



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI - UFCA**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**  
**EM REDE NACIONAL**

**FRANCISCO DIAS FERREIRA**

**UNIFICANDO OS TEOREMAS DE MENELAUS E CEVA**

**JUAZEIRO DO NORTE**

**2017**

FRANCISCO DIAS FERREIRA

UNIFICANDO OS TEOREMAS DE MENELAUS E CEVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Plácido F. de Assis Andrade

JUAZEIRO DO NORTE

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Cariri

---

F383u Ferreira, Francisco Dias.

Unificando os teoremas de Menelaus e Ceva / Francisco Dias Ferreira. – 2017.  
64 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia,  
Programa de Pós-Graduação em Matemática Rede Nacional - PROFMAT, Juazeiro do Norte, 2017.  
Área de Concentração: Ensino de Matemática.  
Orientação: Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade.

1. Teorema de Menelaus. 2. Teorema de Ceva. 3. Teorema de Routh. I. Título.

CDD 516

---



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

---

## Unificando os Teoremas de Menelaus e Ceva

*Francisco Dias Ferreira*

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 21 de julho de 2017.

### Banca Examinadora

*Plácido Francisco de Assis Andrade*

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade – UFCA

Orientador

*Francisco de Assis Benjamin Filho*

Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamin  
Filho - UFCA

*Francisco Pereira Chaves*

Prof. Dr. Francisco Pereira Chaves- UFCA

*Ao meu querido pai  
Cícero Dias de Oliveira  
(in memoriam).*

# AGRADECIMENTOS

A minha mãe, Francisca Ferreira, por sempre estar comigo durante toda a minha vida, oferecendo amor e dedicação.

Ao meu pai, Cícero Dias, minha fonte de inspiração.

Aos meus irmãos, por todo amor e empenho para ajudar na minha formação.

A Ligia Maria, minha namorada, por todo carinho, amor, dedicação e acima de tudo, pelo companheirismo.

A todos os professores, por terem contribuído para o meu crescimento intelectual.

A Plácido Andrade, meu orientador, por toda a contribuição e pela disposição ao longo da realização dessa pesquisa.

A todos os colegas de curso, principalmente, ao colega de viagem e amigo, Francisco de Assis, por todos os momentos de aprendizado que partilhamos juntos.

À coordenadora Maria Silvana, pelo apoio e estímulo nas etapas do processo.

À Sociedade Brasileira de Matemática, pela idealização e coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa concedida.

*“A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar,  
e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade  
e ajudar-nos na vida.”*

*(Jacques Bernoulli)*

# RESUMO

A Geometria surgiu da necessidade do homem em medir formas. Mentres geniais como Tales de Mileto, Pitágoras, Arquimedes de Siracusa, Menelaus de Alexandria, Giovanni Ceva, entre outros, estudaram sobre os triângulos e suas propriedades. Essencialmente, este trabalho irá abordar dois resultados que tratam de pontos sobre as retas suportes de um triângulo. O Teorema de Menelaus estabelece um critério para que tais pontos sejam colineares e o Teorema de Ceva fornece uma condição para que três cevianas sejam concorrentes. Faremos uma abordagem detalhada destes dois teoremas, bem como aplicações e suas versões espaciais. Em seguida, estudaremos duas expressões para área de triângulos formados por cevianas. Ao final, usando um pouco de Geometria Analítica e Álgebra Linear, mostraremos um resultado, pouco conhecido e divulgado, que unifica os teoremas de Ceva e Menelaus, creditado a dois matemáticos romenos, Árpád Bényi e Branko Curgus.

**Palavras-chave:** Teorema de Menelaus. Teorema de Ceva. Teorema de Routh.

# ABSTRACT

Geometry emerged from man's need to measure shapes. Genius minds such as Thales of Miletus, Pythagoras, Archimedes of Syracuse, Menelaus of Alexandria, Giovanni Ceva, among others, studied about the triangles and their properties. Essentially, this paper will address two results that deal with points on the straight lines supports of a triangle. The Menelaus Theorem establishes a criterion for such points to be collinear and the Ceva Theorem provides a condition for three cevians to be competitors. We will take a detailed approach to these two theorems, as well as applications and their spatial versions. Then, we will study two expressions for area of triangles formed by cevians. In the end, using a little of Analytical Geometry and Linear Algebra, we will show a little known and publicized result, unifying the theorems of Ceva and Menelaus, credited to two Romanian mathematicians, Árpád Bényi and Branko Curgus.

**Keywords:** Theorem of Menelaus. Ceva's Theorem. Routh's Theorem.

# LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Menelaus de Alexandria (★ c. 70 – † c. 100 ). . . . .	15
Figura 2 – Giovanni Ceva (★ 1647 – † 1734 ). . . . .	16
Figura 3 – Jonh Routh (★ 1831 – † 1907 ). . . . .	16
Figura 4 – Teorema de Tales. . . . .	18
Figura 5 – Lei dos senos. . . . .	18
Figura 6 – Ângulo $\widehat{ABC}$ . . . . .	19
Figura 7 – Ângulo $\widehat{CBA}$ . . . . .	19
Figura 8 – 1º caso. . . . .	20
Figura 9 – 2º caso. . . . .	20
Figura 10 – Construção do segmento $CT$ . . . . .	21
Figura 11 – R entre Q e P. . . . .	22
Figura 12 – Triângulo $PQR$ . . . . .	22
Figura 13 – Segmentos $FB$ e $DE$ . . . . .	24
Figura 14 – Segmento $EY$ . . . . .	24
Figura 15 – Alturas relativas dos triângulos $ARQ$ , $PQC$ e $BPR$ . . . . .	25
Figura 16 – Segmentos $AD$ , $BE$ e $CF$ . . . . .	26
Figura 17 – Triângulo $ABC$ . . . . .	27
Figura 18 – Triângulos $ACR$ e $BCR$ . . . . .	29
Figura 19 – Triângulos $ABP$ e $ACP$ . . . . .	29
Figura 20 – Triângulos $BCQ$ e $ABQ$ . . . . .	30
Figura 21 – Casos possíveis para o quadrilátero $ABCD$ . . . . .	31
Figura 22 – Tetraedro $ABCD$ intersetado pelo plano $PQRS$ . . . . .	32
Figura 23 – Reta $t$ perpendicular ao plano $PQRS$ . . . . .	32
Figura 24 – Girard Desargues (★ 1591 – † 1661). . . . .	33
Figura 25 – Teorema de Desargues . . . . .	34
Figura 26 – Teorema de Desargues para retas paralelas. . . . .	36
Figura 27 – Cevianas de um triângulo $ABC$ . . . . .	37
Figura 28 – Distâncias $H$ e $h$ . . . . .	38
Figura 29 – Cevianas concorrendo internamente. . . . .	40
Figura 30 – Cevianas concorrendo externamente. . . . .	40
Figura 31 – Cevianas paralelas. . . . .	40
Figura 32 – Teorema de Ceva. . . . .	41
Figura 33 – Teorema de Ceva para cevianas paralelas. . . . .	42
Figura 34 – Áreas no triângulo $ABC$ . . . . .	44
Figura 35 – Versão trigonométrica do Teorema de Ceva. . . . .	45
Figura 36 – Concorrência entre as bissetrizes internas. . . . .	46

Figura 37 – Cevianas concorrendo em $P'$ .	47
Figura 38 – Interseção entre os planos $AZB$ , $BWC$ , $CXD$ e $DYA$ .	48
Figura 39 – Plano $PA'C'$ intersectando o segmento $BD$ no ponto $T$ .	48
Figura 40 – Segmentos $AA'$ e $CC'$ .	49
Figura 41 – Ponto de Gergonne.	50
Figura 42 – Circunferência inscrita no triângulo $ABC$ .	50
Figura 43 – Ponto de Nagel.	51
Figura 44 – Triângulo ceviano $A'B'C'$ .	53
Figura 45 – Triângulo com um terço de área.	55
Figura 46 – Triângulo de Routh.	56
Figura 47 – Triângulos $BC''C$ e $AC''B$ .	56
Figura 48 – Triângulos $ACA'$ e $ABA'$ .	57
Figura 49 – Triângulos $AC''B$ , $BC''C$ e $CC''A$ .	58
Figura 50 – Triângulos $CA''B$ e $CA''A$ .	58
Figura 51 – Triângulos $AB''C$ e $AB''B$ .	58
Figura 52 – Triângulos $AC''B$ , $BA''C$ e $CB''A$ .	59
Figura 53 – Triângulo com um sétimo de área.	59
Figura 54 – Localizações do ponto $A_x$ .	61
Figura 55 – Cevianas $AA_x$ , $BB_y$ e $CC_z$ .	62
Figura 56 – Triângulo $A_xB_yC_z$ .	62
Figura 57 – Reta paralela a $BC$ .	63
Figura 58 – Variação de sinal das áreas do triângulo $A_xB_yC_z$ .	63
Figura 59 – Triângulo $A''B''C''$ .	64
Figura 60 – Cevianas paralelas.	64
Figura 61 – Triângulo generalizado de Routh.	65
Figura 62 – $u \rightarrow x$ , $v \rightarrow y$ e $w \rightarrow z$ .	65
Figura 63 – $u = v = w \rightarrow 0$ .	65
Figura 64 – Triângulo de vértices $A(0,0)$ , $B(1,0)$ e $C(0,1)$ .	66
Figura 65 – $u = v = w = 0$ e $xyz = -1$ .	69
Figura 66 – $u = x$ , $v = y$ , $w = z$ e $xyz = 1$ .	69

# LISTA DE SÍMBOLOS

$\overleftrightarrow{AB}$	Reta que contém os pontos A e B
$\overrightarrow{AB}$	Semirreta com origem em A
$AB$	Segmento AB
$\overline{AB}$	Comprimento do segmento AB
$S_{ABC}$	Área de um triângulo ABC
$V_{ABCD}$	Volume do sólido ABCD
$\sim$	Semelhante

# SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>1 HISTÓRIA E PRELIMINARES</b>	<b>15</b>
1.1 História	15
1.1.1 Menelaus de Alexandria	15
1.1.2 Giovanni Ceva	16
1.1.3 John Routh	16
1.2 Preliminares	17
<b>2 TEOREMA DE MENELAUS</b>	<b>20</b>
2.1 Teorema de Menelaus	20
2.2 Prova por semelhança de triângulos retângulos	25
2.3 Prova por razão entre áreas	26
2.4 Forma trigonométrica do Teorema de Menelaus	28
2.5 Teorema de Menelaus no espaço	31
2.6 Aplicação: Teorema de Desargues	33
<b>3 TEOREMA DE CEVA</b>	<b>37</b>
3.1 Teorema de Ceva	37
3.2 Prova por razão entre áreas	43
3.3 Versão trigonométrica do Teorema de Ceva	45
3.4 Teorema de Ceva no espaço	47
3.5 Aplicações: Ponto de Gergonne e Nagel	50
<b>4 EXPRESSÕES DE ROUTH</b>	<b>53</b>
4.1 1ª expressão de Routh	53
4.2 2ª expressão de Routh	55
<b>5 UNIFICANDO OS TEOREMAS DE MENELAUS E CEVA</b>	<b>61</b>
5.1 Preliminares	61
5.2 Unificando os teoremas de Ceva e Menelaus	64
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>70</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>71</b>

# INTRODUÇÃO

A Geometria começou a ser desenvolvida por uma necessidade natural de medir formas. Etimologicamente, geometria significa medida da terra. Cerca de 2900 a.C. foi construída a primeira pirâmide egípcia. O conhecimento da Geometria era essencial para a construção de pirâmides, que consistiam em uma base quadrada e faces triangulares. O registro mais antigo de uma fórmula para calcular a área de um triângulo remonta a 2000 a.C. Os egípcios (5000-500 a.C.) e os babilônios (4000-500 a.C.) desenvolveram uma geometria prática para resolver problemas cotidianos.

Os gregos (600 a.C. - 400 d.C.) foram os primeiros a criar os princípios da Geometria moderna, começando com Tales de Mileto (624 - 547 a.C.). Ele estudou triângulos semelhantes e provou que estes possuíam lados proporcionais. Outro grande geômetra grego foi Pitágoras (569 - 475 a.C.). A escola pitagórica é considerada por muitos como o berço da razão e do pensamento lógico. A contribuição mais famosa e útil dos pitagóricos foi o Teorema de Pitágoras.

Euclides de Alexandria (325-265 a.C.) foi um dos maiores geômetras gregos e é conhecido como o “pai da Geometria moderna”. Euclides ganhou notoriedade com seu livro *Os Elementos*, que causou um profundo impacto no desenvolvimento axiomático da Geometria. Dentre outros matemáticos gregos, podemos citar Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) pela sua brilhante mente criativa. Depois de Pappus (século IV), não houve grandes desenvolvimentos na Geometria até o aparecimento de René Descartes (1596-1650). Ele combinou Álgebra e Geometria para criar a Geometria Analítica. Esse ramo da matemática permite colocar uma figura geométrica em um sistema de coordenadas para ilustrar provas e obter informações usando equações algébricas.

Atualmente, a Geometria apresenta muitos resultados importantes que são abordados pelos professores em sala de aula. Contudo, alguns teoremas interessantes, muitas vezes, são deixados de lado, ou até mesmo esquecidos. Um bom exemplo desse fato são os resultados sobre os triângulos cevianos, que são triângulos delimitados pelas três cevianas de um triângulo. Debruçando-se sobre a literatura matemática brasileira, pouco se encontra sobre esses triângulos, bem como os dois teoremas de Routh que tratam dos mesmos. Este trabalho objetiva fazer uma abordagem detalhada dos teoremas de Ceva e Menelaus. Também, iremos apresentar duas expressões do matemático Jonh Routh e aplicá-las para estabelecer uma unificação desses dois teoremas, creditada a dois matemáticos romenos, Árpád Bényi e Branko Curgus. Para esse objetivo, organizamos os capítulos, como descrito a seguir:

No Capítulo 1, faremos uma breve abordagem histórica da vida e obra de três matemáticos: Menelaus de Alexandria, Giovanni Ceva e Jonh Routh. Nesse capítulo dedicamos, também, uma seção de preliminares para esclarecer alguns resultados e conceitos usados no decorrer do

texto.

Nos capítulos 2 e 3, apresentaremos os teoremas de Ceva e Menelaus. Realizaremos algumas demonstrações e aplicações. Será dada, também, uma interpretação no espaço destes dois teoremas.

No Capítulo 4, demonstraremos duas expressões pouco conhecidas, de autoria do matemático Jonh Routh. Para este fim, usaremos apenas conceitos elementares da Geometria Plana.

Finalmente, no Capítulo 5, exploraremos as duas expressões de Routh, usando Geometria Analítica e um pouco de Álgebra Linear, para chegarmos a uma unificação dos teoremas de Ceva e Menelaus.

# 1 HISTÓRIA E PRELIMINARES

Neste primeiro capítulo, vamos mostrar tópicos da História da Matemática que tratam dos matemáticos relacionados com o tema deste trabalho. Principalmente, vamos abordar um pouco de suas biografias e suas principais obras. Ainda neste capítulo, vamos dedicar uma seção para abordarmos alguns conceitos e notações que julgamos importantes para melhor compreensão do assunto desenvolvido.

## 1.1 História

Iniciaremos falando de um matemático que foi o responsável por difundir um importante teorema, o qual leva seu nome.

### 1.1.1 *Menelaus de Alexandria*



Figura 1: Menelaus de Alexandria (★ c. 70 – † c. 100).

Menelaus, foi um astrônomo e matemático nascido em Alexandria, Egito. Escreveu muitas obras em Trigonometria e Geometria. Há registros do século X, de um livro, em três volumes, chamado *Elementos de Geometria*. Foram encontrados fragmentos de uma tradução árabe intitulado de *Livro sobre Triângulos*. Contudo, a obra mais conhecida é *Sphaerica*, uma coleção de três livros que falavam sobre os triângulos esféricos. Dos três, apenas o terceiro volume se preservou em uma versão árabe. No livro *I* dessa coleção, ele estabelece uma base de conceitos para tratar dos triângulos esféricos<sup>1</sup>. No livro *II*, são feitas aplicações da Geometria Esférica à Astronomia. No livro *III*, na primeira proposição, é onde aparece o Teorema de Menelaus para triângulos esféricos. Vale ressaltar que a versão plana do teorema era conhecida antes de Menelaus, mesmo assim, ainda leva o seu nome nos dias atuais.

<sup>1</sup> Triângulo esférico é a porção da superfície esférica limitada pelos arcos de três circunferências máximas menores do que uma semicircunferência, que se intersejam dois a dois, ver [1].

### 1.1.2 Giovanni Ceva



Figura 2: Giovanni Ceva (★ 1647 – † 1734 ).

Giovanni Ceva foi um matemático, físico e engenheiro hidráulico italiano nascido em Milão. Foi educado em um colégio jesuíta de Milão e estudou na Universidade de Pisa, onde, mais tarde, ensinou até ser nomeado professor de Matemática na Universidade de Mântua, onde permaneceu até o fim de sua carreira. Seus primeiros estudos, em Matemática, tiveram como objetivo solucionar o clássico problema da quadratura do círculo, porém, após produzir várias demonstrações erradas para o problema, ele desistiu. Contudo, em 1678, Ceva publicou, no artigo *De lineis rectis*, um resultado da Geometria Sintética sobre triângulos que tratava sobre a concorrência entre as cevianas de um triângulo, conhecido atualmente como o Teorema de Ceva.

Ceva também redescobriu e publicou o Teorema de Menelaus neste mesmo trabalho. Naquela época, o trabalho não obteve muita repercussão, mas o matemático francês Joseph Diaz Gergonne (1771 – 1859) o redescobriu e o autor ganhou seu devido reconhecimento. O teorema pode estender-se a qualquer polígono simples com um número ímpar de lados. Além de seus trabalhos em Geometria, Ceva estudou aplicações de Mecânica e Estática para sistemas geométricos.

### 1.1.3 John Routh



Figura 3: John Routh (★ 1831 – † 1907 ).

Edward John Routh foi um matemático inglês graduado na Universidade de Cambridge, onde também foi professor. Ele contribuiu para a Matemática com alguns trabalhos de investigação de excelência. As áreas de pesquisa que mais lhe interessavam eram a Geometria, Dinâmica, Astronomia, Ondas, Vibrações e Análise Harmônica. Em 1856, tornou-se membro fundador da Sociedade Matemática de Londres. Ele também foi eleito membro da Royal Astronomical Society. Foi agraciado com diplomas honorários de diversas universidades, incluindo Glasgow (1878) e Dublin (1892).

Routh publicou famosos tratados avançados que se tornaram padrão de textos de Matemática aplicada. Dentre esses, *A Treatise on Analytical Statics with Numerous Examples*, apesar de não ser o assunto principal dessa obra, lá aparecem duas expressões referentes à área de triângulos cujos lados estão sobre as cevianas de outro triângulo. Esses dois resultados foram colocados na obra sem demonstração. Na página 82, logo após essas duas expressões, Routh escreve:

O autor não encontrou essas expressões para a área de dois triângulos que ocorrem com frequência. Por isso, ele os colocou aqui, em ordem, para que o argumento no texto possa ser mais facilmente compreendido. [2, p. 82].

## 1.2 Preliminares

Para o trabalho que segue, julgamos importante indicar alguns resultados e notações que serão usadas. Vale também alertar que iremos nos apoiar em resultados básicos de Geometria Plana, que podem ser encontrados com mais detalhes em [3].

Veremos o Teorema de Tales. Este estabelece que um feixe de retas paralelas determinam sobre suas secantes segmentos proporcionais. Por simplicidade, assumiremos a validade desse resultado sem demonstração.

**Teorema 1.2.1 (Teorema de Tales)** *Sejam  $r$ ,  $s$  e  $t$  retas paralelas. Considere dois ternos de pontos colineares :  $A \in r$ ,  $B \in s$  e  $C \in t$  e  $A' \in r$ ,  $B' \in s$  e  $C' \in t$ . Então*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

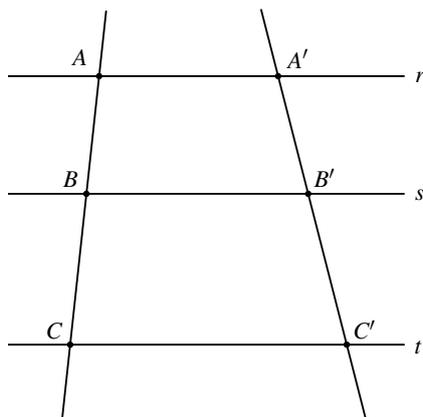


Figura 4: Teorema de Tales.

Em outro momento, usaremos a Lei dos Senos. Esta garante que os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos na mesma razão do diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo. Utilizaremos e daremos uma prova breve desse resultado.

**Proposição 1.2.1 (Lei dos Senos)** *Seja  $ABC$  um triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  inscrito em um círculo de raio  $R$ . Então,*

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}C}} = 2R.$$

**Demonstração**

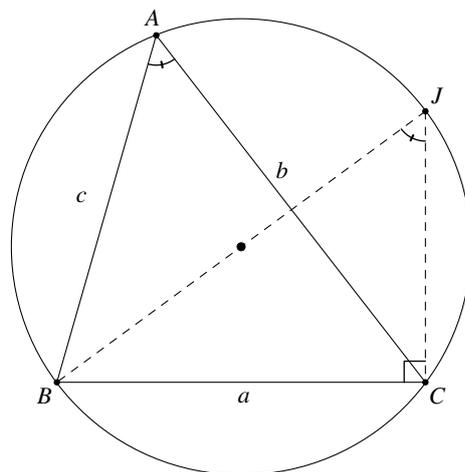


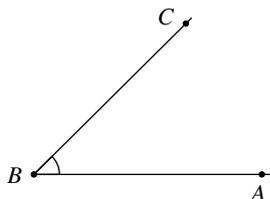
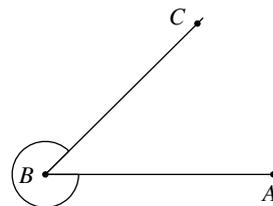
Figura 5: Lei dos senos.

Seja  $BJ$  um diâmetro desse círculo. Então o triângulo  $BJC$  é retângulo em  $C$  e  $\widehat{J} \cong \widehat{A}$ . Logo, temos

$$\widehat{\text{sen}A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\widehat{\text{sen}A}} = 2R.$$

Analogamente, encontramos as outras igualdades. ■

Para um ângulo de origem em  $B$  e semirretas  $\overrightarrow{BA}$  e  $\overrightarrow{BC}$ , não opostas, indicaremos a região angular convexa por  $\widehat{ABC}$  e por  $\widehat{CBA}$  a região não convexa. Ou seja, para evitar ambiguidade, a região angular convexa sempre será indicada listando os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , na ordem que eles aparecem percorrendo-se uma circunferência determinada por estes no sentido horário, garantindo que o vértice sempre seja indicado entre os dois outros pontos com um acento circunflexo. Veja as figuras abaixo.

Figura 6: Ângulo  $\widehat{ABC}$ .Figura 7: Ângulo  $\widehat{CBA}$ .

Em algumas passagens de demonstrações, utilizaremos uma propriedade bem conhecida de proporcionalidade. Sejam  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  e  $r_4$  números reais tais que  $r_2$  e  $r_4$  são não nulos e  $r_2 \neq r_4$ . Se

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4}, \quad \text{então} \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3 \pm r_1}{r_4 \pm r_2}.$$

Utilizaremos o símbolo  $\cong$  para congruência de ângulos. Quando precisarmos indicar que retas ou segmentos são paralelos utilizaremos o símbolo  $\parallel$ .

## 2 TEOREMA DE MENELAUS

Neste capítulo, abordaremos o Teorema de Menelaus. Faremos algumas demonstrações e apresentaremos uma versão deste teorema para um tetraedro no espaço euclidiano. Como aplicação, finalizamos o capítulo com o Teorema de Desargues, uma importante regra para o desenho de perspectiva.

### 2.1 Teorema de Menelaus

Seja  $ABC$  um triângulo. Vamos considerar pontos sobre as retas suportes dos lados do triângulo obtidos pela interseção de uma reta transversal  $r$ . As figuras abaixo ilustram duas situações que podem ocorrer. Na Figura 8, vemos que a reta  $r$  intersesta dois lados do triângulo  $ABC$ , enquanto na Figura 9, a reta  $r$  intersesta apenas as retas suportes desse triângulo.

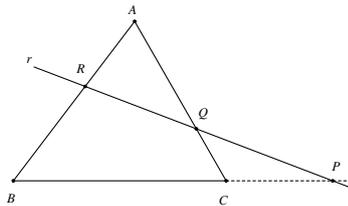


Figura 8: 1º caso.

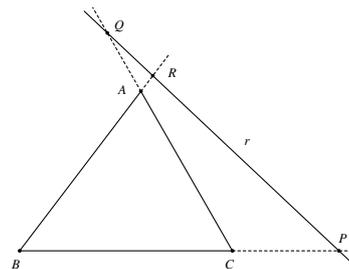


Figura 9: 2º caso.

Assumamos que  $R \in \overleftrightarrow{AB}$ ,  $Q \in \overleftrightarrow{AC}$  e  $P \in \overleftrightarrow{BC}$  são pontos distintos dos vértices. Em cada reta suporte ficam determinados três segmentos com extremidades nos vértices e nos pontos escolhidos. Por exemplo, no lado  $AB$  temos os segmentos  $AB$ ,  $AR$  e  $RB$ . Dentre estes, escolhemos:

- i)  $AR$  e  $RB$  em  $\overleftrightarrow{AB}$ ;
- ii)  $BP$  e  $PC$  em  $\overleftrightarrow{BC}$ ;
- iii)  $CQ$  e  $QA$  em  $\overleftrightarrow{AC}$ .

O Teorema de Menelaus garante que, ao escolhermos três segmentos sem extremidades comuns, o produto das medidas destes segmentos é igual ao produto das medidas dos segmentos restantes (que terão também extremidades distintas), ou seja,

$$\overline{AR} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{CQ} = \overline{RB} \cdot \overline{PC} \cdot \overline{QA}.$$

Observamos que os casos ilustrados nas figuras 8 e 9 são os únicos que podem acontecer (a menos de reindexação dos índices). Uma reta  $r$  que não incide nos vértices e interseca um dos lados do triângulo, digamos que seja o lado  $AB$ , interseca, necessariamente, um dos outros dois lados, pelo Axioma de Pasch<sup>1</sup>, necessariamente, a reta interseca um dos outros dois lados,  $BC$  ou  $CA$ , fato também ilustrado na Figura 8. Se ela não interseca os lados, a situação está ilustrada na Figura 9. Vejamos o Teorema de Menelaus para depois estabelecer uma generalização.

**Teorema 2.1.1** *Seja  $ABC$  um triângulo. Se  $R \in \overleftrightarrow{AB}$ ,  $Q \in \overleftrightarrow{AC}$  e  $P \in \overleftrightarrow{BC}$  são pontos distintos dos vértices do triângulo obtidos por interseção com uma reta  $r$ , então*

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = 1.$$

### Demonstração

1º caso Suponha inicialmente que  $r$  interseca dois lados do triângulo. Sem perda de generalidades, podemos assumir que  $P$  não está entre os vértices  $B$  e  $C$  e que  $Q$  está entre os pontos  $P$  e  $R$ . Tomemos  $T \in \overleftrightarrow{PR}$ , tal que  $\overleftrightarrow{CT} \parallel AB$ . Sendo assim, pelo Teorema dos Ângulos Alternos Internos,

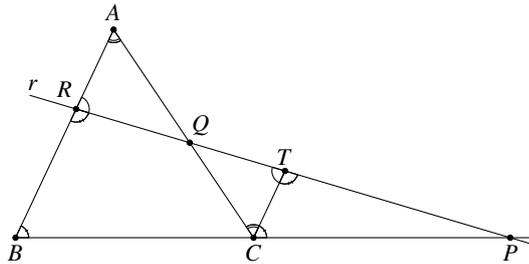


Figura 10: Construção do segmento  $CT$ .

temos  $\widehat{QRA} \cong \widehat{QTC}$ ,  $\widehat{RAQ} \cong \widehat{TCQ}$ ,  $\widehat{CBR} \cong \widehat{PCT}$  e  $\widehat{BRP} \cong \widehat{CTP}$ .

Como consequência temos

$$BPR \sim CPT \Rightarrow \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{RB}}{\overline{CT}}$$

e

$$AQR \sim CQT \Rightarrow \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{CT}}{\overline{AR}}.$$

Finalmente, concluímos que

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \cdot \frac{\overline{RB}}{\overline{CT}} \cdot \frac{\overline{CT}}{\overline{AR}} = 1.$$

2º caso Suponha que  $r$  não interseca os lados do triângulo.

<sup>1</sup> Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos não colineares e seja  $r$  uma reta do plano determinado por esses pontos e que não contém nenhum deles, então, se  $r$  interseca o segmento  $AB$ , ela também interseca  $AC$  ou  $BC$ .

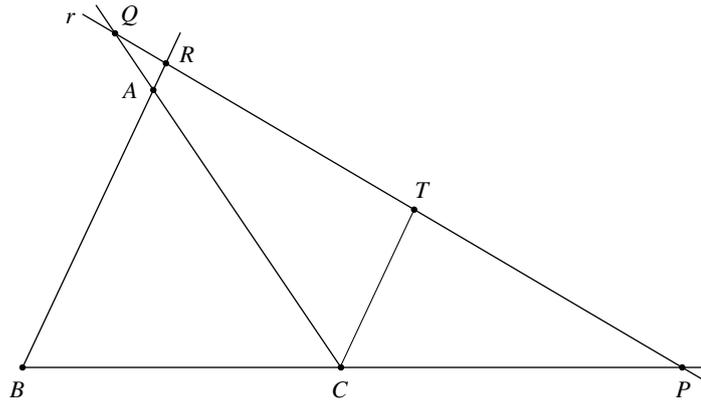


Figura 11: R entre Q e P.

Vamos assumir que  $R$  esteja entre  $P$  e  $Q$ , os outros casos são análogos. Seja  $T$  um ponto de  $r$  tal que  $\overleftrightarrow{CT} \parallel \overleftrightarrow{BA}$ . Note que  $BRP \sim CTP$  e  $QTC \sim QRA$ . O restante da demonstração segue de maneira semelhante ao caso anterior. ■

A recíproca desse teorema não é verdadeira. Por exemplo, considere um triângulo equilátero  $ABC$  e  $R \in \overleftrightarrow{AB}$ ,  $Q \in \overleftrightarrow{AC}$  e  $P \in \overleftrightarrow{BC}$  os pontos médios dos lados, conforme figura abaixo.

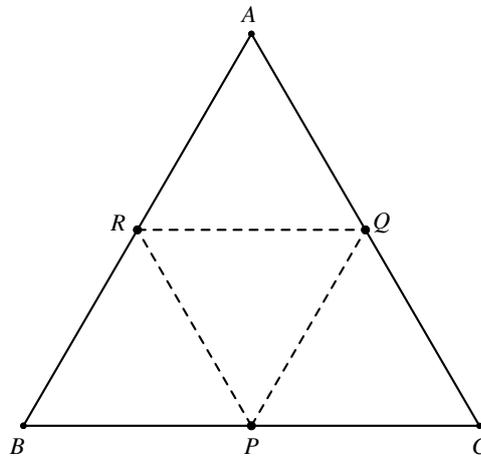


Figura 12: Triângulo  $PQR$ .

É imediato verificar que

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = 1.$$

Entretanto, os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  não são colineares.

Para termos a recíproca devemos introduzir um sinal nos fatores envolvidos.

Sejam  $X, Y$  pontos sobre uma reta  $r$ . Para um ponto  $Z$  sobre a reta  $r$  distinto de  $X$  e  $Y$  definimos um número real indicado por  $\frac{XZ}{ZY}$ , que pode ser positivo ou negativo dependendo da

posição de  $Z$  relativa aos pontos  $X$  e  $Y$ . Se  $Z$  está entre<sup>2</sup>  $X$  e  $Y$ , ou não está entre  $X$  e  $Y$ :

$$\frac{XZ}{ZY} = \begin{cases} \frac{\overline{XZ}}{\overline{ZY}} & \text{se } Z \text{ está entre } X \text{ e } Y \\ -\frac{\overline{XZ}}{\overline{ZY}} & \text{se } Z \text{ não está entre } X \text{ e } Y \end{cases}.$$

Estabelecida esta notação, podemos enunciar um Teorema de Menelaus no qual vale também a recíproca.

**Teorema 2.1.2 (Teorema de Menelaus)** *Sejam  $ABC$  um triângulo e  $R \in \overleftrightarrow{AB}$ ,  $Q \in \overleftrightarrow{AC}$  e  $P \in \overleftrightarrow{BC}$  pontos distintos dos vértices do triângulo. Os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são colineares se, e somente se,*

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1. \quad (2.1)$$

### Demonstração

( $\Rightarrow$ ) Podem ocorrer duas situações. Um, e somente um, ponto dentre  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , não pertence aos lados do triângulo ou os três pontos não pertencem aos lados do triângulo. Vamos supor que somente  $P$  não está entre dois vértices. Neste caso, pelo Teorema 2.1.1, teremos

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \cdot \left(-\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}\right) \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = -1.$$

No segundo caso, no qual os pontos não pertencem aos lados do triângulo:

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \left(-\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}}\right) \cdot \left(-\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}\right) \cdot \left(-\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}}\right) = -1.$$

( $\Leftarrow$ ) Também dividiremos a demonstração em dois casos. Vamos assumir, no primeiro caso, que somente  $P$  não está entre dois vértices, e que

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1.$$

Marque o ponto de encontro  $Q'$  das retas  $\overleftrightarrow{PR}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$ . Como  $P$ ,  $Q'$  e  $R$  são colineares, pela primeira parte da demonstração, concluímos que

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ'}{Q'A} = -1.$$

Comparando essa equação com (2.1), obtemos

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{CQ'}{Q'A}.$$

Note que  $Q$  e  $Q'$  estão no interior de  $AC$ . Fazendo  $\overline{AC} = a$ ,  $\overline{AQ} = x$  e  $\overline{AQ'} = y$ , ficamos com

$$\frac{x}{a-x} = \frac{y}{a-y} \Leftrightarrow ax - xy = ay - xy \Leftrightarrow x = y.$$

<sup>2</sup> “Está entre” é um termo primitivo do sistema axiomático da Geometria euclidiana, ele não é definido, ver [4].

Logo, os pontos  $Q$  e  $Q'$  coincidem e, então,  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são colineares.

No segundo caso, assumiremos que os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  não pertencem aos lados do triângulo, e que (2.1) é verdadeira. Marque o ponto de encontro  $R'$  das retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{PQ}$ . Como  $P$ ,  $Q$  e  $R'$  são colineares, pela primeira parte da demonstração, concluímos que

$$\frac{AR'}{R'B} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1.$$

Comparando a equação acima com (2.1), concluímos que

$$\frac{AR}{RB} = \frac{AR'}{R'B}.$$

Daí, de modo análogo ao primeiro caso, temos  $R = R'$ , e portanto,  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são colineares. ■

**Exemplo 2.1.1** Na figura abaixo, o triângulo  $ABC$  é equilátero e  $\overline{BD} = \overline{CE} = \overline{AF} = \frac{\overline{AB}}{3}$ . Calculamos a razão  $\frac{\overline{EG}}{\overline{GD}}$ .

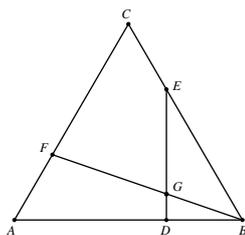


Figura 13: Segmentos  $FB$  e  $DE$ .

Trace uma reta paralela a  $\overleftrightarrow{AC}$  passando pelo ponto  $E$  e que intersecta  $FB$  no ponto  $X$  e  $AB$  em  $Y$ .

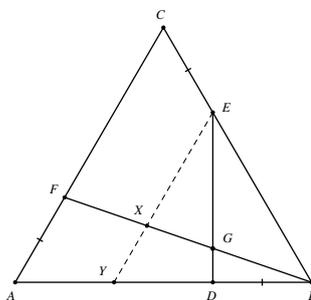


Figura 14: Segmento  $EY$ .

Pelo Teorema de Tales, temos

$$\frac{\overline{AY}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}} \Rightarrow \overline{AY} = \overline{CE} = \frac{\overline{AB}}{3}.$$

Assim,  $\overline{AY} = \overline{YD} = \overline{DB} = \frac{\overline{AB}}{3}$ . Por outro lado,  $ABC \sim YBE$ . Daí,  $\frac{\overline{YX}}{\overline{XE}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FC}} = \frac{1}{2}$ . Pelo Teorema de Menelaus, temos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{EG}}{\overline{GD}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{BY}} \cdot \frac{\overline{YX}}{\overline{XE}} &= -1 \Rightarrow \\ \frac{\overline{EG}}{\overline{GD}} \cdot \left(\frac{\overline{DB}}{\overline{BY}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{YX}}{\overline{XE}}\right) &= -1 \Rightarrow \\ \frac{\overline{EG}}{\overline{GD}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) &= -1 \Rightarrow \\ \frac{\overline{EG}}{\overline{GD}} &= 4. \end{aligned}$$

◇

As demonstrações que seguem nas seções 2.2 e 2.3 levam em conta o enunciado do Teorema 2.1.2 descrito acima.

## 2.2 Prova por semelhança de triângulos retângulos

Vamos assumir que  $C$  está entre  $B$  e  $P$ , conforme Figura 15.

### Demonstração

( $\Rightarrow$ ) Tracemos a partir dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , as alturas relativas a  $\overleftrightarrow{PR}$  dos triângulos  $AQR$ ,  $CPQ$  e  $BPR$ , respectivamente. Sejam  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  os pés de tais alturas e denotemos  $\overline{AA'} = H_a$ ,  $\overline{BB'} = H_b$  e  $\overline{CC'} = H_c$ .

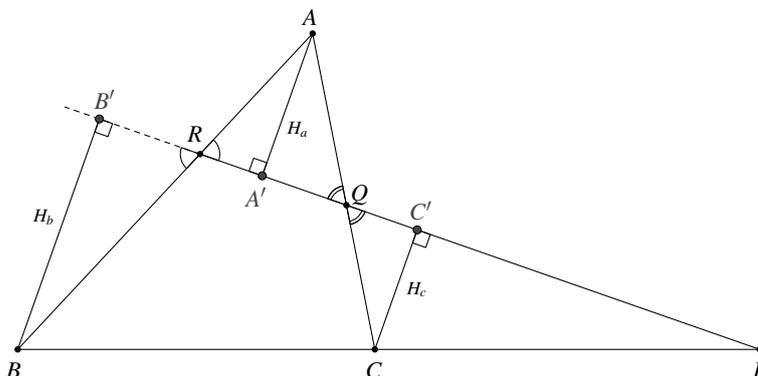


Figura 15: Alturas relativas dos triângulos  $ARQ$ ,  $PQC$  e  $BPR$ .

Como  $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$ , podemos concluir que:

i)  $BRB' \sim ARA'$ , logo

$$\frac{AR}{RB} = \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = \frac{H_a}{H_b};$$

ii)  $BPB' \sim CPC'$ , daí

$$\frac{BP}{PC} = -\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = -\frac{H_b}{H_c};$$

iii)  $AQA' \sim CQC'$ , então

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = \frac{H_c}{H_a}.$$

Usando as três últimas relações, obtemos

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{H_a}{H_b} \cdot \left(-\frac{H_b}{H_c}\right) \cdot \frac{H_c}{H_a} = -1.$$

( $\Leftrightarrow$ ) Veja a demonstração da recíproca do Teorema 2.1.2.

■

## 2.3 Prova por razão entre áreas

Nesta seção, faremos uma demonstração do Teorema de Menelaus utilizando razões entre áreas. Como apoio, provaremos a proposição a seguir.

**Proposição 2.3.1** *Sejam  $ABC$  um triângulo e  $D, E$  e  $F$  pontos sobre os lados  $BC, CA$  e  $AB$ , tais que  $AD, BE$  e  $CF$  são concorrentes no ponto  $P$ . Então,*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} \quad e \quad \frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \frac{S_{PCA} + S_{PAB}}{S_{PBC}}.$$

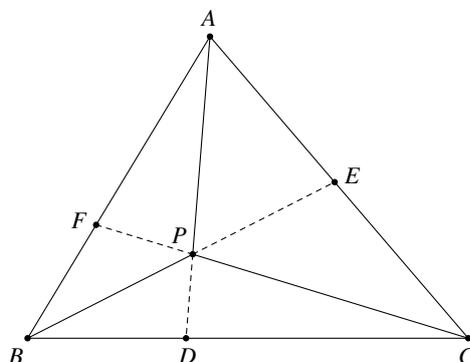


Figura 16: Segmentos  $AD, BE$  e  $CF$ .

**Demonstração**

Note que os triângulos  $ABD$  e  $ACD$  possuem mesma altura relativa ao lado  $BC$ . Seja  $h$ , a medida dessa altura. Consequentemente,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot h \cdot \overline{BD}}{\frac{1}{2} \cdot h \cdot \overline{CD}} = \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}.$$

Usando um raciocínio análogo ao anterior nos triângulos  $PBD$  e  $PCD$ , temos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{S_{PBD}}{S_{PCD}}.$$

Daí,

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{S_{PBD}}{S_{PCD}} = \frac{S_{ABD} - S_{PBD}}{S_{ACD} - S_{PCD}} = \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}}.$$

Portanto,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}}.$$

Procedendo de maneira análoga, obtemos

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \frac{S_{PCA}}{S_{CDP}} = \frac{S_{PAB}}{S_{BDP}} = \frac{S_{PCA} + S_{PAB}}{S_{CDP} + S_{BDP}} = \frac{S_{PCA} + S_{PAB}}{S_{PBC}}.$$

■

Usando o resultado acima, daremos outra demonstração para o Teorema de Menelaus.

**Demonstração**

( $\Rightarrow$ ) Suponha que os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são colineares, de modo que  $P$  não pertença ao lado  $BC$ .

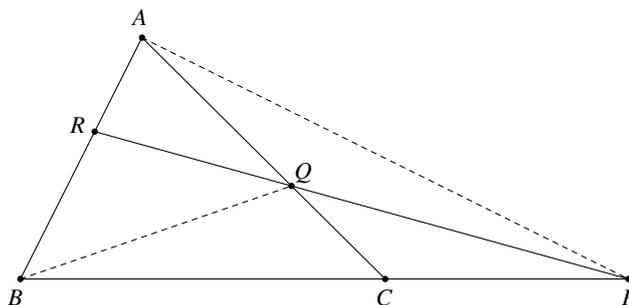


Figura 17: Triângulo  $ABC$ .

Usando a Proposição 2.3.1, concluímos que

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \frac{S_{APQ}}{S_{BPQ}} \text{ e } \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{S_{ABQ}}{S_{APQ}}.$$

Como  $P$  não está entre  $B$  e  $C$ , temos também que

$$\frac{BP}{PC} = -\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = -\left(\frac{\overline{BC} + \overline{PC}}{\overline{PC}}\right) = -\left(\frac{\overline{BC}}{\overline{PC}} + 1\right) = \left(-\frac{S_{ABQ} + S_{APQ}}{S_{APQ}}\right).$$

Por outro lado, temos

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = \frac{S_{CPQ}}{S_{APQ}} = \frac{S_{BCQ}}{S_{ABQ}} = \frac{S_{BPQ}}{S_{APQ} + S_{ABQ}}.$$

Portanto, concluímos que

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{S_{APQ}}{S_{BPQ}} \cdot \left(-\frac{S_{ABQ} + S_{APQ}}{S_{APQ}}\right) \cdot \frac{S_{BPQ}}{S_{APQ} + S_{ABQ}} = -1$$

( $\Leftrightarrow$ ) Suponha que  $Q \notin \overleftrightarrow{PR}$ . Sendo

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1$$

e  $Q'$  a interseção de  $\overleftrightarrow{PR}$  e  $AC$ , pela primeira parte, temos

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ'}{Q'A} = -1.$$

Das duas últimas igualdades, concluímos que  $\frac{CQ}{QA} = \frac{CQ'}{Q'A}$ . Mas isso é um absurdo. Logo,  $Q \in \overleftrightarrow{PR}$  e os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são colineares. ■

## 2.4 Forma trigonométrica do Teorema de Menelaus

Estabeleceremos a seguir um resultado que é uma consequência direta do Teorema 2.1.2.

**Teorema 2.4.1** *Sejam três pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  situados respectivamente nas retas suportes dos lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$  de um triângulo  $ABC$  e diferentes dos vértices. Se  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são colineares, então*

$$\frac{\text{sen}(\widehat{ACR})}{\text{sen}(\widehat{RCB})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{BAP})}{\text{sen}(\widehat{PAC})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{CBQ})}{\text{sen}(\widehat{QBA})} = -1.$$

**Demonstração**

Considere os triângulos  $ACR$  e  $RCB$ .

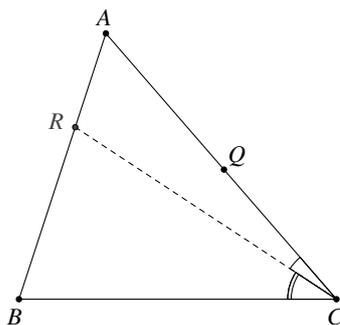


Figura 18: Triângulos  $ACR$  e  $BCR$ .

Pela Lei dos Senos, temos

$$\frac{\overline{AR}}{\text{sen}(\widehat{ACR})} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen}(\widehat{CRA})} \Rightarrow \overline{AR} = \text{sen}(\widehat{ACR}) \cdot \frac{\overline{AC}}{\text{sen}(\widehat{CRA})} \quad (2.2)$$

e

$$\frac{\overline{RB}}{\text{sen}(\widehat{RCB})} = \frac{\overline{BC}}{\text{sen}(\widehat{BRC})} \Rightarrow \overline{RB} = \text{sen}(\widehat{RCB}) \cdot \frac{\overline{BC}}{\text{sen}(\widehat{BRC})}. \quad (2.3)$$

Note que  $\text{sen}(\widehat{CRA}) = \text{sen}(\widehat{BRC})$ . Dividindo as equações (2.2) e (2.3), encontramos

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{ACR})}{\text{sen}(\widehat{RCB})}. \quad (2.4)$$

De maneira análoga, tomemos os triângulos  $ABP$  e  $ACP$ .

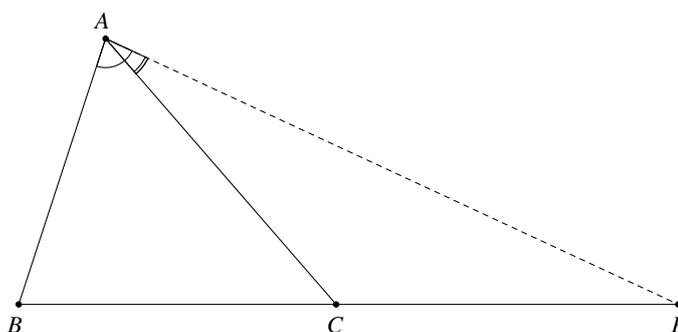


Figura 19: Triângulos  $ABP$  e  $ACP$ .

Perceba que os senos dos ângulos  $\widehat{PAC}$  e  $\widehat{CAP}$  possuem os sinais opostos. Aplicando novamente a Lei dos Senos, concluimos que

$$\frac{\overline{BP}}{\text{sen}(\widehat{BAP})} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen}(\widehat{APB})} \Rightarrow \overline{BP} = \text{sen}(\widehat{BAP}) \cdot \frac{\overline{AB}}{\text{sen}(\widehat{APB})} \quad (2.5)$$

e

$$\frac{\overline{PC}}{\text{sen}(\widehat{CAP})} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen}(\widehat{APB})} \Rightarrow \overline{PC} = -\text{sen}(\widehat{PAC}) \cdot \frac{\overline{AC}}{\text{sen}(\widehat{APB})}. \quad (2.6)$$

Dividindo (2.5) por (2.6), obtemos

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{BAP})}{-\text{sen}(\widehat{PAC})}. \quad (2.7)$$

Por fim, considere os triângulos  $BCQ$  e  $ABQ$ .

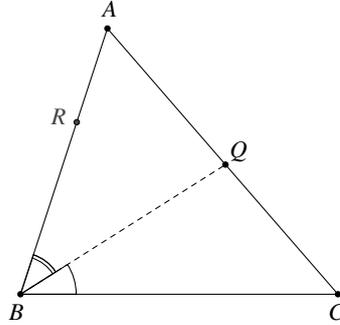


Figura 20: Triângulos  $BCQ$  e  $ABQ$ .

Note que

$$\frac{\overline{CQ}}{\text{sen}(\widehat{CBQ})} = \frac{\overline{BC}}{\text{sen}(\widehat{BQC})} \Rightarrow \overline{CQ} = \text{sen}(\widehat{CBQ}) \cdot \frac{\overline{BC}}{\text{sen}(\widehat{BQC})} \quad (2.8)$$

e

$$\frac{\overline{QA}}{\text{sen}(\widehat{QBA})} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen}(\widehat{AQB})} \Rightarrow \overline{QA} = \text{sen}(\widehat{QBA}) \cdot \frac{\overline{AB}}{\text{sen}(\widehat{AQB})}. \quad (2.9)$$

Mas,  $\widehat{BQC}$  e  $\widehat{AQB}$  são suplementares. Daí, resulta que  $\text{sen}(\widehat{BQC}) = \text{sen}(\widehat{AQB})$ . Dividindo (2.8) por (2.9), obtemos

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{CBQ})}{\text{sen}(\widehat{QBA})}. \quad (2.10)$$

Portanto, usando o Teorema 2.1.2 e as expressões (2.4), (2.7) e (2.10), concluímos que

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \\ &= \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \cdot \left( -\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \right) \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \\ &= \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{ACR})}{\text{sen}(\widehat{RCB})} \cdot \left( -\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{BAP})}{-\text{sen}(\widehat{PAC})} \right) \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{CBQ})}{\text{sen}(\widehat{QBA})} \\ &= \frac{\text{sen}(\widehat{ACR})}{\text{sen}(\widehat{RCB})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{BAP})}{\text{sen}(\widehat{PAC})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{CBQ})}{\text{sen}(\widehat{QBA})}. \end{aligned}$$

■

## 2.5 Teorema de Menelaus no espaço

Ao seccionarmos um tetraedro  $ABCD$  por um plano  $\Pi$  que não incide nos vértices, dependendo da posição do plano, as interseções das retas suportes das arestas com  $\Pi$  produzem um conjunto com um número de pontos entre 3 e 6.

Para a versão espacial do Teorema de Menelaus, iremos estabelecer um critério para verificar a coplanaridade de quatro pontos que estejam nas retas suportes dos lados de um quadrilátero formado por quatro arestas consecutivas de um tetraedro. Ao tomarmos um tetraedro qualquer, podemos ter 6 quadriláteros distintos, da forma como foi descrito anteriormente. Para cada um desses, podemos ter três casos possíveis, a menos de uma reindexação dos vértices. Assim, podemos ter os quatro pontos sobre as arestas, dois sobre as arestas e dois fora e todos os pontos fora das arestas. A figura a seguir ilustra esses casos.

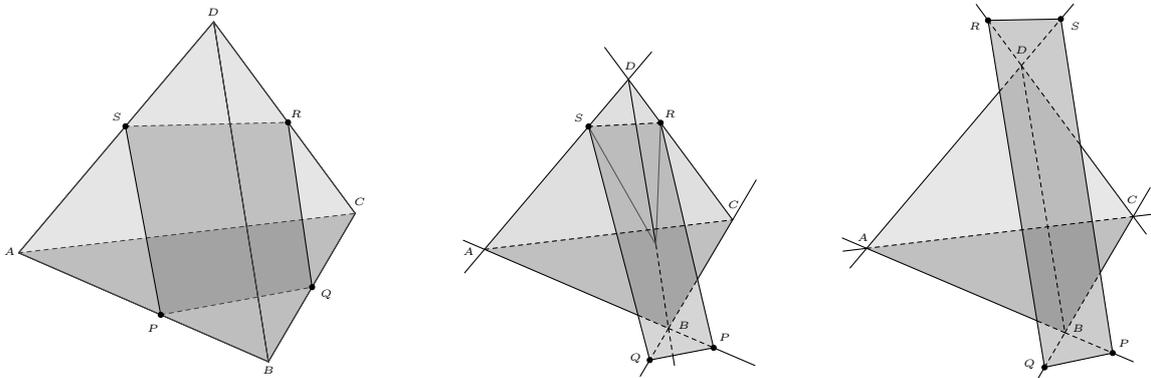


Figura 21: Casos possíveis para o quadrilátero  $ABCD$ .

Para o que segue, enunciaremos e daremos uma demonstração do teorema para o primeiro dos casos. Ou seja, vamos supor que  $P \in AB$ ,  $Q \in BC$ ,  $R \in CD$  e  $S \in DA$ . Em cada aresta ficam determinados os segmentos:

- i)  $AP$  e  $PB$  na aresta  $AB$ ;
- ii)  $BQ$  e  $QC$  na aresta  $BC$ ;
- iii)  $CR$  e  $RD$  na aresta  $CD$ ;
- iv)  $DS$  e  $SA$  na aresta  $AD$ .

Para este caso, o Teorema de Menelaus no espaço garante que, ao escolhermos quatro daqueles segmentos sem extremidades comuns, o produto das medidas destes comprimentos é igual ao produto das medidas dos outros segmentos, ou seja,

$$\overline{AP} \cdot \overline{BQ} \cdot \overline{CR} \cdot \overline{DS} = \overline{PB} \cdot \overline{QC} \cdot \overline{RD} \cdot \overline{SA}.$$

**Teorema 2.5.1 (Teorema de Menelaus no espaço)** *Sejam  $ABCD$  um tetraedro e  $P \in \overleftrightarrow{AB}$ ,  $Q \in \overleftrightarrow{BC}$ ,  $R \in \overleftrightarrow{CD}$  e  $S \in \overleftrightarrow{DA}$  pontos distintos dos vértices do tetraedro. Os pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  são coplanares se, e somente se,*

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1. \quad (2.11)$$

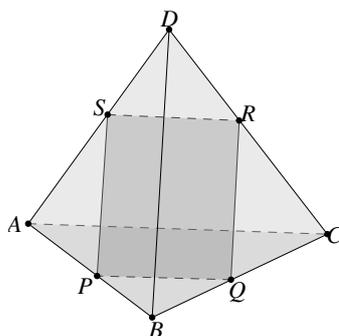


Figura 22: Tetraedro  $ABCD$  intersetado pelo plano  $PQRS$ .

**Demonstração**

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  são coplanares e considere a reta  $t$  que passa pelo ponto  $S$  e é perpendicular ao plano  $PQRS$ . Sejam  $A'$  e  $D'$  pontos de  $t$  que representem, respectivamente, as projeções ortogonais dos pontos  $A$  e  $D$ .

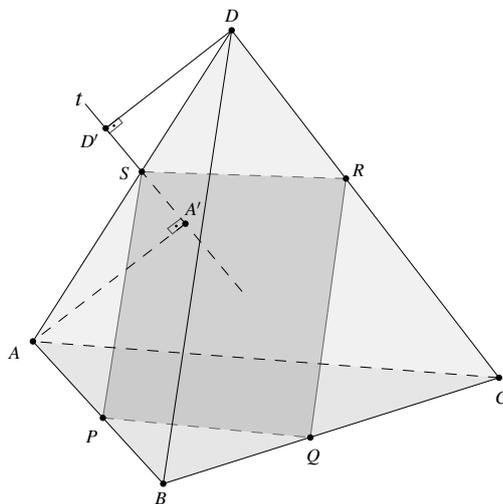


Figura 23: Reta  $t$  perpendicular ao plano  $PQRS$ .

Os triângulos  $DD'S$  e  $AA'S$  são semelhantes e sendo  $k$  a área de  $PQRS$ , podemos escrever

$$\frac{DS}{SA} = \frac{\overline{DS}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{D'S}}{\overline{SA'}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot k \cdot \overline{D'S}}{\frac{1}{3} \cdot k \cdot \overline{SA'}} = \frac{V_{DPQRS}}{V_{APQRS}},$$

em que  $V_{DPQRS}$  denota o volume da pirâmide de vértice  $D$  e base  $PQRS$  e  $V_{APQRS}$ , o volume da pirâmide de vértice  $A$  e base  $PQRS$ . Analogamente, podemos obter as seguintes razões

$$\frac{AP}{PB} = \frac{V_{APQRS}}{V_{BPQRS}}, \quad \frac{BQ}{QC} = \frac{V_{BPQRS}}{V_{CPQRS}} \quad \text{e} \quad \frac{CR}{RD} = \frac{V_{CPQRS}}{V_{DPQRS}}.$$

Assim, temos

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = \frac{V_{DPQRS}}{V_{APQRS}} \cdot \frac{V_{APQRS}}{V_{BPQRS}} \cdot \frac{V_{BPQRS}}{V_{CPQRS}} \cdot \frac{V_{CPQRS}}{V_{DPQRS}} = 1.$$

( $\Leftarrow$ ) Suponha que

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1.$$

Consideremos o plano determinado pelos pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  intersectando  $DA$  em um ponto  $S'$ . Então, pela primeira parte da demonstração, temos

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS'}{S'A} = 1, \tag{2.12}$$

comparando as igualdades (2.11) e (2.12), concluímos que

$$\frac{\overline{DS}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{DS'}}{\overline{S'A}}.$$

Usando um raciocínio análogo ao da prova da recíproca do Teorema 2.1.2, p. 23, podemos concluir que  $S = S'$ . Portanto, os pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  são coplanares. ■

## 2.6 Aplicação: Teorema de Desargues

Girard Desargues foi um intelectual típico da Renascença. Arquiteto, engenheiro e matemático, trabalhou em Paris e Lyon, onde projetou várias construções públicas e particulares. Em Paris, foi um membro do grupo de notáveis matemáticos que se reuniam na cela do Frei Marin Mersenne (1588 – 1648). Este, um divulgador da matemática em sua época, responsável na Europa por uma intensa troca de informações por meio de correspondência.



Figura 24: Girard Desargues (★ 1591 – † 1661).

Desargues foi o precursor da Geometria Projetiva. O teorema que leva seu nome descreve uma regra para o desenho perspectivo. Em essência, o Teorema de Desargues estabelece como deve ser o desenho da sombra de um triângulo em um plano, projetada pelos raios de luz de uma fonte (numa distância finita ou não) sobre o plano. Para maiores detalhes, consulte [5].

Se dois triângulos são colocados de tal maneira que as retas que unem os pares de vértices correspondentes são concorrentes, então os pontos de interseção de pares de lados correspondentes são colineares, e reciprocamente. [6, p. 252].

A seguir, enunciaremos este resultado na linguagem geométrica e apresentaremos sua demonstração usando o Teorema de Menelaus.

**Teorema 2.6.1 (Teorema de Desargues)** *Sejam  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos tais que  $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{Z\}$ ,  $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{X\}$  e  $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = \{Y\}$ . Os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são colineares se, e somente se,  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes ou paralelas.*

**Demonstração**

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são colineares. Mostraremos que as retas  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes ou paralelas. Assuma que duas destas retas se encontram, digamos que sejam  $\overleftrightarrow{AA'}$  e  $\overleftrightarrow{BB'}$  que concorrem em um ponto  $O$ .

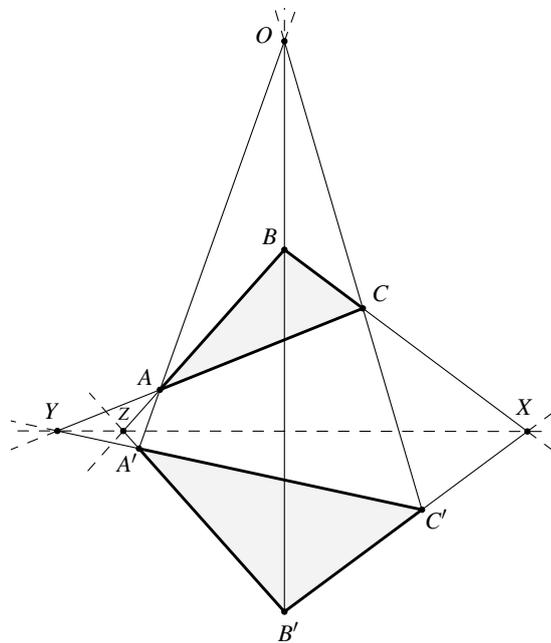


Figura 25: Teorema de Desargues

Aplicando o Teorema de Menelaus aos triângulos  $ZAA'$ ,  $AZY$  e  $YZA'$ , obtemos

$$\frac{A'B'}{B'Z} \cdot \frac{ZB}{BA} \cdot \frac{AO}{OA'} = -1,$$

$$\frac{AB}{BZ} \cdot \frac{ZX}{XY} \cdot \frac{YC}{CA} = -1$$

e

$$\frac{A'C'}{C'Y} \cdot \frac{YX}{XZ} \cdot \frac{ZB'}{B'A'} = -1.$$

Multiplicando, membro a membro, as três relações acima, teremos

$$\frac{A'B'}{B'Z} \cdot \frac{ZB}{BA} \cdot \frac{AO}{OA'} \cdot \frac{AB}{BZ} \cdot \frac{ZX}{XY} \cdot \frac{YC}{CA} \cdot \frac{A'C'}{C'Y} \cdot \frac{YX}{XZ} \cdot \frac{ZB'}{B'A'} = -1 \Rightarrow$$

$$\frac{AO}{OA'} \cdot \frac{A'C'}{C'Y} \cdot \frac{YC}{CA} = -1. \quad (2.13)$$

Tomando o triângulo  $AA'Y$  e considerando a expressão (2.13), concluímos, pelo Teorema de Menelaus, que  $O$ ,  $C$  e  $C'$  são colineares. Portanto,  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes ou paralelas.

( $\Leftrightarrow$ ) Devemos mostrar que se  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes ou paralelas, então os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são colineares.

Para tanto, suponha que as retas  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  concorrem em  $O$ . Aplicando o Teorema de Menelaus aos triângulos  $OBC$ ,  $OAB$  e  $OAC$ , vemos que

$$\frac{OB'}{B'B} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CC'}{C'O} = -1,$$

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} = -1$$

e

$$\frac{OC'}{C'C} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AA'}{A'O} = -1.$$

Multiplicando, membro a membro, as equações anteriores, teremos

$$\frac{OB'}{B'B} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} \cdot \frac{OC'}{C'C} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AA'}{A'O} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1.$$

Consequentemente,  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são colineares.

Se  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são paralelas, teremos  $BB'X \sim CC'X$ ,  $CC'Y \sim AA'Z$  e  $BB'Z \sim AA'Z$ .

Veja a figura a seguir.

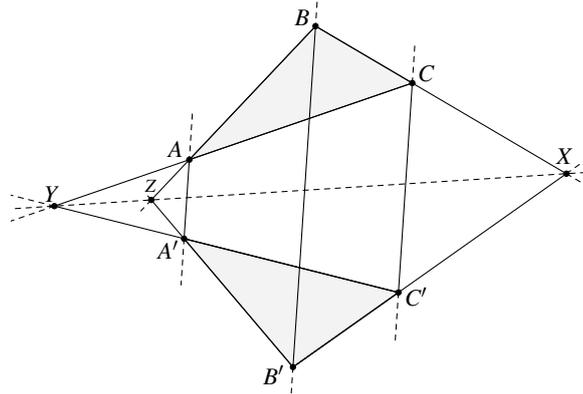


Figura 26: Teorema de Desargues para retas paralelas.

Das semelhanças entre os triângulos citados anteriormente, concluímos que

$$\frac{BX}{XC} = -\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = -\frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}}, \quad \frac{CY}{YA} = -\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = -\frac{\overline{CC'}}{\overline{AA'}} \quad \text{e} \quad \frac{AZ}{ZB} = -\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = -\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}.$$

Por conseguinte,

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \left(-\frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}}\right) \cdot \left(-\frac{\overline{CC'}}{\overline{AA'}}\right) \cdot \left(-\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}\right) = -1.$$

Portanto, pelo Teorema de Menelaus, X, Y e Z são colineares. ■

## 3 TEOREMA DE CEVA

Neste capítulo, apresentaremos o Teorema de Ceva. Faremos também algumas demonstrações elementares desse resultado. Ao final, mostraremos uma versão desse teorema no espaço.

**Definição 1** *Ceviana é qualquer reta que passa por um vértice de um triângulo.*

Por simplicidade de notação, vamos também nos referir a uma ceviana de um triângulo  $ABC$  como sendo um segmento, uma reta ou uma semirreta que incide em um vértice e um ponto na reta suporte do lado oposto a esse vértice. Estabeleceremos uma relação métrica entre cevianas e propriedades geométricas de triângulos.

### 3.1 Teorema de Ceva

Sejam  $ABC$  um triângulo e  $A' \in \overleftrightarrow{BC}$ ,  $B' \in \overleftrightarrow{AC}$  e  $C' \in \overleftrightarrow{AB}$  pontos distintos dos vértices do triângulo. Em cada reta suporte ficam determinados três segmentos com extremidades nos vértices e nos pontos escolhidos. Dentre estes, escolhemos dois em cada reta suporte dos lados com as seguintes leis de formação:

- i)  $AC'$  e  $C'B$  em  $\overleftrightarrow{AB}$ ;
- ii)  $BA'$  e  $A'C$  em  $\overleftrightarrow{BC}$ ;
- iii)  $CB'$  e  $B'A$  em  $\overleftrightarrow{AC}$ .

Vamos assumir que os pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  sejam pontos sobre os lados do triângulo e distintos dos vértices. Se as cevianas  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  são concorrentes, então, ao escolhermos três destes segmentos sem extremidades comuns, vale a igualdade

$$\overline{BA'} \cdot \overline{CB'} \cdot \overline{AC'} = \overline{A'C} \cdot \overline{B'A} \cdot \overline{C'B}.$$

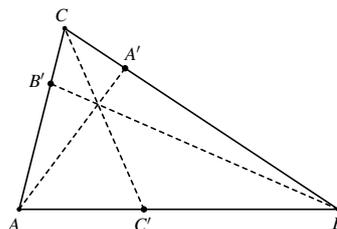


Figura 27: Cevianas de um triângulo  $ABC$ .

Vejam os Teorema de Ceva com estas hipóteses e depois façamos as generalizações.

**Teorema 3.1.1** *Sejam  $ABC$  um triângulo e  $C' \in AB$ ,  $B' \in AC$  e  $A' \in BC$  pontos distintos dos vértices do triângulo. As cevianas  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  são concorrentes se, e somente se,*

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1.$$

**Demonstração**

( $\Rightarrow$ ) Seja  $P$  o ponto de concorrência das cevianas. Fazamos uma construção. Sejam  $CQ$  e  $AR$  segmentos paralelos a  $BP$ , onde  $Q$  pertence à ceviana  $AA'$  e  $R$  pertence à ceviana  $CC'$ . O Teorema dos Ângulos Alternos Internos nos garante as semelhanças de triângulos

$$BPA' \sim CQA' \quad \text{e} \quad ARC' \sim BPC'.$$

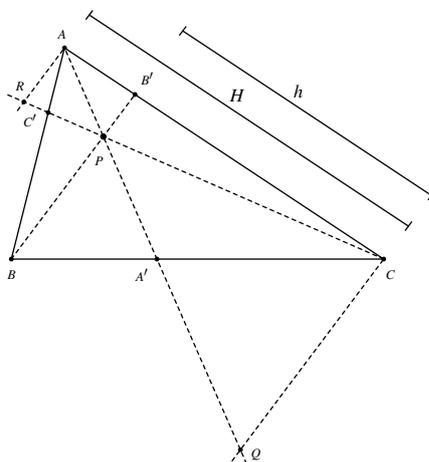


Figura 28: Distâncias  $H$  e  $h$ .

Portanto, seguem das semelhanças, respectivamente, as seguintes relações

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{QC}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{PB}}.$$

Agora, pelo Teorema de Tales, temos  $CAQ \sim B'AP$ . Daí, temos

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{B'P}}$$

e

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{CA} - \overline{B'A}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{B'A}} - 1 = \frac{\overline{CQ}}{\overline{B'P}} - 1.$$

Por outro lado, sejam  $H$  e  $h$  as distâncias entre  $\overleftrightarrow{AR}$  e  $\overleftrightarrow{CQ}$  e entre  $\overleftrightarrow{B'P}$  e  $\overleftrightarrow{CQ}$ , respectivamente. Pelas semelhanças de triângulos  $B'CP \sim ACR$  e  $B'AP \sim CAQ$ , podemos escrever duas relações em função de  $H$  e  $h$ , quais sejam

$$\frac{\overline{B'P}}{\overline{AR}} = \frac{h}{H} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{B'P}}{\overline{CQ}} = \frac{H-h}{H} = 1 - \frac{h}{H}.$$

Segue que

$$\frac{\overline{B'P}}{\overline{AR}} = 1 - \frac{\overline{B'P}}{\overline{CQ}},$$

ou seja,

$$\frac{1}{\overline{B'P}} = \frac{1}{\overline{AR}} + \frac{1}{\overline{CQ}}.$$

Finalmente, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} &= \frac{\overline{BP}}{\overline{QC}} \cdot \left( \frac{\overline{CQ}}{\overline{B'P}} - 1 \right) \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{PB}} \\ &= \overline{AR} \cdot \left( \frac{1}{\overline{B'P}} - \frac{1}{\overline{CQ}} \right) \\ &= \overline{AR} \left( \frac{1}{\overline{AR}} + \frac{1}{\overline{CQ}} - \frac{1}{\overline{CQ}} \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Assuma que

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Seja  $P$  o ponto na interseção das cevianas  $AA'$  e  $BB'$ . Considere a ceviana  $CC''$  que incide em  $P$ , onde  $C'' \in AB$ . Pelo visto acima, temos

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC''}}{\overline{C''B}} = 1.$$

Daí, segue que

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{C''B}}.$$

Se  $d = \overline{AB}$ ,  $x = \overline{AC'}$  e  $y = \overline{AC''}$ , esta última igualdade pode ser reescrita como

$$\frac{x}{d-x} = \frac{y}{d-y}.$$

É imediato concluir que  $x = y$ , ou seja  $\overline{AC'} = \overline{AC''}$ . Logo  $C' = C''$ . Isto implica que a ceviana  $AC'$  também incide em  $P$ . ■

Este teorema pode ser generalizado considerando outros tipos de cevianas, não apenas aquelas que incidem em pontos dos lados do triângulo. Seguindo a notação acima, se  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  são os pontos que definem as cevianas, podemos ter dois deles que não estão sobre os lados do triângulo ou termos os casos nos quais as cevianas são paralelas.

A menos de uma reindexação de pontos, temos, a seguir, os únicos casos onde pode ocorrer a concorrência entre as cevianas.

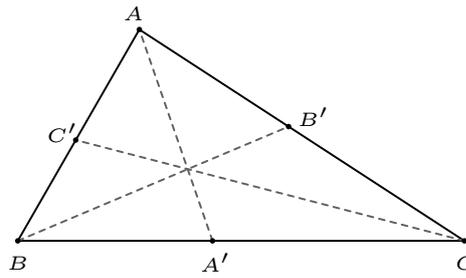


Figura 29: Cevianas concorrendo internamente.

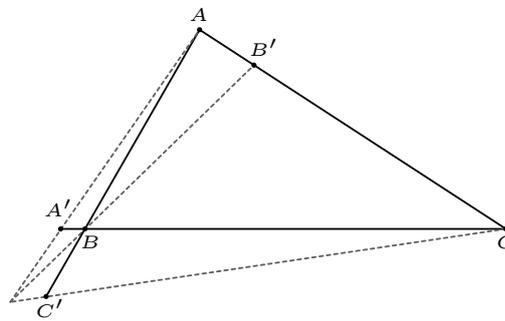


Figura 30: Cevianas concorrendo externamente.

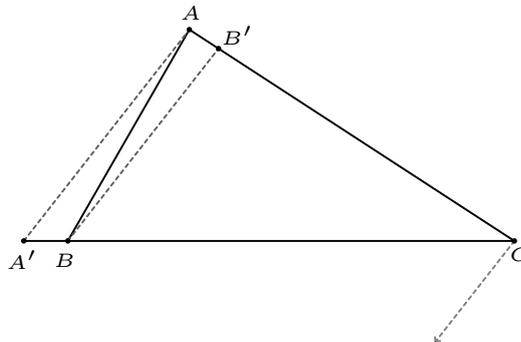


Figura 31: Cevianas paralelas.

Para generalizar o Teorema de Ceva, vamos utilizar o número  $\frac{AC}{CB}$  posto na página 23. O caso ilustrado na Figura 29 já foi demonstrado. Faremos agora a demonstração dos outros dois casos.

**Teorema 3.1.2 (Teorema de Ceva)** *Sejam  $ABC$  um triângulo e  $C' \in \overleftrightarrow{AB}$ ,  $B' \in \overleftrightarrow{AC}$  e  $A' \in \overleftrightarrow{BC}$  pontos distintos dos vértices do triângulo. As cevianas  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes ou paralelas se, e somente se,*

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1.$$

**Demonstração**

( $\Rightarrow$ ) Provemos o teorema no caso em que  $A'$  e  $C'$  não pertencem aos lados do triângulo. Sejam  $P$  o ponto de concorrência das cevianas e  $CQ$  e  $AR$  segmentos paralelos a  $BP$ , onde  $Q$  pertence à ceviana  $\overleftrightarrow{AA'}$  e  $R$  pertence à ceviana  $\overleftrightarrow{CC'}$ . O Teorema dos Ângulos Alternos Internos, nos garante as semelhanças de triângulos

$$BPA' \sim CQA' \quad \text{e} \quad ARC' \sim BPC'.$$

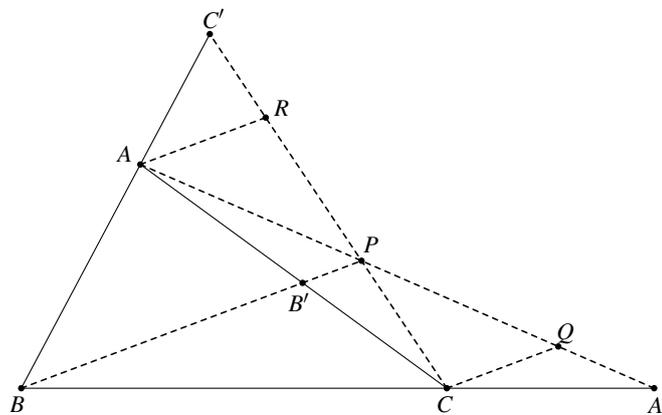


Figura 32: Teorema de Ceva.

Da semelhança  $BPA' \sim CQA'$ , segue que

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = -\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}.$$

Assim,

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = -\frac{\overline{BP}}{\overline{BA'}}.$$

Analogamente, da semelhança  $ARC' \sim BPC'$ , segue que

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = -\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}$$

e por conseguinte

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = -\frac{\overline{AR}}{\overline{BP}}.$$

Agora, pelo Teorema de Tales, vemos que  $CAQ \sim B'AP$ . Daí, temos

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{B'P}}.$$

Como consequência,

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{CA} - \overline{B'A}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{B'A}} - 1 = \frac{\overline{CQ}}{\overline{B'P}} - 1.$$

Por outro lado, sejam  $H$  e  $h$  as distâncias entre  $\overleftrightarrow{AR}$  e  $\overleftrightarrow{CQ}$  e entre  $\overleftrightarrow{B'P}$  e  $\overleftrightarrow{CQ}$ , respectivamente. Pelas semelhanças dos triângulos  $B'CP \sim ACR$  e  $B'AP \sim CAQ$  podemos escrever duas relações em função de  $H$  e  $h$ , quais sejam

$$\frac{\overline{B'P}}{\overline{AR}} = \frac{h}{H} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{B'P}}{\overline{CQ}} = \frac{H-h}{H} = 1 - \frac{h}{H}.$$

Daí, temos

$$\frac{\overline{B'P}}{\overline{AR}} = 1 - \frac{\overline{B'P}}{\overline{CQ}},$$

ou seja,

$$\frac{1}{\overline{B'P}} = \frac{1}{\overline{AR}} + \frac{1}{\overline{CQ}}.$$

Finalmente calculemos:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} &= \frac{\overline{BP}}{\overline{QC}} \cdot \left( \frac{\overline{CQ}}{\overline{B'P}} - 1 \right) \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{PB}} \\ &= \overline{AR} \cdot \left( \frac{1}{\overline{B'P}} - \frac{1}{\overline{CQ}} \right) \\ &= \overline{AR} \left( \frac{1}{\overline{AR}} + \frac{1}{\overline{CQ}} - \frac{1}{\overline{CQ}} \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

33. Consideremos agora o caso em que as retas  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são paralelas. Veja a Figura

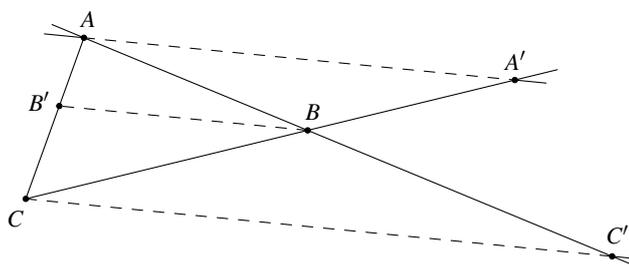


Figura 33: Teorema de Ceva para cevianas paralelas.

Sejam  $l$  e  $L$  as distâncias de  $\overleftrightarrow{AA'}$  a  $\overleftrightarrow{CC'}$  e de  $\overleftrightarrow{AA'}$  a  $\overleftrightarrow{BB'}$ , respectivamente. Usando, o Teorema de Tales, teremos

$$\frac{BA'}{A'C} = -\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = -\frac{l}{L}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{L-l}{l} \quad \text{e} \quad \frac{AC'}{C'B} = -\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = -\frac{L}{L-l}.$$

Portanto,

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = \left(-\frac{l}{L}\right) \cdot \left(\frac{L-l}{l}\right) \cdot \left(-\frac{L}{L-l}\right) = 1.$$

( $\Leftarrow$ ) Assuma que

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Marque o ponto  $C'' \in AB$  de modo que  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC''}$  sejam concorrentes ou paralelas. Pelo que vimos, temos

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC''}}{\overline{C''B}} = 1.$$

Daí, segue que

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{C''B}}.$$

Se  $d = \overline{AB}$ ,  $x = \overline{AC'}$  e  $y = \overline{AC''}$ , esta última igualdade pode ser reescrita como

$$\frac{x}{d-x} = \frac{y}{d-y}.$$

É imediato concluir que  $x = y$ , ou seja,  $\overline{AC'} = \overline{AC''}$ . Logo  $C' = C''$ . Portanto,  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes ou paralelas. ■

O Teorema de Ceva é uma excelente ferramenta para resolver problemas que envolvem concorrência.

**Exemplo 3.1.1** *Seja  $ABC$  um triângulo qualquer. Utilizaremos o Teorema de Ceva para provar que as medianas de  $ABC$  são concorrentes.*

Se  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  são, respectivamente, os pontos médios dos lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$  do triângulo  $ABC$ , então  $\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1$ , de onde segue que,

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Note que as medianas  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  não podem ser paralelas, pois  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  pertencem aos lados do triângulo  $ABC$ . Portanto, pelo Teorema de Ceva, as medianas  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  são concorrentes. ◇

## 3.2 Prova por razão entre áreas

Nessa seção, assim como foi feito com o Teorema de Menelaus, daremos uma prova para o Teorema de Ceva utilizando os resultados da Proposição 2.3.1, p. 26. Vamos considerar o caso

em que  $A'$  e  $B'$  e  $C'$  pertencem aos lados do triângulo. Para tanto, vamos considerar o enunciado do Teorema 3.1.1.

**Demonstração**

( $\Rightarrow$ ) Chamemos de  $P$  o ponto de concorrência das cevianas.

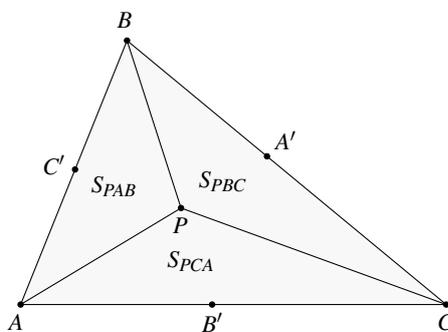


Figura 34: Áreas no triângulo  $ABC$ .

Usando a Proposição 2.3.1, temos

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}},$$

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{S_{PBC}}{S_{PAB}}$$

e

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{S_{PCA}}{S_{PBC}}.$$

Portanto,

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} \cdot \frac{S_{PBC}}{S_{PAB}} \cdot \frac{S_{PCA}}{S_{PBC}} = 1.$$

( $\Leftarrow$ ) Seja  $P$  o ponto de interseção de  $\overleftrightarrow{AA'}$  e  $\overleftrightarrow{BB'}$ . Suponha que  $P \notin \overleftrightarrow{CC'}$ . Sendo

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1$$

e  $C''$  a interseção de  $\overleftrightarrow{CP}$  e  $AB$ , pela primeira parte, temos

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC''}}{\overline{C''B}} = 1.$$

Das duas últimas igualdades, concluímos que  $\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{C''B}}$ . Mas isso é um absurdo. Logo,  $P \in \overleftrightarrow{CC'}$  e  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  são concorrentes. ■

### 3.3 Versão trigonométrica do Teorema de Ceva

Como consequência do Teorema 3.1.2, segue o seguinte resultado:

**Teorema 3.3.1** *Dados um triângulo  $ABC$  e  $A' \in \overleftrightarrow{BC}$ ,  $B' \in \overleftrightarrow{AC}$  e  $C' \in \overleftrightarrow{AB}$  pontos distintos dos vértices do triângulo. As cevianas  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  são concorrentes se, e somente se,*

$$\frac{\text{sen}(\widehat{BAA'})}{\text{sen}(\widehat{A'AC})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{CBB'})}{\text{sen}(\widehat{B'BA})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{ACC'})}{\text{sen}(\widehat{C'CB})} = 1.$$

#### Demonstração

( $\Rightarrow$ ) Mostraremos apenas o caso em que  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  estão sobre os lados do triângulo. Suponha que as cevianas  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  são concorrentes em  $P$ .

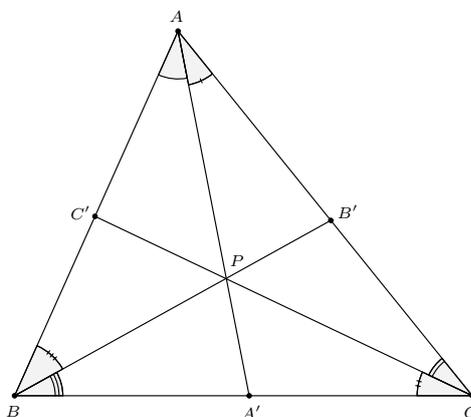


Figura 35: Versão trigonométrica do Teorema de Ceva.

Aplicando a Lei dos Senos aos triângulos  $ABP$ ,  $BCP$  e  $CPA$ , respectivamente, teremos

$$\frac{\overline{AP}}{\text{sen}(\widehat{B'BA})} = \frac{\overline{BP}}{\text{sen}(\widehat{BAA'})} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}(\widehat{BAA'})}{\text{sen}(\widehat{B'BA})} = \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\overline{CP}}{\text{sen}(\widehat{CBB'})} = \frac{\overline{BP}}{\text{sen}(\widehat{C'CB})} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}(\widehat{CBB'})}{\text{sen}(\widehat{C'CB})} = \frac{\overline{CP}}{\overline{BP}} \quad (3.2)$$

e

$$\frac{\overline{AP}}{\text{sen}(\widehat{ACC'})} = \frac{\overline{CP}}{\text{sen}(\widehat{A'AC})} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}(\widehat{ACC'})}{\text{sen}(\widehat{A'AC})} = \frac{\overline{AP}}{\overline{CP}}. \quad (3.3)$$

Das relações (3.1), (3.2) e (3.3), concluímos que

$$\frac{\text{sen}(\widehat{BAA'})}{\text{sen}(\widehat{A'AC})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{CBB'})}{\text{sen}(\widehat{B'BA})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{ACC'})}{\text{sen}(\widehat{C'CB})} = \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = 1.$$

( $\Leftarrow$ ) Seja  $P$  o ponto de interseção das cevianas  $AA'$  e  $BB'$ . Considere a ceviana que parte de  $C$ , passa por  $P$  e encontra o segmento  $AB$  no ponto  $C''$ . Denotemos  $\widehat{ACB} = \alpha$ ,  $\widehat{ACC'} = \beta$  e  $\widehat{AC''C} = \beta'$ .

Como  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  são concorrentes em  $P$ , temos

$$\frac{\text{sen}(\widehat{BAA'})}{\text{sen}(\widehat{A'AC})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{CBB'})}{\text{sen}(\widehat{B'BA})} \cdot \frac{\text{sen} \beta'}{\text{sen}(\alpha - \beta')} = 1.$$

Por hipótese, temos

$$\frac{\text{sen}(\widehat{BAA'})}{\text{sen}(\widehat{A'AC})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{CBB'})}{\text{sen}(\widehat{B'BA})} \cdot \frac{\text{sen} \beta}{\text{sen}(\alpha - \beta)} = 1.$$

Segue, daí, que

$$\frac{\text{sen} \beta'}{\text{sen}(\alpha - \beta')} = \frac{\text{sen} \beta}{\text{sen}(\alpha - \beta)} \Leftrightarrow \frac{\text{sen} \beta}{\text{sen} \beta'} = \frac{\text{sen} \alpha \cos \beta - \text{sen} \beta \cos \alpha}{\text{sen} \alpha \cos \beta' - \text{sen} \beta' \cos \alpha}.$$

Multiplicando a equação acima por  $\frac{\text{sen} \beta'}{\text{sen} \beta}$ , obtemos

$$\frac{\text{sen} \alpha \cot \beta - \cos \alpha}{\text{sen} \alpha \cot \beta' - \cos \alpha} = 1 \Rightarrow$$

$$\text{sen} \alpha \cot \beta = \text{sen} \alpha \cot \beta' \Rightarrow$$

$$\cot \beta = \cot \beta' \Rightarrow$$

$$\beta = \beta'.$$

Esta última implicação é obtida pela injetividade da função cotangente no intervalo  $(0, \pi)$ . Agora, sendo  $\beta = \beta'$ , obtemos  $C' = C''$ , portanto, a ceviana  $CC'$  coincide com a ceviana  $CC''$ . Concluimos que as cevianas  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  são concorrentes. ■

**Exemplo 3.3.1** *Mostraremos que as bissetrizes internas de um triângulo concorrem.*

Tomemos um triângulo  $ABC$  cujas bissetrizes internas são  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$ . Considere as medidas dos ângulos indicados na figura abaixo.

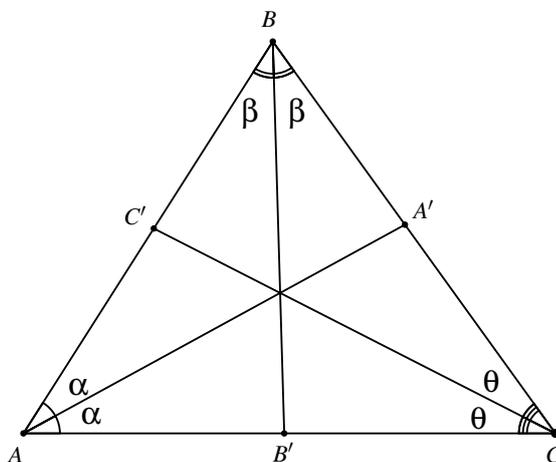


Figura 36: Concorrência entre as bissetrizes internas.

Claramente, vemos que

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha} \cdot \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \beta} \cdot \frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } \theta} = 1.$$

Portanto, pelo Teorema 3.3.1,  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  concorrem em um único ponto.  $\diamond$

**Exemplo 3.3.2** Considere um triângulo  $ABC$  com três cevianas, uma de cada vértice, concorrendo em  $P$ . Mostraremos que refletindo as retas  $\overleftrightarrow{AP}$ ,  $\overleftrightarrow{BP}$  e  $\overleftrightarrow{CP}$  em relação às bissetrizes internas de  $ABC$  que passam por  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente, obtemos outras três retas concorrentes.

Considere as indicações das medidas dos ângulos feitas na figura a seguir.

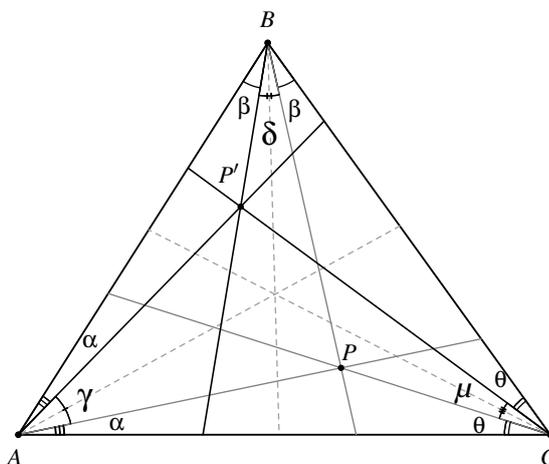


Figura 37: Cevianas concorrendo em  $P'$ .

Como as retas  $\overleftrightarrow{AP}$ ,  $\overleftrightarrow{BP}$  e  $\overleftrightarrow{CP}$  são concorrentes, pela versão trigonométrica do Teorema de Ceva, temos

$$\frac{\text{sen}(\beta + \delta)}{\text{sen } \beta} \cdot \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen}(\gamma + \alpha)} \cdot \frac{\text{sen}(\theta + \gamma)}{\text{sen } \theta} = 1 \Rightarrow \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen}(\beta + \delta)} \cdot \frac{\text{sen}(\gamma + \alpha)}{\text{sen } \alpha} \cdot \frac{\text{sen } \theta}{\text{sen}(\theta + \gamma)} = 1.$$

Essa última igualdade implica no que queremos mostrar.  $\diamond$

### 3.4 Teorema de Ceva no espaço

Em um tetraedro qualquer, como já foi dito no capítulo anterior, temos sempre seis quadriláteros formados por quatro arestas consecutivas. Em cada uma das retas suportes dessas arestas, consideremos um ponto (distinto dos vértices do tetraedro). Agora, note que existem quatro planos determinados apenas por um desses pontos e uma reta suporte de uma aresta do quadrilátero tomado. Por exemplo, na Figura 38 estamos considerando os planos  $AZB$ ,  $BWC$ ,  $CXD$  e  $DYA$ , onde  $X \in \overleftrightarrow{AB}$ ,  $Y \in \overleftrightarrow{BC}$ ,  $Z \in \overleftrightarrow{CD}$  e  $W \in \overleftrightarrow{DA}$ .

Para a versão espacial do Teorema de Ceva, iremos estabelecer um critério para verificar a concorrência desses quatro planos. Iremos enunciar o teorema na forma geral, porém, demonstraremos apenas um, de três casos possíveis.

**Teorema 3.4.1 (Teorema de Ceva no espaço)** *Sejam  $ABCD$  um tetraedro e  $X \in \overleftrightarrow{AB}$ ,  $Y \in \overleftrightarrow{BC}$ ,  $Z \in \overleftrightarrow{CD}$  e  $W \in \overleftrightarrow{DA}$  pontos distintos dos vértices do tetraedro. Os planos  $AZB$ ,  $BWC$ ,  $CXD$  e  $DYA$  interseam-se em um único ponto se, e somente se,*

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZD} \cdot \frac{DW}{WA} = 1. \quad (3.4)$$

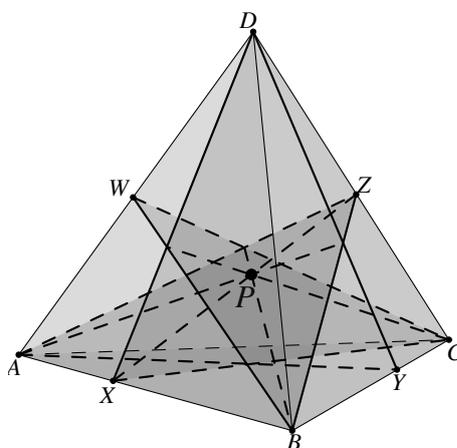


Figura 38: Interseção entre os planos  $AZB$ ,  $BWC$ ,  $CXD$  e  $DYA$ .

**Demonstração**

( $\Rightarrow$ ) Consideremos o caso em que  $X \in AB$ ,  $Y \in BC$ ,  $Z \in CD$  e  $W \in DA$ . Seja  $P$  o ponto de interseção dos planos  $AZB$ ,  $BWC$ ,  $CXD$  e  $DYA$ . Sejam  $C'$  o ponto de interseção dos segmentos  $XD$  e  $WB$  e  $A'$  o ponto de interseção dos segmentos  $BZ$  e  $DY$ . Seja  $T$  o ponto de interseção do segmento  $BD$  com o plano determinado pelos pontos  $P$ ,  $A'$  e  $C'$ .

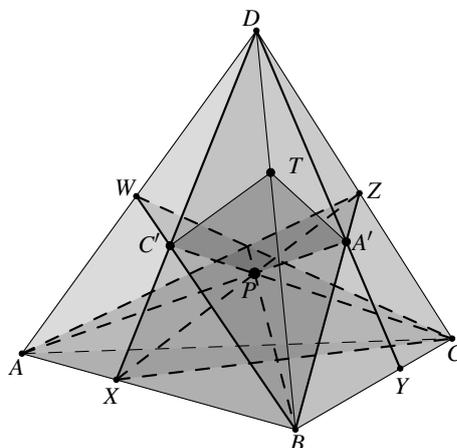


Figura 39: Plano  $PA'C'$  intersecando o segmento  $BD$  no ponto  $T$ .

Aplicando o Teorema de Ceva aos triângulos  $ABD$  e  $BCD$ , obtemos:

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BT}{TD} \cdot \frac{DW}{WD} = 1 \tag{3.5}$$

e

$$\frac{CZ}{ZD} \cdot \frac{DT}{TB} \cdot \frac{BY}{YC} = 1. \tag{3.6}$$

Multiplicando-se as duas equações anteriores, o resultado é a equação (3.4).

( $\Leftarrow$ ) Seja  $T$  um ponto em  $BD$ , tal que o segmento  $AT$  passe pelo ponto  $C'$ . Pelo Teorema de Ceva, (3.5) é verdadeira. Além disso, por hipótese, (3.4) também é válida e pode ser reescrita como

$$\frac{BX}{XA} \cdot \frac{AW}{WD} \cdot \frac{DZ}{ZC} \cdot \frac{CY}{YB} = 1. \tag{3.7}$$

Portanto, multiplicando-se as equações (3.5) e (3.7), obtemos a equação (3.6). Usando o Teorema de Ceva no triângulo  $BCD$  concluímos que  $CT$  passa pelo ponto  $A'$ .

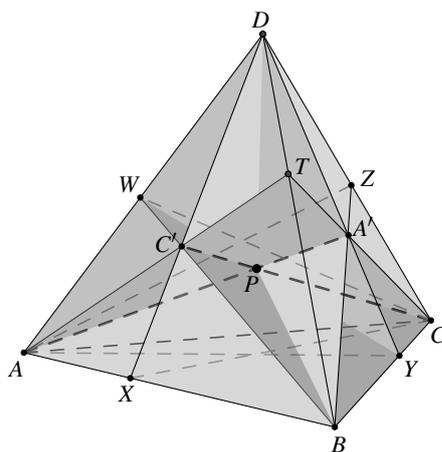


Figura 40: Segmentos  $AA'$  e  $CC'$ .

Segue também que os segmentos  $AA'$  e  $CC'$  estão no plano  $ATC$  porque os pontos das extremidades de cada segmento estão nesse plano. Além disso, eles interseam-se num ponto  $P$ , já que  $C$  está no semiplano oposto de  $C'$ , tendo  $AA'$  como o segmento que separa o plano  $ATC$  em dois semiplanos. Finalmente, como  $AA'$  é a interseção entre os planos  $ADY$  e  $AZB$  e  $CC'$  é a interseção entre os planos  $BWC$  e  $DXC$ , segue-se que esses quatro planos se interseam em  $P$ . ■

O artigo [7] é uma excelente referência e traz aplicações das versões no espaço dos teoremas de Menelaus e Ceva.

### 3.5 Aplicações: Ponto de Gergonne e Nagel

Como aplicação para o Teorema de Ceva, apresentaremos dois problemas. O primeiro trata-se do Ponto de Gergonne e o segundo, do Ponto de Nagel.

**Problema 1 (Ponto de Gergonne)** *Dados um triângulo  $ABC$  e os pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  de tangência da circunferência inscrita, situados respectivamente sobre os lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ . As cevianas  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  concorrem.*

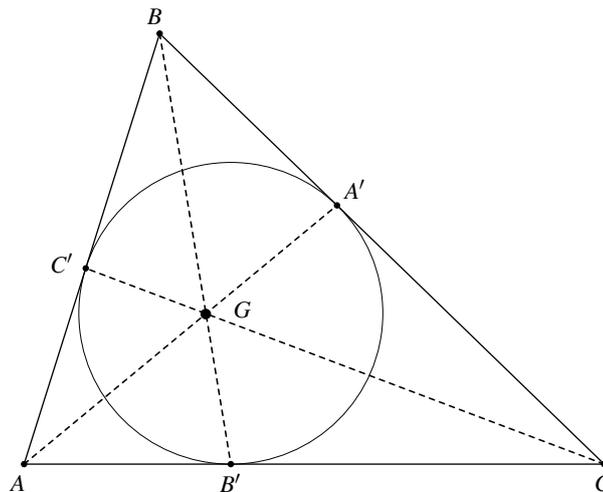


Figura 41: Ponto de Gergonne.

#### Demonstração

Seja  $O$  o centro da circunferência inscrita no triângulo  $ABC$ . Como  $\overline{OB'} = \overline{OC'}$  e  $\widehat{OB'A} \cong \widehat{AC'O}$ , conclui-se que os triângulos  $AC'O$  e  $AOB'$  são congruentes. Por conseguinte,  $\overline{AB'} = \overline{AC'} = x$ .

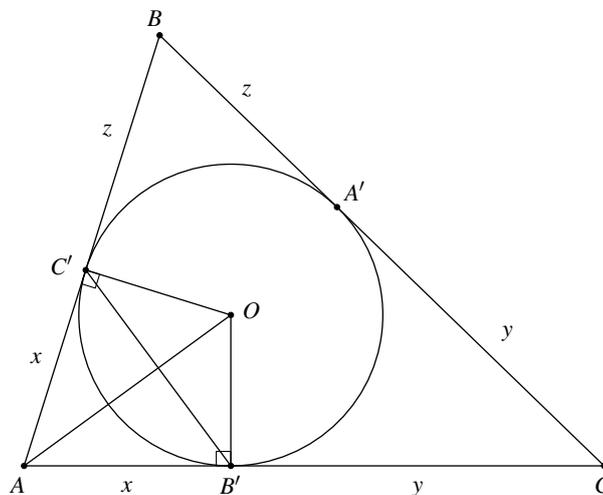


Figura 42: Circunferência inscrita no triângulo  $ABC$ .

Analogamente, obtemos  $\overline{BA'} = \overline{BC'} = z$  e  $\overline{CB'} = \overline{CA'} = y$ .

Daí, temos

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{BC'}}{\overline{C'A}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1.$$

Portanto, pelo Teorema de Ceva, concluímos que as cevianas  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  são concorrentes. Na Figura 41, o ponto de Gergonne está indicado pelo ponto  $G$ . ■

**Problema 2 (Ponto de Nagel)** *Dados um triângulo  $ABC$  e os pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  de tangência das circunferências ex-inscritas, situados respectivamente sobre os lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ . As cevianas  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  concorrem.*

**Demonstração**

Sejam  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  círculos ex-escritos do triângulo  $ABC$ . Considere  $A' = C_2 \cap BC$ ,  $B' = C_3 \cap AC$ ,  $C' = C_1 \cap AB$ ,  $D = C_3 \cap \overleftrightarrow{BC}$ ,  $E = C_3 \cap \overleftrightarrow{AB}$ ,  $F = C_1 \cap \overleftrightarrow{AC}$ ,  $G = C_1 \cap \overleftrightarrow{BC}$ ,  $H = C_2 \cap \overleftrightarrow{AB}$  e  $I = C_2 \cap \overleftrightarrow{AC}$ . De modo semelhante ao problema anterior, temos  $\overline{AF} = \overline{AC'} = x$ ,  $\overline{BG} = \overline{BC'} = y$ ,  $\overline{BH} = \overline{BA'} = z$ ,  $\overline{CI} = \overline{CA'} = u$ ,  $\overline{CD} = \overline{CB'} = v$  e  $\overline{AB'} = \overline{AE} = w$ . Como apoio, observe a figura a seguir.

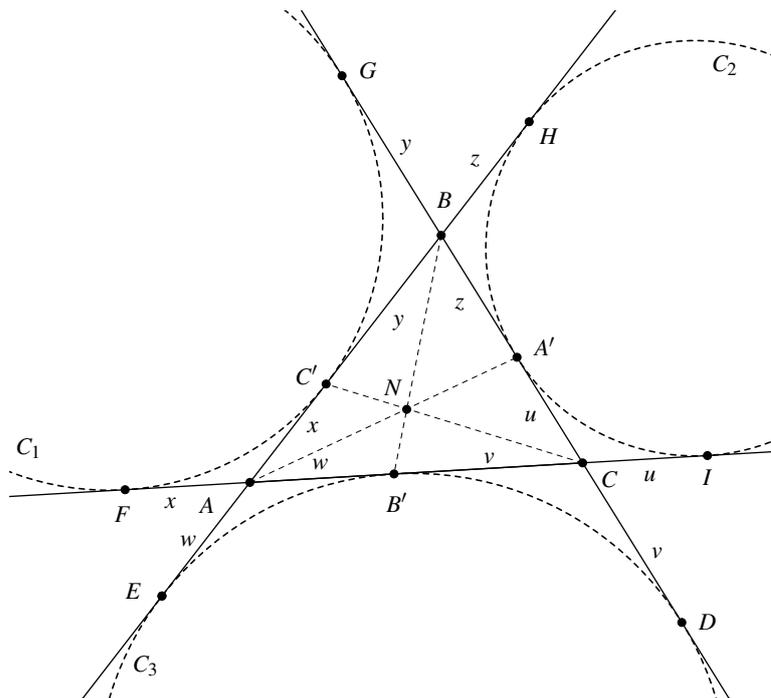


Figura 43: Ponto de Nagel.

Note que  $\overline{AH} = \overline{AI}$ ,  $\overline{BD} = \overline{BE}$  e  $\overline{CF} = \overline{CG}$ . Daí, respectivamente, temos

$$x + y + z = w + v + u, \tag{3.8}$$

$$z + u + v = y + x + u \tag{3.9}$$

e

$$v + w + x = u + z + y. \quad (3.10)$$

Fazendo (3.8) – (3.9), (3.8) – (3.10) e (3.9) – (3.10) obtemos, respectivamente,  $z = w$ ,  $x = u$  e  $y = v$ .

Segue, daí, que

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = \frac{w}{v} \cdot \frac{u}{z} \cdot \frac{y}{x} = \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{x} = 1.$$

Portanto, pelo Teorema de Ceva, as cevianas  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  concorrem. Na Figura 43, o ponto de Nagel está indicado pelo ponto  $N$ . ■

## 4 EXPRESSÕES DE ROUTH

Neste capítulo, apresentaremos as duas expressões encontradas em [2]. Faremos uma demonstração totalmente elementar dos dois resultados. Para mais detalhes, recomendamos a referência [8].

### 4.1 1ª expressão de Routh

**Teorema 4.1.1** *Seja  $ABC$  um triângulo. Se  $A' \in \overleftrightarrow{BC}$ ,  $B' \in \overleftrightarrow{AC}$  e  $C' \in \overleftrightarrow{AB}$  são pontos distintos dos vértices do triângulo e se*

$$x = \frac{BA'}{A'C}, \quad y = \frac{CB'}{B'A} \quad e \quad z = \frac{AC'}{C'B},$$

então

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{xyz + 1}{(1+x)(1+y)(1+z)}.$$

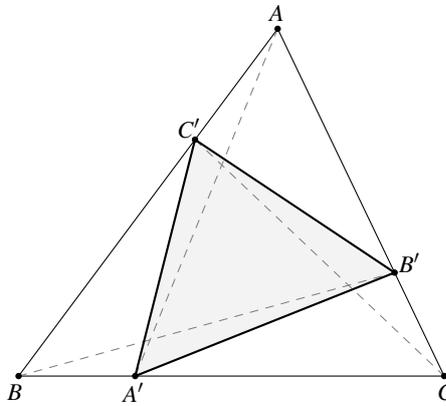


Figura 44: Triângulo ceviano  $A'B'C'$ .

**Demonstração** Inicialmente veremos que  $S_{A'B'C'}$  depende apenas de  $x$  e  $y$ .

*Afirmção 1* Vale a seguinte relação:

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{y}{1+y} \cdot S_{ABC}.$$

*Prova da Afirmção 1* Os triângulos  $BB'C$  e  $BB'A'$  possuem a mesma altura relativa a  $BC$  e  $BA'$ , respectivamente. Logo, temos

$$\frac{S_{BB'C}}{S_{BB'A'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}} = \frac{\overline{BA'} + \overline{A'C}}{\overline{BA'}} = 1 + \frac{1}{x} = \frac{1+x}{x}.$$

Ou seja,

$$\frac{S_{BB'C}}{S_{BB'A'}} = \frac{1+x}{x}. \quad (4.1)$$

De maneira análoga, nos triângulos  $BB'C$  e  $ABC$ , temos

$$\frac{S_{BB'C}}{S_{ABC}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CB'} + \overline{B'A}} = \frac{y}{1+y}.$$

Logo,

$$S_{BB'C} = \frac{y}{1+y} \cdot S_{ABC}. \quad (4.2)$$

Substituindo (4.2) em (4.1), temos

$$S_{BB'A'} = \frac{x}{1+x} \cdot \frac{y}{1+y} \cdot S_{ABC}. \quad (4.3)$$

Usando as expressões (4.2) e (4.3), segue que

$$\begin{aligned} S_{A'B'C} &= S_{BB'C} - S_{BB'A'} \\ &= \frac{y}{1+y} \cdot S_{ABC} - \frac{x}{1+x} \cdot \frac{y}{1+y} \cdot S_{ABC} \\ &= \left(1 - \frac{x}{1+x}\right) \cdot \frac{y}{1+y} \cdot S_{ABC} \\ &= \frac{1+x-x}{1+x} \cdot \frac{y}{1+y} \cdot S_{ABC}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{y}{1+y} \cdot S_{ABC}.$$

*Afirmção 2* Valem as relações

$$S_{B'C'A} = \frac{1}{1+y} \cdot \frac{z}{1+z} \cdot S_{ABC} \quad \text{e} \quad S_{A'C'B} = \frac{1}{1+z} \cdot \frac{x}{1+x} \cdot S_{ABC}.$$

As demonstrações das relações acima seguem por simetria.

Para finalizar, observamos que

$$S_{A'B'C'} = S_{ABC} - S_{A'B'C} - S_{B'C'A} - S_{A'C'B}.$$

Donde segue que

$$\begin{aligned} S_{A'B'C'} &= S_{ABC} - \left( \frac{1}{1+x} \cdot \frac{y}{1+y} + \frac{1}{1+y} \cdot \frac{z}{1+z} + \frac{1}{1+z} \cdot \frac{x}{1+x} \right) \cdot S_{ABC} \\ &= S_{ABC} \cdot \left( 1 - \frac{1}{1+x} \cdot \frac{y}{1+y} - \frac{1}{1+y} \cdot \frac{z}{1+z} - \frac{1}{1+z} \cdot \frac{x}{1+x} \right). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} &= \frac{(1+x)(1+y)(1+z) - y(1+z) - z(1+x) - x(1+y)}{(1+x)(1+y)(1+z)} \\ &= \frac{1+y+x+xy+z+yz+xz+xyz - y - yz - z - xz - x - xy}{(1+x)(1+y)(1+z)} \\ &= \frac{xyz+1}{(1+x)(1+y)(1+z)}. \end{aligned}$$

■

**Exemplo 4.1.1** *Sejam  $ABC$  um triângulo qualquer e  $A' \in BC$ ,  $B' \in AC$  e  $C' \in AB$  pontos tais que  $\overline{AC'} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ ,  $\overline{BA'} = \frac{1}{3}\overline{BC}$  e  $\overline{CB'} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ , calculemos a área do triângulo  $A'B'C'$  em função da área do triângulo  $ABC$ .*

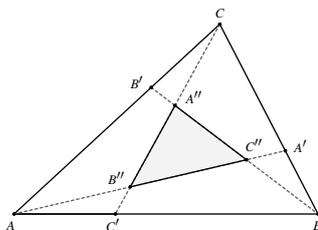


Figura 45: Triângulo com um terço de área.

Note que

$$x = \frac{BA'}{A'C} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{CB'}{B'A} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad z = \frac{AC'}{C'B} = \frac{1}{2}.$$

Aplicando o Teorema 4.1.1, temos

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1}{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}.$$

Portanto,  $S_{A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC}$ .

◇

## 4.2 2ª expressão de Routh

**Teorema 4.2.1 (Teorema de Routh)** *Sejam  $ABC$  um triângulo e  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  suas cevianas, onde  $A' \in \overleftrightarrow{BC}$ ,  $B' \in \overleftrightarrow{AC}$  e  $C' \in \overleftrightarrow{AB}$  são pontos distintos dos vértices do triângulo. Se*

$$x = \frac{BA'}{A'C}, \quad y = \frac{CB'}{B'A} \quad \text{e} \quad z = \frac{AC'}{C'B}$$

e  $A'' = BB' \cap CC'$ ,  $B'' = CC' \cap AA'$  e  $C'' = AA' \cap BB'$ , então

$$\frac{S_{A''B''C''}}{S_{ABC}} = \frac{(1 - xyz)^2}{(1 + x + xy)(1 + y + yz)(1 + z + xz)}. \quad (4.4)$$

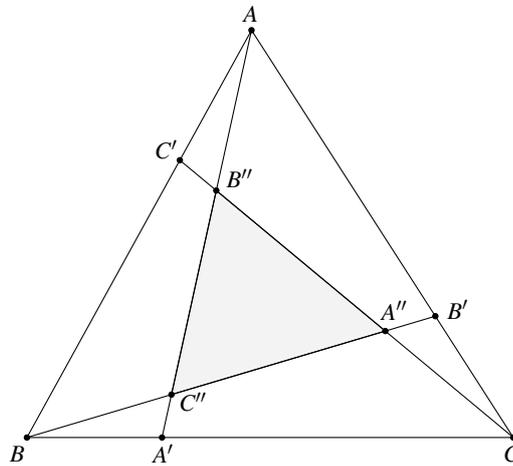


Figura 46: Triângulo de Routh.

**Demonstração**

*Afirmção 1* Vale a seguinte relação:

$$y = \frac{S_{BC''C}}{S_{AC''B}}.$$

*Prova da Afirmção 1* Os triângulos  $BC''C$  e  $AC''B$ , representados na Figura 47, possuem a base  $BC''$  em comum. Daí, podemos concluir que a razão entre suas áreas equivale à razão entre as alturas relativas a essa base.

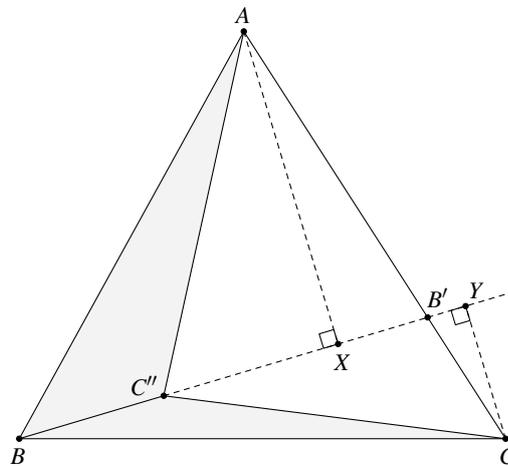


Figura 47: Triângulos  $BC''C$  e  $AC''B$ .

Simbolicamente, sejam  $AX$  e  $CY$  as alturas relativas à base  $BC$  dos triângulos  $BC''C$  e  $AC''B$ , respectivamente. Note que  $AXB' \sim CYB'$ , e daí segue que

$$\frac{S_{BC''C}}{S_{AC''B}} = \frac{\overline{CY}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = y.$$

*Afirmção 2* Vale a seguinte relação:

$$\frac{1}{x} = \frac{S_{CC''A}}{S_{AC''B}}.$$

*Prova da Afirmção 2* Os triângulos  $ACA'$  e  $ABA'$ , ilustrados na Figura 48, possuem a mesma altura relativa à base  $BC$ .

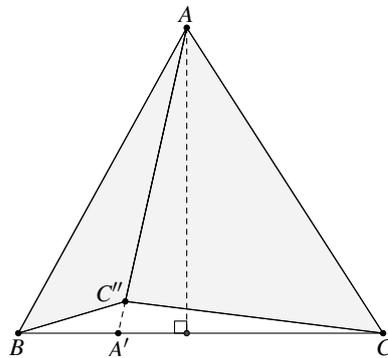


Figura 48: Triângulos  $ACA'$  e  $ABA'$ .

Daí, podemos concluir que a razão entre suas áreas equivale à razão relativa a estas bases. Ou seja,

$$\frac{1}{x} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{BA'}} = \frac{S_{ACA'}}{S_{ABA'}}.$$

O mesmo ocorre com os triângulos  $C''A'B$  e  $C''A'C$  que têm a mesma altura relativa ao lado oposto a  $C''$ . Portanto, temos

$$\frac{1}{x} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{BA'}} = \frac{S_{C''A'C}}{S_{C''A'B}}.$$

Por propriedades de proporcionalidade, temos:

$$\frac{1}{x} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{BA'}} = \frac{S_{ACA'} - S_{C''A'C}}{S_{ABA'} - S_{C''A'B}} = \frac{S_{CC''A}}{S_{AC''B}}.$$

Isso termina a demonstração da Afirmção 2.

*Afirmção 3* Vale a seguinte relação:

$$S_{AC''B} = \frac{x}{1+x+xy} \cdot S_{ABC}.$$

Prova da Afirmação 3 Observe que

$$S_{ABC} = S_{AC''B} + S_{BC''C} + S_{CC''A}.$$

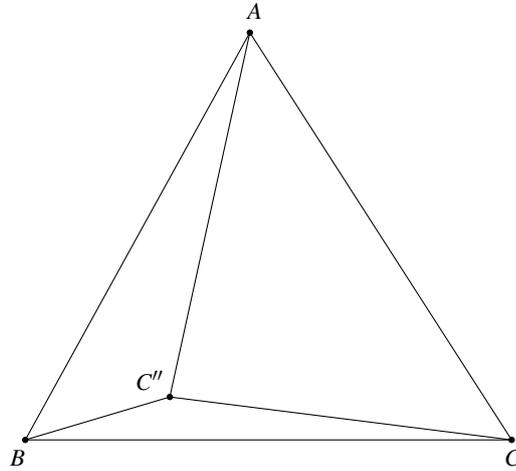


Figura 49: Triângulos  $AC''B$ ,  $BC''C$  e  $CC''A$ .

Dividindo essa igualdade por  $S_{AC''B}$ , obtemos

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AC''B}} = 1 + y + \frac{1}{x}.$$

Por uma manipulação algébrica simples, concluímos a Afirmação 3.

De maneira análoga, consideremos os triângulos  $CA''B$  e  $CA''A$ , conforme a Figura 50, de modo que  $AZ$  e  $BW$  sejam as alturas relativas à base  $A''C$ , respectivamente, e os triângulos  $AB''C$  e  $AB''B$ , esquematizados na Figura 51, com alturas  $CK$  e  $BL$  relativas à base  $AB''$ , respectivamente.

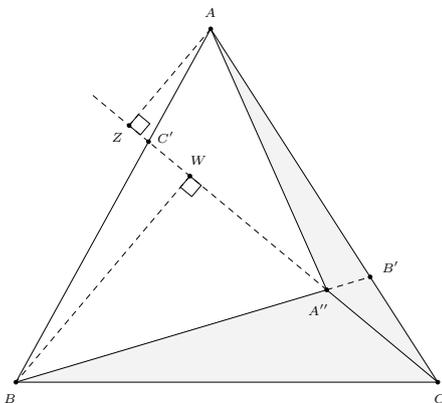


Figura 50: Triângulos  $CA''B$  e  $CA''A$ .

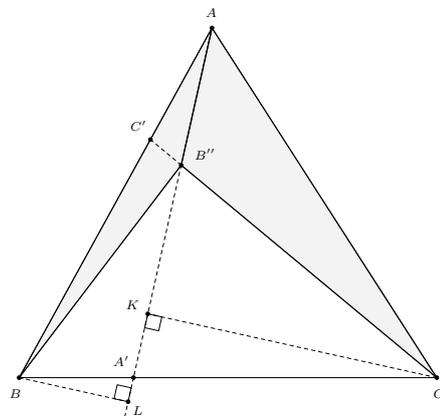


Figura 51: Triângulos  $AB''C$  e  $AB''B$ .

Isso demonstra a próxima afirmação.

Afirmção 4 Valem as relações

$$S_{CA''B} = \frac{y}{1+y+yz} \cdot S_{ABC} \quad \text{e} \quad S_{AB''C} = \frac{z}{1+z+xz} \cdot S_{ABC}.$$

Finalmente, observe que

$$S_{A''B''C''} = S_{ABC} - S_{AC''B} - S_{BA''C} - S_{CB''A}.$$

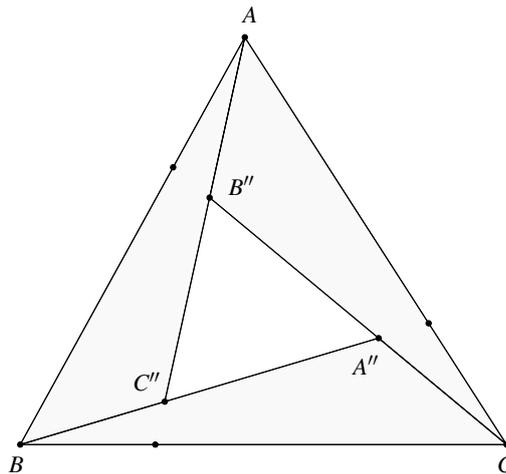


Figura 52: Triângulos  $AC''B$ ,  $BA''C$  e  $CB''A$ .

Substituindo pelas expressões estabelecidas nas afirmações 3 e 4, temos

$$S_{A''B''C''} = S_{ABC} - \frac{x \cdot S_{ABC}}{1+x+xy} - \frac{y \cdot S_{ABC}}{1+y+yz} - \frac{z \cdot S_{ABC}}{1+z+xz}.$$

Dividindo membro a membro a equação acima por  $S_{ABC}$ , teremos

$$\frac{S_{A''B''C''}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{x}{1+x+xy} - \frac{y}{1+y+yz} - \frac{z}{1+z+xz}.$$

Para chegar à expressão (4.4), basta simplificar o lado direito dessa última equação. ■

**Exemplo 4.2.1** *Sejam  $ABC$  um triângulo qualquer e os pontos  $A' \in BC$ ,  $B' \in AC$  e  $C' \in AB$ . Sendo  $A'' = BB' \cap CC'$ ,  $B'' = CC' \cap AA'$  e  $C'' = AA' \cap BB'$  e  $\overline{AC'} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ ,  $\overline{BA'} = \frac{1}{3}\overline{BC}$  e  $\overline{CB'} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ , calculemos a área do triângulo  $A''B''C''$  em função da área do triângulo  $ABC$ .*

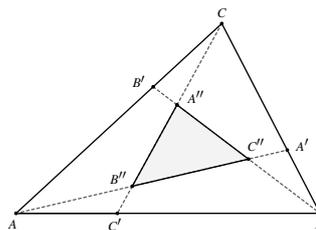


Figura 53: Triângulo com um sétimo de área.

Note que

$$x = \frac{BA'}{A'C} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{CB'}{B'A} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad z = \frac{AC'}{C'B} = \frac{1}{2}.$$

Aplicando o Teorema de Routh, temos

$$\frac{S_{A''B''C''}}{S_{ABC}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{7}.$$

Portanto,  $S_{A''B''C''} = \frac{1}{7} \cdot S_{ABC}$ .

◇

## 5 UNIFICANDO OS TEOREMAS DE MENELAUS E CEVA

No capítulo que segue, iremos examinar os dois teoremas de Routh apresentados anteriormente e estabelecer uma unificação dos teoremas de Menelaus e Ceva. Aqui seguiremos a construção feita em [9].

### 5.1 Preliminares

Seja  $ABC$  um triângulo. Recordamos que para cada ponto  $A'$  na reta  $\overleftrightarrow{BC}$  distinto de  $B$  e  $C$  definimos na página 23 o número  $x = \frac{BA'}{A'C}$ . Por simplicidade, indicaremos o ponto  $A'$  por  $A_x$ . Esta notação merece alguns comentários. Examinando os valores de  $x = \frac{BA'}{A'C}$  temos a seguinte descrição:

- i) Quando  $x > 0$ ,  $A_x$  é um ponto que está entre  $B$  e  $C$ ;
- ii) Quando  $-1 < x < 0$ ,  $B$  está entre  $A_x$  e  $C$ ;
- iii) Quando  $x < -1$ ,  $C$  está entre  $B$  e  $A_x$ .

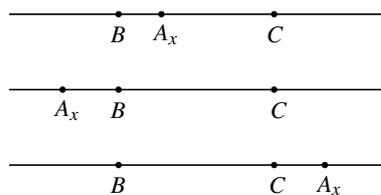


Figura 54: Localizações do ponto  $A_x$ .

Esses são os valores que  $x$  pode assumir. Para completar, estabelecemos que:  $A_0 = B$ ;  $A_\infty = C$ . A notação  $A_{-1}$  indicará algum ponto que pertença à reta que incide em  $A$  e é paralela à reta suporte do lado  $BC$ .

De modo análogo, denotamos os pontos que definem cevianas que incidem em outros vértices. Mais detalhadamente, para a reta suporte de  $AB$ , denotamos os pontos por  $C_z$  e estabelecemos que  $C_0 = A$  e  $C_\infty = B$ . Para a reta suporte de  $CA$ , denotamos os pontos por  $B_y$  e  $B_0 = C$  e  $B_\infty = A$ .

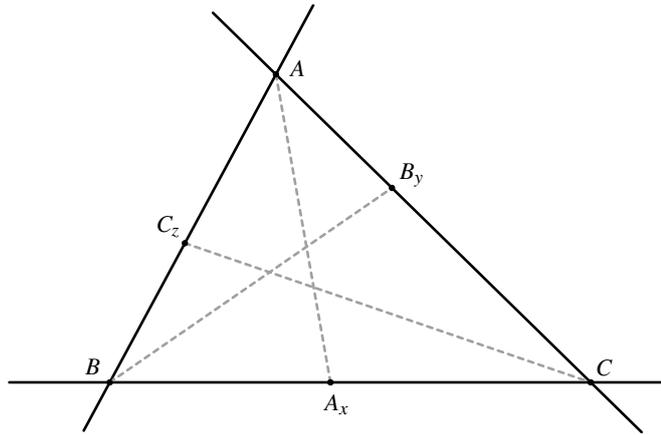


Figura 55: Cevianas  $AA_x$ ,  $BB_y$  e  $CC_z$ .

A primeira expressão de Routh nos dá a relação

$$\frac{S_{A_x B_y C_z}}{S_{ABC}} = \frac{xyz + 1}{(1+x)(1+y)(1+z)}.$$

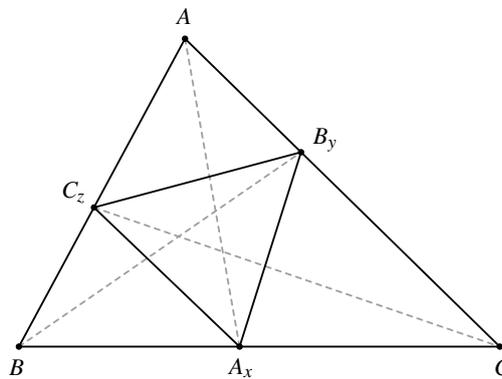


Figura 56: Triângulo  $A_x B_y C_z$ .

Note que para  $x = -1$ ,  $y = -1$  ou  $z = -1$ , a relação acima não está definida. Nesses casos, o triângulo  $A_x B_y C_z$  não fica determinado, já que teremos retas paralelas aos lados do triângulo  $ABC$ . Observe na figura a seguir um caso em que  $x = -1$ .

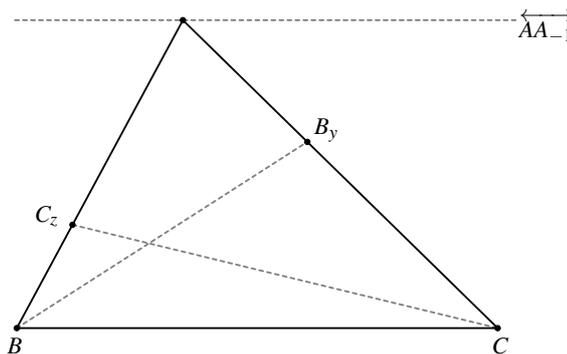


Figura 57: Reta paralela a BC.

Por outro lado, pelo Teorema de Menelaus,  $xyz + 1 = 0$  se, e somente se, os pontos  $A_x$ ,  $B_y$  e  $C_z$  são colineares. Neste casos, o triângulo  $A_xB_yC_z$  se torna degenerado e sua área será igual zero, daí  $\frac{S_{A_xB_yC_z}}{S_{ABC}} = 0$ . Entretanto, para alguns valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , a 1ª expressão será negativa. Para estabelecer a igualdade devemos considerar sinais nas áreas de triângulos. Seja  $XYZ$  um triângulo. Diz-se que o triângulo está positivamente orientado quando seus vértices estão ciclicamente ordenados no sentido anti-horário (em relação ao círculo determinado pelos vértices). Nesse caso, sua área será positiva. Uma área positiva de um triângulo significa que ele está positivamente orientado. Áreas negativas correspondem aos triângulos negativamente orientados.

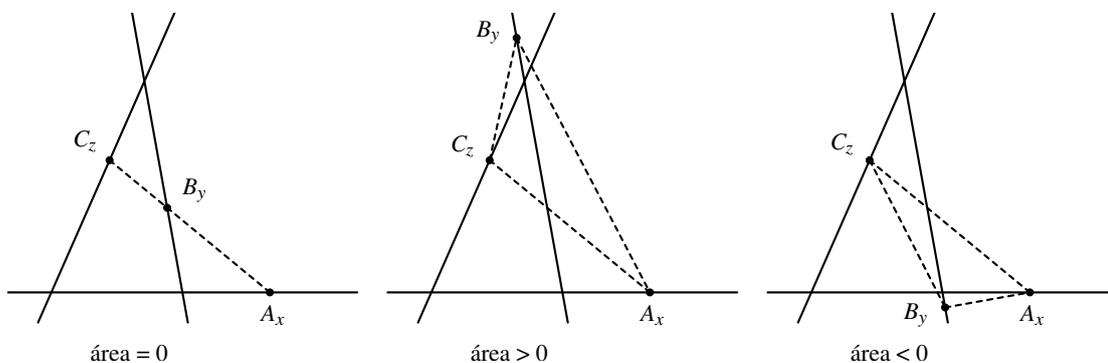


Figura 58: Variação de sinal das áreas do triângulo  $A_xB_yC_z$ .

A 2ª expressão de Routh estabelece que

$$\frac{S_{A''B''C''}}{S_{ABC}} = \frac{1 - xyz}{(1 + x + xy)(1 + y + yz)(1 + z + zx)},$$

onde os vértices do triângulo  $A''B''C''$  são os pontos obtidos pelas interseções de retas como descritos a seguir,

$$\{A''\} = \overleftrightarrow{BB_y} \cap \overleftrightarrow{CC_z}, \quad \{B''\} = \overleftrightarrow{CC_z} \cap \overleftrightarrow{AA_x} \quad \text{e} \quad \{C''\} = \overleftrightarrow{AA_x} \cap \overleftrightarrow{BB_y}.$$

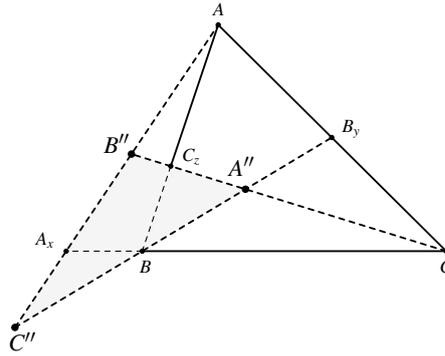


Figura 59: Triângulo  $A''B''C''$ .

O triângulo  $A_xB_yC_z$  não fica determinado quando  $(1+x+xy)(1+y+yz)(1+z+zx) = 0$  e nos casos em que os pares  $(x,y)$ ,  $(y,z)$  ou  $(z,x)$  são iguais a  $(\infty, -1)$  ou  $(x,y) = (0, \infty)$ . Por exemplo, se  $(x,y) = (\infty, -1)$ , teremos o paralelismo entre as cevianas  $BB_{-1}$  e  $AA_\infty$ .

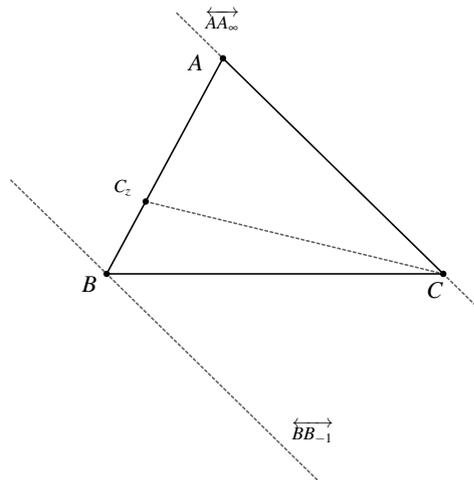


Figura 60: Cevianas paralelas.

Observe, também, que os pontos  $A''$ ,  $B''$  e  $C''$  são colineares se, e somente se, são coincidentes. Pelo Teorema de Ceva, quando  $xyz = 1$ , as retas  $\overleftrightarrow{AA_x}$ ,  $\overleftrightarrow{BB_y}$  e  $\overleftrightarrow{CC_z}$  são concorrentes e daí  $\frac{S_{A''B''C''}}{S_{ABC}} = 0$ .

## 5.2 Unificando os teoremas de Ceva e Menelaus

Agora, considere as seis cevianas seguintes, duas de cada vértice:  $\overleftrightarrow{AA_u}$ ,  $\overleftrightarrow{AA_x}$ ,  $\overleftrightarrow{BB_v}$ ,  $\overleftrightarrow{BB_y}$ ,  $\overleftrightarrow{CC_w}$  e  $\overleftrightarrow{CC_z}$ . Com  $u, v, w, x, y, z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Considere que cada um dos pares de cevianas  $(\overleftrightarrow{AA_x}, \overleftrightarrow{BB_y})$ ,  $(\overleftrightarrow{BB_y}, \overleftrightarrow{CC_w})$  e  $(\overleftrightarrow{CC_z}, \overleftrightarrow{AA_u})$  se intersectam em exatamente um ponto. O triângulo  $PQR$ , conforme Figura 61, onde

$$\{P\} = \overleftrightarrow{AA_x} \cap \overleftrightarrow{BB_y}, \quad \{Q\} = \overleftrightarrow{BB_y} \cap \overleftrightarrow{CC_w} \quad e \quad \{R\} = \overleftrightarrow{CC_z} \cap \overleftrightarrow{AA_u}, \quad (5.1)$$

será chamado de triângulo generalizado de Routh.

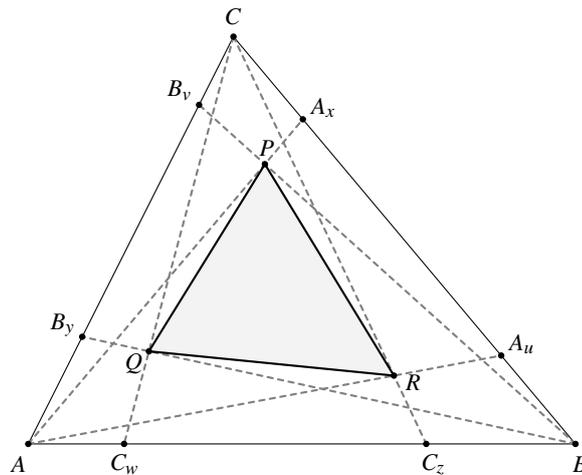


Figura 61: Triângulo generalizado de Routh.

Note que  $P$ ,  $Q$  e  $R$  estão bem definidos se, e somente se,  $x, y, z, u, v, w \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  satisfazem

$$(1 + x + xv)(1 + y + yw)(1 + z + zu) \neq 0. \tag{5.2}$$

Quando  $u = x$ ,  $v = y$  e  $w = z$  o triângulo  $PQR$  definido em (5.1) torna-se um triângulo de Routh, veja a Figura 63.

Por outro lado, quando  $u = v = w = 0$  temos  $AA_0 = AB$ ,  $BB_0 = BC$  e  $CC_0 = CA$ . De (5.1), resulta que  $P = A_x$ ,  $Q = B_y$  e  $R = C_z$ . Neste caso, o triângulo  $PQR$  coincide com o triângulo ceviano  $A_xB_yC_z$ , veja a Figura 62.

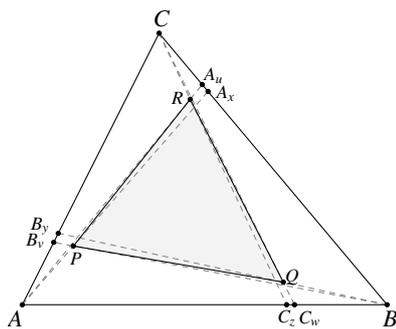


Figura 62:  $u \rightarrow x$ ,  $v \rightarrow y$  e  $w \rightarrow z$ .

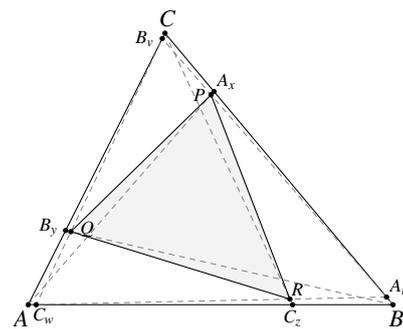


Figura 63:  $u = v = w \rightarrow 0$ .

Considerando as notações estabelecidas acima, enunciaremos o nosso próximo resultado.

**Teorema 5.2.1** *Sejam  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , pontos tais que  $\{P\} = \overleftrightarrow{AA_x} \cap \overleftrightarrow{BB_v}$ ,  $\{Q\} = \overleftrightarrow{BB_y} \cap \overleftrightarrow{CC_w}$  e  $\{R\} = \overleftrightarrow{CC_z} \cap \overleftrightarrow{AA_u}$ , então*

$$\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = \frac{1 - xyw - xvz - uyz + xyz + xyzuvw}{(1 + x + xv)(1 + y + yw)(1 + z + zu)} \quad (5.3)$$

**Demonstração**

Note, inicialmente, que  $\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}}$  não se altera sob transformações afins em  $\mathbb{R}^2$ . Ou seja, ao invés de tomarmos um triângulo qualquer, podemos considerar o triângulo de vértices  $A = (0,0)$ ,  $B = (1,0)$  e  $C = (0,1)$ . A seguir, vamos determinar as coordenadas do ponto  $P$ . Considere as notações da Figura 64.

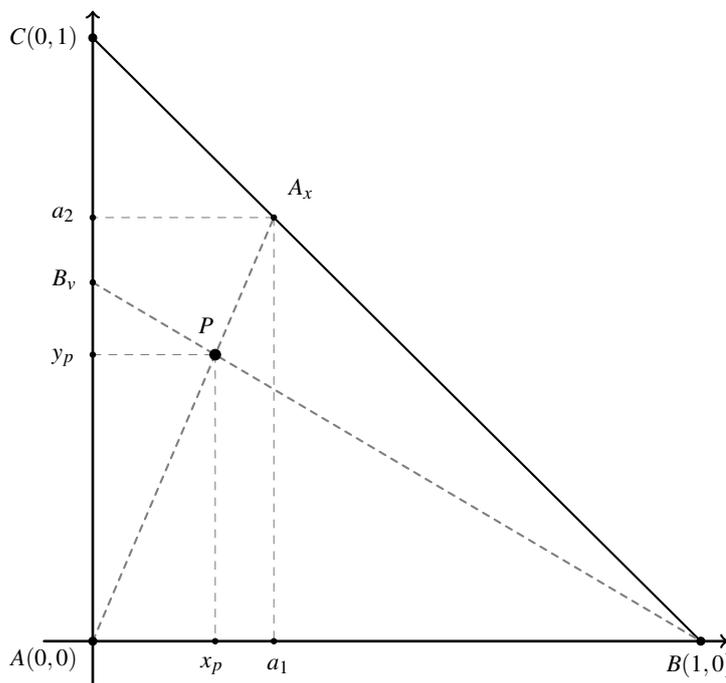


Figura 64: Triângulo de vértices  $A(0,0)$ ,  $B(1,0)$  e  $C(0,1)$ .

Temos

$$\frac{a_1 - 0}{1 - 0} = \frac{A_x C}{BC} = \frac{A_x C}{A_x C + BA_x} = \frac{A_x C}{A_x C + x \cdot A_x C} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{1 + x}.$$

Analogamente,

$$\frac{a_2 - 0}{1 - 0} = \frac{A_x B}{CB} = \frac{A_x B}{A_x C + BA_x} = \frac{x \cdot A_x C}{x \cdot A_x C + A_x C} \Rightarrow a_2 = \frac{x}{1 + x}.$$

Portanto,

$$A_x = \left( \frac{1}{1 + x}, \frac{x}{1 + x} \right).$$

Por outro lado, temos

$$\frac{b_2 - 0}{1 - b_2} = \frac{AB_v}{B_v C} = \frac{AB_v}{v \cdot AB_v} = \frac{1}{v} \Rightarrow b_2 = \frac{1}{1 + v}.$$

Portanto,  $B_v = \left(0, \frac{1}{1+v}\right)$ .

Temos  $\overrightarrow{A_x\hat{A}}: y = \frac{a_2}{a_1}x$  e  $\overrightarrow{A_v\hat{B}}: y = -b_2(x-1)$ . Daí, concluímos que

$$\frac{a_2}{a_1}x = -b_2x + b_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{a_1 \cdot b_2}{a_2 + a_1 \cdot b_2} \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1+v}}{\frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1+v}} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{1+x+xv}.$$

Então, segue que  $y = \frac{x}{1+x+xv}$  e, portanto,

$$P = \left(\frac{1}{1+x+xv}, \frac{x}{1+x+xv}\right).$$

De maneira análoga, encontramos

$$Q = \left(\frac{yw}{1+y+yw}, \frac{1}{1+y+yw}\right) \quad \text{e} \quad R = \left(\frac{z}{1+z+zu}, \frac{zu}{1+z+zu}\right).$$

Com a escolha feita para os vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , temos  $S_{ABC} = \frac{1}{2}$ .

Em Geometria Analítica, a área de um triângulo  $LMN$  determinado pelos pontos cujas coordenadas são  $L(x_l, y_l)$ ,  $M(x_m, y_m)$  e  $N(x_n, y_n)$ , pode ser expressa por  $S_{LMN} = \frac{1}{2} \cdot |D|$ , onde

$$D = \begin{bmatrix} x_l & x_m & x_n \\ y_l & y_m & y_n \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando esse algoritmo para o cálculo de áreas e aplicando algumas propriedades dos determi-

nantes, finalmente temos

$$\begin{aligned}
 \frac{S_{PQR}}{S_{ABC}} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & yw & z \\ 1+x+xv & 1+y+yw & 1+z+zu \\ x & 1 & zu \end{vmatrix}}{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & yw & z \\ x & 1 & zu \\ 1+x+xv & 1+y+yw & 1+z+zu \end{vmatrix}}{(1+x+xv)(1+y+yw)(1+z+zu)} \\
 &= \frac{\left( \begin{vmatrix} 1 & yw & z \\ x & 1 & zu \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & yw & z \\ x & 1 & zu \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & yw & z \\ x & 1 & zu \\ xv & yw & zu \end{vmatrix} \right)}{(1+x+xv)(1+y+yw)(1+z+zu)} \\
 &= \frac{1}{(1+x+xv)(1+y+yw)(1+z+zu)} \cdot [(1+ywzu+zx-z-zu-xyw)+ \\
 &\quad + (z+ywzux+zxy-zx-zuy-zxyw)+ \\
 &\quad + (zu+ywzuxv+zxyw-zxv-zuyw-zuxyw)] \\
 &= \frac{1-xyw-xvz-uyz+xyz+uvwxyz}{(1+x+xv)(1+y+yw)(1+z+zu)}.
 \end{aligned}$$

■

Como consequência imediata desse resultado, obtemos a seguinte unificação dos teoremas de Menelaus e Ceva, estudados nos capítulos anteriores.

**Corolário 5.2.1** *Os pontos*

$$\{P\} = \overleftrightarrow{AA_x} \cap \overleftrightarrow{BB_v}, \quad \{Q\} = \overleftrightarrow{BB_y} \cap \overleftrightarrow{CC_w} \quad e \quad \{R\} = \overleftrightarrow{CC_z} \cap \overleftrightarrow{AA_u}$$

são colineares se, e somente se,  $1 - xyw - xvz - uyz + xyz + uvwxyz = 0$ .

Os teoremas de Menelaus e Ceva são apenas casos particulares desse corolário. No triângulo generalizado de Routh, os pontos P, Q e R estarão sobre as retas suportes dos lados do triângulo ABC, quando  $u = v = w = 0$ . Para esse caso, pelo Corolário 5.2.1, os pontos P, Q e R,

distintos dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , são colineares se, e somente se,

$$\begin{aligned} 1 - xyw - xvz - uyz + xyz + uvwxyz &= 0 \Leftrightarrow \\ 1 + xyz &= 0 \Leftrightarrow \\ xyz &= -1, \end{aligned}$$

ou seja, a situação se reduz ao Teorema de Menelaus.

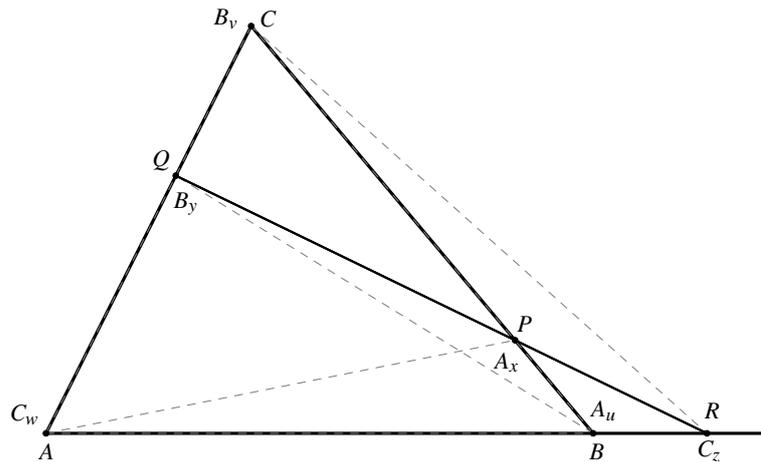


Figura 65:  $u = v = w = 0$  e  $xyz = -1$ .

Por outro lado, quando  $x = u$ ,  $y = v$  e  $z = w$ , os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  estão fora das retas suportes dos lados. Nesse caso, pelo Corolário 5.2.1, os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são coincidentes se, e somente se,

$$\begin{aligned} 1 - xyw - xvz - uyz + xyz + uvwxyz &= 0 \Leftrightarrow \\ 1 - xyz &= 0 \Leftrightarrow \\ xyz &= 1, \end{aligned}$$

isto é, essa situação nos remete ao Teorema de Ceva.

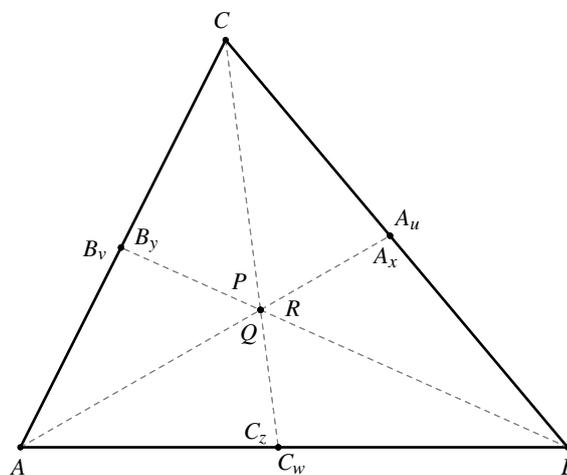


Figura 66:  $u = x$ ,  $v = y$ ,  $w = z$  e  $xyz = 1$ .

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho exploramos os teoremas de Menelaus e Ceva. Presamos, na maioria do trabalho, utilizar apenas conhecimentos elementares. Contamos que este texto sirva como subsídio teórico para os assuntos tratados aqui. Pelo tipo de abordagem, acreditamos que este trabalho possa ser explorado por alunos de vários níveis, quer seja de ensino médio quer seja de graduação.

Além disso, pudemos mostrar como o conhecimento matemático evolui no decorrer das épocas. Começamos o trabalho explorando os teoremas de Menelaus e Ceva de forma bem parecida àquela utilizada pelos seus propulsores e verificamos como o avanço da Matemática pode propiciar generalizações e, até mesmo, novas versões, desses conteúdos, que estão sendo exploradas até os dias atuais.

Finalizo esse trabalho confiante de que disponibilizo um material para aqueles que desejam conhecer e aprender um pouco mais sobre os dois teoremas tratados.

# REFERÊNCIAS

- 1 FILHO, A. E. *A trigonometria esférica e o globo terrestre*. Dissertação de Mestrado.
- 2 ROUTH, E. J. *A Treatise on Analytical Statics with Numerous Examples*. [S.l.]: London: Cambridge University Press, 1909.
- 3 CAMINHA, A. *Geometria*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- 4 ANDRADE, P. *Introdução à Geometria Hiperbólica - O modelo de Poincaré*. 1<sup>a</sup> edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- 5 ANDRADE, P. *Introdução à Geometria Projetiva*. 1<sup>a</sup> edição. Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- 6 BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 2012.
- 7 PAIVA, R. E. Redescobrimo Ceva e Menelaus em dimensão três. *Revista Eureka!, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro*.
- 8 ROSADO, F. B. Algunas aplicaciones de la noción de área: el triángulo de Routh y los triángulos cevianos. *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática*.
- 9 BENYI, A.; CURGUS, B. A generalization of Routh's triangle theorem. *American Mathematical Monthly, Western Washington University, Bellingham*, v. 120, n. 9, p. 841–846, 2013.