



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

FRANCISCO DJACIR MOREIRA DA SILVA

APLICAÇÕES DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

**JUAZEIRO DO NORTE - CEARÁ
2017**

FRANCISCO DJACIR MOREIRA DA SILVA

APLICAÇÕES DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Centro e Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora:
Prof^a. Dr^a. Maria Silvana Alcântara Costa.

JUAZEIRO DO NORTE - CEARÁ
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

-
- S586a Silva, Francisco Djacir Moreira da.
Aplicações do princípio da indução matemática/ Francisco Djacir Moreira da Silva. – 2017.
69 f.: il.; color.; enc. ; 30 cm.
- Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia – Departamento de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2017.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
- Orientação: Prof. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa.
1. Números naturais. 2. Indução. 3. Demonstração. 4. Aplicações. I. Costa, Maria Silvana Alcântara.
II. Título.

CDD 161



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Aplicações do Princípio da Indução Matemática

Francisco Djacir Moreira da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 21 de julho de 2017.

Banca Examinadora

Maria Silvana Alcântara Costa

Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa – UFCA

Orientadora

Paulo Cesar Cavalcante de Oliveira

Prof. Dr. Paulo Cesar Cavalcante de
Oliveira -URCA

Plácido Francisco de Assis Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis
Andrade - UFCA

Dedico este trabalho a Deus, que sempre me guiou e, a meu pai João Jordão da Silva (in memoriam), que quando em vida, proporcionou as oportunidades que precisavam para que eu pudesse estar aqui hoje.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por tudo que tem proporcionado em minha vida. Agradeço a minha esposa, Silzanete Rodrigues dos Santos, que sempre me apoiou para seguir em frente e nunca desistir.

Imensamente agradeço as minhas duas filhas Sôphia Swellen Rodrigues Moreira e Vitória Agnes Rodrigues Moreira que sempre me apoiaram e incentivaram nessa jornada que estamos a vencer.

À minha Mãe, Terezinha Moreira da Silva, pela dedicação a mim dispensada durante toda minha vida e especialmente durante esses dois anos e meio de Mestrado.

Aos meus dois irmãos, Franciel Moreira da Silva e José Moreira da Silva, que me deram apoio e proteção quando mais precisei.

Aos meus amigos mais próximos pela compreensão do distanciamento compulsivo que tivemos que nos submeter para que este momento pudesse chegar.

Aos meus alunos e ex-alunos que acompanharam e apoiaram minha luta neste curso.

Aos colegas de Mestrado pela convivência harmoniosa e de companheirismo durante o período em que estivemos a aprender juntos.

Especialmente ao colega Wesley Castro Teixeira pela aproximação que tivemos durante o curso e pela incomensurável ajuda na digitação deste trabalho, assim como ao colega professor Jackson Tavares de Andrade que também auxiliou na digitação e revisão desta dissertação. Também agradeço ao professor mestre José Ivelton Siqueira Lustosa pela revisão final deste trabalho.

Ao colega de Trabalho, Prof. Luiz Rosa da Silva Filho, que realizou a tradução do resumo deste trabalho.

Aos professores do programa: Plácido Francisco de Assis Andrade de Oliveira, Clarice Dias de Albuquerque, Juscelino Pereira da Silva e Francisco Calvi da Cruz Junior por terem dado suas valiosas contribuições durante o curso.

Gostaria de agradecer também, e, de forma especial, a Professora Dr^a. Maria Silvana Alcântara Costa pela condução da coordenação acadêmica institucional do PROFMAT, campus UFCA, Juazeiro do Norte-CE e pela dedicação dispensada na brilhante orientação deste trabalho.

Por fim, à Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Ensino Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

*“ A Matemática é a rainha das ciências
e a teoria dos números é a rainha das
matemáticas.” (Gauss)*

RESUMO

Apresentar demonstrações em Matemática torna-se um desafio para o professor em sala de aula, pois para que o aluno possa compreendê-las, é necessária atenção e maior compreensão da Matemática em estudo. Saber o que deve ser provado e o que pode ser utilizado na prova de um resultado é fundamental para se obter êxito. Tendo em vista que os números naturais são essenciais em todos os ramos da matemática e é estudado em todos os níveis de ensino, este trabalho, tem como propósito o estudo do conjunto dos números naturais e o princípio da Indução Matemática ou Método da Indução, uma técnica de demonstração aplicada exclusivamente aos números naturais, em demonstrações diretas e indiretas. Vale ressaltar que nem toda demonstração que envolve números naturais pode ser provada com esta técnica e que outras formas de demonstração também foram utilizadas para dar segmento ao trabalho, porém o foco foi o Método da Indução. Para o desenvolvimento do trabalho fizemos um estudo sobre as propriedades deste conjunto e destacamos resultados que podem ser demonstrados com o Princípio da Indução, como o Teorema Fundamental da Aritmética, definição por Recorrência, algumas fórmulas e desigualdades apresentadas em disciplinas do Ensino Básico que são úteis para a compreensão de conteúdos no Ensino Superior. Finalizamos com algumas aplicações lúdicas clássicas, que fazem uso desta técnica, como a Torre de Hanói, a qual pode ser trabalhada em sala de aula como motivação para a compreensão desta técnica de demonstração.

Palavras-chave: Números Naturais. Indução. Demonstração. Aplicações.

ABSTRACT

To present demonstrations in mathematics becomes a challenge for the teacher in the classroom, because in order for the pupil may understand them, is necessary attention and greater comprehension of the mathematics in study. To know what to must be proved and what can be used in the prove of one result is fundamental to get success. Having in view that the natural numbers are essential in all the branches of the mathematics and is studied in all the levels of teach, this work, have with purpose the study of the set of the natural numbers and the principle of the Induction Finite or Method of the Induction, a technique of demonstration applied exclusively to the natural numbers, in direct and indirect demonstrations. It is worth noting that not all demonstration that involves natural numbers can be proved with this technique and that other forms of demonstration also were used to give a segment to the work, but the focus was the Method of the Induction. For the development of the work we made a study about the properties of this set and we stand out results that can be demonstrated with the Principle of Induction, as the Theorem Fundamental of Arithmetic, definition by Recurrence, some formulas and inequalities presented in disciplines of the Basic Teach that are useful for the comprehension of contents in the higher teach. We finalize with some applications classic ludic, that make use of this technique, as the Tower of Hanoi, which can be worked in classroom as motivation for the comprehension of this technique of demonstration.

Keywords: Natural Numbrs. Induction. Demonstration. Applications.

Lista de Figuras

1	Princípio da Indução e dominó	24
2	Área da região	30
3	Área da região	32
4	Polígono convexo de $n + 1$ lados	38
5	Polígono convexo de $n + 1$ lados	39
6	Decomposição do polígono Q em n lados	40
7	(Torre de Hanói)	57
8	Torre de Hanói com uma peça	58
9	Movimentação da peça	58
10	Torre de Hanói com duas peças	58
11	Movimentação das 2 peças	58
12	Torre de Hanói com três peças	59
13	Movimentação das 3 peças	59
14	Torre de Hanói com quatro discos	60
15	Movimentação dos 4 discos	60
16	Cortando a pizza	62
17	Acrescentando um corte	63

Lista de Tabelas

1	Relação entre o número de cortes e o número de regiões obtidas.	62
---	---	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	OS NÚMEROS NATURAIS	12
2.1	Axiomas de Peano	13
2.2	As operações de adição e multiplicação em \mathbb{N}	14
2.3	Relações de ordem em \mathbb{N}	19
2.4	O Princípio da Boa Ordenação	23
2.5	Princípio da Indução Generalizado	24
3	APLICAÇÕES	28
3.1	Demonstrando Igualdades	28
3.2	Demonstrando Desigualdades	35
3.3	Demonstrando Fórmulas	38
3.3	Binômio de Newton e aplicações	45
3.5	Outras Aplicações	50
4	APLICAÇÕES LÚDICAS	56
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	64
	REFERÊNCIAS	65

1 INTRODUÇÃO

Demonstrações matemáticas causam receio em grande parte dos alunos pois requerem um bom raciocínio matemático para compreender todos os entes envolvidos em um resultado a ser provado. Apesar da pouca aceitação em sala de aula, demonstrações são necessárias para garantir a validade de um teorema e aprofundar conhecimentos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM [2] tratam do valor das demonstrações no estudo dos conteúdos ensinados em Matemática na Educação Básica como segue: *Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática. Afirmar que algo é “verdade” em Matemática significa, geralmente, ser resultado de uma dedução lógica, ou seja, para se provar uma afirmação (teorema) deve-se mostrar que ela é uma consequência lógica de outras proposições provadas previamente.*

Assim, apresentar resultados e demonstrações é permitir que o aluno tenha acesso aos fundamentos do conteúdo a ser estudado, bem como assegurar que são estes resultados que permitem a solução de problemas, não somente em Matemática, mas em outras áreas do conhecimento.

As demonstrações podem ser classificadas em duas classes, a saber: as demonstrações diretas e as demonstrações indiretas. Para utilizá-las, além da matemática envolvida, dois conceitos essenciais são Hipótese e Tese. Nas Demonstrações diretas assumimos a hipótese como verdadeira e explorando esta informação, devemos deduzir diretamente a tese. Já as demonstrações indiretas envolvem a negação da tese, são conhecidas como demonstração por redução a um absurdo ou por contradição e demonstrações usando a contraposição. A demonstração por redução a um absurdo ou por contradição, são aquelas em que, assumindo a validade da hipótese e supondo que a tese não é verdadeira, devemos chegar a uma sentença contraditória, garantindo, assim, que a nossa suposição inicial é falsa. Já nas demonstrações usando a contrapositiva, negamos a tese e a partir da exploração desta informação, devemos desenvolver um raciocínio matemático para obter uma negação da hipótese.

Em qualquer um dos casos utilizados para garantir a validade de um teorema, fa-

zemos uso da teoria matemática à qual o resultado pertence. Em particular, quando queremos demonstrar propriedades envolvendo os números naturais surge uma técnica de demonstração conhecida como Princípio da Indução Matemática ou Método da Indução baseada nos Axiomas de Peano. O princípio da Indução Matemática assegura que se uma propriedade é válida para um número natural, digamos o número 1, e se a propriedade é válida para um número n , então $n + 1$ possui a mesma propriedade, então podemos garantir que a propriedade é válida para todo número natural. O conjunto dos números naturais é a base do conhecimentos matemático sendo estudado em todos os níveis de ensino. Pensando em sua importância para a construção do conhecimento matemático, desenvolvemos o trabalho de forma que estudantes do Ensino Médio e do Ensino Superior possam utilizá-los como consulta. Iniciamos com um estudo sobre os números naturais a partir dos Axiomas de Peano. E em seguida apresentamos a Primeira e a Segunda forma do Princípio da Indução destacando como aplicações da segunda forma: o Teorema Fundamental da Aritmética e a definição por Recorrência. No capítulo seguinte apresentamos várias fórmulas estudadas no Ensino Médio e no Ensino Superior cujas demonstrações se utilizam a técnica da Indução. Concluimos o trabalho com algumas aplicações lúdicas, entre elas, a torre de Hanói e o problema da moeda falsa, as quais podem ser trabalhadas em sala de aula com o propósito de envolver os alunos com o tema em estudo.

2 OS NÚMEROS NATURAIS

Os primeiros registros de contagem, segundo a história, datam de cerca de dez mil anos atrás. Nessa época, o homem começa a ter um lugar fixo para viver e também cultivar plantas e criar animais. Neste período, não existia a simbologia representativa dos números hoje utilizada. No entanto, como o homem já possuía a necessidade de contar, ele utilizava outros métodos no processo de contagem.

Alguns vestígios mostram que os pastores de ovelhas, diante da necessidade de controle do seu rebanho, buscaram meios para saber se a quantidade de animais que possuía aumentava ou diminuía. Ao sair para pastar pela manhã, cada ovelha era representada por uma “pedrinha colocada num monte”. Ao entardecer cada ovelha que chegava do pasto, uma pedra era descartada. Assim os pastores sabiam, se seu rebanho, mantinha a mesma quantidade de ovelhas ou havia variado. Surge aí a ideia de relação entre conjuntos, ou seja, o homem estabelece uma correspondência biunívoca¹ entre as ovelhas e as pedras.

Com o passar do tempo e o homem mais evoluído, surge a necessidade de usar sinais para representar quantidades. Os dedos das mãos, por exemplo, eram usados para contar até dez.

Na medida em que o homem se tornava mais civilizado ele passou a adotar um modelo de contagem abstrato, os números naturais. De acordo com (Cattai) [3], só no final do século XIX, é que a noção de número passou a ser baseada em conceitos da teoria dos conjuntos e os números $1, 2, 3, 4, \dots$, passaram a ser considerados elementos de um conjunto chamado de Conjunto dos Números Naturais.

Sobre os naturais, Lima [16] assim se refere: *Os números naturais constituem um modelo matemático, uma escala padrão, que nos permite a operação de contagem. A sequência desses números é uma livre e antiga criação do espírito humano. Comparar conjuntos de objetos com essa escala abstrata ideal é o processo que torna mais precisa a noção de quantidade; esse processo (a contagem) pressupõe portanto o conhecimento da sequência numérica. Sabemos que os números naturais são $1, 2, 3, 4, 5, \dots$. A totalidade desses números constitui um conjunto, que indicaremos com o símbolo \mathbb{N} e que chamaremos de conjunto dos naturais. Portanto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.*

¹Dizemos que dois conjuntos X e Y estão em correspondência biunívoca quando cada elemento de X corresponde a um único elemento de Y e reciprocamente

Tendo em vista a importância dos números naturais, para a construção dos números e para a compreensão do tema principal do trabalho, nas seções seguintes faremos uma descrição deste conjunto tendo como base os termos primitivos, sucessor e os Axiomas de Peano. Toda a teoria descrita neste capítulo pode ser encontrada em [1], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [10], [14],[15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27] e [28].

2.1 AXIOMAS DE PEANO

Em fins do século XIX o matemático italiano, Giuseppe Peano (1858-1932), um dos fundadores da Lógica matemática e da Teoria dos conjuntos, contribuiu fundamentalmente para o tratamento rigoroso e sistemático moderno do método da indução matemática [28]. A partir da axiomática de Peano, baseada na palavra sucessor, todas as afirmações sobre os números naturais podem ser obtidas. A axiomática de Peano aqui apresentada pode ser encontrada em Lima [17] como segue:

Axiomas de Peano

1. Existe uma função $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$, chamado o sucessor de n .
2. A função $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é injetiva.
3. Existe um único elemento 1 no conjunto \mathbb{N} , tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
4. Se um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$ então $X = \mathbb{N}$.

Explicamos com mais detalhes os axiomas acima.

- i)* A existência da função $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, assegura que todo número natural n possui um sucessor, $s(n)$, que também é um número natural.
- ii)* A injetividade da função $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, garante que números naturais diferentes possuem sucessores diferentes.
- iii)* O único número natural que não é sucessor de nenhum outro número natural é o número 1 (um), isto assegura que ele é o primeiro elemento do conjunto. Além disso, como 1 tem um sucessor e $1 \neq s(1)$, então o conjunto \mathbb{N} possui outros elementos além do número 1 .
- iv)* Se um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ contém o número 1 e o sucessor de cada um de seus elementos, então obrigatoriamente ele é o próprio conjunto dos números naturais.

O último Axioma é conhecido como Axioma da Indução ou Princípio da Indução Matemática. É de grande utilidade quando trabalhamos com demonstrações que envolvem números naturais. O reescreveremos abaixo na linguagem de propriedades conforme [19].

Princípio da Indução Matemática *Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n . Suponhamos que:*

1. $P(1)$ é válida;
2. para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica na validade de $P(s(n))$, onde $s(n)$ é o sucessor de n .

Então $P(n)$ é válida para todo número natural n .

Podemos reescrevê-lo ainda na linguagem de conjunto da seguinte forma.

Princípio da Indução Matemática *Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n . Denotemos por X o conjunto*

$$X = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ goza da propriedade } P(n)\}.$$

Suponha que:

1. $1 \in X$, isto é $P(1)$ é válida;
2. se para todo $n \in X$, tem-se que $s(n) \in X$, ou seja, a validade de $P(n)$ implica na validade de $P(s(n))$, então $X = \mathbb{N}$.

Neste trabalho, usaremos as duas versões do Princípio da Indução Matemática.

2.2 ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO EM \mathbb{N}

A partir da ideia de sucessor e dos Axiomas de Peano é possível definir as operações fundamentais de adição e de multiplicação no conjunto dos números naturais.

Os axiomas de Peano garantem que o número 1 não é sucessor de número algum, e além disso, $s(1) \neq 1$. Como $s(1) \in \mathbb{N}$, tem-se que $1, s(1) \in \mathbb{N}$, sendo s injetiva $s(s(1)) \neq s(1)$ e assim sucessivamente.

Adição em \mathbb{N} A adição de números naturais associa a cada m e n , um número natural, denotado por $m + n$, definido do seguinte modo,

$$\begin{cases} n + 1 & = s(n) \\ m + s(n) & = s(m + n). \end{cases}$$

Esta última igualdade pode ser escrita como segue:

$$m + s(n) = m + (n + 1) = (m + n) + 1.$$

Mostremos que $m + n$ está definida para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Para isto considere o conjunto

$$X_m = \{n \in \mathbb{N}; m + n \text{ está definida}\}.$$

Utilizando os Axiomas de Peano, mostremos que $X_m = \mathbb{N}$.

- i) $1 \in X$, pois $m + 1$ é o sucessor de m .
- ii) Se $n \in X$, mostremos que $s(n) \in X$, isto é, $m + s(n)$ está definida.

Como $n \in X$, então $m + n$ está definida e a definição de adição assegura que,

$$m + s(n) = s(m + n) = (m + n) + 1$$

é o sucessor de $m + n$ e também está definida. Então $s(n) \in X$, pelo quarto axioma de Peano, ou Princípio da Indução Matemática, $X = \mathbb{N}$. Segue então que a operação de adição em \mathbb{N} está definida para todos os números naturais.

Tendo em vista o exposto acima, denotaremos o sucessor de um número natural n por $s(n) = n + 1$. Assim temos.

$$1, \quad s(1) = 1 + 1 = 2, \quad s(2) = 2 + 1 = 3, \quad \dots, \quad s(n) = n + 1, \dots$$

Multiplicação em \mathbb{N} A multiplicação em \mathbb{N} , associa dois números naturais $m, n \in \mathbb{N}$, um número natural, denotado por $m \cdot n$, como segue.

$$\begin{cases} n \cdot 1 & = n \\ m \cdot (n + 1) & = m \cdot n + m. \end{cases}$$

Por simplicidade, muitas vezes em lugar de indicar a multiplicação por $m \cdot n$ indicamos por mn .

A última igualdade assegura que se soubermos multiplicar todos os números naturais m por n , saberemos multiplicá-los por $(n + 1)$ tendo em vista que a adição já está definida. Mostremos então que a multiplicação está definida para todos os números naturais. Considere o conjunto

$$X_m = \{n \in \mathbb{N}; m \cdot n \text{ está definida}\}.$$

Utilizando os Axiomas de Peano, mostremos que $X_m = \mathbb{N}$. Observe que:

- i) $1 \in X_m$, pois $m \cdot 1 = m$. Assim X_m é não vazio;

ii) Se $n \in X_m$, mostremos que $s(n) = n + 1 \in X_m$, isto é, $m \cdot (n + 1)$ está definida.

Como $n \in X_m$, então $m \cdot n$ está definida. Por definição

$$m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m.$$

Como $m \cdot n$ está definido e adição de números naturais está definida, segue então que $n + 1 \in X_m$. Pelo Princípio da Indução Matemática, $X_m = \mathbb{N}$.

Mostremos em sequência que a operação de adição definida em \mathbb{N} atende as propriedades descritas no teorema abaixo.

Teorema 1 *Sejam $m, n, r \in \mathbb{N}$. A adição em \mathbb{N} possui as seguintes propriedades.*

1. *Associatividade: $m + (n + r) = (m + n) + r$.*
2. *Comutatividade: $m + n = n + m$.*
3. *Lei do Corte: Se $m + r = n + r$, então $m = n$.*

Demonstração Sejam $m, n, r \in \mathbb{N}$.

1) Associatividade A sentença a ser demonstrada é a seguinte. Para todo $m, n, r \in \mathbb{N}$ vale que

$$P(r) : m + (n + r) = (m + n) + r.$$

Utilizaremos uma indução sobre r .

- i) Para $r = 1$, tem-se que $m + (n + 1) = (m + n) + 1$ (que é a definição de adição dada). Logo $P(1)$ é verdadeira.
- ii) Suponha que $m + (n + r) = (m + n) + r$ é verdadeira para algum $r \in \mathbb{N}$. Mostremos que

$$m + [n + (r + 1)] = (m + n) + (r + 1).$$

Da definição de adição e da hipótese de indução segue que

$$\begin{aligned} m + [n + (r + 1)] &= m + [(n + r) + 1] \\ &= [m + (n + r)] + 1 \\ &= [(m + n) + r] + 1. \end{aligned}$$

E novamente pela definição de adição tem-se que $[(m + n) + r] + 1 = (m + n) + (r + 1)$. Substituindo na equação acima, obtemos

$$m + [n + (r + 1)] = (m + n) + (r + 1).$$

Pelo Princípio da Indução, a igualdade $m + (n + r) = (m + n) + r$ vale para todo $m, n, r \in \mathbb{N}$.

2) Comutatividade Mostremos, por Indução sobre n , que para todo $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se $m + n = n + m$.

- i) Mostremos inicialmente que, para $n = 1$, tem-se que $m + 1 = 1 + m$ por indução sobre m .

Para $m = 1$, tem-se que $1 + 1 = 1 + 1$. Suponha agora que $m + 1 = 1 + m$ seja verdadeira para algum $m \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar que $(m + 1) + 1 = 1 + (m + 1)$.

Utilizando, a hipótese de indução e a associatividade da adição, obtemos

$$\begin{aligned}(m + 1) + 1 &= (1 + m) + 1 \\ &= 1 + (m + 1).\end{aligned}$$

Segue-se então que $(m + 1) + 1 = 1 + (m + 1)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Vejamos agora ao caso geral.

- ii) Suponha que $m + n = n + m$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar que

$$m + (n + 1) = (n + 1) + m.$$

Pela definição da adição e pela hipótese de indução, temos.

$$\begin{aligned}(m + n) + 1 &= (m + n) + 1 \\ &= (n + m) + 1.\end{aligned}\tag{1}$$

Usando a associatividade e o item *i*) já provado, $m + 1 = 1 + m$, obtemos

$$\begin{aligned}(n + m) + 1 &= n + (m + 1) \\ &= n + (1 + m) \\ &= (n + 1) + m.\end{aligned}\tag{2}$$

Substituindo (1) em (2) chegamos à igualdade $m + (n + 1) = (n + 1) + m$. Pelo Princípio da Indução, tem-se que $m + n = n + m$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

3) Lei do Corte Sejam $m, n, r \in \mathbb{N}$. Mostremos que se $m + r = n + r$, então $n = m$.

- i) Para $r = 1$ a sentença é verdadeira pois se $m + 1 = n + 1$, então o sucessor de m é igual ao sucessor de n , pelo axioma (2) de Peano, $m = n$.
- ii) Suponha que, para algum $r \in \mathbb{N}$ tem-se que $m + r = n + r$, então $n = m$. Devemos mostrar que se tivermos $m + (r + 1) = n + (r + 1)$, então $m = n$.

Pela associatividade de adição, temos

$$\begin{cases} m + (r + 1) = (m + r) + 1 \\ n + (r + 1) = (n + r) + 1. \end{cases}$$

Por hipótese $m + (r + 1) = n + (r + 1)$, pela equações acima

$$(m + r) + 1 = (n + r) + 1.$$

Logo $m+r$ e $n+r$ possuem o mesmo sucessor. Pelos axiomas de Peano, $m+r = n+r$.

Pela hipótese de indução, se tivermos $m + r = n + r$, então $m = n$. ■

Passemos às propriedades da multiplicação em \mathbb{N} .

Teorema 2 *Sejam $m, n, r \in \mathbb{N}$. A multiplicação em \mathbb{N} possui as seguintes propriedades.*

1. *Comutatividade: $m \cdot n = n \cdot m$.*
2. *Associatividade: $m \cdot (n \cdot r) = (m \cdot n) \cdot r$.*
3. *Distributividade: $m(n + r) = m \cdot n + m \cdot r$.*

Demonstração Sejam $m, n, r \in \mathbb{N}$.

1) Comutatividade Mostraremos que para todo $m, n \in \mathbb{N}$, vale a igualdade $m \cdot n = n \cdot m$.

i) Mostremos por indução em m que $m \cdot 1 = 1 \cdot m$.

A igualdade é válida para $m = 1$, pois $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$.

ii) Suponha que $m \cdot 1 = 1 \cdot m$. Verificaremos que $(m + 1) \cdot 1 = 1 \cdot (m + 1)$. De fato, pela definição de multiplicação temos

$$\begin{aligned} 1 \cdot (m + 1) &= 1 \cdot m + 1 \cdot 1 \\ &= m \cdot 1 + 1 \\ &= (m + 1) \cdot 1. \end{aligned}$$

Portanto vale a comutatividade para $n = 1$.

ii) Suponha que para algum n temos $m \cdot n = n \cdot m$. Mostremos que $m \cdot (n+1) = (n+1) \cdot m$. Pela definição de multiplicação e a hipótese de indução, segue que

$$\begin{aligned} m \cdot (n + 1) &= m \cdot n + m \cdot 1 \\ &= n \cdot m + 1 \cdot m \\ &= m + m + \cdots + m \\ &= (n + 1) \cdot m. \end{aligned}$$

2) Associatividade Desejamos mostrar que para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $m \cdot (n \cdot r) = (m \cdot n) \cdot r$. A prova será feita por indução sobre r .

- i) Para $r = 1$, tem-se que $m \cdot (n \cdot 1) = m \cdot n = (m \cdot n) \cdot 1$.
- ii) Suponha que $m \cdot (n \cdot r) = (m \cdot n) \cdot r$. Verificaremos que $m \cdot [n \cdot (r+1)] = (m \cdot n) \cdot (r+1)$. De fato, a multiplicação e a hipótese de indução asseguram que

$$\begin{aligned} m \cdot [n \cdot (r+1)] &= m \cdot [n \cdot r + n] \\ &= m \cdot (n \cdot r) + m \cdot n \\ &= (m \cdot n) \cdot r + m \cdot n \\ &= (m \cdot n) \cdot (r+1). \end{aligned}$$

Portanto, para todos $m, n, r \in \mathbb{N}$ vale que $m \cdot (n \cdot r) = (m \cdot n) \cdot r$.

3) Propriedade Distributiva Desejamos mostrar que se $m, n, r \in \mathbb{N}$, tem-se $m \cdot (n+r) = m \cdot n + m \cdot r$. A prova será feita por indução sobre r .

- i) Para $r = 1$, tem-se que $m \cdot (n+1) = m \cdot n + m$ que é definição da multiplicação.
- ii) Suponha então que para todo $m, n, r \in \mathbb{N}$, tem-se $m \cdot (n+r) = m \cdot n + m \cdot r$. Mostremos que $m \cdot [n + (r+1)] = m \cdot n + m \cdot (r+1)$.

Utilizando a associatividade da adição, a definição de multiplicação e a hipótese de indução, tem-se que

$$\begin{aligned} m \cdot [n + (r+1)] &= m \cdot [(n+r) + 1] \\ &= m \cdot (n+r) + m \\ &= m \cdot n + m \cdot r + m \\ &= m \cdot n + (m \cdot r + m). \end{aligned}$$

Como $m \cdot r + m = m \cdot (r+1)$, então $m \cdot [n + (r+1)] = m \cdot n + m \cdot (r+1)$. ■

Na propriedade comutativa da multiplicação, mostramos que $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Então dizemos que o número 1 é o elemento neutro da multiplicação.

2.3 RELAÇÃO DE ORDEM EM \mathbb{N}

O conjunto \mathbb{N} é ordenado, pois nele podemos definir uma relação de ordem compatível com as operações de adição e multiplicação, compatibilidade que ficará claro a seguir.

Definição 1 *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Dizemos que m é menor do que n e denotamos $m < n$, se existe um número natural p tal que $n = m + p$.*

Vejamos as propriedades desta relação.

Teorema 3 *Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$.*

1. *Tricotomia: $m = n$, $m < n$ ou $n < m$ e uma, e somente uma, das três relações ocorre.*
2. *Transitividade: se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$.*
3. *Monotonicidade da adição: se $m < n$, então $m + p < n + p$.*
4. *Monotonicidade da multiplicação: se $m < n$, então $m \cdot p < n \cdot p$.*
5. *Lei do corte: se $m + p < n + p$ ou $m \cdot p < n \cdot p$, então $m < n$.*

Demonstração Sejam $m, n, p, r \in \mathbb{N}$.

1) Tricotomia Observe que, não podemos ter ao mesmo tempo $m = n$ e $m < n$, pois se ocorresse $m = n$ e $m < n$, pois pela definição da desigualdade teríamos $m = n$ e $m \neq n$, o que não pode ocorrer. Suponha, por absurdo, que ocorram $m < n$ e $n < m$ ao mesmo tempo. Sendo assim, existem $r, s \in \mathbb{N}$ tais que $m = n + r$ e $n = m + s$. Segue então que

$$\begin{aligned} m &= n + r \\ &= (m + s) + r \\ &= m + (s + r). \end{aligned}$$

Como $r + s \in \mathbb{N}$, então $m < m$, uma contradição.

2) Transitividade Se $m < n$ e $n < p$, mostremos que $m < p$. Sendo assim, por definição existem $r, s \in \mathbb{N}$ tais que $m = n + r$ e $p = n + s$. Segue então que

$$\begin{aligned} p &= n + s \\ &= (m + r) + s \\ &= m + (r + s). \end{aligned}$$

Assim $p = m + k$, onde $k = (r + s) \in \mathbb{N}$. Logo $m < p$.

3) Monotonicidade da adição Queremos mostrar que se $m < n$, então $m + p < n + p$.

Se $m < n$, então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + r$. Daí segue-se que

$$\begin{aligned} n + p &= (m + r) + p \\ &= (m + p) + r. \end{aligned}$$

Por definição, $m + p < n + p$.

4) Monotonicidade da Multiplicação Mostremos que se $m < n$, então $m \cdot p < n \cdot p$.

Se $m < n$, então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + r$. Daí segue-se que

$$\begin{aligned} n \cdot p &= (m + r) \cdot p \\ &= m \cdot p + r \cdot p. \end{aligned}$$

Portanto, por definição, $m \cdot p < n \cdot p$.

5) Lei do Corte Queremos mostrar que se $m + p < n + p$ ou $m \cdot p < n \cdot p$, então $m < n$.

Pela Tricotomia, ocorre uma, e somente uma, das três possibilidades: $m = n$; $n < m$; $m < n$. Pela monotonicidade da adição e da multiplicação não podemos ter $m = n$ ou $n < m$, então só resta $m < n$. ■

Teorema 4 Para todo $n \in \mathbb{N}$, não existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n < p < n + 1$.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista $p \in \mathbb{N}$ tal que $n < p < n + 1$. Como $n < p$, então existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $p = m + n$. Assim $n + m < n + 1$. Se $m = 1$, então $n + 1 < n + 1$. Absurdo. Logo $m \neq 1$. Como 1 é o único número que não é sucessor de nenhum outro número e $m \neq 1$, então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $m = s(r) = r + 1$. Substituindo $m = r + 1$ na desigualdade $n + m < n + 1$ obtemos,

$$(n + r) + 1 < n + 1.$$

Logo $(n + 1) + r < n + 1$. Como $r \in \mathbb{N}$ o que acarreta $n + 1 > n + 1$. Absurdo! ■

Usamos também a notação $n > m$ para indicar que n é maior do que m .

A relação $m < n$ não é uma ordem total em \mathbb{N} pois não possui a propriedade reflexiva. Para construir uma ordem total iremos trabalhar com o conjunto $\mathbb{N}^0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Neste conjunto, definiremos uma ordem total e depois restringiremos esta ordem aos números naturais.

Inicialmente estendemos a função sucessor, $s : \mathbb{N}^0 \rightarrow \mathbb{N}^0$ definindo $s(0) = 1$ e axiomatizando que 0 não é sucessor de qualquer outro. Neste conjunto consideramos as mesmas operações de soma e multiplicação quando operamos com números naturais e definimos

$$0 + m = m \quad \text{e} \quad 0 \cdot m = 0,$$

para todo $m \in \mathbb{N}^0$. Feito isto, todos os resultados e definições mostrados anteriormente têm enunciados análogos.

Definição 2 Sejam $m, n \in \mathbb{N}^0$. Dizemos que m é menor do que ou igual a n e denotamos $m \leq n$, se $m = n$ ou $m < n$.

Teorema 5 Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}^0$. A relação $m \leq n$ goza das seguintes propriedades.

1. *Dicotomia:* $m \leq n$ ou $n \leq m$.
2. *Reflexiva:* $m \leq m$.
3. *Antissimétrica:* Se $m \leq n$ e $n \leq m$, então $m = n$.
4. *Transitividade:* Se $m \leq n$ e $n \leq p$, então $m \leq p$.
5. *Monotonicidade da adição:* Se $m \leq n$, então $m + p \leq n + p$.
6. *Monotonicidade da multiplicação:* Se $m \leq n$, então $m \cdot p \leq n \cdot p$.

Demonstração Demonstraremos os itens 4, 5 e 6 e deixaremos aos cuidados do leitor as demonstrações dos outros itens. Sejam $m, n, p, r \in \mathbb{N}^0$.

4) Transitividade Se $m \leq n$ e $n \leq p$, então existe $r_1, r_2 \in \mathbb{N}^0$ tais que $n = m + r_1$ e $p = n + r_2$. Logo usando a associatividade da adição, tem-se

$$\begin{aligned} p &= n + r_2 \\ &= (m + r_1) + r_2 \\ &= m + (r_1 + r_2). \end{aligned}$$

Logo, por definição, $m \leq p$.

5) Monotonicidade de adição Queremos mostrar que se $m \leq n$, então $m + p \leq n + p$.

Seja $r \in \mathbb{N}^0$ tal que $n = m + r$. Somando p a ambos os lados da igualdade, pelas comutatividade e associatividade da adição, tem-se

$$\begin{aligned} n + p &= p + n \\ &= p + (m + r) \\ &= (p + m) + r \\ &= (m + p) + r. \end{aligned}$$

Portanto: $m + p \leq n + p$.

6) Monotonicidade de multiplicação Se $m \leq n$, então existe $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tais que $n = m + r$. Multiplicando ambos os lados da igualdade por p , pelas comutativa e distributiva da multiplicação, tem-se

$$\begin{aligned} n \cdot p &= p \cdot n \\ &= p(m + r) \\ &= p \cdot m + p \cdot r \\ &= m \cdot p + p \cdot r. \end{aligned}$$

Assim, $m \cdot p \leq n \cdot p$, pois $p \cdot r \in \mathbb{N}$. ■

A relação $m \leq n$ é chamada de ordem total em \mathbb{N}^0 . Logo o conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^0$ com a relação de ordem induzida fica totalmente ordenado. Usamos também a notação $n \geq m$ para indicar que $n > m$ ou que $m = n$.

2.4 O PRINCÍPIO DA BOA ORDENAÇÃO

Antes de enunciarmos o Princípio da Boa Ordenação (PBO), vejamos a definição de menor elemento.

Definição 3 *Seja A um subconjunto de \mathbb{N} . Um elemento $p \in A$ é chamado elemento mínimo ou menor elemento de A quando $p \leq a$, para todo $a \in A$.*

O conjunto \mathbb{N} possui um menor elemento que é o número 1 pois para todo número natural n , tem-se que $n \geq 1$. O próximo teorema é enunciado e demonstrado por [19] da seguinte maneira:

Teorema 6 (Princípio da Boa Ordenação) *Todo conjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um elemento mínimo.*

Demonstração Seja A um subconjunto não vazio de \mathbb{N} . Sem perda de generalidade, suponha que $1 \notin A$, pois 1 é o menor número natural e se $1 \in A$ seria o elemento mínimo desse conjunto. Consideremos o conjunto $X \subset \mathbb{N}$ constituído pelos números naturais n tais que $I_n \subset \mathbb{N} - A$. Temos $1 \in X$ pois $1 \notin A$. Por outro lado, $X \neq \mathbb{N}$ porque A não é vazio: se $p \in A$, então $p \notin X$. Pelo axioma da Indução, concluímos que existe algum $n \in X$ tal que $n + 1 \notin X$. Isto significa que todos os elementos de A são maiores do que n porém nem todos são maiores do que $n + 1$. Portanto existe $p \in A$ tal que $p \leq n + 1$. Deve ser $p = n + 1$, pois se fosse $p < n + 1$ teríamos $n < p < n + 1$, um absurdo, ver Teorema 4, p. 21. Assim, o número natural $p = n + 1$ pertence a A . Mais ainda, p é o menor elemento de A . De fato, se existisse $q \in A$ com $q < p$, teríamos outra vez o absurdo $n < q < n + 1$. ■

A notação (I_n) , na citação acima, é usada para indicar o conjunto dos números naturais p tais que $1 \leq p \leq n$, com $n \in \mathbb{N}$.

Apresentaremos a seguir outra propriedade fundamental para nosso estudo.

Lema 7 Propriedade Arquimediana. *Para todo $a, b \in \mathbb{N}$, existe um número natural n tal que $n \cdot a \geq b$.*

Demonstração Suponhamos, por absurdo, que a afirmação não seja verdadeira, isto é, admitamos que para todo número natural n , tenhamos $n \cdot a < b$, ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $b = t + n \cdot a$. Segue-se daí que o conjunto X é não vazio, onde

$$X = \{t \in \mathbb{N}; \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } b = t + n \cdot a\}.$$

Logo X possui um menor elemento t_0 . Assim existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b = t_0 + n_0 \cdot a$. Por outro lado $(n_0 + 1)a < b$. Logo existe $t_1 \in \mathbb{N}$ tal que $b = t_1 + (n_0 + 1) \cdot a$. Assim $t_1 \in X$ e

$$t_0 + n_0 \cdot a = b = t_1 + (n_0 + 1) \cdot a,$$

ou seja, $t_0 = t_1 + a$ com $t_1 \in X \subset \mathbb{N}$. Logo $t_0 > t_1$. Contradição, pois t_0 é o menor elemento de X . ■

2.5 PRINCÍPIO DA INDUÇÃO GENERALIZADO

Na seção anterior apresentamos o princípio da Boa Ordenação como consequência do Princípio da Indução. Nesta seção mostraremos que, do Princípio da Boa Ordenação, podemos obter como consequência, as duas formas do Princípio da Indução que é um dos mais fortes métodos para estabelecer resultados matemáticos.

O princípio da indução é frequentemente associado ao efeito dominó. Se você tem uma longa fila de dominós em pé e você puder assegurar que (1) o primeiro dominó cairá; e (2) sempre que um dominó cair, seu próximo vizinho também cairá. Então você pode concluir que todos os dominós cairão, [10].

Figura 1: Princípio da Indução e dominó



Fonte: producao.virtual.ufpb.br [10]

O teorema a seguir, também conhecido como Princípio da Indução Finita, é uma generalização do axioma 4 de Peano. Para sua demonstração, que pode ser encontrada em [27], utilizaremos a técnica de demonstração por redução a um absurdo.

Teorema 8 (Princípio da Indução Finita em sua 1ª Forma) *Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $P(n)$ uma sentença aberta em n . Suponha que $P(n)$ satisfaça as seguintes condições:*

- i) $P(n_0)$ é verdadeira;*
- ii) para todo $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ é verdadeira.*

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq n_0$.

Demonstração. Considere o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N}; n \geq n_0 \text{ e } P(n) \text{ é falsa}\}$. Devemos mostrar que $X = \emptyset$.

Suponhamos por absurdo que $X \neq \emptyset$. Sendo assim pelo Princípio da Boa Ordenação, existe um elemento mínimo m_0 de X . Como $m_0 \in X$, então $m_0 \geq n_0$ e $P(m_0)$ é falsa, logo, $m_0 \neq n_0$, pois por hipótese, $P(n_0)$ é verdadeira. Assim $m_0 > n_0 \geq 1$, então m_0 é o sucessor de um número natural a , isto é, $m_0 = a + 1 > a$. Como $a \notin X$ pois m_0 é o menor elemento de X , então $P(a)$ é verdadeira, de modo que, pela condição *ii*), $P(a + 1) = P(m_0)$ também é verdadeira. Assim, $m_0 \notin X$, o que é uma contradição pois assumimos inicialmente que $X \neq \emptyset$. Portanto, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$. ■

Se tomarmos $n_0 = 1$ no teorema acima, obtemos o Princípio da Indução apresentado na seção anterior.

Exemplo 1 Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ tem-se $1 + n \leq 2^n$.

Solução Considere a sentença $P(n) : 1 + n \leq 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}^0$.

- i) Para $n = 0$, temos que $1 + 0 = 1 \leq 2^0$.
- ii) Suponhamos que $P(n)$ seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}^0$. Devemos mostrar a validade de $P(n + 1) : 1 + (n + 1) \leq 2^{n+1}$.

Antes de tudo, observemos que $1 \leq 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois 1 é o elemento mínimo de \mathbb{N} e $1 = 2^0$, por definição. Daí segue que

$$1 + (n + 1) \leq 1 + 2^n \leq 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Logo, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. ◇

O próximo teorema é conhecido como Princípio da Indução Completa. Sua demonstração pode ser encontrada em [27], como abaixo.

Teorema 9 (Princípio da Indução Finita em sua 2ª Forma) *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $P(n)$ uma sentença aberta em n . Se $P(n)$ satisfaça as seguintes condições:*

- i) $P(m)$ é verdadeira;*
- ii) se $P(k)$ é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$ com $m \leq k \leq n$ implica $P(n + 1)$ é verdadeira.*

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq m$.

Demonstração Defina $A = \{n \in \mathbb{N} : n > m \text{ e } P(n) \text{ é falsa}\}$. Devemos provar que $A = \emptyset$. Suponhamos, por absurdo, que $A \neq \emptyset$. Como A é não vazio, segue pelo Princípio da Boa Ordenação que A possui um elemento mínimo s .

Como $s \in A$, então $s > m$, $P(s)$ é falsa e $s > m > 1$. Logo existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $s = r + 1$ e $r \geq m$ pois s é o sucessor de r . Sendo s o elemento mínimo de A , então $r \notin A$. Como $P(k)$ é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$ com $m \leq k \leq r < s$, segue que $P(r)$ é verdadeira e por *ii*), $P(s)$ é verdadeira, uma contradição. Portanto, $A = \emptyset$. Concluindo assim que, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq m$. ■

Uma consequência do teorema acima é o Teorema Fundamental da Aritmética, que é um dos mais importantes teoremas da teoria dos números. Daremos abaixo a definição de número primo.

Definição 4 Dizemos que um número natural $n > 1$ é primo se possui apenas dois divisores positivos, o número 1 e ele mesmo.

Se um número natural $n > 1$ não é primo, então ele é composto. Assim um número composto possui pelo menos dois divisores maiores do que 1. Enunciaremos abaixo um resultado sobre números primos, cuja demonstração pode ser encontrada em [7].

Teorema 10 Sejam p, p_1, p_2, \dots, p_n números primos. Se p divide o produto $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$, então $p = p_i$ para algum $i = 1, 2, \dots, n$.

A prova do Teorema Fundamental da Aritmética a seguir pode ser encontrada em [7], como segue.

Teorema 11 (Teorema Fundamental da Aritmética) Todo número natural $n > 1$ ou é primo ou pode ser decomposto de modo único, a menos da ordem dos fatores, em um produto de fatores primos.

Demonstração A demonstração será por indução.

- i) Para $n = 2$, a decomposição é trivial, pois 2 é primo.
- ii) Suponha que $P(k)$ é verdadeira para algum $k \in \mathbb{N}$ e $2 \leq k \leq n$. Devemos mostrar que $n + 1$ pode ser decomposto em fatores primos. Se $n + 1$ é um número primo, então o teorema está provado. Suponha que $n + 1$ não é primo. Sendo assim, existem $p, q \in \mathbb{N}$ tal que $n + 1 = p \cdot q$ com $2 < p, q < n$. Da hipótese de indução p e q podem ser decompostos num produto de números primos e como $n + 1 = p \cdot q$, então $n + 1$ pode ser decomposto num produto de fatores primos.

Mostremos que, a menos da ordem dos fatores, a decomposição é única. Suponha que existam primos p_1, p_2, \dots, p_r e q_1, q_2, \dots, q_s tais que

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_r = n = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s.$$

Logo, p_1 que divide o produto $q_1 \cdot q_2 \cdots q_s$. Como os q_1, q_2, \dots, q_s são primos, então, pelo teorema anterior, existe i , tal que $p_1 = q_i$. Reordenando os números q_1, q_2, \dots, q_s , podemos supor que $p_1 = q_1$. Resta então que

$$p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s < n.$$

Pela hipótese de indução todo número natural k com $2 \leq k < n$ pode ser escrito de maneira única como um produto de fatores primos. Logo $r = s$ e, reordenando os números q_2, \dots, q_s , obtemos $p_2 = q_2, \dots, p_r = q_r$. ■

Outra aplicação do Princípio da Indução Matemática é a definição por Recorrência. Sobre isto [7] assim descreve.

Para definir uma expressão E_n , para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq a$, basta definirmos E_a e mostrar como obter E_{n+1} a partir de E_n , para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq a$. Para isto, consideremos a sentença aberta

$$P(n) : E_n \text{ está definido}$$

e provemos, por indução matemática, que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq a$.

Temos, por construção dos E_n , que $P(a)$ é verdadeira e que, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq a$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é também verdadeira. Logo, pelo Princípio da Indução Matemática, temos $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq a$. Assim dizemos que E_n foi definido por recorrência.

Exemplo 2 Determine $f(1)$, $f(2)$ e $f(3)$ se $f(n)$ está definida recursivamente por

$$\begin{cases} f(0) & = 0 \\ f(n+1) & = 3^{f(n)+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Solução Para $n = 0$, temos $f(0+1) = f(1) = 3^{f(0)+1} = 3^{0+1} = 3$.

Para $n = 1$, temos $f(1+1) = f(2) = 3^{f(1)+1} = 3^{3+1} = 3^4$.

Para $n = 2$, temos $f(2+1) = f(3) = 3^{f(2)+1} = 3^{81+1} = 3^{82}$. ◇

3 APLICAÇÕES

O Princípio da Indução ou Princípio da Indução Matemática é uma ferramenta que possibilita muitas demonstrações de resultados que envolvem números naturais. Neste capítulo faremos uso desta técnica para provar alguns resultados úteis ao Ensino Básico e ao Ensino Superior. Para isto, consideramos que o leitor tenha conhecimentos básicos sobre os conjuntos dos números reais. As aplicações que se seguem podem ser encontradas em [3], \dots , [29].

3.1 DEMONSTRANDO IGUALDADES

Uma das aplicações mais simples do método de Indução é provar que a expressão, para um somatório ou um produtório está correta, pois geralmente a passagem de $P(n)$ para $P(n + 1)$ é quase automática, bastando para isto introduzir o novo termo nos dois lados da igualdade e fazer as manipulações necessárias para verificar a validade de $P(n + 1)$, [23].

Aplicação 1 Mostremos que para todo natural n , tem-se

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Demonstração i) Verificando a validade de $P(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2}$.

ii) Suponha $P(n)$ verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar a validade de

$$P(n + 1) : 1 + 2 + 3 + \dots + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$

Da hipótese, temos

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Somando $n + 1$ nos dois membros da igualdade obtemos

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) &= \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) \\ &= \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} \\ &= \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Aplicação 2 Para cada natural $n \geq 1$ mostremos por indução a veracidade das sentenças:

$$P(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

Demonstração i) $P(1)$ é verdadeira pois $1^2 = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$.

ii) Suponhamos que $P(n)$ seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar indutivamente a validade de

$$P(n + 1) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n + 1)^2 = \frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6}.$$

Somando $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$ a cada membro da igualdade correspondente à sentença $P(n)$ temos

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n + 1)^2 &= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + n^2 + 2n + 1 \\ &= \frac{(2n^3 + 3n^2 + n)}{6} + n^2 + 2n + 1 \\ &= \frac{(2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6)}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} \\ &= \frac{(n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (2n + 3)}{6}. \end{aligned}$$

Segue do Princípio da Indução Finita que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

A aplicação que se segue é clássica na Teoria de Integração de Riemann. Trata-se do cálculo de área usando as partições de intervalo e soma de Riemann. Usaremos as definições da área de retângulos e o resultado da Aplicação 2 para estimá-las.

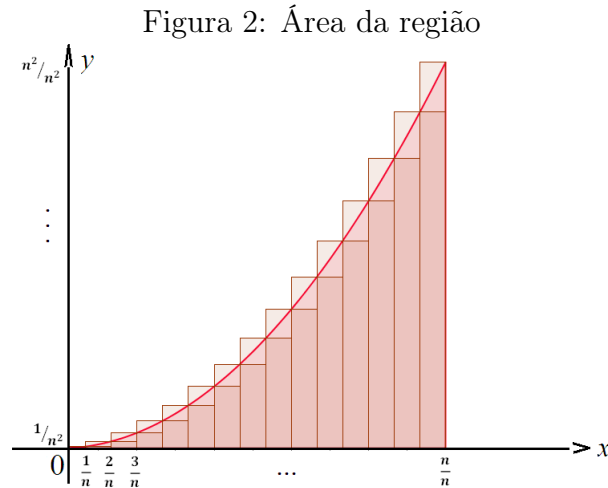
Aplicação 3 A área da região delimitada pela curva $y = x^2$, $y = 0$, o eixo OX e a reta $x = 1$ vale $\frac{1}{3}$.

Demonstração Particionemos o intervalo $[0,1]$ em subintervalos de comprimento $\frac{1}{n}$. Para

cada $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, considere o retângulo

$$R_i = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n} \text{ e } 0 \leq y \leq \left(\frac{i}{n}\right)^2 \right\}.$$

Observemos que a área do retângulo R_i vale $\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^2$.



Fonte: Construída pelo autor

Não cabe aqui definir e argumentar sobre o conceito “área de região”. Intuitivamente falando, a soma das áreas destes retângulos é maior que a área A da região descrita no enunciado. Portanto, se S_n o valor obtido pela soma das áreas dos retângulos R_i , temos

$$A < S_n = \sum_{i=1}^n \text{área}(R_i).$$

Também, intuitivamente falando, quando n é cada vez maior, percebe-se que S_n aproxima-se da área A . Examinemos o valor de S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{9}{n^2} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \frac{9}{n^3} + \dots + \frac{n^2}{n^3} \\ &= \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2). \end{aligned}$$

Pela Aplicação 2, segue que

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= \frac{1}{6n^3} (2n^3 + 3n^2 + n) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}. \end{aligned}$$

Observe que, quanto mais aumentarmos o valor de n , mais particionando o intervalo em porções cada vez menores e os números $\frac{1}{2n}$ e $\frac{1}{6n^2}$ se tornarão cada vez menores. Assim, para n suficientemente grande o valor da área da região descrita no enunciado será cada vez mais aproximado pelo valor S_n . Logo, $A = \frac{1}{3}$. ■

Aplicação 4 Verifiquemos a validade das sentenças sobre os números naturais:

$$P(n) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Demonstração i) Para $n = 1$, temos $1^3 = 1 = \left[\frac{1(1+1)}{2} \right]^2$. Portanto, ela é verdadeira.

ii) Suponhamos que $P(n)$ seja verdadeira, para algum $n \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2.$$

Somando $(n+1)^3$ a ambos os membros da igualdade descrita em $P(n)$, temos

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{[n(n+1)]^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 + 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4}{4} \\ &= \frac{n^4 + 4n^3 + 4n^2 + 2n^3 + 8n^2 + 8n + n^2 + 4n + 4}{4} \\ &= \frac{n^2(n^2 + 4n + 4) + 2n(n^2 + 4n + 4) + (n^2 + 4n + 4)}{4} \\ &= \frac{(n^2 + 4n + 4) + (n^2 + 2n + 1)}{4} \\ &= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2. \end{aligned}$$

Logo, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

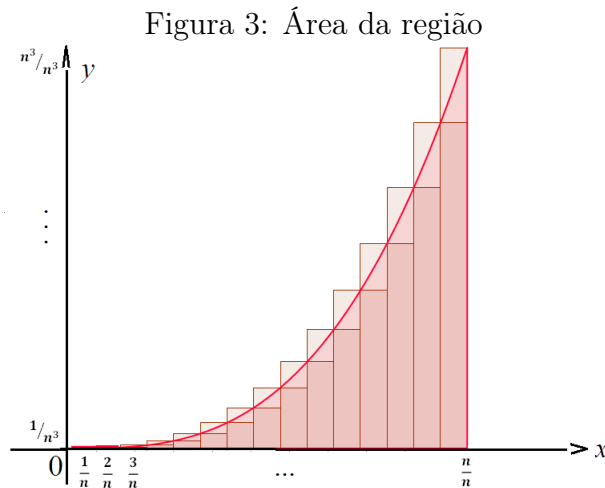
Aplicação 5 Mostre que a área da região delimitada pela curva $y = x^3$, $y = 0$, o eixo OX e a reta $x = 1$ vale $\frac{1}{4}$.

Demonstração Particionemos o intervalo $[0,1]$ em subintervalos de comprimento $\frac{1}{n}$. Para

cada $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, considere o retângulo

$$R_i = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n}, 0 \leq y \leq \left(\frac{i}{n}\right)^2 \right\}.$$

Sua área vale $\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^3$.



Fonte: Construída pelo autor

Note que a área A da região descrita no enunciado é menor que a soma S_n das áreas dos retângulos, qual seja,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n} \cdot \frac{8}{n^3} + \frac{1}{n} \cdot \frac{27}{n^3} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{n^3}{n^3} \\ &= \frac{1}{n^4} + \frac{8}{n^4} + \frac{27}{n^4} + \dots + \frac{n^3}{n^4} \\ &= \frac{1}{n^4} (1 + 8 + 27 + \dots + n^3). \end{aligned}$$

Pela Aplicação 4, tem-se

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n^4} \left(\frac{n^2 + n}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4n^4} (n^4 + 2n^3 + n^2) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}. \end{aligned}$$

Para n suficiente grande os números $\frac{1}{2n}$ e $\frac{1}{4n^2}$ se aproximarão de zero e S_n se aproximará de A . Daí segue-se que a área da região em questão será $\frac{1}{4}$. ■

Aplicação 6 Mostremos que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale as afirmações:

$$P(n) : \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Demonstração Utilizaremos o Princípio de Indução. Por simplicidade denotaremos

$$S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

i) Para $n = 1$, a sentença é verdadeira pois

$$\frac{1}{1.2.3} = \frac{1.(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{1.4}{4.2.3} = \frac{1}{6}.$$

ii) Suponha $P(n)$ verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar que

$$S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}.$$

Como hipótese indutiva temos:

$$S_n = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Somando nos dois membros desta igualdade o termo

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

obtemos

$$\begin{aligned} S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} &= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n(n+3).(n+3) + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n^3 + 6n^2 + 9n + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{(n^3 + n^2) + (n^2 + n) + 4n^2 + 8n + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n^2(n+1) + n(n+1) + (n^2 + 2n + 1)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{(n+1)(n^2 + 5n + 4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{(n+1)(n+1)(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

Ou seja

$$S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}.$$

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Aplicação 7 Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $\text{sen}(x) \neq 0$. Mostremos indutivamente que para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$P(n) : \cos(x) \cos(2x) \cos(2^2x) \cdots \cos(2^{n-1}x) = \frac{\text{sen}(2^n x)}{2^n \text{sen}(x)}.$$

Demonstração i) $P(1)$ é verdadeira pois

$$\begin{aligned} \cos(2^{1-1}x) &= \cos(x) \\ &= \cos(x) \cdot \frac{2\text{sen}(x)}{2\text{sen}(x)} \\ &= \frac{2\text{sen}(x) \cos(x)}{2\text{sen}(x)} \\ &= \frac{\text{sen}(2x)}{2\text{sen}(x)}. \end{aligned}$$

ii) Suponha que $P(n)$ é válida para algum n . Devemos mostrar que

$$\cos(x) \cos(2x) \cos(2^2x) \cdots \cos(2^n x) = \frac{\text{sen}(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\text{sen}(x)}.$$

Multiplicando por $\cos(2^n x)$ os dois membros da identidade trigonométrica descrita na sentença $P(n)$, obtemos

$$\begin{aligned} \cos(x) \cos(2x) \cos(2^2x) \cdots \cos(2^{n-1}x) \cos(2^n x) &= \frac{\text{sen}(2^n x)}{2^n \cdot \text{sen}(x)} \cos(2^n x) \\ &= \frac{\text{sen}(2^n x) \cos(2^n x)}{2^n \text{sen}(x)} \\ &= \frac{2 \cdot \text{sen}(2^n x) \cos(2^n x)}{2 \cdot 2^n \text{sen}(x)} \\ &= \frac{\text{sen}(2 \cdot 2^n x)}{2 \cdot 2^n \text{sen}(x)} \\ &= \frac{\text{sen}(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\text{sen}(x)}. \end{aligned}$$

Logo, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Aplicação 8 Seja $x \in \mathbb{R}$ com $x \neq \frac{k\pi}{2}$ e $k \in \mathbb{Z}$. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

verifica-se a afirmação

$$P(n) : \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} + \frac{1}{\operatorname{sen}(2x)} + \frac{1}{\operatorname{sen}(2^2x)} + \cdots + \frac{1}{\operatorname{sen}(2^n x)} = \cot\left(\frac{x}{2}\right) - \cot(2^n x).$$

Demonstração i) Para verificar $P(0)$, mostremos que $\cotg\left(\frac{x}{2}\right) - \cotg(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}x}$. Para isto, é suficiente verificar que ao multiplicarmos esta identidade por $\operatorname{sen}(x)$ obtemos 1. Lembrando-se das identidades $\operatorname{sen}(x) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ e $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ seguem as igualdades.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x) \left(\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \right) &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \right) \\ &= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x) \\ &= 1. \end{aligned}$$

ii) Suponha que $P(n)$ seja válida para algum n . Para simplificar a escrita denotemos o membro direito da sentença $P(n)$ por S_n , ou seja,

$$S_n = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} + \frac{1}{\operatorname{sen}(2x)} + \frac{1}{\operatorname{sen}(2^2x)} + \cdots + \frac{1}{\operatorname{sen}(2^n x)}.$$

Devemos mostrar que

$$S_n + \frac{1}{\operatorname{sen}(2^{n+1}x)} = \cot\left(\frac{x}{2}\right) - \cot(2^{n+1}x).$$

Vejamos.

$$\begin{aligned} S_n + \frac{1}{\operatorname{sen}(2^{n+1}x)} &= \cot\left(\frac{x}{2}\right) - \cot(2^n x) + \frac{1}{\operatorname{sen}(2^{n+1}x)} \\ &= \cotg\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\cos(2^n x)}{\operatorname{sen}(2^n x)} + \frac{1}{2 \cdot \operatorname{sen}(2^n x) \cdot \cos(2^n x)} \\ &= \cotg\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2\cos^2(2^n x) - 1}{2 \cdot \operatorname{sen}(2^n x) \cdot \cos(2^n x)} \\ &= \cotg\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\cos(2 \cdot 2^n x)}{\operatorname{sen}[2(2^n x)]} \\ &= \cotg\left(\frac{x}{2}\right) - \cotg(2^{n+1}x). \end{aligned}$$

Logo, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

3.2 DEMONSTRANDO DESIGUALDADES

Demonstrar por indução desigualdades associadas a um somatório ou a um produtório, nem sempre a simples introdução do termo adicional a cada membro da desigualdade,

leva automaticamente a desigualdade desejada, fazendo com que demostremos uma desigualdade adicional para completar a passagem, [23].

Aplicação 9 Mostremos indutivamente que para todo número natural n , vale a desigualdade $2^n > n$.

Demonstração Considere a sentença $P(n) : 2^n > n$, onde $n \in \mathbb{N}$.

i) Como $2^1 = 2 > 1$, segue que $P(1)$ é verdadeira.

ii) Suponhamos $P(n)$ verdadeira para algum n natural. Devemos mostrar a desigualdade $2^{n+1} > n+1$. Da hipótese de indução temos $2^n > n$. Multiplicando os dois membros da desigualdade por 2, obtemos $2 \cdot 2^n = 2^{n+1} > 2n$. Observe que o membro da direita não se tornou igual ao que gostaríamos de obter, isto é, $(n+1)$. Mostremos então que $2n \geq n+1$. Note que $n \geq 1$, então $n+n \geq n+1$. Logo, pelo Princípio da Indução Finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Aplicação 10 Mostremos que para todo natural $n \geq 4$ vale a desigualdade $(n-1)^3 > 6n$.

Demonstração Considere a sentença $P(n) : (n-1)^3 > 6 \cdot n$ para todo natural $n \geq 4$.

i) Para $n = 4$, temos: $(4-1)^3 = 3^3 = 27 > 6 \cdot 4 = 24$.

ii) Suponha que $P(n)$ seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 4$. Devemos mostrar a validade de $P(n+1) : [(n+1)-1]^3 > 6(n+1)$, ou seja $n^3 > 6(n+1)$.

Por hipótese indutiva temos $(n-1)^3 > 6n$. Somando 6 nos dois membros da desigualdade temos

$$\begin{aligned} (n-1)^3 + 6 &= n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + 6 \\ &= n^3 - 3n^2 + 3n + 5 \\ &> 6n + 6. \end{aligned}$$

Resta-nos mostrar que $n^3 - 3n^2 + 3n + 5 \leq n^3$, ou seja, devemos provar que $-3n^2 + 3n + 5 \leq 0$, para todo natural $n \geq 4$. Resolvendo a inequação em \mathbb{N} , verificamos que sua solução será $S = \{n \in \mathbb{N}; n \geq 2\}$ e, portanto para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 4$, temos $-3n^2 + 3n + 5 \leq 0$ e consequentemente $n^3 - 3n^2 + 3n + 5 \leq n^3$. Daí $n^3 > 6(n+1)$. Como queríamos demonstrar. Logo, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 4$. ■

A próxima desigualdade, conhecida como desigualdade de Bernoulli, é muito útil no estudo de convergência de séries, entre outras aplicações.

Aplicação 11 (Desigualdade de Bernoulli) Para todo $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq -1$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se vale a desigualdade

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Demonstração Fixado $x \in \mathbb{R}$ com $x \geq -1$.

Considere a sentença $P(n) : (1+x)^n \geq 1+nx$ para todo natural n .

i) Para $n = 1$, temos $(1+x)^1 = 1+x \geq 1+x$. Portanto $P(1)$ é verdadeira.

ii) Suponhamos que $P(n)$ seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

Da hipótese indutiva temos $(1+x)^n \geq 1+nx$. Multiplicando ambos os lados da desigualdade por $(1+x)$, que é um número real não negativo tem-se

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1+x+nx+nx^2 \\ &\geq 1+x+nx. \end{aligned}$$

A última desigualdade é válida pois $nx^2 \geq 0$. Assim, $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$, como desejávamos. Logo, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Aplicação 12 Para todo natural $n \geq 10$, tem-se $2^n > n^3$.

Demonstração Considere a sentença para os naturais $n \geq 10$, $P(n) : 2^n > n^3$.

i) $P(10)$ é verdadeira pois $2^{10} = 1024 > 10^3 = 1000$.

ii) Suponha que $P(n)$ seja verdadeira para algum natural $n \geq 10$. Devemos mostrar $P(n+1) : 2^{n+1} > (n+1)^3$. Observe que multiplicando ambos os membros da desigualdade da sentença $P(n)$, obtemos $2^{n+1} > 2n^3$.

Resta-nos mostra que para todo natural $n \geq 10$, tem-se $2n^3 \geq (n+1)^3$. Note que

$$\begin{cases} (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ (n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1. \end{cases}$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} 2n^3 &= (n+1)^3 + (n-1)^3 - 6n \\ &= (n+1)^3 + [(n-1)^2 \cdot (n-1) - 6n]. \end{aligned}$$

Como $n \geq 10$ verifica-se que $[(n-1)^2 \cdot (n-1) - 6n] \geq 0$. Portanto $2n^3 \geq (n+1)^3$. Logo, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 10$. ■

3.3 DEMONSTRANDO FÓRMULAS

A maioria dos livros didáticos de Matemática adotados nas Escolas do Ensino Médio do Brasil não apresentam demonstrações das fórmulas por eles trazidas, limitando-se apenas a citá-las e resolver exemplo aplicando-as.

Diante disso, resolvemos, neste trabalho, apresentar uma seção onde demonstraremos algumas dessas fórmulas no ensino de conteúdos matemáticos na etapa final da Educação Básica.

Aplicação 13 O número D_n de diagonais de um polígono convexo de n lados, $n \geq 4$, é

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Demonstração Para $n \geq 4$, considere a sentença $P(n) : D_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

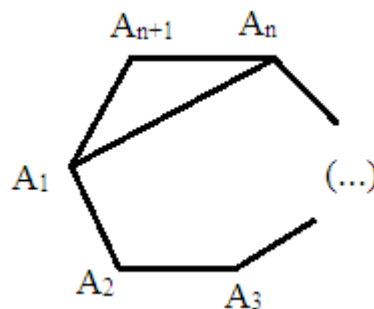
i) Para $n = 4$, temos $D_4 = \frac{4(4-3)}{2} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2$.

ii) Suponha $P(n)$ verdadeira para algum natural $n > 4$. Devemos mostrar que

$$D_{n+1} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2}.$$

Se aumentarmos um lado, aumentaremos também um vértice. Esse novo vértice se ligaria com n vértices menos os dois que estão ao seu lado. No entanto, criaria uma nova diagonal entre os pontos imediatamente vizinhos ao novo vértice.

Figura 4: Polígono convexo de $n + 1$ lados



Fonte: bit.proformat-sbm.org.br [5]

Logo deveremos somar $(n - 1)$ a fórmula, ou seja,

$$D_{n+1} = \frac{n(n-3)}{2} + n - 1.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= \frac{n(n-3)}{2} + n - 1 \\ &= \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} \\ &= \frac{n^2 - n - 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 4$. ■

Aplicação 14 A soma S_n das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $S_n = 180^\circ(n - 2)$.

Demonstração Considere a seguinte sentença para todo natural $n \geq 3$,

$$P(n) : S_n = 180^\circ(n - 2).$$

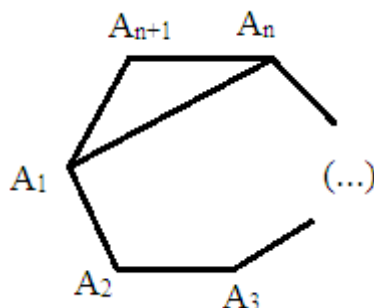
i) $P(3)$ é verdadeira, pois $S_3 = 180^\circ(3 - 2) = 180^\circ \cdot 1 = 180^\circ$ e de fato a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

ii) Suponha $P(n)$ verdadeira para algum natural $n \geq 3$. Mostraremos que

$$S_{n+1} = 180^\circ(n - 1).$$

Note que se aumentarmos, no polígono, um lado, esse polígono aumentará a soma de seus ângulos internos em 180° .

Figura 5: Polígono convexo de $n + 1$ lados



Fonte: bit.profmat-sbm.org.br [5]

Assim,

$$S_{n+1} = S_n + 180^\circ = 180^\circ(n - 2) + 180^\circ = 180^\circ(n - 1).$$

Logo, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 3$. ■

A próxima aplicação e sua demonstração encontramos em [9].

Aplicação 15 O número de diagonais internas, que não se intersectam, utilizadas para decompor um polígono Q de n lados em triângulos justapostos é $n - 3$.

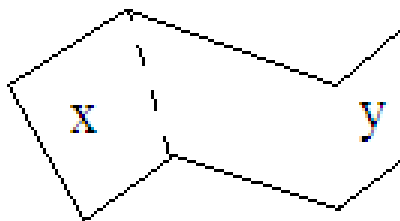
Demonstração Seja $P(n) : d = n - 3$, onde d é o número de diagonais internas utilizadas na decomposição, de um polígono Q de n lados, em triângulos justapostos. Note que este resultado somente tem sentido para $n \geq 4$.

i) Para $n = 4$, temos que qualquer quadrilátero possui duas diagonais internas que se intersectam. Daí tem-se apenas uma diagonal interna que não intersecta com outra. Além disso, ela divide o quadrilátero em dois triângulos justapostos. Portanto $P(1)$ é verdadeira.

ii) Suponha que $P(k)$ seja verdadeira para algum polígono com k lados, onde $4 \leq k \leq n$ (hipótese de indução). Devemos mostrar que um polígono com $n = (k + 1)$ lados possui $(k - 2)$ diagonais internas que não se intersectam e que dividem o polígono em triângulos justapostos.

Façamos através de diagonais internas, a decomposição do polígono Q com $(k + 1)$ lados em triângulos justapostos. Note que, fixando uma dessas diagonais, o polígono Q será decomposto em dois outros polígonos justapostos, que chamaremos de polígono X , com n_1 lados e de polígono Y com n_2 lados. Além disso, $n_1 < k + 1$ e $n_2 < k + 1$ e $n_1 + n_2 - 2 = k + 1$.

Figura 6: Decomposição do polígono Q em n lados



Fonte: happyslide.org/doc/28168/indu%C3%A7%C3%A3o-forte-professor-da-uff. [9]

Segue-se daí que, pela hipótese de indução, temos que $(n_1 - 3)$ diagonais internas decompõem polígono X em triângulos justapostos e que $(n_2 - 3)$ diagonais internas decompõem polígono Y . Note que uma diagonal foi usada para separar X e Y . Assim, o número de diagonais que decompõem o polígono Q será $(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1$, ou seja, teremos $n_1 + n_2 - 5$ diagonais. Mas como $n_1 + n_2 = k + 1 + 2$, tem-se $n_1 + n_2 - 5 = k + 1 + 2 - 5$ e, portanto, $k - 2$ diagonais. Logo, pelo Princípio da Indução (2^a forma) $P(n)$ é válida para todo n maior ou igual a 4. ■

Aplicação 16 Seja X um conjunto finito contendo n elementos. Demonstre que o número de elementos do conjunto $\mathcal{P}(X)$ é 2^n , onde $\mathcal{P}(X)$ é o conjunto das partes de X .

Demonstração Sejam $P(n)$: o número de elementos do conjunto das partes de X .

i) Se $X = \{x\}$, o conjunto das partes de X tem dois elementos, $\mathcal{P}(X) = \{\phi, \{x\}\}$. Logo $\mathcal{P}(X)$ tem 2^1 elementos, verificando que $P(1)$ é verdadeira.

ii) Suponha agora que X tem n elementos e que $\mathcal{P}(X)$ tem 2^n elementos. Devemos mostrar que se Y tem $(n + 1)$ elementos, então $\mathcal{P}(Y)$ tem 2^{n+1} elementos.

Escrevamos $Y = X \cup \{y\}$, onde $y \notin X$. Então $\mathcal{P}(Y)$ é formado pelos 2^n elementos de $\mathcal{P}(X)$ e pela união dos elementos de $\mathcal{P}(X)$ com $\{y\}$. Portanto $\mathcal{P}(Y)$ tem $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ elementos. Logo, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Antes de apresentarmos as aplicações seguintes, que versarão sobre progressão vejamos terminologias e definições.

Uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada sequência de elemento em \mathbb{R} . Como no que segue examinaremos apenas sequências de elemento em \mathbb{R} . Simplificaremos a terminologia registrando simplesmente o termo sequência. A imagem por f de um natural n é denotada por x_n e nomeado n -ésimo termo da sequência. Uma sequência será denotada por (x_1, x_2, x_3, \dots) ou mais sucintamente por (x_n) .

Definição 5 Diz-se que uma sequência (x_n) é uma progressão aritmética com razão r se $x_{n+1} = x_n + r$, para todo natural n .

Definição 6 Diz-se que uma sequência (x_n) é uma progressão geométrica com razão q se $x_{n+1} = qx_n$, para todo natural n .

Definição 7 Diz-se que uma sequência (x_n) é uma progressão aritmética-geométrica com razão aritmética r e razão geométrica q se $x_{n+1} = qx_n + r$, para todo natural n .

Aplicação 17 Se (a_n) é uma progressão aritmética de razão r , então o termo geral é dado por $a_n = a_1 + (n - 1)r$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração Examinemos a sentença $P(n) : a_n = a_1 + (n - 1)r$.

i) $P(1)$ é verdadeira, pois $a_1 = a_1 + (1 - 1)r$.

ii) Suponha $P(n)$ verdadeira para algum n . Devemos mostrar que $a_{n+1} = a_1 + nr$. Somando r nos dois membros da igualdade que define a sentença $P(n)$, obtemos

$$\begin{aligned} a_n + r &= a_{n+1} \\ &= a_1 + (n - 1)r + r \\ &= a_1 + (n - 1 + 1)r \\ &= a_1 + nr. \end{aligned}$$

Logo, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Aplicação 18 Se (a_n) é uma progressão aritmética e S_n a soma dos n primeiros termos da progressão, então

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n.$$

Demonstração Sejam $P(n) : S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$. Denotaremos por r a razão.

i) $P(1)$ é verdadeira pois

$$S_1 = \frac{a_1 + a_1}{2} = a_1.$$

ii) Suponha $P(n)$ verdadeira para algum n . Devemos mostrar a validade de $P(n+1)$, ou seja, mostrar que

$$S_{n+1} = \frac{a_1 + a_{n+1}}{2}(n+1).$$

Somando $a_{n+1} = a_1 + nr$ ao S_n , temos

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{a_1 + a_n}{2}n + a_1 + nr \\ &= \frac{na_1 + n[a_1 + (n-1)r] + 2(a_1 + nr)}{2} \\ &= \frac{na_1 + na_1 + n^2r - nr + 2a_1 + 2nr}{2} \\ &= \frac{a_1 + na_1 + na_1 + n^2r + a_1 + nr}{2} \\ &= \frac{a_1 + na_1 + n(a_1 + nr) + a_1 + nr}{2} \\ &= \frac{a_1 + na_1 + na_{n+1} + a_{n+1}}{2} \\ &= \frac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Aplicação 19 Se (a_n) é uma progressão geométrica de razão q , então o termo geral é dado por $a_n = a_1q^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração Sejam $P(n) : a_n = a_1q^{n-1}$.

i) $P(1)$ é verdadeira, pois $a_1q^{1-1} = a_1q^0 = a_1$.

ii) Suponha que $P(n)$ seja verdadeira para algum n . Devemos mostrar que $a_{n+1} = a_1q^n$. Da hipótese de indução temos $a_n = a_1q^{n-1}$. Multiplicando os dois membros desta igualdade por q , temos

$$a_{n+1} = a_nq = a_1q^{n-1}q = a_1q^n.$$

Logo, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Aplicação 20 Se (a_n) é uma progressão geométrica com razão $q \neq 1$ e S_n é a soma dos n primeiros termos da progressão. Verifiquemos indutivamente as afirmações.

$$S_n = a_1 \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}.$$

Demonstração i) $P(1)$ é verdadeira pois $S_1 = a_1 \frac{1-q^1}{1-q} = a_1$.

ii) Suponha que $P(n)$ seja verdadeira para algum n . Devemos mostrar que

$$S_{n+1} = a_1 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Somando $a_{n+1} = a_1 q^n$ aos dois membros da igualdade descrita na sentença $P(n)$ temos

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} + a_1 q^n \\ &= a_1 \frac{1 - q^n + (1 - q)q^n}{1 - q} \\ &= a_1 \frac{1 - q^n + q^n - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= a_1 \frac{(1 - q^{n+1})}{1 - q}. \end{aligned}$$

Logo, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Aplicação 21 Se (a_n) é uma progressão aritmética-geométrica com razões r e $q \neq 1$. Verifiquemos a veracidade das seguintes afirmações para $n \geq 1$.

$$P(n) : a_n = a_1 q^{n-1} + r \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}.$$

Demonstração i) $P(1)$ é verdadeira pois $a_1 = a_1 q^0 + r \frac{q^0 - 1}{q - 1}$.

ii) Suponha que $P(n)$ seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar que

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n + r \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right).$$

Escrevendo

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n q + r \\ &= q \left(a_1 q^{n-1} + r \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} \right) + r \\ &= a_1 q^n + r \frac{q^n - q}{q - 1} + r. \end{aligned}$$

Então, temos

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_1 q^n + r \left(\frac{q^n - q}{q - 1} + 1 \right) \\ &= a_1 q^n + r \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right). \end{aligned}$$

Logo, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Aplicação 22 Se (a_n) é uma progressão aritmética-geométrica com razões r e $q \neq 1$ e S_n a soma dos n primeiros termos da progressão. Verifique a veracidade das seguintes sentenças para todo número natural n .

$$P(n) : S_n = qr \frac{q^{n-1} - 1}{(1 - q)^2} - a_1 \frac{q^n - 1}{1 - q} + r \frac{n - 1}{1 - q}.$$

Demonstração i) A sentença $P(1)$ é verdadeira pois

$$S_1 = qr \frac{q^0 - 1}{(1 - q)^2} - a_1 \frac{q^1 - 1}{1 - q} + r \frac{1 - 1}{1 - q} = a_1.$$

ii) Suponha que $P(n)$ seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar a validade de $P(n + 1)$, ou seja, devemos mostrar que

$$S_{n+1} = qr \frac{q^n - 1}{(1 - q)^2} - a_1 \frac{q^{n+1} - 1}{1 - q} + r \frac{n}{1 - q}.$$

Escrevendo $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, temos

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= qr \frac{q^{n-1} - 1}{(1 - q)^2} - a_1 \frac{q^n - 1}{1 - q} + r \frac{n - 1}{1 - q} + a_1 q^n + r \frac{q^n - 1}{q - 1} \\ &= qr \frac{q^{n-1} - 1}{(1 - q)^2} + r \frac{q^n - 1}{q - 1} - a_1 \frac{q^n - 1}{1 - q} + a_1 q^n + r \frac{n - 1}{1 - q} + \left(r \frac{1}{1 - q} - r \frac{1}{1 - q} \right) \\ &= r \left(q \frac{q^{n-1} - 1}{(1 - q)^2} + \frac{q^n - 1}{q - 1} - \frac{1}{1 - q} \right) - a_1 \left(\frac{q^n - 1}{1 - q} - q^n \right) + r \left(\frac{n - 1}{1 - q} + \frac{1}{1 - q} \right) \\ &= r \frac{-q + q^{n+1}}{(1 - q)^2} - a_1 \frac{q^{n+1} - 1}{1 - q} + r \frac{n}{1 - q} \\ &= r q \frac{q^n - 1}{(1 - q)^2} - a_1 \frac{q^{n+1} - 1}{1 - q} + r \frac{n}{1 - q}. \end{aligned}$$

Logo, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

3.4 BINÔMIO DE NEWTON E APLICAÇÕES

Nesta seção, daremos ênfase ao Binômio de Newton pois quando estudado no Ensino Básico geralmente não se demonstra os resultados, limitando-se apenas a usá-los na resolução de problemas. Mas, antes de apresentarmos o Binômio de Newton veremos algumas definições e resultados que nos serão úteis.

Definição 8 *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$. Chamamos de fatorial de n o número denotado por $n!$, o definido como $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.*

Estendendo a definição do fatorial de n , para os casos em que $n = 0$ e $n = 1$, consideraremos $0! = 1$ e $1! = 1$.

Definição 9 *Sejam $n, p \in \mathbb{N}$, com $n \geq p$. Chamamos de número binomial $\binom{n}{p}$, lê-se n sobre p , o número*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Definição 10 *Os números binomiais $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ tais que $p+q = n$ são chamados números binomiais complementares.*

Proposição 1 *Dois números binomiais complementares são iguais.*

Demonstração Pela definição de binomiais complementares, temos $p+q = n$. Assim:

$$\binom{n}{p} = \binom{p+q}{p} = \frac{(p+q)!}{p!(p+q-p)!} = \frac{(p+q)!}{p!q!}; \quad (3)$$

$$\binom{n}{q} = \binom{p+q}{q} = \frac{(p+q)!}{q!(p+q-q)!} = \frac{(p+q)!}{q!p!}. \quad (4)$$

Comparando (3) e (4), verifica-se que $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$. ■

Aplicação 23 Mostremos que para todo natural $n \geq 4$, tem-se $2^n < n!$.

Demonstração Considere a sentença $P(n) : 2^n < n!$ para todo natural $n \geq 4$.

i) $P(4)$ é verdadeira pois $2^4 = 16 < 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

ii) Suponha $P(n)$ verdadeira para algum $n \geq 4$. Devemos mostrar que $2^{n+1} < (n+1)!$

Multiplicando por 2 os dois membros da desigualdade descrita na sentença $P(n)$, como $2 < (n+1)$ para todo $n \geq 4$, segue que

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2n! < (n+1)n! = (n+1)!$$

Logo, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposição 2 (Relação de Stiefel) Para todo $n, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 \leq p < n$ tem-se que,

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Demonstração Usando a definição de números binomiais temos:

$$\begin{aligned} \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)![n-(p+1)]!} \\ &= \frac{n!(p+1) + n!(n-p)}{(p+1)!(n-p)!} \\ &= \frac{n!(p+1+n-p)}{(p+1)!(n-p)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{(p+1)![n+1-(p+1)]!} \\ &= \binom{n+1}{p+1}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definição 11 Chamamos de triângulo de Pascal a seguinte disposição de números binomiais:

$$\begin{array}{l} \text{Linha } 0 \ (L_0) \longrightarrow \binom{0}{0} \\ \text{Linha } 1 \ (L_1) \longrightarrow \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ \text{Linha } 2 \ (L_2) \longrightarrow \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ \text{Linha } 3 \ (L_3) \longrightarrow \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\ \text{Linha } 4 \ (L_4) \longrightarrow \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\ \text{Linha } 5 \ (L_5) \longrightarrow \binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \\ \text{Linha } n \ (L_n) \longrightarrow \binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{3} \quad \binom{n}{4} \quad \binom{n}{5} \quad \cdots \quad \binom{n}{n}. \end{array}$$

Faremos agora algumas demonstrações por indução matemática sobre fatorial e Binômio de Newton.

Aplicação 24 (Identidade das Colunas) Mostremos por indução em $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ que

$$P(n) : \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

para todo $0 \leq p \leq n$.

Demonstração. i) Para $n = 0$, somente podemos ter $p = 0$. Daí, segue que

$$\binom{0}{0} = 1 = \binom{0+1}{0+1} = \binom{1}{1}.$$

Portanto $P(0)$ é verdadeira.

ii) Suponha $P(n)$ verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar que

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}.$$

Somando $\binom{n+1}{p}$ a ambos os membros da identidade $P(n)$, seguem as igualdades, onde a última igualdade segue da Identidade de Stiefel, p. 46.

$$\begin{aligned} \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{n}{p} + \binom{n+1}{p} &= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \\ &= \binom{n+2}{p+1}. \end{aligned}$$

Logo, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Aplicação 25 (Identidade das Diagonais) Mostremos por indução em $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ que

$$P(m) : \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+m}{m} = \binom{n+m+1}{m}.$$

para todo n com $m \leq n$.

Demonstração i) $P(0)$ é verdadeira pois

$$P(0) : \binom{n+0}{0} = 1 = \binom{n+0+1}{0}.$$

ii) Suponha que $P(m)$ é verdadeira para algum $m \in \mathbb{N}$. Devemos verificar a validade de $P(m+1)$, ou seja, devemos mostrar que

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+m+1}{m} = \binom{n+m+2}{m}.$$

Somando $\binom{n+m+1}{m+1}$ nos dois membros da igualdade descrita em $P(n)$, segue da Identidade de Stiefel, p. 46 que

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+m}{m} + \binom{n+m+1}{m+1} &= \binom{n+m+1}{m} + \binom{n+m+1}{m+1} \\ &= \binom{n+m+2}{m+1}. \end{aligned}$$

Logo, $P(m)$ é verdadeira para todo $m \in \mathbb{N}$. ■

Aplicação 26 Mostremos por indução em $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ que

$$P(n) : \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Demonstração. i) $P(0)$ e $P(1)$ são verdadeiras, pois:

$$\binom{0}{0} = 1 = 2^0; \quad \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2^1.$$

ii) Suponha $P(n)$ válida para algum $n > 0$. Devemos mostrar que

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+1}{n+1} = 2^{n+1}.$$

Somando as duas identidades

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

temos

$$\binom{n}{0} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right] + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right] + \cdots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right] + \binom{n}{n} = 2^n + 2^n.$$

Pela Relação de Stiefel, p. 46, e pelas igualdades

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} \quad \text{e} \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}.$$

chegamos a

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+1}{n+1} = 2^{n+1}.$$

Logo, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Aplicação 27 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Mostremos por indução em $n \in \mathbb{N}$ que

$$P(n) : (a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Demonstração Por simplicidade de notação escreveremos o desenvolvimento de Newton em somatório na forma

$$P(n) : (a + b)^n = \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p.$$

i) A veracidade de $P(1)$ constata-se por simples verificação.

$$(a + b)^1 = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b.$$

ii) Suponha $P(n)$ verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar a validade de

$$P(n+1) : (a + b)^{n+1} = a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n+1}{n} a b^n + b^{n+1}.$$

Note que $(a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n = a.(a + b)^n + b.(a + b)^n$. Da hipótese indutiva $P(n)$ podemos escrever

$$\begin{aligned} a(a + b)^n + b(a + b)^n &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k. \end{aligned}$$

Na parcela correspondente ao somatório para $b(a + b)^n$, a variável p do somatório foi substituída por k . Agora, pondo $k + 1 = p$, quando $k = 0$ temos $p = 1$ e quando $k = n$ temos $p = n + 1$. Sendo assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= a^{n+1} + \left[\sum_{p=1}^n \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=1}^n \binom{n}{p-1} a^{n-p+1} b^p \right] + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \left\{ \sum_{p=1}^n \left[\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \right] a^{n+1-p} b^p \right\} + b^{n+1}. \end{aligned}$$

Aplicando a relação de Stiefel, p. 46, obtemos

$$(a + b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{p=1}^n \binom{n+1}{p} a^{n+1-p} b^p + b^{n+1}.$$

Assim

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} a^{n+1-p} b^p.$$

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

3.5 OUTRAS APLICAÇÕES

Nesta seção apresentaremos outros resultados que pode-se usar a Indução Matemática como técnica de demonstração. Antes da próxima aplicação definiremos potenciação conforme [27].

Definição 12 *Dados $a \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$, definimos a potência de a com expoente m da seguinte forma:*

$$a^m = \begin{cases} a, & \text{se } m = 1 \\ a^{m-1} \cdot a, & \text{se } m \geq 1 \end{cases}$$

Claro que, para $m \geq 1$, $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ vezes}}$.

Aplicação 28 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Mostremos por indução em n que as sentenças são verdadeiras.

- a) $P(n) : a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- b) $Q(n) : (a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
- c) $R(n) : (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Demonstração a) i) Estabelecemos a veracidade da sentença $P(1)$ por simples verificação: $a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a = a^{m+1}$.

ii) Suponha que $P(n)$ seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar que

$$a^m \cdot a^{n+1} = a^{m+n+1}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^{n+1} &= a^m \cdot (a^n \cdot a) \\ &= (a^m \cdot a^n) \cdot a \\ &= a^{m+n} \cdot a \\ &= a^{m+n+1}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio da Indução Matemática, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) i) Verifiquemos a veracidade de $Q(1)$: $(a^m)^1 = a^{m \cdot 1} = a^m$.

ii) Suponha a validade de $Q(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Mostremos $(a^m)^{n+1} = a^{m \cdot (n+1)}$.
Vejam os o passo indutivo.

$$\begin{aligned} (a^m)^{n+1} &= (a^m)^n \cdot (a^m)^1 \\ &= a^{m \cdot n} \cdot a^m \\ &= a^{m \cdot n + m} \\ &= a^{m \cdot (n+1)}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio da Indução Matemática, $Q(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) i) Veracidade de $R(1)$: $(a \cdot b)^1 = a \cdot b = a^1 \cdot b^1$.

ii) Assuma a validade de $R(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Mostremos: $(a \cdot b)^{n+1} = a^{n+1} \cdot b^{n+1}$.

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^{n+1} &= (a \cdot b)^n \cdot (a \cdot b)^1 \\ &= a^n \cdot b^n \cdot a^1 \cdot b^1 \\ &= a^n \cdot a^1 \cdot b^n \cdot b^1 \\ &= a^{n+1} \cdot b^{n+1}. \end{aligned}$$

Logo pelo Princípio da Indução Matemática, $R(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Indicaremos por $a \mid b$ o fato de a dividir b , quer a e b sejam naturais quer sejam polinômios.

Aplicação 29 Seja $a \in \mathbb{N}$. Mostremos por indução que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ as seguintes sentenças são verdadeiras.

$$P(n) : x^2 - a^2 \mid x^{2n} - a^{2n}.$$

Demonstração i) Verificando $P(0)$ e $P(1)$, respectivamente.

- $x^{2 \cdot 0} - a^{2 \cdot 0} = x^0 - a^0 = 1 - 1 = 0$ que é divisível por $x^2 - a^2$.
- $x^{2 \cdot 1} - a^{2 \cdot 1} = x^2 - a^2$ que é divisível por $x^2 - a^2$.

Suponha $P(n)$ válida para algum n . Devemos mostrar que $x^2 - a^2 \mid x^{2n+2} - a^{2n+2}$.
Vejam os.

$$\begin{aligned} x^{2n+2} - a^{2n+2} &= x^{2n} \cdot x^2 - a^{2n} \cdot a^2 \\ &= x^{2n} \cdot x^2 - x^{2n} \cdot a^2 + x^{2n} \cdot a^2 - a^{2n} \cdot a^2 \\ &= x^{2n} \cdot (x^2 - a^2) + a^2 \cdot (x^{2n} - a^{2n}). \end{aligned}$$

Como $x^2 - a^2$ é divisível por $x^2 - a^2$ e pela hipótese de indução $x^{2n} - a^{2n}$ é divisível por $x^2 - a^2$, então $x^{2n}(x^2 - a^2) + a^2(x^{2n} - a^{2n})$ é divisível² por $x^2 - a^2$. Logo, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Aplicação 30 (ENQ - 2016) ³ Mostremos que, para todo número natural $n \geq 1$ vale a afirmação:

$P(n)$: o resto da divisão de $x^{2n} + x + 1$ por $x^2 - 1$ é igual a $x + 2$, [12].

Demonstração i) $P(1)$ é verdadeira, pois $x^{2 \cdot 1} + x + 1 = x^2 + x + 1 = 1 \cdot (x^2 - 1) + (x + 2)$.

ii) Suponha que $P(n)$ seja válida para algum n . Escrevamos:

$$\begin{aligned} x^{2n+2} + x + 1 &= x^2 \cdot x^{2n} + x + 1 \\ &= x^2 \cdot x^{2n} + x^2(x + 1) - x^2(x + 1) + x + 1 \\ &= x^2(x^{2n} + x + 1) - (x + 1) \cdot (x^2 - 1). \end{aligned}$$

Note que

- $x^2(x^{2n} + x + 1)$ dividido por $x^2 - 1$ deixa resto $x + 2$.

Sabemos que, por hipótese $x^{2n} + x + 1 = q(x) \cdot (x^2 - 1) + x + 2$.

Multiplicando ambos os membros por x^2 , obtemos

$$\begin{aligned} x^2(x^{2n} + x + 1) &= x^2(q(x) \cdot (x^2 - 1) + x + 2) \\ &= x^2q(x) \cdot (x^2 - 1) + x^2(x + 2). \end{aligned}$$

Assim, devemos mostrar que $x^2(x + 2)$ deixar resto $x + 2$ na divisão por $x^2 - 1$. O que faremos como segue:

$$\begin{aligned} x^2(x + 2) &= x^3 + 2x^2 \\ &= (x + 2)(x^2 - 1) + x + 2. \end{aligned}$$

- $-(x + 1) \cdot (x^2 - 1)$ dividido por $x^2 - 1$ deixa resto 0.

Portanto, $x^2(x^{2n} + x + 1) - (x + 1) \cdot (x^2 - 1)$ dividido por $x^2 - 1$ deixa resto $x + 2$. Logo, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Aplicação 31 Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostremos por indução que $a - b \mid a^n - b^n$.

²Na divisão de inteiros se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (ax + by)$.

³Exame Nacional de Qualificação, SBM/PROFMAT.

Demonstração i) $P(1)$ é verdadeira, pois $a - b \mid a^1 - b^1 = a - b$.

ii) Suponha que $P(n)$ seja válida para algum n . Devemos mostrar que $a - b \mid a^{n+1} - b^{n+1}$. Para isso, observemos:

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= a^n \cdot a - b^n \cdot b \\ &= a^n \cdot a - ab^n + a \cdot b^n - b^n \cdot b \\ &= a \cdot (a^n - b^n) + b^n \cdot (a - b). \end{aligned}$$

Como $a - b$ divide $a - b$ e, por hipótese $a - b$ divide $a^n - b^n$, segue que $a - b$ divide $a^{n+1} - b^{n+1}$. Logo, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Aplicação 32 Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Mostremos por indução em n as sentenças.

a) Se $a - b \neq 0$, para todo $n \geq 2$ vale as identidades

$$P(n) : \frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}.$$

b) Se $a + b \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ vale as identidades

$$\frac{a^{2n+1} + b^{2n+1}}{a + b} = a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}.$$

c) Se $a + b \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ vale as identidades

$$\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a + b} = a^{2n-1} - a^{2n-2}b + \dots + ab^{2n-2} - b^{2n-1}.$$

Demonstração a) i) Verifiquemos a veracidade de $P(2)$.

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a - b)(a + b)}{a - b} = a + b.$$

ii) Suponha $P(n)$ verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$. Mostraremos que

$$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n.$$

Vejam os.

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= a^n a - b^n a + b^n a - b \cdot b^n \\ &= a(a^n - b^n) + b^n(a - b) \\ &= a[(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})] + b^n(a - b) \\ &= (a - b)[a(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})] + b^n. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} &= a(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) + b^n \\ &= a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n.\end{aligned}$$

Logo, $P(n)$ é válida para todo número natural $n \geq 2$.

b) i) Verifiquemos a veracidade de $P(1)$.

$$\begin{aligned}\frac{a^3 + b^3}{a + b} &= \frac{(a + b)^3 - 3ab(a + b)}{a + b} \\ &= (a + b)^2 - 3ab \\ &= a^2 - ab + b^2.\end{aligned}$$

ii) Suponha que $P(n)$ é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar que

$$\frac{a^{2n+3} + b^{2n+3}}{a + b} = a^{2n+2} - a^{2n+1}b + \dots - ab^{2n+1} + b^{2n+2}.$$

Inicialmente observemos as igualdades.

$$\begin{aligned}a^{2n+3} + b^{2n+3} &= a^2a^{2n+1} + (b^2a^{2n+1} - b^2a^{2n+1}) + b^2b^{2n+1} \\ &= a^{2n+1}(a^2 - b^2) + b^2(a^{2n+1} + b^{2n+1}) \\ &= a^{2n+1}(a - b)(a + b) + b^2(a^{2n+1} + b^{2n+1}).\end{aligned}$$

Sendo assim, pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}\frac{a^{2n+3} + b^{2n+3}}{a + b} &= a^{2n+1}(a - b) + b^2(a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}) \\ &= a^{2n+2} - a^{2n+1}b + a^{2n}b^2 - a^{2n-1}b^3 + \dots - ab^{2n+1} + b^{2n+2}.\end{aligned}$$

Logo, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) i) Verificando a veracidade de $P(1)$.

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = \frac{(a - b)(a + b)}{a + b} = a - b.$$

ii) Suponha $P(n)$ verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar que

$$\frac{a^{2n+2} - b^{2n+2}}{a + b} = a^{2n+1} - a^{2n}b + \dots + ab^{2n} - b^{2n+1}.$$

Observemos as igualdades.

$$\begin{aligned}a^{2n+2} - b^{2n+2} &= a^2 a^{2n} - b^{2n} a^2 + b^{2n} a^2 - b^2 b^{2n} \\ &= a^2 [(a+b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + \dots + ab^{2n-2} - b^{2n-1}) + b^{2n}(a-b)(a+b)] \\ &= (a+b)[a^2(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + \dots + ab^{2n-2} - b^{2n-1}) + b^{2n}(a-b)]\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\frac{a^{2n+2} - b^{2n+2}}{a+b} &= a^{2n+1} - a^{2n}b + \dots + a^3b^{2n-2} - a^2b^{2n-1} + b^{2n}(a-b) \\ &= a^{2n+1} - a^{2n}b + \dots + a^3b^{2n-2} - a^2b^{2n-1} + ab^{2n} - b^{2n+1}.\end{aligned}$$

Logo, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

4 APLICAÇÕES LÚDICAS

Esta seção tem por objetivo apresentar uma proposta de atividades a serem realizadas em sala de aula.

Aplicação 33 (O problema da moeda falsa) Tem-se 3^n moedas, sendo uma delas falsa, com peso menor do que as demais. Dispondo de uma balança de dois pratos, mas sem nenhum peso, mostre, por indução sobre n , que é possível achar a moeda falsa com n pesagens. Esta aplicação foi retirada de [7].

Demonstração Seja $P(n)$ a sentença: é possível achar a moeda falsa com n pesagens.

Para $n = 1$, temos 3 moedas. Basta colocar duas delas nos pratos da balança. Se houver equilíbrio a moeda falsa é a que ficou fora da pesagem. Se houver desequilíbrio, a moeda falsa é a que ficou no prato mais elevado (base de indução).

Suponha agora que o resultado seja válido para algum valor de n (hipótese de indução) e que se tenha que achar a moeda falsa dentre as 3^{n+1} moedas dadas.

Separemos as 3^{n+1} moedas em três grupos de 3^n moedas cada um. Coloca-se um grupo de 3^n moedas em cada prato da balança. Se a balança se mantiver em equilíbrio o grupo de 3^n moedas que ficou de fora da pesagem é o grupo que contém a moeda falsa. Se a balança ficou em desequilíbrio, a moeda estará no prato mais elevado.

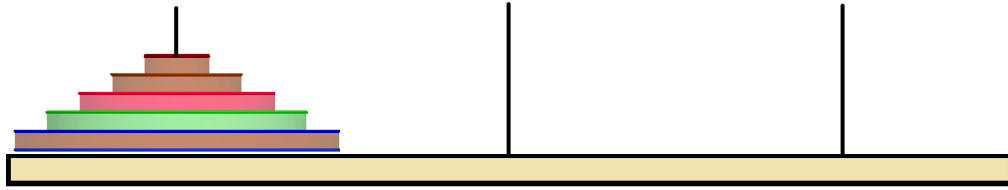
Descoberto em qual grupo está a moeda falsa, pela hipótese de indução, descobre-se a moeda falsa com n pesagens, que junto com a pesagem já efetuada, perfazem $n + 1$ pesagens no total. Como queríamos demonstrar. Logo pelo Princípio da Indução Finita, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

A próxima aplicação encontra-se em [7] e [23].

Aplicação 34 (Torre de Hanói) A Torre de Hanói é um jogo composto de uma base que sustenta três hastes que são usadas para enviar n discos de diâmetros distintos com um furo no seu centro. Numa das hastes são colocados os discos de forma que nenhum disco esteja sobre outro de diâmetro menor.

O jogo se dá de forma a transferir todos os discos para outra haste, deslocando um disco de cada vez, sempre obedecendo à regra de que nenhum disco esteja acima de outro de menor diâmetro.

Figura 7: (Torre de Hanói)



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Torre_de_Han%C3%B3i [29]

Mostre que é possível encontrar solução para qualquer natural n e determine o número mínimo de movimentos para passar n discos de uma haste para outra.

Demonstração. Seja $P(n)$ a sentença: o jogo com n disco tem solução.

- i) Para $n = 1$ é trivial.
- ii) Suponha a sentença $P(n)$ verdadeira para todo n . Devemos mostrar a validade de $P(n + 1)$.

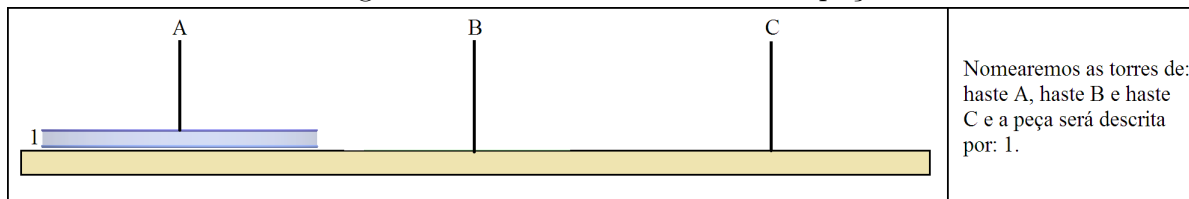
Tomemos $(n + 1)$ discos em uma das hastes de forma que nenhum disco esteja sobre um outro de raio menor. Por hipótese de indução para n discos. Então tomando os n discos superiores podemos transferi-los para uma das hastes livres. Para isso faremos j_n jogadas. Até aqui o último disco não foi movimentado pois é o de maior diâmetro e ainda temos uma haste vazia. Remove-se o disco de maior raio para a haste vazia. assim, até agora realizamos $j_n + 1$ jogadas. Como temos uma haste que possui n discos, mais uma vez a hipótese de indução assegura que o problema tem solução. Repetindo o processo para transferir os n discos para a haste que contém o disco de maior raio realizaremos j_n jogadas novamente. Assim para transferir os $(n + 1)$ discos de uma haste para outra, obedecendo as regras do jogo, temos que

$$j_{n+1} = 2j_n + 1.$$

Para uma melhor Compreensão observe as figuras abaixo

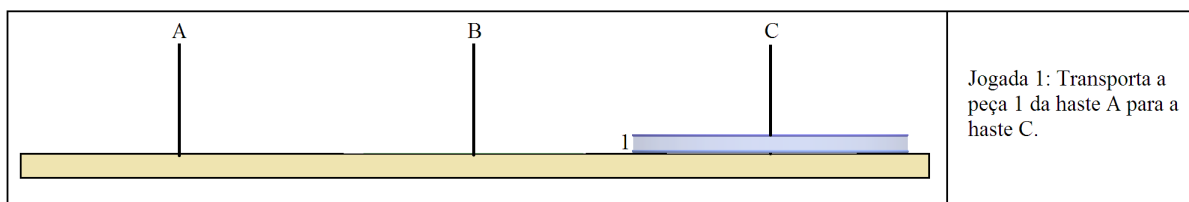
- Quando $n = 1$, obtemos o resultado em 1 movimento(obviamente). Observe as figuras 5 e 6 abaixo:

Figura 8: Torre de Hanói com uma peça



Fonte: Construída pelo autor

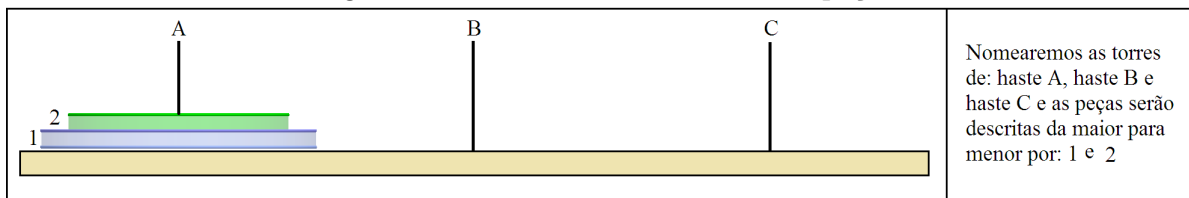
Figura 9: Movimentação da peça



Fonte: Construída pelo autor

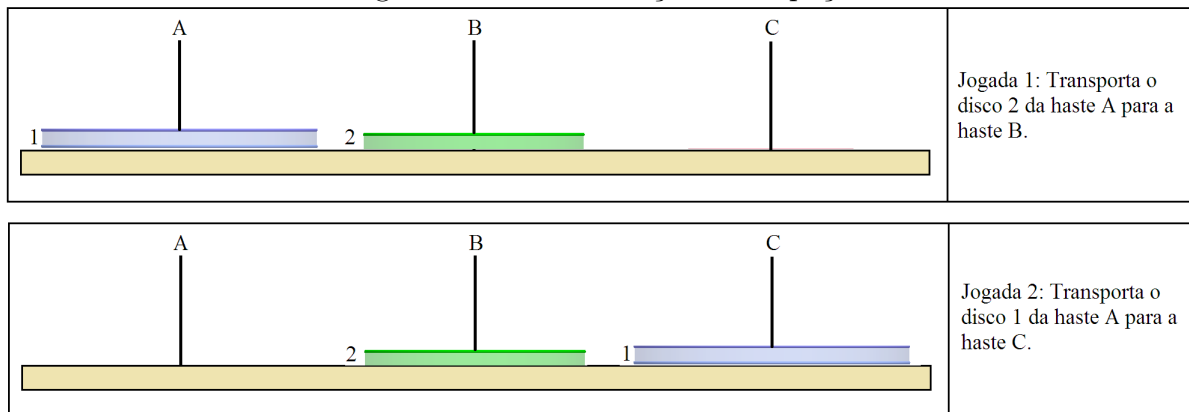
- Quando $n = 2$, temos 3 movimentos para obtermos o resultado. Observe as figuras 7 e 8 abaixo:

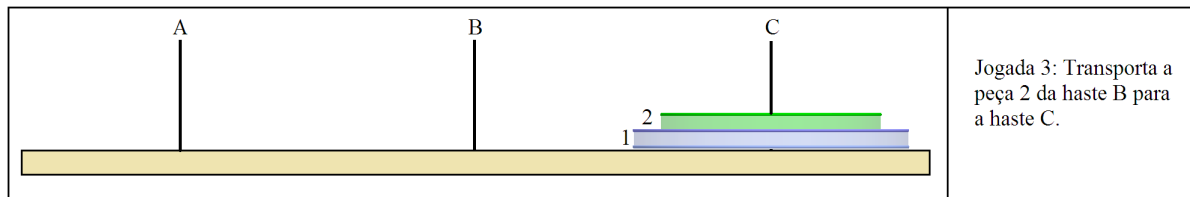
Figura 10: Torre de Hanói com duas peças



Fonte: Construída pelo autor

Figura 11: Movimentação das 2 peças

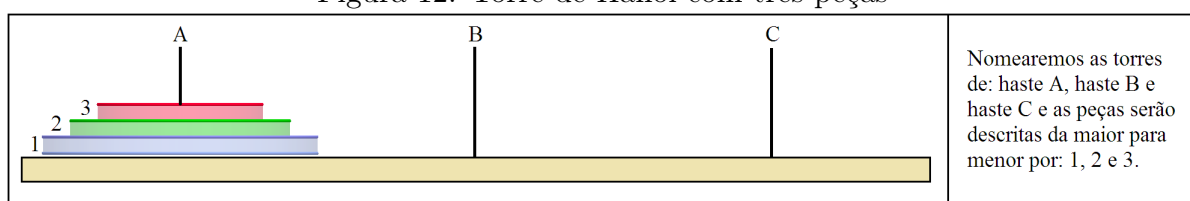




Fonte: Construída pelo autor

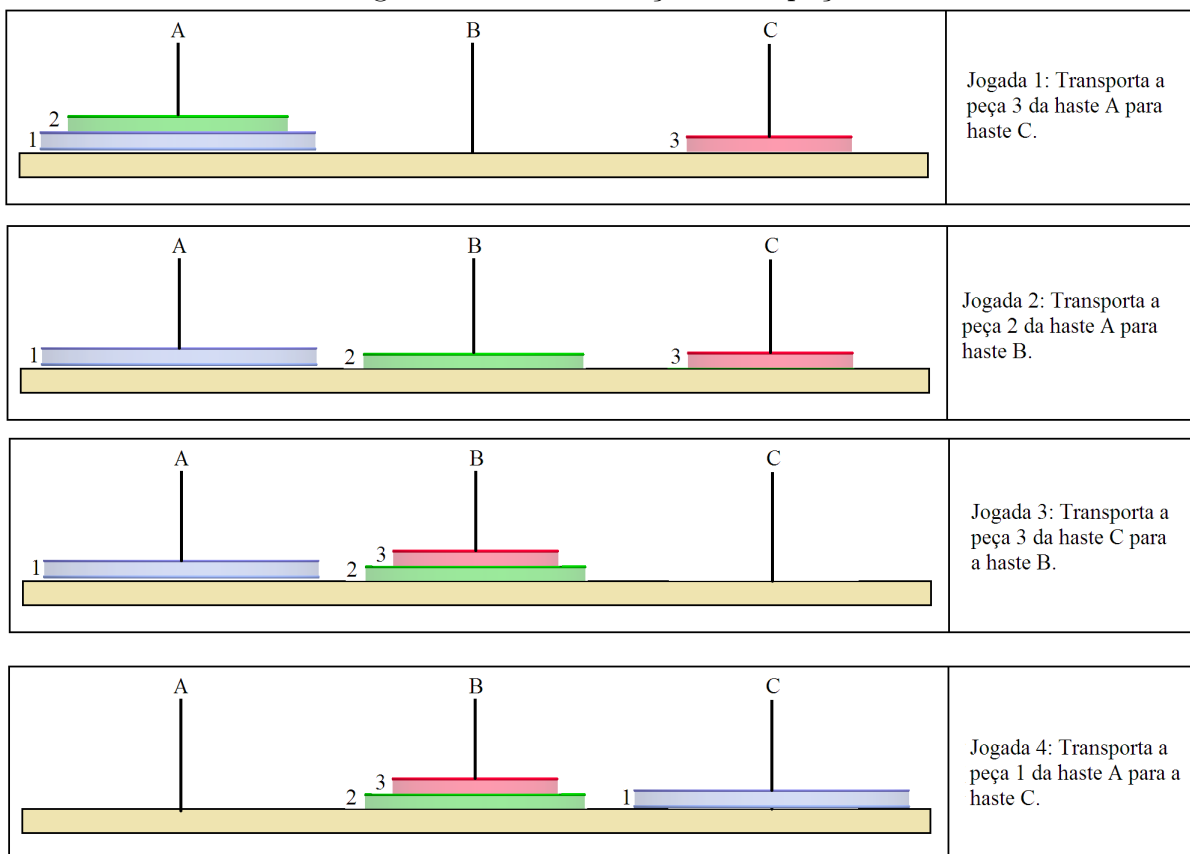
- Para $n = 3$. Observe as figuras 9 e 10 abaixo:

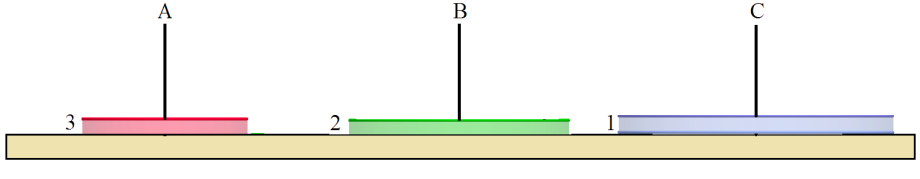
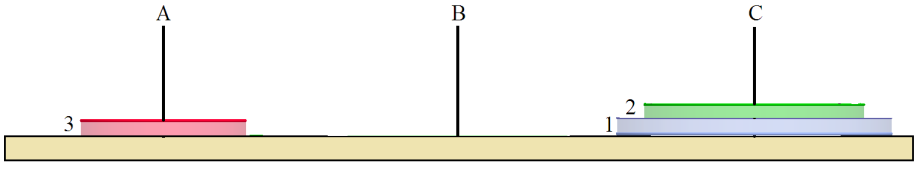
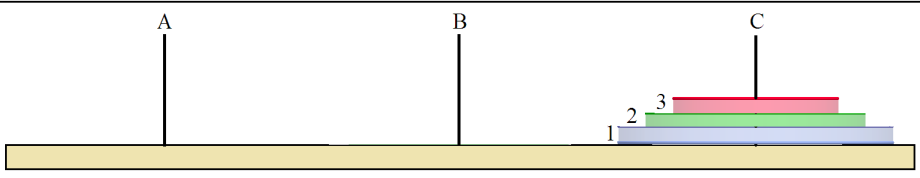
Figura 12: Torre de Hanói com três peças



Fonte: http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/ativ01/r1.htm [11]

Figura 13: Movimentação das 3 peças

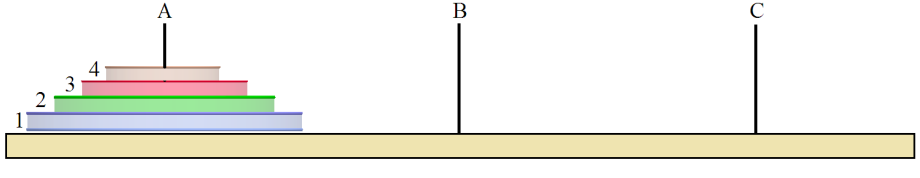


	<p>Jogada 5: Transporta o disco 3 da haste B para a haste A.</p>
	<p>Jogada 6: Transporta a peça 2 da haste B para a haste C.</p>
	<p>Jogada 7: Transporta a peça 3 da haste A para a haste C.</p>

Fonte: http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/ativ01/r1.htm [11]

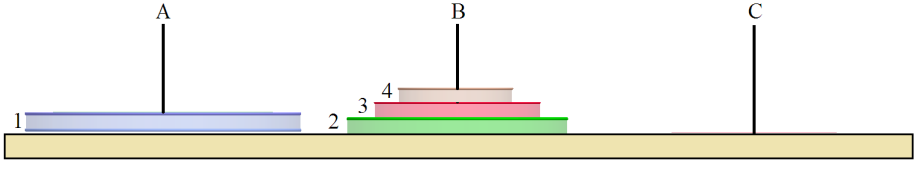
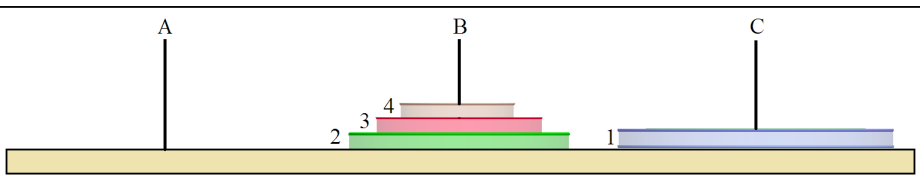
- Para $n = 4$. Observe as figuras 11 e 12 abaixo:

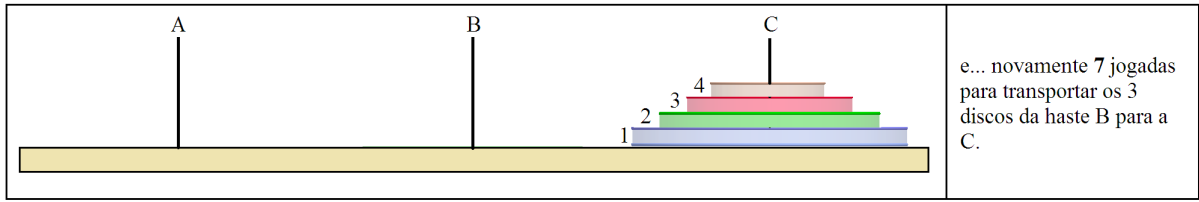
Figura 14: Torre de Hanói com quatro discos

	<p>Nomearemos as torres de: haste A, haste B e haste C e as peças serão descritas da maior para menor por: 1, 2, 3 e 4.</p>
--	---

Fonte: http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/ativ01/r1.htm [11]

Figura 15: Movimentação dos 4 discos

	<p>7 jogadas para transportar os 3 primeiros discos para a haste B, mais...</p>
	<p>... 1 jogada para transportar o disco 1 para a haste C.</p>



Fonte: http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/ativ01/r1.htm [11]

Mostremos agora que o número mínimo de movimentos é dado por $j_n = 2^n - 1$, onde n é a quantidade de discos.

Seja j_n a fórmula que determina o número mínimo de movimentos. Note que para resolver o problema para os $n + 1$ discos com o menor número de passos possíveis têm, obrigatoriamente, que passar duas vezes pela solução mínima do problema com n discos e 1 jogada para transferir o disco de maior diâmetro. Assim

$$j_{n+1} = 2j_n + 1.$$

E, daí obtendo j_n recursivamente, temos:

$$\begin{aligned} j_1 &= 1 \text{ (obviamente)} \\ j_2 &= j_{1+1} = 2j_1 + 1 = 2^1 \cdot j_1 + 2^1 - 1 = 2^1 \cdot 1 + 2^1 - 1 = 2^1 + 2^1 - 1 = 2^2 - 1; \\ j_3 &= j_{2+1} = 2j_2 + 1 = 2 \cdot (2^2 - 1) + 1 = 2^3 - 2 + 1 = 2^3 - 1; \\ j_4 &= j_{3+1} = 2j_3 + 1 = 2 \cdot (2^3 - 1) + 1 = 2^4 - 2 + 1 = 2^4 - 1; \\ &\vdots \\ j_n &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

Agora demonstraremos por indução que a expressão acima está correta.

Seja $P(n)$: a expressão $j_n = 2^n - 1$.

i) Para $n = 1$ verifica-se a veracidade da expressão.

ii) Suponhamos que, para algum $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $j_n = 2^n - 1$. Devemos mostrar que $j_{n+1} = 2^{n+1} - 1$. Como $j_{n+1} = 2j_n + 1$, temos

$$\begin{aligned} j_{n+1} &= 2j_n + 1 \\ &= 2(2^n - 1) + 1 \\ &= 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

O que mostrar que a expressão é também é válida para $n + 1$.

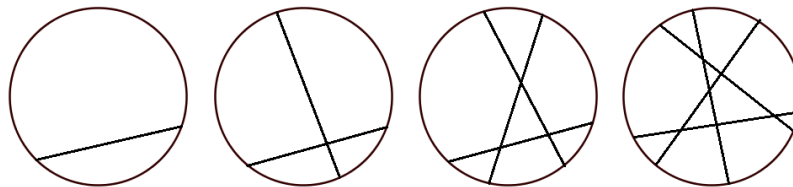
Logo, pelo Princípio da Indução Finita, $j_n = 2^n - 1$ para todo n natural. ■

A aplicação a seguir e sua demonstração encontramos em [23], como segue

Aplicação 35 (Pizza de Steiner) Qual é o número máximo de regiões em que o plano pode ser dividido por n retas? O problema poderia ser enunciado assim: qual é o número máximo de pedaços em que uma pizza pode ser dividida por n cortes retilíneos?

Demonstração Note que o número de regiões é máximo quando cada reta intersecta todas as demais em pontos distintos. Para valores pequenos de n , conta-se com simplicidade o número de regiões. Vejamos a figura abaixo a qual ilustra as situações em que o número de cortes varia de 1 a 4 e a na sequência a tabela que relaciona o número de cortes e o número de regiões obtidas:

Figura 16: Cortando a pizza



Fonte: (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 23) [23]

Tabela 1: Relação entre o número de cortes e o número de regiões obtidas.

Número de cortes (n)	Número de regiões (r_n)	Regiões acrescentadas
1	2	1
2	4	2
3	7	3
4	11	4

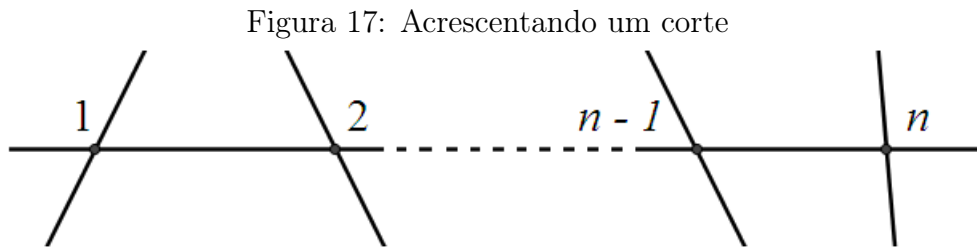
Fonte: (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 23) [23].

Pelos dados da tabela, observamos que a mesma sugere que o número de regiões aumenta de n unidades quando se faz o n -ésimo corte e que, o número total de regiões obtidas com n cortes é

$$2 + 2 + 3 + \dots + n = 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Apesar do resultado final está correto, precisamos de uma argumentação mais forte para validar a prova. Faremos isso como segue:

Suponhamos que os n primeiros cortes tenham sido feitos de modo a assegurar o número máximo r_n de regiões (cada corte deve intersectar todos os demais em pontos distintos). O corte $n + 1$ também deve ser feito de modo a satisfazer esta condição, ou seja, ele deve intersectar os n já existentes em n pontos distintos. Estes n pontos subdividem a reta correspondente ao $(n + 1)$ -ésimo corte em $n + 1$ partes ($n - 1$ segmentos e 2 semirretas), conforme a figura abaixo. Cada uma destas partes subdivide uma região existente em 2, aumentando o número de regiões em $n + 1$.



Fonte: (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 24) [23]

Portanto, temos $r_{n+1} = r_n + (n + 1)$, para todo $n \geq 1$ ou, equivalentemente, $r_n = r_{n-1} + n$ para todo $n > 1$, o que valida a solução. Alternativamente, uma vez obtida a recorrência $r_1 = 2$ e $r_{n+1} = r_n + (n + 1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos mostrar por indução finita que o termo geral de r_n é dado por $\frac{n^2 + n + 2}{2}$.

Demonstração Provemos por indução sobre n . Seja $P(n) : r_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$.

- i) A validade de $P(1)$ é simples verificação $r_1 = 2$.
- ii) Suponhamos $P(n)$ verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar que

$$r_{n+1} = \frac{(n + 1)^2 + (n + 1) + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 4}{2}.$$

Como $r_{n+1} = r_n + (n + 1)$, temos

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{n^2 + n + 2}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n^2 + n + 2 + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 4}{2}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Finita, $r_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos uma espécie de banco de dados sobre uso da Indução Matemática para fazer demonstrações em conteúdos ensinados na matemática da Educação Básica e que são úteis também no Ensino Superior.

Inicialmente destacamos o conjunto dos números naturais, enfatizando os Axiomas de Peano com destaque para o Axioma da Indução. Falamos das operações de adição e multiplicação, que estão bem definidas em \mathbb{N} . Foi dado destaque também para algumas propriedades dessas operações, além da relação de ordem em \mathbb{N} .

Como decorrência do Axioma da Indução demonstramos o Princípio da Boa Ordem. Fizemos também o contrário, demonstramos o Princípio da Indução como decorrência do Princípio da Boa Ordenação. Demonstramos também, a definição por Recorrência e o Teorema Fundamental da Aritmética, usando o Princípio da Indutivo.

Feito isto, apresentamos um leque de aplicações do uso do Princípio Indutivo a conteúdos de matemática ensinados no Ensino Médio. Para isso, admitimos que os leitores deste Trabalho terão os conhecimentos básicos sobre os números reais. As aplicações aqui apresentadas contemplaram vários conteúdos de 1º, 2º e 3º anos da última etapa do ensino básico. Além disso, algumas dessas aplicações são usadas nos mais diversos ramos da matemática superior, como: análise matemática, cálculo, geometria, etc.

Também trouxemos três exemplos clássicos de aplicações lúdicas do Princípio da Indução Matemática, com ênfase ao jogo “Torre de Hanói”.

REFERÊNCIAS

- [1] ALENCAR FILHO, Edgard de. **Teoria Elementar dos Números**. 2 ed. São Paulo: Nobel, 1985.
- [2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, p. 124, 2002.
- [3] CATTAI, Adriano Pedreira, **Análise Real (MA0062)**, p. 8, <<http://cattai.mat.br>>. Acesso em 06 de abril de 2017.
- [4] FERREIRA, Jamil. Textos Universitários. **A Construção dos Números**. 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [5] FREITAS, Natanael Charles Brito. **Princípio da Indução Matemática: Fundamento Teórico e Aplicações na Educação Básica**. 97 fs. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2013. Disponível em <http://bit.proformat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/987/2011_00766_NATANAEL_CHARLES_BRITO_FREITAS.pdf?sequence=1> Acesso em 23 de abril de 2017.
- [6] HALMOS, P. R. **Teoria Ingênua dos Conjuntos**; trad. Prof. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo e Editora Polígono, 1970.
- [7] HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).
- [8] HEFEZ, Abramo. **Indução Matemática**. Programa de Iniciação Científica da OBMEP Vol. 4, 2009.
Em <<http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/296654.o>>. Acessado em 08 de junho de 2017.
- [9] <http://happyslide.org/doc/28168/indu%C3%A7%C3%A3o-forte-professor-da-uff>. Acesso em 22 de abril de 2017.
- [10] <<http://producao.virtual.ufpb.br/books/Inaldo/Exemplo-Livro/livro/livro.chunked/ch02s03.html>>. Acesso em 02 de junho de 2017.

- [11] <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/ativ01/r1.htm>. Acesso em 01 de julho de 2017.
- [12] <http://www.proformat-sbm.org.br/files/Gabarito_ENQ_2016_2.pdf>. Acesso em 08 de abril de 2017.
- [13] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar: Complexos, Polinômios, Equações**. v. 6. 6 ed. São Paulo: Atual Editora, 1993.
- [14] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria**. v. 3. 7 ed.. São Paulo: Atual Editora, 1993.
- [15] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. v. 1. 12 ed. Rio de Janeiro, 2008.
- [16] LIMA, Elon Lages. **O Princípio da Indução**, <<http://www.mat.uc.pt/mat0829/A.Peano.htm>>. Acesso em 06 de abril de 2017.
- [17] LIMA, Elon Lages. **O Princípio da Indução**, <<http://www.mat.uc.pt/mat0829/A.Peano.htm>>. Acesso em 08 de abril de 2017.
- [18] LIMA, Elon Lages. **O Princípio da indução**. Disponível em: http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/artigos/inducaoc.doc. Acesso em 10 de maio de 2017.
- [19] LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).
- [20] LOUREIRO, Antonio Alfredo Ferreira. **Teoria dos Conjuntos**. <http://homepages.dcc.ufmg.br/loureiro/md/md_5TeoriaDosConjuntos.pdf>. Acesso em 02 de maio de 2017.
- [21] MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro. **Manual de Redação Matemática**. Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2014.
- [22] MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro. **Um Convite à Matemática: fundamentos lógicos com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades**. 2ª edição. Campina Grande EDUFCG, 2007.
- [23] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).
- [24] NÓBREGA, Emerson Wagner da. **Ler, escrever e calcular: um método para rever conteúdos matemáticos do ensino fundamental**. 72 fs. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande. Campina Grande, 2015. Disponível em

- <<http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Emerson.pdf>>. Acesso em 20 de abril de 2017.
- [25] PEREIRA, Paulo Cesar Antunes. **PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA** - uma abordagem no Ensino Médio. 46fs. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplica. Rio de Janeiro, 2103. Disponível em <http://bit.proformat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/987/2011_00766_NATANAEL_CHARLES_BRITO_FREITAS.pdf?sequence=1>. Acesso em 20 de abril de 2017.
- [26] SILVA, Alecio Soares. **Um Estudo Sobre Aplicação do Algoritmo de Euclides**. 60 fs. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande. Campina Grande, 2014. Disponível em <<http://www.mat.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/AlecioSoares.pdf>> Acesso em 20 de abril de 2017.
- [27] VIEIRA, Vandenberg Lopes. **Um Curso Básico em Teoria dos Números**. Campina Grande: EDUEPB; São Paulo: Livraria da Física, 2015.
- [28] Wikipédia, a enciclopédia livre, <https://pt.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano>. Acesso em 08 de abril de 2017.
- [29] Wikipédia, a enciclopédia livre, <https://pt.wikipedia.org/wiki/Torre_de_Han%C3%B3i>. Acesso em 11 de junho de 2017.