



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Cálculo das Fórmulas de Euler e Pick no Geoplano e no GeoGebra

Wesley da Silva Carvalho

Goiânia

2016

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Nome completo do autor: Wesley da Silva Carvalho

Título do trabalho: Cálculo das Fórmulas de Euler e Pick no Geoplano e no GeoGebra

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.



Assinatura do (a) autor (a) ²

Data: 16 / 03 / 17

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

²A assinatura deve ser escaneada.

Wesley da Silva Carvalho

Cálculo das Fórmulas de Euler e Pick no Geoplano e no GeoGebra

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira

Goiânia

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Carvalho, Wesley da Silva
Cálculo das Fórmulas de Euler e Pick no Geoplano e no GeoGebra [manuscrito] / Wesley da Silva Carvalho. - 2016.
lii, 52 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica (Profissional), Goiânia, 2016.

Bibliografia.

Inclui fotografias, símbolos, tabelas, lista de figuras.

1. Fórmula de Euler. 2. Fórmula de Pick. 3. Geoplano. 4. GeoGebra.
I. Vieira, Ewerton Rocha, orient. II. Título.

CDU 51



Universidade Federal de Goiás-UFG
Instituto de Matemática e Estatística-IME
Mestrado profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT/UFG



Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

Ata da reunião da Banca Examinadora da Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Wesley da Silva Carvalho – Aos nove dias do mês de dezembro do ano de dois mil e dezesseis (09/12/2016), às 11:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira– Orientador; Prof.^a. Dr.^a. Kélem Gomes Lourenço, e Flávio Raimundo de Souza, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Auditório do IME, procederem a avaliação da defesa intitulada: **“Cálculo das Fórmulas de Euler e Pick no Geoplano e no GeoGebra”**, em nível de Mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Wesley da Silva Carvalho discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da banca, Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 30 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1075/2012 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do IME da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 12:30 horas a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu, Sonia Maria de Oliveira, secretária do PROFMAT/UFG, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, é assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira
Presidente – IME/UFG

Prof.^a. Dr.^a. Kélem Gomes Lourenço
Membro – IME/UFG

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Membro – IFG/GOIÂNIA

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Wesley da Silva Carvalho graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, tem especialização em Metodologia do Ensino de Matemática e Física pela UNINTER, modalidade EaD, e atua como professor das redes pública e particular de Goiânia.

Dedico este trabalho a minha família, em especial a minha esposa Amanda e aos meus filhos, Davi e Lavínia, pela paciência, por serem a minha motivação e por não me deixarem desanimar.

Agradecimentos

A Deus.

A minha esposa Amanda pelo apoio, amor, amizade e companheirismo.

A meus filhos Davi e Lavínia.

A meus pais Osmiro e Leontina.

Aos amigos do PROFMAT Jean Carlo, Márcio, Peter e Pollyana, companheiros de jornada que de maneira direta ou indireta contribuíram para a produção dessa dissertação.

Ao meu orientador Prof. Dr. Ewerton Rocha Vieira pela paciência e compreensão durante as orientações para essa dissertação.

A CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Esta dissertação trata inicialmente da Fórmula de Euler e de sua validade para os conjuntos de pontos com característica de Euler igual a 2. São feitas duas demonstrações da Fórmula de Euler, uma utilizando conceitos de Geometria Euclidiana e uma outra via Geometria Esférica, além da apresentação de uma versão para poliedros planos da Fórmula de Euler. Posteriormente, é apresentada a Fórmula de Pick para o cálculo de áreas de polígonos simples reticulados e sua relação de equivalência com a Fórmula de Pick para poliedros planos. Finalmente mostramos duas possibilidades de trabalho com a Fórmula de Pick, no Geoplano e no software GeoGebra.

Palavras-chave: Fórmula de Euler, Fórmula de Pick, Geoplano, GeoGebra.

Abstract

In this dissertation, we first state Euler's polyhedral formula for a set of points with Euler characteristic 2. We address the two known ways to prove Euler's Theorem: beginning with the classical proof by using Euclidian Geometry and afterwards we take the advantage of Spherical Geometry to give another proof. Furthermore, we address a version of Euler's formula for planar polyhedron, as well as, Pick's formula and the equivalence between Euler and Pick's formula. In the end, we provide application of Euler and Pick's formula, via two pedagogy tools Geoplano and GeoGebra, by giving examples to teach in classroom.

Keywords: Euler's theorem, Pick's Theorem, Geoplan, GeoGebra.

Lista de Figuras

1	Poliedros	16
2	Poliedros Convexos	16
3	Poliedro P	18
4	Plano Tangente	21
5	Plano Secante	22
6	Retas Perpendiculares	22
7	Ângulo Esférico α	23
8	Triângulo Esférico	23
9	Fuso de Ângulo α	24
10	Fuso Completo	24
11	Região R_α	25
12	Polígono Simples	28
13	Polígono não Simples	28
14	Polígono não Simples com Buraco	29
15	Reticulado	31
16	Polígono Reticulado	31
17	Triângulos Fundamentais	32
18	Triângulos não Fundamentais	32
19	Segmento de Reta AB	33
20	Triângulo Fundamental ABC	34
21	1ª Possibilidade	35
22	2ª Possibilidade	35
23	Ponto P no Interior do Triângulo ABC	36
24	Ponto P no Bordo do Triângulo ABC	37
25	Polígono Reticulado P	39
26	Triângulo Fundamental em uma das Faces de P	39
27	Polígono P Triangulado	41
28	Geoplano Quadrangular	43
29	Outros Tipos de Geoplano	44
30	Polígonos no Geoplano	45
31	Polígonos com Mesma Área e Perímetros Diferentes	45
32	Polígonos com Perímetros Iguais e Áreas Diferentes	45
33	Polígonos com Perímetros Iguais e Áreas Diferentes	46

34	Polígonos com Perímetros e Áreas Iguais	46
35	GeoGebra	47
36	Área do Pentágono $ABCDE$	49
37	Área do Quadrilátero $ABCD$	49
38	Área do Triângulo ABC	50

Sumário

1	Introdução	14
2	Poliedros Convexos	15
2.1	A Fórmula de Euler	17
3	Noções de Geometria Esférica	20
3.1	Teorema de Girard	24
3.2	A Fórmula de Euler via Geometria Esférica	26
4	A Fórmula de Euler para Planos	28
5	Reticulado	30
6	Fórmula de Pick	37
6.1	A Fórmula de Pick e a Fórmula de Euler para Planos	38
7	Geoplano	43
8	Geogebra	46
8.1	A Fórmula de Pick no GeoGebra	48
9	Considerações Finais	50

1 Introdução

Durante os quase 10 anos de trabalho com o ensino básico, principalmente nas séries do ensino médio, não é incomum ouvir dos alunos questionamentos sobre alguns resultados da matemática que parecem ser indeterminados em algumas teorias. Por que um número diferente de zero elevado a zero é igual a 1? Por que a raiz quadrada de um número real positivo é sempre positiva se um número real negativo elevado ao quadrado é sempre positivo? Por que é possível calcular a raiz quadrada de um número negativo, se o universo a ser considerado for o conjunto dos números complexos? Por que, mesmo para alguns poliedros não convexos, vale a Fórmula de Euler $V - A + F = 2$?

Alguns desses questionamentos são feitos e, de uma forma ou outra, o professor consegue que os alunos admitam como verdadeiras estas afirmações, por mais que para alcançar o entendimento às vezes tenha que utilizar artifícios matematicamente não rigorosos para isso. Porém, esse último questionamento sobre a Fórmula de Euler é um daqueles que sempre causa alguma inquietação, pois nem sempre o professor tem uma justificativa aceitável para dar aos seus alunos.

Nesse sentido que surgiu a possibilidade de tentar buscar uma explicação possível ao nível de estudo para mostrar a validade da Fórmula de Euler. Muitos dos livros de ensino médio tratam da Fórmula de Euler como um resultado válido apenas para poliedros convexos. O detalhe é que muito provavelmente, de acordo com Lima(6), Euler nunca se deu ao trabalho de definir precisamente “poliedro”. Foi Poincaré quem compreendeu que o número $\chi(P) = V - A + F$ é um invariante topológico do poliedro, chamado de *característica de Euler* do poliedro. Toda figura geométrica que tem a característica de Euler igual a 2 é homeomorfa a uma esfera. De fato, intuitivamente, imagine o poliedro feito de uma borracha infinitamente expansível, que pode ser inflado o quanto se queira, assim todo poliedro inflado, que eventualmente se torne uma esfera, é homeomorfo à esfera.

Na seção Poliedros Convexos, após uma definição foi feita uma primeira demonstração da Fórmula de Euler com base na demonstração de Azambuja Filho (1).

Na seção seguinte são dadas algumas noções de Geometria Esférica, elaborada principalmente por Adrien-Marie Legendre, a qual trata do estudo dos polígonos esféricos. Mostramos o surpreendente resultado da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico que não é um valor fixo assim como na Geometria Plana. Após esses conceitos é apresentada uma segunda demonstração da Fórmula de Euler via Geometria Esférica. Posteriormente mostramos o resultado da Fórmula de Euler para poliedros planos, que

tem característica de Euler igual a 1.

Na seção Reticulado tratamos do conjunto de pontos do plano de coordenadas inteiras e dos polígonos reticulados, que são aqueles com vértices de coordenadas inteiras. Posteriormente, enunciamos a Fórmula de Pick para o cálculo de áreas de polígonos reticulados, o qual estabelece a relação do número de pontos e a áreas contando os pontos do bordo e do interior do polígono reticulado. Em seguida, mostramos a relação de equivalência entre a Fórmula de Euler para planos e a Fórmula de Pick, demonstrando a implicação de um no outro e vice-versa.

Para finalizar, propomos a aplicação da Fórmula de Pick como uma abordagem alternativa para o cálculo de áreas de polígonos reticulados utilizando o Geoplano e o software GeoGebra.

2 Poliedros Convexos

Uma das causas da dificuldade para demonstrar teoremas sobre poliedros era a falta de uma definição precisa destes. Nesta seção, apresentamos a definição central do trabalho para então enunciarmos de forma clara a Fórmula de Euler.

Definição 1. *Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde:*

a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.

b) A intersecção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice, ou seja, cruzando apenas arestas.

Na Figura 1 vemos exemplos de poliedros.

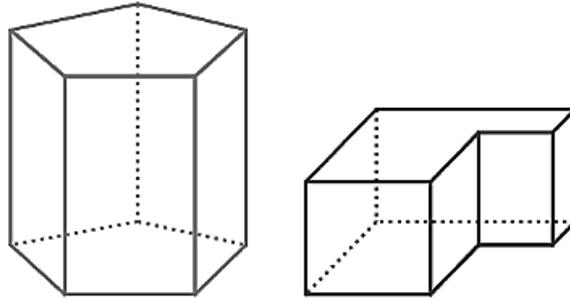


Figura 1: Poliedros

Nesse sentido, todo poliedro limita uma região do espaço chamada de *interior* desse poliedro. Um conjunto C do plano ou do espaço é *convexo*, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C . Dizemos que um poliedro é convexo se o seu interior é convexo. Na Figura 2 vemos exemplos de poliedros convexos.

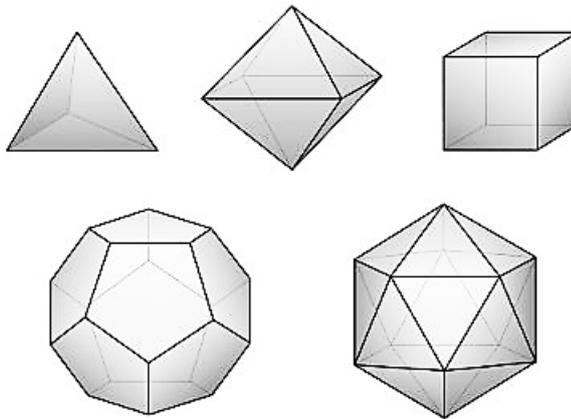


Figura 2: Poliedros Convexos

Para demonstrar posteriormente a Fórmula de Euler é preciso tratarmos do problema de contar as faces, vértices e arestas de um poliedro qualquer. Representamos por A , V e F os números de arestas, vértices e faces do poliedro, respectivamente. Como as faces podem ter número de lados diferentes, representamos por F_n ($n \geq 3$), o número de faces que possuem n lados. Os vértices também podem ser pontos onde concorrem números diferentes de arestas, assim representamos por V_n o número de vértices nos quais concorrem n arestas. Em cada vértice concorrem pelo menos três arestas, logo

$$F = F_3 + F_4 + \dots$$

$$V = V_3 + V_4 + \dots$$

Cada aresta do poliedro é lado de exatamente duas faces, portanto, somando os produtos do número de faces de cada gênero pelo número de lados de cada uma dessas faces, obtemos o dobro do número de arestas. Isto é,

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots$$

Além disso, se em cada vértice contarmos o número de arestas que nele concorrem, somando os produtos do número de vértices de cada gênero pelo número de lados de cada uma dessas faces, obtemos o dobro do número de arestas, pois cada aresta é contada duas vezes, em um extremo e no outro. Assim,

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots$$

Lema 1. *Se um poliedro tem A arestas e F_k faces de k lados, então*

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots$$

Demonstração:

Como cada aresta do poliedro pertence a exatamente duas faces, basta observar que ambos os membros da igualdade do enunciado contam cada aresta exatamente duas vezes. ■

Na próxima seção, enunciaremos a Fórmula de Euler e apresentamos uma primeira demonstração.

2.1 A Fórmula de Euler

De acordo com Eves (3) o suíço Leonhard Euler nasceu na Basileia em 1707. Depois de ensaiar uma carreira no campo da Teologia, Euler encontrou sua verdadeira vocação na Matemática. Seu pai, que havia estudado com Jakob Bernoulli, conseguiu que o filho fosse estudar com Johann Bernoulli. Em 1727, com apenas vinte anos de idade, foi indicado pelos irmãos Daniel e Nicolaus Bernoulli para membro da Academia de São Petersburgo, posto que ocupou por quatorze anos. Após esse período foi convidado para chefiar a seção de matemática da Academia de Berlim. Após vinte e cinco anos retorna a Academia de São Petersburgo, onde ficaria por dezessete anos até sua morte em 1783. Entre livros e artigos, Euler publicou 530 trabalhos durante sua vida, deixando ainda, ao morrer, uma série de manuscritos que enriqueceram as publicações da Academia de São Petersburgo por mais quarenta e sete anos.

Descoberta em 1758, a Fórmula de Euler tem sido ensinada normalmente no 2º ano do Ensino Médio das escolas brasileiras. O enunciado da fórmula diz que se um

poliedro tem V vértices, A arestas e F faces então $V - A + F = 2$. Há um consenso em generalizar o resultado para poliedros convexos. Porém para o nível de ensino em que é introduzido torna-se uma missão complicada justificar o porquê de existir poliedros não convexos em que a fórmula continua válida. Segundo Lima(6) a solução definitiva para o problema deve-se a Poincaré, primeiro matemático a compreender que a Fórmula de Euler é uma fórmula de Topologia, e não de Geometria, pois o número $V - A + F$ é um *invariante topológico* do poliedro.

A demonstração desse teorema é feita com base em Azambuja Filho (1).

Teorema 1 (Fórmula de Euler). *Seja P um poliedro convexo com F faces, A arestas e V vértices. Tem-se necessariamente $V - A + F = 2$.*

Demonstração:

Começamos escolhendo uma reta r que não seja paralela a nenhuma das faces de P . Tomamos também um plano H , que é chamado de plano horizontal, que não intersecta P e é perpendicular à reta r . As retas paralelas a r são chamadas de retas verticais. O plano H divide o espaço em dois semiespaços, um dos quais contém o poliedro P , ver Figura 3. Este semiespaço é chamado de *semiespaço superior* e seus pontos estão acima do plano H .

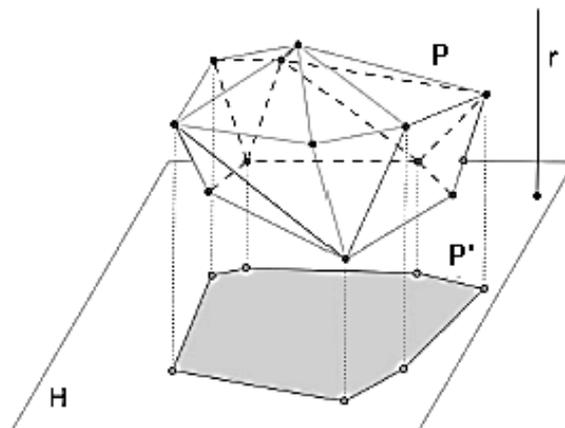


Figura 3: Poliedro P

A cada ponto x do semiespaço superior corresponde um ponto x em H , chamado a sombra (projeção ortogonal) de x , obtido pela intersecção do plano H com a reta vertical que passa por x . A sombra de qualquer conjunto X , contido no semiespaço superior é, por definição, o conjunto X' , contido em H formado pelas sombras dos

pontos de X . Cada ponto da sombra P' do poliedro P é sombra de um ou de dois pontos de P , pelo fato de P ser convexo.

A sombra P' do poliedro P é um polígono convexo contido em H , cujo contorno γ' é a sombra de uma poligonal fechada γ , formada por arestas de P . Cada ponto de γ' é sombra de um único ponto de P pertencente a γ . A poligonal γ é chamada o *contorno aparente* do poliedro P . Cada ponto interior de P' é sombra de dois pontos de P , os quais são chamados de: *ponto iluminado*, se for o ponto mais distante de H ; e *ponto sombrio*, se for o ponto mais próximo de H . O poliedro P fica então dividido em três partes disjuntas: o conjunto dos pontos iluminados, o conjunto dos pontos sombrios e o contorno aparente γ .

Denotamos por P_1 o conjunto dos pontos iluminados de P mais o contorno aparente. A regra que associa cada ponto x de P_1 a sua sombra x' em P' é uma correspondência biunívoca entre P_1 e P' . Podemos também considerar o conjunto P_2 dos pontos sombrios de P mais o contorno aparente. A regra que associa cada ponto y de P_2 a sua sombra y' em P' também é uma correspondência biunívoca entre P_2 e P' .

É necessário também observarmos que se decomusermos as faces de P em triângulos, traçando diagonais em cada uma delas, os números F e A se alteram individualmente, mas a expressão $V - A + F$ permanece com o mesmo valor. Cada vez que traçamos uma diagonal numa face, os números F e A aumentam, cada um, de uma unidade e o número V não se altera. Os acréscimos de F e A se anulam. Portanto não há perda de generalidades em supor que todas as faces de P são triângulos, fato que é admitido a partir de agora. Assim, como toda face tem 3 arestas e cada aresta pertence a 2 faces, temos que $3F = 2A$. Esta relação é usada logo mais.

A ideia da demonstração consiste em calcular de duas maneiras distintas a soma S dos ângulos internos dos triângulos que compõem o poliedro P . Existem F triângulos e a soma dos ângulos internos de cada um deles é igual a π radianos. Portanto, $S = \pi F$,

$$\begin{aligned} F &= 3F - 2F \\ &= 2A - 2F, \end{aligned}$$

$$S = \pi F = \pi(2A - 2F) = 2\pi A - 2\pi F.$$

Temos $S = S_1 + S_2$, onde S_1 é a soma dos ângulos internos dos triângulos de P_1 e S_2 é a soma dos ângulos internos dos triângulos de P_2 .

Para calcular S_1 , partimos da observação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo T é igual à soma dos ângulos internos de sua sombra T' . Assim, S_1 é

igual a soma dos ângulos internos dos triângulos da decomposição de P'_1 , sombra de P_1 . O valor de S_1 é calculado somando os ângulos dos vértices. Sejam V_1 o número de vértices iluminados, V_2 , o número de vértices sombrios e V_0 o número de vértices do contorno aparente γ . Então, $V = V_0 + V_1 + V_2$. V_0 também é o número de vértices (e de lados) da poligonal γ' , contorno do polígono P' .

Em P_1 temos V_1 vértices interiores mais V_0 vértices do contorno γ' . A soma dos ângulos de um vértice interior é igual a 2π radianos. A soma dos ângulos com vértices sobre o contorno γ' é igual a $(V_0 - 2)\pi$ radianos, de acordo com a expressão para soma dos ângulos internos de um polígono com V_0 lados. Temos assim

$$S_1 = 2\pi V_1 + (V_0 - 2)\pi.$$

Analogamente, segue que

$$S_2 = 2\pi V_2 + (V_0 - 2)\pi.$$

Somando estas igualdades temos que

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 = 2\pi V_1 + (V_0 - 2)\pi + 2\pi V_2 + (V_0 - 2)\pi \\ S &= 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi(V_0 - 2). \end{aligned}$$

Comparando com a igualdade $S = 2\pi A - 2\pi F$ obtemos que

$$2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi(V_0 - 2) = 2\pi A - 2\pi F.$$

Dividindo por 2π , temos

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + V_0 - 2 &= A - F \\ V - 2 &= A - F. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$V - A + F = 2.$$

■

3 Noções de Geometria Esférica

A Geometria Esférica foi elaborada, principalmente, por Adrien-Marie Legendre para atender as demandas não atendidas pela Geometria Euclidiana. A seguir são definidos alguns conceitos com base em Nascimento (9).

Definição 2. *Seja O um ponto e r um número real positivo. A superfície esférica de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos P do espaço, cuja distância a O é*

igual a r .

Os pontos do espaço com distância ao centro O menor do que r são *pontos interiores*, e aqueles com distância maior do que r são *pontos exteriores* à superfície esférica. A reunião da superfície esférica com seus pontos interiores denomina-se *esfera de centro O e raio r* . O segmento que une o centro a qualquer ponto da superfície esférica é denominado *raio* da superfície esférica. O segmento que une dois pontos distintos da superfície esférica é denominado *corda*.

Teorema 2. *Um plano é perpendicular a um raio na sua extremidade comum com a superfície esférica se, e somente se, é tangente à mesma.*

Demonstração:

Seja E um plano perpendicular ao raio \overline{OT} em T , vamos mostrar que nenhum outro ponto de E está na superfície esférica. Seja P um ponto qualquer do plano E e diferente do ponto T , como na Figura 4. Como, por hipótese, o plano E é perpendicular a \overline{OT} temos que o triângulo OPT é retângulo com hipotenusa \overline{OP} e catetos \overline{OT} e \overline{PT} . Logo $OP > OT = r$ e, portanto, P é um ponto exterior à superfície esférica.

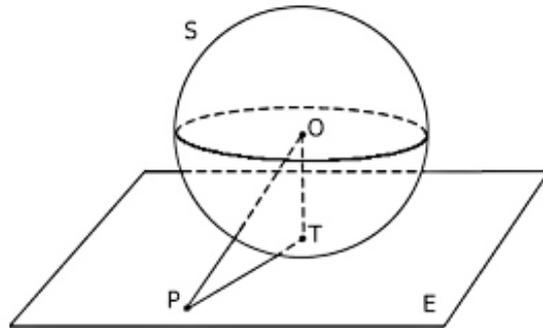


Figura 4: Plano Tangente

Reciprocamente, seja E um plano tangente à superfície esférica no ponto T . Suponha, por absurdo, que o plano E não seja perpendicular ao raio \overline{OT} , como na Figura 5. Sendo F o pé da perpendicular ao plano E , traçada a partir do centro O , temos $F \neq T$, pois o plano E não é perpendicular a \overline{OT} , por hipótese. Seja R o ponto da reta que contém \overline{FT} , tal que T, F e R são colineares e $FR = FT$. Os triângulos retângulos OFR e OFT são congruentes pelo caso *LAL*, de modo que, $OR = OT = r$ e, portanto, R pertence a superfície esférica. Logo E intersecta a superfície esférica em dois pontos distintos R e T . Absurdo, pois, por hipótese, o plano E é um plano tangente.

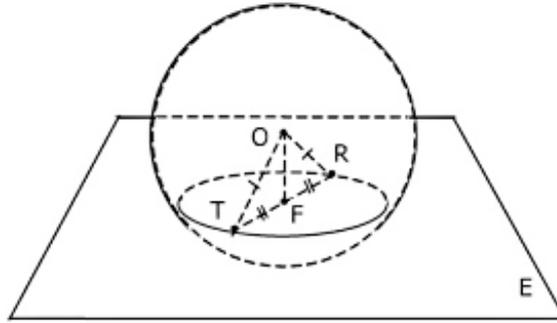


Figura 5: Plano Secante

A intersecção da superfície esférica com um plano, passando pelo centro, é chamada de circunferência máxima ou geodésica, que é definida como reta em Geometria Esférica. Na Figura 6, ACA' e ADA' são retas, ambas perpendiculares à reta $BCDE$.

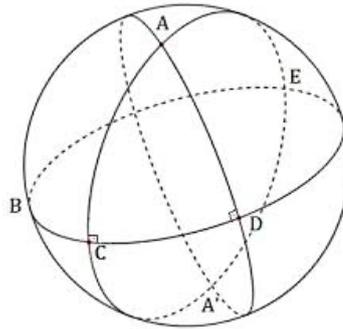


Figura 6: Retas Perpendiculares

De acordo com a Figura 6 é possível perceber que em Geometria Esférica não existem retas paralelas e estas tem comprimento finito.

Definição 3. *Dados dois pontos sobre a superfície esférica, o menor comprimento entre eles é dado por um trecho de reta denominado arco de circunferência máxima, que é definido como segmento de reta na Geometria Esférica.*

A medida do comprimento do arco é proporcional às medidas do ângulo central α dado em graus e do raio r da superfície esférica, sendo igual a $\frac{\pi r \alpha}{180}$.

Definição 4. *O ângulo esférico é a intersecção de duas retas e, sua medida, é a mesma do ângulo formado pelas retas tangentes à superfície esférica com vértice no ponto de intersecção.*

Na Figura 7 vemos o ângulo esférico α .

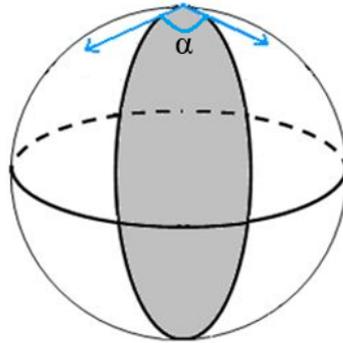


Figura 7: Ângulo Esférico α

Definição 5. A porção da superfície esférica, limitada exclusivamente por segmentos de reta, é chamada polígono esférico.

Um polígono fundamental para a demonstração da Fórmula de Euler é o triângulo esférico, definido a seguir. O *triângulo esférico* é formado pela união de três segmentos geodésicos de uma esfera, onde cada segmento geodésico é um arco de círculo máximo da esfera e não pertencentes a uma mesma circunferência máxima.

Na Figura 8 temos um triângulo esférico ABC , de lados BC , AC e AB , que chamamos de a , b e c , respectivamente.

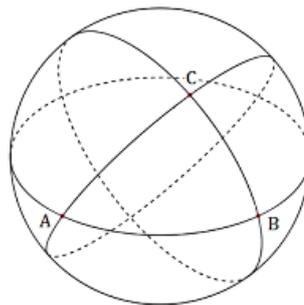


Figura 8: Triângulo Esférico

Observe que na Geometria Esférica a soma dos ângulos internos de um triângulo não é constante e igual a 180° assim como na Geometria Euclidiana. Essa soma varia de 180° a 540° , dependendo do triângulo.

3.1 Teorema de Girard

Antes de demonstrarmos o Teorema de Girard, que trata a relação da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico com a área, definimos alguns conceitos.

Seja E uma esfera de centro O e raio r . Um *fuso* é uma região da esfera compreendida entre dois círculos máximos, ver Figura 9. Esses dois círculos tem dois pontos (diametralmente opostos) em comum, chamados vértices do fuso. O *ângulo* do fuso é, por definição, o ângulo α entre os dois círculos máximos que constituem os lados do fuso.

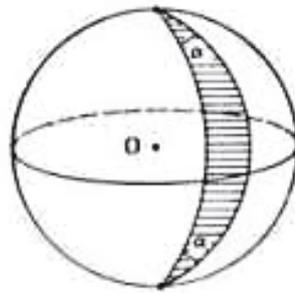


Figura 9: Fuso de Ângulo α

A área de um fuso esférico é proporcional ao ângulo α do fuso e ao raio r da esfera, sendo igual $2\alpha r^2$.

Dado um ponto qualquer x na esfera, sua antípoda x' é, por definição, o único ponto da esfera tal que o segmento de reta xx' contém o centro O , ou seja, x e x' são diametralmente opostos. Dado um fuso φ na esfera, o conjunto formado pelas antípodas dos pontos de φ é ainda um fuso φ' , chamado o fuso antípoda de φ . A reunião $\Phi = \varphi \cup \varphi'$ chama-se uma *fuso completo*, ver Figura 10.

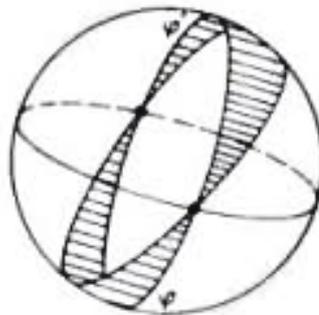


Figura 10: Fuso Completo

As demonstrações dos teoremas a seguir são feitas com base em Lima (7).

Teorema 3. *Seja Φ um fuso completo, cujo ângulo mede α radianos. Qualquer plano que passe pelo centro da esfera a decompõe em dois hemisférios H e H' . As partes R e R' do fuso completo Φ contidas em cada um desses hemisférios têm a mesma área $2\alpha r^2$.*

Demonstração:

Considere a função $f : E \rightarrow E$, que transforma cada ponto $x \in E$ em sua antípoda, isto é, $f(x) = x'$. Esta função tem as seguintes propriedades:

1^a) se x é um ponto do hemisfério H , sua antípoda $x' = f(x)$ pertence ao hemisfério oposto H' ;

2^a) se x é um ponto do fuso completo Φ , sua antípoda $x' = f(x)$ ainda pertence a Φ ;

3^a) dada qualquer região R na esfera, a região antípoda $R' = f(R)$, formada pelos pontos antípodas dos pontos de R , tem a mesma área que R .

Portanto, se chamarmos de R a parte do fuso completo de Φ situada no hemisfério H , vemos que sua região antípoda R' é a parte de Φ situada no hemisfério H' e que a área de $\Phi = (\text{área de } R) + (\text{área de } R') = 2 (\text{área de } R)$, logo a área de $R = 2\alpha r^2$. ■

Teorema 4 (Girard). *Se α , β e γ são os ângulos internos de um triângulo esférico, medidos em radianos, então $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$, onde a é a área desse triângulo.*

Demonstração:

Considere um hemisfério H que contenha o triângulo dado. Prolongando, nos dois sentidos, os lados que formam o ângulo α , até encontrarem o bordo do hemisfério H , obtemos uma região $R_\alpha \subset H$ como na Figura 11, cuja área mede $2\alpha r^2$, de acordo com o teorema anterior.

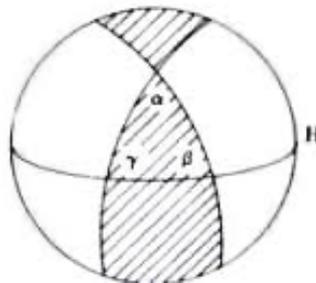


Figura 11: Região R_α

Fazendo o mesmo com os ângulos β e γ , obtemos regiões R_β e R_γ , cujas áreas medem $2\beta r^2$ e $2\gamma r^2$, respectivamente. A reunião dessas três regiões é o hemisfério H , com o triângulo dado contado três vezes. A soma das áreas das regiões R_α , R_β e R_γ é igual a área do hemisfério H mais duas vezes a área a do triângulo dado, ou seja,

$$2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 = 2\pi r^2 + 2a,$$

pois a área da esfera de raio r é igual a $4\pi r^2$.

Dividindo ambos os lados da igualdade anterior por $2r^2$, temos que

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}.$$

■

3.2 A Fórmula de Euler via Geometria Esférica

A seguir fazemos uma outra demonstração da Fórmula de Euler utilizando conceitos da Geometria Esférica. Essa demonstração é feita com base na demonstração de Legendre que utiliza o Teorema de Girard para a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico, já demonstrado na subseção anterior.

Teorema 5 (Fórmula de Euler). *Seja P um poliedro convexo com F faces, A arestas e V vértices. Tem-se necessariamente $V - A + F = 2$.*

Demonstração:

Tomemos inicialmente um poliedro convexo P inscrito em uma esfera E , de raio r , cujo centro O é um ponto situado no interior do poliedro P . Podemos, sem perda de generalidade, decompor as faces do poliedro P em triângulos. Se projetarmos P radialmente sobre E , obtemos uma decomposição de E em triângulos esféricos. Temos assim a esfera E recoberta por F triângulos esféricos, com um total de A lados e V vértices.

Para cada um dos triângulos esféricos da decomposição de E vale o Teorema de Girard, ou seja,

$$s_t = \pi + \frac{a_t}{r^2},$$

onde s_t é a soma dos ângulos internos e a_t é a área do triângulo esférico t .

Temos um total de F faces, de modo que

$$s_{t_1} + s_{t_2} + \cdots + s_{t_n} = \pi + \frac{a_{t_1}}{r^2} + \pi + \frac{a_{t_2}}{r^2} + \cdots + \pi + \frac{a_{t_n}}{r^2}$$

onde s_{t_i} é a soma dos ângulos internos e a_{t_i} é a área do t_i -ésimo triângulo esférico associado com a i -ésima face de P , do total de n faces de P .

Reescrevendo a expressão anterior, temos

$$\sum_{i=1}^n s_{t_i} = \pi F + \frac{\sum_{i=1}^n a_{t_i}}{r^2}$$

Mas, $\sum_{i=1}^n s_{t_i} = 2\pi V$, pois a soma dos ângulos em torno de cada vértice é 2π . Temos também que $\sum_{i=1}^n a_{t_i}$ corresponde a área de todos os triângulos esféricos, sendo igual a área da superfície esférica $E = 4\pi r^2$. Portanto,

$$2\pi V = \pi F + \frac{4\pi r^2}{r^2},$$

ou seja,

$$2\pi V = \pi F + 4\pi.$$

E dividindo os dois lados da igualdade por π temos que $2V = F + 4$, que é o mesmo que $4 = 2V - F$.

Já vimos anteriormente que $3F = 2A$, portanto $F + 2F = 2A$ que pode ser reescrito como $F = 2A - 2F$, assim

$$\begin{aligned} 4 &= 2V - F \\ &= 2V - (2A - 2F) \\ &= 2V - 2A + 2F. \end{aligned}$$

Dividindo os dois lados da igualdade anterior por 2, obtemos

$$V - A + F = 2.$$



4 A Fórmula de Euler para Planos

Nesta seção tratamos da Fórmula de Euler para polígonos simples.

Definição 6. Um polígono é dito simples quando não possui “buracos” e a intersecção de um par de arestas não consecutivas do polígono for sempre vazia. Em outras palavras, um polígono é simples se suas arestas não consecutivas, não se intersectam.

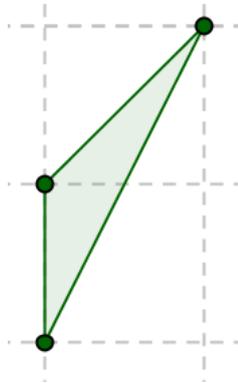


Figura 12: Polígono Simples

Na Figura 13 vemos um exemplo de um polígono não simples com intersecção de um par de arestas não consecutivas. Na Figura 14 temos um exemplo de polígono não simples com buraco.

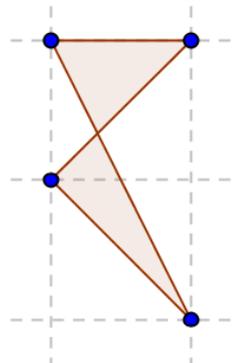


Figura 13: Polígono não Simples

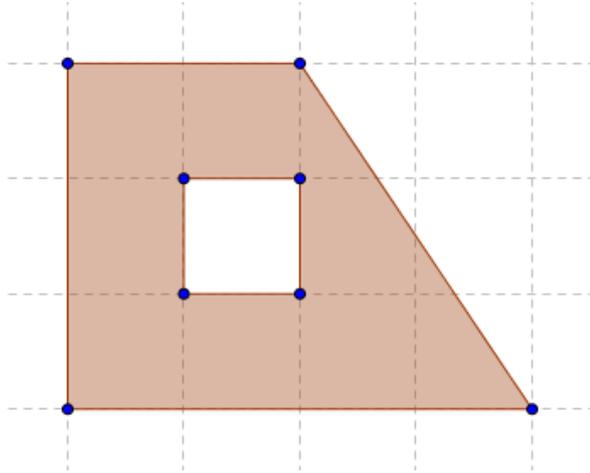


Figura 14: Polígono não Simples com Buraco

A demonstração da proposição a seguir se deve a Cauchy.

Proposição 1. *Considere uma figura plana P simples formada por polígonos simples (chamadas faces de P) em número finito, que se sobrepõem pelas respectivas arestas, de modo que duas faces quaisquer, quando se intersectam, o fazem ou segundo um vértice comum ou segundo uma aresta comum. Se F representa o número de faces, A o número de arestas e V o número de vértices da figura plana P , então*

$$V - A + F = 1.$$

Demonstração:

Primeiramente vamos triangularizar P , ou seja, para cada face de P que já não seja um triângulo, traçamos diagonais a ponto de todas as faces de P se tornem triângulos. Observamos então que estas diagonais não alteram a característica de Euler de P , já que ao acrescentar uma diagonal, A e F aumentam uma unidade cada e assim, a soma $V - A + F$ permanece inalterada.

Temos assim que cada triângulo pode ter 1, 2 ou 0 arestas livres. Uma aresta diz-se livre quando é lado de apenas uma face do poliedro. Quando tiramos um dos triângulos com uma aresta livre, o número de faces de P diminui uma unidade assim como o número de arestas. Mesmo assim a soma

$$V - (A - 1) + (F - 1) = V - A + F$$

permanece a mesma.

Quando retiramos da figura resultante, um dos triângulos com duas arestas livres, o número de faces e de vértices de P diminuem uma unidade cada e o número de arestas diminui 2 unidades, mas neste caso a característica de Euler será

$$(V - 1) - (A - 2) + (F - 1) = V - A + F,$$

ou seja, permanece inalterada.

Através de uma sequência apropriada da duas operações anteriores, podemos reduzir a um único triângulo que tem como característica de Euler,

$$V - A + F = 3 - 3 + 1 = 1.$$

■

A fórmula enunciada na proposição anterior é chamada *Fórmula de Euler para planos*. A seguir mostramos uma extensão do resultado anterior para polígonos com “buracos”.

Corolário 1. *Seja P uma figura poligonal plana com b “buracos” poligonais. Sejam A , V e F , respectivamente, o número de arestas, vértices e faces de P . Então a característica de Euler de P é dada por*

$$\chi(P) = V - A + F = 1 - b.$$

Demonstração:

Considere a figura plana P' que se obtém “completando” a figura poligonal P ao se preencher os seus buracos com novas faces.

A figura poligonal P' é simples e portanto sua característica de Euler é igual a 1. O seu número de faces é $F + b$, enquanto que o número de vértices e arestas continuam o mesmo. Portanto,

$$V - A + (F + b) = 1.$$

E daí, segue-se que

$$\chi(P) = V - A + F = 1 - b.$$

5 Reticulado

Antes de falarmos da Fórmula de Pick e sua equivalência com a Fórmula de Euler para planos precisamos definir alguns conceitos que são base para as demonstrações. Os conceitos aqui apresentados se encontram em Souza (11).

Definição 7. *Os pontos do plano cartesiano cujas coordenadas são números inteiros são chamados de pontos reticulados. Um reticulado é, portanto, um conjunto de tais*

pontos (Figura 15). Um polígono reticulado é aquele cujos vértices são pontos reticulados (Figura 16).

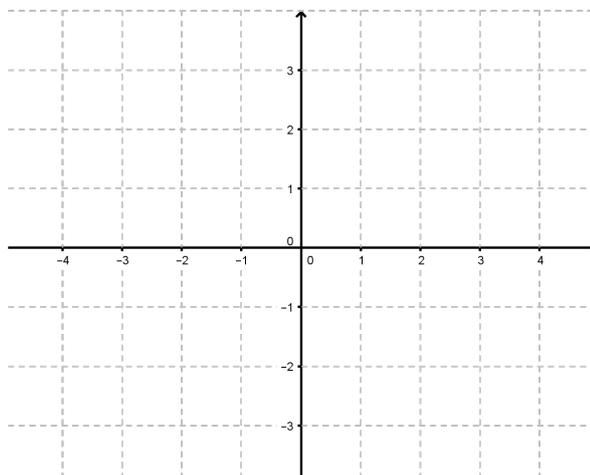


Figura 15: Reticulado

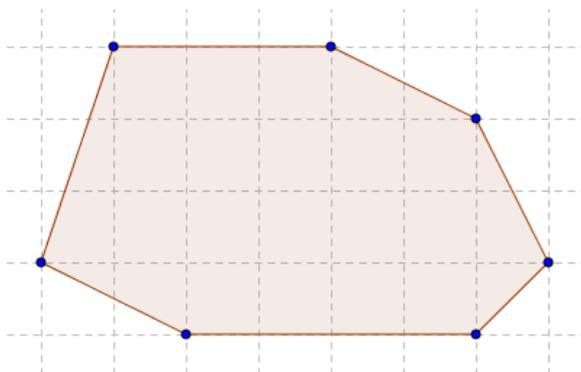


Figura 16: Polígono Reticulado

A área de um polígono reticulado simples pode ser calculada decompondo-o em triângulos fundamentais.

Definição 8. *Triângulo Fundamental (ou Primitivo) é um triângulo cujos vértices estão no reticulado e nenhum ponto reticulado está em seu interior ou em seu perímetro, exceto os vértices.*

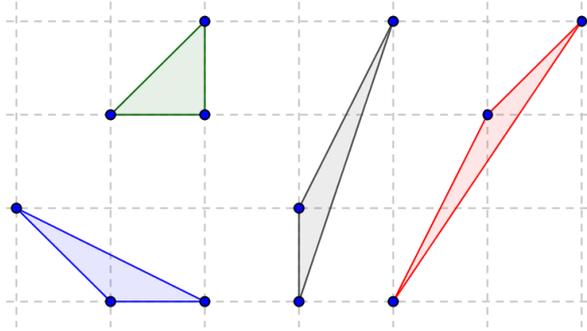


Figura 17: Triângulos Fundamentais

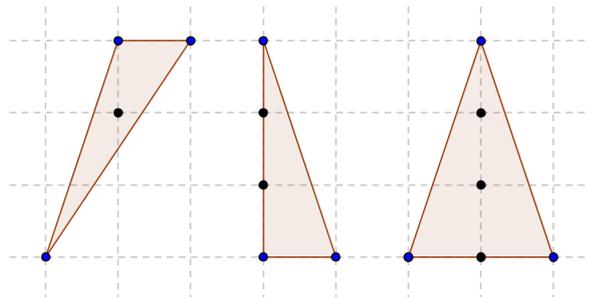


Figura 18: Triângulos não Fundamentais

A seguir demonstramos um lema que é utilizado na demonstração do fato de que a área de um triângulo fundamental é igual a $\frac{1}{2}$.

As demonstrações desta seção são feitas com base em Lima (6)

Lema 2. *Se os inteiros m, n são primos entre si então existem inteiros s, t tais que $tm - sn = 1$.*

Demonstração:

Escolhemos inteiros s, t tais que $p = tm - sn > 0$. Mostramos que se $p > 1$ então podemos modificar os inteiros s, t de modo que a expressão $tm - sn$ assumira um valor positivo menor do que p . Sendo m, n primos entre si, pelo menos um deles, digamos m , não é divisível por p , isto é, $m = pq + r$, com $0 < r < p$. O inteiro $r' = p - r$ também cumpre a condição $0 < r' < p$.

Além disso, como $r = p - r'$, tem-se

$$m = pq + r = pq + p - r' = p(q + 1) - r'.$$

Daí,

$$t(q + 1)m - s(q + 1)n = p(q + 1) = m + r',$$

ou seja,

$$(tq + t - 1)m - (sq + s)n = r', \text{ com } 0 < r' < p.$$

Repetindo o processo tantas vezes quantas sejam necessárias, chegamos a inteiros s, t tais que $tm - sn = 1$. ■

Teorema 6. *A área de todo triângulo fundamental é $\frac{1}{2}$.*

Demonstração:

Sejam $A(0, 0)$ e $B(m, n)$ as coordenadas inteiras de dois dos vértices de um triângulo fundamental ABC . Mostremos inicialmente que m e n são primos entre si. Agora, seja $d > 1$ um divisor comum de m e n , o ponto $P(m/d, n/d)$ estaria no reticulado e no interior do segmento de reta AB (veja Figura 19), logo ABC não seria um triângulo fundamental.

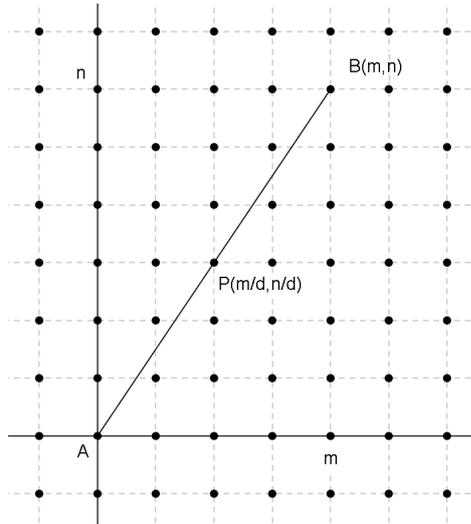


Figura 19: Segmento de Reta AB

Suponhamos $m \neq 0$. A equação da reta que passa pelo ponto C e é paralela a AB e $y = (n/m)x + b$, onde b é a ordenada do ponto $D(0, b)$ no qual a reta corta o eixo vertical, ver Figura 20. Todos os triângulos que tem AB como base e cujo terceiro vértice está sobre essa reta tem a mesma área que ABC . As áreas dos triângulos ABC e ABD são iguais a $|bm|/2$, pois $|b|$ é a medida de base e $|m|$ da altura de ABC . Devemos provar que $|b| = 1/|m|$.

Considere a equação $y = (n/m)x + \beta$ de qualquer reta paralela a AB . Sabemos que β é a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo vertical.

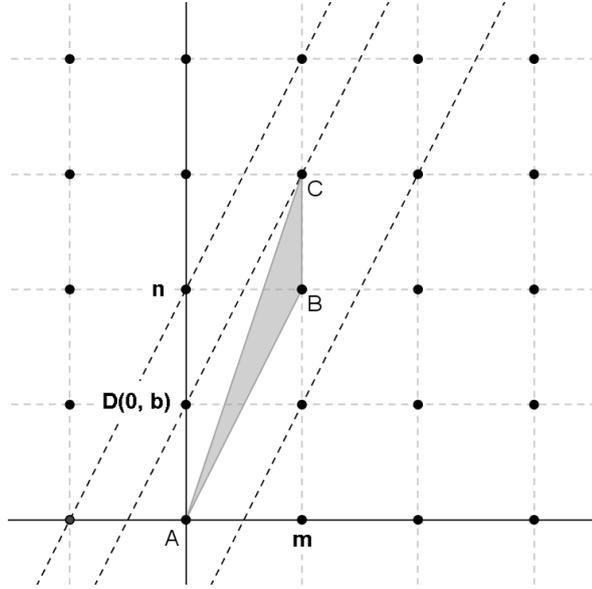


Figura 20: Triângulo Fundamental ABC

Se a reta passa por algum ponto do reticulado com coordenadas (s, t) então

$$t = (n/m)s + \beta, \text{ onde}$$

$$\beta = t - \frac{n}{m}s = \frac{tm - sn}{m}.$$

Dentre estas retas, nenhuma está mais próxima da reta AB do que a que passa pelo ponto C , para a qual temos $\beta = b$. Logo $|b|$ é o menor valor positivo que $|\beta|$ pode assumir. Por outro lado, como m e n são primos entre si, o lema acima nos assegura que existem inteiros s, t tais que $tm - sn = 1$. Portanto $1/|m|$ é o menor valor positivo de $|\beta|$, onde $|b| = 1/|m|$.

Para completar a demonstração, falta considerar o caso $m = 0$. Mas $m = 0$ obriga $n = \pm 1$ e ABC é um triângulo retângulo, por ABC ser um triângulo fundamental, ABC é a metade de um dos quadrados do reticulado, logo sua área é $1/2$. ■

Agora tratamos do problema de decompor um polígono reticulado simples (convexo ou não) em triângulos justapostos.

Teorema 7. *Todo polígono de n lados pode ser decomposto como reunião de $n-2$ triângulos justapostos, cujos vértices são vértices do polígono dado.*

Demonstração:

Vamos supor, por absurdo, que existam polígonos para os quais o teorema não é válido, seja n o menor número de lados para que exista o polígono P , o qual não

pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos justapostos. Tomemos no plano cartesiano pontos de modo que nenhum lado de P seja paralelo ao eixo das ordenadas, pois se isso acontecesse temos vários pontos de um mesmo lado com a mesma abscissa. Seja A o ponto de maior abscissa no bordo do polígono P , ver Figura 21. Como nenhum lado de P é vertical, A deve ser um vértice de P . Sejam B e C vértices adjacentes a A , existem duas possibilidades.

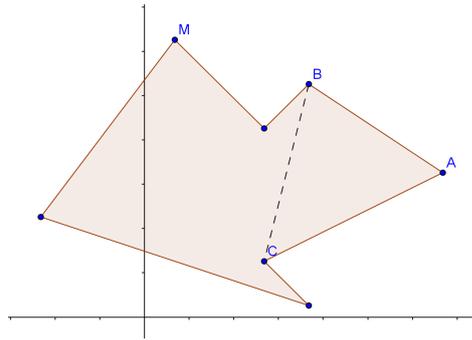


Figura 21: 1ª Possibilidade

1ª possibilidade: O triângulo ABC não contém outros vértices de P . Neste caso, o polígono P' obtido de P quando se substituem os lados AB e AC por BC , tem $n - 1$ lados. Como, por hipótese, n é o menor número de lados para o qual não vale o teorema, P' pode ser decomposto em $n - 3$ triângulos justapostos. Juntando o triângulo ABC ao polígono P' , vemos que o teorema é válido para P , o que é uma contradição.

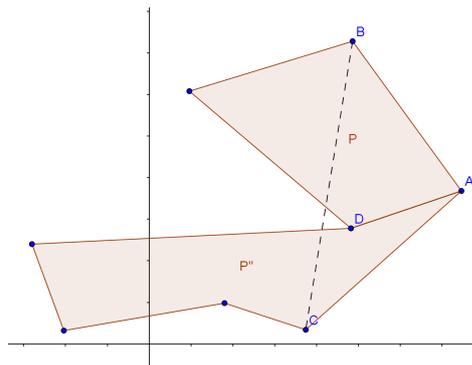


Figura 22: 2ª Possibilidade

2ª possibilidade: O triângulo ABC contém algum outro vértice do polígono P . Seja D o vértice de P contido no triângulo ABC . Então, o segmento AD decompõe P em dois polígonos P' e P'' , o primeiro com n' e o segundo com n'' lados, sendo

$n' + n'' = n + 2$, ver Figura 22. Como $n' \geq 3$ e $n'' \geq 3$, vemos que n' e n'' são ambos menores do que n . O teorema então vale para P' e P'' , que podem ser decompostos em $n' - 2$ e $n'' - 2$ triângulos justapostos, respectivamente. Justapondo estas decomposições ao longo de AD , obtemos uma decomposição de P em $(n' - 2) + (n'' - 2) = n - 2$ triângulos, o que é uma contradição. ■

A seguir um resultado importante quanto a decomposição de polígonos reticulados em triângulos fundamentais.

Teorema 8. *Todo polígono cujos vértices pertencem a um reticulado pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais.*

Demonstração:

Considere o caso em que o polígono dado é um triângulo ABC que contém n pontos do reticulado (no interior ou no bordo). Se existir algum ponto P do reticulado no interior do triângulo, traçamos segmentos de reta ligando esse ponto aos vértices A , B e C e deste modo decomparamos ABC em três triângulos, cada um contendo um número menor do que n de pontos do reticulado, ver Figura 23.

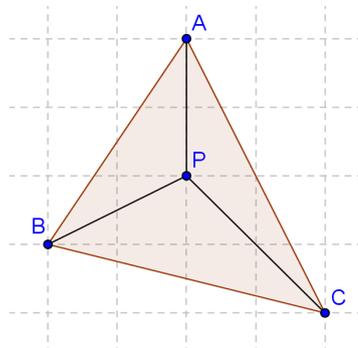


Figura 23: Ponto P no Interior do Triângulo ABC

Se houver pontos do reticulado sobre os lados de ABC , digamos sobre AB , e o ligamos ao vértice C , podemos decompor ABC em dois triângulos, cada um contendo um número menor do que n de pontos do reticulado, ver Figura 24.

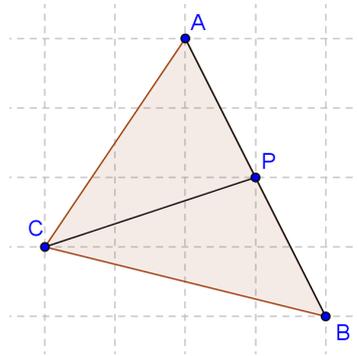


Figura 24: Ponto P no Bordo do Triângulo ABC

Prosseguindo dessa maneira, com um número finito de etapas encontramos uma decomposição de ABC em triângulos fundamentais. ■

6 Fórmula de Pick

Segundo Hermes (5) Georg Alexander Pick nasceu em uma família judia no ano de 1859 em Viena. Georg foi educado em casa por seu pai até os onze anos de idade, depois ele entrou na quarta classe do Leopoldstaedter Communal Gynsasmus, ficando nesta escola até 1875, quando realizou exames de qualificação para universidade. Ele entrou na Universidade de Viena em 1875 e publicou seu primeiro artigo matemático, no ano seguinte, com apenas dezessete anos de idade. Estudou matemática e física, graduando-se em 1879 com uma qualificação que lhe permitiria ensinar ambas as disciplinas. Seu trabalho foi extremamente amplo no campo da matemática, em sua gama de 67 artigos foram abordados muitos tópicos. O seu artigo mais lembrado, no entanto, é o Teorema ou Fórmula de Pick que apareceu no seu artigo de oito páginas Geometrisches zur Zahlenlehre publicado em Praga em 1899. O resultado de seu trabalho não recebeu muita atenção inicialmente. Todavia, após a sua citação em 1969 pelo matemático H. Steinhaus, que o incluiu em um de seus livros, este resultado atraiu muita atenção e admiração por ser simples e elegante. Pick tinha sido eleito como membro da Academia das Ciências e das Artes da República Tcheca, mas após os nazistas assumirem, ele foi excluído da Academia. Pick foi enviado para Theresienstadt em 13 de julho de 1942, morrendo duas semanas mais tarde aos 82 anos.

A demonstração deste teorema é feita com base em Lima (6)

Teorema 9. *Seja P um polígono reticulado simples sobre uma malha. Seja B o número*

de pontos da malha sobre o perímetro deste polígono e I o número de pontos da malha internos ao polígono. A área A do polígono P é dada por

$$A = I + \frac{B}{2} - 1.$$

Demonstração: Seja P um polígono com vértices em um reticulado. Indicamos por B e I , respectivamente, o número de pontos do reticulado sobre o bordo e o número de pontos no interior de P . Para provarmos o teorema basta mostrarmos que o número T de triângulos fundamentais da decomposição de P é igual a $B + 2I - 2$, pois pelo Teorema 6 todo triângulo fundamental tem área igual a $\frac{1}{2}$, logo a área de P seria igual a $\frac{T}{2}$.

Para isso, vamos calcular a soma dos ângulos internos dos T triângulos fundamentais que compõem o polígono P . Isso pode ser feito em duas etapas:

1^a) Se são T triângulos, a soma dos seus ângulos internos é igual a $T\pi$;

2^a) Calcular separadamente a soma dos ângulos com vértices no bordo, denotado por S_b , e a soma dos ângulos com vértices no interior de P , denotado por S_i . Podemos dizer que $B = B' + B''$, onde B' é o número de vértices de P e B'' é o número de pontos do reticulado que estão sobre o bordo de P mas não são vértices. Conseqüentemente, temos que S_b é igual a soma $(B' - 2)\pi$ dos ângulos internos de P mais $B''\pi$, pois os ângulos dos triângulos fundamentais com vértices em cada um dos B'' (pontos do bordo de P que não são vértices) somam um ângulo raso. Além disso, cada um dos pontos internos de P somam dois ângulos rasos, logo $S_i = 2I\pi$. Portanto,

$$\begin{aligned} S_b + S_i &= (B' - 2)\pi + B''\pi + 2I\pi \\ &= (B' - 2 + B'' + 2I)\pi \\ &= (B + 2I - 2)\pi. \end{aligned}$$

Comparando a primeira etapa com a segunda temos que $T\pi = (B + 2I - 2)\pi$, ou seja, $T = B + 2I - 2$. ■

6.1 A Fórmula de Pick e a Fórmula de Euler para Planos

O objetivo desta subseção é mostrar a equivalência entre a Fórmula de Pick e a Fórmula de Euler para planos.

Lema 3. *Seja P um polígono simples reticulado tal que a característica de Euler $\chi(P)$ seja 1. Então se triangularmos P de modo fundamental (ou seja, se dividirmos todas as faces de P em triângulos fundamentais), a característica de Euler do novo polígono P' após a triangulação de P , é a mesma, ou seja,*

$$\chi(P') = V - A + F = 1.$$

Demonstração:

Façamos a demonstração deste fato por indução. Considere um polígono simples reticulado P , ver Figura 25, cuja característica de Euler é $\chi(P) = V - A + F$.

Se em uma das faces, construirmos um triângulo elementar como na Figura 26, o novo polígono P_1 tem mais uma face, mais duas arestas e mais um vértice. Assim a característica de Euler é dada por

$$\chi(P_1) = (V + 1) - (A + 2) + (F + 1) = V - A + F,$$

ou seja, se mantém.

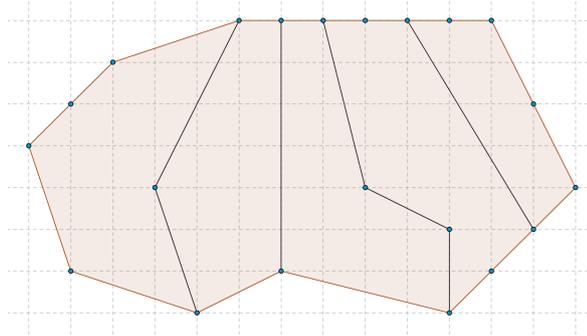


Figura 25: Polígono Reticulado P

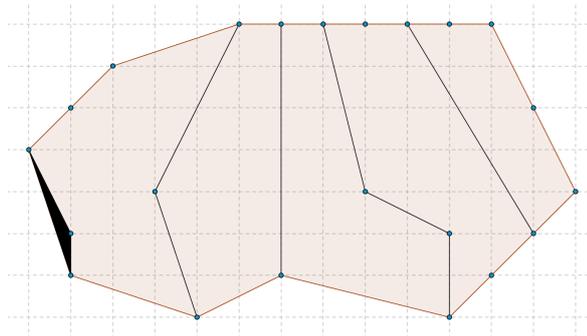


Figura 26: Triângulo Fundamental em uma das Faces de P

Agora, suponhamos que no polígono P construamos n triângulos elementares como anteriormente, de modo que eles (ou eles unidos com outros polígonos) o componham.

Com isso, temos uma nova figura poligonal P_n com mais n faces além de F , $2n$ arestas além de A e n novos vértices além de V . Neste caso,

$$\chi(P_n) = (V + n) - (A + 2n) + (F + n) = V - A + F,$$

mantendo a característica de Euler.

Agora, criando mais um triângulo elementar, como antes, em uma das faces de P_n , formamos mais uma face além das $(F + n)$ anteriores, duas novas arestas além das $(A + 2n)$ anteriores e um novo vértice além dos $(V + n)$ anteriores. Portanto,

$$\chi(P_{n+1}) = (V + n + 1) - (A + 2n + 2) + (F + n + 1) = V - A + F,$$

ou seja, a característica de Euler de P_n implica na característica de Euler de P_{n+1} . Logo, por indução sobre n , a característica de Euler se mantém para qualquer n . ■

Agora, temos teoria necessária para demonstrar a equivalência entre a Fórmula de Euler para planos e a Fórmula de Pick. As demonstrações são baseadas em Tavares (12).

Proposição 2. *Seja P uma figura poligonal simples com vértices de coordenadas inteiras, cuja área é dada por*

$$\text{Área}(P) = I + \frac{B}{2} - 1,$$

onde B representa a quantidade de pontos de coordenadas inteiras pertencentes às arestas exteriores de P e I representa a quantidade de pontos de coordenadas inteiras no interior de P . Então,

$$\chi(P) = V - A + F = 1,$$

onde V , A e F representam o número de vértices, arestas e faces de P , respectivamente.

Demonstração: Fórmula de Pick \Rightarrow Fórmula Euler para Planos

Vamos primeiramente triangularizar P em triângulos fundamentais. Isto é possível porque P possui coordenadas inteiras, bastando para isto, ligar três pontos não colineares vizinhos, como na Figura 27 a seguir. Seja P' esta nova figura poligonal triangulada.

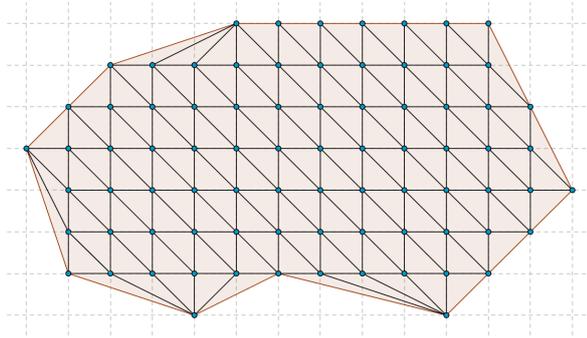


Figura 27: Polígono P Triangulado

Como o número de faces de P' é o número de triângulos fundamentais, logo

$$\text{Área}(P') = \text{Área}(P) = \frac{1}{2}F',$$

onde F' representa o número de faces de P' .

Pela Fórmula de Pick, temos que

$$\text{Área}(P) = I + \frac{B}{2} - 1.$$

Igualando as expressões anteriores, obtemos que

$$\frac{1}{2}F' = I + \frac{B}{2} - 1.$$

Logo,

$$F' = 2I + B - 2.$$

Cada uma das faces de P' é um triângulo fundamental (formado por três arestas) e possui arestas no interior de P' que pertencem a exatamente duas faces e arestas no bordo de P' que pertencem a apenas uma face. Multiplicando o número de faces por três temos contado o número de arestas interiores (n_i) duas vezes e o número de arestas no bordo (n_b) uma vez. Portanto,

$$3F' = 2n_i + n_b.$$

Mas, como B é o número de pontos no bordo de P , B também é o número de arestas no bordo de P' , pois P' é formado apenas por faces que são triângulos fundamentais.

Além disso, o número de arestas no interior de P' é igual ao número total de arestas menos o número de arestas no bordo. Portanto,

$$3F' = 2(A' - B) + B.$$

E assim,

$$A' = \frac{1}{2}(3F' + B),$$

onde A' representa o número de arestas de P' .

Mas, o número V' de vértices da figura P' é igual a soma entre o número de pontos de coordenadas inteiras no bordo de P e o número de pontos de coordenadas inteiras

no interior de P , ou seja,

$$V' = B + I.$$

Então, a característica de Euler de P' , pode ser escrita como segue

$$\begin{aligned}\chi(P') = V' - A' + F' &= B + I - \frac{1}{2}(3F' + B) + (2I + B - 2), \\ &= B + I - \frac{1}{2}(3(2I + B - 2) + B) + (2I + B - 2) = 1.\end{aligned}$$

Agora, pelo Lema 2, temos que

$$\chi(P') = \chi(P).$$

Portanto,

$$\chi(P) = V - A + F = 1.$$

■

Proposição 3. *Seja P uma figura poligonal simples com vértices de coordenadas inteiras, cuja característica de Euler é igual a 1, ou seja,*

$$\chi(P) = V - A + F = 1,$$

onde V , A e F representam o número de vértices, arestas e faces de P , respectivamente. Então

$$\text{Área}(P) = I + \frac{B}{2} - 1,$$

onde B representa a quantidade de pontos de coordenadas inteiras pertencentes ao bordo de P e I representa a quantidade de pontos de coordenadas inteiras no interior de P .

Demonstração: Fórmula de Euler para Planos \Rightarrow Fórmula de Pick

Como na proposição anterior, vamos triangular a figura poligonal P em triângulos fundamentais, e seja P' esta nova figura cujas quantidades de faces, arestas e vértices são F' , A' e V' , respectivamente. Da proposição anterior, temos

$$\text{Área}(P) = \frac{1}{2}F'.$$

Pelo Lema 2, como $\chi(P) = V - A + F = 1$, então $\chi(P') = V' - A' + F' = 1$.

Agora, utilizando as igualdades $A' = \frac{1}{2}(3F' + B)$ e $V' = B + I$, mostradas nas proposição anterior, obtemos

$$\frac{1}{2}F' = \frac{1}{2}(1 + A' - V') = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}(3F' + B) - (B + I)\right].$$

E assim,

$$\frac{F'}{4} = \frac{I}{2} + \frac{B}{4} - \frac{1}{2}.$$

A expressão acima pode ser reescrita como

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} F' = \frac{I}{2} + \frac{B}{4} - \frac{1}{2},$$

a qual é equivalente a $\frac{1}{2} \text{Área}(P) = \frac{I}{2} + \frac{B}{4} - \frac{1}{2}$, chegando a expressão da Fórmula de Pick

$$\text{Área}(P) = I + \frac{B}{2} - 1. \quad \blacksquare$$

7 Geoplano

O Geoplano é uma ferramenta importante no ensino de Geometria Plana. Construído em madeira ou plástico, tem cravados pregos ou pinos que formam uma malha (reticulado) composta por linha e colunas, chamada de Geoplano quadrangular (Figura 28). Há também o Geoplano circular e o isométrico (Figura 29).

É recomendado em situações envolvendo o cálculo de perímetro, área, figuras simétricas, arestas, vértices, construção de polígonos entre outras situações envolvendo Geometria Plana. O Geoplano tem por objetivo principal levar os alunos a explorar figuras poligonais através da construção e visualização, facilitando o desenvolvimento das habilidades de exploração espacial.



Figura 28: Geoplano Quadrangular



Figura 29: Outros Tipos de Geoplano

A escolha do Geoplano decorre da expectativa de utilização por parte de professores que atuam no ensino fundamental na esperança de que as dificuldades de ensino possam ser amenizadas pelo suporte da materialidade, segundo Pais (10). Ainda, segundo Pais (10), o uso inadequado de um recurso didático pode resultar em uma inversão didática em relação à sua finalidade pedagógica inicial. Isto ocorre quando o material passa a ser utilizado como uma finalidade em si mesmo em vez de ser visto um instrumento para a aquisição de um conhecimento específico. Nesse sentido o papel do professor é fundamental.

Os conceitos geométricos são melhores assimilados através da manipulação, construção, exploração e representação das formas geométricas, e o Geoplano desenvolve de forma simples e direta todos esses princípios.

Uma grande vantagem é que mesmo a escola não dispondo desse material, ele pode facilmente ser construído com materiais de baixo custo, inclusive é interessante o aluno participar da construção do material. De posse do Geoplano é possível introduzir o cálculo de áreas utilizando a Fórmula de Pick, fazendo a correspondência entre os pontos do Geoplano com os pontos do reticulado.

O professor pode propor uma série de atividades utilizando o Geoplano para o cálculo de áreas de polígonos simples. Os polígonos podem ser representados na malha do Geoplano como na Figuras 30. As figuras 30, 31, 32, 33 e 34 foram retiradas de Tiggemann (13).

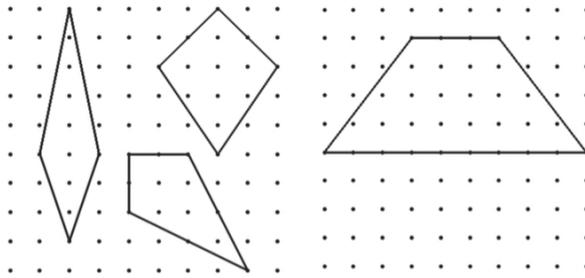


Figura 30: Polígonos no Geoplano

Os conceitos de perímetro e área podem ser trabalhados, inclusive mostrando que polígonos de mesma área podem ter perímetros diferentes, ver Figura 31.

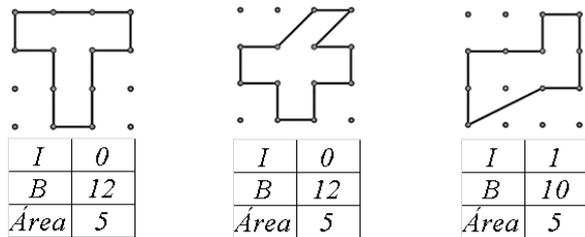


Figura 31: Polígonos com Mesma Área e Perímetros Diferentes

Também é possível mostrar que polígonos com perímetros iguais podem apresentar valores diferentes para a área, como na Figuras 32 e 33.

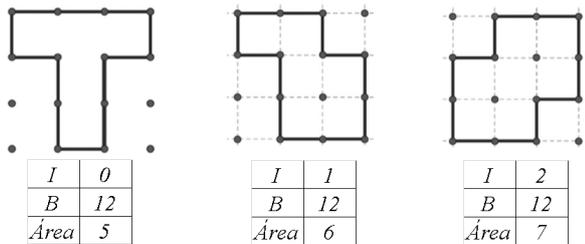


Figura 32: Polígonos com Perímetros Iguais e Áreas Diferentes

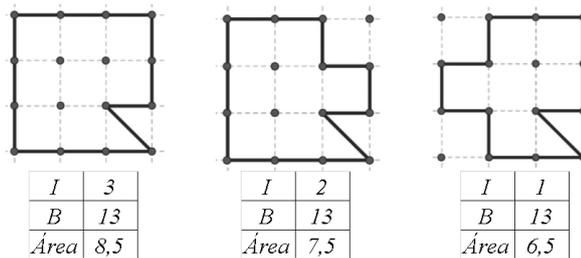


Figura 33: Polígonos com Perímetros Iguais e Áreas Diferentes

Ou ainda mostrar que existem polígonos diferentes que possuem o mesmo perímetro e a mesma área, ver Figura 34.

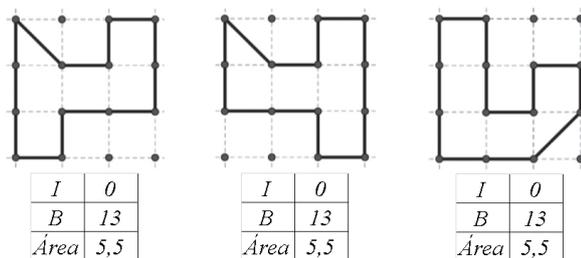


Figura 34: Polígonos com Perímetros e Áreas Iguais

Enfim, existem várias possibilidades de atividades que podem ser propostas pelo professor utilizando o Geoplano e que no caso do cálculo de área a Fórmula de Pick pode ser aplicada.

8 Geogebra

O Geogebra é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra na mesma interface. O programa é escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas. Atualmente o GeoGebra conta com uma comunidade de colaboradores em todo mundo que disponibilizam e oferecem cursos online para quem se interessa pelo software. Na Figura 35 temos a tela principal do GeoGebra.

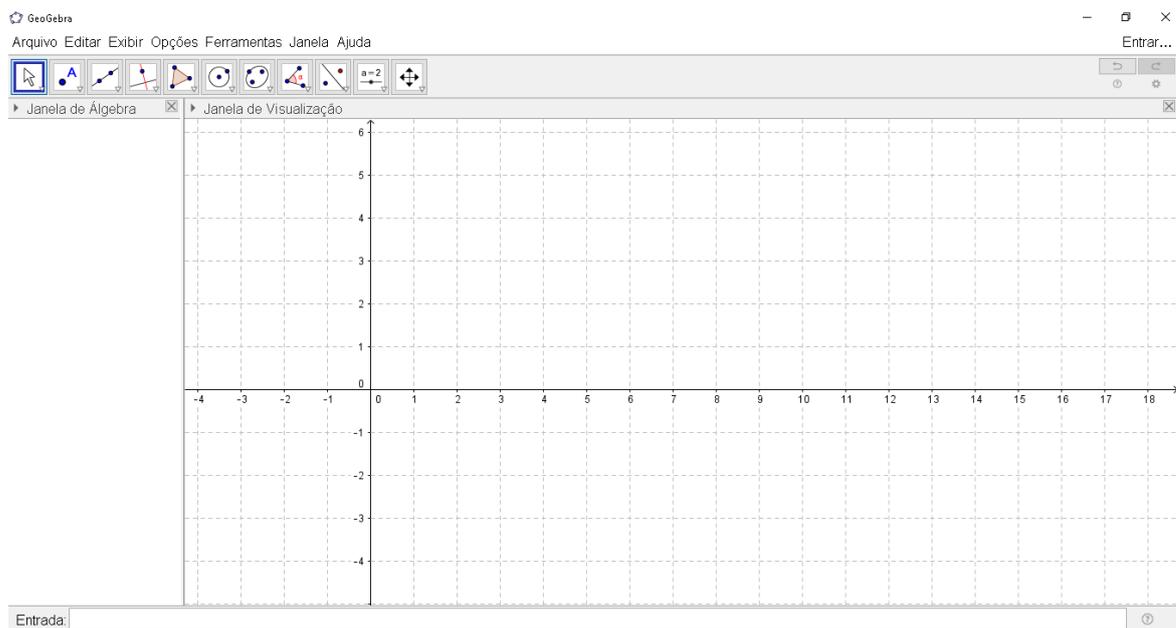


Figura 35: GeoGebra

Para a utilização do computador na educação são necessários basicamente quatro ingredientes segundo Valente (14), “o computador, o software educativo, o professor capacitado para usar o computador como meio educacional e o aluno”. Tendo a disposição o computador e o software educativo, ainda é necessário que o professor esteja familiarizado com a ferramenta, para que possa fazer uso efetivo do recurso e proporcionar aos alunos uma experiência educativa que torne este aluno agente do processo de ensino-aprendizagem, fazendo com que as atividades com uso do computador sejam colaborativa.

Há uma necessidade real de que os educadores se lancem à produção ou à assimilação crítica de inovações de caráter pedagógico, podendo, assim, aproveitar o estreito espaço de movimento existente no campo educacional para gerar mudanças que não sejam simples expressões da modernidade, segundo Brito (2). Dessa forma, no conceito de inovação que se propõe na atualidade está envolvida a utilização de tecnologias em sala de aula, o que implicará novos projetos fundamentados em concepções de ensinar e aprender diferentes daquelas das propostas já existentes.

Não são os recursos que definem a aprendizagem, são as pessoas, o projeto pedagógico, as interações, a gestão. Mas não há dúvida de que o mundo digital afeta todos os setores, as formas de produzir, de vender, de comunicar-se e de aprender, segundo Moran (8).

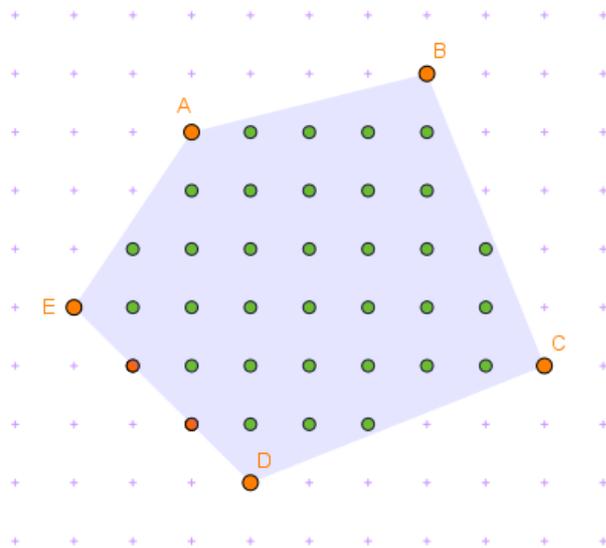
Na matemática, em relação ao uso do computador, temos a geometria dinâmica como elemento de tecnologia educacional. O uso do computador no ensino de geometria contribui para a visualização geométrica, que é vital no processo de construção do conhecimento, segundo Góes (4).

É muito útil por exemplo, quando do estudo das funções afim, quadrática, modular, exponencial e logarítmica, que são as funções que normalmente são apresentadas ao aluno do 1º ano do ensino médio e a função trigonométrica no 2º ano do ensino médio, visualizar o que acontece com o gráfico a medida que os coeficientes da função variam. É perfeitamente possível que essas mudanças gráficas sejam mostradas no quadro, mas demandaria um grande tempo para construção e não teria a mesma dinâmica que se experimenta com a utilização do computador.

8.1 A Fórmula de Pick no GeoGebra

Havendo a disponibilidade do computador é possível desenvolver as mesmas atividades feitas no Geoplano para o cálculo de áreas utilizando a Fórmula de Pick no GeoGebra, tendo a vantagem de trabalhar em um ambiente que permite uma dinâmica e visualização mais interessante.

Abaixo, nas Figuras 36, 37 e 38, alguns exemplos de áreas de polígonos reticulados calculadas no software GeoGebra. O arquivo .ggb (formato dos arquivos produzidos no GeoGebra) utilizado foi desenvolvido por Simona Riva, conhecida na comunidade GeoGebra como “mathmum” e compartilhado livremente no site (15). Originalmente o material está em inglês.



Fórmula de Pick

Em um polígono reticulado simples a área é dada pela expressão :

$$\text{Área} = I + \frac{B}{2} - 1$$

I = número de pontos reticulados no interior

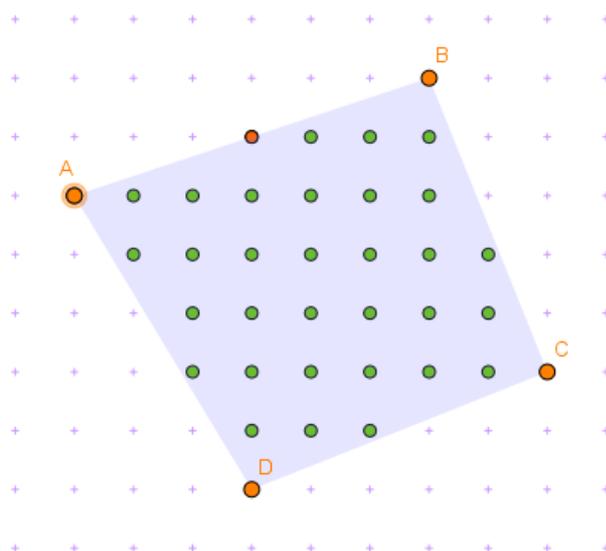
B = número de pontos reticulados no bordo

$$I = 32 \quad B = 7$$

$$\text{Area} = 32 + \frac{7}{2} - 1 = 34.5$$

Arraste os vértices do polígono : A, B, C, D, E

Figura 36: Área do Pentágono $ABCDE$



Fórmula de Pick

Em um polígono reticulado simples a área é dada pela expressão :

$$\text{Área} = I + \frac{B}{2} - 1$$

I = número de pontos reticulados no interior

B = número de pontos reticulados no bordo

$$I = 31 \quad B = 5$$

$$\text{Area} = 31 + \frac{5}{2} - 1 = 32.5$$

Arraste os vértices do polígono : A, B, C, D

Figura 37: Área do Quadrilátero $ABCD$

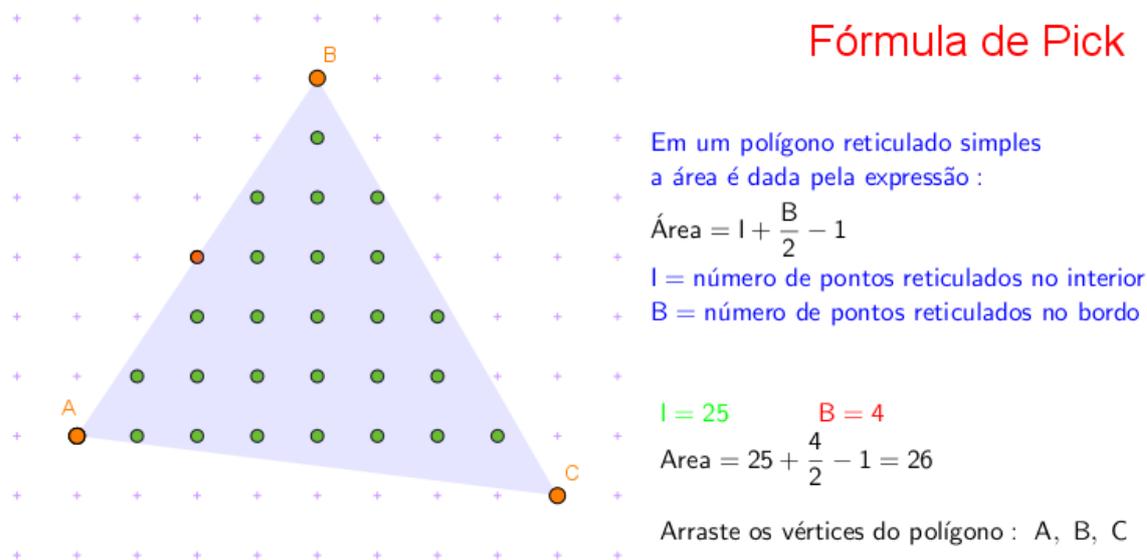


Figura 38: Área do Triângulo ABC

9 Considerações Finais

O ensino de Geometria nas escolas brasileiras, em geral, é deficitário e é preciso que se busquem novas abordagens para que as dificuldades com essa parte da matemática sejam superadas. Vimos que é completamente possível que possamos tratar na educação básica de alguns conceitos, mesmo os mais desafiadores, como a Fórmula de Euler, por mais que se utilizem ferramentas mais elementares.

A utilização de materiais pedagógicos e ambientes computacionais também tem grande contribuição na construção dos conhecimentos matemáticos, especialmente os geométricos. Cabe, portanto, ao professor buscar na medida do possível a implementação de novas abordagens que saiam um pouco do tradicional, para que tragam o ensino de matemática para mais próximo da realidade dos alunos.

Referências

- 1 AZAMBUJA FILHO, Z., *Revista do Professor de Matemática: Demonstração do Teorema de Euler para Poliedros convexos.*, 3ª Ed., Sociedade Brasileira de Matemática.

- 2 BRITO, G. S., PURIFICAÇÃO, I., *Educação e novas tecnologias: um (re)pensar*, 2^a ed., Curitiba: Editora InterSaberes, 2015. (Série Tecnologias Educacionais).
- 3 EVES, H., *Introdução à história da matemática.*, Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.
- 4 GÓES, A. R. T., GÓES, H. C., *Ensino de matemática: concepções, metodologias, tendências e organização do trabalho pedagógico*, Curitiba: InterSaberes, 2015. (Série Matemática em sala de aula)
- 5 HERMES, J. D. V., *O Teorema de Pick*, Trabalho de conclusão de curso do Mestrado Profissional em Matemática, 2014, Universidade Federal São João del-Rei - UFSJ, Sociedade Brasileira de Matemática.
- 6 LIMA, E.L., *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, Coleção Professor de Matemática, 5^a Ed., 2006, Sociedade Brasileira de Matemática, pp. 102-114.
- 7 LIMA, E.L., *Revista do Professor de Matemática: Ainda sobre o Teorema de Euler para poliedros convexos.*, 5^a Ed., Sociedade Brasileira de Matemática.
- 8 MORAN, J. M., MASETTO, M. T., BEHRENS, M. A., *Novas tecnologias e mediação pedagógica*, Campinas, São Paulo: Papyrus, 2015. (Coleção Papyrus Educação)
- 9 NASCIMENTO, M., *Uma demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos via Geometria Esférica*, Trabalho de conclusão de curso do Mestrado Profissional em Matemática, 2013, Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ, Sociedade Brasileira de Matemática.
- 10 PAIS, L.C., *Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria.* <http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf>. Acesso em 23 de janeiro de 2017.
- 11 SOUZA, F.O., *O Teorema de Pick: uma nova abordagem sobre áreas de figuras planas para o ensino básico*, Trabalho de conclusão de curso do Mestrado Profissional em Matemática, 2013, Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Sociedade Brasileira de Matemática.
- 12 TAVARES, J.N., *Teorema de Pick.* <<http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/index.html>>. Acesso em 20 de maio de 2016.

- 13 TIGGEMANN, I.S.[ET AL.] *Geoplanos e redes de pontos: Conexões e Educação Matemática*, Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013. (Série O professor de matemática em ação, volume 4)
- 14 VALENTE, J. A. (ORG.) *Computadores e conhecimento: repensando a educação*, Campinas, São Paulo: UNICAMP/NIED, 1993.
- 15 <<https://www.geogebra.org/m/VGXB8zYy>>. Acesso em 20 de setembro de 2016.