,233	0,000

A dificuldade do item é de 0,100, então a questão pode ser considerada muito difícil. O índice de discriminação é muito baixo, de 0,062, caracterizando um item defeituoso, devendo ser rejeitado. Isso implica que a porcentagem de acertos entre as 27% maiores notas e as 27% menores notas é bastante próximo.

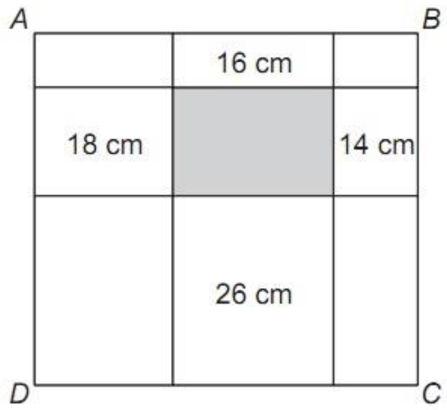
As alternativas A e B, foram pouco marcadas, tornando-se distratores pouco atrativos. Infere-se a essa respeito que, como o número 2016 é um valor considerável, os estudantes acharam pouco provável que ele aparece em linhas tão pequenas, 9 e 10, respectivamente. O que não ocorre.

Quanto às habilidades necessárias para a resolução da questão, temos: identificar regularidade observada em sequências de números; interpretar e localizar a movimentação de objetos e sua representação no espaço bidimensional e utilizar conhecimentos algébricos e geométrico na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

QUESTÃO 17

O retângulo ABCD foi dividido em nove retângulos menores, alguns deles com seus perímetros indicados na figura. O perímetro do retângulo ABCD é 54 cm. Qual é o perímetro do retângulo cinza?

A) 15 cm
B) 19 cm
C) 20 cm
D) 22 cm
E) 24 cm



Uma Solução:

Questão idêntica à questão 19 do nível 1, cuja solução foi dada no capítulo anterior.

Alternativa C.

Análise da Questão:

Questão			Gabarito			Dificuldade			Índice D		
17			C			0,383			0,063		
Acerto: 27% maiores notas						Acertos: 27% menores notas					
0,438						0,375					
p(A)		p(B)		p(C)		p(D)		p(E)		p()	
0,117		0,200		0,383		0,200		0,100		0,000	

Questão difícil, ainda que a maioria dos estudantes a tenham acertado (38,3%). Seu índice de discriminação é de 0,063, o que torna a questão defeituosa, devendo ser rejeitada. Isto é, a porcentagem de acertos entre as 27% maiores notas e as 27% menores notas é bastante próximo. No nível 1 (onde o item também está presente), ele foi classificado como marginal, sujeito a reelaboração.

As habilidades necessárias para resolver o item são: resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas, ou resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de grandezas e medidas; reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados.

QUESTÃO 18

Josefa brinca de escrever sequências de números. A partir de um número natural maior do que 1, ela procede da seguinte forma para obter o próximo número:

• Se o número for par, ela o divide por 2.

• Se o número for ímpar e tiver apenas um algarismo, ela soma 1 a esse número e divide o resultado por 2.

• Se o número for ímpar e tiver mais de um algarismo, ela apaga o algarismo das unidades.

Josefa repete o procedimento com o número obtido até aparecer o número 1, quando termina a sequência.

Por exemplo, a sequência que começa com 1101 é formada por sete números: 1101 → 110 → 55 → 5 → 3 → 2 → 1.

Quantas são as sequências formadas por três números?

A) 7
B) 12
C) 14
D) 25
E) 37

Uma Solução:

Questão idêntica à questão 20 do nível 1, cuja solução foi dada no capítulo anterior.

Alternativa E.

Análise da Questão:

<table>
<tr><th colspan="3">Questão</th><th colspan="3">Gabarito</th><th colspan="3">Dificuldade</th><th colspan="3">Índice D</th></tr>
<tr><td colspan="3">18</td><td colspan="3">E</td><td colspan="3">0,183</td><td colspan="3">0,375</td></tr>
<tr><td colspan="6">Acerto: 27% maiores notas</td><td colspan="6">Acertos: 27% menores notas</td></tr>
<tr><td colspan="6">0,438</td><td colspan="6">0,063</td></tr>
<tr><td colspan="2">p(A)</td><td colspan="2">p(B)</td><td colspan="2">p(C)</td><td colspan="2">p(D)</td><td colspan="2">p(E)</td><td colspan="2">p()</td></tr>
<tr><td colspan="2">0,383</td><td colspan="2">0,233</td><td colspan="2">0,067</td><td colspan="2">0,133</td><td colspan="2">0,183</td><td colspan="2">0,000</td></tr>
</table>

Item um pouco mais difícil do que para os estudantes do nível 1, onde ele também está presente. Apresenta apenas 18,3 % das marcações (contra 18,5% no nível 1). Seu índice de discriminação é de 0,375, sendo considerado um item bom, mas sujeito a aprimoramento.

A alternativa A obteve 38,3% das marcações, tornando-se o distrator mais atrativo para os estudantes. Infere-se que por se tratar de um número diferenciado (é o único com apenas um algarismo), essa alternativa tenha chamado a atenção dos que não fizeram os cálculos.

Sobre as habilidades necessárias pera a resolução da questão, temos: capacidade de analisar todos os casos possíveis; resolver o problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutações e/ou combinações simples; resolver situação-problema com números naturais, considerando as ordens e as classes de determinada base.

QUESTÃO 19

Juliana começou a escrever, em ordem crescente, uma lista dos números inteiros positivos cuja soma dos algarismos é divisível por 5. Sua lista começou com 5, 14, 19, 23, e terminou quando ela encontrou dois números consecutivos. Qual é a soma dos algarismos do penúltimo número dessa lista?

A) 10
B) 20
C) 30
D) 40
E) 50

Uma Solução:

Se dois números consecutivos têm as somas dos seus algarismos iguais a um múltiplo de 5, então a diferença entre essas somas também será um múltiplo de 5. Veremos as possibilidades:

Se o algarismo das unidades de um número for diferente de 9, então a diferença entre a soma dos seus algarismos e a soma dos algarismos do seu sucessor será igual a 1. Logo, o número deve terminar em 9 e o seu sucessor em 0.

Vejamos agora o algarismo das dezenas: Se o algarismo das dezenas de um número for diferente de 9, então a diferença entre a soma dos seus algarismos e a soma dos algarismos do seu sucessor será igual a 8. Logo, o número deve terminar em 99 e o seu sucessor em 00.

Se o algarismo das centenas de um número for diferente de 9, então a diferença entre a soma dos seus algarismos e a soma dos algarismos do seu sucessor será igual a 17. Logo, o número deve terminar em 999 e o seu sucessor em 000.

Se o algarismo das unidades de milhar de um número for diferente de 9, então a diferença entre a soma dos seus algarismos e a soma dos algarismos do seu sucessor será igual a 26. Logo, o número deve terminar em 9999 e o seu sucessor em 0000.

Se o algarismo das dezenas de milhar de um número for diferente de 9, então a diferença entre a soma dos seus algarismos e a soma dos algarismos do seu sucessor será igual a 35, **que é múltiplo de 5!**

Então procuramos o menor número do tipo #9999 cuja soma dos seus algarismos seja um múltiplo de 5. O número é 49999 e o seu sucessor é 50000, que também é múltiplo de 5, como esperado.

Portanto, a soma dos algarismos do número 49999 é 4 + 9 x 4 = 40.

Alternativa D.

Análise da Questão:

Questão		Gabarito	Dificuldade		Índice D
19		D	0,283		0,437
Acerto: 27% maiores notas			Acertos: 27% menores notas		
0,625			0,188		
p(A)	p(B)	p(C)	p(D)	p(E)	p()
0,167	0,200	0,200	0,283	0,150	0,000

Questão difícil, apresentou 28,3% das marcações (embora tenha sido a alternativa mais marcada). Seu índice de discriminação é de 43,7%, o que o classifica como um item bem elaborado. Destaque para o fato de que 62,5% dos alunos entre as 27% maiores notas tenham acertado o item.

Os distratores apresentam porcentagens de marcações bem próximas uns dos outros.

Sobre as habilidades necessárias pera a resolução da questão, temos: capacidade de analisar todos os casos possíveis; resolver situação-problema com números naturais, considerando as ordens e as classes de determinada base.

QUESTÃO 20

Bruno tem 5 figurinhas idênticas com a bandeira da Alemanha, 6 com a bandeira do Brasil e 4 com a da Colômbia. Ele quer fazer um pacote com pelo menos 3 dessas figurinhas. De quantas maneiras ele pode fazer esse pacote?

A) 110
B) 120
C) 200
D) 201
E) 210

Uma Solução:

Sem qualquer restrição, Bruno pode fazer 6 x 7 x 5 = 210 pacotes distintos de figurinha, pois ele pode colocar 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 figurinhas da Alemanha e podemos usar o mesmo raciocínio para os outros dois países.

Dessa quantidade, devemos descontar os pacotes que contêm menos de 3 figurinhas, pois esses não obedecem ao enunciado do problema. Então:

- Número de pacotes com nenhuma figurinha: 1;
- Número de pacotes com uma figurinha: 3 (A ou B ou C);
- Número de pacotes com duas figurinhas: 6 (AA ou BB ou CC ou AB ou AC ou BC).

Logo, o número de pacotes distintos com pelo menos três figurinhas é 210 – 1 – 3 – 6 = 200.

Alternativa C.

Análise da Questão:

Questão			Gabarito			Dificuldade			Índice D		
20			C			0,083			0,000		
Acerto: 27% maiores notas						Acertos: 27% menores notas					
0,063						0,063					
p(A)		p(B)		p(C)		p(D)		p(E)		p()	
0,333		0,383		0,083		0,100		0,100		0,000	

Questão muito difícil, pois apenas 8,3% dos estudantes optaram pela alternativa correta. Seu índice de discriminação é de 0%, isso quer dizer que a porcentagem de acerto entre as 27% maiores notas é a mesma que entre as 27% menores notas. O item é deficiente, devendo ser rejeitado.

Duas alternativas atraíram os estudantes, a A e a B, com 33,3% e 38,3% das marcações, respectivamente. Infere-se sobre isso que os números 110 e 120 por serem os menores, chamaram a atenção dos alunos, dado o pequeno número de figurinhas apresentados no enunciado.

Sobre as habilidades necessárias pera a resolução da questão, temos: capacidade de analisar todos os casos possíveis; resolver o problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutações e/ou combinações simples.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Resolução de Problemas é uma prática de ensino que vem sendo cada vez mais difundida ao longo dos anos. Ela é uma das responsáveis pela aproximação entre estudante e saber, mediado pelo professor. Ensinar usando a Resolução de Problemas pode dar significado ao ensino da Matemática, tornar o aluno mais confiante e autônomo, melhorar seu aprendizado e, consequentemente, fazer o trabalho docente mais gratificante. A OBMEP tem proporcionado aos alunos da escola pública oportunidade de resolver problemas em diversas áreas da Matemática e em vários níveis de dificuldade. Como professores, devemos nos esforçar e potencializar essa experiência para o desenvolvimento de nossos estudantes.

É esperado que os professores e alunos se engajem mais no processo avaliativo e façam com que o momento de aplicação da primeira fase da OBMEP seja de real aprendizagem em matemática na escola, fazendo com que a OBMEP possa constituir um instrumento de caráter formativo. Essa olimpíada – além de uma avaliação em larga escala – pode ser trabalhada frequentemente em sala de aula como parte das atividades propostas pelos docentes, como discussão em grupo, resolução de questões, análise dos erros, entre outros.

A análise feita ao longo deste trabalho é consistente, pois foi baseada na Teoria Clássica dos Testes (TCT), estando longe de ser exaustiva e pode ser aprofundada, tanto no que se refere aos indicadores estatísticos, quanto ao tamanho da amostra. Entretanto, ao longo do estudo percebeu-se a necessidade da Primeira Fase da OBMEP ser repensada, principalmente no que se refere ao seu nível de dificuldade. Nenhuma das quarenta questões analisadas foi considerada fácil, ou seja, nenhuma apresentou um índice de dificuldade igual ou superior a 0,7. Existem questões que precisam ser mais acessíveis ao nível dos discentes, ainda que uma boa quantidade tenha sido coerente.

Sugere-se que sejam feitos estudos mais aprofundados e com uma amostra maior para que, a partir disso possamos ter uma opinião mais concreta sobre até que ponto os resultados aqui evidenciados são consequências do instrumento ou da amostra pesquisada.

A problemática, apresentada na introdução desse trabalho, teve uma resposta positiva, uma vez que durante todo o curso dessa dissertação foi explicitado a importância da Resolução de Problemas e de que, na análise dos itens, uma solução detalhada, acompanhada das suas respectivas habilidades necessárias para a sua resolução foram destacadas. Esse tipo de abordagem é essencial para desenvolver no aluno a capacidade de pensar matematicamente.

Os objetivos gerais e específicos foram alcançados, já que foram apresentados o conceito de resolução de problemas e a sua inserção na análise da primeira fase da OBMEP, nos seus níveis 1 e 2. Ainda que, é importante ressaltar, o resultado da análise da pesquisa não tenha sido muito promissor, já que fora detectado problemas sérios da elaboração de questões, com um baixíssimo índice de discriminação e de a grande maioria das questões serem muito difíceis para os estudantes que prestaram os exames. Nesse aspecto, pode-se dizer que de todos os objetivos apontados pela OBMEP, "identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso nas áreas científicas e tecnológicas" talvez seja o mais condizente com a realidade.

Espera-se que a repercussão desse trabalho abra um leque de oportunidades de se trabalhar mais vezes esse tema, que é tão importante para o desenvolvimento do conhecimento matemático e da matemática em geral. Por ser – A OBMEP e a Resolução de Problemas como um todo – temas muito abrangentes, fica evidente que eles podem ser trabalhados sob diferentes camadas e níveis de dificuldade, tornando assim mais do que possível a publicação de artigos e a discussão em palestras, bem como o estudo do tema sob a forma de TCCs, dissertações e teses.

Para finalizar, acredita-se que a ampliação desse estudo, acompanhado dos devidos aprimoramentos dos pontos aqui apontados, possa melhorar o desempenho dos estudantes na OBMEP e constituir uma forma de avanço do ensino em Matemática.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, D.F.; BORGATTO, A.F. **Análise Clássica de Testes com Diferentes Graus de Dificuldade.** Estudos em Avaliação Educacional, São Paulo, V. 23, nº 52, Maio 2012.

BARBOSA, J. L. M. **Olimpíadas de Matemática:** uma experiência de sucesso em educação no Ceará. 2014. <http://www.sbpcnet.org.br/livro/57ra/programas/CONF_SIMP/ textos/joaolucasbarbosa-simp.htm>. Acesso: 03 de nov. 2016.

BELLOS, A. **Alex no País dos Números – Uma viagem ao mundo maravilhoso da Matemática.** São Paulo: Companhia das Letras, 2011.

BIONDI, R.L.; VASCONCELOS, L.; MENEZES-FILHO, N.A. **Avaliando o impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) no desempenho de matemática nas avaliações educacionais**. Disponível em: <http://www.eesp.fgv.br/_upload/seminario/4aeb3227d49f6.pdf>. Acesso em: 09 de nov. 2016

BIZINOTO, José Henrique. **Resolução de Problemas de Geometria Métrica Espacial com utilização da Tecnologia da Informação e Comunicação.** Uberaba, 2016. Disponível em: < http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes?pag=4> Acesso em: 10 de jun. 2016.

BRANCA, Nicholas A. **Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica.** Tradução de Hygino H. Rodrigues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação; Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRAZ, Ricardo Faustino da Silva, et. al. **Algumas Concepções no Ensino da Matemática:** tendências e atualidades. Angicos – RN: EdUFERSA, 2013.

BRESEGHELLO, Andréia Perpétua Barboza. **Resolução de Problemas com aplicações em Funções.** São José do Rio Preto, 2016. Disponível em: < https://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj4nZ_6683NAhVEhJAKHXsODLcQFggcMAA&url=http%3A%2F%2Frepositorio.unesp.br%2Fbitstream%2Fhandle%2F11449%2F136250%2Fbreseghello_apb_me_sjrp.pdf%3Fsequence%3D5&usg=AFQjCNH8az7fj2T22BII_B15i_X4Gh3feA&bvm=bv.125801520,d.Y2I> Acesso em: 20 de jun. 2016.

BURIASCO, R. L. C. de; FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A. B. **Avaliação como prática de investigação**. BOLEMA, v. 22, n. 33, p. 69 – 96, 2009.

BÚRIGO, Elisabete Zardo. et al. **A matemática na escola novos conteúdos, novas abordagens.** Porto Alegre: UFRGS, 2012.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. **Metodologia do ensino da matemática**. 2. ed.rev. São Paulo: Cortez, 1994.

CARVALHO, Mercedes. **Problemas?** Mas que problemas?! Estratégias de resolução de problemas matemáticos em sala de aula. 4. ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2010.

COSTA, Regiane Quezia Gomes da. **Análise da prova da primeira fase da OBMEP como subsídio para a prática docente.** Brasília, 2015. Disponível em: < http://repositorio.unb.br/handle/10482/20316> Acesso em: 20 de out. 2016.

CHAMORRO, C. C. W. et al. **Avaliação da aprendizagem nos anos iniciais.** In: BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Pró-letramento: matemática. Brasília, DF, 2007.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** Contexto & aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 1998.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.**12. ed. 10 impr. São Paulo: Ática, 2007.

DAVIS, E. J.; MCKILLIP, W. D. **Aperfeiçoando a resolução de problemas-história na matemática da elementary school**. Tradução de Hygino H. Rodrigues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

DEGUIME, Linda J. Polya visita a sala de aula. **A resolução de problemas na matemática escolar.** Tradução de Hygino H. Rodrigues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa**. 4 ed. Curitiba-PR: Positivo, 2009.

FLEMMING, D. M.; LUZ, E. F.; MELLO, A. C. C. de. **Tendência em Educação Matemática:** Disciplina na modalidade à distância. 2 ed. Palhoça: UnisulVirtual, 2005.

HUETE, J. C. S.; BRAVO, A. A. F. A. **O ensino da matemática:** fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

ITACARAMBI, Ruth Ribas. **Resolução de Problemas:** construção de uma metodologia (ensino fundamental I). São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

JREIGE, Ricardo Elias. **A Resolução de Problemas aplicada à modelagem de áreas e volumes dos poliedros de Platão.** Araguaia, 2015. Disponível em: <http://www.profmatsbm.org.br/dissertacoes?polo=&titulo=&aluno=RICARDO+ELIAS+JREIGE> Acesso em: 8 de jun. 2016.

MACIEL, M. V. M. **Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas (obmep):** as origens de um projeto de qualificação do ensino de matemática na educação básica. In: Anais do Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Ijuí, RS: [s.n.], 2009.

MARANHÃO, T. de P. A. **Avaliação do Impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas 2010**. Brasília: Centro de Gestão e Estudos Estratégicos, 2011.

MARKARIAN, Roberto. **A matemática na escola:** alguns problemas e suas causas, escrito pelo professor. In: BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Explorando o ensino da matemática: artigos: vol 1. Brasília, DF, 2004.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula:** Tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

OCED. **Relatório Nacional PISA 2012**. 2014. <http://download.inep.gov.br/acoes_ internacionais/pisa/resultados/2014/relatorio_nacional_pisa_2012_resultados_ brasileiros.pdf>. Acesso: 10 de nov. 2016.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. São Paulo: Cortez, 2004.

PASQUALI, L. **Psicometria: Teoria dos Testes na Psicologia e na Educação.** Petrópolis: Vozes, 2003.

PCN. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília-DF : MEC/SEF, 1997. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 15 de jan. 2017.

PCNEM. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Brasília-DF: MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 01 de jul. 2016.

PEREIRA, Alex Meneses. **Problemas, Sequências e Consequências.** Ilhéus, 2013. Disponível em: <http://bit.profmatsbm.org.br/xmlui/handle/123456789/134/browse?value=ALEX+MENEZES+PEREIRA&type=author> Acesso em: 10 de jun. 2016.

PINTO, N. B. **Marcas históricas da Matemática moderna no Brasil.** Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v.5, n.16, 2005.

POLYA, Geoge. **A arte de resolver Problemas.** 2. reimpr. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência,1995.

POZO, Juan Ignacio; ECHEVERRÍA, María Del Puy Perez. **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

RABELO, M. **Avaliação Educacional: Fundamentos, Metodologia e Aplicações no Contexto Brasileiro.** Rio de Janeiro. SBM, 2013.

ROCHA. Iara C. B. da. **O ensino de matemática:** Formação para a exclusão ou para a cidadania? Educação Matemática em Revista, n.9, ano 8, 2002.

RODRIGUES, M. M. **Proposta de análise de itens das provas do saeb sob a perspectiva pedagógica e a psicométrica.** In: Estudos em Avaliação Educacional. [S.l.: s.n.], 2006. v. 17,n. 34.

ROMANATTO, Mauro Carlos. **Resolução de problemas nas aulas de Matemática.** Revista Eletrônica de Educação. São Carlos: UFSCar, v.6, n.1, mai.,2012.

SALDANHA, Nicolau. **'Nobel' brasileiro se apaixonou pela matemática disputando olimpíadas.** Portal G1. Disponível em <http://g1.globo.com/educacao/noticia/2014/08/nobel-brasileiro-se-apaixonou-pela-matematica-disputando-olimpiadas.html>. Acesso 15 Jan. 2017.

SANTOS, G. L.; ABREU, P. H.: **Avaliação do Impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP):** Explicitação de condições de sucesso em escolas bem sucedidas**.** CGEE. Brasília, 2011. Disponível em <http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/251395.o> Acesso em 10 de nov. 2016.

SOARES, J. F.; CANDIAN, J. F.: **O impacto da OBMEP no desempenho dos alunos na Prova Brasil.** CGEE. Brasília, 2011. Disponível em <http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/251395.o> Acesso em 10 de nov. 2016.

SOUSA, Ariana Bezerra de. A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática. 2005. Disponível em: <https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/ArianaBezerradeSousa.pdf>. Acesso em: 02 Jul. 2016.

TEIXEIRA, L. R. M. **Dificuldades e erros na aprendizagem da Matemática.** ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2004, São Paulo. Anais... São Paulo: SBEM, 2004, p. 1-14.

VARIZO, Zaíra da C. M. **O Ensino da Matemática e a Resolução de Problemas.** In: Revista Inter-Ação Fac. Educ. UFG, 17(1-2): 1-21, jan/dez, 1993.

VASCONCELLOS, C. **Avaliação: concepção dialética libertadora do processo de avaliação escolar.** 17. ed. São Paulo: Libertad, 2005.

VILA, Antoni; CALLEJO, María Luz. **Matemática para Aprender a Pensar:** O papel de crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

APÊNDICE

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA D PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) participante:

Sou estudante do curso de pós-graduação do programa PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática, do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural do Semi-árido (UFERSA). Estou realizando uma pesquisa sob supervisão do professor Antônio Gomes Nunes, cujo objetivo é: Analisar os itens e as respostas dos estudantes do 6° ao 9° ano do ensino fundamental das provas da OBMEP, sob uma perspectiva de Resolução de Problemas.

Sua participação envolve ceder o uso dos gabaritos respondidos pelos estudantes do 6º ao 9º ano do ensino fundamental das provas da OBMEP de 2016 e possibilitar a divulgação do resultado da pesquisa.

A participação nesse estudo é voluntária e se você decidir não participar ou quiser desistir de continuar em qualquer momento, tem absoluta liberdade de fazê-lo.

Na publicação dos resultados desta pesquisa, sua identidade será mantida no mais rigoroso sigilo. Serão omitidas todas as informações que permitam identificá-lo, identificar a escola e/ou identificar os estudantes em estudo.

Mesmo não tendo benefícios diretos em participar, indiretamente você estará contribuindo para a compreensão do fenômeno estudado e para a produção de conhecimento científico.

Quaisquer dúvidas relativas à pesquisa poderão ser esclarecidas pelo pesquisador Paulo Henrique das Chagas Silva pelo e-mail paulohenrique-martinsrn@hotmail.com.

Atenciosamente

_______________________________ _______________________

Nome e assinatura do(a) estudante Local e data

____

Nome e assinatura do professor orientador

Consinto em participar deste estudo e declaro ter recebido uma cópia deste termo de consentimento.

_______________________________ _______________________

Nome e assinatura do participante Local e data