Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Uso de Jogos e Materiais Concretos no Ensino de Expressões Algébricas e Equações do 1º e 2º grau no Ensino Fundamental

HÉLIO ROBERTO DA ROCHA

Goiânia

2017

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Nome completo do autor: Hélio Roberto da Rocha

Título do trabalho: Uso de Jogos e Materiais Concretos no Ensino de Expressões Algébricas e Equações do 1º e 2º Grau no Ensino Fundamental

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Hélio Roberto da Rocha

Assinatura do (a) autor (a) [2]

Data: 29 /03 / 2017

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

[2]A assinatura deve ser escaneada.

Hélio Roberto da Rocha

Uso de Jogos e Materiais Concretos no Ensino de Expressões Algébricas e Equações do 1º e 2º grau no Ensino Fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientadora: Profª. Drª. Ivonildes Ribeiro Martins Dias.

Goiânia

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Rocha, Hélio Roberto da
Uso de Jogos e Materiais Concretos no Ensino de Expressões Algébricas e Equações do 1º e 2º Grau no Ensino Fundamental [manuscrito] / Hélio Roberto da Rocha. - 2017.
viii, 116 f.: il.

Orientador: Prof. Ivonildes Ribeiro Martins Dias .
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2017.
Bibliografia. Anexos.
Inclui tabelas, lista de figuras.

1. Álgebra. 2. Equações. 3. Didática. 4. Jogos. 5. Materiais concretos. I. , Ivonildes Ribeiro Martins Dias, orient. II. Título.

CDU 51

Hélio Roberto da Rocha

"Uso de Jogos e Materiais Concretos no Ensino de Expressões Algébricas e Equações do 1º e 2º Grau no Ensino Fundamental"

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 27 de março de 2017, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Profª. Drª. Ivonildes Ribeiro Martins Dias
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Profª. Drª. Bianka Carneiro Leandro
Membro Externo PUC/GO

Profª. Drª. Thaynara Arielly de Lima
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Universidade Federal de Goiás-UFG
Instituto de Matemática e Estatística-IME
Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UFG
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Hélio Roberto da Rocha – Aos vinte e sete dias do mês de março do ano de dois mil e dezessete (27/03/2017), às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Profª. Drª. Ivonildes Ribeiro Martins Dias – Orientadora; Profª. Drª. Bianka Carneiro Leandro e Profª. Drª. Thaynara Arielly de Lima, para, sob a presidência da primeira, e em sessão pública realizada no LEMAT, procederem a avaliação da defesa intitulada: **"Uso de Jogos e Materiais Concretos no Ensino de Expressões Algébricas e Equações do 1º e 2º Grau no Ensino Fundamental",** em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Hélio Roberto da Rocha discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pela Presidente da banca, Profª. Drª. Ivonildes Ribeiro Martins Dias, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 30 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1075/2012 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do IME da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 15:00 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, Sonia Maria de Oliveira, secretária do PROFMAT/UFG, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, é assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Profª. Drª. Ivonildes Ribeiro Martins Dias
Presidente – IME/UFG

Bianka Carneiro Leandro
Profª. Drª. Bianka Carneiro Leandro
Membro – PUC/GO

Thaynara A. de Lima
Profª. Drª. Thaynara Arielly de Lima
Membro – IME/UFG

Hélio Roberto da Rocha graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (Campus de Goiânia) em 2002, especializou-se em Psicopedagogia pela Faculdade Albert Einstein (2007), atualmente é professor do Ensino Básico da Secretaria Municipal de Educação/Goiânia e da Secretaria Estadual de Educação/Goiânia.

Dedico este trabalho aos meus alunos que sofrem pela falta de investimento, incentivo e de experiências mal sucedidas no Ensino Básico, provocando desmotivações e prejuízos no processo ensino-aprendizagem.

Agradecimentos

A Deus por estar sempre presente nos momentos difíceis durante o curso.

A minha mãe que manteve firme nas orações em todos os momentos, principalmente nos dias de avaliações.

Aos meus colegas de trabalho que me ajudaram em orações e no dia-a-dia da escola, compreendendo o motivo de algumas faltas.

A CAPES que proporcionou um incentivo financeiro que ajudou bastante nas despesas diárias.

A minha professora orientadora Drª Ivonildes Ribeiro Martins pelo apoio e incentivo na disciplina de MA12 e na orientação deste trabalho.

Resumo

Devido ao baixo desempenho em matemática dos estudantes de todo o Brasil, existe, atualmente, uma grande preocupação no ensino da matemática. Pesquisas indicam que o Brasil tem o segundo maior número de estudantes com baixa performance em matemática básica, em uma lista de 64 países em todo o mundo (segundo relatório da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico - OCDE, Paris-10/02/2016). Mediante a essa problemática, este trabalho vem sugerir uma proposta para ensinar a Álgebra no 7º e 9º ano do Ensino Fundamental, mais especificamente Expressões Algébricas, Equações do 1º grau, Equações do 2º grau e um breve estudo sobre Equações do 3º grau, através de jogos e materiais concretos. O trabalho é fundamentado em estudos de alguns teóricos que escreveram sobre o tema. Baseados nesses estudos, foi feito uma base teórica dos conteúdos do tema, juntamente com sugestões de diversas atividades propostas utilizando jogos e materiais concretos. Espera-se que este trabalho sirva de apoio aos colegas professores de matemática no seu trabalho diário. Sabemos que nem sempre é possível usar esta metodologia, devido a vários problemas que acontecem nas escolas, mas espero que em algum momento, possa ser aproveitado.

Palavras-chave

Álgebra, Equações, Didática através de jogos e materiais concretos.

Abstract

Due to the poor performance of students from all over Brazil in the mathematic subject, currently there's a great concern regarding mathematics teaching. Researches indicate that Brazil has the second largest number of students with low performance in basic mathematics, in a list of 64 countries (second report of the Organization and Economic Co-operation for Development - OECD, Paris - 02/10/2016). In relation to that, this work indicates a proposal to teach algebra in the 7th and 9th grades of Elementary School, more specifically Algebraic Expressions,1st degree Equations, 2nd degree Equations and a brief study on 3rd degree Equations, using games and concrete materials. This paper is based on studies of some theorists who wrote about the subject. Based on these studies, a theoretical basis of the contents of the theme was made, along with suggestions of several activities proposed using games and concrete materials. It's hoped that this work will support other mathematic teachers in their daily work. We know that it's not always possible to use this methodology due to various problems that occur in schools, but I hope that at some point it can be used.

Keywords

Algebra, Equations, Didactic through of games and concrete materials.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O sonho e o desejo de todo professor é ter uma sala de aula em que todos os alunos se mostram interessados, motivados, participando com prazer e interesse das aulas, de forma que alcancem uma aprendizagem significativa e concretizada, nesse processo tão cansativo, desestimulante, desmotivador, que é o de ensinar e aprender. Sou professor há 28 anos na educação básica, tanto no Ensino Fundamental (E.F.) quanto no Ensino Médio (E.M.), na rede pública e privada. Vivo e vejo diariamente os obstáculos em que todos enfrentam, alunos e professores, nesse processo tão delicado. Percebo as diversas fases em que os educandos se apresentam, na transição do E.F. I (1º ano ao 5º ano) para o E.F. II (6º ano ao 9º ano) e para o E.M., a cada mudança de nível temos uma queda no conhecimento, eles chegam cada vez menos preparados e com sérias dificuldades. Comparo o fato a uma bola de neve que a cada ano que se passa as dificuldades, o desinteresse e a desmotivação aumentam. Mas o que podemos fazer para amenizar esse problema?

A maioria de nós, professores, por algum motivo, preferimos usar a prática pedagógica tradicional, aquela em que o trabalho é realizado de forma centralizada na nossa figura, onde nós direcionamos um modelo de sequências metodológicas, no qual os nossos educandos se tornam passivo, submisso, ouvindo e obedecendo, escutando e repetindo, aliados a falta de interesse e com aulas que não passam de meras transmissões de fórmulas, definições, conceitos, algoritmos e resultados sem o menor significado. É preciso mudar, buscar meios e ações que possibilitem aos educandos gostar das aulas, se interessar por elas, frequentá-las e estudar os conteúdos, minimizando os traumas e os medos matemáticos, aumentando assim, a nossa autoestima e a dos próprios educandos. É necessário mudar, mas sabemos que a mudança requer esforço, dedicação e acima de tudo muita coragem e muita vontade. Segundo Rabelo e Lorenzato [24].

> "Para pensar numa mudança é preciso antes de tudo ter coragem, é preciso ousar, criar e experimentar; é preciso buscar uma mudança de paradigmas

> para testar e avaliar o potencial de nossos alunos e vê-los sob uma perspectiva de competência, mas isso significa antes de tudo um teste e a avaliação de nós mesmos enquanto profissionais".

O que fazer para encontrar o otimismo, a coragem, a vontade, se a realidade mostra o contrário? Vemos no nosso dia-a-dia, jovens acusados de não saber nada, que matriculam por idade (Ciclo de Formação Humana), pulando etapas do agrupamento (os anos), com promessas de aulas de apoio para repor os conteúdos dessas etapas, e que só ficam no papel, gerando sérios problemas de autoestima. E nós, professores, insatisfeitos e cansados de lidar com adolescentes que parecem desprezar o que eles têm a oferecer, que ficam no marasmo, no conformismo de que "não sei nada mesmo, então está tudo bem comigo". Nosso trabalho fica marcado pela frustração, temos a sensação de estar forçando nossos alunos a ir para um lugar que, aparentemente, não os atrai. Percebo em alguns momentos, no decorrer das aulas, jovens que se mostram tristes por não estar entendendo, tímidos em perguntar aquilo que não sabem, por vergonha, alguns se mostram agressivos se defendendo do não saber nada. Muito triste essa realidade. O que fazer?

Precisamos mudar, sair desse sufoco, dessa frustração, se libertar. Temos que buscar algo, é preciso desafiar os nossos alunos, para o bem deles e o nosso, propor estratégias que proporcione mudanças de comportamento. Assim não podemos continuar. É necessário apoio do governo nas formações específicas, no comprometimento e incentivo em nos proporcionar cursos, que levem o professor à mudanças. Macedo [17] (p.59) considera que o processo de formação dos professores é de fundamental importância para essa mudança, é importante para o professor tomar consciência do que faz ou pensa a respeito de sua prática pedagógica que tenha uma visão crítica das atividades e procedimentos na sala de aula e dos valores culturais de sua ação docente, é necessário que o professor adote uma postura de pesquisador e não apenas de transmissor e que acima de tudo, tenha um melhor conhecimento dos conteúdos escolares e das características do desenvolvimento e da aprendizagem de seus alunos.

Seguindo esse caminho, imbuídos de muita motivação, dedicação, reflexão e ousadia, devemos ir modificando nossas práticas em sala de aula, se adequando a cada realidade, olhando para nossos alunos e sentindo que eles precisam de nós, procurando proporcionar a esses jovens, uma forma mais atrativa de aprender. Uma das estratégia de ensino que poderá nos auxiliar nessa mudança, acredito que seja o jogo e o uso de material concreto, tema deste trabalho.

Capítulo 1

A Ludicidade no Ensino da Matemática

1.1 Os jogos como instrumento de aprendizagem

Todos nós já jogamos e, com certeza, podemos afirmar que em qualquer jogo sentimos *vontade*, *motivação*, *prazer*, e ao final sempre queremos vencer, **aprender**. Todas essas palavras em destaques são as que sentimos falta no processo ensino-aprendizagem, é tudo que queremos dentro da sala de aula. Vontade de aprender aquilo que se ensina, saber que aquilo vai nos proporcionar algo melhor, motivar para isso e acima de tudo ter o prazer de aprender por aprender, sem se importar para que. Durante um jogo, sentimos isso e aprendemos com prazer. Não precisa de ninguém para dizer isso, simplesmente percebemos. Callois [3], destaca que:

> "Cada jogo reforça e estimula qualquer capacidade física ou intelectual. Através do prazer e da obstinação, torna fácil o que inicialmente era difícil ou extenuante".

A ludicidade está presente em várias atividades no dia-a-dia de todos os educandos, nas brincadeiras de crianças, no jogos escolares, nas atividades lúdicas propostas pela escola, igreja, e outras entidades; nos jogos eletrônicos, ela existe, independentemente de seu uso educacional, alguns autores que trabalham o jogo como processo de ensino-aprendizagem, já comprovaram isso.

Elkonin [5] destaca que o ato de brincar e suas representações são fenômenos complexos, cultural e que depende de épocas históricas, condições sócio históricas e geográficas. Cabendo ao professor adequar o jogo para sua realidade. Sabemos que cada turma tem sua característica, e dentro dela existem grupos diversificados de alunos, tornando uma trabalho desgastante para os professores. O planejamento deve ser bem detalhado, observado e flexível. É preciso ter o cuidado nas escolhas, para não provocar desinteresse, é preciso ligar o jogo ao conteúdo de forma atraente e empolgante. O que é bastante complicado.

Piaget [22] critica a escola tradicional, por acomodar as crianças aos conhecimentos tradicionais, em oposição ao que ele defende, que é suscitar indivíduos inventivos, críticos e com capacidade para criar. Não sabemos, ou sabemos, por quais motivos os educadores são levados a engessar conhecimentos, a transformar uma questão científica que atrairia nossos alunos em uma questão desmotivadora. Segundo Piaget e Inhelder [22](p.150):

> "os métodos de educação das crianças exigem que se forneça às crianças um material conveniente, a fim de que, jogando, elas cheguem a assimilar as realidades intelectuais que, sem isso, permanecem exteriores à inteligência infantil".

Outro autor conceituado, que podemos destacar é Vygotsky [31](p.135), na visão dele, ele afirma que "apesar da relação brinquedo X desenvolvimento poder ser comparada à relação instrução X desenvolvimento, o brinquedo fornece ampla estrutura básica para mudanças das necessidades e da consciência". Ainda destaca que através do brinquedo a criança aprende a agir numa esfera cognitivista, sendo livre para determinar suas próprias ações. Segundo ele, o brinquedo estimula a curiosidade e a autoconfiança, proporcionando desenvolvimento da linguagem, do pensamento, da concentração e da atenção. Com certeza podemos levar essa afirmação para a fase da adolescência, desde que o brinquedo, o jogo, esteja de acordo com a sua faixa etária, a curiosidade e a autoconfiança podem ser despertadas em qualquer etapa da nossa vida.

Callois [3](p.9,11) destaca a importância dos jogos como instrumento no processo ensino-aprendizagem, para ele o jogo "evoca por igual às ideias de facilidade, risco ou habilidades; (...) combina então, em si, as ideias de limites, liberdade e invenção". Quem nunca respeitou ou desafiou as regras de um jogo, ou que teve a liberdade para inventar e criar? Acredito que isso são fatores que irão contribuir na formação social e cultural dos nossos educandos. Aprender através do lúdico independe da idade, promover situações com jogos é garantir o prazer, o desafio, é melhorar o desempenho no processo ensinar e aprender. A educação por meio de atividades lúdicas estimula as relações cognitivas, afetivas, sociais, além de propiciar atitudes de crítica e criação nos educandos que se envolvem nesse processo.

Existem uma gama de artigos, livros, dissertações e teses que abordam esse tema, todos nos levarão a acreditar que cada vez mais necessitamos de utilizar esse tipo de estratégia, de forma que alcancemos o maior número de jovens que alcancem uma aprendizagem mais significativa.

1.2 O uso de jogos no Ensino da Matemática

Muitos de nós, professores, de matemática e de outras áreas, acreditamos que estudar não é uma diversão e que a Escola, é um lugar onde se, "teoricamente", vai para aprender e não há a necessidade de se inventar formas para motivar os estudantes, achamos que é obrigação e dever do aluno se sentir obrigado a se dedicar aos estudos, porém, não é isso que está ocorrendo ultimamente. Para que não sintamos derrotados e desmotivados, é necessário fazer uma reflexão sobre as nossas práticas pedagógicas, de forma que elas venham de encontro com a realidade dos nossos alunos e que favoreçam a nós e a eles, nos tornando mais importantes nas suas vidas. Automaticamente estamos proporcionando a eles uma aprendizagem mais significativa. A matemática é uma disciplina que necessita de atenção, motivação e dedicação para se alcançar o conhecimento desejado, e por isso acreditamos que o jogo possa ser uma estratégia que vem proporcionar mudanças nesse processo. Segundo Grando [8]:

> "o ensino de matemática se apresenta como uma das áreas mais caóticas em termos da compreensão dos conceitos nela envolvidos, pelos alunos, o elemento jogo se apresenta com formas específicas e características próprias a dar compreensão para muitas das estruturas matemáticas existentes e de difícil assimilação".

Conforme os estudos de Brenelli [2], a matemática é uma área de conhecimento que tem desenvolvido bastante trabalhos envolvendo o uso de jogos no processo ensino aprendizagem, porém com ênfase no uso de materiais concretos e estruturados, utilizados como recursos didáticos. Moura [19] constata a frequência de apresentação de trabalhos com jogos no ensino da matemática em diversos congressos e nos alerta para o cuidado a ser tomado quando da sua utilização, de modo que estas sejam analisadas e incorporadas com convicção e não apenas simplesmente, pelo modismo. Cabe a nós, professores, fazermos uma análise mais crítica se é necessário o uso de jogos em determinados assuntos e, ter o cuidado para que o jogo não se torne algo banal e corriqueiro, proporcionando a desmotivação e o desinteresse aos educandos. No Ensino Fundamental II, é difícil promover interesse em determinadas atividades, os alunos estão completamente ligados às redes sociais, fica difícil trazê-los para dentro da sala, dentro do conteúdo que deve ser trabalhado, como isso, se faz necessário um planejamento para que a atividade alcance seus objetivos.

Machado [18] destaca algumas questões importantes sobre o uso de jogos no ensino da matemática: Por que jogos no ensino da matemática? Jogos servem apenas para motivar ou também ensinar conceitos e desenvolver ideias novas? Que jogos devemos utilizar, os "clássicos" ou os "inventados"?

Essas questões deverão estar no nosso pensamento quando estivermos planejando. Por que esse jogo? Será que ele vai ser fundamental nos conceitos que estou objetivando? Será que ele vai ser atrativo? É bem difícil responder a essas questões e muito trabalho e tempo para planejar. A ideia é essa, trabalhar de forma a proporcionar motivação e consequentemente, a concretização dos conteúdos aos educando. Machado [18] destaca que os jogos proporcionam condições agradáveis e favoráveis para o ensino da matemática, uma vez que o educando é motivado para trabalhar e pensar, descobrindo, reinventando e não só recebendo informações. Assim o jogo pode fixar conceitos, motivar os alunos, proporcionar a solidariedade entre colegas, desenvolver o senso crítico e criativo, estimular o raciocínio e descobrir novos conceitos.

E a postura dos professores durante a aplicação dos jogos, como deve ser? A postura deve ser de incentivar, desafiar, debater e interferir, quando necessário, promovendo a satisfação e a organização na realização da atividade. Precisamos acreditar no sucesso do trabalho, devemos também participar da atividade, mostrar motivação. Quando isso é percebido pelos educandos, eles se sentem mais seguros e satisfeitos. Há relatos em que professores promovem esse tipo de atividade e não coordenam o trabalho, se mostram indiferentes ao que está acontecendo, gerando uma perda de trabalho do planejamento e acima de tudo maior desinteresse dos educandos em futuras propostas parecidas.

A ação benéfica dos jogos nas aulas de matemática é destacada por Machado [18], por serem motivadoras, impulsionam naturalmente o gosto e o prazer pelo estudo, proporcionam mais alegria aos alunos, conduzem à investigação de novas técnicas de soluções de problemas envolvidos nos jogos, dão a oportunidade do aluno tornar-se um sujeito ativo e participante do processo de aprendizagem, ou simplesmente trazem prazer pelo lazer da recreação. Enfim, Machado [18] (p.58) afirma que o jogo pode ser "(...) um elemento fundamental para a ultrapassagem de uma concepção de matemática que condena o seu ensino a uma organização rigidamente linear, como se todo conteúdo tivesse que ser estruturado e apresentado de modo fragmentado, passo a passo."

Grando [8](p.115) foi outra autora que aborda a importância dos jogos no Ensino da Matemática, ele enfoca o valor pedagógico, destaca que a escolha do professor pelo trabalho com jogos deve ser uma opção de ação didático-metodológica, na qual seus objetivos estejam bastante claros. O professor deve assumir a posição de observador, juiz, organizador, se tornando um elemento mediador entre os alunos e o conhecimento, via ação do jogo, a fim de não destruir a ação lúdica inerente ao jogo. Grando [8] alerta que o uso dessa estratégia deve ser aplicado como um "gerador de situações-problema" que realmente desafiem o aluno a buscar soluções ou ainda como um desencadeador de uma nova aprendizagem ou na fixação/aplicação de um conceito já desenvolvido. Destaca os jogos de estratégias e/ou de construção de conceitos, e os de fixação de conceitos já adquiridos.

Moura, [19] afirma que através dos jogos, o educando desenvolve habilidade de resoluções de problemas, em que ele estabelece planos para alcançar seus objetivos, age e avalia os resultados. O jogo promove a aproximação do sujeito ao conteúdo científico, por intermédio de linguagem, informações, compreensão de regras, imitação, assegurando a construção de conhecimentos mais elaborados. Mesmo que o jogo não esteja relacionado com um conteúdo específico, o educando desenvolve essas habilidades que é de fundamental importância na resolução de problemas específicos de conteúdos matemáticos e no momento que precisar, estará apto e confiante para desenvolver a estratégias para solucioná-los.

E o que diz os Parâmetro Curriculares Nacionais (PCNs) com relação aos jogos? Os PCNs [23](p.46-47) recomendam a utilização de jogos no Ensino Fundamental e salientam que:

1. Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções.

2. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações.

3. Possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas.

4. Os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes, enfrentar desafios, lançar-se a busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégicas e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório, necessárias para a aprendizagem da matemática.

Está claro que os jogos promovem atitudes diversas no indivíduo, e que eles não se limitam apenas à matemática nem às crianças da pré-escola e do Ensino Fundamental, porém, essa prática encontra bastante resistência na sua aplicação, de modo mais específico nas aulas de matemática, e em outros níveis de ensino, como por exemplo o Ensino Médio e o Superior, devido a vários fatores já destacados anteriormente. Cabe aos educadores experimentar a utilização dessa metodologia lúdica, deixando de lado as dificuldades, o desinteresse e todos os problemas que permeiam a educação básica, de modo a tornar a aprendizagem mais significativa, motivadora, atrativa e espontânea. Uma aprendizagem voltada para o desenvolvimento de valores e atitudes aos jovens, olhar nos rostos de cada um deles e buscar forças em cada olhar, em cada pedido de socorro escondido nas suas faces, para que eles estejam preparados para o desempenho da verdadeira cidadania.

1.3 O uso de materiais concretos no Ensino da Matemática

Outro recurso que auxilia no processo ensino e aprendizagem que podemos destacar é o uso de materiais concretos, ele permite a aproximação com o objeto que se quer conhecer, é uma fonte estimuladora do raciocínio e da criatividade, afastando-se da transmissão de conhecimentos, dos exercícios prontos e acabados e da repetição exaustiva. O uso de materiais concretos é uma metodologia que busca inovar e contextualizar o ensino, leva o educando a construir e compreender melhor a matemática e seus procedimentos, é uma proposta de metodologia viável, fácil de se promover e estão ligadas às concepções de cada professor. É necessário refletir sobra a sua aplicação.

Lorenzato [16](p.56) nos faz refletir:

> “O professor deve saber utilizar corretamente os materiais didáticos, pois estes exigem conhecimentos específicos de quem os utiliza. Não se pode deixar que o material se torne apenas um brinquedo para o aluno”.

É preciso ter cuidado, o material concreto pode se tornar um brinquedo sem fundamentação teórica do que se pretende ensinar. Somente manipular os objetos não significa que o aluno aprendeu, que ele fixou determinado conteúdo, é necessário que haja uma atividade mental por parte do aluno mediado pelo professor, permeado de reflexões sobre a ação, que proporcione ao aluno o reconhecimento de relações que o levem a pensar, analisar e agir. Cabe ao professor formular questões adequadas que permitem ao aluno passar do concreto ao abstrato por meio de construções racionais elaboradas. É importante, também, que o aluno participe da construção desses materiais, garantido que ele possa tirar o maior proveito possível desse material manuseado.

Schliemann [26](p.178) destaca que o “ensino da matemática no Brasil, após ter sido basicamente formal, foi estimulado pela ideia de introdução de materiais concretos em sala de aula. Grande parte dos livros didáticos atuais, que chegam às escolas de Ensino Fundamental, trazem várias sugestões de uso de materiais concretos.”

Os PCNs [23] destacam sobre a utilização de materiais concretos pelos professores como um recurso alternativo que pode tornar bastante significativo o processo de ensino aprendizagem da matemática. Não podemos nos prender somente a este recurso, ele não é único e insubstituível, devemos ter cuidado para que não se torne desgastante na nossa prática.

Magina e Spinillo [20](p.11) destacam que:

> “O material concreto não é o único e nem o mais importante recurso na compreensão matemática, como usualmente se supõe. Não se deseja dizer com isso que tal recurso deva ser abolido da sala de aula, mas que seu uso seja analisado de forma crítica, avaliando-se sua efetiva contribuição para a compreensão matemática”.

Como todas as Estratégias de Ensino, o uso de materiais concretos também deve ser pensado e analisado, o mais importante no ensino e aprendizagem da matemática é a atividade mental a ser desenvolvida, a abstração do conhecimento.

Capítulo 2

Iniciação ao Estudo da Álgebra

2.1 O Ensino da Álgebra

A Álgebra é uma linguagem complexa, desafiadora da mente, poderosa e com diversas aplicações no campo das ciências. Mas como introduzi-la no Ensino Fundamental? Qual a melhor maneira de ensiná-la? Levando em consideração os resultados dos índices que mede o desenvolvimento da educação brasileira nos últimos anos, com certeza a maneira como ela está sendo ensinada, em diversas escolas, nem sempre facilita a vida de quem tem que aprendê-la. Trabalhar com seres humanos onde temos individualidades, pensamentos e atitudes distintas é um desafio, especialmente na fase cronológica, por volta dos 11 a 12 anos, em que os conteúdos de forma generalizadas do ensino da Álgebra são colocados. Devemos reconhecer e, acima de tudo, valorizar o esforço feito por nossos alunos nas salas de aula, quando tentam compreender e se entender com a Álgebra.

Foi por volta do século XVII que a linguagem algébrica que conhecemos e utilizamos tomou forma, devido aos trabalhos dos matemáticos de então. Isto nos ajuda a compreender melhor o problema que ela representa para nossos alunos que, por volta dos 11 a 12 anos, se veem obrigados pelo ensino formal a compreender a Álgebra e adotá-la com competência na comunicação matemática. Na maioria das vezes não são bem sucedidos, e apesar de ser estudada por um período longo, iniciando no Ensino Fundamental e prolongando até o Ensino Médio, muitos alunos terminam sem alcançar o mínimo de conhecimento necessário. Cabe a nós, professores, intervir de modo a colaborar nessa difícil tarefa.

Chegar para um aluno e, simplesmente, dizer a ele que agora um número pode ser representado por uma letra, estaremos provocando uma série de confusões no seu pensamento, levando a nos sentirmos culpados. Sessa [27](p.06) em seu livro *"Iniciação ao estudo didático da Álgebra origens e perspectivas"* destaca essa problemática e nos conforta um pouco sobre essa culpa que às vezes sentimos.

> "Se considerarmos em conjunto o sistema, professores e alunos, encontraremos nos dias atuais uma forte tensão. Para o professores, de um lado, a Álgebra representa a ferramenta matemática por excelência; poder-se-ia dizer que eles se formam numa matemática algebrizada. Os alunos, de outro lado, veem a Álgebra como fonte de infinita incompreensão e de dificuldades operacionais insuperáveis".

Devido ao estudo somente da Aritmética até o 6º ano do Ensino Fundamental, os alunos ainda se sentem presos a ela. Fazer a passagem de um número escrito com algarismos para um escrito por um símbolo, uma letra, gera confusões e provoca muitas dificuldades. Até que se consegue mostrar que a Álgebra e a Aritmética são interdependentes, leva-se bastante tempo.

É fato que os educandos enfrentam muitas dificuldades quando se pede para pensar em um número qualquer e representá-lo por um símbolo, isso parece simples e de fácil compreensão, mas dizer que $\mathbf{x}$ ou outra letra qualquer pode representar um número gera dificuldades nos educandos. A introdução ao estudo da Álgebra no Ensino Fundamental é objeto de muitas pesquisas e discussões no âmbito da Educação Matemática. Conforme o senso comum se percebe, com facilidade, a separação entre Aritmética e Álgebra, estudos mostram que elas são interdependentes e complementares, não podendo ser ensinadas de forma desconectadas. Não é a prática que se vê nas escolas normais, onde professores do Ensino Fundamental (4º e 5º ano), na sua grande maioria, não tem costume de colocar nos seus planos de curso a Álgebra, e os alunos ao chegarem no 6º e 7º ano, veem a Álgebra como se fosse uma nova disciplina, provocando dificuldades e consequentemente a baixa estima dos nossos alunos.

Telles [30](p.4) conclui:

> "Os estudos em educação matemática apresentam a aritmética tratando de números, operações e das propriedades destas, enquanto a álgebra possui um aspecto de generalização da aritmética, tem a função de ferramenta e

destaca-se por causa da utilização da linguagem simbólica. Inferimos, portanto, que na matemática escolar é quase impossível colocar uma divisória ou estabelecer limites entre aritmética e álgebra. Muito menos impor uma ordem estrita, primeiro aritmética, depois álgebra".

Telles [30](p.5) ainda afirma que apesar de serem áreas interligadas, é com a introdução da Álgebra que o estudante começa o estudo no universo simbólico totalmente novo, causa de grandes dificuldades e objetos de muitas reflexões. Nesse caso, no Ensino Fundamental I, os professores deverão ir introduzindo a Álgebra na medida do possível, de forma lúdica e de fácil compreensão.

O papel do professor nas séries iniciais é de fundamental importância, é nesse estágio de ensino que a Álgebra deverá ser apresentada. Quando isso não é feito, cabe aos professores das outras etapas, diversificar os caminhos a serem seguidos, utilizar diferentes estratégias e variados recursos. Os jogos e uso de materiais concretos podem tornar menos difícil esse processo.

O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o educando desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, para se garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico, devendo estar engajado em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da Álgebra.

A Aritmética encontra sua generalização matemática na Álgebra, assim, os conjuntos numéricos se ampliam para os campos algébricos. É necessário que o professor do Ensino Fundamental estimule, desde os anos iniciais escolares, o desenvolvimento do pensamento algébrico dos educandos, dando-lhes meios para relacionar operações com números e operações com letras, nessa fase podem usar símbolos em formas de figurinhas. No trabalho de passagem da Aritmética para a Álgebra, faz-se necessário um cuidado para não haver uma ruptura entre ambos, mas ampliação das possibilidades de argumentar e resolver problemas.

2.2 A álgebra nos Parâmetros Curriculares Nacionais

De acordo com os PCNs [23](p.64), os objetivos da matemática para o 3º ciclo (6º e 7º anos), mais especificamente, em relação a Álgebra, é que neste ciclo, o ensino de matemática deve visar ao desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

1. reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções;

2. traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras;

3. utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico.

Ainda de acordo com os PCNs [23](p.68), devido à complexidade que caracteriza os conceitos algébricos não é desejável que no terceiro ciclo (6º e 7º anos) se desenvolva um trabalho visando ao aprofundamento das operações com as expressões algébricas e as equações. É suficiente nesse ciclo que os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas. É provável que ao explorar situações-problema que envolvam variação de grandezas o aluno depare com equações, o que possibilita interpretar a letra como incógnita. Nesse caso, o que se recomenda é que os alunos sejam estimulados a construir procedimentos diversos para resolvê-las, deixando as técnicas convencionais para um estudo mais detalhado no 4º ciclo (8º e 9º anos).

No 4º ciclo (8º e 9º anos), ainda de acordo com os PCNs [23] (p.82), o Ensino da Matemática, especificamente a Álgebra, deve visar ao desenvolvimento, do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que leve o aluno a:

1. produzir e interpretar diferentes escritas algébricas - expressões, igualdades e desigualdades, identificando as equações, inequações e sistemas;

2. resolver situações-problema por meio de equações e inequações do 1º grau, compreendendo os procedimentos envolvidos.

3. obeservar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.

O trabalho com a Álgebra nesse ciclo, tem como ponto de partida a *pré-Álgebra* desenvolvida no ciclo anterior, em que as noções algébricas são exploradas por meio de *jogos*, generalizações e representações matemáticas (como gráficos, modelos), e não por procedimentos puramente mecânicos, para lidar com as expressões e equações. PCNs [23](p.84)

É fato que nós, professores, não desenvolvemos todos esses aspectos da Álgebra no Ensino Fundamental, privilegiamos o estudo do cálculo algébrico e das equações. Apesar desses aspectos serem necessários, eles não são, absolutamente, suficientes para aprendizagem desses conteúdos. É necessário proporcionar, aos educandos, experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética.

2.3 Expressões Algébricas

Definição 2.3.1. *Uma expressão matemática formada por números e letras ou somente por letras, é chamada de **Expressão Algébrica**. Nelas as letras recebem o nome de **variáveis**.*

Geralmente, usamos as últimas letras do alfabeto (x,y,z) para representar quantidades desconhecidas. Essa ideia foi proposta pelo filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), na primeira metade do século XVII.

A linguagem para se representar uma expressão algébrica pode ser de duas formas: linguagem usual ou linguagem simbólica. Veja abaixo alguns exemplos:

Exemplo 2.3.2. *Observe nos exemplos abaixo como passamos da linguagem usual para uma expressão algébrica (simbólica).*

Tabela 2.1: Linguagem usual e Expressão Algébrica - Exemplo 1

Linguagem Usual	**Expressão Algébrica**
O dobro de um número	$2.x$ ou $2x$
O triplo de um número mais cinco	$3.x + 5$ ou $3x + 5$
Um número mais cinco	$x + 5$
O quádruplo de um número menos um	$4.x - 1$ ou $4x - 1$
O quadrado de um número mais um	$x^2 + 1$

Exemplo 2.3.3. *Para cada sentença, escreva uma expressão algébrica na variável **x**.*

Tabela 2.2: Linguagem usual e Expressão Algébrica - Exemplo 2

Sentença	**Expressão Algébrica**
O triplo de x	$3.x$ ou $3x$
A metade de x	$\frac{x}{2}$ ou $\frac{1}{2}x$
Três quartos de x	$\frac{3x}{4}$ ou $\frac{3}{4}x$
O quadrado de x	x^2
A soma entre a sétima parte de x e o quádruplo de x	$\frac{x}{7} + 4x$
O dobro de x adicionado a 3	$2.x + 3$ ou $2x + 3$
O quadrado de um número y adicionado a -1	$y^2 + (-1)$ ou $y^2 - 1$
A terça parte de um número w adicionado ao número k	$\frac{1}{4}w + k$

2.3.1 Valor numérico de uma Expressão Algébrica

Definição 2.3.4. ***Valor Numérico de uma Expressão Algébrica*** *é o resultado das operações efetuadas em uma expressão algébrica após a substituição das variáveis por números.*

Exemplo 2.3.5. *Determinar o valor numérico da expressão algébrica* $2a + 2b$*, para* $a = 75$ *e* $b = 120$.
$2a + 2b = 2.a + 2.b$ *(Aplicando a Propriedade Distributiva)*
$2.a + 2.b = 2.(a + b)$ *(Substituindo os valores de a e b):*
$2.(a + b) = 2.(75 + 120) = 2.195 = 390$
Poderíamos ter resolvido o exemplo da seguinte forma:
Substituindo diretamente os valores de a e b na expressão:
$2.a + 2.b = 2.75 + 2.120 = 150 + 240 = 390$

Exemplo 2.3.6. *Vamos calcular o valor numérico das expressões algébricas abaixo:*

a) $\frac{x}{2,5}$*, para* $x = 5 \Rightarrow \frac{5}{2,5} = 5 : 2,5 = 2$

b) $12y$*, para* $y = \frac{1}{2} \Rightarrow 12.\frac{1}{2} = \frac{12}{2} = 6$

c) $t + 10$*, para* $t = -10 \Rightarrow -10 + 10 = 0$

d) $n^2 + n + 1$*, para* $n = 5 \Rightarrow 5^2 + 5 + 1 = 25 + 5 + 1 = 31$

2.3.2 Expressões Algébricas Equivalentes

Definição 2.3.7. ***Expressões Algébricas Equivalentes*** *são todas as expressões que possuem o mesmo valor numérico, ou seja, para qualquer valor dado às variáveis, o valor numérico das expressões será o mesmo.*

Exemplo 2.3.8. *Dizemos que as expressões algébricas* $\boldsymbol{3x+4x}$ *e* $\boldsymbol{7x}$ *são equivalentes e podemos, sempre que quisermos, substituir uma delas pela outra*

Para $x = 2$, temos: $3.2 + 4.2 = 6 + 8 = 14$ e $7.2 = 14$
Portanto as expressões $3x + 4x$ e $7x$ são equivalentes, pois possuem o mesmo valor numérico.

Exemplo 2.3.9. *Podemos afirmar que as expressões algébricas* $3x + 4y$ *e* $5x$ *são equivalentes?*

Calculando o valor numérico das expressões algébricas para $x = 2$ e $y = 1$, teremos:
$3x + 4y,\ para\ x = 2\ e\ y = 1 \Rightarrow 3.2 + 4.1 = 6 + 4 = 10$ e $5x,\ para\ x = 2 \Rightarrow 5.2 = 10$
Como os valores numéricos são iguais, podemos afirmar que elas são equivalentes? A resposta será *NÃO*. Veja porque:
Calculando o valor numérico das expressões algébricas para $x = 5$ e $y = 1$, teremos:
$3x + 4y,\ para\ x = 5\ e\ y = 1 \Rightarrow 3.5 + 4.1 = 15 + 4 = 19$ e
$5x,\ para\ x = 5 \Rightarrow 5.5 = 25$
Vemos que os valores numéricos deram diferentes, então não são equivalentes.

2.3.3 Simplificação de Expressões Algébricas

Simplificar uma expressão algébrica é escrever uma outra, equivalente à original, porém mais simples. Veja:

Exemplo 2.3.10. *Verificar se as expressões algébricas abaixo são equivalentes:*

a) $2x + 6x$ e $8x$ (Aplicando a Propriedade Distributiva da Multiplicação
$2x + 6x = 2.x + 6.x = (2 + 6).x = 8.x = 8x$
Portanto, as expressões algébricas $2x + 6x$ e $8x$ são equivalentes. Não se faz necessário o cálculo do valor numérico para a verificação. É fácil ver que para $x = 1$ teremos como valor numérico 8

b) $3y + 5y + y$ e $9y$ (Aplicando a Propriedade Distributiva da Multiplicação)
$3y + 5y + y = 3.y + 5.y + 1.y = (3 + 5 + 1).y = 9.y = 9y$
Portanto, as expressões algébricas $3y + 5y + y$ e $9y$ são equivalentes.

c) $3(x + 4)$ e $3x + 12$ (Aplicando a Propriedade Distributiva)
$3(x + 4) = 3.(x + 4) = 3.x + 3.4 = 3.x + 12 = 3x + 12$
Portanto, as expressões algébricas $3(x + 4)$ e $3x + 12$ são equivalentes.

2.4 Termos Algébricos

Definição 2.4.1. ***Termos algébricos*** *são as parcelas de uma expressão algébrica.*

Um termo algébrico é formado por duas partes: a parte numérica, denominada de **coeficiente**, e a parte com letras, denominada de **parte literal**.

Exemplo 2.4.2.

a) a expressão $x + 3y + z + 2$ apresenta quatro termos;

b) a expressão $a^2 + b.c$ possui dois termos;

c) no termo $17a$, o coeficiente é igual a 17 e a parte literal é igual a ***a****;*

d) no termo $-\frac{3}{2}x^2y$, o coeficiente é igual a $-\frac{3}{2}$ e a parte literal é igual a x^2y

e) na expressão algébrica $5m - 3$, temos dois termos algébricos, $5m$ e -3. No termo $5m$ o coeficiente é igual a ***5*** *e a parte literal* ***m*** *e no termo -3 o coeficiente é igual a -3 e a parte literal é inexistente.*

2.4.1 Termos Semelhantes

Definição 2.4.3. *Termos algébricos que têm a mesma parte literal são chamados de* ***termos semelhantes****. Assim, $6ab$ e $-8ab$ são termos semelhantes, pois apresentam a mesma parte literal, ab.*

Exemplo 2.4.4. *Os termos $5mn$, $7mn$ e $\frac{9}{4}mn$ são todos semelhantes pois possuem a mesma parte literal igual a mn, enquanto que os termos os termos $-5xyz$, $8xyz$ e $-4yz$ não são semelhantes pois não possuem a mesma parte literal.*

Para reduzirmos os termos semelhantes, aplica-se a propriedade distributiva da multiplicação.

Por exemplo:

a) $7ab - 2ab = (7 - 2)ab = 5ab$

b) $11x^2y^3 + 3x^2y^3 = (11 + 3)x^2y^3 = 14x^2y^3$

c) $y - \frac{1}{4}y + \frac{3}{2}y = (1 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2})y = \frac{9}{4}y$

2.5 Atividades Propostas - Expressões Algébricas (E.A.)

2.5.1 Atividade 01 E.A.: Escrevendo Expressões Algébricas

Expectativas de Aprendizagem:

Ao final desta atividade espera-se que o aluno consiga identificar uma expressão algébrica descrita por uma figura e escrevê-la na forma usual.

Materiais Utilizados:

Materiais para confecção dos cartões, tais como: cartolina ou outro tipo de papel, pincel de marcador fixo, lápis de cor ou canetinhas, entre outros.

Desenvolvimento:

O professor ou os próprios alunos confeccionarão vários cartões conforme exemplos abaixo. A atividade poderá ser feita individual ou em dupla, isso irá depender do número de cartões. O aluno deverá anotar em seu caderno o número do cartão e a resposta da questão proposta. Ao final o professor poderá, em forma de competição, premiar o aluno que obteve o maior número de acertos. O gabarito poderá ser feito em conjunto, professor e alunos. A seguir apresento algumas sugestões de cartões e as soluções esperadas.

Solução esperada para o cartão 01:

Utilizando a letra x para representar o valor desconhecido, a expressão algébrica esperada será: $+3x - 10$.

Solução esperada para o Cartão 02

Utilizando a letra x para representar o valor desconhecido, a expressão algébrica esperada será: $-3x + 5x + 5 = +2x + 5$

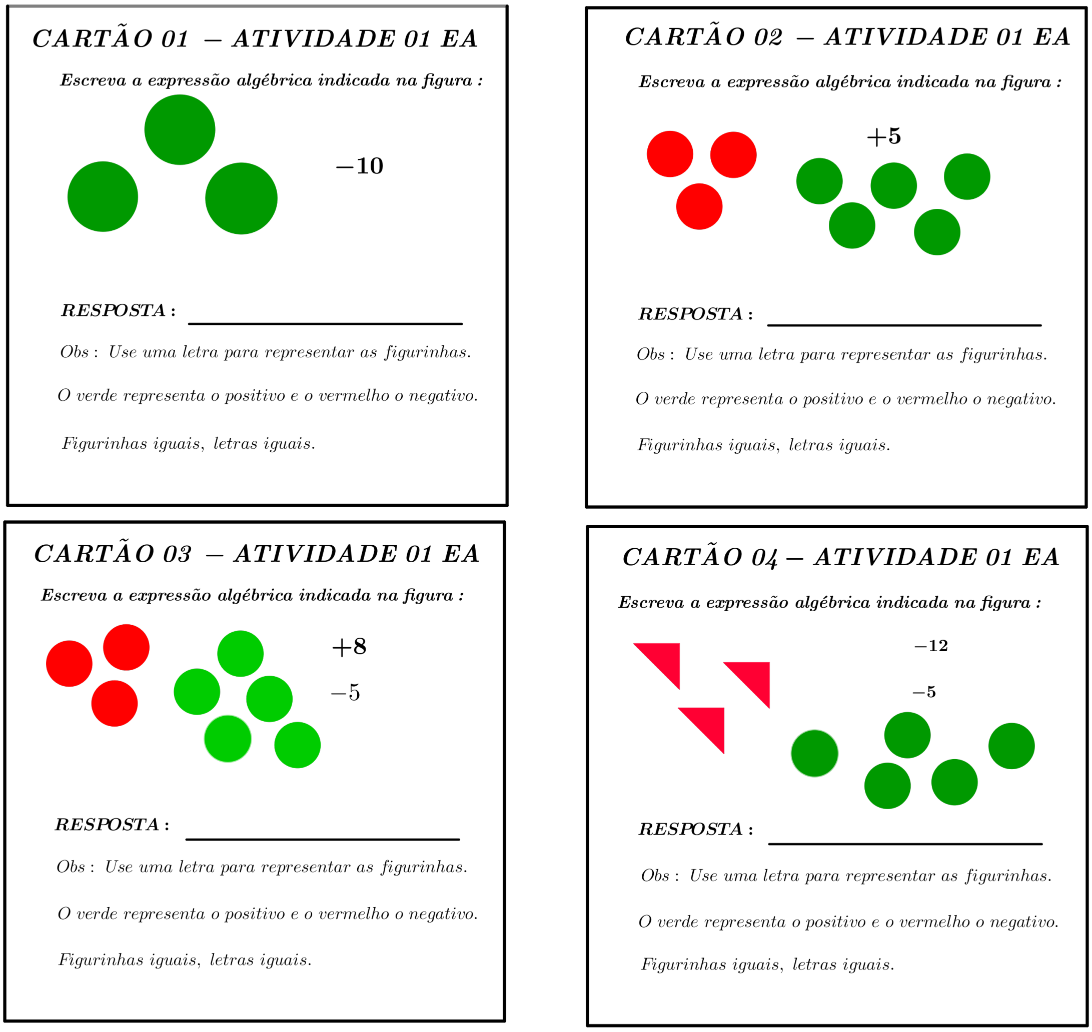


Figura 2.1: Atividade 01 E.A. - Escrevendo Expressões Algébricas

O educando chegaria, sem muitas dificuldades, à $2x + 5$ simplesmente cancelando três círculos positivos com três círculos negativos o que sobraria dois círculos positivos.

Solução esperada para o cartão 03:

Utilizando a letra x para representar o valor desconhecido, a expressão algébrica esperada será: $-3x + 5x + 8 - 5 = 2x + 3$

Da mesma forma que no cartão 02 o estudante já aplicaria a propriedade do cancelamento e chegaria diretamente no resultado.

Solução esperada para o cartão 04:

Aqui temos figuras diferentes, isso provocará uma dúvida nos educandos. Utilizando a letra x para representar o triângulo e a letra y para representar o círculo, a expressão algébrica esperada será: $-3x + 5y - 12 - 5 = -3x + 5y - 17$

Neste caso o educando não cometeria o erro de realizar o cálculo de $-3x + 5y$ simplesmente porque ele, certamente, chegaria a conclusão que não poderá operar com triângulos e círculos.

2.5.2 Atividade 02 E.A.: Baralho de Expressões Algébricas

Expectativas de Aprendizagem:

Ao final desta atividade espera-se que o aluno consiga identificar uma expressão algébrica descrita por figuras e relacioná-la na forma usual.

Materiais Utilizados:

Materiais para confecção das cartas: cartolina ou papel cartão, canetinhas, lápis de cor e materiais utilizados no dia-a-dia.

Desenvolvimento:

Esta atividade poderá ser aplicada em grupo de 2 ou mais alunos, isso irá depender do número de cartas. O jogo é constituído de 2 tipos de cartas, as cartas com as expressões algébricas escritas na forma convencional (Carta R) e as cartas com desenhos (Carta P) que poderão serem codificadas com uso de expressões algébricas. O jogo é parecido com o jogo de cartas *piff-paff*. Divide-se o número de cartas do tipo *CartaP* para os jogadores, decide-se quem começa. Um aluno de cada vez pegará uma carta no monte das cartas do tipo *CartaR* que estarão em cima de uma mesa, no centro do círculo de cada grupo, em seguida ele verificará se a carta corresponde a solução de uma expressão de alguma carta que ele possua, caso não seja ele devolve ao monte, caso seja, ele elimina as duas cartas. Ganha o jogo quem eliminar primeiro todas as cartas da mão. Os jogadores poderão se autoajudarem. A seguir apresento algumas sugestões de cartas e as soluções esperadas.

Solução esperada para a carta P - Figura 2.2-1

Utilizando a letra x para representar o valor desconhecido e o sinal negativo para representar a cor vermelha, a expressão algébrica esperada será: $-3x - 10$.

Solução esperada para a carta P - Figura2.2-2

Utilizando a letra x para representar o valor desconhecido, a expressão algébrica esperada será: $-5x + 2x - (-10 + 8) = -3x - (-2) = -3x + 2$.

Neste caso ele chegaria facilmente ao cancelamento de 2 círculos vermelhos com 2 círculos verde, chegando a concretização da propriedade do cancelamento da adição.

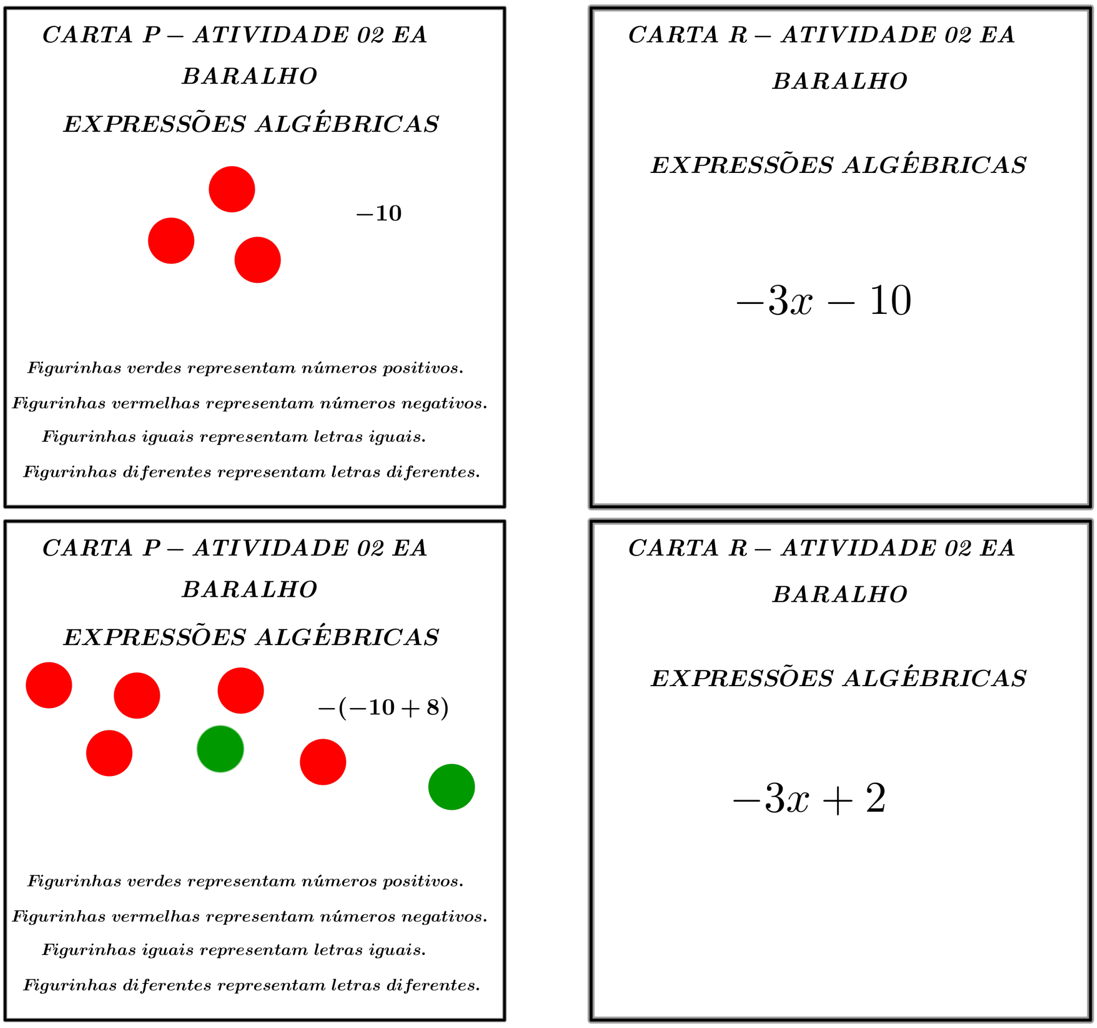


Figura 2.2: Atividade 02 E.A. - Baralho de Expressões Algébricas

A seguir temos uma imagem desta atividade aplicada na turma G1 (7º ano do Ciclo 3) da E.M. Pedro Gomes de Menezes.

Figura 2.3: Atividade 02 E.A. - Baralho - Turma G1 - E.M.P.G.M - Out/2016

2.5.3 Atividade 03 E.A.: Máquinas de Fabricar Números

Expectativas de Aprendizagem:

Ao final desta atividade espera-se que o aluno efetue cálculos com números inteiros, envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação, além de identificar uma expressão algébrica expressa por uma sentença matemática.

Materiais utilizados:

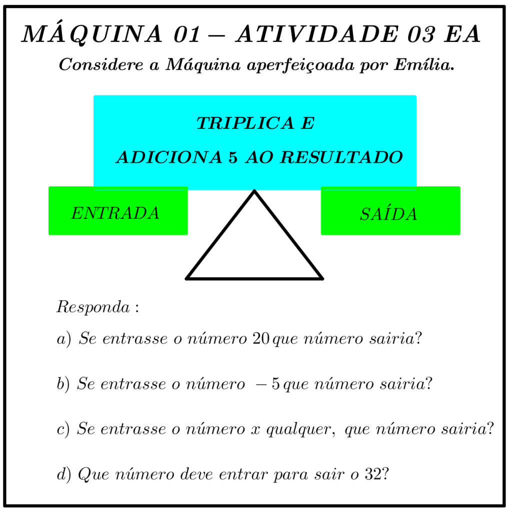
Materiais para construção dos cartões: papel cartão ou cartolina, pincel de marcador fixo, canetinhas, lápis de cor e materiais do dia-a-dia.

Desenvolvimento:

Esta atividade poderá ser feita individualmente ou em grupo. Cada aluno ou grupo de alunos, receberá uma *Máquina de Fabricar Números*, conforme os modelos abaixo. Os alunos responderão as questões propostas no cartão, em uma tabela, veja modelo abaixo, feito por eles próprios. Ao final da atividade, computa-se o total de acertos e define-se os campeões. Os comandos das máquinas poderão serem mudados de acordo com o nível da turma. A seguir apresento algumas sugestões para esta atividade.

Tabela 2.3: Atividade 03 E.A. - Tabela de Resultados

TABELA DE RESULTADOS		
QUESTÕES	MÁQUINA 1	MÁQUINA 2
a)		
b)		
c)		
d)		



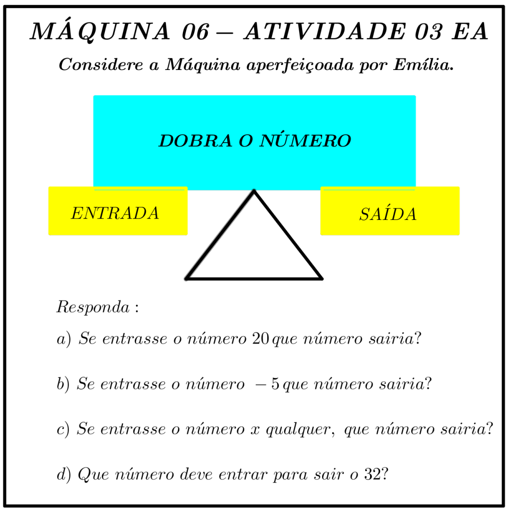


Figura 2.4: Atividade 03 E.A. - Máquinas de Fabricar Números

Solução esperada para a máquina 01 da Figura 2.4:
OBS: Foi utilizado na resolução do item (d) o método das operações inversas. Para aproveitar esta atividade poderíamos encontrar o termo geral da expressão e determinar o valor de saída da máquina em função do primeiro termo. Veja:
Para $n = 1$ teremos: $a_1 = 3.1 + 5 = 8$
Para $n = 2$ teremos: $a_2 = 3.2 + 5 = 11$
Para $n = 3$ teremos: $a_3 = 3.3 + 5 = 14$
Para $n = 4$ teremos: $a_4 = 3.4 + 5 = 17$
Para $n = 5$ teremos: $a_5 = 3.5 + 5 = 20$
É fácil ver que:

$$a_1 = 8$$
$$a_2 = a_1 + 3$$

$$a_3 = a_2 + 3 = a_1 + 3 + 3 = a_1 + 2.3$$
$$a_4 = a_3 + 3 = a_1 + 3 + 3 + 3 = a_1 + 3.3$$
$$a_5 = a_4 + 3 = a_1 + 3 + 3 + 3 + 3 = a_1 + 4.3$$

$\vdots$

$$a_n = a_1 + (n-1).3 = a_1 + 3.(n-1)$$

Portanto, o termo geral será: $a_n = a_1 + 3.(n-1)$

Tabela 2.4: Atividade 03 E.A. - Resultados Máquina 01

RESULTADOS - MÁQUINA 01	
Triplica e adiciona 5 ao resultado	
ENTRADA	SAÍDA
20	$20.3 + 5 = 60 + 5 = 65$
-5	$-5.3 + 5 = -15 + 5 = -10$
x	$x.3 + 5 = 3x + 5$
$(32 - 5) : 3 = 27 : 3 = 9$	32

Não seria o caso provar a veracidade desse termo utilizando o método indutivo para os alunos do 7º ano, mas fica aqui a demonstração para alguns leitores deste trabalho.

Seja $(8, 11, 14, 17, 20, ..)$ uma sequência numérica. Mostrar que um termo qualquer pode ser dado pela expressão $a_n = a_1 + 3.(n-1)$.

Seja $P(n): \; a_n = a_1 + 3.(n-1)$

$P(1)$ é verdadeira, já que $a_1 = a_1 + 3.(1-1) = a_1 + 0 = a_1$

Suponhamos que $P(n)$ seja verdadeira, para algum $n \in \mathbb{N}$. Isto significa que, para qualquer que seja o valor de n natural, teremos $a_n = a_1 + 3.(n-1)$

Deveremos verificar que $P(n+1)$ também é verdadeira, ou seja, que
$a_{n+1} = a_1 + 3.(n+1-1) = a_1 + 3n$, temos que:
$a_n = a_1 + 3.(n-1)$ e $a_{n+1} = a_n + 3$ mas $a_n = a_1 + 3.(n-1)$
Substituindo teremos:
$a_{n+1} = a_1 + 3.(n-1) + 3 = a_1 + 3.n - 3 + 3 = a_1 + 3n$
Portanto $a_n = a_1 + 3.(n-1)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Tabela 2.5: Atividade 03 E.A. - Resultados Máquina 06

RESULTADOS - MÁQUINA 06	
Dobra o número	
ENTRADA	SAÍDA
20	$2.20 = 40$
-5	$2.(-5) = -10$
x	$2.x = 2x$
$32 : 2 = 16$	32

2.5.4 Atividade 04 E.A.: Quadro de Valor Numérico

Expectativas de Aprendizagem:

Ao final desta atividade espera-se que o aluno efetue cálculos com números inteiros, envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação, através do cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica.

Materiais utilizados:

Materiais para confecção das cartas: papel cartão ou cartolina, pincel de marcador fixo, canetinhas, lápis de cor e materiais do dia-a-dia.

Desenvolvimento:

Cada aluno receberá um quadro de valores numéricos, do mesmo tipo, onde eles deverão completar os espaços em branco, de acordo com a operação matemática. Ao final do tempo determinado pelo professor, trocam-se os cartões entre eles e contabilizam os acertos de acordo com o gabarito feito pela turma coordenado pelo professor. Como sugestão, classificam se os 3 melhores com medalha de ouro, prata e bronze. A seguir apresento algumas sugestões de quadros de valores numéricos para esta atividade e as suas respectivas soluções.

Tabela 2.6: Atividade 04 E.A. - Solução Quadro 01

SOLUÇÃO - QUADRO 01			
X	-3	0	$+2$
$3x$	$3.(-3) = -9$	$3.0 = 0$	$3.(+2) = +6$
x^2	$(-3)^2 = +9$	$0^2 = 0$	$(+2)^2 = +4$
$-x^2$	$-(-3)^2 = -(+9) = -9$	$0^2 = 0$	$-(+2)^2 = -(+4) = -4$

QUADRO 01 ATIVIDADE 04 EA

Complete o quadro de valores numéricos

X	-3	0	$+2$
$3x$			
x^2			
$-x^2$			

TOTAL DE PONTOS : ________

QUADRO 02 ATIVIDADE 04 EA

Complete o quadro de valores numéricos

X	-3	0	2
$2x-1$			
x^2+1			
$2x^2-5$			

TOTAL DE PONTOS : ________

Figura 2.5: Atividade 04 E.A. - Quadro de Valor Numérico

Tabela 2.7: Atividade 04 E.A. - Solução Quadro 02

SOLUÇÃO - QUADRO 02			
	-3	0	$+2$
$2x-1$	$2.(-3)-1=$ $=-6-1=-7$	$2.0-1=$ $=0-1=-1$	$2(+2)-1=$ $=+4-1=+3$
x^2+1	$(-3)^2+1=$ $=+9+1=+10$	$0^2+1=$ $=0+1=+1$	$2^2+1=$ $=4+1=+5$
$2x^2-5$	$2.(-3)^2-5=2.(+9)-5=$ $=+18-5=+13$	$2.0^2-5=$ $=0-5=-5$	$2.2^2-5=$ $=2.4-5=8-5=+3$

2.5.5 Atividade 05 E.A.: Sequências Numéricas

Expectativas de Aprendizagem:

Ao final desta atividade espera-se que o aluno consiga generalizar uma situação lógica de sequências numéricas e conjecturar uma expressão que represente a sequência proposta.

Materiais utilizados:

Materiais para construção dos cartões: papel cartão, pincel de marcador fixo, canetinhas, lápis de cor e materiais do dia-a-dia.

Desenvolvimento:

Atividade em grupo. Cada grupo receberá um cartão com uma mesma sequência numérica, por exemplo, o cartão 01. É dado um tempo para resolverem. Ao final do tempo estipulado, o professor, juntamente com toda a turma, discutirá a solução da questão proposta. Computam-se a pontuação do grupo. Entrega-se outro modelo de cartão e repete-se o desenvolvimento anterior. Ao final registra-se a pontuação dos grupos e, como sugestão, premia-se o vencedor. A seguir apresento alguns cartões como sugestão para esta atividade.

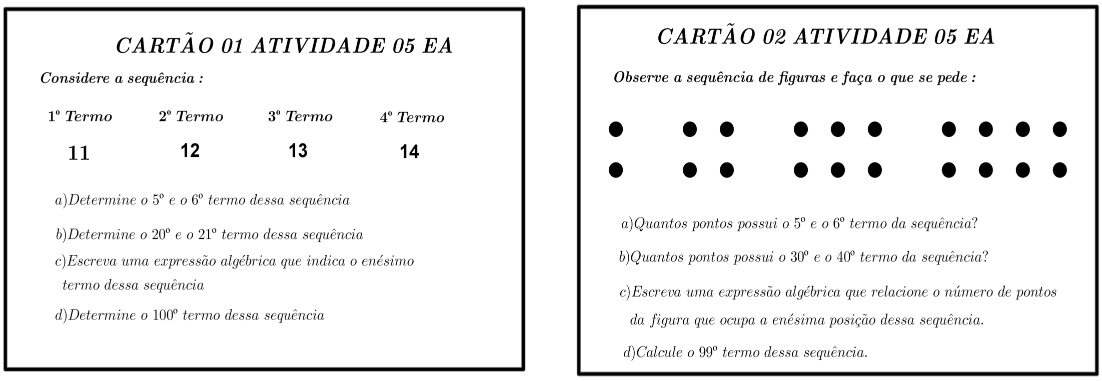


Figura 2.6: Atividade 05 E.A. - Sequências Numéricas

Solução esperada para o cartão 02

Podemos estimular o educando as simbologias utilizadas nas sequências numéricas.

A sequência do cartão pode ser escrita por $(2, 4, 6, 8, ...)$, onde $a_1 = 2$ representando o primeiro termo, $a_2 = 4$, representando o segundo termo, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$ e $a_n =?$ representando o terceiro, quarto e n-ésimo termo, respectivamente. Observe que:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 2 + 2 = a_1 + 2 = 4$$
$$a_3 = 4 + 2 = a_2 + 2 = a_1 + 2 + 2 = 6$$

$$\vdots$$

$$a_7 = a_6 + 2 = a_5 + 2 + 2 = a_4 + 2 + 2 + 2 = a_3 + 2 + 2 + 2 + 2 =$$
$$= a_2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = a_1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = a_1 + 6.2$$

Podemos concluir que:

$$a_n = a_1 + 2.(n-1)$$

E portanto

$$a_{90} = a_1 + 2.89 = 2 + 178 = 180$$

Fica a cargo do leitor, provar por indução que $a_n = a_1 + 2.(n-1)$

2.5.6 Atividade 06 E.A.: Charadas Algébricas

Expectativas de Aprendizagem:

Ao final desta atividade espera-se que o aluno consiga escrever uma expressão algébrica dado uma sentença matemática em linguagem usual.

Materiais utilizados:

Papel cartão, pincel de marcador fixo, canetinhas, lápis de cor e materiais do dia-a-dia.

Desenvolvimento:

Disputa entre meninas e meninos. O professor colocará em uma caixa as charadas confeccionadas, anteriormente, por ele ou pelos próprios alunos. A sala se organizará de forma que fiquem as meninas de um lado e os meninos de outro. Escolhe quem começa. Um menino ou menina irá até a caixa, pega uma charada, faz a leitura em voz alta e o grupo dará a resposta, caso a resposta esteja errada, passa-se a vez para o outro grupo. Pontua quem acertar. Ao final da atividade computa-se os pontos e verifica a equipe vencedora. A premiação poderá ser a critério do professor. Apresento a seguir, algumas sugestões de charadas para esta atividade e suas respectivas soluções.

Solução esperada para a Charada 01:

O triplo de um número x menos 4 mais 1: $3x - 4 + 1 = 3x - 3$

Solução esperada para a Charada 06:

A diferença entre o quadrado de um número e a sua metade.

Supondo que o número desconhecido seja representado por n, teremos: $n^2 - \dfrac{n}{2}$.

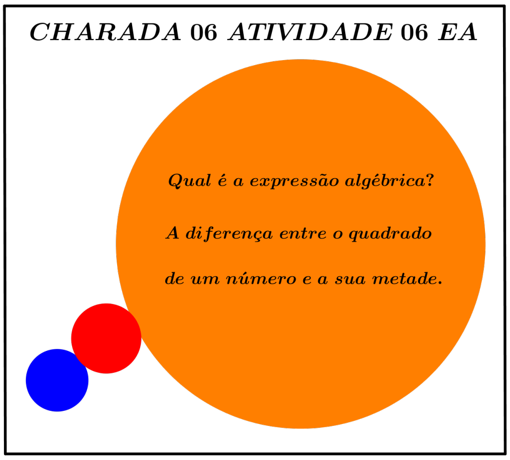


Figura 2.7: Atividade 06 E.A. Charadas Algébricas

2.5.7 Atividade 07 E.A.: V.N. de uma E.A. - Adedonha

Expectativas de Aprendizagem:

Ao final desta atividade espera-se que o aluno consiga calcular o valor numérico (V.N.) de uma Expressão Algébrica (E.A.).

Materiais utilizados:

Papel cartão para confecção das cartões, pincel de marcador fixo, canetinhas, lápis de cor e materiais do dia-a-dia.

Desenvolvimento:

A Adedonha é um jogo tradicional onde os os participantes encolhem diversos critérios e sorteiam uma letra. Feito isso, devem preencher cada um dos itens com palavras inciadas com a letra adotada. Nesse caso iremos substituir os itens adotados por expressões algébricas utilizando letras (conforme modelo) e as letras por números. Aconselha-se que o professor escolha números pequenos para iniciar. Destina-se um tempo para resolver cada expressão e ao final de uma série de escolhas de números, verifica o resultado, soma-se os acertos e chega-se aos campeões. Apresento a seguir uma sugestão de Adedonha para esta atividade.

ADEDONHA* 01 *ATIVIDADE* 07 *EA					
Valor do $\boldsymbol{x}$	$\mathbf{2.}\boldsymbol{x}\mathbf{+5}$	$\mathbf{4.(}\boldsymbol{x}\mathbf{-9)-2.}\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x}\mathbf{.(4+}\boldsymbol{x}\mathbf{)+4}$	$\mathbf{5.}\boldsymbol{x}\mathbf{-9}$	***Total***
$\boldsymbol{x}\mathbf{=-3}$					
$\boldsymbol{x}\mathbf{=-1}$					
$\boldsymbol{x}\mathbf{=2}$					

Figura 2.8: Atividade 07 E.A. - Valor Numérico de uma E.A. - Adedonha

Tabela 2.8: Atividade 07 E.A. - Solução Adedonha 01

SOLUÇÃO - ADEDONHA 01				
x	$2x+5$	$4.(x-9)-2x$	$x.(4+x)+4$	$5x-9$
$x=-3$	-1	$4.(-3-9)-2.(-3)=$ $=4.(-12)+6=-42$	$(-3).(4-3)+4=$ $=(-3).1+4=+1$	-24
$x=-1$	$+3$	$4.(-1-9)-2.(-1)=$ $=4.(-10)+2=-38$	$(-1).(4-1)+4=$ $=(-1).3+4=+1$	-14
$x=2$	$+9$	$4.(2-9)-2.2=$ $=4.(-7)-4=-32$	$2.(4+2)+4=$ $=2.6+4=16$	$+1$

2.6 Fórmulas

Definição 2.6.1. *As **fórmulas** são sentenças matemáticas que apresentam, resumidamente, os cálculos que devem ser realizados para se obter um resultado. Nas fórmulas, as letras utilizadas para representar números desconhecidos são chamadas de **variáveis**.*

Exemplo 2.6.2. *Relação entre o número do sapato e o comprimento do pé.*

Para essa atividade deverá utilizar um instrumento para medir o tamanho do pé dos alunos, pode ser uma régua ou fita métrica.

Com a unidade de medida de calçado padronizada é possível estabelecer uma relação entre o número do calçado e o comprimento do pé, em centímetros. No Brasil, por exemplo, podemos estabelecer essa relação por meio da *fórmula* a seguir.

$$N=\frac{5p+28}{4}$$

Onde:
$N =$ número do calçado.
$p =$ medida do pé, em centímetros.

Utilizando essa fórmula, vamos determinar o número do seu calçado (aluno) e de um indivíduo cujo comprimento do pé é $25cm$, por exemplo.

Resolução:

Nesse caso, basta substituirmos a letra p na fórmula pelo valor correspondente, nesse caso, $25cm$.

$$N = \frac{5p + 28}{4} \Longrightarrow N = \frac{5.25 + 28}{4} = \frac{153}{4} = 38,25$$

Arredondando o resultado para o inteiro mais próximo, temos que alguém com um pé de comprimento $25cm$ calça um sapato de número 38.

Exemplo 2.6.3. *O Índice de Massa Corporal (IMC)*

Para essa atividade deverá ser utilizada uma fita métrica para medir a altura dos educandos e uma balança para medir a massa corporal.

O índice de massa corporal (IMC) é uma medida internacional usada para calcular se uma pessoa está no peso ideal. Trata-se de um método fácil e rápido para a avaliação do nível de gordura de cada pessoa, ou seja, é um preditor internacional de obesidade adotado pela Organização Mundial da Saúde (OMS). A fórmula para se calcular o IMC de um indivíduo é dada por:

$$IMC = \frac{m}{h^2}$$

Onde $m =$ é a massa em quilogramas e $h =$ a altura em metros.

O resultado é comparado com os de uma tabela que indica o grau de obesidade do indivíduo:

Utilizando a fórmula, calcule o seu IMC e de uma mulher com massa corporal igual a $72kg$ e altura igual a $1,75m$. Encontre na tabela a sua situação e o dessa pessoa.

Nesse caso, basta substituirmos as letras m e h na fórmula pelo valor correspondente, nesse caso m por $72kg$ e h por $1,75m$.

$$IMC = \frac{m}{h^2} \Rightarrow IMC = \frac{72}{(1,75)^2} = \frac{72}{3,0625} = 23,51$$

Observando a tabela na coluna IMC em mulheres, concluímos que ela está no peso normal.

Tabela 2.9: Valores do IMC

O GRAU DE OBESIDADE DO INDIVÍDUO		
Condição	IMC em mulheres	IMC em homens
Abaixo do Peso	$< 19,1$	$< 20,7$
No peso Normal	$19,1 \ a \ 25,8$	$20,7 \ a \ 26,4$
Marginalmene acima do peso	$25,8 \ a \ 27,3$	$26,4 \ a \ 27,8$
Acima do peso ideal	$27,3 \ a \ 32,3$	$27,8 \ a \ 31,1$
Obeso	$> 32,3$	$> 31,1$

Exemplo 2.6.4. *Fórmula para estimar a altura*

Para essa atividade deverá ser utilizada fita métrica para medir a altura dos educandos.

Veja a seguir uma fórmula obtida por cientistas para estimar a altura de indivíduos com base em fatores genéticos.

$$A_{meninos} = \frac{p+m+13}{2} \qquad A_{meninas} = \frac{p+m-13}{2}$$

Com variação de 5cm para mais ou para menos.

Na fórmula, p: indica a altura do pai, em centímetros e m: indica a altura da mãe, em centímetros.

Exemplo 2.6.5. *Estimar a altura de um indivíduo cujo pai tem 175cm de altura e a mãe, 168cm.*

Para isso, substituímos as letras p e m nas fórmulas pelos valores correspondentes.

Para meninos: $A_{meninos} = \frac{p+m+13}{2} = \frac{175+168+13}{2} = 178$

Para meninas: $A_{meninas} = \frac{p+m-13}{2} = \frac{175+168-13}{2} = 165$

Portanto, um indivíduo cujo pai tem 175 cm de altura e a mãe tem 168 cm terá cerca de 178 cm de altura se for menino ou 165 cm se for menina.

Agora, procure saber a altura do seu pai e da sua mãe para estimar a sua altura.

2.7 Igualdade

Definição 2.7.1. *As **igualdades** são sentenças matemáticas que apresentam o sinal de igual (=). Em uma igualdade a expressão à esquerda do sinal de igual é chamada de **1º membro** e a expressão à direita, **2º membro**. Para que a igualdade seja **verdadeira**, o valor da expressão do 1º membro deve ser igual ao da expressão do 2º membro. Caso isso não ocorra, dizemos que a sentença é **falsa**.*

Exemplo 2.7.2. *Atividade com uso de uma balança de dois pratos*

As balanças são instrumentos utilizados para medir a massa de pessoas, objetos, mercadorias, entre outros. Entre os vários tipos de balança podemos citar a balança de dois pratos. Nesse tipo de balança o objeto cuja massa será medida é colocado em um dos pratos e as peças padrão com suas massas já estabelecidas são colocadas no outro prato, até que a balança fique em equilíbrio.

De acordo com a balança da Figura 2.10, podemos escrever a seguinte sentença $5+1+1=3+2+2$. Como nessa sentença temos um sinal de igual (=), dizemos que ela corresponde a uma **igualdade**. Nela, destacamos:

1º membro $= 5+1+1$ e 2º membro $= 3+2+2$

Figura 2.9: Balança de dois pratos - http://br.vazlon.com/balanca-de-pratos-t-roberval-concilio-kg- Visualizado em 17/11/16

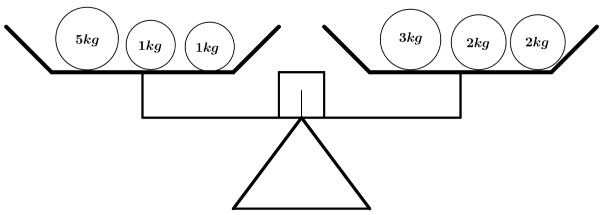


Figura 2.10: Balança de dois pratos

Capítulo 3

Equações do 1^o grau

3.1 Equações Algébricas

3.1.1 A origem das Equações

Milhares de anos atrás, as equações já eram bastante utilizadas. O acesso a essa maravilhosa ferramenta matemática era muito complexo, tendo em vista os poucos recursos matemáticos da época. Os matemáticos hindus usavam conceitos sobre equação para disputarem em concursos públicos de testes intelectuais onde um matemático formulava perguntas para que o outro desse a resposta e vice-versa.

As equações eram também utilizadas para demonstrarem truques de magias, resolução de quebra-cabeças e problemas de diversas naturezas que geralmente eram envoltos num misto de mistério e intelectualidade.

A primeira referência sobre equação que se tem registro data de aproximadamente 4000 anos pretéritos, o Papiro de Rhind. Este documento traz várias inscrições de problemas matemáticos, na maioria, solucionados através de equações. Como os egípcios não detinham o conhecimento algébrico, suas soluções equacionais eram complexas e, praticamente, inacessíveis.

Os matemáticos gregos chegavam à resolução das equações por meios geométricos. Estes, como eram de muito difícil compreensão, ficavam restritos somente às mãos de poucos indivíduos, verdadeiros donos de uma rara inteligência abstrata. Já na Arábia, teve origem uma aproximação do que hoje chamamos de x para indicar valores desconhecidos. Na língua árabe a palavra desconhecida é escrita *xay*. Numa tradução informal e econômica de letras, nasce o x. O matemático árabe de maior representatividade viveu no século IX, Al- Khowarizmi.

A inserção de símbolos matemáticos e o uso de letras para representarem valores desconhecidos nas equações foram concebidos por François Viète, matemático francês responsável, também, pelo estudo das propriedades das equações do tipo ax + b = 0, ou seja, equações de 1° grau na incógnita x. Atualmente as equações são conhecidas com o idioma da álgebra. Fonte [13]

3.1.2 Definição de Equações Algébricas

Definição 3.1.1. *Equações Algébricas são aquelas em que a incógnita (letras que representam números desconhecidos) aparece apenas submetida às chamadas operações algébricas: soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação inteira (embora a potenciação inteira seja um caso particular de multiplicação de n fatores iguais, ela está sendo deixada em destaque por questões de clareza) e radiciação.*

Por exemplo $ax + b = 0$, $ax^2 + bx + c = 0$, $mx^5 + \sqrt{7x^3} + k = 8$, $x^7 + x^3 + 20x = \sqrt[3]{x^4} + 3x^2 + 16$ e $x^{-2} = 4 + x^{-3}$, são todas equações algébricas.

De outro lado, $x^3 + 2x^2 + 2 = e^{-x}$, $\cos x + x^2 \cos 3x = 5$ e $\arctan x = \frac{\pi}{4}$, não são equações algébricas.

Quando uma equação algébrica é colocada sob a forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0$$

para n inteiro e positivo, diz-se que ela está em sua *Forma Canônica* e passa-se a chamá-la de Equação Polinomial. O respectivo polinômio é também conhecido como *função racional inteira da variável x.*

O maior expoente da incógnita em uma equação algébrica em sua forma canônica é denominado o *grau* da referida equação.

Assim, a equação $3x^5 + 2x^2 + x + 4 = 0$ é uma equação do 5° grau.

Equações como $mx^5 + \sqrt{7x^3} + k = 8$ e $x^{-2} = 4 + x^{-3}$ embora algébricas (porque a incógnita está submetida apenas a operações da Álgebra), não são polinomiais e para elas não faz sentido falar em grau. A primeira pertence à classe das irracionais (a incógnita aparece sob operação de radiciação) e a segunda à classe das fracionárias (a incógnita aparece em denominadores).

Resolver uma equação é determinar os valores numéricos possíveis para a igualdade ser verdadeira, ou seja, determinar a *solução* ou a *raiz* da equação.

Em uma equação, podemos destacar os seguintes elementos.

Na equação $2x + 3 = 13$, temos:
incógnita$= x$, *1º membro*$= 2x + 3$ e *2º membro*$= 13$

3.2 Equação do 1º grau

O fundamento das equações é alicerçado no próprio sentido etimológico da palavra equação. Esta palavra deriva de *equatione*, do latim, e significa equacionar, igualar. Baseado na definição etimológica da palavra equação entende-se que devemos procurar igualar o lado esquerdo ao lado direito da expressão. Quando isso acontece, diz-se que temos uma sentença verdadeira, uma igualdade, uma equação.

Definição 3.2.1. *Denomina-se* ***equação de 1º grau****, toda expressão do tipo* $ax+b = 0$*, onde* ***a*** e ***b*** *números reais, com* $a \neq 0$*, representa uma equação de 1º grau na incógnita* x*, onde* ***a*** e ***b*** *são os coeficientes da equação e* ***x*** *é a* ***incógnita****.*

O coeficiente a deve ser diferente de zero ou então não teríamos a caracterização de equação do 1º grau, uma vez que o termo ax também assumiria zero, neutralizando a nossa busca pelo elemento desconhecido. Além disso, não seria possível tornar a sentença verdadeira,caso $b \neq 0$, fundamento primordial da equação. A caracterização de 1º grau se dá pelo fato da incógnita estar elevada ao expoente 1.

Exemplo 3.2.2. *Observe a equação com o coeficiente* ***a*** *igual a zero:* ***0.x+b=0***

Como $0.x = 0$, teremos $0 + b = 0$ uma sentença verdadeira se, e somente se, $b = 0$. Caso se $b \neq 0$, não teríamos uma igualdade (uma equação).

3.2.1 Resolução de Equações de 1º grau com uma incógnita

Resolver uma equação é determinar os valores numéricos possíveis para a igualdade ser verdadeira, ou seja, determinar a *solução* ou a *raiz* da equação.

Para resolver uma equação, podemos utilizar os seguintes princípios:

1. *Princípio da Balança*:

   Para compreendermos melhor a ideia de igualdade, necessário é que conheçamos o princípio da balança. Este princípio consiste em tornar os dois lados da igualdade equilibrados, com o mesmo *peso*. Basta para isso que imaginemos uma balança de dois pratos em perfeito estado de equilíbrio, ou seja, mesmo peso em ambos os pratos. Dividamos a equação $ax + b = 0$ em duas partes. O lado esquerdo da igualdade chamaremos primeiro membro e o lado direito chamaremos segundo membro. O primeiro membro deverá sempre estar equilibrado em relação ao segundo. Quando adicionamos, subtraímos, multiplicamos ou dividimos um número qualquer no primeiro membro devemos também realizar a mesma operação no segundo membro.

2. *Principio Aditivo da igualdade*:

   Ao adicionarmos ou subtrairmos um número de ambos os membros de uma equação, a igualdade se mantém.

3. *Princípio Multiplicativo da igualdade*:

   Ao multiplicarmos ou dividirmos os dois membros de uma equação por um mesmo número, diferente de **zero**, essa igualdade também se mantém.

Exemplo 3.2.3. *Considere a balança de dois pratos, Figura3.1, que está em equilíbrio com* 2 *"bolas" de massas iguais.*

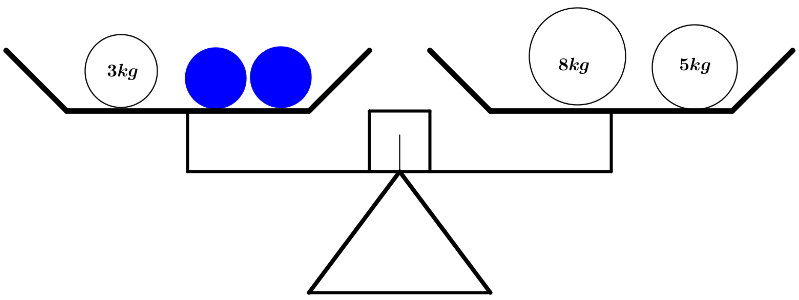


Figura 3.1: Balança de dois pratos

Considerando m a massa de cada bola, uma equação associada à balança é dada por: $3 + 2m = 13$.

Retiramos $3kg$ de cada prato, teremos:

$3 + 2m = 13 \Rightarrow 3 + 2m - 3 = 13 - 3 \Rightarrow 2m = 10$

Observamos que, na balança, ficaram de um lado 2 bolas e do outro $10kg$. Assim, para obtermos a massa de uma bola devemos dividir $10kg$ por 2 e então dividimos os dois membros da equação por 2. Teremos: $2m = 10 \Rightarrow \dfrac{2m}{2} = \dfrac{10}{2} \Rightarrow m = 5$

Assim temos que a massa de cada bola é igual a $5kg$

Exemplo 3.2.4. *Considere a balança de dois pratos, Figura3.2, que está em equilíbrio com 6 "bolas" de massas iguais.*

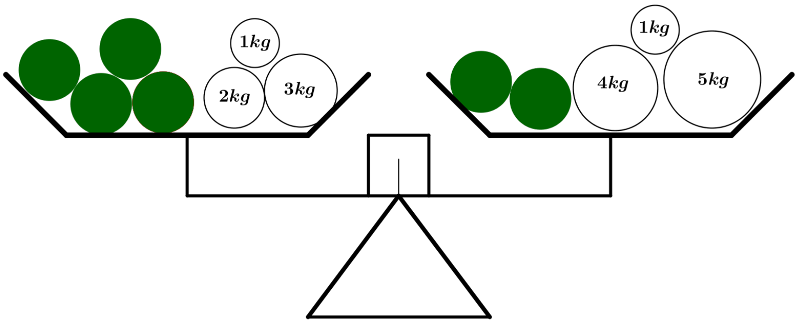


Figura 3.2: Balança de dois pratos

Considerando m a massa de cada bola, uma equação associada à balança é dada por: $4m + 6 = 2m + 10$.

Retiramos $6kg$ de cada prato $(3 + 2 + 1 = 6$ e $5 + 1 = 6)$ e subtraímos 6 unidades de cada membro da equação, teremos:

$4m + 6 = 2m + 10 \Rightarrow 4m + 6 - 6 = 2m + 10 - 6 \Rightarrow 4m = 2m + 4$

Retiramos duas bolas de cada prato da balança e subtraímos $2m$ de cada membro da equação, teremos:

$4m = 2m + 4 \Rightarrow 4m - 2m = 2m + 4 - 2m \Rightarrow 2m = 4$

Observamos que, na balança, ficaram de um lado 2 bolas e do outro $4kg$. Assim, para obtermos a massa de uma bola, devemos dividir $4kg$ por 2 e então dividimos os dois membros da equação por 2 e obtemos:

$$2m = 4 \Rightarrow \frac{2m}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow m = 2$$

Assim temos que a massa de cada bola é igual a $2kg$

3.3 Atividades Propostas - Equações de 1º grau

3.3.1 Atividade 01 E.1G.: Bingo de Equações do 1º grau

Expectativa de Aprendizagem:

Ao final desta atividade, espera-se que o educando consiga verificar se um número é uma raiz de uma equação do 1º grau dada.

Materiais Utilizados:

Cartelas confeccionados pelos próprios alunos ou o professor, utilizando cartolina ou outro tipo de papel, entre outros materiais utilizados nas atividades diárias.

Desenvolvimento:

Divide-se a turma em grupo de acordo com a quantidade de alunos no dia. Cada grupo confeccionará uma cartela (bingo) contendo vários números, escolhidos pelos próprios educandos e direcionados pelo professor de acordo com as soluções das equações (veja carta modelo abaixo). O educador irá ao quadro negro e escreverá uma equação de 1º grau. Informa a coluna, através das letras B,I,N,G ou O, que poderá estar a solução ou a raiz da equação. O educando verificará se o resultado da equação aparece na sua cartela, caso apareça, ele colocará um X em cima do número. Várias equações serão escritas pelo educador, até que algum educando complete sua cartela. O ganhador poderá ser aquele que fechar uma linha, coluna, diagonal ou toda a cartela.

Abaixo, segue um modelo de cartela e sugestões de equações para cada coluna. Preferimos colocar somente 3 linhas de valores possíveis para as raízes das equações sorteadas, poderia ser escolhido mais linhas.

Tabela 3.1: Modelo de Cartela do Bingo

MODELO				
B	I	N	G	O
-3	7	-11	15	22
2	8	14	-17	-24
1	9	12	-18	-25

De acordo com as sugestões de equações propostas para esta atividade, sugerimos que os alunos coloquem somente os números indicados abaixo, nas suas respectivas colunas:

NÚMEROS A SEREM ESCOLHIDOS POR COLUNAS	
B	$\{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x \leq 5\} - \{0\}$
I	$\{x \in \mathbb{N} \mid 6 \leq x \leq 10\}$ ou $\{x \in \mathbb{Z} \mid -10 \leq x \leq -6\}$
N	$\{x \in \mathbb{N} \mid 11 \leq x \leq 15\}$ ou $\{x \in \mathbb{Z} \mid -15 \leq x \leq -11\}$
G	$\{x \in \mathbb{N} \mid 16 \leq x \leq 20\}$ ou $\{x \in \mathbb{Z} \mid -20 \leq x \leq -16\}$
O	$\{x \in \mathbb{N} \mid 21 \leq x \leq 25\}$ ou $\{x \in \mathbb{Z} \mid -25 \leq x \leq -21\}$

Equações da Coluna B	
$a) x + 4 = 5 \quad S = \{1\}$	$b) 2x + 6 = 10 \quad S = \{2\}$
$c) x - 3 = 0 \quad S = \{3\}$	$d) 3x - 2 = 10 \quad S = \{4\}$
$e) x - 8 = -3 \quad S = \{5\}$	$f) 3x + 7 = 4 \quad S = \{-1\}$
$g) x + 8 = 6 \quad S = \{-2\}$	$h) 7x + 20 = -1 \quad S = \{-3\}$
$i) 5 - x = 9 \quad S = \{-4\}$	$j) 5x - 3 = -28 \quad S = \{-5\}$

Equações da Coluna I	
$a) 7 - x = 1 \quad S = \{6\}$	$b) 8 = x + 1 \quad S = \{7\}$
$c) 3x - 25 = -1 \quad S = \{8\}$	$d) x + 8 = 17 \quad S = \{9\}$
$e) 8 + x = 18 \quad S = \{10\}$	$f) 4x = -24 \quad S = \{-6\}$
$g) 2x = x - 7 \quad S = \{-7\}$	$h) 3x = 2x - 8 \quad S = \{-8\}$
$i) 2x = x - 9 \quad S = \{-9\}$	$j) 2x + 4 = -16 \quad S = \{-10\}$

Equações da Coluna N	
$a) 2x + 1 = 23 \quad S = \{11\}$	$b) 7 = \frac{x}{2} + 1 \quad S = \{12\}$
$c) 2(x + 1) = 28 \quad S = \{13\}$	$d) \frac{x}{2} + 2 = 9 \quad S = \{14\}$
$e) 2(x - 5) = 20 \quad S = \{15\}$	$f) 3x + 20 = -13 \quad S = \{-11\}$
$g) x - 10 = -22 \quad S = \{-12\}$	$h) 5 + x = -8 \quad S = \{-13\}$
$i) -27 = 2x + 1 \quad S = \{-14\}$	$j) 8 - x = 23 \quad S = \{-15\}$

Equações da Coluna G	
$a)2(x-10)=12 \quad S=\{16\}$	$b)x-4=13 \quad S=\{17\}$
$c)\frac{x}{2}-10=-1 \quad S=\{18\}$	$d)x-9=10 \quad S=\{19\}$
$e)2x-10=x+10 \quad S=\{20\}$	$f)5-x=21 \quad S=\{-16\}$
$g)10-x=27 \quad S=\{-17\}$	$h)3-x=21 \quad S=\{-18\}$
$i)x+8=-11 \quad S=\{-19\}$	$j)-11=x+9 \quad S=\{-20\}$

Equações da Coluna O	
$a)\frac{x}{3}+4=11 \quad S=\{21\}$	$b)2+x=24 \quad S=\{22\}$
$c)10-x=-13 \quad S=\{23\}$	$d)\frac{x}{8}-15=-12 \quad S=\{24\}$
$e)\frac{x}{5}-10=-5 \quad S=\{25\}$	$f)2x+15=-27 \quad S=\{-21\}$
$g)20+x=-2 \quad S=\{-22\}$	$h)10+x=-3 \quad S=\{-23\}$
$i)-9=15+x \quad S=\{-24\}$	$j)-28=x-3 \quad S=\{-25\}$

3.3.2 Atividade 02 E.1G.: Data de Aniversário

Expectativa de Aprendizagem:

Ao final desta atividade, espera-se que o aluno consiga escrever uma equação do 1º grau cuja solução é conhecida.

Desenvolvimento:

O professor divide a turma em 5 colunas de carteiras, tendo cada coluna igual número de participantes. No quadro negro, fará cinco divisões, cada uma corresponde a uma coluna de carteiras. Em cada divisão, haverá um giz para anotações da equipe. O jogo consiste em o professor pedir para uma fileira de educandos, pode ser feito sorteio, por exemplo, os números 4 de cada coluna, escrever uma equação do 1º grau cuja solução será a dia do seu aniversário. Antes o professor deverá ter em mãos a lista com nomes e datas de aniversários dos educandos. Todos os educandos número 4 de cada coluna irão ao quadro negro. O primeiro educando a sentar-se marcará 5 pontos para sua equipe, o segundo 4 pontos e o terceiro 3 pontos. O professor chamará os próximos números até finalizar. A coluna vencedora será a que fizer o maior número de pontos. Os educandos que não escreverem corretamente a equação perderão um ponto de sua equipe.

3.3.3 Atividade 03 E.1G.: Batata Quente

Expectativa de Aprendizagem:

Ao final desta atividade, espera-se que o aluno consiga resolver uma equação do 1º grau no conjunto dos números inteiros

Materiais utilizados:

Papel cartão, canetinhas e lápis de cor e bola de borracha.

Desenvolvimento:

Educandos sentados em círculos, um deles fica de fora do círculo e de costas para os colegas, dizendo a frase: "Batata quente, quente, quente,..., queimou". Enquanto isso, os que estão no círculo, passarão uma bola de mão em mão, quando ouvirem a palavra queimou, quem estiver com a bola vai até o centro do círculo e retira um cartão contendo uma equação do 1º grau, que deverá ser resolvida por ele. Caso ele não consiga resolver sairá do jogo. Vence o educando que ficar por último. Todos os cartões serão confeccionados pelos próprios alunos.

3.3.4 Atividade 04 E.1G.: Quebra cabeça

Expectativa de Aprendizagem:

Ao final desta atividade, espera-se que o aluno consiga resolver uma equação do 1º grau no conjunto dos números reais.

Materiais utilizados:

Papel para confecção das peças do quebra cabeça, canetinhas, lápis de cor, régua, tesoura, entre outros.

Desenvolvimento:

O educador dividirá a turma em vários grupos com igual número de participantes. Distribuirá, para cada grupo, um quebra cabeça, veja modelo abaixo, contendo equações de 1º grau. Ao sinal do professor, todas as equipes inciam a resolução das equações contidas nas peças. Após um período de tempo pré-determinado os educandos poderão encaixar as peças do quebra cabeça. Vence a equipe que primeiro montar. A seguir apresento algumas peças do quebra cabeça.
Fonte [12]

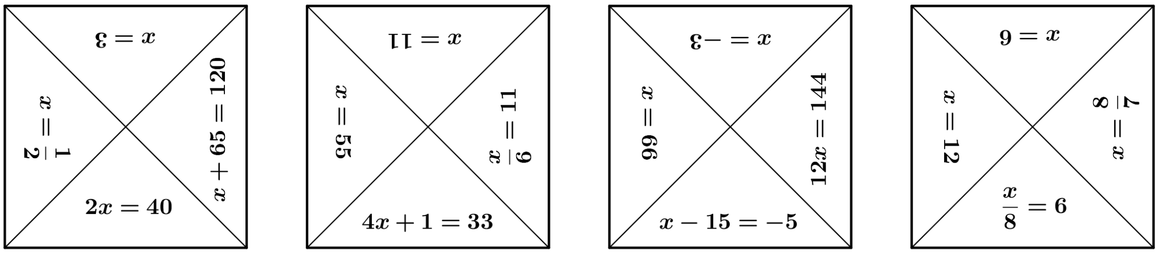


Figura 3.3: Atividade 04 E.1G. - Quebra cabeça

3.3.5 Atividade 05 E.1G.: Balança de dois pratos

Expectativa de Aprendizagem:

Ao final desta atividade, espera-se que o aluno consiga escrever e resolver uma equação do 1º grau no conjunto dos números inteiros, utilizando uma balança de dois pratos.

Materiais utilizados:

Tampinhas de refrigerantes, pratos de papelão, papel cartão e os materiais disponíveis nos estojos: lápis de cor, canetinhas, etc.

Desenvolvimento:

O educador colocará várias fichas, contendo equações de 1º grau, em uma caixa no centro da sala. Organiza-se a turma em 6 grupos com número de elementos, se possível, iguais em cada um. Cada grupo será numerado de 1 a 6. O educador entregará dois pratos de papelão ou isopor e um punhado de tampinhas de refrigerante para cada grupo. Um educando fará o sorteio, utilizando um dado, do grupo que irá resolver a 1ª equação. O grupo sorteado terá que pegar uma ficha e resolver a equação utilizando uma balança de dois pratos em equilíbrio. Veja modelo. Caso ele resolva corretamente, o grupo marcará 5 pontos, caso contrário cada grupo ganhará 1 ponto. Sorteia-se novamente e segue. Vence a equipe que marcar mais pontos. A seguir temos algumas sugestões de balanças para esta atividade e uma imagem desta atividade aplicada na turma G1(7º ano Ciclo 3) da E.M. Pedro Gomes de Menezes.

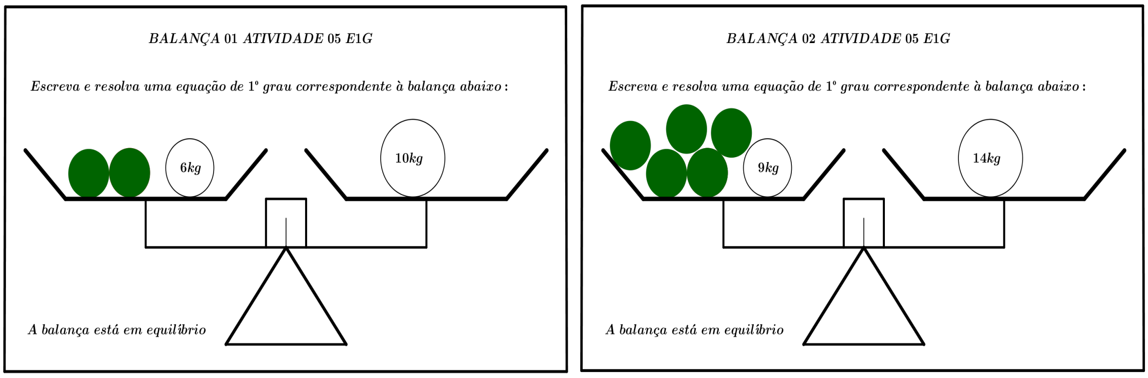


Figura 3.4: Atividade 05 E.1G. - balança de 2 Pratos

Figura 3.5: Atividade 05 E.1G. - E.M.P.G.M TG1-7ºANO - Nov/2016

3.3.6 Atividade 06 E.1G.: Dominó de Equações do 1º Grau

Expectativa de Aprendizagem:

Ao final desta atividade, espera-se que o educando se familiarize mais no processo de resolução de equações de 1º grau.

Materiais utilizados:

Materiais para confecção das peças do dominó tais como: papel cartão, canetinhas, régua, tesoura, etc.

Desenvolvimento:

A turma será dividia em 4 grupos, cada grupo receberá 7 peças, a pedra de saída será a $z = 10 * z = 10$, o próximo grupo a jogar será imediatamente o grupo da direita, caso não tenha a pedra, passará a vez e assim sucessivamente. Será vencedor o grupo que primeiro conseguir encaixar todas as suas peças, caso não haja opção de jogada para nenhum dos grupos, o vencedor será aquele que tiver a menor quantidade de peças nas mãos. O educador faz as intervenções necessárias durante o andamento da atividade. Segue alguns modelos de peças desta atividade.

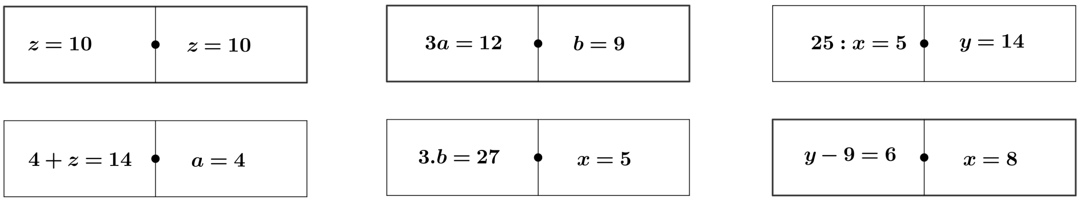


Figura 3.6: Atividade 06 - Equações do 1º grau - Dominó de Equações

Capítulo 4

Equações do 2º grau

4.1 Introdução

Após a conquista da Grécia por Roma, a matemática grega teve uma queda, a escola de Alexandria continuou a existir por mais alguns séculos mas sua produção decaiu, neste período, a matemática começou a ser vista em outros povos: os árabes e os hindus. Harum Al-Raschid (763-809), um califa, palavra que significava sucessor (de Maomé), do Egito, reconheceu a importância do saber e das artes, se cercou de sábios e artistas, ordenou que os Elementos (tratado matemático e geométrico constituído de 13 livros escrito pelo matemático grego Euclides em Alexandria por volta de 300 a.C.) fossem traduzido para o árabe. Fonte que a Europa recorreu para reencontrar os perdidos ensinamentos de Euclides. Seu filho, Al-Mamun, reinou entre 813 e 833, continuou a obra do seu pai e determinou a pesquisa e a tradução em língua árabe de todos os antigos manuscritos gregos que pudessem ser encontrados, criando em Bagdá uma escola científica.

Al-Mamun convidou muitos dos melhores cientistas do mundo para sua corte, entre eles o famoso matemático Abu-Abdullah Muhammed Ibn-Musa Al-Khawarizmi de quem herdamos a palavra *algarismo*. Al-Mamun solicitou que Al-Khawarizmi produzisse uma obra popular sobre as equações, o livro produzido teve como título Al-Kitab Al-jabr wa'l Muqabalah, traduzido, aproximadamente, por *O livro da Restauração e do Balanceamento*, assim que nasceu a *Álgebra*, corruptela do seu nome.

Al-Khawarizmi, procurando simplificar a simbologia, trouxe da Índia o sistema de numeração decimal, cujos elementos fundamentais são os algarismos de 0 a 9 e seu valor em função da posição ocupada do número. A obra de Al-Khawarizmi é considerada a que teve maior influência no Mundo da Matemática durante a Idade Média

Paralelamente aos árabes, os matemáticos hindus avançavam em pesquisas e Bháskara foi o que mais se destacou por estar ligado à fórmula geral da solução das equações do 2º grau e por haver imortalizado o nome de sua filha *Lilavati*, "a linda menina de olhos fascinantes", em um livro de Álgebra e Geometria dedicado a ela. Apresentou muitos problemas que são resolvidos por equações do 2º grau. Fonte [7]

4.2 Definição de Equação do 2º grau

Definição 4.2.1. *Toda equação na incógnita* $\boldsymbol{x}$*, que pode ser escrita na forma* $ax^2 + bx + c = 0$*, em que* a, b *e* c *são números reais e* $a \neq 0$*, é chamada de* ***equação do 2º grau****.*

A igualdade $ax^2 + bx + c = 0$ é chamada de *forma geral, reduzida ou canônica* de uma equação do 2º grau. As letras a, b e c são chamadas de *coeficientes*, onde a é o coeficiente de x^2, b é o coeficiente de x e o c é o coeficiente independente ou termo independente da incógnita x.

Na equação $ax^2 + bx + c = 0$, quando, além de $a \neq 0$, temos $b \neq 0$ e $c \neq 0$, dizemos que a equação do 2º grau é *completa*. Se pelos menos um dos coeficientes b ou c ou os dois forem nulos, dizemos que a equação do 2º grau é *incompleta*.

Exemplo 4.2.2. *As equações* $3x^2+x+8 = 0$ *onde* $a = 3, b = 1$ *e* $c = 8$ *e* $-y^2+3y-2 = 0$ *onde* $a = -1, b = 3$ *e* $c = -2$ *são equações do 2º grau completas, enquanto que* $5x^2 = 0$ *onde* $a = 5, b = 0$ *e* $c = 0$*,* $3x^2 - 2x = 0$ *onde* $a = 3, b = -2$ *e* $c = 0$ *e* $-4x^2 + 10 = 0$ *onde* $a = -4, b = 0$ *e* $c = 10$ *são equações do 2º grau incompletas.*

4.3 Raízes ou soluções de uma equação do 2º grau

Resolver uma equação é determinar os valores que as incógnitas podem assumir, de modo que a igualdade seja satisfeita.

Definição 4.3.1. ***Raízes ou solução*** *de uma equação com uma incógnita é o valor que, atribuído a incógnita, torna a sentença matemática verdadeira.*

Exemplo 4.3.2. *As raízes ou solução da equação do 2º grau* $x^2 - 5x + 6 = 0$ *são* 2 *e* 3*, pois esses valores são os números que tornam a sentença verdadeira.*

Observe:

Substituindo x por 2 na equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, teremos:
$2^2 - 5.2 + 6 = 0 \Rightarrow 4 - 10 + 6 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ (Sentença Verdadeira)
Logo, $x = 2$ é solução da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$
Substituindo x por 3 na equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, teremos:
$3^2 - 5.3 + 6 = 0 \Rightarrow 9 - 15 + 6 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ (Sentença Verdadeira)
Logo, $x = 3$ é solução da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$

Exemplo 4.3.3. *As raízes ou solução da equação do 2º grau* $t^2 + 2t - 15 = 0$ *na incógnita* t *são* -5 *e* 3*, pois esses valores são os números que tornam a sentença verdadeira.*

Observe:

Substituindo t por -5 na equação $t^2 + 2t - 15 = 0$, teremos:
$(-5)^2 + 2.(-5) - 15 = 0 \Rightarrow 25 - 10 - 15 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ (Sentença Verdadeira)
Logo, $t = -5$ é solução da equação $t^2 + 2t - 15 = 0$
Substituindo t por 3 na equação $t^2 + 2t - 15 = 0$, teremos:
$3^2 + 2.3 - 15 = 0 \Rightarrow 9 + 6 - 15 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ (Sentença verdadeira)
Logo, $t = 3$ é solução da equação $t^2 + 2t - 15 = 0$
Substituindo t por 2, por exemplo, na equação $t^2 + 2t - 15 = 0$, teremos:
$2^2 + 2.2 - 15 = 0 \Rightarrow 4 + 4 - 15 = -7 \Rightarrow -7 \neq 0$ (Sentença falsa)
Logo, $t = 2$ não é solução da equação $t^2 + 2t - 15 = 0$

4.4 Resolução de Equações do 2º grau Incompletas

4.4.1 Equações do tipo $ax^2 = 0$, com $a \neq 0$

Seja $ax^2 = 0$, com $a \neq 0$ uma equação do 2º grau incompleta. Dividindo por a ambos os membros da equação temos:

$$\frac{ax^2}{a} = \frac{0}{a} \Rightarrow x.x = 0 \Rightarrow x = 0, \forall a \neq 0$$

Exemplo 4.4.1. *Resolver a equação do 2º grau* $5x^2 = 0$

Dividindo os termos da equação por 5, obtemos:

$$\frac{5x^2}{5} = \frac{0}{5} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x.x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Portanto a equação $5x^2 = 0$ possui duas raízes reais e iguais a 0.

Exemplo 4.4.2. *Resolver a equação do 2º grau* $-7x^2 = 0$

Dividindo os termos da equação por -7, obtemos:

$$\frac{-7x^2}{-7} = \frac{0}{-7} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x.x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Portanto a equação $-7x^2 = 0$ possui duas raízes reais e iguais a 0.

OBS: De modo geral, as equações do 2º grau incompletas, do tipo $ax^2 = 0$ com $a \neq 0$, possuem duas raízes reais e iguais a zero.

4.4.2 Equações do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$

Seja $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$ uma equação do 2º grau incompleta.
Subtraindo c a ambos os membros da equação, obtemos:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 + c - c = 0 - c \Rightarrow ax^2 = -c$$

Dividindo os termos da equação por a, $a \neq 0$, encontraremos:

$$ax^2 = -c \Rightarrow \frac{ax^2}{a} = \frac{-c}{a} \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a}$$

Se $-\frac{c}{a} > 0$, poderemos extrair a raiz quadrada em ambos os membros da equação e teremos como solução:

$$x = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad -\frac{c}{a} > 0$$

Faremos uma análise deste resultado, através de alguns exemplos

Exemplo 4.4.3. *Resolver a equação do 2º grau* $-2x^2+32=0$ *no conjunto dos números reais.*

Neste caso temos $a=-2<0$ e $c=+32>0$
Adicionando -32 a ambos os membros da equação, obtemos:
$-2x^2+32=0 \Rightarrow -2x^2+32-32=0-32 \Rightarrow -2x^2=-32$
Dividindo por -2 os termos da equação, teremos:

$$\frac{-2x^2}{-2}=\frac{-32}{-2} \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x.x=16 \Rightarrow x=4 \text{ } ou \text{ } x=-4$$

Portanto a equação $-2x^2+32=0$ possui duas raízes reais e opostas, dadas por $x=4$ e $x=-4$

Exemplo 4.4.4. *Resolver a equação do 2º grau* $-3x^2-2=10$ *no conjunto dos números reais.*

Neste caso temos $a=-3<0$ e $c=-2<0$
Somando 2 a ambos os membros da equação obtemos
$-3x^2-2=10 \Rightarrow -3x^2-2+2=10+2 \Rightarrow -3x^2=12$
Dividindo por -3 ambos os membros da equação, teremos:

$$-3x^2=12 \Rightarrow \frac{-3x^2}{-3}=\frac{12}{-3} \Rightarrow x^2=-4 \Rightarrow x.x=-4$$

Não existe nenhum número real que multiplicado por ele mesmo seja igual a -4. Portanto a equação $-3x^2-2=10$ não possui solução no conjunto dos números reais.

Exemplo 4.4.5. *Resolver a equação do 2º grau* $2x^2+50=0$ *no conjunto dos números reais.*

Neste caso temos $a=2>0$ e $c=50>0$
Adicionando -50 a ambos os membros da equação, obtemos:
$2x^2+50=0 \Rightarrow 2x^2+50-50=0-50 \Rightarrow 2x^2=-50$
Dividindo por 2 ambos os membros da equação, teremos:
$2x^2=-50 \Rightarrow \dfrac{2x^2}{2}=\dfrac{-50}{2} \Rightarrow x^2=-25 \Rightarrow x.x=-25.$

Não existe nenhum número real que multiplicado por ele mesmo seja igual a -25. Portanto a equação $2x^2+50=0$ não possui solução no conjunto dos números reais.

Exemplo 4.4.6. *Resolver a equação do 2º grau* $3x^2 - 27 = 0$ *no conjunto dos números reais.*

Somando 27 a ambos os membros da equação, teremos:
$3x^2 - 27 = 10 \Rightarrow 3x^2 - 27 + 27 = 0 + 27 \Rightarrow 3x^2 = 27$
Dividindo por 3 ambos os membros da equação, teremos:

$$3x^2 = 12 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{27}{3} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x.x = 9 \Rightarrow x = 3 \text{ } ou \text{ } x = -3$$

Portanto a equação $3x^2 - 27 = 0$ possui duas raízes reais e opostas, dadas por $x = 3$ e $x = -3$

Em resumo teremos:

1. Se $a < 0$ *e* $c > 0$ a equação terá raízes reais e opostas.

2. Se $a < 0$ *e* $c < 0$ a equação não terá raízes reais.

3. Se $a > 0$ *e* $c > 0$ a equação não terá raízes reais.

4. Se $a > 0$ *e* $c < 0$ a equação terá raízes reais e opostas.

4.4.3 Equação do tipo $ax^2 + bx = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$

Seja $ax^2 + bx = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$ uma equação do 2º grau incompleta.

Colocando o fator comum, x, em evidência, teremos:

$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x.(ax + b) = 0$

Como o produto de dois fatores deve ser igual a zero, ao menos um dos fatores necessariamente precisa ser igual a zero, ou seja: $x = 0$ ou $ax + b = 0$

Subtraindo b a ambos os membros da 2ª equação, teremos:

$ax + b = 0 \Rightarrow ax + b - b = 0 - b \Rightarrow ax = -b$

Dividindo por a ambos os membros da equação, teremos:

$$ax = -b \Rightarrow \frac{ax}{a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Portanto, a solução da equação $ax^2 + bx = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$ é igual a $x = 0$ e $x = -\frac{b}{a}$. Uma raiz nula.

Exemplo 4.4.7. *Resolver a equação do 2º grau* $\frac{x^2}{12} - \frac{x}{4} = 0$ *no conjunto dos números reais.*

Multiplicando por 12, o Mínimo Múltiplo Comum entre 12 e 4, ambos os membros da equação e aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, teremos:

$$\frac{x^2}{12} - \frac{x}{4} = 0 \Rightarrow 12.(\frac{x^2}{12} - \frac{x}{4}) = 12.0 \Rightarrow \frac{12x^2}{12} - \frac{12x}{4} = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$

Colocando o fator comum, x, em evidência, teremos:
$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x.(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x - 3 = 0$
Somando 3 a ambos os membros da 2ª equação, teremos:
$x - 3 = 0 \Rightarrow x - 3 + 3 = 0 + 3 \Rightarrow x = 3$
Portanto, a solução ou raízes da equação $\frac{x^2}{12} - \frac{x}{4} = 0$ são: 0 e 3

Exemplo 4.4.8. *Resolver a equação do 2º grau* $2x^2 + 6x = x$ *no conjunto dos números reais.*

Subtraindo x a ambos os membros da equação, teremos:
$2x^2 + 6x = x \Rightarrow 2x^2 + 6x - x = x - x \Rightarrow 2x^2 + 5x = 0$
Colocando o fator comum, x, em evidência, teremos:
$2x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x(2x+5) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $2x + 5 = 0$
Subtraindo 5 a ambos os membros da 2ª equação, teremos:
$2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x + 5 - 5 = 0 - 5 \Rightarrow 2x = -5$
Dividindo por 2 ambos os membros da equação, teremos:

$$2x = -5 \Rightarrow \frac{2x}{2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

Portanto, as raízes ou solução da equação $2x^2 + 6x = x$ são: 0 e $-\frac{5}{2}$

OBS: De modo geral, as equações do tipo $ax^2 + bx = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, possuem duas raízes reais e diferentes, das quais uma é igual a zero.

4.5 Resolução de Equações do 2º grau Completas

Nesta seção iremos abordar a resolução das Equações do 2º grau completas, através dos seguintes métodos:

1. Fatoração
2. Completar Quadrados
3. Fórmula Resolutiva
4. Soma e Produto das raízes.

4.5.1 Fatoração

Resolver uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c números reais não nulos, é necessário que $ax^2 + bx + c$ seja um trinômio quadrado perfeito (TQP).

Antes de começar a desenvolver o método da fatoração, precisamos lembrar um pouco sobre quadrado perfeito, trinômios e alguns produtos notáveis.

Um número será quadrado perfeito quando respeitar a regra de formação $n^2 = a$, onde n é qualquer número inteiro positivo e a é o número quadrado perfeito. Por exemplo, o número 25 é quadrado perfeito, pois $5^2 = 25$

Um trinômio quadrado perfeito é uma expressão algébrica composta de três monômios que pode ser escrita por meio do quadrado da soma ou do quadrado da diferença de dois termos, ou seja:

$$a^2 + 2.a.b + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2.a.b + b^2 = (a - b)^2$$

Abaixo segue uma pequena demonstração:

Observe o quadrado abaixo com lado medindo $a + b$

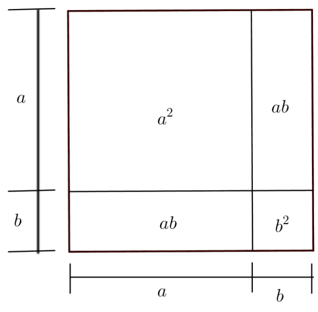


Figura 4.1: Quadrado da soma de dois termos

Sabemos que a área desse quadrado é dada por:

$A_1 = (a + b)(a + b)$ (Quadrado perfeito) ou

$A_2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (Trinômio quadrado perfeito)

As duas áreas representam a área do mesmo quadrado, portanto:

$A_1 = A_2 \Rightarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Portanto o trinômio $a^2 + 2ab + b^2$ tem quadrado perfeito $(a + b)^2$.

Analogamente podemos afirmar que $a^2 - 2.a.b + b^2 = (a - b)^2$

Observe o quadrado abaixo com lado medindo a

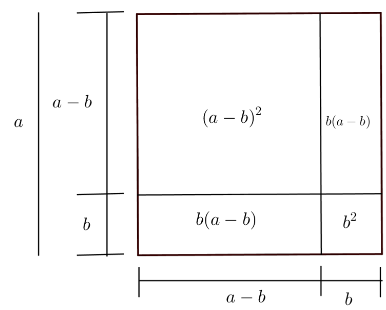


Figura 4.2: Quadrado da diferença de dois termos

A área desse quadrado é dada por:

$A_1 = a.a = a^2$ (Quadrado perfeito) ou

$A_2 = (a - b)^2 + 2(a - b).b + b^2 = (a - b)^2 + 2ab - 2b^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab - b^2$ (Trinômio quadrado perfeito)

As duas áreas representam a área do mesmo quadrado, portanto:

$A_1 = A_2 \Rightarrow a^2 = (a - b)^2 + 2ab - b^2$

Somando b^2 em ambos os membros da equação, teremos:

$$a^2 = (a-b)^2 + 2ab - b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab - b^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$$

Subtraindo $2ab$ em ambos os membros da equação, teremos:

$$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab - 2ab \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Portanto o trinômio $a^2 - 2ab + b^2$ tem quadrado perfeito $(a - b)^2$.

Para verificar se um trinômio é quadrado perfeito, basta verificar se dois termos do trinômio é quadrado e o outro termo deve ser o dobro do produto das raízes quadradas dos outros dois termos.

Exemplo 4.5.1. *Resolver a equação* $x^2+8x+16=25$*, no conjunto dos números reais, pelo método da fatoração.*

Primeiro deveremos verificar se o trinômio $x^2+8x+16$ é quadrado perfeito.

De fato: $\sqrt{x^2}=x$, $\sqrt{16}=4$ e $8.x=2.x.4$

Logo podemos escrever o primeiro membro da equação na forma:

$x^2+8x+16=(x+4).(x+4)$ ou $x^2+8x+16=(x+4)^2$

E a equação ficará na forma:

$x^2+8x+16=25 \Rightarrow (x+4)(x+4)=25$ ou $(x+4)^2=25$

Como existem dois números, -5 *ou* $+5$ cujo quadrado é igual a 25, teremos:

$x+4=+5$ ou $x+4=-5$

Se $x+4=5$, teremos:

Subtraindo 4 em ambos os membros da equação, obtemos:

$x+4=+5 \Rightarrow x+4-4=+5-4 \Rightarrow x=1$

E se $x+4=-5$, teremos

Subtraindo 4 em ambos os membros da equação, obtemos:

$x+4=-5 \Rightarrow x+4-4=-5-4 \Rightarrow x=-9$

Portanto, as raízes da equação $x^2+8x+16=25$ são -9 e 1.

Exemplo 4.5.2. *Resolver a equação* $9x^2-30x+25=0$*, no conjunto dos números reais, pelo método da fatoração.*

Vamos inicialmente verificar se o trinômio $9x^2-30x+25$ é quadrado perfeito.

De fato: $\sqrt{9x^2}=3x$, $\sqrt{25}=5$ e $30x=2.3x.5$

Logo podemos escrever o primeiro membro da equação na forma:

$9x^2-30x+25=(3x-5)(3x-5)$ ou $9x^2-30x+25=(3x-5)^2$

E a equação ficará na forma:

$9x^2-30x+25=0 \Rightarrow (3x-5)(3x-5)=0$ ou $(3x-5)^2=0$

Na última equação, podemos afirmar que o único número que elevado ao quadrado resulta *zero*, é o próprio *zero*. Logo teremos $3x-5=0$

Somando 5 a ambos os membros da equação, teremos:

$3x-5=0 \Rightarrow 3x-5+5=0+5 \Rightarrow 3x=5$

Dividindo os termos da equação por 3 obtemos:

$$3x=5 \Rightarrow \frac{3x}{3}=\frac{5}{3} \Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

Portanto, a raiz da equação $9x^2-30x+25=0$ é igual a $\dfrac{5}{3}$

4.5.2 Completar Quadrados

Este método aplica-se em equações do 2º grau em que o 1º membro não seja um trinômio quadrado perfeito. Adiciona-se um número conveniente aos dois membros da equação para obter uma equação equivalente, em que o 1º membro seja um quadrado perfeito, em seguida fatora o primeiro membro da equação e obtém-se a solução.

Exemplo 4.5.3. *Resolver a equação* $x^2 + 6x + 5 = 0$ *no conjunto dos números reais, utilizando o método de completar quadrados.*

Observe que o 1º membro da equação, $x^2 + 6x + 5$ não é um trinômio quadrado perfeito. Vamos completar quadrados da seguinte maneira:

Isolando o termo independente no 2º membro da equação, teremos:

Subtraindo 5 nos dois membros da equação:

$x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 - 5 = 0 - 5 \Rightarrow x^2 + 6x = -5$

Geometricamente, a expressão $x^2 + 6x$ pode ser representada através da soma de três áreas, uma quadrada (x^2) e duas retangulares ($3x$) observe a figura abaixo:

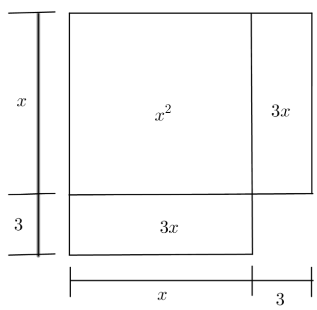


Figura 4.3: Exemplo 4.5.3

Percebe-se, facilmente, que para completar o quadrado maior, de lado $x + 3$ temos que acrescentar um quadrado com 3 unidades de lado. Veja as figuras:

Assim, para obtermos um trinômio quadrado perfeito no 1º membro da equação $x^2 + 6x = -5$, adicionamos 3^2 a ambos os membros da equação, teremos:

$x^2 + 6x = -5 \Rightarrow x^2 + 6x + 3^2 = -5 + 3^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 4$

De acordo com a figura 4.4, podemos afirmar que a área (A) do quadrado de lado medindo $x + 3$, pode ser representada por:

$A = (x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2$ ou $A = x^2 + 3x + 3x + 3^2$

Logo $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ e portanto:

$x^2 + 6x + 9 = 4 \Rightarrow (x + 3)^2 = 4$

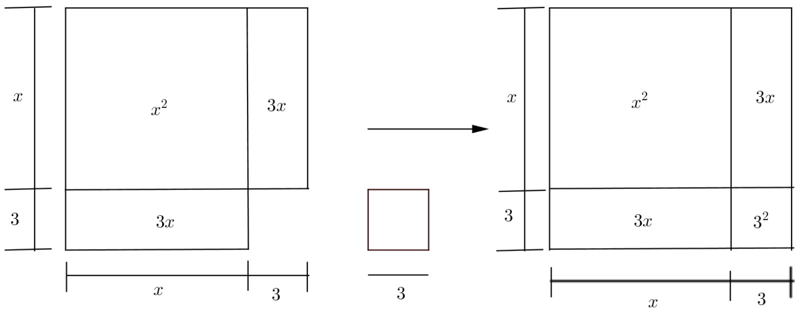


Figura 4.4: Exemplo 4.5.3

Como existem dois números, $+2$ *ou* -2 cujo quadrado é 4, teremos:

$(x+3)^2 = 4 \Rightarrow x+3 = +2$

Subtraindo 3 a ambos os membros, teremos:

$x+3 = +2 \Rightarrow x+3-3 = +2-3 \Rightarrow x = -1$ ou $(x+3)^2 = 4 \Rightarrow x+3 = -2$

Subtraindo 3 a ambos os membros, teremos:

$x+3 = -2 \Rightarrow x+3-3 = -2-3 \Rightarrow x = -5$

Portanto, as raízes da equação $x^2+6x+5=0$ são -5 e -1

Exemplo 4.5.4. *Resolver a equação do 2º grau* $x^2+4x-12=0$ *no conjunto dos números reais utilizando o método de completar quadrados.*

Observe que o 1º membro da equação, $x^2+4x-12$ não é um trinômio quadrado perfeito, pois $4.x \neq 2.\sqrt{x^2}.\sqrt{12}$.

Vamos completar quadrados da seguinte maneira:

Somando 12 nos dois membros da equação:

$$x^2+4x-12=0 \Rightarrow x^2+4x-12+12=0+12 \Rightarrow x^2+4x=12$$

Geometricamente, a expressão x^2+4x pode ser representada através da soma de três áreas, uma quadrada x^2 e duas retangulares $2x$, observe a figura abaixo:

Percebe-se, facilmente, que para completar o quadrado maior, de lado $x+2$ temos que acrescentar um quadrado com 2 unidades de lado. Veja na Figura 4.6.

Assim, para obtermos um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro da equação $x^2+4x=12$, devemos adicionar 2^2 a ambos os membros da equação, teremos:

Exemplo 4.5.5. $x^2+4x=+12 \Rightarrow x^2+4x+2^2=+12+2^2 \Rightarrow x^2+4x+4=16$

De acordo com a Figura 4.6, podemos afirmar que a área (A) do quadrado de lado medindo $x+2$ pode ser representada por:

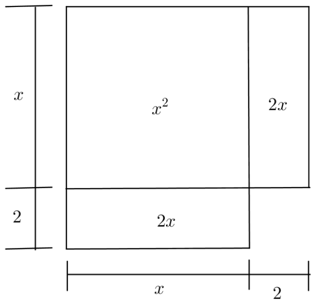


Figura 4.5: Exemplo 4.5.4

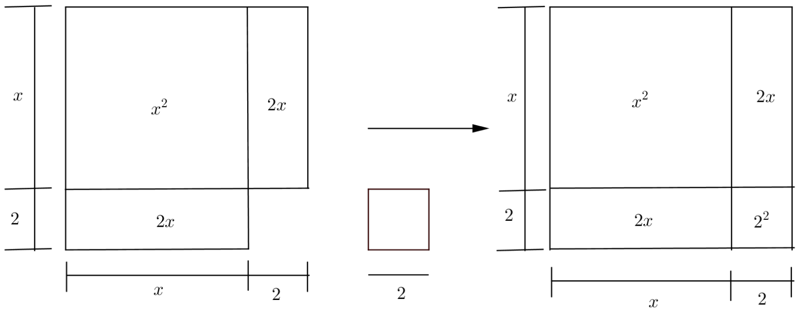


Figura 4.6: Exemplo 4.5.4

Exemplo 4.5.6. $A = (x+2)(x+2) = (x+2)^2$ *ou* $A = x^2 + 2x + 2x + 2^2 = x^2 + 4x + 4$

Logo $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ e portanto $x^2 + 4x + 4 = 16 \Rightarrow (x+2)^2 = 16$

Como existem dois números, -4 *ou* $+4$, cujo quadrado é 16, teremos:

$x + 2 = +4$ ou $x + 2 = -4$. Se $x + 2 = 4$, teremos: subtraindo 2 a ambos os membros, obtemos:

$x + 2 = +4 \Rightarrow x + 2 - 2 = +4 - 2 \Rightarrow x = 2$ e se $x + 2 = -4$, teremos:

subtraindo 2 a ambos os membros, obtemos:

$x + 2 = -4 \Rightarrow x + 2 - 2 = -4 - 2 \Rightarrow x = -6$

Portanto, as raízes da equação $x^2 + 4x - 12 = 0$ são -6 e 2

4.5.3 A Fórmula Resolutiva

A fórmula geral para a solução da equação do 2º grau fundamentou-se na ideia de buscar uma forma de reduzir o grau da equação do 2º grau para o 1º grau, através da extração de raízes quadradas. É uma generalização do método de completar quadrados. Com ela pode-se determinar as raízes da equação a partir de seus coeficientes.

No Brasil, essa fórmula passou a ser conhecida como **Fórmula de Bhaskara** por volta de 1960, em homenagem a um dos mais importantes matemáticos do século XII, o indiano Bhaskara (c.1114-1185), que estudou a resolução das equações do 2º grau.

Um fato curioso, a fórmula de Bháskara não foi descoberta por Bháskara, no século 12 os matemáticos Sridhara, Bramagupta e Bháskara forneceram importantes informações sobre as equaçõs do 2º grau. Sridhara foi o primeiro a estabelecer uma fórmula matemática para a resolução das equações biquadradas.

O francês Francois Viète introduziu os símbolos das equações com letras no método resolutivo das equações do 2º grau. Viète é o responsável pela modernização da álgebra. Seus trabalhos foram desenvolvidos por outro francês, René Descartes, criador do plano cartesiano.

Fonte [7]

Considere a equação do 2º grau $x^2 + bx + c = 0$ com coeficientes a,b e c reais, com $a \neq 0$, como o objetivo é obter um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro da equação, temos:

Dividindo todos os termos da equação por a, $a \neq 0$:

$\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$, $a \neq 0$

, subtraindo $\frac{c}{a}$ em ambos os membros da equação:

Exemplo 4.5.7. $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = 0 - \frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

O 1º membro dessa equação pode ser escrito na forma $x^2 + \frac{b}{a}x = x^2 + 2.\frac{b}{2a}x$

Geometricamente, a expressão $x^2 + 2.\frac{b}{2a}x$ representa a área de um quadrado de lado medindo x mais a área de dois retângulos de lados medindo $\frac{b}{2a}$ e x. (Figura4.7)

Para completar o quadrado maior, temos que acrescentar um quadrado menor com $\frac{b}{2a}$ unidades de lado. (Figura 4.8)

Assim, para obtermos um trinômio quadrado perfeito no 1º membro da equação, devemos adicionar $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a ambos os membros da equação:

$x^2 + 2.\frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right))^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

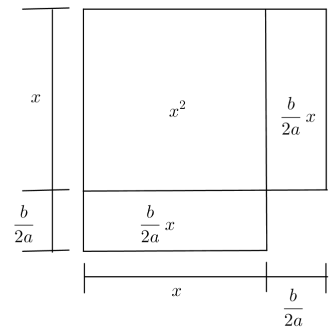


Figura 4.7: Fórmula Resolutiva 1

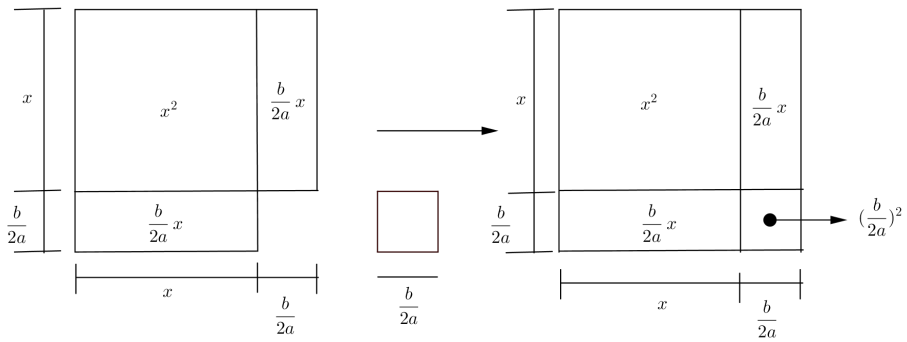


Figura 4.8: Fórmula Resolutiva 2

Fatorando o trinômio quadrado perfeito resultante no 1º membro, obtemos:

$$x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right))^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right))^2 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Se $b^2 - 4ac$ for maior que zero ou igual a zero, podemos extrair a raiz quadrada em ambos os membros da igualdade.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow \sqrt{(x + \frac{b}{2a})^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\textit{Fórmula Resolutiva})$$

Na fórmula resolutiva, a expressão $b^2 - 4ac$ é denominada de *discriminante*, geralmente é substituído pela letra grega Δ (delta). Assim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac$$

4.6 Atividades Propostas - Equações do 2º grau

4.6.1 Atividade 01 E.2G. - Baralho: Pares Fora

Expectativa de Aprendizagem:

Ao final dessa atividade, espera-se que o educando consiga resolver uma equação do 2º grau incompleta, através do cálculo mental ou escrito.

Materiais utilizados

Todos aqueles utilizados para desenhos e confecção das cartas.

Desenvolvimento: O jogo é composto de 28 cartas onde serão distribuídas igualmente entre 7 grupos (sugestão) de 4 jogadores (esse número pode ser mudado de acordo com a quantidade de alunos). Escolhe-se, por sorteio, o grupo que irá começar, comprando uma carta do grupo que está à sua direita. Após comprá-la, eles verificam se forma um par (equação x solução). O grupo do qual foi retirada uma carta, deve comprar outra carta do grupo à sua direita, verifica se formou um par. Segue o jogo até que algum dos grupos fique sem nenhuma carta. Este será o vencedor. Abaixo segue algumas sugestões de cartas para esta atividade.

$\boldsymbol{ATV01E2GBARALHO-CP}$	$\boldsymbol{ATV01E2GBARALHO-CR}$
$\boldsymbol{(x+1)^2 = 9}$	$\boldsymbol{x = 2 \text{ ou } x = -4}$

Figura 4.9: Atividade 01 EQ.2G. - Baralho - Pares Fora

4.6.2 Atividade 02 E.2G. - Baralho: Piff-Paff

Expectativa de Aprendizagem:

Ao final dessa atividade, espera-se que o educando reconheça uma equação do 2º grau e verifique se um número é raiz da equação.

Materiais utilizados

Todos os materiais tais como: papel, cartolina, papel cartaz, canetinhas, régua, tesoura, etc.

Desenvolvimento:

O jogo é composto por 32 cartas, sendo 16 cartas com equações e 16 com as suas respectivas soluções. Divide-se a turma em grupo, de acordo com a quantidade de alunos, com no máximo 4 integrantes. Distribui uma quantidade de cartas para cada grupo. Cada grupo terá um tempo estipulado pelo professor, para verificar se existem cartas que formam pares (equações X soluções), caso tenham eles devem descartar. Inicia-se o jogo. O grupo que inciará o jogo, pega uma carta no monte que está sobre a mesa, verificam se formam pares, caso queiram ficar com a carta eles devem descartar outra carta sobre a mesa. O grupo da direita continua o jogo, eles poderão optar por pegar a carta descartada ou pegar no monte. Ganha o jogo quem formar mais pares. A seguir temos algumas sugestões de cartas para esta atividade.

$\boldsymbol{ATV02E2GBARALHO - CP}$	$\boldsymbol{ATV02E2GBARALHO - CR}$
$\boldsymbol{x^2 - 64 = 0}$	$\boldsymbol{S = \{-8, 8\}}$

Figura 4.10: Atividade 02 EQ.2G. - Baralho - Piff-Paff

4.6.3 Atividade 03 E.2G. - Algeplan - Fatoração

Expectativa de Aprendizagem:

Espera-se que ao final dessa atividade o educando consiga resolver uma equação do 2º grau, pelo método da fatoração, utilizando o Algeplan.

Materiais utilizados

Todos os materiais tais como: papel, cartolina, papel cartaz, canetinhas, régua, tesoura, etc.

Desenvolvimento:

O *Algeplan* é um material manipulativo utilizado para o ensino de adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios de grau no máximo dois. A ideia fundamental do Algeplan é estudar as operações com polinômios utilizando áreas de retângulos. As peças que compõem este material são as seguintes:

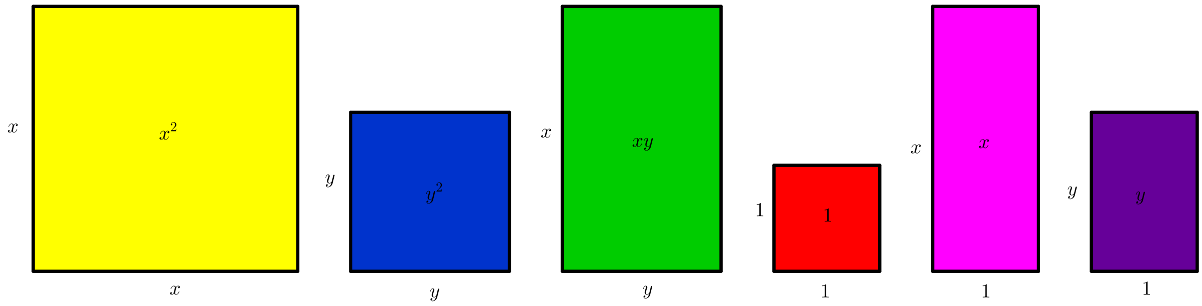


Figura 4.11: Atividade 03 EQ.2G. Peças do Algeplan

O Algeplan é formado por 40 peças dos seguintes tipos:

- *Quadrados:* 4 maiores de lados medindo x, com área x^2 e perímetro $4x$ na cor, escolhida, amarela; 4 médios de lados medindo y, com área y^2 e perímetro $4y$ na cor, escolhida, azul e 12 pequenos de lados medindo *1* unidade, com área igual a *1* u.a. e perímetro de medida igual a *4* unidades na cor, escolhida, vermelha.

- *Retângulos:* 4 de lados medindo x e y, com área $x.y$ e perímetro $2(x+y)$ na cor, escolhida, verde; 8 de lados x e *1*, de área x e perímetro $2(x+1)$ na cor, escolhida, rosa e 8 de lados y e *1*, de área y e perímetro $2(y+1)$ na cor, escolhida, roxa.

As peças são identificadas pelas suas áreas, pode-se usar outras cores para cada tipo de peça ou ainda, tomar da mesma cor. Este material pode ser confeccionado em papel cartaz, cartolina, ou E.V.A.

A turma é dividida em grupos de acordo com o número de alunos. O professor fornece o Algeplan, construído por ele ou pelos próprios educandos em aulas anteriores. Distribui algumas equações para cada grupo, estipula-se um prazo para resolução e em seguida verifica em um grupo maior, toda a sala, as soluções das equações. A seguir temos algumas sugestões de equações para essa atividade e resolução de alguns itens.

OBS: Para utilizar o Algeplan, sugere-se que todas as equações sejam compostas por trinômios quadrados perfeitos.
Lembrando que um trinômio do 2º grau da forma $ax^2+bx+c=0$, com a, b e c inteiros e $a>0$, pode ser fatorado se, e somente se, for possível formar um *retângulo* com as peças que o representam. As dimensões do *retângulo* formado representam os fatores do trinômio.

Tabela 4.1: Atividade 03 E2G - Sugestões de Equações

Sugestões de Equações	
$a)x^2 + 4x + 4 = 0$	$S = \{-2\}$
$b)x^2 - 6x + 9 = 0$	$S = \{3\}$
$c)x^2 + 8x + 16 = 25$	$S = \{-9, 1\}$
$d)x^2 - 10x + 25 = 0$	$S = \{5\}$
$e)x^2 - 14x + 49 = 0$	$S = \{7\}$
$f)x^2 + 8x + 16 = 0$	$S = \{-4\}$
$g)x^2 - 22x + 121 = 0$	$S = \{11\}$

Item (a): $x^2 + 4x + 4 = 0$

O trinômio $x^2 + 4x + 4$ pode ser representado por 1 peça do tipo x^2, 4 peças do tipo x e 4 peças do tipo 1:

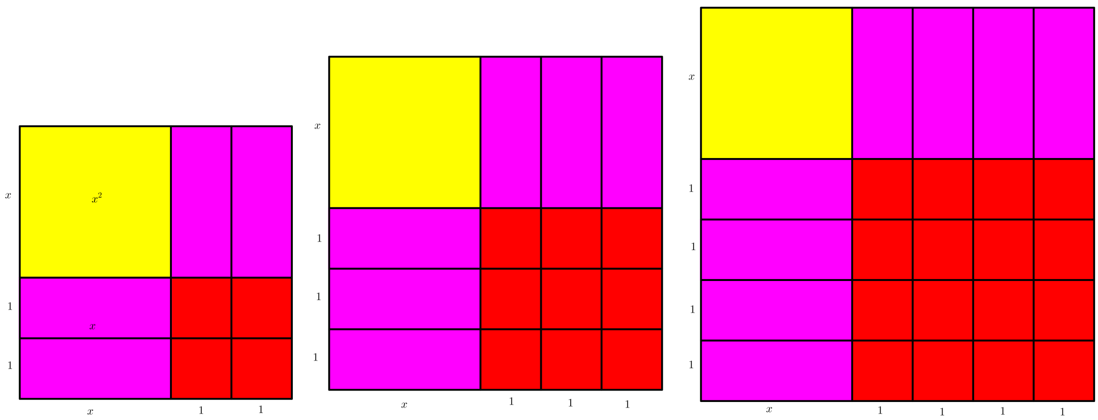


Figura 4.12: Atividade 03 EQ.2G. Solução do item (a,b e c) nessa ordem

De acordo com a Figura 4.12(a) teremos: $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

Logo: $x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Item (b): $x^2 - 6x + 9 = 0$

O trinômio $x^2 - 6x + 9$ pode ser representado por 1 peça do tipo x^2, 6 peças do tipo x (essas peças deverão serem consideradas com sinais negativos) e 9 peças do tipo 1:

De acordo com a Figura 4.12(b) teremos: $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

Logo: $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$

Item (c): $x^2 + 8x + 16 = 25$

O trinômio $x^2 + 8x + 16$ pode ser representado por 1 peça do tipo x^2, 8 peças do tipo x e 16 peças do tipo 1:

De acordo com a Figura 4.12(c) teremos: $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$

Logo:

$x^2 + 8x + 16 = 25 \Rightarrow (x + 4)^2 = 25 \Rightarrow x + 4 = 5 \Rightarrow x = 1$ ou $x + 4 = -5 \Rightarrow x = -9$

4.6.4 Atividade 04 E.2G. - Quadrados Perfeitos

Expectativa de Aprendizagem:

Espera-se que ao final dessa atividade o educando se familiarize com o método da fatoração na resolução das equações do 2º grau.

Materias utilizados:

Materiais diversos para confecção das cartas: papel cartaz, canetinhas, régua, lápis de cor, etc.

Desenvolvimento:

O jogo é formado de 32 cartas, 20 das quais são distribuídas igualmente entre 5 grupos de 4 jogadores, enquanto as outras 12 cartas permanecem em um monte de compras. Se um grupo possuir pelos menos 3 cartas relacionadas à mesma equação, na sua vez, ele poderá juntá-las. Por exemplo, a equação $x^2 - 2x + 1 = 0$, estão relacionadas às cartas contendo as equações $(x - 1)^2 = 0$ e $x = 1$. Uma dupla de cartas arriadas vale 20 pontos e um trio vale 30 pontos. No jogo há 8 cartas lixo, isto é, cartas que não se relacionam a nenhuma outra do jogo.

Inicia-se o jogo com um grupo pegando uma carta no monte de compras e descartando um outra ou a mesma na mesa. O grupo seguinte poderá optar por pegar a carta descartada ou pegar outra no monte, sempre descartando uma outra carta. Os grupos podem arriar duplas ou trios. O jogo se segue e acaba quando acabarem as cartas do monte ou quando um dos grupos bater, isto é, ficar sem cartas. Vence quem totalizar mais pontos. Segue algumas sugestões de cartas.

4.6.5 Atividade 05 E.2G. - Bingo de Equações

Expectativa de Aprendizagem:

Espera-se que ao final dessa atividade o educando consiga resolver equações do 2º grau pelo método de completar quadrados.

Materiais utilizados:

ATV04E2GQUADPERF $(x-1)^2=0$	*ATV04E2GQUADPERF* $x=1$
ATV04E2GQUADPERF $x^2-2x+1=0$	*ATV04E2GQUADPERF* $x^2-2x+9=0$

Figura 4.13: Atividade 04 EQ.2G. Quadrados Perfeitos

Todos os materiais necessários para a confecção das cartas, tais como: papel, cartolina, canetinhas, régua, tesoura, etc.

Desenvolvimento:

O jogo é composto de 32 cartas sendo 8 delas cartas de referência que contém uma equação do 2º grau. São retiradas do jogo as 8 cartas de referência (equações). Divide-se a turma em grupos, 4 como sugestão, cada grupo recebendo 6 das 24 cartas restantes. Sorteia-se uma das 8 cartas previamente reservadas. Cada grupo deve apresentar, sob o olhar do professor, as cartas referentes à equação sorteada. Fazem-se sucessivos sorteios das cartas referências, até que acabem as cartas de um dos grupos, este será o grupo vencedor.

Segue algumas sugestões de cartas.

ATV05E2BINGOEQUA − CR $x^2+8x+16-16+15=0$	*ATV05E2GBINGOEQUA* $(x+4)^2=1$
ATV05E2GBINGOEQUA $x^2+8x+15=0$	*ATV05E2GBINGOEQUA* $x=-3$ *ou* $x=-5$

Figura 4.14: Atividade 05 EQ.2G. Bingo de Equações

4.6.6 Atividade 06 E.2G. - Dominó de Equações - Fatoração

Expectativa de Aprendizagem:

Espera-se que ao final dessa atividade o educando consiga resolver equações do 2º grau pelo método da fatoração, fatorar um trinômio e verificar se um número é raiz de uma equação.

Materiais utilizados:

Todos os materiais necessários para a confecção das peças, tais como: papel, cartolina, canetinhas, régua, tesoura, etc.

Desenvolvimento:

O jogo é composto por 28 peças, 14 delas são peças contendo solução de uma equação e as outras 14 são peças mistas contendo 2 equações. Organiza-se a turma em 7 grupos, distribui, aleatoriamente, 4 peças para cada grupo, sendo 2 delas peças solução e 2 peças mista. Inicia-se o jogo quem possuir a peça solução $x = 7$ ou $x = -7$. O jogo se desenvolve encaixando-se lado a lado, ou a peça solução ou a peça mista correspondente. O grupo que não possuir uma peça que não se encaixa, pega no monte até que encontrar uma, caso não encontre, passa a vez. Segue sugestões de algumas peças.

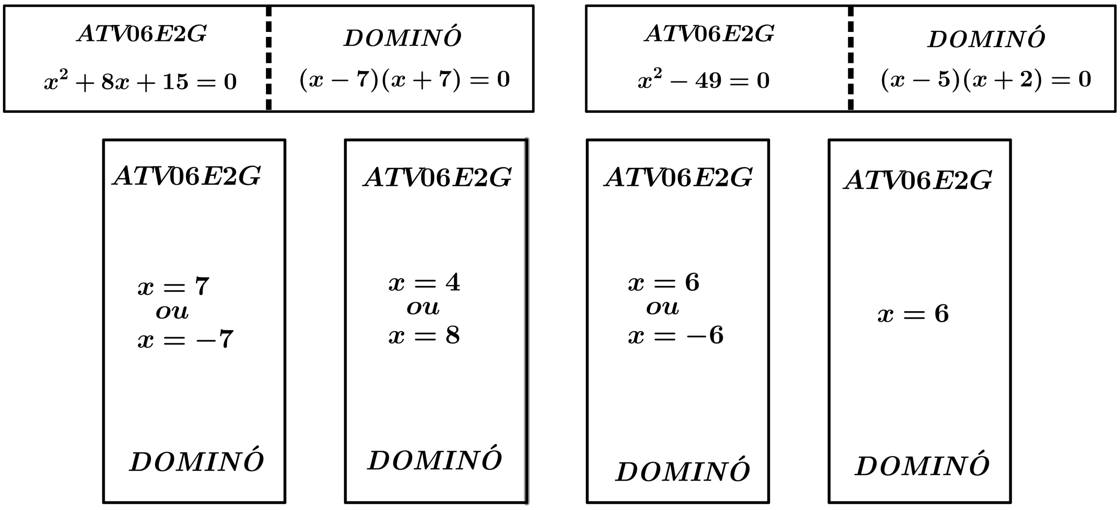


Figura 4.15: Atividade 06 EQ.2G. Dominó de Equações

4.6.7 Atividade 07 E.2G. - Jogo das Equações do 2º grau

Expectativa de Aprendizagem:

Espera-se que ao final dessa atividade o educando consiga resolver equações do 2º grau utilizando os métodos da fatoração, completar quadrados e fórmula resolutiva.

Materiais utilizados:

Todos os materiais necessários para a confecção das cartas, tais como: papel, cartolina, canetinhas, régua, tesoura, etc.

Desenvolvimento:

O jogo é composto de 20 cartas, contendo equações do 2º grau e 20 cartas contendo as suas respectivas soluções. Divide-se a turma em 5 grupos. O professor distribui, igualmente, as 20 cartas contendo as equações e coloca, sobre a mesa, as 20 cartas soluções em um monte, viradas para baixo. Cada grupo irá observar suas cartas e resolver as equações. Depois de um tempo combinado, inicia-se o jogo. Uma a uma as cartas solução serão viradas, os grupos irão observar suas cartas e verificar se há alguma equação cuja solução seja a indicada na carta. Caso isso ocorra, o grupo pegará essa carta e formará o par equação X solução, separa-se esse par. Ganha o jogo a equipe que primeiro formar 4 pares.
Fonte [10]

Segue algumas sugestões de cartas.

ATV07E2GBARALHO $2x^2+3x-5=0$	***ATV07E2GBARALHO*** $x^2-7x+10=0$	***ATV07E2GBARALHO*** $x^2-2x+1=0$
ATV07E2GBARALHO $S=\{-\frac{5}{4},1\}$	***ATV07E2GBARALHO*** $S=\{2,4\}$	***ATV07E2GBARALHO*** $S=\{1\}$

Figura 4.16: Atividade 07 EQ.2G. Jogo das Equações do 2º grau

4.6.8 Atividade 08 E.2G. - Escrevendo Equações do 2º grau

Expectativa de Aprendizagem:

Espera-se que ao final dessa atividade o educando consiga escrever uma equação do 2º grau dados seus coeficientes, suas raízes e a soma e o produto delas.

Desenvolvimento:

Organiza-se a turma em grupos de 4 alunos que irão jogar dois contra dois. Cada dupla deve fazer um pedido, ou utilizar os sugeridos pelo professor (veja modelo abaixo). As duplas escrevem os pedidos num papel e em outro escreve a resposta. Trocam os papéis com as perguntas e após um certo tempo, verifica-se a resposta. Resposta certa vale 1 ponto e caso a resposta fornecida pela dupla esteja errada, a dupla perde 1 ponto e a outra ganha 1 ponto. Fazem-se novos pedidos e segue o jogo até um número de

pedidos estabelecido pelo professor. Caso as duplas queiram utilizar os pedidos feitos pelo professor, as duplas deverão determinar a solução, o professor não irá fornecer a resposta. Seria mais proveitoso que os próprios alunos fizessem os pedidos.
Fonte [33]

Segue algumas sugestões de pedidos.

1. Quero uma equação do 2º grau em que suas soluções sejam os números 3 e -5.
2. Quero uma equação do 2º grau em que suas soluções sejam os números 2 e 6.
3. Quero uma equação do 2º grau em que suas soluções sejam os números -5 e -4.
4. Quero uma equação do 2º grau em que suas soluções sejam os números 9 e 4.
5. Quero uma equação do 2º grau que tenha soluções reais e iguais.
6. Quero uma equação do 2º grau que tenha soluções reais e diferentes.
7. Quero uma equação do 2º grau que não tenha soluções reais.
8. Quero uma equação do 2º grau que tenha coeficientes a, b e c iguais a, respectivamente, 2, -4 e 3.
9. Quero uma equação do 2º grau que tenha coeficientes a, b e c iguais a, respectivamente, 1, 0 e 7.
10. Quero uma equação do 2º grau que tenha coeficientes a, b e c iguais a, respectivamente, 5, -6 e 0.
11. Quero uma equação do 2º grau que tenha coeficientes a, b e c iguais a, respectivamente, 9, 0 e 0.
12. Quero uma equação do 2º grau em que a soma de suas raízes vale -5 e o produto vale 4.
13. Quero uma equação do 2º grau em que a soma de suas raízes vale 10 e o produto vale 21.
14. Quero uma equação do 2º grau que possui discriminante positivo ($\Delta > 0$).
15. Quero uma equação do 2º grau que possui discriminante negativo ($\Delta < 0$).
16. Quero uma equação do 2º grau que possui discriminante nulo ($\Delta = 0$).

4.6.9 Atividade 09 E.2G. - Trilha de Equações do 2º grau

Expectativa de Aprendizagem:

Espera-se que ao final dessa atividade o educando consiga fixar o conteúdo apresentado nas questões que envolvem as raízes das equações, seus coeficientes, o discriminante, os métodos de resolução, a fórmula resolutiva, a relação entre o discriminante e o número de raízes e a relação entre a soma e o produto das raízes na resolução da equação.

Materiais utilizados:

Cartolina, papel cartaz, canetinhas, lápis de cor, régua, tesoura, dado e tampinhas de refrigerante.

Desenvolvimento:

O jogo é composto de uma folha com uma trilha (veja modelo abaixo), de 26 cartas, 1 dado e marcadores (podem ser tampinha de refrigerante). Organiza-se a turma em grupos com 8 componentes, cada grupo irá se organizar em dupla (4 duplas por grupo). Combina-se quem começa. A primeira dupla lança o dado e *anda* pela trilha o número de casas do dado. Observas-e em que número da trilha ficou, pega a carta correspondente e segue as orientações escritas nela. Segue a próxima dupla. A dupla vencedora será aquela que alcançar primeiro a *chegada* (casa 26). As outras duplas devem continuar jogando para definir o segundo, terceiro e quarto lugares. As cartas que já foram resolvidas por outra dupla, volta para o monte para que outra dupla utilize-a caso o marcador caia na casa correspondente. Segue o modelo da trilha, sugestões de algumas cartas e a solução de todas as cartas desta atividade que poderá ser encontrada no Apêndice deste trabalho.
Fonte [11]

Segue as soluções das questões propostas nas cartas, para facilitar o trabalho do professor e dar maior dinâmica ao jogo.

1. $3x^2 - x + 8 = 22$
   Para $x = 2$, teremos: $3.2^2 - 2 + 8 = 3.4 - 2 + 8 = 12 - 2 + 8 = 18 \neq 0$
   Logo, 2 não é raiz da equação.

2. $2x^3 - 3x + 2 = 0$ não é uma equação do 2º grau.

3. $x^2 - 3x = 0$
   Fatorando: $x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$
   Logo, a soma das raízes é igual a $0 + 3 = 3$

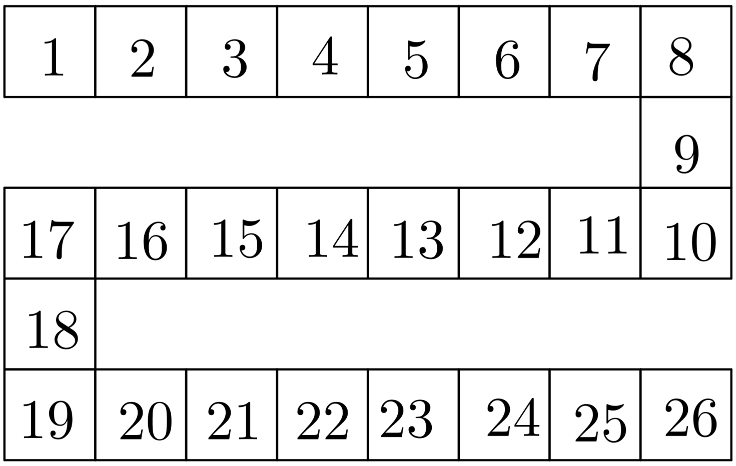


Figura 4.17: Atividade 09 EQ.2G. Trilha

ATV09E2GTRILHA C01

Verificar se 2 é raiz

da equação :

$$3x^2 - x + 8 = 22$$

Se é, avança 3 casas

Se não, permaneça no lugar

ATV09E2GTRILHA C02

A equação :

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 0$$

É uma equação do 2º grau?

Se é, permaneça no lugar

Se não, avance 2 casas

ATV09E2GTRILHA C03

Resolva a equação :

$$x^2 - 3x = 0$$

Some as suas raízes e

avance tantas casas quanto a

a resposta desta soma

Figura 4.18: Atividade 09 EQ.2G. Trilha de Equações

4. $x^2 - 2x - 8 = 0$ Completando quadrados
   Adicionando 1 nos dois membros da equação:
   $x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 8 = 1$
   Adicionando $+8$ nos dois membros da equação teremos:
   $x^2 - 2x + 1 - 8 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 8 + 8 = 1 + 8 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 9 \Rightarrow$
   $\Rightarrow (x-1)^2 = 9 \Rightarrow x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4$ ou $x - 1 = -3 \Rightarrow x = -2$
   Logo, a soma das raízes é igual a $4 + (-2) = 2$

5. $x^2 - 6x = 0$
   Colocando o fator comum em evidência, teremos:
   $x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x-6) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

Logo, a soma das raízes é igual a $0+6=6$

6. $x^2-3x-40=0$

   Utilizando a fórmula resolutiva $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$

   Dados $a=1$, $b=-3$ e $c=-40$, teremos:

   $$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4.1.(-40)}}{2.1}=\frac{3\pm\sqrt{9+160}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{169}}{2}\Rightarrow$$

   $$\Rightarrow x_1=\frac{3+13}{2}=\frac{16}{2}=8 \text{ ou } x_2=\frac{3-13}{2}=\frac{-10}{2}=-5$$

   Portanto, a soma de suas raízes é igual a $8-5=3$

7. $2x^2-20x+50=0$

   Utilizando a fórmula resolutiva $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$

   Dados $a=2$, $b=-20$ e $c=50$, teremos:

   $$x=\frac{-(-20)\pm\sqrt{(-20)^2-4.2.50}}{2.2}=\frac{20\pm\sqrt{400-400}}{4}=\frac{10\pm\sqrt{0}}{10}\Rightarrow$$

   $$\Rightarrow x_1=x_2=\frac{20}{4}=5$$

   Portanto, a raiz da equação é igual a 5.

8. $\Delta>0$: A equação possui 2 raízes reais e diferentes.

9. $x^2-6x+9=0$

   Fatorando teremos: $x^2-6x+9=0\Rightarrow(x-3)^2=0\Rightarrow x=3$

   Portanto, a raiz da equação é igual a 3.

10. $x^2-x-6=0$

    Sabemos que a soma das raízes é dada por $S=-\dfrac{b}{a}$

Dados $a = 1$, $b = -1$ e $c = -6$, teremos: $S = -\dfrac{(-1)}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$

Logo, a soma das raízes da equação é igual a 1.

11. $x^2 - 12x + 32 = 0$ Completando Quadrados

    Adicionando $+36$ e -32 nos dois membros da equação, teremos:

    $x^2 - 12x + 32 = 0 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 + 32 - 32 = 0 + 36 - 32 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 = 4 \Rightarrow$

    $\Rightarrow (x-6)^2 = 4 \Rightarrow x - 6 = 2 \Rightarrow x = 8$ ou $x - 6 = -2 \Rightarrow x = 4$

    Portanto, a menor das raízes da equação é igual a 4.

12. $x^2 - 13x + 42 = 0$

    Utilizando a fórmula resolutiva.

    Dados $a = 1$, $b = -13$ e $c = 42$, teremos:

    $$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4.1.42}}{2.1} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 168}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow$$

    $$\Rightarrow x_1 = \frac{13+1}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ ou } x_2 = \frac{13-1}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

    Portanto, a menor raiz da equação é igual a 6.

13. $x^2 + 2x - 3 = 0$

    Para $x = 1$, teremos: $1^2 + 2.1 - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$

    Portanto, 1 é raiz da equação.

14. $x^2 + 14x + 48$

    Para $x = -11$, teremos: $(-11)^2 + 14(-11) + 48 = 121 - 154 + 48 = 15 \neq 0$

    Logo, -11 não é raiz da equação.

15. $x^2 + 13x + 36 = 0$

    Para $x = -9$, teremos: $(-9)^2 + 13.(-9) + 36 = 81 - 117 + 36 = 117 - 117 = 0$

    Portanto, -9 é raiz da equação.

16. Sim. Se $\Delta > 0$ a equação possui 2 raízes reais e iguais.

17. $x^2 - x - 12 = 0$

    Sabemos que a soma das raízes é dada por $S = -\dfrac{b}{a}$

Dados $a = 1$, $b = -1$ e $c = -12$, teremos:

$S = -\dfrac{(-1)}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$. Logo, a soma das raízes da equação é igual a 1.

18. Soma igual a -2 e produto igual a -8

    Por tentativa os números serão -4 e 2, pois $-4 + 2 = -2$ e $-4.2 = -8$

    Portanto, os números são iguais a -4 e 2 e o maior deles é igual a 2.

19. Soma igual a 1 e produto igual a -20

    Por tentativa os números serão -4 e 5, pois $-4 + 5 = 1$ e $-4.5 = -20$

    Portanto, os números são iguais a -4 e 5 e o maior deles é igual a 5

20. $x^2 + 3x - 10 = 0$

    Para $x = -5$, teremos: $(-5)^2 + 3.(-5) - 10 = 25 - 15 - 10 = 25 - 25 = 0$

    Portanto, -5 é raiz da equação.

21. Soma igual a 6 e produto igual a 5

    Por tentativa os números serão 1 e 1, pois $1 + 5 = 6$ e $1.5 = 5$

    Portanto, os números são iguais a 1 e 5 e o menor deles é igual a 1

22. $x^2 - 10x + 9 = 0$ Para $x = 9$, teremos: $9^2 - 10.9 + 9 = 81 - 90 + 9 = 90 - 90 = 0$

    Portanto, 9 é raiz da equação.

23. $x^2 - x - 6 = 0$ Sabemos que a soma das raízes é dada por $S = -\dfrac{b}{a}$

    Dados $a = 1$, $b = -1$ e $c = -6$, teremos: $S = -\dfrac{(-1)}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$

    Logo, a soma das raízes da equação é igual a 1.

24. $x^2 - 5x + 6 = 0$

    Utilizando a fórmula resolutiva.

    Dados $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$, teremos:

    $$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow$$

    $$\Rightarrow x_1 = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ ou } x_2 = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Portanto, a menor raiz da equação é igual a 2.

25. $x^2 - 6x + 5 = 0$ Completando Quadrados:

    Adicionando $+9$ e -5 nos dois membros da equação, teremos:

    $x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + 5 - 5 = 0 + 9 - 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 4 \Rightarrow$
    $\Rightarrow (x-3)^2 = 4 \Rightarrow x - 3 = 2 \Rightarrow x = 5$ ou $x - 3 = -2 \Rightarrow x = 1$

    Portanto, a menor das raízes da equação é igual a 1.

26. $2x^2 - 3x + 1 = 0$

    Utilizando a fórmula resolutiva.

    Dados $a = 2$, $b = -3$ e $c = 1$, teremos:

    $$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.2.1}}{2.2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} \Rightarrow$$

    $$\Rightarrow x_1 = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ ou } x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

    Portanto, a menor raiz da equação é igual a 1.

Considerações finais

Aplicar atividades com uso de jogos ou materiais concretos exigem de nós professores muito trabalho e tempo para planejar. Muitas vezes deixamos de utilizar essa estratégia devido a várias situações que acontecem e que nos desmotivam, alunos desinteressados, escolas sem estrutura, falta de apoio ao professor, quantidade de alunos acima do máximo exigido, isso tudo nos leva a pensar antes de aplicar esse tipo de atividade.

Mas o que fazer? Deixar do jeito que está, não podemos. Precisamos mudar, nem que seja para nossa satisfação. Eu penso que todo professor quer *colher* o fruto do seu trabalho, *colher* o aprendizado do aluno, não podemos continuar nesse estado de insuficiência de aprendizagem. Cada ano que se passa, menos conhecimento matemático apresentam nossos alunos.

Percebo no meu dia-a-dia alguns tipos de atitudes de alunos, como por exemplo, aqueles alunos desinteressados por não saber nada, nervosos por não saber nada, tímidos e com vergonha de questionar por não saber nada. Devemos mudar essa realidade. Eles não são culpados de tudo. Temos que tentar ajudá-los. As estratégias diferenciadas podem auxiliar nessa mudança.

Apliquei algumas dessas atividades e percebi que o interesse aumentou, um número maior de alunos aprenderam um pouco mais. Numa aplicação da atividade 05, balança de 2 pratos, onde se resolve equações do 1º grau, numa turma de 9º ano, onde foi proposto um reforço dessa equações para introduzir a do 2º grau, foi utilizado as tampinhas de refrigerantes para a resolução das equações em um dia, no outro passei atividades de fixação, uma aluna questionou: professor, cadê as tampinhas? Eu disse a ela que hoje não utilizaria as tampinhas. Depois de alguns minutos, ela levantou falou: professor por favor traga as tampinhas, com elas eu sei resolver. Nesse momento me senti recompensado, vi que tudo que planejei foi válido.

É por isso que essas atividades são significativas e necessitamos de mais professores engajados nessa estratégia.

Apêndice A

Equações do 3^o Grau

Após ensinar os métodos para a resolução das equações do 2^o grau, somos questionados sobre as equações do 3^o grau, a curiosidade de alguns alunos nesse tema, nos faz refletir se seria conveniente ensinar nessa série, 9^o ano do Ensino Fundamental, os métodos de resolução. É fato que alguns tópicos, como por exemplo a demonstração da fórmula, não seria conveniente, mas a apresentação dela e a resolução de alguns exemplos seria possível. Discutiremos abaixo a fórmula para se resolver uma equação do 3^o grau e em seguida faremos alguns exemplos. Antes disso, contaremos um pouco de história, pois, dependendo da forma que é contada, o interesse dos alunos aumenta e com isso pode-se provocar mais motivação na aprendizagem.

A.0.1 A disputa entre Cardano e Tartaglia pelas Equações do 3^o grau

Girolamo Cardano, nascido em Pavia (Itália), em 1501 e falecido em Roma em 1576, levou uma vida marcada por contrastes e extremos. Foi cientista e dedicou-se à astrologia. Autor do *Liber de Ludo Aleae*, onde introduziu a ideia de probabilidade que se usa atualmente, ensinou maneiras de se trapacear nos jogos. Constituiu uma família absolutamente desregrada, seu filho mais velho foi condenado à morte por ter assassinado a esposa. Seu filho mais novo, Cardano, num acesso de fúria, arrancou as duas orelhas. Ele se autodefiniu como desbocado, espião, melancólico, traidor, invejoso, solitário, obsceno, desonesto, incomparavelmente vicioso e portador de total desprezo pela religião. Apesar disso tudo, ele legou à posteridade um livro, o maior compêndio algébrico, a *Ars Magna*, publicado em Nurenberg, na Alemanha, em 1545.

Nicoló Fontana, apelidado Tartaglia, nasceu em Bréscia (Itália), em 1500. Aos 11 anos, em 1512, Bréscia foi tomada pelas tropas francesas e parte da população refugiou na igreja, impiedosamente, cavalarianos invadiram o local, matando indiscriminadamente quem encontraram pela frente. O menino Nicoló foi gravemente ferido e abandonado entre os cadáveres. Conta-se que sua mãe o salvou lambendo-lhe as feridas, à falta de medicamentos. Nicoló levou para o resto de sua vida uma profunda cicatriz na boca, o que lhe provocou permanentemente defeito na fala, daí o apelido de Tartaglia, que quer dizer gago. Tartaglia desde cedo demonstrou amor pelos estudos e, por impossibilidade de pagar a escola, sua mãe retirou-o e a partir de então Tartaglia passou a estudar por si mesmo. Em 1535 já era professor de ciências em Verona, Vicenza, Bréscia e Veneza. Publicou diversas obras.

Consta que por volta de 1510, um matemático italiano Scipione del Ferro (1465 - 1526), antes de morrer, revelou aos seus discípulos Antônio Maria Fior e Annibale Della Nave o método para a resolução das equações do 3º grau do tipo $x^3+px+q=0$. Scipione del Ferro foi o matemático a quem se deve o primeiro método de resolução de equação do 3º grau, mas o manteve para regularmente fascinar seus colegas e o público em desafios matemáticos. Seu aluno Antônio Maria Fior, conhecendo o método, tentou adquirir notoriedade valendo-se da descoberta do mestre. Naquela época era constante os desafios matemáticos.

Os desafios matemáticos cobriam de crédito e prestígio seus vencedores. Nicoló Fontana soube da existência das 3º do terceiro grau e ficou estimulado a obter sua sulução. Foi organizado um desafio entre Fior e Tartaglia que consistia na solução de diversos problemas que um deveria propor ao outro, e Fior pretendia apresentar questões que dependessem de equações do tipo $x^3+px+q=0$, da qual somente ele tinha a solução. Tartaglia já sabia disso. Trabalhou dias na resolução desse tipo de equação e também achou a fórmula geral para as do tipo $x^3+px^2+q=0$. Tartaglia ganhou o desafio e Fior saiu humilhado do episódio, e hoje só é lembrado como alguém que recebeu o merecido castigo ao pretender adquirir fama às custas de outro.

Nessa mesma época, Cardano estava escrevendo o livro *Prática Arithmeticae Generalis*, englobando Álgebra, Aritmética e Geometria e ficou sabendo que Tartaglia achara a solução para resolução dessas equações, pediu-lhe que revelasse para publicar no seu livro. Tartaglia não concordou, alegando que iria publicar ele mesmo em um livro a ser escrito no futuro. Cardano ofendeu Tartaglia, acusando-o de mesquinho, egoísta e não interessado em colaborar com o desenvolvimento da humanidade. Algum tempo depois, Cardano, com um nome fictício, convidou Tartaglia para um encontro e implorou com juramento sobre o Evangelho a resolução das equações. Tartaglia mandou o segredo em um poema, Cardano não conseguiu entender. Mais juras, promessas e, finalmente, Tartaglia revelou.

Cardano, numa visita a Della Nave, discípulo de Del Ferro, soube do manuscrito de Del Ferro contendo a regra de Tartaglia que já existia há 30 anos, motivo pelo qual quebrou o juramento. Publicou em seu livro *Ars magna*, em 1545, onde não deixou de fazer referências aos descobridores. A reação de Tartaglia foi explosiva, publicou sua versão dos fatos e denunciou Cardano por haver traído um sagrado juramento sobre a Bíblia.

No final, a posteridade foi injusta com Tartaglia, a fórmula que ele deduzira e que ensinara ao desleal inimigo, ao invés de receber seu nome, é hoje generalizadamente conhecida como Fórmula de Cardano. O que ocorrera com a fórmula de Bhaskara nas equações do segundo grau, citado no item 4.5.3.
Fonte [7]

A.0.2 A Fórmula de Tartaglia-Cardano

Seja $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (1) com a, b *e* c números reais ou complexos, uma equação do terceiro grau. Observe que o coeficiente do termo x^3 é igual a 1, caso não fosse, por exemplo d, $d \in \mathbb{C}$, bastaria dividir todos os termos da equação por d, $d \neq 0$. Vamos transformar essa equação numa equação equivalente, do tipo $y^3 + py + q = 0$ (2). Essa transformação é feita da mesma maneira que nas equações do segundo grau. Veja:

Seja $x^2 + ax + b = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}$, completando quadrado, teremos:

$$x^2 + ax + b = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4} = 0.$$

Fazendo $y = x + \dfrac{a}{2}$ e $p = b - \dfrac{a^2}{4}$, obtemos:

$$y^2 + p = 0 \text{ cuja solução é dada por } y = \pm\sqrt{-p} = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Voltando na equação (1) dada por $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, vamos completar cubos. Lembrando que:

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, então:

$\left(x+\dfrac{a}{3}\right)^3 = x^3 + 3x^2\dfrac{a}{3} + 3x\dfrac{a^2}{9} + \dfrac{a^3}{27}x^3 = x^3 + ax^2 + \dfrac{a^2}{3}x + \dfrac{a^3}{27}$ e portanto:

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^3 + ax^2 + \dfrac{a^2}{3}x + \dfrac{a^3}{27} + bx + c - \dfrac{a^2}{3}x - \dfrac{a^3}{27} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x+\dfrac{a}{3}\right)^3 + \left(b-\dfrac{a^2}{3}\right)x + c - \dfrac{a^3}{27} = 0$ (3)

Que pode ser escrita na forma:

$\left(x+\dfrac{a}{3}\right)^3 + \left(b-\dfrac{a^2}{3}\right)\left(x+\dfrac{a}{3}\right) + c - \dfrac{a^3}{27} - \dfrac{ba}{3} + \dfrac{a^3}{9} = 0$ (4)

Isto foi feito com o objetivo de fazer a substituição $y = x + \dfrac{a}{3}$ (5) em (4), obtendo:

$y^3 + \left(b-\dfrac{a^2}{3}\right)y + c + \dfrac{2a^3}{27} - \dfrac{ba}{3} = 0$ (6)

Fazendo $p = b - \dfrac{a^2}{3}$ e $q = c + \dfrac{2a^3}{27} - \dfrac{ba}{3}$ em (6) obtemos a equação (2) desejada

$y^3 + py + q = 0$ onde determinaremos os valores de y para em seguida, determinar os valores de x em (5).

Fazendo $y = u + v$ em (2), com $u, v \in \mathbb{C}$ obtemos:
$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \Rightarrow u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u+v) + q = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u+v) = 0$ (7)

Se conseguirmos achar u e v tais que $u^3 + v^3 + q = 0$ e $3uv + p = 0$, então $y = u + v$ será a raiz da equação $y^3 + py + q = 0$. Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ 3uv + p = 0. \end{cases}$$

Da segunda equação do sistema obtemos que $v = -\dfrac{p}{3u} \Rightarrow v^3 = -\dfrac{p^3}{27u^3}$

Substituindo esse valor na primeira equação do sistema, teremos:

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0 \Rightarrow u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

Que pode ser escrita na forma $(u^3)^2 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$, que representa uma equação do segundo grau na variável u^3. Aplicando a fórmula resolutiva (Bhaskara), teremos:

$$u^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4.1.(-\frac{p^3}{27})}}{2.1} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Substituindo u^3 em $u^3 + v^3 + q = 0$ teremos:

$$v^3 = -q - u^3 = -q - (-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}) = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Queremos determinar os pares u *e* v tais que $y = u + v$.

Considere, sem perda de generalidade:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Rightarrow u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \text{ e } v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Substituindo esses valores em $y = u + v$, teremos

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Substituindo y em (5) $y = x + \frac{a}{3}$, obtemos a fórmula para determinar as raízes de uma equação do terceiro grau, do tipo $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{C}$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{a}{3}$$

Para simplificar a fórmula acima, podemos fazer: $A = -\frac{q}{2}$ e $B = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$

Obtendo

$$x = \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{B}} - \frac{a}{3}$$

Podemos analisar as raízes da equação através do valor de B.

1º Caso: $B > 0$

Se $B > 0$ a equação terá uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas. Veja no exemplo abaixo.

Exemplo A.0.1. *Resolver a equação do terceiro grau* $x^3 - 6x - 9 = 0$.

A equação já está na forma $x^3 + px + q = 0$, onde $p = -6$ e $q = -9$, calculando os valores de A e B:

$$A = -\frac{q}{2} \Rightarrow A = -\frac{(-9)}{2} = \frac{9}{2}$$

$$B = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \Rightarrow B = \frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27} = \frac{81}{4} - \frac{216}{27} = \frac{49}{4}$$

Temos que $B = \dfrac{49}{4} > 0$.

Calculando o valor de x pela fórmula de Tartaglia-Cardano:

$$x = \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{B}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$$

Portanto $x = 3$ é uma raíz da equação. Para determinar as outras duas raízes, vamos dividir o polinômio $x^3 - 6x - 9$ por $x - 3$, onde resulta $x^2 + 3x + 3$, obtemos assim a equação $x^2 + 3x + 3 = 0$ que é do segundo grau. Podemos resolvê-la utilizando a fórmula resolutiva (Bhaskara).

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2.1} = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} \; e \; x_2 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$$

Portanto as raízes da equação $x^3 - 6x - 9 = 0$ são 3, $\dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$ *e* $\dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$

Sendo 1 raiz real e 2 raízes complexas e conjugadas. Esse exemplo não seria possível apresentar para os alunos das turmas de 9º anos, visto que números complexos só é ensinado no Ensino Médio.

2º Caso: $B = 0$

Se $B = 0$ a equação terá três raízes reais, sendo uma repetida (dupla).

Exemplo A.0.2. *Resolva a equação do terceiro grau* $x^3 - 3x - 2 = 0$.

A equação já está na forma $x^3 + px + q = 0$, onde $p = -3$ *e* $q = -2$, calculando os valore de A *e* B:

$$A = -\frac{q}{2} \Rightarrow A = -\frac{(-2)}{2} = 1$$

$$B = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \Rightarrow B = \frac{(-2)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27} = \frac{4}{4} - \frac{27}{27} = 1 - 1 = 0$$

Temos que $B = 0$

Calculando o valor de x pela fórmula de Tartaglia-Cardano:

$x = \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{B}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{0}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{0}} = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} = 1 + 1 = 2$

Portanto $x = 2$ é uma raiz da equação. Para determinar as outras duas raízes, vamos dividir o polinômio $x^3 - 3x - 2$ por $x - 2$, onde resulta $x^2 + 2x + 1$, obtemos assim a equação $x^2 + 2x + 1 = 0$, que pode ser resolvida por fatoração:

$x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$, onde obtemos uma raiz dupla.

Portanto, as raízes da equação $x^3 - 3x - 2 = 0$ são $-1, -1$ *e* 2, com 3 raízes reais, sendo 1 dupla. Esse tipo de exemplo seria possível apresentar aos alunos do 9º ano.

3º caso: $B < 0$

Se $B < 0$ a equação terá 3 raízes reais e distintas.

Exemplo A.0.3. *Resolver a equação do terceiro grau* $x^3 - 6x - 4 = 0$.

A equação já está na forma $x^3 + px + q = 0$, onde $p = -6$ *e* $q = -4$, calculando os valores de A *e* B:

$$A = -\frac{q}{2} \Rightarrow A = -\frac{(-4)}{2} = 2$$

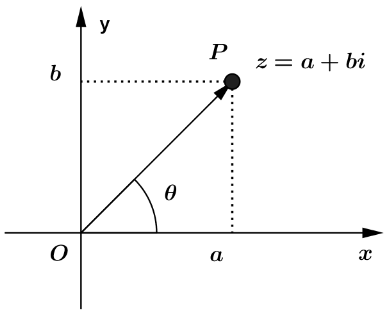


Figura A.1: Números complexos

$$B = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \Rightarrow B = \frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27} = 4 - \frac{216}{27} = 4 - 8 = -4$$

Temos que $B < 0$

Calculando o valor de x pela fórmula de Tartaglia-Cardano:

$$x = \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{B}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}} = \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i}.$$

Esse valor de x parece ser um número complexo, porém não é. O que faremos agora é usar um pouco da teoria de números complexos ensinada, na maioria dos colégio, no 3º ano do Ensino Médio, ficando inviável apresentar aos alunos do 9º ano.

Sabemos que $x = u + v$, então podemos escrever:

$$u = \sqrt[3]{2 + 2i} \Rightarrow u^3 = 2 + 2i \qquad \text{e} \qquad v = \sqrt[3]{2 - 2i} \Rightarrow v^3 = 2 - 2i$$

Teremos que escrever u^3 e v^3 na forma trigonométrica ou polar.

Faremos então uma revisão deste conteúdo.

Seja $z = a + bi$ um número complexo, onde a é a parte real e b a parte imaginária. O módulo do vetor $\overrightarrow{OP}$, indicado por $|z|$ ou ρ, representa a distância do ponto P à origem do plano cartesiano. Veja a figura.

Temos que:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},\ z \neq 0,\ \theta = arg(z),\ \cos\theta = \frac{a}{|z|} \text{ e } \sin\theta = \frac{b}{|z|}, \text{ com } (0 < \theta < 2\pi).$$

As duas últimas igualdades nos levam a: $a = |z|\cos\theta$ e $b = |z|\sin\theta$.

Substituindo em $z = a + bi$, teremos: $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ denominada fórmula trigonométrica ou polar de z

Para a potenciação utilizamos 1ª Fórmula de De Moivre, dada por:

$$z^n = |z|^n.(\cos n\theta + i.\sin n\theta),\ n \in \mathbb{N}$$

Faremos uma demonstração desta fórmula por Indução sobre n.
Dado $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ e seja $P(n):\ z^n = |z|^n.(\cos n\theta + i.\sin n\theta)$
$P(0)$ é verdadeira, já que $z^0 = |z|^0(\cos 0.\theta + i\sin 0.\theta) = 1.(\cos 0 + i\sin 0) = 1$
Desde que aceitamos, por definição, que $|z|^0 = 1$
Suponhamos que $P(n)$ seja verdadeira, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Isto significa que, para qualquer valor de n natural, teremos

$$z^n = |z|^n.(\cos n\theta + i.\sin n\theta)$$

Iremos verificar que a sentença $P(n+1)$ também será verdadeira para qualquer n natural.
$P(n+1):\ z^{n+1} = |z|^{n+1}(\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta)$
Temos que:

$$z^{n+1} = (|z|(\cos\theta + i\sin\theta))^{n+1} = |z|^{n+1}(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |z|^{n+1}(\cos\theta + i\sin\theta)^n.(\cos\theta + i\sin) = |z|^{n+1}(\cos n\theta + i\sin n\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z^{n+1} = |z|^{n+1}[(\cos n\theta.\cos\theta - \sin n\theta.\sin\theta) + i(\sin n\theta\cos\theta + \sin\theta\cos n\theta)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |z|^{n+1} = |z|^{n+1}[\cos(n\theta + \theta) + i\sin(n\theta + \theta)] = |z|^{n+1}[\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta]$$

Portanto $z^n = |z|^n.(\cos n\theta + i.\sin n\theta)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$

Para a radiciação utilizamos a 2ª Fórmula de De Moivre, dada por:
Seja $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, suas raízes n-ésimas são:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}),\ n \in \mathbb{N} - \{0\} \text{ e } k = 0, 1, 2, ..., (n-1).$$

De fato:
$\omega_k^n = [\sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n})]^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega_k^n = |z|[\cos\frac{n(\theta + 2k\pi)}{n} + i\sin\frac{(\theta + 2k\pi)}{n}] \Rightarrow$$

$\Rightarrow \omega_k^n = |z|[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)] = |z|(\sin\theta + i\sin\theta) = z$

Voltando ao exemplo.

De $u^3 = 2 + 2i$, calculamos $|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ e

$$\sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45°$$

Logo: $u^3 = 2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$ Calculando as raízes de u pela 2ª fórmula de De Moivre:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}),\ n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Para $k = 0$ e $n = 3$, temos:

$$u_0 = \sqrt[3]{\sqrt{8}}(\cos\frac{45°}{3} + i\sin\frac{45°}{3}) = \sqrt{2}.(\cos 15° + i\sin 15°)$$

Analogamente para $v^3 = 2 - 2i$, obtemos $v_0 = \sqrt{2}(\cos 15° - i\sin 15°)$.

Calculando $x_1 = u_0 + v_0$, obtemos a 1ª raiz da equação:

$x_1 = \sqrt{2}.(\cos 15° + i\sin 15°) + \sqrt{2}(\cos 15° - i\sin 15°)$ cancelando o termo $\sqrt{2}.i\sin 15°$, obtemos:

$x_1 = 2\sqrt{2}\cos 15° = 2\sqrt{2}\cos(45° - 30°)$. Aplicando a fórmula do cosseno da diferença dois arcos, obtemos:

$$x_1 = 2\sqrt{2}(\cos 45°.\cos 30° + \sin 45° \sin °30) = 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{3}$, que é um número real. As outras raízes seguem analogamente.

Faremos agora um exemplo onde a equação está na forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, escolhemos uma equação em que teremos três raízes reais e distintas, para estar de acordo com os conteúdos do 9º ano.

Para esse caso, teremos $B < 0$

Exemplo A.0.4. *Resolva a equação do terceiro grau* $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Na equação temos: $a = -6,\ b = 11\ e\ c = -6$. Seguiremos alguns passos para resolvê-la:

1º passo: Cálculo de $d = \frac{a}{3}$

$d = \frac{a}{3} \Rightarrow d = -\frac{6}{3} = -2$

2º passo: Fazer $y = x + d \Rightarrow x = y - d \Rightarrow x = y + 2$

3º passo: Substituir x na equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. Esse passo é para transformar a equação na forma $y^3 + py + q = 0$

$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 + 11(y+2) - 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^3 + 3y^2.2 + 3y.4 + 8 - 6.(y^2 + 4y + 4) + 11y + 22 - 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 24y - 24 + 11y + 22 - 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^3 - y = 0\ (p = -1\ e\ q = 0)$

4º Passo: Calcular A e B

$A = -\frac{q}{2} = \frac{0}{2} = 0$ e $B = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{0}{4} + \frac{(-1)^3}{27} = -\frac{1}{27}$

$B = -\frac{1}{27} < 0$ Portanto a equação possui 3 raízes reais e distintas.

A equação $y^3 - y = 0$ pode ser resolvida colocando o fator comum em evidência:

$y^3 - y = 0 \Rightarrow y(y^2 - 1) = 0 \Rightarrow y = 0\ ou\ y^2 - 1 = 0 \Rightarrow (y+1)(y-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 1\ ou\ y = -1$

Logo as raízes de $y^3 - y = 0$ são $-1,\ 0\ e\ 1$.

5º passo: Substituir os valores de y em $x = y + 2$

Para $y = 0$ teremos $x_1 = 0 + 2 = 2$

Para $y = -1$ teremos $x_2 = -1 + 2 = 1$ e

Para $y = 1$ teremos $x_3 = 1 + 2 = 3$

Portanto as raízes a equação $x^3 - 6x^2 + 11x + 6 = 0$ são $1,\ 2\ e\ 3$.

Apêndice B

Sugestões de Atividades de Expressões Algébricas, Equações do 1º e Equações do 2º grau

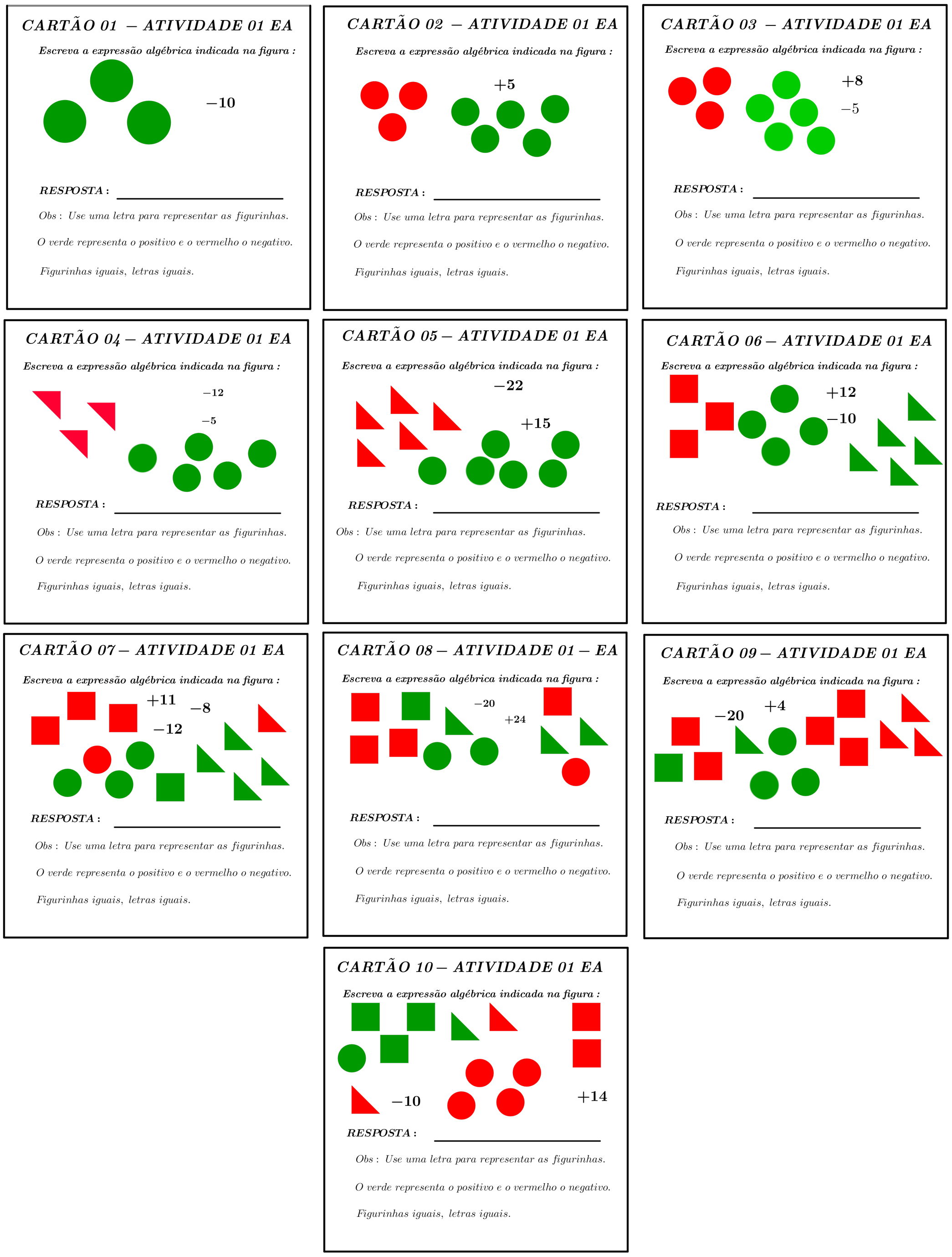


Figura B.1: ATIVIDADE 01 - Expressões Algébricas

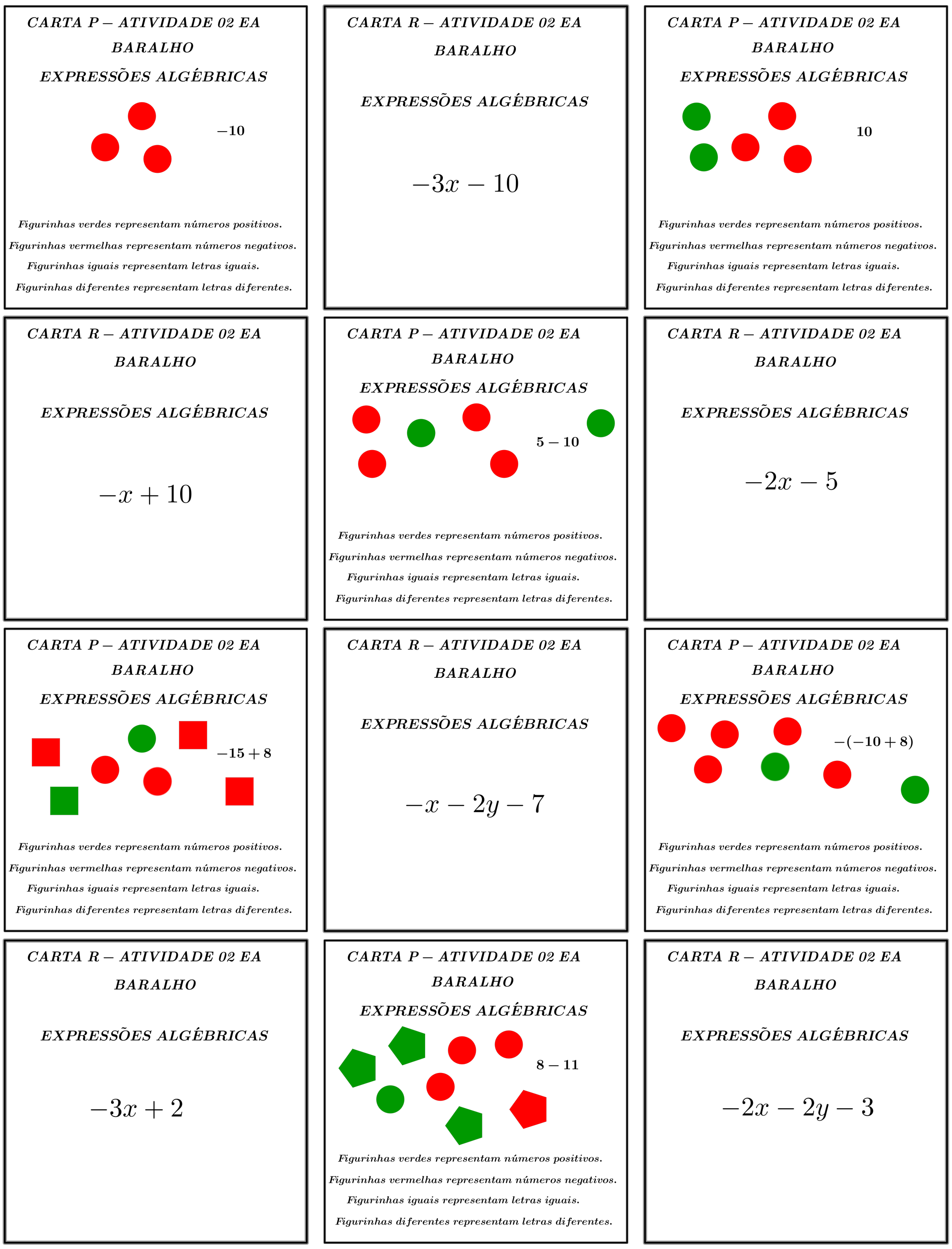


Figura B.2: ATIVIDADE 02 - Expressões Algébricas

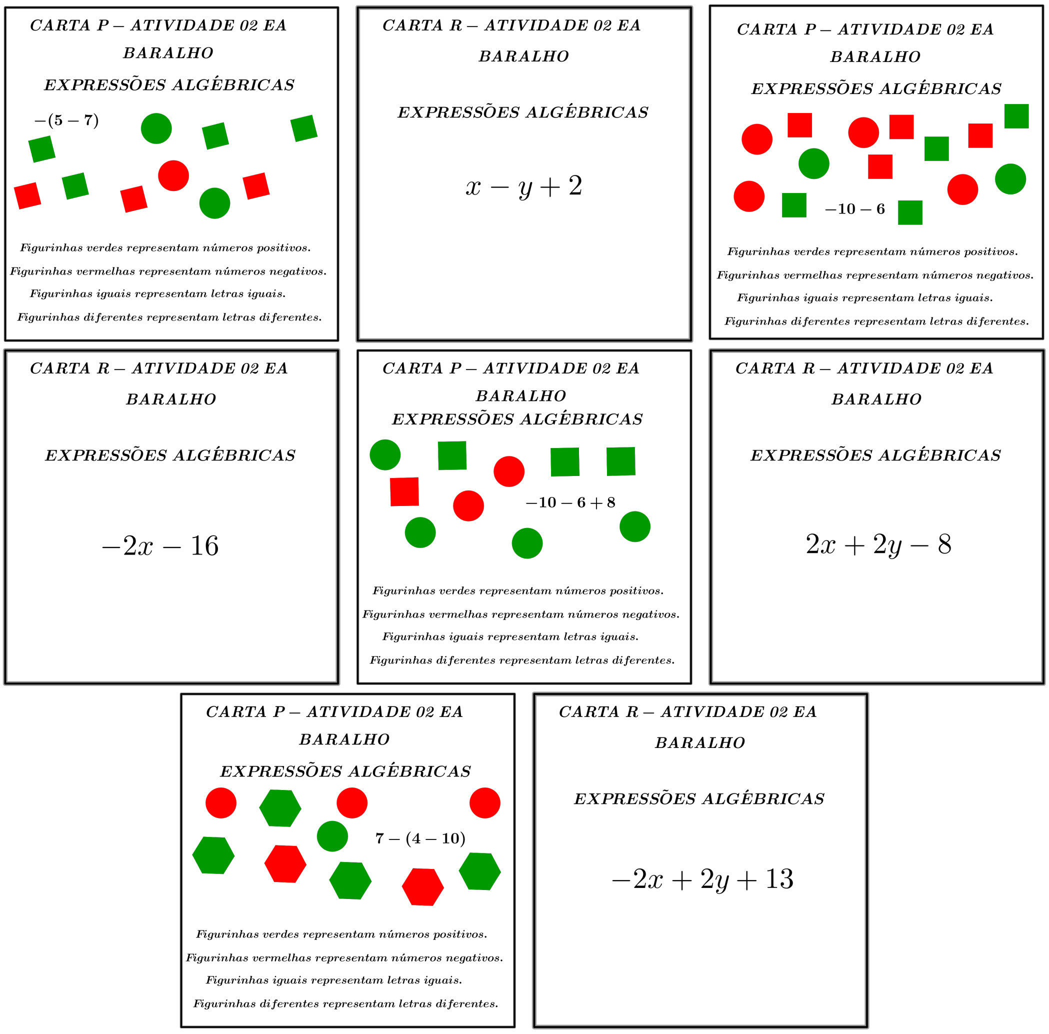


Figura B.3: ATIVIDADE 02 - Expressões Algébricas

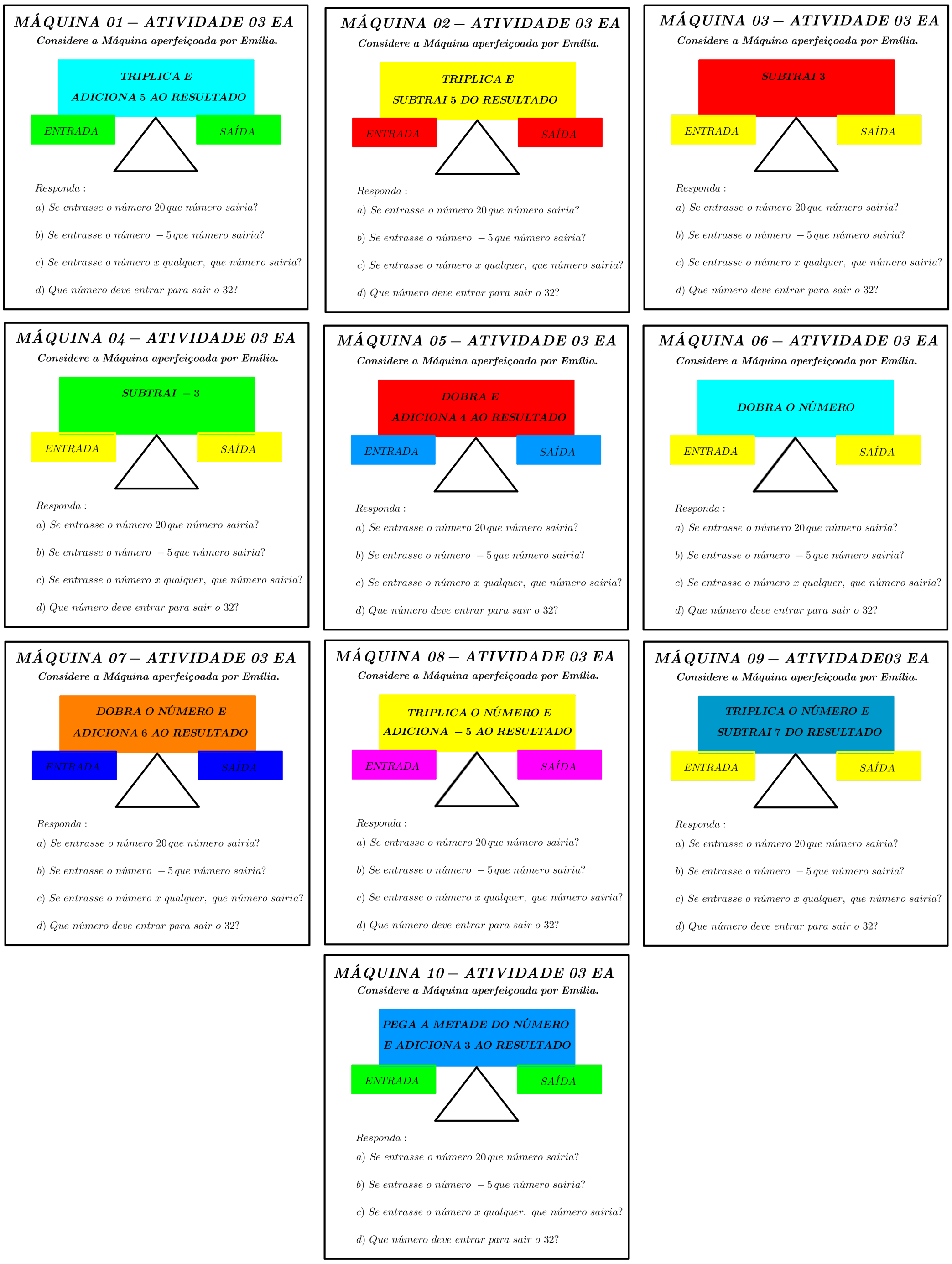


Figura B.4: ATIVIDADE 03 - Expressões Algébricas

QUADRO 01 ATIVIDADE 04 EA

Complete o quadro de valores numéricos

X	-3	0	$+2$
$3x$			
x^2			
$-x^2$			

TOTAL DE PONTOS : ________

QUADRO 02 ATIVIDADE 04 EA

Complete o quadro de valores numéricos

X	-3	0	2
$2x-1$			
x^2+1			
$2x^2-5$			

TOTAL DE PONTOS : ________

QUADRO 03 ATIVIDADE 04 EA

Complete o quadro de valores numéricos

X	-3	0	2
$-x-1$			
x^2-8			
$-x^3-4$			

TOTAL DE PONTOS : ________

QUADRO 04 ATIVIDADE 04 EA

Complete o quadro de valores numéricos

X	-3	0	$+2$
$-x-10$			
x^2+9			
$-x^3+10$			

TOTAL DE PONTOS : ________

QUADRO 05 ATIVIDADE 04 EA

Complete o quadro de valores numéricos

X	-3	0	$+2$
$\frac{x}{2}$			
$-\frac{2x^2}{5}-6$			
$-\frac{x^3}{2}+10$			

TOTAL DE PONTOS : ________

QUADRO 06 ATIVIDADE 04 EA

Complete o quadro de valores numéricos

X	-3	0	$+2$
$-4(x-2)$			
x^2-3x			
$-4-2x$			

TOTAL DE PONTOS : ________

QUADRO 07 ATIVIDADE 04 EA

Complete o quadro de valores numéricos

X	-3	0	$+2$
$\frac{x}{2}+1$			
$-\frac{x^2}{5}-2x$			
$\frac{2x^3}{4}-15$			

TOTAL DE PONTOS : ________

QUADRO 08 ATIVIDADE 04 EA

Complete o quadro de valores numéricos

X	-3	-1	$+2$
$-\frac{x}{2}$			
$-\frac{x^2}{5}-\frac{x}{4}$			
$3(x-2)$			

TOTAL DE PONTOS : ________

QUADRO 09 ATIVIDADE 04 EA

Complete o quadro de valores numéricos

X	-3	0	$+2$
$1-3x$			
$12-5x$			
$7-x^3$			

TOTAL DE PONTOS : ________

QUADRO 10 ATIVIDADE 04 EA

Complete o quadro de valores numéricos

X	-3	0	$+2$
$\frac{5x}{2}$			
$\frac{x^2}{2}-11$			
$\frac{x^3}{4}-15x$			

TOTAL DE PONTOS : ________

Figura B.5: ATIVIDADE 04 - Expressões Algébricas

CARTÃO 01 ATIVIDADE 05 EA

Considere a sequência :

1º Termo	2º Termo	3º Termo	4º Termo
11	12	13	14

a)Determine o 5º e o 6º termo dessa sequência

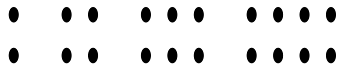
b)Determine o 20º e o 21º termo dessa sequência

c)Escreva uma expressão algébrica que indica o enésimo termo dessa sequência

d)Determine o 100º termo dessa sequência

CARTÃO 02 ATIVIDADE 05 EA

Observe a sequência de figuras e faça o que se pede :



a)Quantos pontos possui o 5º e o 6º termo da sequência?

b)Quantos pontos possui o 30º e o 40º termo da sequência?

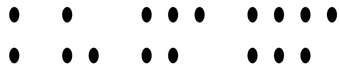
c)Escreva uma expressão algébrica que relacione o número de pontos da figura que ocupa a enésima posição dessa sequência.

d)Calcule o 99º termo dessa sequência.

CARTÃO 03 ATIVIDADE 05 EA

Observe a sequência :

1º 2º 3º 4º



a)Quantos pontos possui o 5º e o 6º termo da sequência?

b)Quantos pontos possui o 20º e o 21º termo da sequência?

c)Escreva uma expressão algébrica que relacione o número de pontos da figura que ocupa a enésima posição dessa sequência.

d)Calcule o 1000º termo dessa sequência.

CARTÃO 04 ATIVIDADE 05 EA

Considere a sequência :

1º Termo	2º Termo	3º Termo	4º Termo
9	11	13	15

a)Determine o 5º e o 6º termo dessa sequência

b)Determine o 20º e o 21º termo dessa sequência

c)Escreva uma expressão algébrica que indica o enésimo termo dessa sequência

d)Determine o 100º termo dessa sequência

CARTÃO 05 ATIVIDADE 05 EA

Considere a sequência :

1º Termo	2º Termo	3º Termo	4º Termo
18	28	38	48

a)Determine o 5º e o 6º termo dessa sequência

b)Determine o 20º e o 21º termo dessa sequência

c)Escreva uma expressão algébrica que indica o enésimo termo dessa sequência

d)Determine o 100º termo dessa sequência

CARTÃO 06 ATIVIDADE 05 EA

Considere a sequência :

1º Termo	2º Termo	3º Termo	4º Termo
2	5	8	11

a)Determine o 5º e o 6º termo dessa sequência

b)Determine o 20º e o 21º termo dessa sequência

c)Escreva uma expressão algébrica que indica o enésimo termo dessa sequência

d)Determine o 100º termo dessa sequência

CARTÃO 07 ATIVIDADE 05 EA

Considere a sequência :

1º Termo	2º Termo	3º Termo	4º Termo
-3	-1	1	3

a)Determine o 5º e o 6º termo dessa sequência

b)Determine o 20º e o 21º termo dessa sequência

c)Escreva uma expressão algébrica que indica o enésimo termo dessa sequência

d)Determine o 100º termo dessa sequência

CARTÃO 08 ATIVIDADE 05 EA

Considere a sequência :

1º Termo	2º Termo	3º Termo	4º Termo
-2	1	4	7

a)Determine o 5º e o 6º termo dessa sequência

b)Determine o 20º e o 21º termo dessa sequência

c)Escreva uma expressão algébrica que indica o enésimo termo dessa sequência

d)Determine o 100º termo dessa sequência

CARTÃO 09 ATIVIDADE 05 EA

Considere a sequência :

1º Termo	2º Termo	3º Termo	4º Termo
6	11	16	21

a)Determine o 5º e o 6º termo dessa sequência

b)Determine o 20º e o 21º termo dessa sequência

c)Escreva uma expressão algébrica que indica o enésimo termo dessa sequência

d)Determine o 100º termo dessa sequência

CARTÃO 10 ATIVIDADE 05 EA

Considere a sequência :

1º Termo	2º Termo	3º Termo	4º Termo
8	14	20	26

a)Determine o 5º e o 6º termo dessa sequência

b)Determine o 20º e o 21º termo dessa sequência

c)Escreva uma expressão algébrica que indica o enésimo termo dessa sequência

d)Determine o 100º termo dessa sequência

Figura B.6: ATIVIDADE 05 - Expressões Algébricas

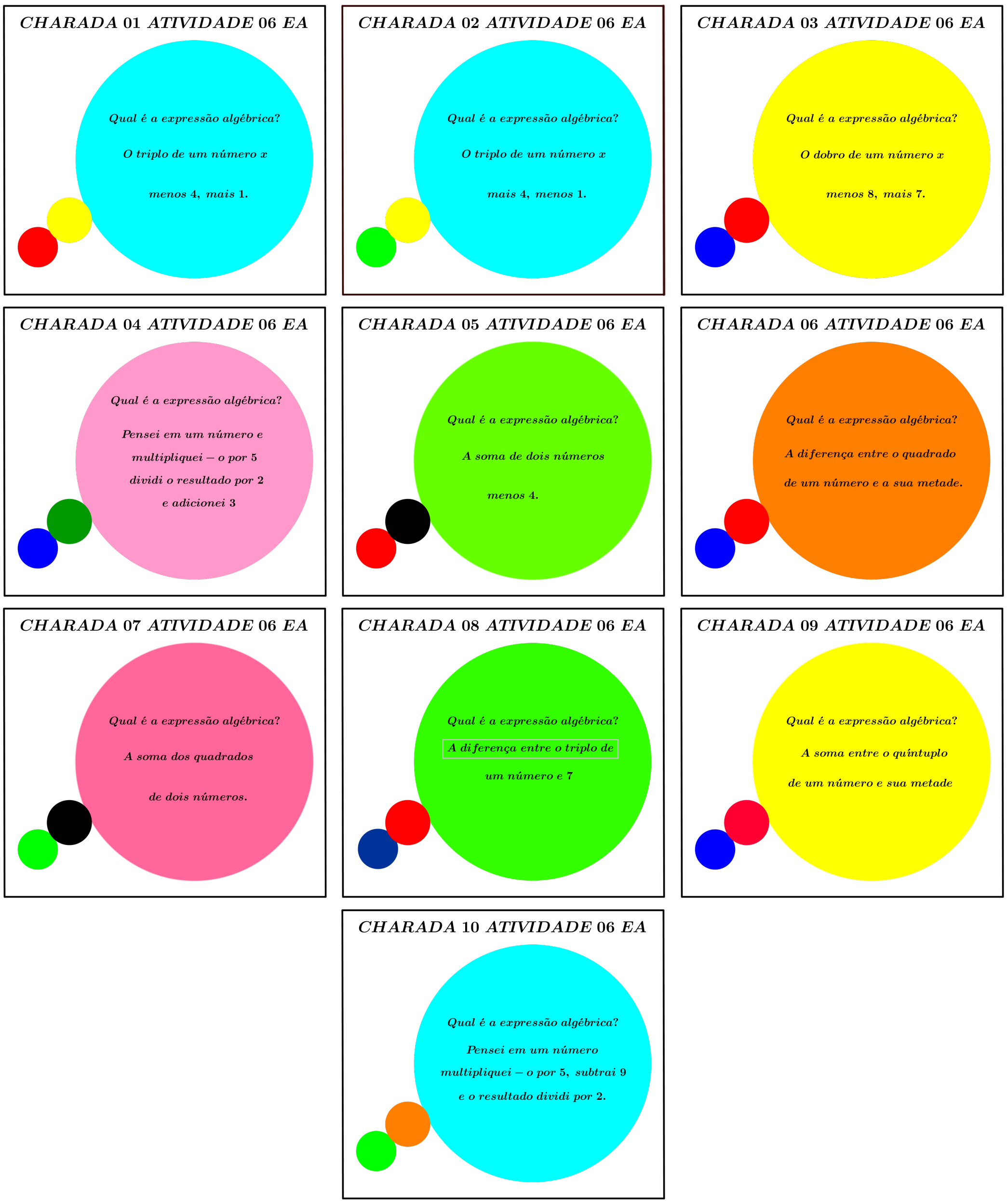


Figura B.7: ATIVIDADE 06 - Expressões Algébricas

ADEDONHA 01 ATIVIDADE 07 EA

Valor do x	$2.x+5$	$4.(x-9)-2.x$	$x.(4+x)+4$	$5.x-9$	Total
$x=-3$					
$x=-1$					
$x=2$					

ADEDONHA 02 ATIVIDADE 07 EA

Valor do x	$4.(2.x-9)-2.x$	$-4+3.x$	$2.x.(4+x)+14$	$5.x-19$	Total
$x=-2$					
$x=0$					
$x=1$					

ADEDONHA 03 ATIVIDADE 07 EA

Valor do x	$4.(x-9)-2.x^2$	$4+3.x^2$	$3x.(4+x)+4$	$5.x^2-9$	Total
$x=-3$					
$x=-1$					
$x=2$					

ADEDONHA 04 ATIVIDADE 07 EA

Valor do x	$5-2.x$	$-2.x+4.(x-9)$	$3.x-4$	$4-x.(4+x)$	Total
$x=-3$					
$x=1$					
$x=3$					

ADEDONHA 05 ATIVIDADE 07 EA

Valor do x	$3x-6$	$7-3(x+5)$	$-4-5x$	$5x^2-19$	Total
$x=-2$					
$x=0$					
$x=2$					

ADEDONHA 06 ATIVIDADE 07 EA

Valor do x	$7x-10$	$5(x-8)+2$	$3x^2-10x$	$10-8x$	Total
$x=-3$					
$x=0$					
$x=2$					

Figura B.8: ATIVIDADE 07 - Expressões Algébricas

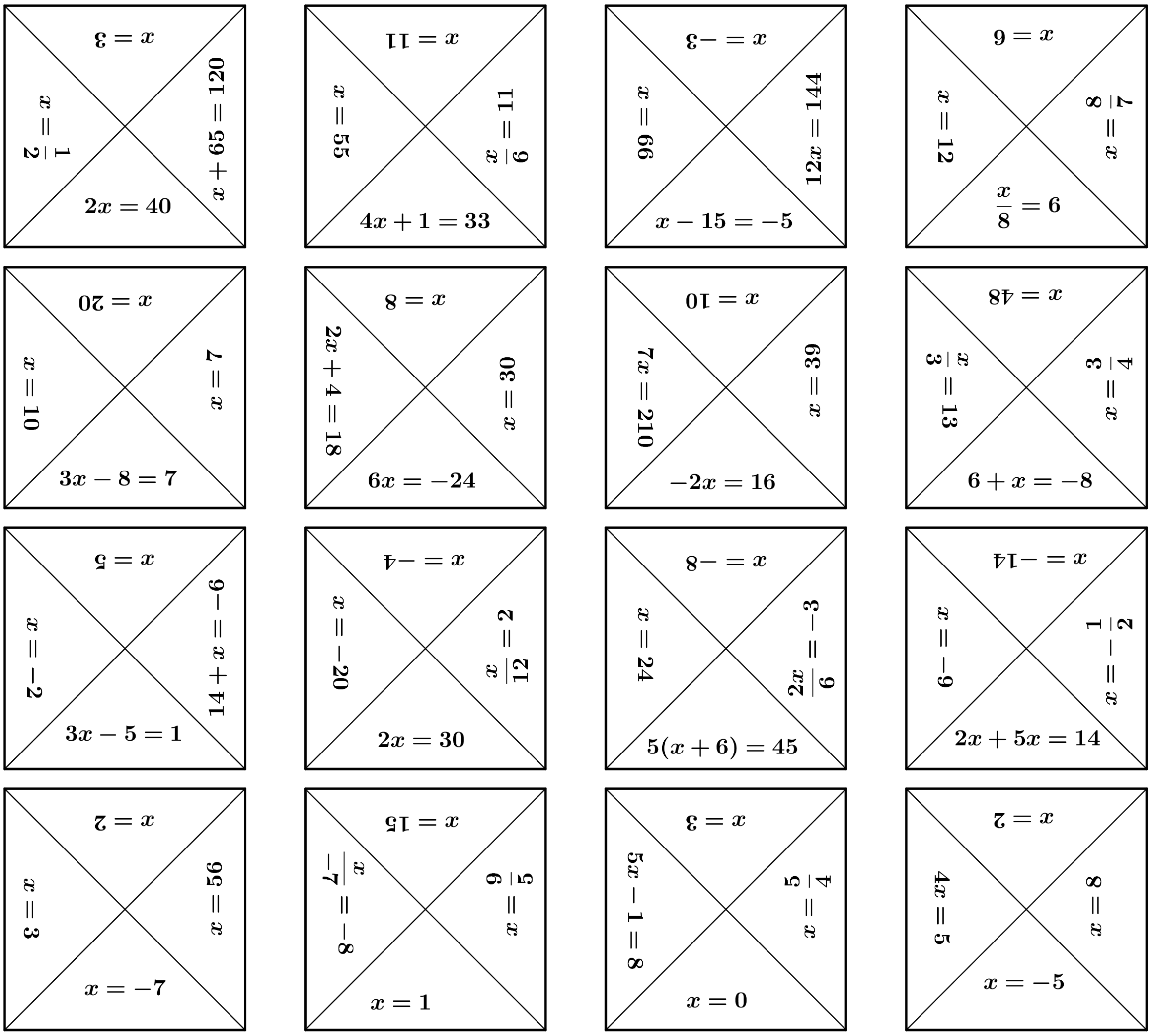


Figura B.9: ATIVIDADE 04 - Equações do 1^o Grau

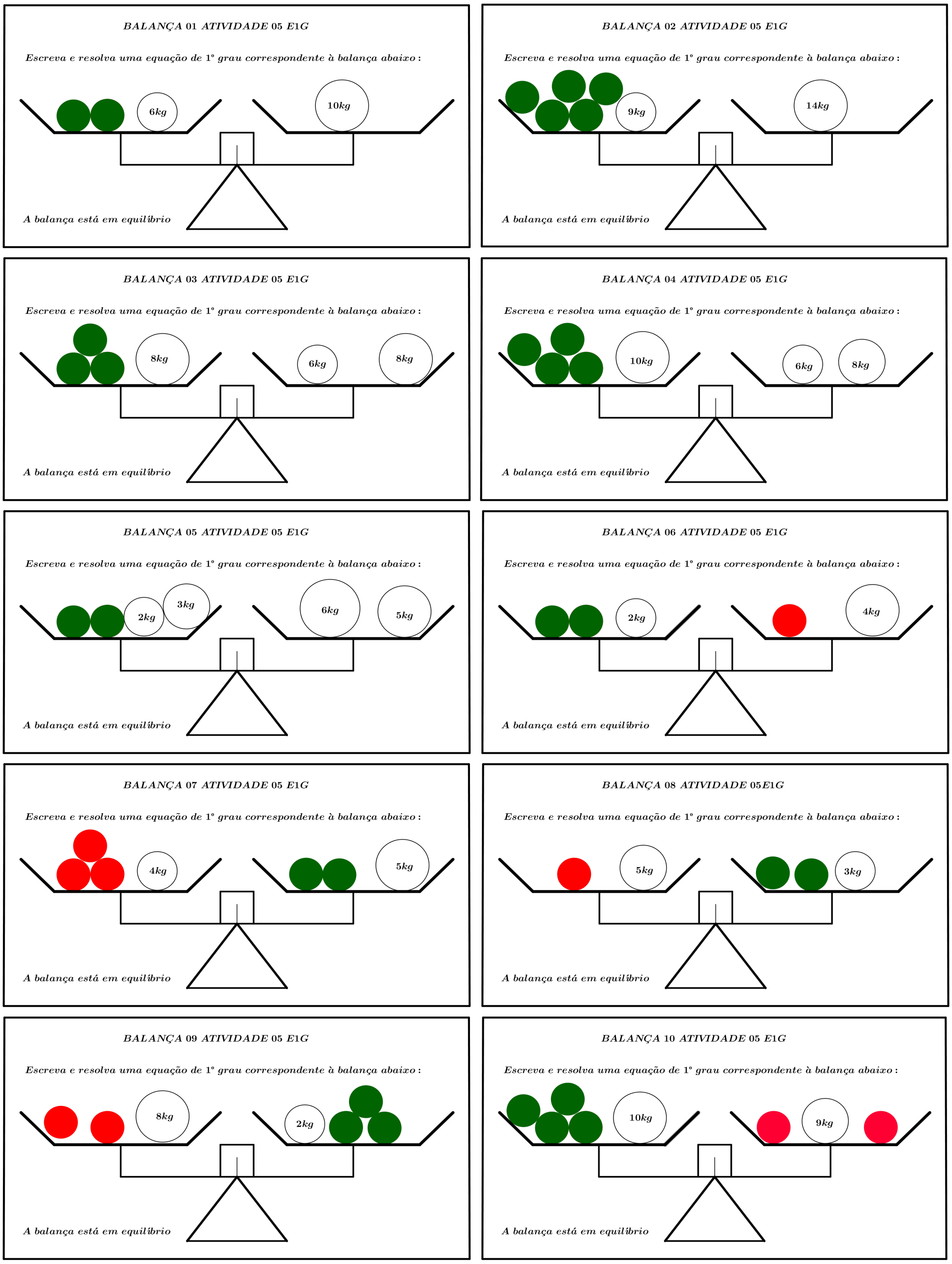


Figura B.10: ATIVIDADE 05 - Equações do 1º Grau

$z = 10$	$z = 10$	$3a = 12$	$b = 9$	$25 : x = 5$	$y = 14$
$4 + z = 14$	$a = 4$	$3.b = 27$	$x = 5$	$y - 9 = 6$	$x = 8$
$2x = 16$	$z = 7$	$18 = z + 3$	$x = -4$	$y + 15 = 18$	$z = -10$
$3z = 21$	$y = 15$	$x - 9 = -13$	$y = 3$	$z - 4 = -14$	$x = 6$
$18 : x = 3$	$y = -2$	$z + 10 = 19$	$a = 6$	$b - 15 = -8$	$8 : c = 4$
$5 = y + 7$	$z = -10$	$a - 10 = -4$	$b = 7$	$c = 2$	$a = 9$
$a - 20 = -11$	$a = 10$	$7 - b = -1$	$a = 0$	$10 - c = -3$	$a = 20$
$3 = a - 7$	$b = 8$	$a - 2 = -2$	$c = 13$	$a : 2 = 10$	$b : 4 = 10$
$b = 40$	$a = -15$	$x = 20$	$3z = 24$		
$a - 2 = -17$	$x : 10 = 2$	$z = 8$	$z - 15 = -5$		

Figura B.11: ATIVIDADE 06 -Equações do 1º Grau

$ATV01E2GBARALHO-CP$ $(x+1)^2=9$	$ATV01E2GBARALHO-CR$ $x=2 \ ou \ x=-4$	$ATV01E2GBARALHO-CP$ $(x+1)(x-2)=0$	$ATV01E2GBARALHO-CR$ $x=-1 \ ou \ x=2$
$ATV01E2GBARALHO-CP$ $x^2=9$	$ATV01E2GBARALHO-CR$ $x=3 \ ou \ x=-3$	$ATV01E2GBARALHO-CP$ $(x-1)^2=-5$	$ATV01E2GBARALHO-CR$ *Não há solução real*
$ATV01E2GBARALHO-CP$ $(x-2)^2=25$	$ATV01E2GBARALHO-CR$ $x=7 \ ou \ x=-3$	$ATV01E2GBARALHO-CP$ $(x-8)^2=0$	$ATV01E2GBARALHO-CR$ $x=8$
$ATV01E2GBARALHO-CP$ $(x-4)^2=36$	$ATV01E2GBARALHO-CR$ $x=10 \ ou \ x=-2$	$ATV01E2GBARALHO-CP$ $(x+1)(x-2)=0$	$ATV01E2GBARALHO-CR$ $x=-1 \ ou \ x=2$
$ATV01E2GBARALHO-CP$ $(x-6)^2=49$	$ATV01E2GBARALHO-CR$ $x=-1 \ ou \ x=13$	$ATV01E2GBARALHO-CP$ $(x-1)^2=-7$	$ATV01E2GBARALHO-CR$ *Não há solução real*
$ATV01E2GBARALHO-CP$ $(x-3)^2=64$	$ATV01E2GBARALHO-CR$ $x=-5 \ ou \ x=11$	$ATV01E2GBARALHO-CP$ $(x+3)(x-5)=0$	$ATV01E2GBARALHO-CR$ $x=5 \ ou \ x=-3$
$ATV01E2GBARALHO-CP$ $(x-7)^2=81$	$ATV01E2GBARALHO-CR$ $x=-2 \ ou \ x=16$	$ATV01E2GBARALHO-CP$ $(x-4)(x-8)=0$	$ATV01E2GBARALHO-CR$ $x=4 \ ou \ x=8$

Figura B.12: ATIVIDADE 01 - Equações do 2º grau

ATV02E2GBARALHO – CP $x^2 - 64 = 0$	ATV02E2GBARALHO – CR $S = \{-8, 8\}$	ATV02E2GBARALHO – CP $3x^2 = 0$	ATV02E2GBARALHO – CR $S = \{0\}$
ATV02E2GBARALHO – CP $6x^2 = 5x$	ATV02E2GBARALHO – CR $S = \{0, \frac{5}{6}\}$	ATV02E2GBARALHO – CP $z^2 - 7z = 0$	ATV02E2GBARALHO – CR $S = \{0, 7\}$
ATV02E2GBARALHO – CP $x^2 - 81 = 0$	ATV02E2GBARALHO – CR $S = \{-9, 9\}$	ATV02E2GBARALHO – CP $x^2 - 5x = 0$	ATV02E2GBARALHO – CR $S = \{0, 5\}$
ATV02E2GBARALHO – CP $(x + 2)^2 = 4$	ATV02E2GBARALHO – CR $S = \{-4, 0\}$	ATV02E2GBARALHO – CP $2z^2 - 16z = 0$	ATV02E2GBARALHO – CR $S = \{0, 8\}$

Figura B.13: ATIVIDADE 02 - Equações do 2º Grau

$ATV02E2GBARALHO - CP$ $3x^2 + 7 = 0$	$ATV02E2GBARALHO - CR$ *Não há solução real*	$ATV02E2GBARALHO - CP$ $-2x^2 - 10x = 0$	$ATV02E2GBARALHO - CR$ $S = \{-5, 0\}$
$ATV02E2GBARALHO - CP$ $x^2 = 25$	$ATV02E2GBARALHO - CR$ $S = \{-5, 5\}$	$ATV02E2GBARALHO - CP$ $5z^2 + 20 = 0$	$ATV02E2GBARALHO - CR$ $S = \{-4, 0\}$
$ATV02E2GBARALHO - CP$ $9x^2 - 16 = 0$	$ATV02E2GBARALHO - CR$ $S = \{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\}$	$ATV02E2GBARALHO - CP$ $\frac{3x^2}{4} - 5x = 0$	$ATV02E2GBARALHO - CR$ $S = \{0, \frac{20}{3}\}$
$ATV02E2GBARALHO - CP$ $5x^2 - 45 = 0$	$ATV02E2GBARALHO - CR$ $S = \{-3, 3\}$	$ATV02E2GBARALHO - CP$ $-2z^2 - 42z = 0$	$ATV02E2GBARALHO - CR$ $S = \{0, -21\}$

Figura B.14: ATIVIDADE 02 - Equações do 2º Grau

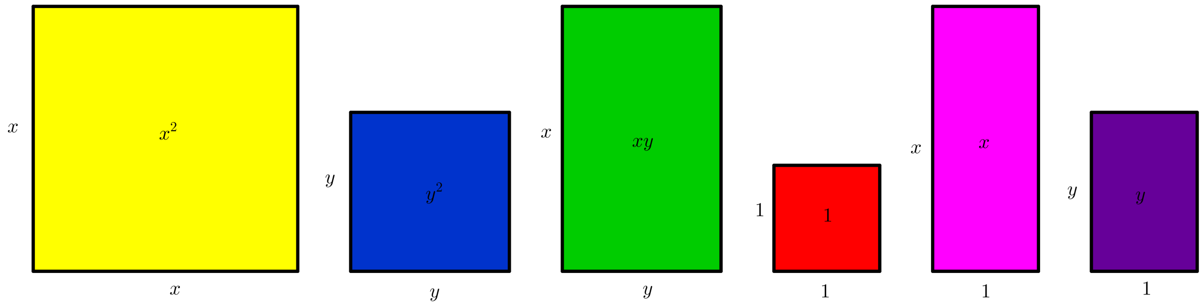


Figura B.15: ATIVIDADE 03 - Equações do 2º Grau

$\boldsymbol{ATV04E2GQUADPERF}$ $(x-1)^2=0$	$\boldsymbol{ATV04E2GQUADPERF}$ $x=1$
$\boldsymbol{ATV04E2GQUADPERF}$ $x^2-2x+1=0$	$\boldsymbol{ATV04E2GQUADPERF}$ $x^2-2x+9=0$
$\boldsymbol{ATV04E2GQUADPERF}$ $(x+6)^2=0$	$\boldsymbol{ATV04E2GQUADPERF}$ $x=-6$
$\boldsymbol{ATV04E2GQUADPERF}$ $x^2+12x+36=0$	$\boldsymbol{ATV04E2GQUADPERF}$ $x^2+12x+49=0$
$\boldsymbol{ATV04E2GQUADPERF}$ $(x-8)^2=0$	$\boldsymbol{ATV04E2GQUADPERF}$ $x=8$
$\boldsymbol{ATV04E2GQUADPERF}$ $x^2-16x+64=0$	$\boldsymbol{ATV04E2GQUADPERF}$ $x^2-16x+25=0$
$\boldsymbol{ATV04E2GQUADPERF}$ $(x-3)^2=0$	$\boldsymbol{ATV04E2GQUADPERF}$ $x=3$
$\boldsymbol{ATV04E2GQUADPERF}$ $x^2-6x+9=0$	$\boldsymbol{ATV04E2GQUADPERF}$ $x^2-6x+4=0$

Figura B.16: ATIVIDADE 04 - Equações do 2º Grau

$ATV04E2GQUADPERF$ $(x-5)^2=0$	$ATV04E2GQUADPERF$ $x=5$
$ATV04E2GQUADPERF$ $x^2-10x+25=0$	$ATV04E2GQUADPERF$ $x^2-10x+36=0$
$ATV04E2GQUADPERF$ $(x-10)^2=0$	$ATV04E2GQUADPERF$ $x=10$
$ATV04E2GQUADPERF$ $x^2-20x+100=0$	$ATV04E2GQUADPERF$ $x^2-20x+64=0$
$ATV04E2GQUADPERF$ $(x+7)^2=0$	$ATV04E2GQUADPERF$ $x=-7$
$ATV04E2GQUADPERF$ $x^2+14x+49=0$	$ATV04E2GQUADPERF$ $x^2+14x+16=0$
$ATV04E2GQUADPERF$ $(x+11)^2=0$	$ATV04E2GQUADPERF$ $x=-11$
$ATV04E2GQUADPERF$ $x^2+22x+121=0$	$ATV04E2GQUADPERF$ $x^2+22x+81=0$

Figura B.17: ATIVIDADE 04 - Equações do 2º Grau

$ATV05E2BINGOEQUA - CR$ $x^2 + 8x + 16 - 16 + 15 = 0$	$ATV05E2GBINGOEQUA$ $(x+4)^2 = 1$
$ATV05E2GBINGOEQUA$ $x^2 + 8x + 15 = 0$	$ATV05E2GBINGOEQUA$ $x = -3 \ ou \ x = -5$
$ATV05E2BINGOEQUA - CR$ $x^2 + 6x + 9 - 9 + 5 = 0$	$ATV05E2GBINGOEQUA$ $(x+3)^2 = 4$
$ATV05E2GBINGOEQUA$ $x^2 + 6x + 5 = 0$	$ATV05E2GBINGOEQUA$ $x = -5 \ ou \ x = -1$
$ATV05E2BINGOEQUA - CR$ $x^2 + 10x + 25 - 25 - 39 = 0$	$ATV05E2GBINGOEQUA$ $(x+5)^2 = 64$
$ATV05E2GBINGOEQUA$ $x^2 + 10x - 39 = 0$	$ATV05E2GBINGOEQUA$ $x = -13 \ ou \ x = 3$
$ATV05E2BINGOEQUA - CR$ $x^2 + 4x + 4 - 4 - 12 = 0$	$ATV05E2GBINGOEQUA$ $(x+2)^2 = 16$
$ATV05E2GBINGOEQUA$ $x^2 + 4x - 12 = 0$	$ATV05E2GBINGOEQUA$ $x = 2 \ ou \ x = -6$

Figura B.18: ATIVIDADE 05 - Equações do 2º Grau

$ATV05E2BINGOEQUA - CR$ $x^2 - 8x + 16 - 16 + 18 = 0$	$ATV05E2GBINGOEQUA$ $(x - 4)^2 = -2$
$ATV05E2GBINGOEQUA$ $x^2 - 8x + 18 = 0$	$ATV05E2GBINGOEQUA$ *Não existe valor real para x*
$ATV05E2BINGOEQUA - CR$ $x^2 + 6x + 9 - 9 + 8 = 0$	$ATV05E2GBINGOEQUA$ $(x + 3)^2 = 1$
$ATV05E2GBINGOEQUA$ $x^2 + 6x + 8 = 0$	$ATV05E2GBINGOEQUA$ $x = -4$ *ou* $x = -2$
$ATV05E2BINGOEQUA - CR$ $x^2 - 10x + 25 - 25 - 11 = 0$	$ATV05E2GBINGOEQUA$ $(x - 5)^2 = 36$
$ATV05E2GBINGOEQUA$ $x^2 - 10x - 11 = 0$	$ATV05E2GBINGOEQUA$ $x = -1$ *ou* $x = 11$
$ATV05E2BINGOEQUA - CR$ $x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = 0$	$ATV05E2GBINGOEQUA$ $(x - 1)^2 = 4$
$ATV05E2GBINGOEQUA$ $x^2 - 2x - 3 = 0$	$ATV05E2GBINGOEQUA$ $x = 3$ *ou* $x = -1$

Figura B.19: ATIVIDADE 05 - Equações do 2º Grau

ATV06E2G $x^2+8x+15=0$	***DOMINÓ*** $(x-7)(x+7)=0$	***ATV06E2G*** $x^2-49=0$	***DOMINÓ*** $(x-5)(x+2)=0$
ATV06E2G $x^2-3x-10=0$	***DOMINÓ*** $(x-4)(x-8)=0$	***ATV06E2G*** $x^2-12x+32=0$	***DOMINÓ*** $x^2-36=0$
ATV06E2G $(x+6)(x-6)=0$	***DOMINÓ*** $x^2-2x-8=0$	***ATV06E2G*** $(x-4)(x+2)=0$	***DOMINÓ*** $x^2-12x+36=0$
ATV06E2G $(x-6)^2=0$	***DOMINÓ*** $x^2+3x-10=0$	***ATV06E2G*** $(x+5)(x-2)=0$	***DOMINÓ*** $x^2-5x+4=0$
ATV06E2G $(x-1)(x-4)=0$	***DOMINÓ*** $x^2+4x+4=0$	***ATV06E2G*** $(x+2)^2=0$	***DOMINÓ*** $x^2-x-6=0$
ATV06E2G $(x-3)(x+2)=0$	***DOMINÓ*** $x^2+8x+12=0$	***ATV06E2G*** $(x+2)(x+6)=0$	***DOMINÓ*** $x^2+x-20=0$
ATV06E2G $(x-4)(x+5)=0$	***DOMINÓ*** $x^2+7x+12=0$	***ATV06E2G*** $(x+3)(x+4)=0$	***DOMINÓ*** $x^2+11x+30=0$

Figura B.20: ATIVIDADE 06 - Equações do 2º Grau

ATV06E2G $x = 7$ *ou* $x = -7$ *DOMINÓ*	*ATV06E2G* $x = 4$ *ou* $x = 8$ *DOMINÓ*	*ATV06E2G* $x = 6$ *ou* $x = -6$ *DOMINÓ*	*ATV06E2G* $x = 6$ *DOMINÓ*
ATV06E2G $x = -5$ *ou* $x = 2$ *DOMINÓ*	*ATV06E2G* $x = 1$ *ou* $x = 4$ *DOMINÓ*	*ATV06E2G* $x = -2$ *DOMINÓ*	*ATV06E2G* $x = 3$ *ou* $x = -2$ *DOMINÓ*
ATV06E2G $x = -2$ *ou* $x = -6$ *DOMINÓ*	*ATV06E2G* $x = 4$ *ou* $x = -5$ *DOMINÓ*	*ATV06E2G* $x = -3$ *ou* $x = -4$ *DOMINÓ*	*ATV06E2G* $x = -6$ *ou* $x = -5$ *DOMINÓ*
	ATV06E2G $x = 5$ *ou* $x = -2$ *DOMINÓ*	*ATV06E2G* $x = -3$ *ou* $x = -5$ *DOMINÓ*	

Figura B.21: ATIVIDADE 06 - Equações do 2º Grau

ATV07E2GBARALHO $2x^2+3x-5=0$	***ATV07E2GBARALHO*** $x^2-7x+10=0$	***ATV07E2GBARALHO*** $x^2-2x+1=0$
ATV07E2GBARALHO $x^2-10x+9=0$	***ATV07E2GBARALHO*** $x^2+3x-4=0$	***ATV07E2GBARALHO*** $x^2-3x-4=0$
ATV07E2GBARALHO $x^2+6x+5=0$	***ATV07E2GBARALHO*** $x^2+4x+3=0$	***ATV07E2GBARALHO*** $x^2+12x+20=0$
ATV07E2GBARALHO $x^2+2x-15=0$	***ATV07E2GBARALHO*** $2x^2-5x-3=0$	***ATV07E2GBARALHO*** $6x^2-5x+1=0$
ATV07E2GBARALHO $x^2-x-2=0$	***ATV07E2GBARALHO*** $x^2-x+20=0$	***ATV07E2GBARALHO*** $x^2-7x+6=0$
ATV07E2GBARALHO $x^2-3x+2=0$	***ATV07E2GBARALHO*** $x^2-6x+9=0$	***ATV07E2GBARALHO*** $x^2-4x-5=0$

Figura B.22: ATIVIDADE 07 - Equações do 2º Grau

ATV07E2GBARALHO $S = \{-\frac{5}{4}, 1\}$	***ATV07E2GBARALHO*** $S = \{2, 4\}$	***ATV07E2GBARALHO*** $S = \{1\}$
ATV07E2GBARALHO $S = \{1, 9\}$	***ATV07E2GBARALHO*** $S = \{-4, 1\}$	***ATV07E2GBARALHO*** $S = \{-1, 4\}$
ATV07E2GBARALHO $S = \{-5, -1\}$	***ATV07E2GBARALHO*** $S = \{-3, -1\}$	***ATV07E2GBARALHO*** $S = \{-10, -2\}$
ATV07E2GBARALHO $S = \{-5, 3\}$	***ATV07E2GBARALHO*** $S = \{-\frac{1}{2}, 3\}$	***ATV07E2GBARALHO*** $S = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$
ATV07E2GBARALHO $S = \{-1, 2\}$	***ATV07E2GBARALHO*** $S = \{-4, 5\}$	***ATV07E2GBARALHO*** $S = \{1, 6\}$
ATV07E2GBARALHO $S = \{-1, 2\}$	***ATV07E2GBARALHO*** $S = \{3\}$	***ATV07E2GBARALHO*** $S = \{-1, 5\}$

Figura B.23: ATIVIDADE 07 - Equações do 2º Grau

ATV09E2GTRILHA C01

Verificar se 2 é raiz

da equação :

$$3x^2 - x + 8 = 22$$

Se é, avança 3 casas

Se não, permaneça no lugar

ATV09E2GTRILHA C02

A equação :

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 0$$

É uma equação do 2º grau?

Se é, permaneça no lugar

Se não, avance 2 casas

ATV09E2GTRILHA C03

Resolva a equação :

$$x^2 - 3x = 0$$

Some as suas raízes e

avance tantas casas quanto a

a resposta desta soma

ATV09E2GTRILHA C04

Resolva a equação :

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

Some as suas raízes e

avance tantas casas quanto

for a resposta desta soma

ATV09E2GTRILHA C05

Resolva a equação :

$$x^2 - 6x = 0$$

Some as suas raízes e

avance tantas casas quanto

for a resposta desta soma

ATV09E2GTRILHA C06

Resolva a equação :

$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

Some as suas raízes e

avance tantas casas quanto a

a resposta desta soma

ATV09E2GTRILHA C07

A equação :

$$2x^2 - 20x + 50 = 0$$

Possui um único número

real como raiz.

Avance o mesmo
número de casa

ATV09E2GTRILHA C08

Quando $\Delta > 0$

a equação possui
quantas raízes
reais e diferentes?
O número de casas que
você deve avançar é igual
a sua resposta.

ATV09E2GTRILHA C09

A equação :

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

têm 2 raízes reais
e iguais. Avance o mesmo
número de casas desta
raiz.

ATV09E2GTRILHA C10

Resolva a equação :

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Some as suas raízes e
avance o mesmo número
de casas.

ATV09E2GTRILHA C11

Resolva a equação :

$$x^2 - 12x + 32 = 0$$

A menor das raízes é
o número de casas que
você deverá avançar.

ATV09E2GTRILHA C12

Resolva a equação :

$$x^2 - 13x + 42 = 0$$

A menor das raízes é
o número de casas que
você deverá avançar.

ATV09E2GTRILHA C13

Verificar se 1 é raiz
da equação :

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Se é, avance 3 casas.
Caso contrário, permaneça
no lugar.

ATV09E2GTRILHA C14

Verificar se -11 é raiz
da equação :

$$x^2 + 14x + 48 = 0$$

Se é, avance 3 casas.
Caso contrário, permaneça
no lugar.

ATV09E2GTRILHA C15

Verificar se -9 é raiz
da equação :

$$x^2 + 13x + 36 = 0$$

Se é, avance 3 casas.
Caso contrário, permaneça
no lugar.

Figura B.24: ATIVIDADE 09 - Equações do 2º Grau

ATV09E2GTRILHA C16

É verdade que se $\Delta > 0$, a equação possui 2 raízes reai e iguais? Se for verdade avance 3 casas caso contrário permaneça no lugar.

ATV09E2GTRILHA C17

Resolva a equação :

$$x^2 - x - 12 = 0$$

Some as suas raízes e avance tantas casas quanto a a resposta desta soma

ATV09E2GTRILHA C18

Determinar os números que somados resulta -2 e multiplicados -8. Avançar o mesmo número de casas do maior destes números

ATV09E2GTRILHA C19

Determinar dois números que somados resulta 1 e multiplicados resulta -20. Avançar o mesmo número de casas do maior destes números.

ATV09E2GTRILHA C20

Verificar se -5 é rais da equação :

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

Se é, avance 2 casas, caso contrário permaneça no lugar.

ATV09E2GTRILHA C21

Determinar dois números que somados resulta 6 e multiplicados resulta 5. Avançar o mesmo número de casas do menor destes números.

ATV09E2GTRILHA C22

Verificar se 9 é raiz da equação :

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

Se é, avance 2 casas, caso contrário, permaneça no lugar.

ATV09E2GTRILHA C23

Resolva a equação :

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Some as raízes e avance tantas casas quanto a resposta desta soma.

ATV09E2GTRILHA C24

Resolva a equação :

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Avance o mesmo número de casas da menor de suas raízes.

ATV09E2GTRILHA C25

Resolva a equação :

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Avance o mesmo número de casas da menor de suas raízes.

ATV09E2GTRILHA C26

Resolva a equação :

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

Avance o mesmo número de casas da menor de suas raízes.

Figura B.25: ATIVIDADE 09 - Equações do 2º Grau

Referências Bibliográficas

[1] Alves, Eva Maria Siqueira, *A ludicidade e o ensino de matemática: Uma prática possível.* Campinas, SP: Papirus 2007.

[2] Brenelli, Rosely Palermo. *Intervenções Pedagógicas, via jogos de Quiles e Cilada, para favorecer a construção de estruturas operatórias e noções aritméticas em crianças com dificuldades de aprendizagem.* Campinas, UNICAMP, 1993. Tese de Doutorado.

[3] Callois, Roger *Os jogos e os homens: A máscara e a vertigem..* Tradução de José Garcez Palha. Lisboa: Edições Cotovia (1990).

[4] Chavante, Eduardo Rodrigues. *Convergências: matemática, 7º e 9º ano: anos finais: ensino fundamental/ Eduardo Rodrigues Chavante.* 1.ed. - São Paulo: Edições SM, 2015. - (Convergências).

[5] Elkonin, Daniel B., *Paicologia del juego..* Madri: Valência S.A (1995).

[6] GEMA, Grupo de Estudos de Matemática. *GEMA - Grupo de Estudos de matemática, 2º ano do Programa de Formação Continuada* – Governo do Estado de Goiás - Secretaria de Estado da Educação, caderno 7, 2005.

[7] Garbi, Gilberto Geraldo, *O romance das equações algébricas/ Gilberto Geraldo Garbi.*-São Paulo: Makron Books, 1997.

[8] Grando, Regina Célia, *O jogo e suas possibilidades metodológicas no precesso ensino e aprendizagem da matemática.* Dissertação de Mestrado. Campinas: Unicamp.

[9] http://www.utfpr.edu.br.Algeplan. Acesso em 24/01/2017.

[10] HTTP://PIBIDMATH.BLOGSPOT.COM.BR. Baralho de Equações do 2º grau. Acesso em 25/12/2016.

[11] HTTP://BLOGPROFLEILA.BLOGSPOT.COM.BR. Trilha das Equações do 2º grau. Acesso em 25 de Dezembro de 2016.

[12] PROFMATJEANE.BLOGSPOT.COM.BR. Jogo das Equações. Acesso em 25 de Dezembro de 2016.

[13] <HTTP://WWW.MATEMATIQUES.COM.BR>.A origem das equações do 1º grau. Acesso em 21 de outubro de 2016.

[14] LIMA, ELON LAGES, *Números e Funções Reais*, SBM, Coleção PROFMAT, Volume único, 1ª Edição, Rio de Janeiro,(2013,p.297).

[15] LIMA, ELON LAGES. *Números e Funções Reais/ Elon Lages Lima.* – Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[16] LORENZATO,SÉRGIO. *Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.*Campinas: Autores associados, 2006.

[17] MACEDO, LINO DE, *Ensaios Construtivistas.* São Paulo: Casa do Psicólogo, 1994.

[18] MACHADO, NILSON JOSÉ ET AL., *Jogos no ensino da matemática.* Cadernos de Prática de Ensino, nº 1. USP. (Série Matemática)(1990).

[19] MOURA, MANUEL ORISVALDO DE, *A Séria Busca no jogo: do lúdico na matemática.* A Educação Matemática em Revista, nº3, 1994.

[20] MAGINA, S. SPINILLO, A. G. *Alguns mitos sobre a educação matemática e suas consequências para ensino fundamental.* In: Regina Maria Pavanello. (Org.). Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental: A pesquisa e a sala de aula. 1ª ed. São Paulo: Ed. SPEM, V.2, p.7-36. 2004.

[21] MORGADO, AUGUSTO CESAR. *Matemática Discreta/ Augusto César Morgado; Paulo Cezar Pinto Carvalho. Capa de Pablo Diego REgino* – Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[22] PIAGET, JEAN E INHELDER, B., *Memory and intelligence..* Nova York: Basic Books, 1973.

[23] PCN, Parâmetros Curriculares Nacionais. *Matemática.* Secretaria de Educação Fundamental. - Brasília: MEC/SEF,1998.

[24] RABELO, E.H.;LORENZATO S.A. *Ensino de Matemática: Reflexões para uma aprendizagem significativa.* Revista Zetetiké. Campinas, ano 2, nº 2, p.37-46, março de 1994.

[25] Sadovsky, Patricia, 1953. *O ensino de matemática hoje.* 1ed-SP: Ática 2010.

[26] Schliemann, Ana Lúcia Dias. *Na vida dez na escola zero.* 10ª ed., SP: Cortez, 1995.

[27] Sessa, Carmem. *Iniciação ao estudo didático da álgebra: origens e perspectivas.* Carmem Sessa: Tradução Damian Kraus - São Paulo: Edições SM, 2009.

[28] Silveira, Ênio. *Matemática: compreensão e prática/ Ênio Silveira, 7º e 9º ano.* - 3.ed - São Paulo: Moderna, 2015

[29] Souza, Joamir Roberto de. *Vontade de saber matemática, 7º e 9º ano/ Joamir Roberto de Souza, Patrícia Rosana Moreno Pataro.* 2.ed. - São Paulo: FTD, 2012.

[30] Telles, Rosinalda Aurora de Melo. *A aritmética e a álgebra na matemática escolar.* In: Encontro Nacional de Ed. Matemática, 8,2004, Recife. Anais do VII ENEM- Minicurso GT2 - Educação Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental. Recife, UFPE,11p.

[31] Vygotsky, Lev Semynovich, *A formação social da mente.* Tradução de José Cipolla Neto et al. São Paulo: Martins Fontes, 1994.

[32] Dante, Luiz Roberto, *Matemática: contextos e aplicações, 3º ano.* 2.ed. - São Paulo: Ática, 2003.

[33] http://tudonumero.blogspot.com.br/2008/05/jogo-de-ao-equaes-do-2-grau.html. Acesso em 24 de dezembro de 2016.

[34] http://equacaosemcomplicacao.blogspot.com.br/2012/05/etapa-3-jogo-jogo-das-equacoes.html. Jogo das Equações. Acesso em 24 de dezembro de 2016.

[35] http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n05/n05-Artigo01.pdf. A equação do 3º grau. Acesso em 25 de janeiro de 2017.