Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Modelagem Matemática no Ensino Básico

Kátia Rúbia Silva Carneiro Fonseca

Goiânia

2017

sistema de bibliotecas ufg

PRPG
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Kátia Rúbia Silva Carneiro Fonseca

Título do trabalho: Modelagem Matemática no Ensino Básico

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Kátia Rúbia S. Carneiro Fonseca
Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Kílem Gomes Lourenço
Assinatura do(a) orientador(a)[2]

---

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente
- Submissão de artigo em revista científica
- Publicação como capítulo de livro
- Publicação da dissertação/tese em livro

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Versão atualizada em maio de 2017.

Kátia Rúbia Silva Carneiro Fonseca

Modelagem Matemática no Ensino Básico

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientadora: Prof. Dra. Kélem Gomes Lourenço

Goiânia

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Fonseca, Kátia Rúbia Silva Carneiro
Modelagem Matemática no Ensino Básico [manuscrito] / Kátia Rúbia Silva Carneiro Fonseca. - 2017.
67 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Kélem Gomes Lourenço.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2017.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Modelagem Matemática. 2. Ensino Básico. 3. Isometrias. 4. Razão Áurea. I. Lourenço, Kélem Gomes, orient. II. Título.

CDU 51

Universidade Federal de Goiás - UFG
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional – PROFMAT/UFG
Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

PROFMAT

Ata da reunião da banca examinadora da defesa de Trabalho de Conclusão de Curso da aluna Kátia Rúbia Silva Carneiro Fonseca – Aos trinta dias do mês de maio do ano de dois mil e dezessete, às 17:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Profa. Dra. Kélem Gomes Lourenço – Orientadora, Profa. Dra. Thaynara Arielly de Lima – IME/UFG e Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza – IFG/Goiânia, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no auditório do IME, procederem a avaliação da defesa intitulada **"Modelagem Matemática no Ensino Básico"**, em nível de mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Kátia Rúbia Silva Carneiro Fonseca, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pela presidente da banca, Profa. Dra. Kélem Gomes Lourenço, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida à autora do TCC que, em 30 minutos, procedeu à apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu a examinanda, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se à avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1075/2012 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG, e procedidas as correções recomendadas, o trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega, na secretaria do IME, da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 18:00 horas, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, eu, Chaiane de Medeiros Rosa, secretária do PROFMAT/UFG, lavrei a presente ata que, após lida e aprovada, segue assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Kélem Gomes Lourenço
Profa. Dra. Kélem Gomes Lourenço
Presidente – IME/UFG

Thaynara Arielly de Lima
Profa. Dra. Thaynara Arielly de Lima
Membro – IME/UFG

Profa. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Membro – IFG/Goiânia

Kátia Rúbia Silva Carneiro Fonseca graduou-se em Licenciatura Matemática pela Universidade Federal de Goiás, professora com mais de 10 anos de laboração em sala de aula no Ensino Básico.

Dedicatória

Dedico este trabalho ao meu saudoso e amado pai, Antônio Ernani Carneiro.

Agradecimentos

Agradeço aos meus filhos, Júlia e Vítor, ao meu esposo, Edinaldo, aos meus colegas do PROFMAT, aos meus colegas de trabalho que me deram total apoio. Agradeço também à minha orientadora Drª Kélem Gomes Lourenço, que com muita dedicação e paciência me auxiliou na elaboração deste trabalho e à todos os professores deste mestrado. Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

A Matemática é uma das disciplinas com maior defasagem de ensino, e são muitos os fatores envolvidos para tal fracasso. Entre eles estão a relação entre a dificuldade de aprendizagem e o insucesso escolar; a falta de interesse dos alunos; questões sociais (família, situação financeira, etc); a falta de conhecimentos básicos; falta de capacitação dos professores; da forma como é ensinada, dentre outras razões. Diante disso, este trabalho pretende apresentar uma possível solução para a diminuição de tal fracasso, com o uso da Modelagem Matemática no Ensino Básico. A Modelagem Matemática nada mais é do que a tradução de problemas do cotidiano, nas suas diversas áreas, em linguagem Matemática. Há muito tempo já se fazia o uso da modelagem para resolver problemas. Neste trabalho serão apresentadas propostas de modelos matemáticos para serem aplicadas no Ensino Médio ou Fundamental que é o Modelo de Ornamentos e Modelagem do Número Áureo. As atividades propostas para o Modelo de Ornamentos incluem: duas atividades envolvendo a construção de um ornamento e uma terceira atividade com uma ficha com figuras para ser realizada uma análise das isometrias envolvidas. Já para o Modelo do Número Áureo foi elaborada uma atividade para que os próprios alunos coletassem e analisassem os dados sobre razões áureas no corpo humano. Atividades como essas serão aplicadas na unidade de ensino em que trabalho, pois facilitarão uma maior e melhor compreensão sobre o assunto abordado.

Palavras-Chaves

Modelagem Matemática, Ensino Básico, Isometrias, Razão Áurea.

Abstract

Mathematics is one of the most lagging disciplines in teaching, and there are many factors involved in such a failure. Among them is the relation between learning difficulty and school failure; Lack of student interest; Social issues (family, financial situation, etc.); The lack of basic knowledge; Lack of teacher training; The way it is taught, among other reasons. Therefore, this work intends to present a possible solution for the reduction of this failure, with the use of Mathematical Modeling in Basic Education. Mathematical Modeling is nothing more than the translation of everyday problems, in its various areas, in mathematical language. For a long time, modeling was used to solve problems. In this work will be presented proposals of mathematical models to be applied in high school or fundamental that is the Model of Ornaments and Modeling of the Golden Number. The activities proposed for the Ornaments Model include: two activities involving the construction of an ornament and a third activity with a token with figures to perform an analysis of the isometries involved. Already for the Model of the Golden Number an activity was elaborated so that the students themselves collected and analyzed the data on golden reasons in the human body. Activities like these will be applied in the unit of education in which I work, as they will facilitate a greater and better understanding on the subject addressed.

Keywords

Mathematical Modeling, Basic Education, Isometries, Golden Ratio.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

A Matemática está em toda parte, às vezes de maneira elementar, às vezes de modo mais complexo, podendo ser perceptível ou não. Muitos alunos indagam o porquê de se estudar Matemática, a maioria se mostra reticente, afirmando que não terão aplicabilidade em suas vidas. A Matemática está tão presente no seu dia-a-dia, tão enraizada, que nem percebem a sua existência ou aplicação. Temos os cálculos, dos mais simples até os mais complexos, fazendo parte de sua rotina diária, relacionado com o tempo, com questões financeiras, noções de espaço, inferências e análises de dados, etc. Ela nos contempla conhecimentos necessários para a resolução de problemas.

Enfim, a Matemática exerce grande importância na vida de todos. Através dela, podemos desenvolver o raciocínio lógico, propiciando a adaptação e a superação de desafios. A Matemática nos auxilia na interpretação do mundo que nos envolve. Estamos numa era de rápida e constante evolução tecnológica, e isso se dá, em grande parte à Matemática, que com seus algoritmos nos permitem tal avanço. No campo das mais variadas ciências, a Matemática tem papel fundamental. Por exemplo, através da Estatística com o levantamento e a análise de dados, é possível prever acontecimentos relacionados com a meteorologia; com a medicina, na causa e prevenção de certas doenças, epidemias ; controle de tráfego aéreo e terrestre, etc. No campo da computação, tudo é Matemática, utiliza-se um código binário, 0 e 1, e através dessa combinação são feitos cálculos para a conversão da linguagem humana. Na área de Química e Física, temos várias aplicações Matemáticas. Até mesmo no campo das artes, temos muitos conceitos matemáticos envolvidos, como será mostrado nesse trabalho com o modelo de ornamentos.

Contudo, é uma das disciplinas com maior defasagem de ensino. São muitos os fatores envolvidos para tal fracasso. Entre eles estão: a relação entre a dificuldade de aprendizagem e o insucesso escolar; a falta de interesse dos alunos; questões sociais (família, situação financeira, etc); a falta de conhecimentos básicos; falta de capacitação dos professores; da forma como é ensinada, dentre outras razões. Há também a crença popular que a Matemática é um bicho de sete cabeças, que é muito difícil, fazendo com que os alunos adquiram verdadeiro temor a essa disciplina.

Diante disso, este trabalho pretende apresentar uma possível solução para a diminuição de tal fracasso, com o uso da Modelagem Matemática no Ensino Básico. A Modelagem Matemática nada mais é do que a tradução de problemas do cotidiano, nas suas diversas áreas, em linguagem Matemática. Há muito tempo já se fazia o uso da modelagem para resolver problemas. Almeida [1] descreve que a atividade Matemática se desenvolve impulsionada por duas buscas: a busca de respostas e a busca da compreensão de fenômenos ou de respostas para problemas da realidade. Tales de Mileto foi um grande matemático, filósofo e astrônomo do século VI a.C. Sua sabedoria era tão intensa, que o auxiliou até no Egito, quando lhe foi perguntado qual era a altura das pirâmides, sendo que na época não existia equipamentos para tal medição. Então Tales, observou a incidência dos raios solares na pirâmide e as sombras produzidas, veja a ilustração abaixo, conseguindo assim resolver tal problema, usando o que conhecemos atualmente por Teorema de Tales.

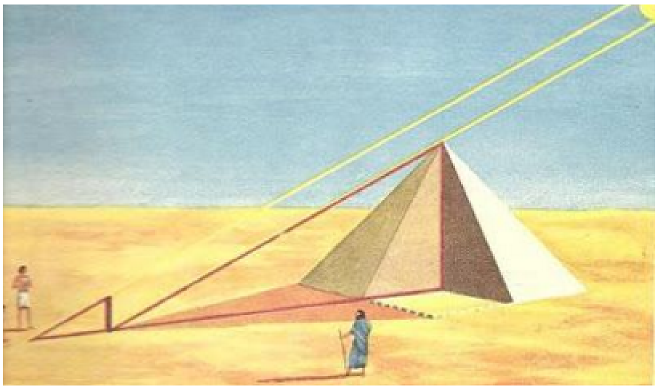


Figura 1: Pirâmide do Egito [32]

O objetivo desse trabalho é esclarecer o que é e como se dá a Modelagem Matemática, apresentando algumas atividades para serem trabalhadas em sala de aula. Segundo Almeida [1], uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos para a concretização das duas situações anteriores. Para Biembengut [4], para se elaborar um modelo, além de conhecimento matemático, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar uma situação, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adequa.

O presente trabalho está dividido em 5 capítulos. O primeiro capítulo traz a introdução do trabalho; o segundo capítulo fala sobre o conceito de Modelagem Matemática, assim como suas etapas e processos. O terceiro capítulo versa sobre a parte teórica dos conhecimentos prévios que os alunos devem ter, que são: o estudo das isometrias, com suas definições e aplicações em diversas áreas, principalmente na natureza. Nesse capítulo também é retratada a razão áurea, com seu vasto campo de aplicações. O quarto capítulo é a aplicação desse trabalho e está dividido em duas seções: Modelo de Ornamentos e a Modelagem do Número Áureo; onde será propostas atividades para serem empregadas em sala de aula com a aplicação da Modelagem Matemática no Ensino Básico. Essas atividades são consideradas como modelos, pois contém as três etapas primordiais da modelagem: interação, matematização e modelo. Na primeira seção que se trata sobre ornamentos, o professor pode trabalhar com a questão norteadora: como compor ornamentos? A partir daí se dá o processo da Modelagem Matemática em sala de aula com suas etapas implícitas. O mesmo se dá na segunda seção deste capítulo, onde se questiona sobre a beleza áurea. O último capítulo segue as considerações finais que concluem esse trabalho.

2 Modelagem Matemática

Neste capítulo descrevemos a importância da modelagem Matemática no processo ensino-aprendizagem e abordamos as etapas da modelagem.

2.1 Abordagem Geral

A Matemática surgiu da necessidade do homem interpretar e representar os acontecimentos relacionados com a natureza. Assim, quem tem mais o seu domínio tem maior capacidade de enxergar suas relações em diversas áreas do conhecimento.

Com os constantes desafios que a educação vem recebendo, o currículo e os métodos de ensino estão passando por reestruturações, de forma a potencializar a capacidade do aluno obter um pensamento crítico e independente. Para isto, os professores devem despertar e desenvolver nos alunos a capacidade de ler e interpretar matematicamente.

Contudo, isso não é uma tarefa fácil, pois exige do professor uma participação ativa e efetiva, pois o mesmo deve ter um olhar dinâmico, criativo, sensível, sendo capaz de despertar no aluno uma inquietação no sentido de querer entender e resolver tal problema ou situação apresentada, não sendo necessariamente um problema matemático.

A importância da Modelagem Matemática no ensino de Matemática se deve ao fato desta não ser um procedimento rígido, fechado e sim por ser dinâmico, onde o aluno analisa dados, dá sugestões sobre temas, propiciando assim, debates, discussões, interpretação de dados, tabelas, gráficos, ou seja, abrange vários aspectos, onde ele se torna sujeito ativo desse novo conhecimento.

Neste trabalho propomos algumas atividades em que o aluno seja capaz de traduzir diversos problemas práticos do cotidiano para um modelo matemático.

Para isso é importante o uso da modelagem no processo de ensino-aprendizagem, pois propicia ao aluno a oportunidade de desempenhar a criatividade não somente relativa às aplicações das habilidades Matemáticas, mas, também na formulação de problemas, que é uma etapa tão incentivadora quanto a resolução.

O primeiro fato que o professor deve pensar é o tema de estudo, sem necessariamente ter ideia do conteúdo matemático a ser utilizado. Segundo Bassanezzi [3], uma dica que o professor pode dar ao aluno, quando este não tem ideia de como lidar com o tema a ser estudado, é que ele comece a medir ou contar como ponto de partida, pois com essa estratégia, com certeza surge uma tabela de dados. Com essa estruturação de dados num sistema de coordenadas e com uma boa adaptação dos seus valores viabiliza a visualização do evento estudado. Isso propicia a construção de questões, as argumentações de problemas e o desdobramento de pressupostos, podendo levar à criação de leis de formação. Como dito anteriormente, a modelagem não é um procedimento rígido, ou seja, não se restringe à assimilação e uso de processos, procedimentos, técnicas padronizadas que seguem uma convenção.

Segundo Biembengut [4], o objetivo de um modelo matemático pode ser pedagógico, explicativo, analítico, diretivo, etc. Há problemas que exigem fatos matemáticos mais simples e outros que exigem habilidades Matemáticas mais complexas, mais elaboradas. Seja qual for o nível desses problemas, em geral, quando for quantitativo, requer uma concepção Matemática meticulosa, utilizando-se de símbolos, diagramas, gráficos, expressões numéricas, equações algébricas, tabelas, computador e relações Matemáticas que possam exprimir um fenômeno ou uma situação-problema.

No geral, para ter real envolvimento dos alunos, é relevante o professor fazer um diagnóstico das principais falhas de conteúdos que os alunos apresentam, quais suas maiores angústias relacionadas com a Matemática e quais as situações ou fenômenos que eles gostariam de trabalhar. Levando-se em consideração a série do aluno, temos que fazer uma adequação da modelagem trabalhada em relação ao programa curricular que deve ser cumprido, podendo assim ser empregado por um determinado período.

2.2 Os Processos da Modelagem

Basicamente, a Modelagem Matemática abrange três etapas: a escolha de temas, a matematização e a validação. Segundo Biembengut [4] para se por em prática a Modelagem Matemática, devemos seguir 5 passos: diagnóstico, escolha do tema ou modelo matemático, desenvolvimento do conteúdo programático, orientação de modelagem e avaliação do processo.

- **Fase do Diagnóstico**

  Para a implementação da modelagem Matemática é necessário que o professor primeiramente faça um levantamento sobre a realidade socioeconômica dos alunos, quanto tempo é necessário para atividades extraclasse e o conhecimento prévio matemático que possuem. Feito isso, juntamente com o número de alunos e o horário da disciplina são de suma importância para que o professor faça um bom planejamento das suas aulas.

A realidade socioeconômica dos alunos permite ao professor efetuar a escolha do tema, já que possui uma indicação dos seus principais interesses, norteando assim o desenvolvimento do projeto. Os conhecimentos prévios do aluno, facilitam ao professor estabelecer que conteúdos matemáticos tem que dar mais ênfase, quais são obrigatoriamente necessários e a quantidade de exercícios que são propostos para cada fase do processo.

O período em que a disciplina for realizada (período matutino, vespertino, noturno ou no fim do período) é importante para a dinamização das aulas.

A quantidade de alunos propicia uma melhor orientação dos trabalhos de modelagem, pois conduz a formação de grupos de trabalho com maior ou menor número de alunos.

Outro fator relevante é a disponibilidade dos alunos para trabalho extraclasse, pois implica a delimitação dos objetivos quanto ao que está trabalhando. Pode haver assim, um antagonismo, alunos que trabalham tem mais desenvoltura com temas aplicados na sua área de atuação, porém, não tem tempo suficiente para estudar.

- **Escolha do Tema**

  Para se fazer modelagem é preciso escolher temas, podendo ser único ou não, a cada tópico matemático do programa ou conteúdo de um período escolar(bimestre, semestre). Se o tema for único, o professor deve tomar cuidado para que este seja abrangente e interessante para um bom desenvolvimento do conteúdo programático, não deixando diminuir a motivação dos alunos. O tema pode ser escolhido pelo professor ou pelos alunos. Se for escolhido pelos alunos, uma vantagem é que eles se sentem coadjuvantes no processo de aprendizagem. Em contrapartida, o tema escolhido pode ser não adequado ou muito complexo, podendo comprometer o desenvolvimento do programa, exigindo do professor muito tempo, tanto para aprender quanto para ensinar.

- **Desenvolvimento do Conteúdo Programático**

  Nessa etapa o professor segue as mesmas etapas do processo modelagem, ou seja: *Interação* - reconhecimento e familiarização da situação problema; *Matematização* - formulação e resolução de problema, havendo nessa etapa o desenvolvimento do conteúdo matemático; e *Modelo Matemático*- interpretação e validação. Para uma melhor compreensão dessas etapas, o autor Biembengut [4] descreve bem o procedimento.

– Interação

Primeiramente, se faz uma breve explanação sobre o tema, permitindo certa restrição do aluno com algum requisito da área. O professor deve estar bem atento nessa fase, pois se trata de um momento muito importante, a forma como ele demonstra seu conhecimento e aptidão sobre o tema pode contribuir, substancialmente para a motivação dos alunos. Nessa etapa, o professor deve conquistar o querer aprender dos alunos. Logo em seguida, faz-se um levantamento de questões, de problemas relacionados ao tema, levando a uma real participação dos alunos com suas sugestões.

– Matematização

Nessa etapa, seleciona-se uma das questões levantadas a fim de instigar nos alunos a resolução ou a discussão sobre possíveis respostas. As respostas nortearão caminhos para alcançar as metas propostas. O professor deve estimular a participação, a descontração, a criatividade de cada um, deve manter um ambiente de liberdade, reverberando assim em resultados convincentes em relação ao aprendizado de Matemática. Se necessário, o professor pode propor aos alunos que façam uma pesquisa sobre o assunto. Essas informações podem ser obtidas através de palestras na escola, propiciando uma melhor visualização da relevância da Matemática estudada, como também o conhecimento e a valorização do trabalho de outro profissional. No momento da seleção ou formulação das questões levantadas, quando se está citando algum conteúdo matemático relacionado com o tema, o professor pode fazer uma interrupção durante a exposição e desenvolver melhor a Matemática necessária, retornando no momento oportuno. Nessa ocasião, o importante é não perder a motivação. Outro ponto a ser considerado é que nesse processo, a maioria das vezes, o conteúdo programático mostra-se diminuto, apontando assim para um replanejamento ou reestruturação do programa, no destaque e na continuidade, em particular. Após desenvolver o conteúdo necessário e suficiente para o desenvolvimento do programa, propõem-se exemplos análogos, onde dará uma melhor visualização do assunto, suprindo deficiências quanto a assimilação do conteúdo. Agora, o professor pode propor a resolução de exercícios, podendo ser convencionais, aplicados ou demonstrações. Isso é uma forma de aferir se os conceitos trabalhados foram compreendidos. Nesse estágio, retorna-se à questão que engendrou o processo, apresentando uma solução. A resolução da questão em foco faz com o que o aluno volte ao problema e verifique a Matemática como um "instrumento" importante.

– Modelo

A questão formulada, que permite a resolução desta e de outras similares, pode ser considerada um *modelo matemático*. Esse instante deve se avaliar se o modelo é válido e se é importante também. Assim, os alunos fazem uma análise do resultado obtido, que é chamada de *validação*. Terminando essa etapa, pode-se deixar um preâmbulo para uma possível retomada e aprimoramento do modelo. Se ainda houver interesse na continuidade do tema por parte dos alunos, passa-se para uma segunda questão, seguindo os passos anteriormente definidos. A figura abaixo mostra o esquema para se fazer o desenvolvimento do conteúdo programático.

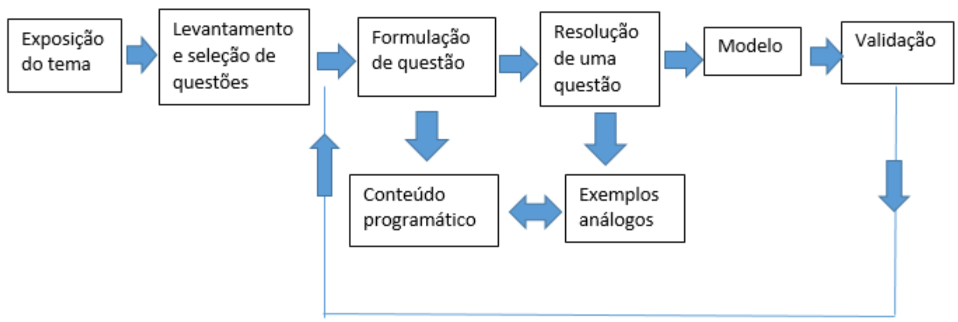


Figura 2: Desenvolvimento do Conteúdo Programático

- **Orientação de Modelagem**

  O principal objetivo com o trabalho de modelagem é o aprimoramento dos conhecimentos dos alunos. Os alunos escolhem o tema e tem total autonomia por parte do professor para direcionar seu próprio trabalho. Almeja-se por meio da modelagem o incentivo à pesquisa, a habilidade em formular e resolver problemas, lidar com tema de interesse, aplicar o conteúdo matemático e o desenvolvimento da criatividade. Para que o trabalho aconteça de forma efetiva, é muito importante que o professor, durante o planejamento, destine parte das aulas para a orientação do trabalho. Essas aulas devem ser ministradas no período letivo, propiciando aos alunos adquirir conhecimentos matemáticos, saber como aplicá-los e certa destreza para fazer modelos.

  Vejamos o seguinte exemplo: se a disciplina dispor de 60 horas-aula, destina-se 12 horas-aula, dividido em 5 etapas, para a orientação da elaboração do trabalho. A primeira etapa será realizada após ser ministradas algumas aulas da disciplina, assim o aluno tem alguma noção sobre modelagem. Portanto, as etapas seguem os seguintes procedimentos:

  1. escolha do tema, estudo e levantamento de questões;
  2. formulação;
  3. elaboração de um modelo matemático;
  4. resolução parcial das questões;
  5. exposição oral e escrita do trabalho.

  As reuniões para o acompanhamento e orientação do trabalho servem como uma forma de avaliar o processo de modelagem. Segue abaixo as etapas que podem ser seguidas para a concretização do trabalho de modelagem Matemática:

  – **Escolha do Tema**

    O professor pode pedir aos alunos que se agrupem, de três a cinco alunos por grupo, incentivando-os assim a escolher o tema, de acordo com suas preferências. Pode acontecer da escolha do tema não agradar a todos os integrantes do grupo, o professor pode intervir nessa parte, evitando assim um desgaste e uma desmotivação nessa etapa, pode sugerir que cada membro do grupo faça uma leitura cuidadosa sobre o tema escolhido, para posteriormente reunirem-se para uma maior reflexão sobre o tema que conceberá o trabalho. A atuação do professor nessa fase é de suma importância, pois pode utilizar de mecanismos que facilitem a escolha de um assunto interessante, abrangente, que seja motivador para os alunos.

– **Interação com o Tema**

  Pode ocorrer do tema escolhido ser muito expansivo em relação a realização em tempo hábil disponível. O professor pode propor aos alunos que façam: um levantamento de dados, a fim de se habituar com o tema adotado; a elaboração de pelo menos cinco questões sobre o tema; a produção de uma síntese do tema; e se for conveniente, fazer uma entrevista com um especialista no assunto.

– **Planejamento do Trabalho a ser Desenvolvido pelos Grupos**

  Através da síntese e das questões elaboradas pelos grupos, o professor pode se inteirar sobre o tema escolhido e também orientar quanto a ordem das questões a serem resolvidas, das mais simples às mais complexas. Em seguida, o grupo deve escolher uma questão para iniciar o trabalho. Tal questão deve ser a mais simples, pois os conhecimentos mínimos necessários devem ser conhecidos pelos alunos. O grupo também deverá levantar os dados reais da questão, descobrir o princípio envolvido no problema, fazer uma análise dos dados servindo de base para uma possível generalização. É importante também que o aluno analise a natureza e a proporção do problema, formulando assim, hipóteses, para no futuro saber como resolver e atacar o problema.Também é vital que apresentem um maior número possível de questionamentos sobre o problema, e por fim, que escolha e determine a solução mais viável. Se o tema trabalhado estiver relacionado com alguma área de fácil acesso, poderá ser realizada uma entrevista com especialista ou poderá ser feita uma visita *in loco*.

– **Conteúdo Matemático**

  Os modelos produzidos pelos grupos devem conter pelo menos uma pequena parte do conteúdo programático da disciplina. Se algum grupo necessitar de algum conteúdo que não está no programa, o professor pode fazer uma explanação individual, ou se for interesse da maioria, faz-se uma explicação para toda a classe.

– **Validação e Extensão dos Trabalhos Desenvolvidos**

No final do trabalho, é primordial que cada grupo faça: uma avaliação da solução ou que a submeta à verificação da adequação do modelo; divulgação do seu trabalho; relatório, pois é a melhor forma de registrar ideias. Tal relatório deve conter o motivo da escolha do tema, um histórico sobre o assunto escolhido e a apresentação dos modelos. É tendencioso que os alunos escolham temas que estejam relacionados com conteúdos matemáticos que apresentam certa familiaridade, o professor pode nesse momento, instigá-los com a resolução de questões com conteúdo que desconhecem, propiciando um aprofundamento, para depois retornarem ao problema, sempre levando em consideração a duração do curso e sua disponibilidade.

- **Avaliação do Processo**

  O autor Biembengut [4] ainda frisa que o ensino de Matemática deve fornecer ao aluno:

  - Sólida formação Matemática;
  - Capacidade para solucionar problemas;
  - Saber realizar uma pesquisa;
  - Capacidade em usar tecnologias;
  - Capacidade de trabalhar em grupo.

  Para isso a avaliação é um instrumento muito relevante nesse processo, pois serve para redirecionar o trabalho do professor e serve para verificar o grau de aprendizado do aluno, podendo ser só pela observação do professor ou por meio de provas, exercícios e trabalhos realizados. É importante que os alunos saibam de antemão os indicadores avaliativos adotados. Dentre os aspectos objetivos é substancial que sejam avaliados a produção e conhecimento matemático, ou seja, se o aluno consolidou a teoria Matemática, se operacionalizou bem os problemas numéricos, se apresenta raciocínio lógico, se tem interpretação gráfica. Outro ponto que se deve avaliar é sobre a produção do trabalho de modelagem em grupo, aferindo se houve qualidade dos questionamentos na pesquisa realizada, na obtenção de dados, na interpretação e produção dos modelos matemáticos, na discussão e decisão sobre a natureza do problema levantado, na conveniência da solução apresentada, na validade das soluções e na exposição oral e escrita do trabalho.

3 Noções Preliminares

Neste capítulo estão abordados alguns conceitos necessários para a compreensão dos modelos matemáticos que trabalhamos no próximo capítulo. No modelo de ornamentos, é necessário que os alunos tenham noções sobre isometrias, das quais destacamos a translação, a reflexão e a rotação. Já na modelagem da beleza usamos o conceito da razão áurea. Neste sentido, é primordial que o professor faça uma apresentação simples, porém concisa desses conceitos.

3.1 Isometrias

Como trabalhamos com a análise de ornamentos, é de suma importância explicar aos alunos o conceito de isometrias. Desde os tempos remotos o homem utiliza isometrias em suas obras.

Com o avanço da civilização, há o uso de figuras com repetição nas obras arquitetônicas, nas obras de arte, etc.

De acordo com Wagner [8], as Transformações Geométricas são funções que preservam a distância entre os pontos e a amplitude dos ângulos, isto é, transforma uma figura em outra idêntica, podendo variar a direção ou o sentido. Segue a definição formal de isometria abaixo:

Definição 1. *T é uma isometria quando a distância $d[T(A), T(B)] = d(A, B)$ para quaisquer pontos A e B do plano.*

Toda isometria possui as seguintes propriedades:

- a imagem de uma reta por uma isometria é uma reta;
- uma isometria preserva paralelismo;
- uma isometria preserva ângulos.

Em decorrência da definição, temos que a imagem de uma figura Q por uma isometria é uma figura Q' congruente a Q. As isometrias que abordamos neste trabalho são a translação, reflexão e rotação. Vejamos abaixo alguns exemplos de isometrias na natureza.

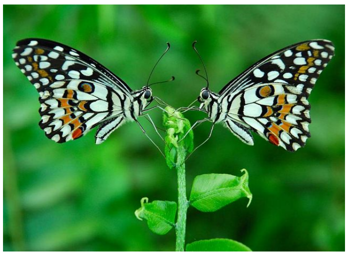


Figura 3: Reflexão: Borboletas [10]

Figura 4: Translação: Favos de Mel [10]

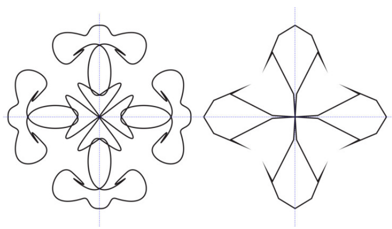


Figura 5: Simetria [28]

Figura 6: Reflexão: Folha [10]

Figura 7: Translação: Cacto [10]

3.1.1 Translações

Vejamos agora o conceito de translação segundo Wagner [8].

Definição 2. *A translação determinada pelo vetor v é a transformação $T_v : \Pi \to \Pi$ que leva cada ponto A do plano Π no ponto $A' = A + v$ desse plano.*

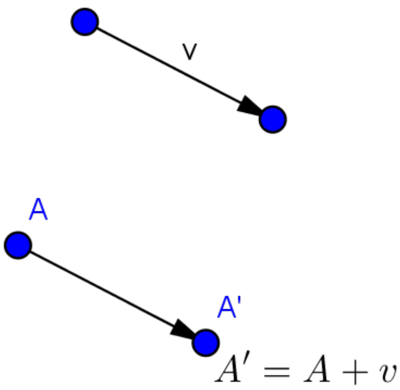


Figura 8: Translação Determinada pelo Vetor v.

A translação transforma toda reta em outra paralela e por ser uma isometria, transforma qualquer figura em outra congruente.

Podemos dizer que essa transformação preserva, direção, sentido e distância, ela apenas muda o objeto de lugar, mantendo-o inalterado. Vejamos abaixo alguns exemplos de translações:

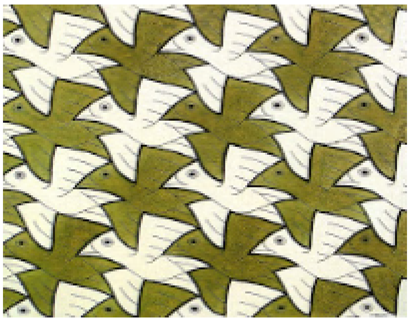


Figura 9: Trabalho do Artista Gráfico Holandês Maurits Cornelis Escher [26]

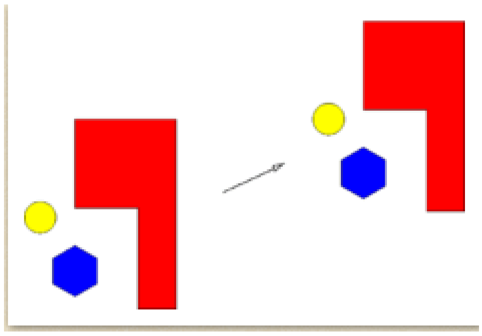


Figura 10: Translação de Figura [11]

3.1.2 Reflexão

Considere uma reta r e os pontos P e P' .

Definição 3. *Dizemos que o ponto P' é simétrico do ponto P em relação a r quando r é mediatriz de PP'. Se P pertence a r, dizemos que o seu simétrico em relação a r é o próprio ponto P.*

A reflexão em torno da reta r é a transformação $S_r(P)$ que faz corresponder a cada ponto P do plano, o ponto $P' = S_r(P)$, simétrico de P em relação a r.

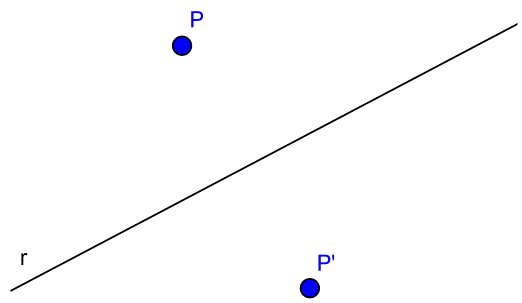


Figura 11: $P' = S_r(P)$

Observamos que a reflexão é uma isometria que transforma uma figura em outra congruente, porém, com a orientação do plano invertida, observamos conforme as figuras abaixo.

Figura 12: Imagem Refletida [29]

Figura 13: Imagem Refletida [30]

3.1.3 Rotação

Considere um ponto Q fixo no plano Π, orientado no sentido positivo (por convenção, é o anti-horário).

Definição 4. *Dado um ângulo α, a rotação de centro Q e amplitude α é a trasnformação que a cada ponto P do plano Π associa o ponto $P' = R_\alpha(P)$ de tal forma que $|QP'| = |QP|$, $\alpha = \angle PQP'$ e o sentido de P para P' se mantém positivo.*

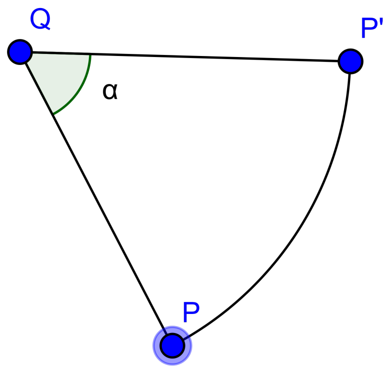


Figura 14: Rotação de Centro Q e Ângulo α.

Portanto a rotação de um objeto em relação a um ponto (eixo de rotação), transforma em uma outra figura ou objeto, congruente ao original, mantendo as mesmas distâncias em relação a esse ponto de rotação. Esse "giro" pode ocorrer tanto no sentido positivo quanto no sentido negativo. Vejamos abaixo alguns exemplos de rotação.

Figura 15: Floco de Neve [31]

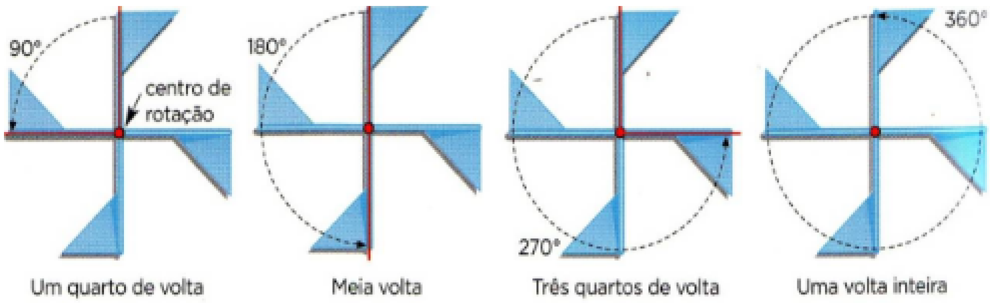


Figura 16: Rotações de Acordo com Alguns Ângulos [33].

3.2 Razão Áurea

Nesta seção definimos uma razão entre as medidas de um segmento denominado razão áurea. Apresentamos algumas propriedades desse número e suas aplicações relacionadas com a natureza.

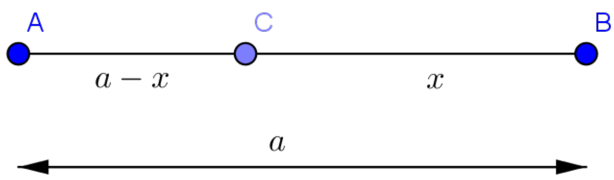
O texto abaixo foi retirado do Capítulo 3 do livro *Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro* [9].

3.2.1 Razão Áurea e o Número de Ouro

Definição 5. *Dizemos que um ponto C divide um segmento $\overline{AB}$ na razão áurea, isto é, em média e extrema razão, se* $\dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|} = \dfrac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|}$

De acordo com esta definição, chamando $|\overline{AB}| = a$ e $|\overline{BC}| = x$, temos que $|\overline{AC}| = a - x$ e obtemos o número que corresponde à proporção

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{a}{a-x}.$$



De acordo com as informações acima, temos

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ ou } x = a\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Como x é a medida de um segmento, este deve ser positivo. Portanto, o único valor possível para x é

$$x = a\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Que resulta em

$$\frac{a}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

A este número obtido, que produz a razão áurea, dá-se o nome de *número de ouro*. O número de ouro $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é representado pela letra grega φ em homenagem a Fídias (490 - 431 a.C.), que foi o escultor grego da estátua da deusa Atena e de Zeus, e também arquiteto do Partenon, o templo da capital Atenas, pois ele utilizava este número em suas obras. Esse número irracional, por se tratar da razão entre duas grandezas que sempre produz o mesmo resultado φ, também é chamado de razão áurea, definida acima. Com isso, escrevemos

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887498948482045868343656...$$

Os pitagóricos utilizaram a razão áurea, embora não conhecessem o número de ouro φ, na construção e na idealização de sua estrela pitagórica. De fato, esse número é a razão entre os segmentos da estrela, por isso, ela tem uma aparencia singular e simétrica. Um dos primeiros registros que se tem conhecimento sobre a razão áurea data de aproximadamente 1650 a.C.; é no *papiro de Rhind*, um documento no qual constam 85 problemas copiados por um escriba chamado Ahmes, de um trabalho mais antigo ainda. Neste texto, cita-se uma razão sagrada que acredita tratar-se da razão áurea.

Figura 17: Uma Parte do Papiro de Rhind. Depositado no Museu Britânico, Londres [27] .

Os antigos babilônios sabiam como criar o retângulo áureo (será definido na seção seguinte). Numa escavação feita em Sippar, no sul do Iraque, o arqueólogo assírio Hormuzd Rassam (1826-1910) encontrou uma tábua, com comprimento de 29,21 cm e largura de 17,78 cm, conhecida por *Tábua de Shamash*. Note que as dimensões dessa tábua estão muito próximas da razão áurea (até um dígito após a vírgula, o que naquele tempo já era muito bom):

$$\frac{29,21}{17,78} = 1,642857142857142857142857142857 1... \approx \varphi.$$

A razão áurea foi e é usada para dar harmonia e perfeição às obras, e isso fez com que muitos projetos de obras grandiosas usassem tal recurso. Exemplos disso são a Monalisa de Leonardo da Vinci, as Pirâmides de Gizé (no Egito), o prédio das Nações Unidas em Nova Iorque (EUA) e até mesmo objetos comuns, tais como, cartões de crédito e formatos de livros.

O mais interessante, que vemos também adiante, é que a própria natureza utiliza-se de tal razão para suas obras. Apenas para exemplificar esta última observação, existem medidas do corpo humano cuja razão é áurea. *Leonardo da Vinci*, cientista, pintor, escultor e arquiteto renascentista percebeu isto e desenhou o *homem vitruviano*, que mostra as proporções áureas do corpo humano.

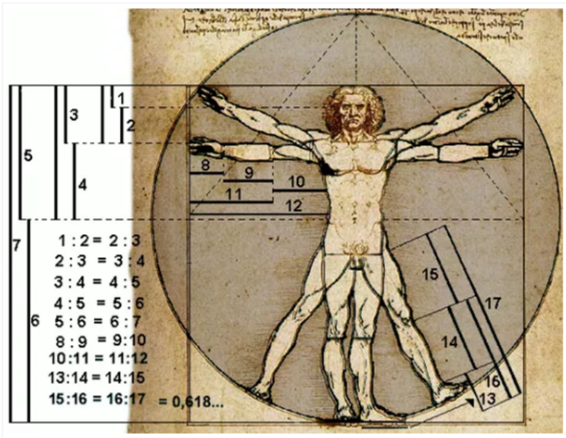


Figura 18: O Homem Vitruviano [34].

Para obter geometricamente o ponto C que divide um segmento $\overline{AB}$ na razão áurea, basta proceder da seguinte forma: dado um segmento $\overline{AB}$ de comprimento a, a partir de uma das extremidades, por exemplo B, traçamos uma perpendicular $\overline{BD}$, de comprimento $\frac{a}{2}$. Ligando A a D, determinamos um triângulo retângulo ABD, reto em B. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que a hipotenusa mede

$$|\overline{AD}| = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Subtraindo $\dfrac{a}{2}$ de $|\overline{AD}|$ a partir de D, podemos fazer isso com um transferidor, levando a medida de $\overline{BD}$ para a hipotenusa com a ponta seca do transferidor em D, determinamos o ponto T e com isso, a medida do segmento $\overline{AT}$ é

$$|\overline{AT}| = |\overline{AD}| - |\overline{BD}| = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

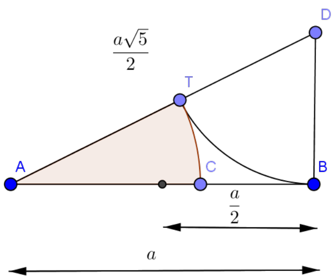
Agora, com a ponta seca do compasso em A, transferimos a medida de $\overline{AT}$ para o segmento $\overline{AB}$. Obtemos com isto um ponto C, onde

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{a}{a(\frac{\sqrt{5}-1}{2})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi,$$

e

$$\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} = \frac{a(\frac{\sqrt{5}-1}{2})}{a - a(\frac{\sqrt{5}-1}{2})} = \varphi.$$

Logo, realmente C é o ponto procurado, que divide o segmento $\overline{AB}$ na razão áurea. Para visualizar, é bom fazer o desenho conforme explicado acima e verificar os cálculos apresentados.



3.2.2 Potências de φ

Vamos mostrar a ligação entre as potências de φ e a sequência de Fibonacci. Para isto, vamos calcular algumas potências de φ como segue. Sabendo que $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, temos

- $\varphi^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{2}{2} + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\varphi;$
- $\varphi^3 = \varphi^2.\varphi = (1+\varphi)\varphi = \varphi + \varphi^2 = \varphi + 1 + \varphi = 1 + 2\varphi;$

- $\varphi^4 = \varphi^3.\varphi = (1+2\varphi)\varphi = \varphi + 2\varphi^2 = \varphi + 2(1+\varphi) = \varphi + 2 + 2\varphi = 2 + 3\varphi;$
- $\varphi^5 = \varphi^4.\varphi = (2+3\varphi)\varphi = 2\varphi + 3\varphi^2 = 2\varphi + 3(1+\varphi) = 3 + 5\varphi;$
- $\varphi^6 = \varphi^5.\varphi = (3+5\varphi)\varphi = 3\varphi + 5\varphi^2 = 3\varphi + 5(1+\varphi) = 5 + 8\varphi;$
- $\varphi^7 = \varphi^6.\varphi = (5+8\varphi)\varphi = 5\varphi + 8\varphi^2 = 5\varphi + 8(1+\varphi) = 8 + 13\varphi;$
- $\varphi^8 = \varphi^7.\varphi = (8+13\varphi)\varphi = 8\varphi + 13\varphi^2 = 8\varphi + 13(1+\varphi) = 13 + 21\varphi;$

$$\ldots$$

Analisando os resultados obtidos acima, montamos a tabela abaixo:

n	1	2	3	4	5	6	7	...
φ^n	$0+\varphi$	$1+\varphi$	$1+2\varphi$	$2+3\varphi$	$3+5\varphi$	$5+8\varphi$	$8+13\varphi$	...

Consideremos a sequência de Fibonacci (f_n). Observe que, definindo $f_0 = 0$, temos que os termos constantes e os coeficientes de φ, na ordem em que aparecem, formam na ordem, os termos da sequência de Fibonacci. Isto nos motiva a conjecturar

Conjectura 1. $\varphi^n = f_{n-1} + f_n.\varphi$, $\forall n \geq 1$.

Provemos essa conjectura usando a indução Matemática sobre n:

(i) $n = 1 : \varphi^1 = f_0 + f_1\varphi = 0 + 1\varphi = \varphi$. Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponhamos que a igualdade seja verdadeira para $n = k$, ou seja, que vale $\varphi^k = f_{k-1} + f_k.\varphi$. Devemos mostrar que vale para $n = k+1$, ou seja, que

$$\varphi^{k+1} = f_k + f_{k+1}.\varphi.$$

Note que
$\varphi^{k+1} = \varphi^k.\varphi = (f_{k-1} + f_k.\varphi)\varphi = f_{k-1}.\varphi + f_k.\varphi^2 =$
$= f_{k-1}.\varphi + f_k(1+\varphi) = f_{k-1}.\varphi + f_k + f_k.\varphi =$
$= (f_{k-1} + f_k).\varphi + f_k = f_k + f_{k+1}.\varphi.$
Portanto, vale $\varphi^{k+1} = f_k + f_{k+1}.\varphi$.

Assim, por (i) e (ii), mostramos que a conjectura acima é verdadeira, ou seja, provamos a proposição que segue.

Proposição 1. *Para qualquer número natural $n \geq 1$, vale a igualdade*

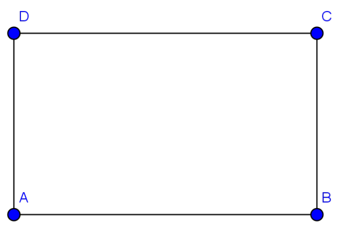
$$\varphi^n = f_{n-1} + f_n . \varphi,$$

onde f_j , $j = 1, 2, 3, ...$ são os números de Fibonacci e $f_0 = 0$.

3.2.3 O Retângulo Áureo e a Espiral

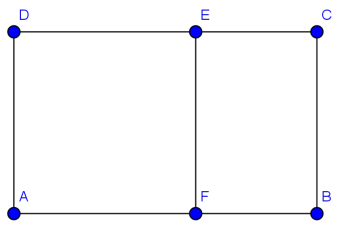
Definição 6. *Chama-se retângulo áureo o retângulo no qual a razão de suas medidas obedece a razão áurea.*

Observação: as próximas figuras desta seção foram feitas no GeoGebra pelo autora.



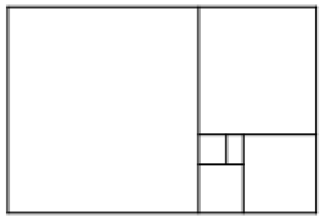
Seja $ABCD$ um retângulo áureo. Destacando o quadrado $ADEF$ do retângulo áureo acima, temos, de acordo com a definição,

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AD}|} = \frac{|\overline{EF}|}{|\overline{FB}|}.$$

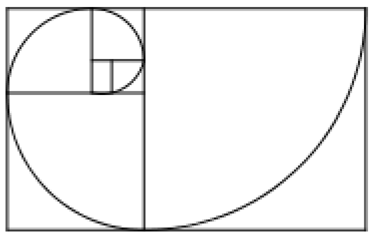


Como $|\overline{EF}| = |\overline{AD}| = x$, $\overline{AB} = a$, temos $|\overline{FB}| = a - x$ e disso,
$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0.$
Como x é positivo, obtemos
$\frac{a}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$

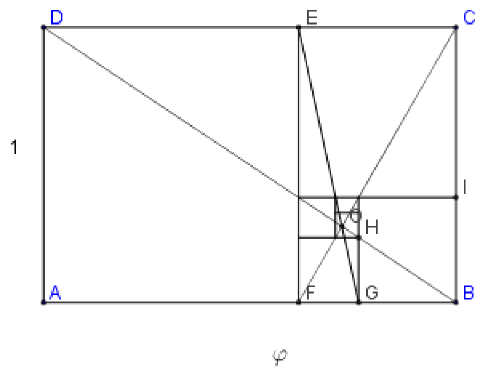
Portanto, $\dfrac{|\overline{EF}|}{|\overline{FB}|} = \varphi$ e , então, o novo retângulo $BCEF$, interior ao primeiro, também é áureo. Novamente, construindo um quadrado no novo retângulo áureo interior ao primeiro, obtemos outro retângulo interior a este segundo, também nas proporções áureas, e este processo é infinito, sempre guardando essa proporção de ouro.



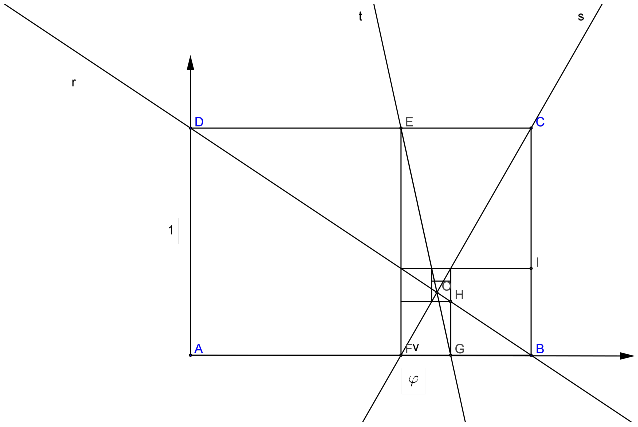
Uma vez tendo desenhado essa sucessão de retângulos áureos, podemos desenhar uma espiral como na figura abaixo. Dizemos que esta espiral construída preserva a razão áurea. Tal espiral é conhecida como *espiral de ouro.*



Vamos deduzir a equação em coordenadas polares da espiral de ouro. Considere a sequência de retângulos de ouro desenhados a seguir, onde o maior deles $ABCD$, tem as medidas $AB = \varphi$ e $AD = 1$. Destacamos também algumas diagonais, onde todas se encontram em um ponto O, que é a origem do sistema polar. Por construção, temos que $ADEF$ é um quadrado de lado unitário.



Fixamos um sistema cartesiano ortogonal em A. Assim temos os seguintes pontos: $A(0,0), B(\varphi,0), C(\varphi,1), D(0,1), E(1,1)$ e $F(1,0)$.



Então, a equação da reta r, que passa por $B(\varphi,0)$ e $D(0,1)$, é obtida pela condição de alinhamento

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \varphi & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + \varphi y - \varphi = 0.$$

Portanto, $(r) : y = \dfrac{-1}{\varphi}x + 1$. De forma análoga, obtemos a equação da reta s que passa por C e F:

$$(s) : y = \frac{1}{\varphi - 1}x - \frac{1}{\varphi - 1}.$$

Repare que r e s são perpendiculares, pois sendo $m_r = \dfrac{-1}{\varphi}$ e $m_s = \dfrac{1}{\varphi - 1}$ seus coeficientes angulares, temos que $m_r.m_s = \dfrac{-1}{\varphi}.\dfrac{1}{\varphi - 1} = \dfrac{-1}{\varphi^2 - \varphi} = -1$.

Resolvendo o sistema linear formado por estas duas equações de retas, obtemos o ponto O, intersecção entre as retas. Assim resolvendo o sistema, obtemos o ponto

$$O\left(\frac{\varphi^2}{2\varphi - 1}, \frac{\varphi - 1}{2\varphi - 1}\right).$$

Destacando o triângulo DOE, vamos mostrar que o ângulo agudo $\theta = D\widehat{O}E$ é igual a $45°$. Note que o coeficiente angular m_t da reta t, que passa por E e O, é

$$m_t = -\frac{\varphi}{(\varphi - 1)^2}.$$

Assim, o ângulo θ procurado é

$$tg\theta = \left|\frac{m_r - m_t}{1 + m_r.m_t}\right| = \left|\frac{\dfrac{-1}{\varphi} + \dfrac{\varphi}{(\varphi-1)^2}}{1 + (-\dfrac{1}{\varphi})(\dfrac{-\varphi}{(\varphi-1)^2})}\right| = 1.$$

Assim, $tg\theta = 1$, ou seja, $\theta = 45°$. Portanto, como $D\widehat{O}C = 90°$ e $D\widehat{O}E = 45°$, concluímos também que $E\widehat{O}C = 45°$. Note que cada retângulo de ouro da sequência é obtido do anterior por uma rotação de $90°$ em relação ao ponto O e uma contração igual a φ^{-1}. Mostramos agora a questão da contração.

De fato, com a ajuda da Geometria Analítica, se OD tem comprimento l_φ e ao transformar o retângulo $ABCD$ no retângulo $BCEF$, OD passou a ser OC, com $OC = l$.

De acordo com as informações acima e os cálculos anteriormente realizados, temos $D(0,1)$, $C(\varphi,1)$ e $O\left(\dfrac{\varphi^2}{2\varphi-1}, \dfrac{\varphi-1}{2\varphi-1}\right)$. Calculando $|OD|$, temos:

$$\begin{aligned}|OD| &= \sqrt{\left(\frac{\varphi^2}{2\varphi-1} - 0\right)^2 + \left(\frac{\varphi-1}{2\varphi-1} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{\varphi^4}{(2\varphi-1)^2} + \frac{\varphi^2}{(2\varphi-1)^2}} \\ &= \frac{\varphi}{2\varphi-1}\sqrt{\varphi^2+1}.\end{aligned}$$

Analogamente, calculamos $|OC|$:

$$|OC| = \sqrt{\left(\frac{\varphi^2}{2\varphi-1} - \varphi\right)^2 + \left(\frac{\varphi-1}{2\varphi-1} - 1\right)^2} = \frac{\varphi}{2\varphi-1}\sqrt{\varphi^2-2\varphi+2}\text{ , ou seja,}$$

$$OC = \frac{\varphi}{2\varphi-1}\sqrt{\varphi^2-2\varphi+2}.$$

Iremos comparar as medidas OC e OD calculadas. Como $\varphi^2 = \varphi+1$ e daí, $\varphi^2+1 = \varphi+2$ e $\varphi^3 = 1+2\varphi$, temos

$$\begin{gathered}\varphi^2 - 2\varphi + 2 = \frac{1}{\varphi^2}(\varphi^2-2\varphi+2)\varphi^2 = \frac{1}{\varphi^2}(\varphi^2+1-2\varphi+1)\varphi^2 = \\ = \frac{1}{\varphi^2}(\varphi+2-2\varphi+1)\varphi^2 = \frac{1}{\varphi^2}(3-\varphi)\varphi^2 = \frac{1}{\varphi^2}(3\varphi^2-\varphi^3) = \\ = \frac{1}{\varphi^2}(3\varphi^2-(1+2\varphi)) = \frac{1}{\varphi^2}(3(\varphi+1)-1-2\varphi) = \frac{1}{\varphi^2}(3\varphi+3-1-2\varphi) = \\ = \frac{1}{\varphi^2}(\varphi+2) = \frac{1}{\varphi^2}(\varphi^2+1).\end{gathered}$$

Logo, $\varphi^2 - 2\varphi + 2 = \dfrac{1}{\varphi^2}(\varphi^2+1)$, e com isso,

$$|OC| = \frac{\varphi}{2\varphi-1}\sqrt{\varphi^2-2\varphi+2} = \frac{\varphi}{2\varphi-1}\sqrt{\frac{1}{\varphi^2}(\varphi^2+1)} = \frac{\varphi}{2\varphi-1}\sqrt{\varphi^2+1}.\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi}OD,$$

ou seja, $|OC| = \dfrac{1}{\varphi}OD$, mostrando que realmente $|OC|$ é uma contração (pois o fator multiplicador $\varphi^{-1} < 1$) de $|OD|$ de φ^{-1}.

Assim considerando O a origem de um sitema de coordenadas polares com o eixo real OI e imaginário OE, que são perperndiculares provado anteriormente, pois são obtidos de um giro de $45°$ dos eixos OD e OC, que mostramos serem perpendiculares, temos então, nesse sitema em coordenadas polares: $I(1,0)$ e $E(\varphi, \dfrac{\pi}{2})$ (da mesma forma que anteriormente, o comprimento OC era l e OD era l_φ). Logo o ponto G tem as coordenadas $G(\varphi^{-1}, -\dfrac{\pi}{2})$.

De fato, todos os pontos que obedecem a relação estabelecida acima tem a forma $\left(\varphi^n, n\dfrac{\pi}{2}\right)$, $n \in N$.

Isso nos permite, então, mapear os pontos G, I, E e A. A curva que passa por esses pontos é a espiral de ouro procurada.

Finalmente, deduzimos a equação da *espiral de ouro* usando equações diferenciais. A curva procurada, em coordenadas polares, é tal que a variação do raio ρ em relação à variação do argumento θ é proporcional ao mesmo raio ρ, ou seja, queremos achar a solução da equação diferencial

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \alpha\rho$$

com os pontos $(\varphi, \dfrac{\pi}{2})$ e $(1,0)$ satisfazendo a equação procurada. Resolvendo a EDO acima pelo método da separação de variáveis, temos

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \alpha\rho \Rightarrow \int \frac{d\rho}{\rho} = \alpha \int d\theta \Rightarrow \ln\rho = \alpha\theta + c,$$

ou seja, $\rho = ke^{\alpha\theta}$.

Pelos pares de pontos determinados acima, obtemos os valores das constantes α e k. Para $(\rho,\theta) = (1,0)$, obtemos $k = 1$. Logo, $\rho = e^{\alpha\theta}$.

Agora, com $(\rho,\theta) = (\varphi, \dfrac{\pi}{2})$, obtemos

$$\varphi = e^{\alpha\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \ln\varphi = \alpha\tfrac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \tfrac{2}{\pi}\ln\varphi.$$

Assim, $\rho = e^{\alpha\theta} = e^{\frac{2}{\pi}\theta\ln\varphi} = e^{\ln\varphi^{\frac{2\theta}{\pi}}} = \varphi^{\frac{2\theta}{\pi}}$

Ou seja, a equação da espiral de ouro para o retângulo de ouro de lados 1 e φ unidades de comprimento é $\rho(\theta) = \varphi^{\frac{2\theta}{\pi}}$.

3.2.4 Aplicações

Exibimos algumas aplicações da espiral na natureza e também algumas aplicações do retângulo áureo. Comecemos observando que as sementes do girassol e a disposição dos pinhos de um pinhão ficam na forma de uma espiral.

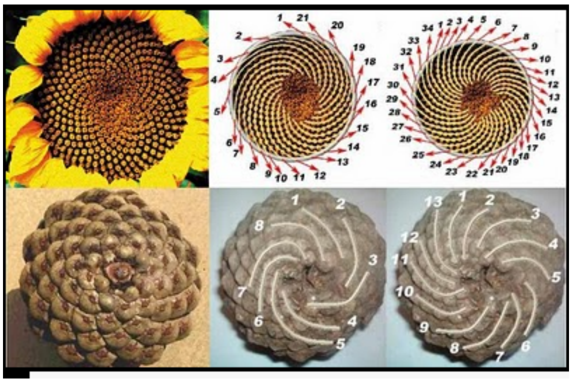


Figura 19: Espirais Encontradas na Natureza [22]

Observe que a concha do nautilus também obedece a esta lei de formação, conforme os esquemas abaixo:

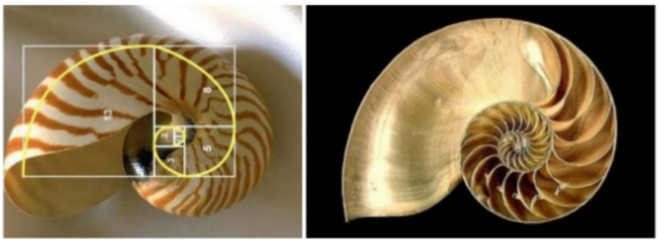


Figura 20: Espiral Encontrada na Natureza [21]

As folhas da bromélia também possuem esta mesma regra de formação:

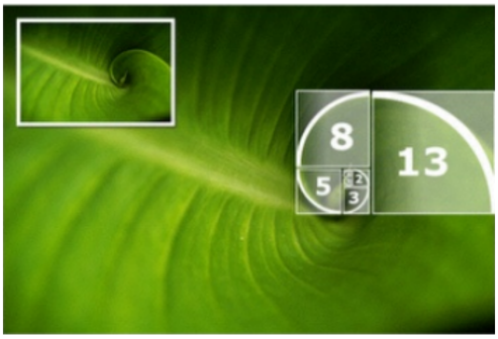


Figura 21: Espiral Encontrada na Natureza [21]

Abaixo temos uma foto de uma galáxia, que também apresenta o formato da espiral de ouro:

Figura 22: Espiral Encontrado no Espaço [21]

O retângulo áureo também tem várias aplicações, como nas artes e na arquitetura. Vejamos agora algumas dessas aplicações.

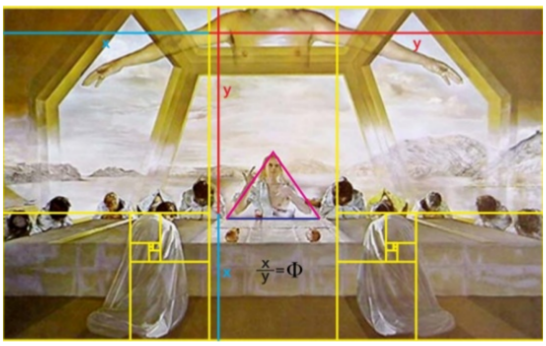


Figura 23: O Sacramento da Última Ceia-Salvador Dali [21]

O famoso quadro *A Monalisa* de Leonardo da Vinci, tem a proporção áurea presente na relação tronco e cabeça e também nos elementos do rosto.

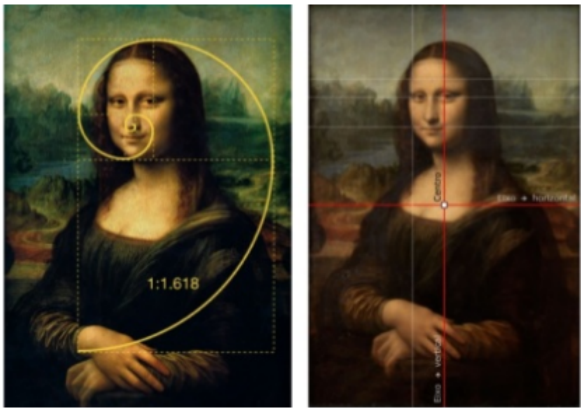


Figura 24: Beleza Áurea da Monalisa [21]

Uma curiosidade sobre esse número de ouro é que o médico Steven Marquardt (cirurgião plástico) criou uma máscara para determinar se um rosto é realmente bonito, chamada Máscara Phi. Estruturada através de sequências Matemáticas relacionadas abaixo: A altura da testa = altura do nariz ;

Altura do nariz = $1/3$ inferior rosto;

Largura do nariz = largura dos olhos;

Distância interocular = largura do nariz;

Distância entre os olhos = largura dos olhos;

Largura da boca = 1,5 x largura do nariz (Maquardt considera 1,618 - proporção Phi);

Largura da face = 4 x largura do nariz.

Abaixo segue a imagem da tal máscara Phi criada pelo médico.

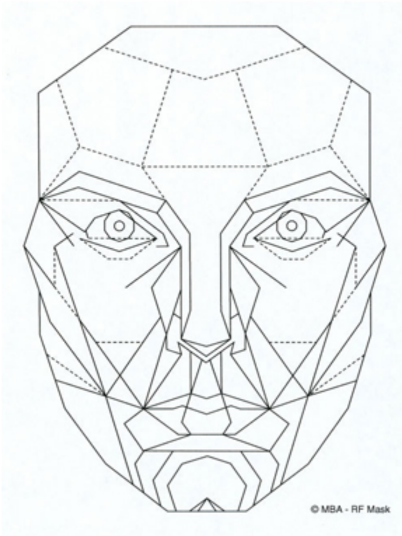


Figura 25: Máscara Phi [21]

4 A Modelagem em Sala de Aula

Neste capítulo são apresentadas propostas de modelos matemáticos para serem aplicadas no Ensino Médio ou Fundamental que é o Modelo de Ornamentos e Modelagem do Número Áureo.

4.1 Modelo de Ornamentos

Segundo Biembengut [4] desde os tempos mais remotos os ornamentos, símbolos de beleza e harmonia, tem desempenhado um papel especial nas nossas vidas. Uma confirmação disso são as obras de arquitetura, a arte indígena, o artesanato dos diversos tipos de povos, os adornos, a composição de tecidos, vitrais de igrejas, dentre inúmeros exemplos. Nesta seção apresentamos como criar e analisar ornamentos utilizando alguns princípios matemáticos.

4.1.1 A Gramática dos Ornamentos

Na natureza encontramos diversos exemplos de isometrias: as flores, folhas, frutas, animais, etc. A isometria é um movimento inflexível no plano que aplica um ornamento sobre si mesmo. Isso significa que ao efetuarmos um deslocamento em uma figura ou em algum elemento gerador, sua forma e tamanho não modificam. A isometria pode ser direta (translação e rotação) ou inversa (reflexão e translação refletida).

De maneira mais informal dizemos que *translação* é o deslizamento da figura sobre uma reta r. Os pontos da figura percorrem segmentos paralelos, ou seja, dados dois pontos genéricos de uma figura A e B, translação é o movimento T que leva A em A' e B em B', de tal forma que o quadrilátero $ABB'A'$ seja um paralelogramo.

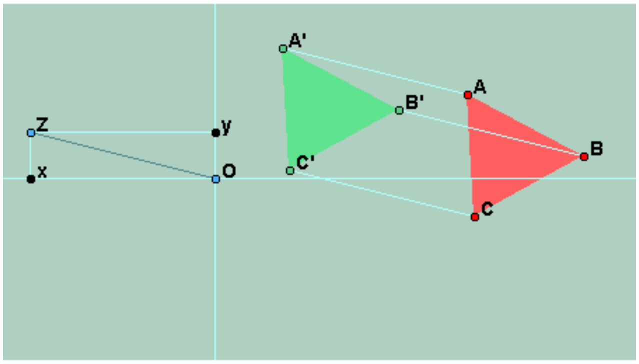


Figura 26: Movimento de Translação [11]

A rotação é um giro da figura em torno de um ponto fixo, sendo esse ponto pertencente ou não à figura. Dessa forma, para todo ponto P do plano, $R(P)$ é obtido sobre uma circunferência de centro O e raio $|OP|$, movimentado de um ângulo α qualquer.

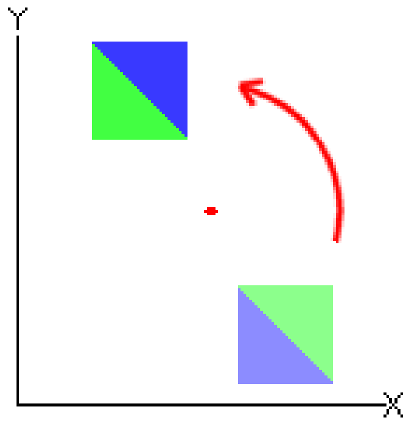


Figura 27: Movimento de Rotação [18]

A reflexão é a transformação que conserva a distância de um ponto a um eixo r fixo. Esse eixo pode ou não interceptar a figura, sendo a mediatriz de cada segmento determinado por um ponto da figura inicial e seu correspondente da figura obtida no final. Assim, $S(A) = A'$ está sobre a perpendicular de uma reta fixa r (eixo de simetria) e que dista de r o mesmo que A dista de r.

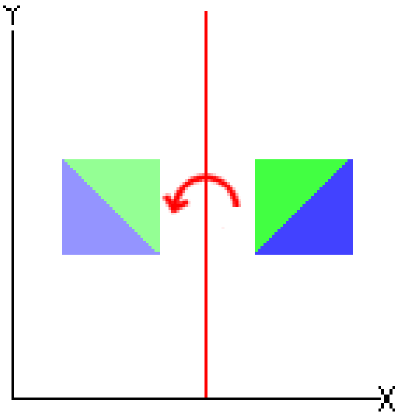


Figura 28: Reflexão [24]

Glissoreflexão ou translação refletida é o movimento que combina dois movimentos: reflexão R, com eixo r, e trasnlação T paralela ao eixo r.

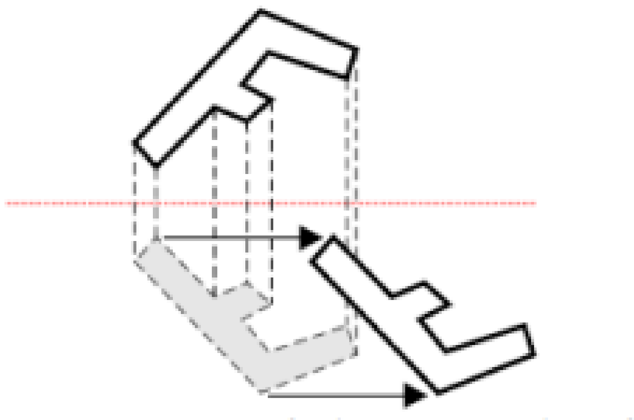


Figura 29: Glissoreflexão [19]

De acordo com Biembengut [4], a gramática dos ornamentos estabelece uma classificação dos grupos de simetria, dando ênfase às propriedades Matemáticas de translação, rotação, reflexão e translação refletida ou glissoreflexão. Dada uma figura, ou elemento gerador, aplicando uma ou mais propriedades de isometria, obtemos um motivo ou ornamento.

Na Matemática consideramos três tipos de ornamentos: faixeta, roseta e mosaico (exemplificado nas figuras abaixo).

A faixeta é um ornamento infindável, composto entre duas retas paralelas. A simetria essencial para sua composição é a translação. A combinação com as demais simetrias permite criar sete tipos de faixas.

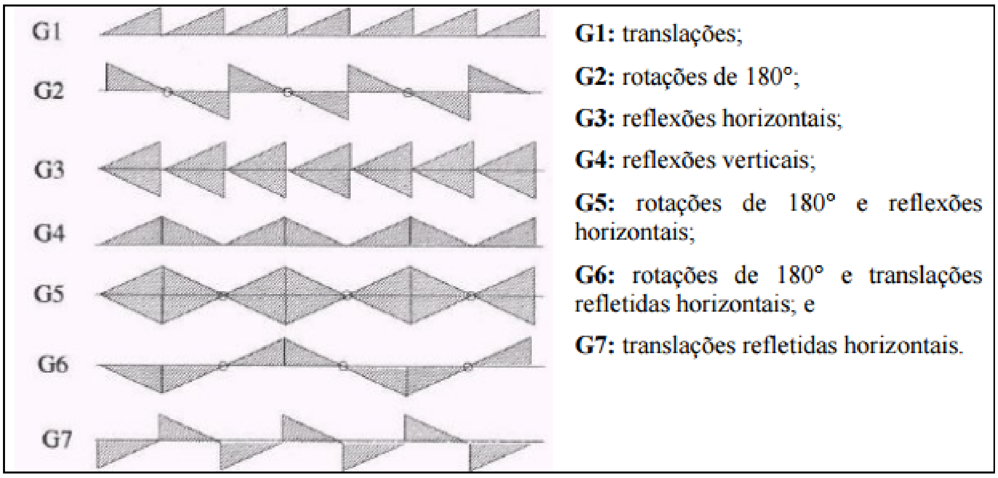


Figura 30: Tipos de Faixetas [19]

Figura 31: Faixetas: Bordado em Toalha [20]

Figura 32: Faixetas em Cesta [23]

A roseta é um ornamento limitado, composto de forma circular. A simetria estrutural para sua composição é a rotação. Também é possível fazer um outro tipo de roseta combinando a reflexão e a rotação.

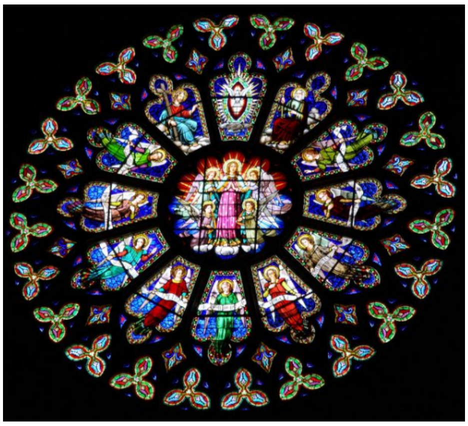


Figura 33: Vitral de Igreja [12]

Figura 34: Estrela do Mar [25]

O mosaico é um ornamento ilimitado no plano e a simetria imprescindível para a sua composição é a translação em duas direções. Para compor um mosaico é necessário uma rede. Existem cinco tipos essenciais de redes: quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e triângulos equiláteros. Combinando uma ou mais isometrias é possível obter 17 tipos de mosaicos, que estão exibidos em Biembengut [4].

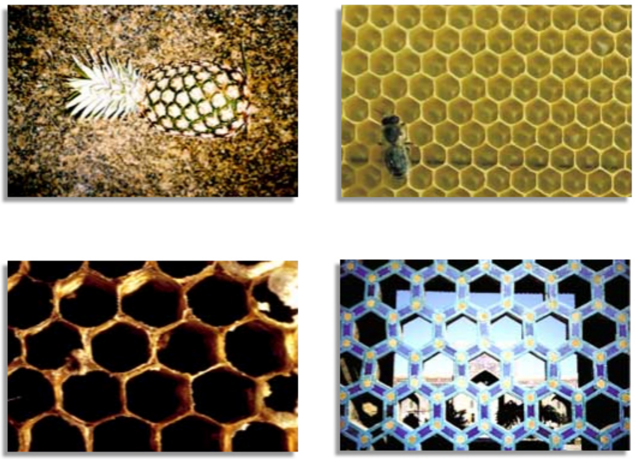


Figura 35: Exemplos de Mosaicos na Natureza [15]

Figura 36: Exemplos de Mosaicos: Figuras de Escher [16]

4.1.2 Aplicação do Modelo de Ornamentos

Abaixo seguem sugestões de atividades de composição de ornamentos utilizando os conceitos de isometrias, extraído de Biembengut [4].

- **Atividade 1**

  Façamos um molde de cartolina de uma figura ou elemento gerador, contornando-o posteriormente sobre uma folha de papel. Se contornarmos o molde entre dois segmentos paralelos, de forma que cada figura mantenha-se à mesma distância, efetuando uma translação, obtemos uma faixa, que é um ornamento ilimitado entre duas retas paralelas.

  Enquanto os alunos vão elaborando uma faixa, o professor pode desenvolver conceitos intuitivos de geometria plana, paralelismo e perperndicularismo entre retas e alguns axiomas da Geometria. O importante é que cada aluno tenha sua própria figura e possa observar a veracidade dos conceitos matemáticos, a partir do que ele mesmo irá construir.

  Analogamente, o professor pode propor outras atividades como: fazer faixas usando uma tira de papel, recortando-a na forma retangular, dobrando-a como uma sanfoninha e recortando-a na forma que julgar pertinente; observar ao redor e verificar a existência de faixas decorativas.

- **Atividade 2**

  Usando um molde, pode ser o mesmo utilizado na atividade anterior, contorne-o novamente sobre uma folha de papel. Fixando o molde em um ponto O vamos girá-lo em um sentido (horário ou anti-horário), contornando-o novamente. Este giro é uma rotação.

  Como um giro completo tem 360º, podemos dividir a circunferência em n partes. Por exemplo, dividindo em 4, cada ângulo central é 90º. Contornando o molde de tal maneira que a medida entre um molde e outro seja a mesma, completamos a figura, obtendo assim uma roseta.

Figura 37: Molde [17]

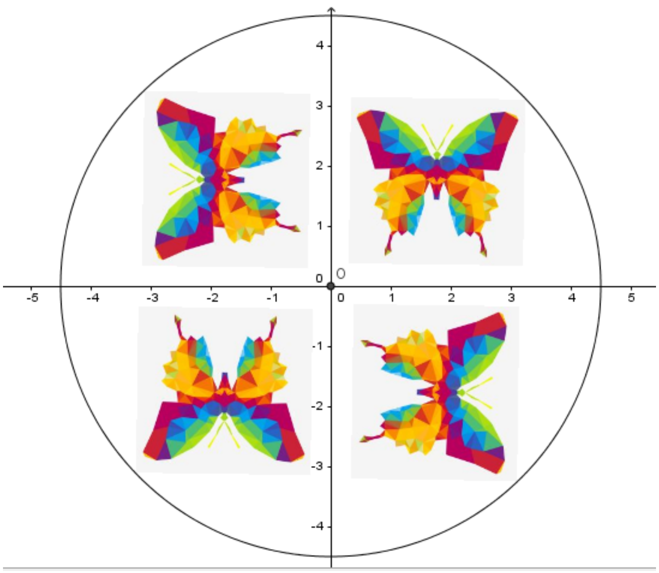


Figura 38: Roseta Criada com o Uso do Aplicativo Geogebra

Nesta roseta podemos observar que a figura sofreu um movimento de rotação. Com essa atividade podem ser desenvolvidos os conceitos de ângulos, circunferência, arcos, relação entre reta e circunferência, ângulo central e ângulo inscrito, dentre outros.

- **Atividade 3**

  Essa atividade permite que o aluno faça uma análise de ornamentos, obras de artes e/ou figuras em geral, identificando qual o tipo de simetria empregada. Particularmente, na ficha abaixo, estão algumas obras de M. C. Escher (1898-1972), um artista gráfico holandês, conhecido por apresentar um trabalho artístico fortemente associado com a Matemática, utilizando simetrias em suas obras. Todas as imagens utilizadas nessa tabela foram retiradas de [26].

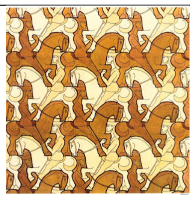
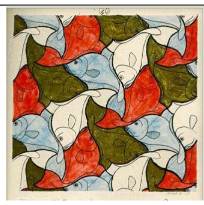
Figura 1	
Qual a figura padrão utilizada?	
Existe simetria?	() Sim ( ) Não
Identifique o tipo de simetria utilizada na figura	( ) Translação ( ) Reflexão ( ) Rotação ( ) Glissoreflexão
Figura 2	
Qual a figura padrão utilizada?	
Existe simetria?	( ) Sim ( ) Não
Identifique o tipo de simetria utilizada na figura	( ) Translação ( ) Reflexão ( ) Rotação ( ) Glissoreflexão
Figura 3	
Qual a figura padrão utilizada?	
Existe simetria?	( ) Sim ( ) Não
Identifique o tipo de simetria utilizada na figura	( ) Translação ( ) Reflexão ( ) Rotação ( ) Glissoreflexão

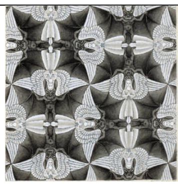
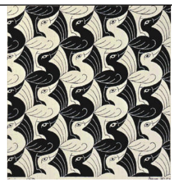
Figura 4	
Qual a figura padrão utilizada?	
Existe simetria?	( ) Sim ( ) Não
Identifique o tipo de simetria utilizada na figura	( ) Translação ( ) Reflexão ( ) Rotação ( ) Glissoreflexão
Figura 5	
Qual a figura padrão utilizada?	
Existe simetria?	( ) Sim ( ) Não
Identifique o tipo de simetria utilizada na figura	( ) Translação ( ) Reflexão ( ) Rotação ( ) Glissoreflexão
Figura 6	
Qual a figura padrão utilizada?	
Existe simetria?	( ) Sim ( ) Não
Identifique o tipo de simetria utilizada na figura	( ) Translação ( ) Reflexão ( ) Rotação ( ) Glissoreflexão

Figura 7	
Qual a figura padrão utilizada?	
Existe simetria?	( ) Sim ( ) Não
Identifique o tipo de simetria utilizada na figura	( ) Translação ( ) Reflexão ( ) Rotação ( ) Glissoreflexão
Figura 8	
Qual a figura padrão utilizada?	
Existe simetria?	( ) Sim ( ) Não
Identifique o tipo de simetria utilizada na figura	( ) Translação ( ) Reflexão ( ) Rotação ( ) Glissoreflexão

4.1.3 Análise de um Ornamento

Como analisar matematicamente um ornamento ou uma arte decorativa? Uma possibilidade de análise para um ornamento é identificar primeiramente o elemento gerador e logo após verificar quais isometrias utilizadas em tal ornamento.

Vamos observar dois mosaicos construídos por Escher:

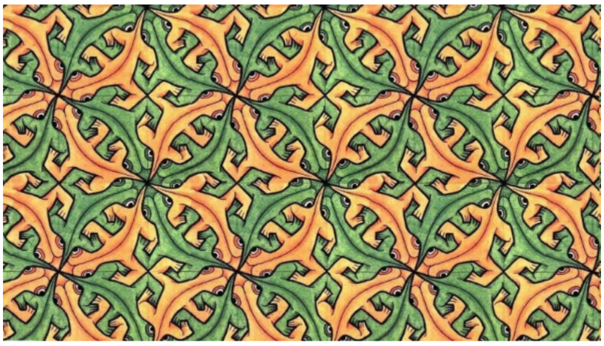


Figura 39: Escher [13]

Essa arte de Escher foi obtida com a repetição do motivo (réptil) que compõe cada quadrado da rede, efetuando um movimento de rotação de 90º. O quadrado construído depende do ponto O, arbitrariamente fixado. Observamos que para passar do réptil escuro (elemento gerador) para o réptil mais claro, foi preciso um giro de 180º, conforme Biembengut [4].

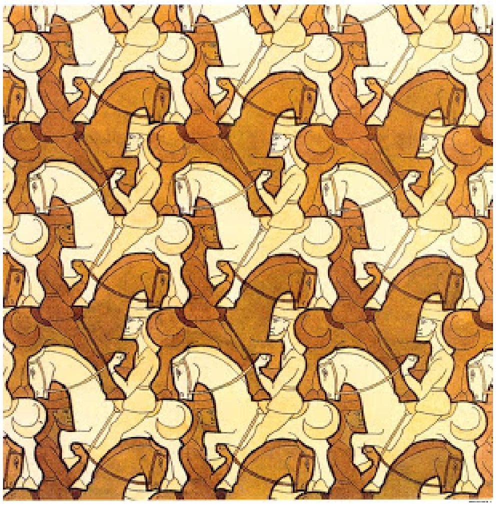


Figura 40: Escher [14]

Esse segundo mosaico é composto de duas figuras que se repetem. Observamos que há a translação dos cavalos claros (elemento gerador), logo após, fez-se uma reflexão desse objeto com translação, obtendo assim os cavalos mais escuros, onde também foram repetitivamente transladados.

Biembengut [4] fala que a gramática dos ornamentos é um estímulo à observação, à contemplação da natureza e à análise dos objetos encontrados à nossa volta.

Baseando-se nos conceitos de ornamentos limitados, que são as rosetas, e nos ilimitados, que são as faixas e os mosaicos, e nas observações feitas, os alunos podem desenvolver sua criatividade ao elaborar e analisar ornamentos.

4.2 Modelagem do Número Áureo

A preocupação com a beleza, tanto física como a do ambiente não é de agora, já vem dos nossos ancestrais. Acreditamos que desde os tempos primitivos o ser humano tem permanecido em estado de indagação sobre a harmonia e a beleza do universo. O homem estabeleceu uma ordem de comparação entre os objetos que o rodeiam na tentativa de fundamentar o que é belo. Nesta seção, mostramos algumas propriedades do número de ouro e secções áureas com sugestões para serem trabalhadas em sala de aula. O texto abaixo é retirado de Biembengut [4].

4.2.1 Padrão áureo de beleza

É possível avaliar a beleza física de uma pessoa por meio de uma fórmula Matemática?

A beleza é abstrata! O que para uma pessoa pode ser belo, para outra não é. Porém, é possível mostrar a harmonia de proporções, realizando comparações. Para tal comparação é necessária um critério especial, denominado medida. As medidas são padrões específicos que relacionam cada objeto com outros de natureza semelhantes.

Podemos utilizar o corpo humano para despertar a curiosidade dos alunos, fazendo-os medirem várias partes do corpo e analisarem os resultados. Por exemplo, se tomarmos a altura de uma pessoa e dividirmos pela medida que vai da linha do umbigo até o chão, vemos que a razão é a mesma que da medida do queixo até a testa em relação aos olhos até o mesmo ponto. O mesmo ocorre em outras partes do corpo.

Qual é esta razão?

Façamos um teste: tomando as respectivas medidas, a altura do corpo e a altura do umbigo em relação ao chão, e em seguida fazer as seguintes divisões: altura (x) pela medida do umbigo ao chão (a) e vice-versa. Esse teste pode se tornar uma atividade interessante aos alunos, fazendo com que façam essas medições uns com os outros, percebendo que o resultado se aproxima do número de ouro.

4.2.2 Aplicação do Modelo da Beleza

- **Atividade 1: Modelagem da Beleza**

O professor pode convidar os alunos a verificarem “se possuem a beleza áurea” , efetuando várias medidas pelo corpo e depois fazendo a divisão entre as mesmas. Feito isso, peça a eles que anotem todas as medições numa tabela, para depois fazerem uma análise dos resultados aferidos.

Um exemplo de esquema (tabela) que o professor pode sugerir é:

Parte do corpo(a)	Parte do corpo(b)	Resultado : a/b	Resultado: b/a
altura da pessoa	medida do umbigo até o chão		
medida do ombro à ponta do dedo	medida do cotovelo à ponta do dedo		
tamanho dos dedos	medida da dobra central até as pontas		
medida do cotovelo ao início da mão	medida do início da mão até o fim do dedo médio		
medida do quadril ao chão	medida do joelho ao chão		
medida da cintura até a cabeça	tamanho do tórax		
medida do rosto	medida da bochecha		

Embora as medidas variem de uma pessoa para outra, a experiência tem nos mostrado que a razão ou coeficiente de proporcionalidade que domina a beleza é a mesma para a maioria das pessoas, adultos principalmente, podendo haver alterações nos adolescentes em fase de crescimento.

Se os alunos forem das séries iniciais, não é necessário apresentar os números e nem a demonstração da razão áurea. Apenas comentar sobre essa relação, que representa beleza e harmonia do corpo humano. Caso a intenção for trabalhar com a divisão de números decimais, esta atividade permite efetuar uma grande quantidade de cálculos. Ou se o objetivo for introduzir os números irracionais e a equação do 2º, o número de ouro e a secção áurea permitem fazer isso.

Seja qual for o grau de escolaridade, o interessante é medir várias pessoas, usando o bordão: você quer verificar se possui a beleza áurea?

4.2.3 Análise do Modelo da Beleza

A atividade anterior propicia a participação dos alunos em trabalhos em grupo, fazendo com que sejam sujeitos corresponsáveis pela coleta, elaboração e análise dos dados aferidos. Após a atividade desenvolvida o professor pode pedir a análise dos dados, levando os alunos a conjecturarem a respeito das propriedades áureas.

5 Considerações Finais

No desenvolvimento deste trabalho aprendemos sobre os conceitos e as etapas da Modelagem, e que este não é apenas uma mera aplicação de algum conteúdo matemático: exige planejamento, estudo, uma grande participação dos sujeitos envolvidos, podendo envolver a todos na comunidade escolar.

Através deste trabalho vimos que a Modelagem Matemática pode ser uma ferramenta de ensino muito importante no ensino básico e como pode desenvolver nos alunos a se tornarem sujeitos atuantes na construção do seu próprio conhecimento.

Um fator muito relevante sobre o uso da modelagem no ensino básico é que essa metodologia é dinâmica, flexível, necessita do envolvimento de todos os alunos, propicia uma maior interação professor-aluno, aluno-aluno, aluno-conhecimento.

No decorrer do trabalho, através das atividades propostas, podemos perceber que a Matemática está tão presente no nosso cotidiano, que na maioria das vezes nem paramos para apreciar e analisar sua presença e suas várias aplicabilidades no mundo que nos rodeia. O terceiro capítulo deixa bem evidente essas aplicações, quando tratamos das isometrias e da razão áurea com vários exemplos presentes na natureza e no campo das artes.

Foram apresentadas algumas atividades que podem e devem ser aplicadas em sala de aula no Ensino Fundamental ou até mesmo no Ensino Médio. Estas atividades propostas abordaram sobre ornamentos, inicialmente identificando qual o tipo de isometria verificada, para depois concretizarem o que lhes foi pedido relacionado com sua composição e análise. Também propusemos atividades sobre a modelagem do número de ouro, fazendo que os alunos trabalhem em grupo com diversas medições do seu próprio corpo, para depois fazerem uma coleta de dados e sua respectiva análise. Este tema é interessante, pois propicia ao professor um constante aprimoramento da sua prática docente, instigando no professor o desejo de sempre rever seus métodos pedagógicos, sua forma de avaliar o processo ensino-aprendizagem, suas expectativas de aprendizagem.

Os tipos de atividades propostas envolvendo Modelagem Matemática propiciam um maior entendimento pelos alunos em determinado conteúdo, pois eles mesmos são corresponsáveis por todo o processo, desde a inteiração sobre o tema proposto por eles ou pelo professor, até a execução do modelo. Como o tema de Modelagem Matemática é muito abrangente, escolhemos dois assuntos específicos (isometrias e número de ouro) para apresentarmos atividades a serem trabalhadas no Ensino Básico.

Temos convicção que estratégias de ensino como esta, podem amenizar significantemente o fracasso escolar em que são acometidos os alunos do Ensino Básico, porém ainda precisam ser melhoradas e aperfeiçoadas para que tenhamos um resultado mais significativo.

O presente trabalho permite fazer uma auto-reflexão enquanto profissional e aponta novos caminhos para se ensinar Matemática.

Referências

[1] Almeida, l. w. de *Modelagem Matemática na Educação Básica*, Contexto, 2016.

[2] araújo, l.c.l. de, *Aprendendo Matemática com o Geogebra*, Exato, 2010.

[3] Bassanezi, r. c. *Modelagem Matemática: Teoria e Prática*, Contexto,2015.

[4] Biembengut, m. s. *Modelagem Matemática no Ensino*, Contexto, 2014.

[5] Biembengut, m. s., *Número de Ouro e Secção Áurea: Considerações e Sugestões para a sala de aula*, FURB, 1996.

[6] Lima, e. l. *Isometrias*, Coleção do Professor de Matemática, SBM.

[7] Stewart, i., *Almanaque das Curiosidades Matemáticas*, Zahar, 2009.

[8] Wagner, e., *Construções Geométricas*, Coleção do Professor de Matemática, SBM.

[9] zahn, m., *Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro*, Ciência Moderna, 2011.

[10] Disponível em: <http://www.tudointeressante.com.br/2014/05/18-belos-e-impressionantes-exemplos-de-simetria-na-natureza.html> Acesso em: 13 Março 2017

[11] Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/c
Acesso em: 25 Março 2017

[12] Disponível em: <http://obviousmag.org/archives/2014/03/vitraisgoticos.html> Acesso em: 25 Março 2017

[13] Disponível em: <http://obviousmag.org/horizontedeeventos/2016/escher.html> Acesso em: 26 Março 2017

[14] Disponível em: <http://www.artperceptions.com/2010/02/m-c-escher.html> Acesso em: 26 Março 2017

[15] Disponível em: <http://conteudoonline.objetivo.br/Conteudo/Index/1168?token=5> Acesso em: 25 Março 2017

[16] Disponível em: <http://profmat12.blogspot.com.br/2013/06/mosaicos-de-escher.html> Acesso em: 25 Março 2017

[17] Disponível em: <https://www.significados.com.br/simetria/> Acesso em: 10 Abril 2017

[18] Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/c
Acesso em: 25 Março 2017

[19] Disponível em: <http://www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage
Acesso em: 25 Março 2017

[20] Disponível em: <https://br.pinterest.com/maryrivasibdcn/bordado-en-deshilado/> Acesso em: 25 Março 2017

[21] Disponível em: <https://pt.slideshare.net/MauricioMalletDuprat/proporcao-urea> Acesso em: 25 Abril 2017

[22] Disponível em: <http://acontascomela.yolasite.com/> Acesso em: 25 Abril 2017

[23] Disponível em: <https://br.pinterest.com/pin/399695154231338 23/> Acesso em: 25 Março 2017

[24] Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/c
Acesso em: 25 Março 2017

[25] Disponível em: <http://jupestana2.blogspot.com.br/2012/10/estrela-do-mar.html> Acesso em: 25 Março 2017

[26] Disponível em: <http://www.mcescher.com/> Acesso em: 25 Março 2017

[27] Disponível em: <http://www.matematica.br/historia/prhind.html> Acesso em: 11 Abril 2017

[28] Disponível em: <www.dicasdogreb.com.br/simetria-no-coreldraw> Acesso em: 11 fevereiro 2017

[29] Disponível em: <http://blogmatematic.blogspot.com.br/2012/01/isometrias-reflexao-rotacao-e.html> Acesso em: 28 fevereiro 2017

[30] Disponível em: <http://blogdememoriasdosinsones.blogspot.com.br/2012/12/fotos-refletidas-bichos.html> Acesso em: 28 fevereiro 2017

[31] Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/tex/fis01043/20032/Tiago/Supersimetria.htm> Acesso em: 1 Março 2017

[32] Disponível em: <http://www.estudopratico.com.br/teorema-de-tales/> Acesso em: 1 Maio 2017

[33] Disponível em: <http://explorarasciencias.yolasite.com/6C2BA-ano-mat-isometrias.php> Acesso em: 1 Março 2017

[34] Disponível em: <http://croove.com.br/crie/como-usar-a-proporcao-aurea> Acesso em: 1 Março 2017

[35] Disponível em: <http://www.esteticas.com.br> Acesso em: 1 Maio 2017