UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

ROMÊNIA KAROLINE DE AGUIAR COUTO

PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DE CÓDIGO DE BARRAS COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO DA ARITMÉTICA MODULAR E DE VETORES EM UMA TURMA DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO DE UMA ESCOLA PÚBLICA DA CIDADE DE PETROLINA-PE

JUAZEIRO - BA
2017

ROMÊNIA KAROLINE DE AGUIAR COUTO

PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DE CÓDIGO DE BARRAS COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO DA ARITMÉTICA MODULAR E DE VETORES EM UMA TURMA DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO DE UMA ESCOLA PÚBLICA DA CIDADE DE PETROLINA-PE

Trabalho apresentado à Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, Campus Juazeiro, como requisito da obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Lino Marcos Silva

JUAZEIRO - BA
2017

	Couto, Romênia Karoline de Aguiar.
C871p	Proposta utilização de código de barras como recurso didático para o ensino da aritmética modular e de vetores em uma turma do 3º ensino médio de uma escola pública da cidade de Petrolina ï PE/ Romênia Karoline de Aguiar Couto. -- Juazeiro, 2017.
	101 f: il. ; 29 cm
	Dissertação (mestrado) ï Universidade Federal do Vale do São Francisco. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional ï PROFMAT, 2017.
	Orientador: Prof. Dr. Lino Marcos da Silva
	1. Matemática (Ensino médio). 2. Aritmética. 3. Vetores. I. Tíitulo. II. Silva, Lino Marcos da. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.
	CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Renato Marques Alves

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

Universidade Federal do Vale do São Francisco

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT/UNIVASF

PROFMAT

PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DE CÓDIGO DE BARRAS COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO DA ARITMÉTICA MODULAR E DE VETORES EM UMA TURMA DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO DE UMA ESCOLA PÚBLICA DA CIDADE DE PETROLINA-PE

Por:

ROMÊNIA KAROLINE DE AGUIAR COUTO

Dissertação aprovada em 06 de julho de 2017.

Lino Marcos da S.

Prof. Dr. Lino Marcos da Silva
Orientador - PROFMAT/UNIVASF

Edson Leite Araújo

Prof. Dr. Edson Leite Araújo
Examinador Interno - PROFMAT/UNIVASF

Iracema Campos Cusati

Profa. Dra. Iracema Campos Cusati
Examinadora Externa – UPE

Juazeiro
2017

AGRADECIMENTOS

A realização pessoal e profissional é algo extremamente importante e valioso na vida de alguém, principalmente, quando alcançada com muita dedicação e determinaçãopara vencer as dificuldades e desafios enfrentados. Ao longo do caminho fui agraciada por poder contar com pessoas maravilhosas que muito contribuírampara conquista de mais esta vitória em minha vida. A essas pessoas, minha eterna gratidão.

Primeiramente, agradeço a Deus que é luz e fonte inesgotável, por mais uma graça alcançada na minha vida.

A minha mãe Graça Aguiar - uma mulher guerreira, pelo exemplo vitorioso que representa na minha vida, pelo seu amor incondicional e por sempre acreditar nas minhas realizações.

A querida Daniela Araújo, pelo apoio, força e principalmente companheirismo a mim dedicados.

A toda minha família e meus amigos pelo carinho e incentivo durante o curso. Ao Professor Lino Marcos da Silva, pela confiança, incentivo e dedicação na elaboração desse trabalho.

Ao Professor Carlos Antônio Freitas da Silva, pela gentileza de converter este trabalho para o editor de texto acadêmico e científico LATEX.

A todos os Professores do Curso, por todo o conhecimento compartilhado nesse período.

Aos colegas do PROFMAT-2015, por terem feito parte dessa vitória, especialmente Sumaia Ramos e Edson Binga, por serem os meus grandes parceiros nos estudos e trabalhos.

A minha colega de trabalho, Fátima Landin, por toda força, apoio e conhecimento.

Enfim, a todos que contribuíram de alguma forma para realização dessa conquista. Obrigada!

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho àquele que é minha fonte de inspiração, de amor, de luz e de paz, Nosso Senhor Jesus Cristo.

"Eu chamo de bravo aquele que utrapassou seus desejos, e não aquele que venceu seus inimigos; pois a mais dura vitória é a vitória sobre si mesmo."

RESUMO

Este trabalho é uma reflexão sobre a importância da contextualização no ensino da Matemática, tendo como objetivo apresentar uma proposta de utilização dos códigos de barras como recurso didático para o ensino de Aritmética Modular e de Vetores, que são temas bastante utilizados em situações práticas e que podem ser trabalhados em turmas do ensino médio. Inicialmente, apresentamos aspectos importantes dos códigos de barras, bem como a matemática envolvida nas suas estruturas; abordamos um pouco do contexto histórico da Aritmética e dos Vetores, além de expor as definições e propriedades básicas desses conteúdos. Em seguida apresentamos os resultados alcançados com a aplicação de uma sequência didática envolvendo esses assuntos em uma turma de alunos da terceira série do ensino médio de uma escola pública em Petrolina-PE. A análise dos resultados obtidos demonstrou que a estratégia de ensino proposta foi bem aceita pelos estudantes. Além disso, o desempenho dos mesmos nas atividades comprovaram que houve efetiva aprendizagem dos conteúdos.

Palavras-chaves: contextualização, códigos de barras, congruência modular, produto interno de dois vetores.

ABSTRACT

This work is a reflection on the importance of contextualization in the teaching of Mathematics, aiming to present a proposal of use of barcodes as a didactic resource for the teaching of Modular Arithmetic and Vectors, which are themes widely used in practical situations and that Can be worked in high school classes. Initially, we present important aspects of bar codes, as well as the mathematics involved in their structures; We approach a little of the historical context of Arithmetic and Vectors, besides exposing the definitions and basic properties of these contents. Next, we present the results obtained with the application of a didactic sequence involving these subjects in a class of third-grade high school students of a public school in Petrolina-PE. The analysis of the obtained results showed that the proposed teaching strategy was well accepted by the students. In addition, the same activities showed that there was an effective learning of the contents.

Key-words: contextualization, bar codes, modular congruence, internal product of two vectors.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ainda que, atualmente, autores de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio tenham buscado produzi-los valorizando aspectos relevantes sobre os conteúdos a serem abordados, dando materialidade aos conceitos e associando-os sempre que possível a situações cotidianas, percebemos que muitos deles não costumam tratar dos códigos de barras como uma concreta aplicação de definições da Aritmética Modular e de Vetores. A constatação dessa realidade coloca o estudo dessa temática em evidência, sendo uma das motivações para a realização desta pesquisa. Acrescente-se também que esta temática tem sido considerada em diversos trabalhos acadêmicos, como por exemplo, Esquinca (2013), Silva (2013) e Takahashi (2015), contudo, observamos que as abordagens apresentadas restringem-se apenas a uma aplicação prática da Aritmética, e não buscam verificar se tais propostas obteriam resultados positivos ao serem aplicadas a um grupo de alunos. Soma-se a essas considerações, a pertinência desses conteúdos na resolução de diversos problemas atuais, uma vez que os códigos de barras são amplamente utilizados pelas empresas na identificação de produtos, facilitando a organização de estoques e agilizando o processo de compras e vendas.

Nesse sentido, vale ressaltar que a utilização de aplicações práticas no ensino da Matemática encontra respaldo nos Parâmetros Curriculares de Pernambuco (2012), que preconizam, em linhas gerais, a defesa de um ensino que reconheça e valorize saberes e práticas matemáticas dos cidadãos e das comunidades; e o desenvolvimento de habilidades que contribuam mais diretamente para auxiliar o cidadão a ter uma visão crítica da sociedade em que vive e lidar com as formas usuais de representar indicadores numéricos de fenômenos econômicos, sociais, físicos, entre outros.

Diante do exposto, reconhece-se que o ensino da Matemática não deve concentrar-se em transmitir fatos e informações, mas principalmente auxiliar os alunos a construir competências básicas que os levem a uma reflexão e conhecimento mais pormenorizados dos conteúdos. Cabe ao professor, enquanto facilitador da aprendizagem, buscar por meio de metodologias inovadoras a melhor forma de desenvolver e explorar o potencial cognitivo dos alunos. Por conseguinte, consideramos necessário e oportuno investigar a viabilidade de uma proposta de ensino contextualizado da

Aritmética Modular e de Vetores, objetivando assim, sucesso na aprendizagem dos mesmos. A proposta foi desenvolvida em uma turma de 3º ano do ensino médio de uma escola pública da cidade de Petrolina-PE.

A fundamentação teórica, o detalhamento do tema, a metodologia e os resultados da pesquisa serão apresentados ao longo deste trabalho, que se encontra estruturado, da seguinte de forma:

No Capítulo 1, destinado a Fundamentação Teórica, buscamos apresentar as ideias desenvolvidas sobre a temática por especialistas, pela legislação específica e por alguns trabalhos científicos.

Os aspectos importantes sobre os códigos de barras, dentre eles a sua definição, os principais tipos de códigos e sua composição, o dígito de verificação e detecção de erros, além de um breve relato do seu contexto histórico, foram apresentados no Capítulo 2, intitulado de Código de Barras.

No Capítulo 3 - Aritmética e Vetores, apresentamos um resgaste histórico, as principais definições, proposições e propriedades acerca desses conceitos.

Os procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento desta pesquisa estão descritos no Capítulo 4, denominado Metodologia, onde apresentamos a abordagem, o lócus e sujeitos da pesquisa, além da sequência didática realizada, por meio de sub-títulos.

No Capítulo 5, destinado aos Resultados, detalhamos os questionamentos realizados e as respostas dadas pelos alunos da turma em estudo.

Em sequência são realizadas as considerações finais, momento em que apresentamos as conclusões deste trabalho e, por fim, são apresentadas as referências bibliográficas, onde elencamos todos os autores e obras utilizados na pesquisa.

Capítulo 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 INTRODUÇÃO

Há muito, discute-se a necessidade e a importância de contextualizar os conhecimentos matemáticos visando dar significado ao ensino/aprendizagem da disciplina, provendo aos alunos condições de desenvolver uma visão mais ampla do que se é ensinado, aliando assim teoria e prática. Verifica-se tal preocupação nos mais diversos trabalhos científicos - livros, artigos, teses de doutorados, dissertações, monografias - documentários e legislações específicas, dentre os quais destacam-se os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's (BRASIL 1998, 2000) e autores como Vasconcelos (2007) e Brousseau (2008).

Isso posto, compreende-se que nos dias atuais não é mais concebível que o ensino da Matemática seja visto apenas como mera transmissão e recepção de informações, mas como um processo de construção de conhecimentos que têm significados, considerando a participação ativa dos alunos, levando-os a compreenderem a importante função que a Matemática pode desempenhar no desenvolvimento cognitivo e social. Nesse sentido, os PCN's sinalizam que ao se apropriar de metodologias que viabilizem a construção de estratégias, que motivem a criatividade e o trabalho coletivo, o ensino da Matemática estará contribuindo para a formação do cidadão.

1.2 CONTEXTUALIZAÇÃO DOS CONTEÚDOS

O termo contextualizar, de acordo com dicionário Aurélio, significa ato de inserir num contexto. Ação de unir ou vincular um conhecimento ao seu ponto de início (origem) e aplicação. Assim sendo, essa argumentação remete à ideia de uma prática de ensino vislumbrada como um vínculo indispensável entre o conhecimento teórico e sua aplicação prática no cotidiano dos alunos. Nesse sentido, a contextualização constitui-se em uma ferramenta bastante útil, pois com ela é possível motivar os alunos a relacionarem o que está sendo estudado com suas experiências no dia a dia, estimulando o raciocínio, a criatividade e a curiosidade dos mesmos.

A contextualização dos conteúdos, abordada de modo recorrente na proposta curricular apresentada pelos PCN's (BRASIL, 1998) que tem por base a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB, 1996), juntamente com a interdisciplinaridade coloca-se como patamar estruturante do processo educativo. A ideia central é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, bem como a aplicação desse tema nas experiências concretas e vivenciadas pelos alunos. Dessa forma, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2000), um dos pontos de partida para o processo de contextualização é tratar como conteúdo do aprendizado matemático, científico e tecnológico, elementos do cotidiano dos educandos, da escola e de sua comunidade.

Conforme Brousseau (apud VASCONCELOS, 2007), o contexto deve estar associado a uma situação que dê sentido aos conhecimentos a serem elaborados ou que oriente a aprendizagem matemática sendo necessário aos alunos descontextualizarem o saber produzido, reconhecendo nele um conhecimento cultural a ser reutilizado. Brousseau (2008) em sua obra, denominada Teoria das Situações Didáticas, destaca que docentes e discentes são atores indispensáveis da relação de ensino e aprendizagem, bem como o meio em que a situação didática se faz presente.

Nesse patamar, é importante que o professor reflita sobre as suas práticas e se proponha a inová-las e aperfeiçoá-las sempre que necessário. Corroborando com essa linha de pensamento, Boeri (In Boeri e Vione, 2009) afirma ser fundamental para o educador que haja uma reflexão crítica sobre suas práticas, fazendo-se necessário que o mesmo perceba que ensinar é proporcionar condições para a construção dos conhecimentos pelos alunos, de forma crítica e consciente. Por sua vez, Vione (In Boeri e Vione, 2009) defende que um ensino baseado na contextualização ajuda os alunos a adquirir conhecimentos que possam ser aplicados ou associados a situações cotidianas.

Com o ensino contextualizado, os alunos têm mais chances de compreender as razões pelas quais precisam estudar certos conteúdos. Neste sentido, somando-se às contribuições, Libâneo (1991) ressalta a importância do aprender no processo educacional como um ato de conhecimento da realidade do educando, havendo sentido apenas quando há aproximação da realidade. Frente ao exposto é importante que os profissionais da educação sejam mais flexíveis, busquem sempre situações de aprendizagem que sejam motivadoras, prazerosas, que levem à construção do conhecimento e a sua (re) significação.

1.3 CONTEXTUALIZAÇÃO NO ENSINO DA MATEMÁTICA

O uso da contextualização dos conteúdos matemáticos como recurso didático é defendido por vários educadores, dentre os quais destacamos Libâneo (1991) e Brousseau (2008), os quais afirmam que esta prática possibilita trabalhar os conteúdos permitindo aos alunos estabelecerem relações entre os temas estudados na escola e suas experiências fora dela. Nesse sentido, é importante considerar o papel crucial desempenhado pela didática na condução do processo de ensino/aprendizagem.

Vergnaud (2008) enfatiza que a didática é a chave do conhecimento escolar. Mas, que é preciso compreender que existe a didática da Matemática, a didática da Física, a didática da História etc. Além disso, o autor considera que dentro da didática da Matemática, a didática das estruturas aditivas não é a mesma das estruturas multiplicativas, por exemplo, e que desta forma, é essencial tomar consciência dessas especificidades dentro de cada disciplina.

Com isto, evidencia-se a existência de diversas didáticas para cada tipo de conhecimento e levando-se em consideração a abordagem de Vergnaud, a didática a ser utilizada no ensino dos conteúdos matemáticos deve ser rigorosamente bem escolhida, pois as dificuldades dos estudantes não são as mesmas de um campo conceitual para outro. Desta forma, para que o resultado esperado, ou seja, o sucesso no aprendizado seja alcançado é fundamental que a ferramenta a ser utilizada seja dinâmica, criativa, motivadora e atrativa a ponto de desenvolver no educando o interesse pela aprendizagem, o pensamento crítico e o raciocínio lógico.

Partindo desse pressuposto, acreditamos que professores inspirados na flexibilização e dinamização de atividades propiciam um ambiente criativo e investigativo em sala, tornando as aulas atrativas e interessantes aos olhos dos estudantes, imprimindo-lhes a capacidade de (re) significar a aprendizagem ao longo de toda sua vida.

A esse respeito, nota-se o quanto é importante a utilização de aplicações dos conteúdos matemáticos por meio de exemplos, tornando-os interessantes e mais compreensivos para os alunos, fazendo com que estes reconheçam tais conhecimentos como reais e aplicáveis. Neste sentido, a contextualização dos conteúdos pode ser uma ferramenta fundamental no desenvolvimento da percepção da matemática, por parte dos alunos, como conhecimento social capaz de atrair a curiosidade e o interesse dos mesmos.

Em se tratando da Matemática, Silva (2013) destaca que esta é uma ciência dinâmica e aberta a incorporação de novas práticas pedagógicas que possibilitam o enriquecimento das aulas com aspectos presentes no desenvolvimento social e econômico dos alunos. Nesse contexto, ressaltamos a existência de trabalhos dedicados a desenvolver estudos do caráter prático da Matemática, como por exemplo, o trabalho de Milies (2008) intitulado "A Matemática dos Códigos de Barras". Neste, o autor destaca o progresso da tecnologia através da história e a importância dos conhecimentos matemáticos envolvidos na construção dos códigos de barras. Nessa perspectiva, atualmente, o avanço tecnológico tem sido um grande aliado no uso dos códigos de barras que podem ser encontrados praticamente em todos os produtos e processos da atualidade. Através dos códigos de barras pode-se identificar um produto que está sendo adquirido, proporcionando maior agilidade na hora de despacho de compra, ou até mesmo mantendo controle da origem dos mesmos.

É fato que, por trás do funcionamento dos códigos de barras existe a aplicação de diversos conceitos matemáticos. Deixar de explorá-los em sala de aula pode ser uma renúncia a uma proveitosa oportunidade de estabelecer relações entre a Matemática e a vida cotidiana. É inegável a contribuição que uma situação didática que contemple a elaboração dos códigos de barras na abordagem de conteúdos matemáticos pode proporcionar crescente valorização na pedagogia de sala de aula.

Dentre os conteúdos matemáticos relacionados aos códigos de barras, destacam-se a aritmética modular e os vetores, temas que podem ser facilmente trabalhados em turmas finais do Ensino Médio. Contudo, perante as dificuldades relacionadas à aprendizagem de conceitos da congruência modular e do estudo de vetores que vários estudantes encontram, vê-se, portanto, a necessidade de se buscar novas ferramentas que incrementem as atividades de ensino. É, pois com esta perspectiva que se enxerga a contextualização por meio dos códigos de barras, como uma proposta útil e interessante no ensino de tais conteúdos.

Diante do exposto, é patente a relevância de se contextualizar os conteúdos como uma forma de enriquecer e aperfeiçoar as aulas, tornando-as interessantes para os alunos e, consequentemente fortalecendo o processo de ensino/aprendizagem. Nesse sentido, percebemos a importância de propor a utilização da contextualização dos conteúdos aritmética modular e vetores, por meio do estudo dos códigos de barras, que serão abordados juntamente com um breve relato histórico dos mesmos no Capítulo 2.

Capítulo 2

CÓDIGO DE BARRAS

Este capítulo é destinado ao estudo dos códigos de barras, no qual será apresentada uma breve abordagem do seu contexto histórico, da sua composição e funcionamento.

2.1 INTRODUÇÃO

É comum a presença de conceitos relacionados a aritmética modular e aos vetores em várias situações da vida cotidiana, contribuindo para as soluções dos mais diversos problemas. Uma das aplicações importantes e interessantes desses conhecimentos é a que explica os segredos por trás da elaboração dos códigos de barras.

Atualmente, os códigos de barras podem ser encontrados em praticamente todos os produtos consumidos. É por meio deles que identificamos, de forma rápida e prática, esses produtos, tornando mais eficazes e seguros os sistemas de compra, venda, controle e armazenamento das mercadorias. (GS1 BRASIL, 2016).

Além disso, os códigos de barras permitem uma rápida captação de dados, tornando-os mais confiáveis; proporcionam velocidade nas transações, causando um impacto positivo nos índices de produtividade; admitem atualização em tempo real, provocando maior controle, diminuição de erros, garantindo velocidade no atendimento de pedidos e clientes, além da significativa redução nos custos das relações comerciais.

2.2 RESGATE HISTÓRICO

Em 1948, Bernard Silver, um estudante do Instituto de Tecnologia Drexel, Filadélfia, juntamente com o seu amigo Norman Joseph Woodland decidiram desenvolver um sistema que permitisse obter rapidamente a informação relativa a determinado produto. A primeira ideia de Silver e Woodland foi a utilização de padrões de tinta que brilham sob a luz ultravioleta. No entanto, a implementação dessa ideia necessitaria da utilização de uma grande quantidade de tinta para impressão, o que tornava o processo financeiramente inviável.

Após alguns meses de estudos, em outubro de 1949, eles criaram o primeiro código de barras, formado por quatro linhas brancas sobre um fundo preto, que depois foi convertido em círculos concêntricos para facilitar a leitura a partir de qualquer ângulo. Quanto mais linhas se adicionassem, mais informação podia ser codificada. A patente deste trabalho foi registrada em 1952.

De acordo com Milies (2008), em torno de 1970, a empresa de acessoria McKinsey&Co., junto com a Uniform Grocery Product Code Council definiram um modelo numérico para identificar produtos. Nesse mesmo ano, essas firmas solicitaram a várias instituições empresariais que elaborassem um código que se adequasse ao formato obtido. A empresa vencedora foi a IBM e o código foi criado por George J. Laurer.

Em 1973, o código proposto passou a ser conhecido como código UPC (Universal Product Code), sendo adotado nos Estados Unidos e Canadá. Existem várias versões sucessivas do UPC, com pequenas modificações de uma para a outra. Posteriormente, este código foi ampliado de modo a permitir uma maior difusão do sistema e também identificar o país de origem de cada produto classificado. O novo código obtido foi adotado em dezembro de 1976 com o nome EAN (European Article Numbering system).

2.3 DEFINIÇÃO

A Associação Brasileira de Automação – GS1 Brasil, define o código de barras como a representação gráfica, que por meio de barras verticais, indicam os números que são informados logo abaixo dele, possibilitando, desta forma, que o leitor humano também possa reconhecê-los. Ademais, essas barras são formadas a partir de um código binário que segue a mesma lógica da computação, ou seja, a sistemática envolve apenas dois valores: 0 (zero) e 1 (um).

A codificação de um número utilizando as barras é formada, segundo Milies (2008), por listras brancas e pretas alternadas, cujas espessuras variam entre finas, médias, grossas ou muito grossas, conforme a Figura 2.1.

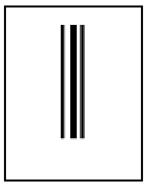
Em geral, a classificação destas listras obedece o seguinte formato: o símbolo 0 indica uma listra branca fina, o símbolo 00 uma listra branca média, 000 uma listra branca grossa e 0000 uma listra branca muito grossa. De maneira análoga, utilizamos

1, 11, 111 e 1111, para representar uma listra preta fina, preta média, preta grossa ou preta muito grossa, respectivamente.

Figura 2.1 – Representação gráfica e numérica de um código de barras

A Figura 2.2 ilustra a representação gráfica da sequência binária 1001101. Isto é, uma listra preta fina, seguida de uma listra branca média, uma listra preta média, uma listra branca fina e uma listra preta fina.

Figura 2.2 – Representação gráfica de uma sequência numérica.



Na próxima seção, abordaremos com mais detalhes os principais modelos de códigos de barras e suas particularidades.

2.4 CÓDIGO DE BARRAS UPC

O código designado de UPC (Universal Product Code) que foi oficialmente adotado em 1973 pelos Estados Unidos e Canadá, consiste em uma sequência de 12 dígitos, que é dividida em quatro partes:

- O sistema de numeração (um dígito);

- O código da empresa responsável (cinco dígitos);
- O código do produto (cinco dígitos);
- O dígito de controle (um dígito).

A Figura 2.3 ilustra a composição do código de barras UPC:

Figura 2.3 – Representação de um código de barras UPC.

Fonte: Associação Brasileira de Automação – GS 1

Neste código, cada um dos algarismos é representado por uma série de números composta por sete dígitos (0 ou 1), que é convertida em barras verticais. As várias listras brancas e pretas alternadas de grossuras e tamanhos variados são classificadas em relação à espessura, conforme mencionadas anteriormente. De acordo com a GS1, a leitura dos dados informados nas barras é feita por um aparelho que funciona como um scanner, chamado leitor de código de barras de tal maneira que as listras pretas absorvem a luz do scanner e as listras brancas refletem a luz do scanner. Observamos ainda que algumas barras do código são maiores que outras. Estas são chamadas de separadores ou delimitadores e servem para indicar a extremidade do código. Analisando a Figura 2.3, notamos que as quatro primeiras listras que aparecem no código (excluindo as que servem de limite) são: branca grossa, preta média, branca fina e preta fina, correspondendo a sequência 0001101, que de acordo com a Tabela 2.1 , representa o número 0. Em seguida, temos a seguinte ordem de listras: branca fina, preta muito grossa, branca fina e preta fina, obtendo a sequência 0111101, que conforme a Tabela 2.1, equivale ao número 3.

Ainda, em relação aos delimitadores, uma das suas principais funções é determinar de qual lado o scanner está começando a leitura, pois os separadores centrais dividem o código em dois lados: esquerdo e direito. Além do mais, na concepção de Milies (2008), os dígitos são codificados de maneira diferente quando estão do lado direito ou esquerdo do código de barras. Isto é feito conforme apresentado na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Tabela de Codificação do Código UPC

DÍGITO	DO LADO ESQUERDO	DO LADO DIREITO
0	0001101	1110010
1	0011001	1100110
2	0010011	1101100
3	0111101	1000010
4	0100011	1011100
5	0110001	1001110
6	0101111	1010000
7	0111011	1000100
8	0110111	1001000
9	0001011	1110100

Fonte: Artigo "A Matemática dos Códigos de Barras" – Revista do Professor de Matemática, n° 65.

Observamos que, de acordo com a Tabela 2.1, a codificação de um número feita pelo lado direito é obtida a partir da sua codificação à esquerda, fazendo apenas a alternância de cada 0 por 1 e, vice-versa. Assim, é possível observar que como cada sequência do lado esquerdo tem um número ímpar de dígitos iguais a 1, em consequência, cada uma das que estão à direita tem um número par desses dígitos. Desta maneira, a máquina ao verificar a paridade do dígito 1 de cada sequência de sete dígitos, instantaneamente reconhece de que lado está lendo o código.

2.5 CÓDIGO DE BARRAS EAN

Conforme o GS 1, o código EAN (European Article Numbering system) é formado por 13 dígitos em sua composição e está ilustrado na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Representação de um código de barras EAN.

Fonte: Associação Brasileira de Automação – GS 1

Assim como no sistema UPC, no sistema EAN cada dígito também é representado por uma sequência de zeros e uns. Porém, os países que utilizavam o código UPC antigo, EUA e Canadá, passaram a ser identificados com um 0, na frente, e o restante da codificação continuou sendo feito aplicando o sistema anterior. Em relação aos outros países, os dois ou três dígitos iniciais, são utilizados para a sua identificação. Por exemplo, no Brasil, usa-se a sequência 789 no início do código de barras para identificar todos os produtos aqui produzidos, enquanto na Polônia, inicia-se com a sequência 590, conforme ilustram a Figura 2.5 e a Figura 2.6, respectivamente.

Figura 2.5 – Representação de um código de barras no Brasil.

Figura 2.6 – Representação de um código de barras na Polônia.

Para que uma mesma máquina leitora possa ser usada nos dois sistemas, foi necessário fazer com que o novo dígito estivesse implícito na escrita dos demais. Para isso, conforme Milies (2008), a codificação do lado direito foi permanecida, porém, a codificação do lado esquerdo passou a variar, dependendo do dígito inicial. Isto é, devemos escolher uma sequência diferente de pares e ímpares, conforme o dígito inicial, obedecendo o critério descrito na Tabela 2.2. Além disso, a codificação de um dígito do lado esquerdo deverá ser feita de acordo com a Tabela 2.3.

Tabela 2.2 – Critério de escolha do dígito inicial.

DÍGITO INICIAL	1º	2º	3º	4º	5	6º
0	ímpar	ímpar	ímpar	ímpar	ímpar	ímpar
1	ímpar	ímpar	par	ímpar	par	par
2	ímpar	ímpar	par	par	ímpar	par
3	ímpar	ímpar	par	par	par	ímpar
4	ímpar	par	ímpar	ímpar	par	par
5	ímpar	par	par	ímpar	ímpar	par
6	ímpar	par	par	par	ímpar	ímpar
7	ímpar	par	ímpar	par	ímpar	par
8	ímpar	par	ímpar	par	par	ímpar
9	ímpar	par	par	ímpar	par	ímpar

Fonte: Artigo "A Matemática dos Códigos de Barras" – Revista do Professor de Matemática, n° 65.

Consideremos o exemplo de uma manteiga produzida em Portugal e identificada pelo código 5 606646 00001 2. Como o código se inicia com a sequência 560, logo, o dígito 5 é que deverá estar implícito na codificação dos demais. Sendo assim, deveremos utilizar a ordem de codificação para o lado esquerdo (representado pela sequência 606646), constante na sexta linha da Tabela 2.2. Isto é, devemos adotar a sequência: ímpar, par, par, ímpar, ímpar, par.

Desta forma, obtemos a seguinte paridade para cada dígito:

6	0	6	6	4	6
Ímpar	Par	Par	Ímpar	Ímpar	Par

Em seguida, para cada número desta sequência, utilizamos a ordem que está definida na Tabela 2.3. Ao consultá-la, teremos a seguinte ordem para o lado esquerdo:

Dígito	6 (Ímpar)	0 (Par)	6 (Par)	6 (Ímpar)	4 (Ímpar)	6 (Par)
Sequência	0101111	0100111	0000101	0101111	0100011	0000101

Por sua vez, para a codificação dos dígitos do lado direito (representado pela sequência 000012), não precisamos nos preocupar com a paridade, e obtemos, diretamente a sequência abaixo, conforme a Tabela 2.3

Dígito	0	0	0	1	2
Sequência	1110010	1110010	1110010	1100110	1101100

Logo, o código de barras correspondente é o representado na Figura 2.7.

Figura 2.7 – Representação do código de uma manteiga em Portugal.

Fonte: http://www.hipersuper.pt/2011/07/13.

É importante ressaltar que o padrão do código de barras adotado no Brasil é o do modelo EAN e a unidade responsável pela licença de codificação é a GS 1 - Brasil, que tem como objetivo a organização e padronização de todos os códigos.

Tabela 2.3 – Tabela de Codificação do Código EAN.

DÍGITO	LADO ESQUERDO (ÍMPAR)	LADO ESQUERDO (PAR)	LADO DIREITO
0	0001101	0100111	1110010
1	0011001	0110011	1100110
2	0010011	0011011	1101100
3	0111101	0100001	1000010
4	0100011	0011101	1011100
5	0110001	0111001	1001110
6	0101111	0000101	1010000
7	0111011	0010001	1000100
8	0110111	0001001	1001000
9	0001011	0010111	1110100

Fonte: Artigo “A Matemática dos Códigos de Barras” – Revista do Professor de Matemática, n° 65.

2.6 DÍGITO DE VERIFICAÇÃO (CONTROLE)

Todo código de barras possui um dígito de verificação, ou de controle, que é um recurso para a detecção de erros. Esse dígito, geralmente, é o último algarismo da sequência, já que os primeiros dígitos já são pré-estabelecidos e são reservados para identificar o país de origem, o fabricante, além de especificar o produto.

Conforme destaca Milies (2008), nos dois sistemas, EAN e UPC, o último dígito, ou dígito de verificação, será determinado pelos primeiros dígitos, os doze primeiros, no caso do sistema EAN e, pelos onze primeiros dígitos, no caso do sistema UPC.

O dígito verificador é calculado por meio de um algoritmo simples, o qual será explicado a seguir. Vamos supor que um determinado produto está identificado, no sistema EAN, por uma dada sequência de dígitos $a_1a_2a_3 \ldots a_{13}$. Para facilitar o entendimento, escreveremos esta sequência como um vetor de 13 coordenadas. Denotando o dígito de verificação, no caso, o décimo terceiro dígito por x, o código em questão será representado pelo seguinte vetor:

$$u = (a_1, a_2, a_3, ..., a_{12}, x).$$

Para esse fim, o sistema EAN utiliza um vetor fixo w, chamado vetor de pesos, o qual é definido por

$$w = (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1).$$

Agora, calculando o produto escalar dos vetores u e w, isto é,

$$u \cdot w = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{12}, x) \cdot (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1), \qquad (2 - 1)$$

obtemos:

$$u \cdot w = (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} + x) + 3(a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12}).$$

O dígito de verificação x deve ser escolhido de forma tal que a soma em $(2-1)$ seja um múltiplo de 10, isto é,

$$u \cdot w \equiv 0 \mod 10. \qquad (2 - 2)$$

Se o código for do tipo UPC, ou seja, tenha 12 dígitos, a única modificação ocorre no vetor de pesos que terá uma coordenada a menos. Neste caso, a primeira coordenada do vetor w será o dígito 3. Desta forma,

$$w = (3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1).$$

Logo, para este tipo de código, teremos,

$$\begin{aligned} u \cdot w &= (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{11}, x) \cdot (3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1) \\ &= 3.(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + x), \end{aligned} \tag{2 - 3}$$

sendo x tal que $u \cdot w \equiv 0 \mod 10,$ do mesmo modo que o caso anterior.

Com o intuito de exemplificar esse processo, consideremos o código de barras, cujos números que indicam o país de origem, o fabricante o produto são 5 901234 12345. Vamos verificar como foi determinado o dígito de verificação.

Seja $u = (5, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, x)$. Como o código é do tipo EAN, o vetor de pesos será $w = (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1)$. Calculando o produto escalar dos vetores u e w, obtemos: $u \cdot w = 5 + 27 + 0 + 3 + 2 + 9 + 4 + 3 + 2 + 9 + 4 + 15 + x.$ Conforme definido na equação ($2 - 3$), devemos ter

$$83 + x \equiv 0 \mod 10.$$

Portanto, $x = 7.$

Observamos que no cálculo do dígito verificador, foram utilizados os conceitos de vetores e aritmética modular, temas centrais desse trabalho os quais serão detalhados no Capítulo 3.

2.7 DETECÇÃO DE ERROS

Quando o leitor óptico, por algum motivo, não consegue realizar a leitura do código de barras, sendo necessário que o operador insira manualmente as informações relativas ao mesmo, digitando os algarismos localizados abaixo das barras, é possível que aconteça uma falha e o número digitado não corresponda ao código de barras em questão. Caso algum dos algarismos seja inserido fora da ordem ou incorretamente é provável que o resultado da verificação não seja um número congruente a zero módulo dez. Nessa circunstância, o processador emitirá um sinal sonoro alertando que ocorreu um erro de digitação. Esquinca (2013) destaca que a possibilidade de uma falha na digitação ocorrer e não ser detectada é muito pequena.

De acordo com Milies (2008), se o digitador comete apenas um erro de digitação, trocando um dos dígitos a_i por outro valor, digamos a_j, chamado de erro singular, o produto $u \cdot w$ não será congruente a zero módulo dez e desta forma será possível detectar que o erro foi cometido. No entanto, se mais de um algarismo for digitado incorretamente, provavelmente o erro ainda poderá ser identificado, mas já não podemos ter certeza, pois eles poderiam se compensar reciprocamente e a soma ainda continuaria sendo um múltiplo de dez, como por exemplo, suponhamos que o código de barras 5 901234 12345 7 fosse erroneamente digitado como 5 904234 12342 7 este ainda continuaria sendo congruente a zero módulo dez.

Existem outros tipos de erro que podem ocorrer. Trata-se, da troca da posição dos algarismos digitados, que neste caso, chamamos de erro de transposição. Um dos erros de transposição recorrente, no dia a dia, é o erro chamado de transposição adjacente, que acontece quando há a troca na ordem de dois números consecutivos. Neste caso, o erro pode ou não ser detectado. De fato, a existência do vetor de pesos é de extrema importância para a detecção de erros na digitação dos algarismos, pois se a escolha do dígito de controle x fosse feita somente de modo que,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{12} + x \equiv 0 \mod 10,$$

o erro de digitação de um único dígito (erro singular) seria identificado, porém, no caso de apenas trocar a ordem de dois dígitos (erro de transposição adjacente) e digitar corretamente os demais algarismos, poderia ou não ser identificado.

Consideremos o número 7 898945 98718 9 correspondente a um código de barras de um produto qualquer. Vamos analisar, se o erro seria detectado, caso número fosse digitado das seguintes maneiras:

a) 7 898954 98718 9 (45 foi digitado como 54)

Neste exemplo, o vetor u, correspondente é $u = (7898495987189)$. Como o código é do tipo EAN, o vetor de pesos a ser utilizados é $w = (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1)$.

Assim,

$$u.w = 7 + 24 + 9 + 24 + 9 + 15 + 4 + 27 + 8 + 21 + 1 + 24 + 9 = 182.$$

Mas, 182 não é congruente a 0 módulo 10. Logo, o erro seria detectado.

b) 7 898495 98718 9 (94 foi digitado como 49)

Neste caso, teremos:

$$u.w = 7 + 24 + 9 + 24 + 4 + 27 + 5 + 27 + 8 + 21 + 1 + 24 + 9 = 190$$

Como $190 \equiv 0 \mod 10$, logo o erro não seria detectado.

Este exemplo mostra que o sistema de detecção adotado acima não é capaz de identificar todo erro de transposição cometido.

Proposição 2.1 *Uma transposição adjacente será detectada pelo sistema decodificação EAN se, e somente se,* $|a_i - a_{i+1}| \neq 5.$

Demonstração. Para esta demonstração, utilizaremos a técnica contrapositiva. Considere que o código

$$u = (a_1, a_2, ..., a_i, a_{i+1}, ..., a_{12}, a_{13})$$

tenha sido digitado

$$u = (a_1, a_2, ..., a_{i+1}, a_i, ..., a_{12}, a_{13}).$$

Vamos supor que o erro não tenha sido detectado. Assim, temos como válidas as duas congruências abaixo:

$$u \cdot w = a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + ... + a_i + 3a_{i+1} + ... + 3a_{12} + a_{13} \equiv 0 \mod 10 \qquad (2 - 4)$$

$$u \cdot w = a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + ... + a_{i+1} + 3a_i + ... + 3a_{12} + a_{13} \equiv 0 \mod 10 \qquad (2 - 5)$$

Subtraindo a equação (2 - 5) da (2 - 4) obtemos,

$$2a_{i+1} - 2a_i \equiv 0 \mod 10.$$

Daí,

$$2(a_{i+1} - a_i) \equiv 0 \mod 10,$$

o que implica $10|2(a_{i+1} - a_i)$. Logo, $2(a_{i+1} - a_i) = 10k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.. Consequentemente, $a_{i+1} - a_i = 5k$. Deste modo, temos que $5|a_{i+1} - a_i$. Assim, $a_{i+1} - a_i \equiv 0 \mod 5$. Como $a_1 \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$, então para que $a_{i+1} - a_i \equiv 0 \mod 5$, devemos ter $a_{i+1} - a_i = 5$ ou $a_{i+1} - a_i = -5$, ou seja, $|a_{i+1} - a_i| = 5$. Em outras palavras, um erro será detectado se, e somente se, $a_{i+1} - a_i \neq 5$. $\square$

Neste capítulo, apresentamos as noções básicas dos códigos de barras, além dos aspectos da teoria matemática que fundamentam a construção dos mesmos. A partir desta abordagem, percebemos que o seu ensino nas aulas de matemática pode ser um elemento motivador para os alunos, visto que é um bom exemplo da aplicação de Aritmética Modular e do estudo de Vetores.

Capítulo 3

ARITMÉTICA E VETORES

Neste capítulo, apresentaremos um pouco da história da aritmética e dos vetores, destacando alguns fatos que retratam as suas contribuições à humanidade. Além disso, faremos um estudo sobre a Aritmética Modular (dos Restos) e sobre os Vetores que são conceitos de grande importância na Matemática e muito utilizados nas resoluções de problemas cotidianos.

3.1 ARITMÉTICA

Aritmética é a mais elementar e mais antiga das ramificações da Matemática. A palavra aritmética também é usada para se referir à Teoria dos Números, ramo da Matemática pura que estuda mais profundamente as propriedades dos números em geral. (Lorensatti, 2012).

A Aritmética é, justamente, o ramo da Matemática que lida com os números e com as operações possíveis entre eles, sendo considerada a ciência dos números.

3.1.1 Resgate Histórico

A aritmética é parte integral de uma herança cultural diversificada, desta forma, percebe-se a relevância do seu contexto histórico no ensino da mesma em sala de aula. Além disso, a história da aritmética está inteiramente ligada à necessidade humana de solucionar os problemas surgidos nas suas vivências cotidianas, que vem desde o período do surgimento da contagem até a definição formal dos números e operações aritméticas sobre eles por um sistema de axiomas.

A aritmética tornou-se uma necessidade prática, a longo prazo, para se obter medidas simples e cálculos. Nesse sentido, Lorensatti (2012) destaca que as técnicas de contar e calcular foram fatos estabelecidos ao longo de grandes acontecimentos da história, e que algumas delas acabaram se impondo de forma que hoje se tem quase uma universalidade dessas práticas.

A história da Matemática mostra que os Egípcios e os Mesopotâmicos tiveram grande importância para o desenvolvimento da mesma. No que diz respeito à contribuição dada à aritmética pelos Egípcios, as informações provêm praticamente de um único documento, o papiro de Rhind, que de acordo com Eves (2011), contém um texto matemático na forma de manual prático contendo 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. O mesmo é datado de 1650 a.C., mas há evidências de que os métodos ali exemplificados seriam muito mais antigos.

Figura 3.1 – Uma parte do papiro *Rhind* depositado no *Museu Britânico, Londres.*

No tocante à contribuição dos mesopotâmicos, Mol (2013) afirma que a matemática deles tinha um aspecto eminentemente prático, uma vez que os mesmos desenvolveram um extenso conhecimento de cálculos e medidas, que se aplicava a problemas de natureza econômica e comercial. Naquela época, os babilônicos, assim também chamados os povos que habitavam a região da Mesopotâmia, usavam como suporte para sua escrita, placas de argila, que eram marcadas com estilete e, em seguida, eram cozidas ou secas ao sol para aumentar a sua durabilidade. Conforme Eves (2011), muitas dessas tabuletas continham textos que tratavam da distribuição de produtos agrícolas e de cálculos aritméticos.

Figura 3.2 – Placa de argila usada para a escrita pelos mesopotâmios.

Para Lorensatti (2012), os matemáticos gregos também tiveram grande contribuição para o desenvolvimento da aritmética, particularmente os pitagóricos, que tentaram usar números para identificar todas as leis do mundo. Além destes, importante também destacar dois matemáticos gregos que muito contribuíram para aritmética: Diofanto, autor da obra *A Aritmética*, que é uma coleção de cento e cinquenta problemas aritméticos; e Euclides, autor dos livros aritméticos *Os Elementos.* A partir do trabalho de Euclides, a matemática grega passou a se distinguir por sua estrutura teórica, pois apesar dos egípcios e mesopotâmicos já possuírem técnicas de cálculo, os seus métodos eram apresentados na forma de solução apenas para problemas específico. (ROQUE, 2010).

Izidoro de Sevilha - um dos grandes responsáveis pela transmissão da cultura clássica para a Idade Média apresentou diversos conceitos a respeito da Aritmética, dentre eles “A Aritmética é a disciplina da quantidade numerável em si mesma considerada”. (LORENSATTI, 2012)

Por outro lado, também na Idade Média, a matemática se desenvolveu principalmente em países islâmicos num chamado “período de ouro”, onde Bagdá era o centro do império mulçumano. Naquela época, as principais áreas de aplicação da aritmética eram o comércio e os cálculos aproximados. Segundo Almeida (2010), os primeiros trabalhos matemáticos desenvolvidos por estudiosos árabes eram predominantemente práticos e provavelmente apoiados numa tradição científica indiana. Nesta linha de pensamento, Eves (2011) comenta que, durante o reinado do Califa Al- Mansur levaram-se para Bagdá os trabalhos de Brahmagupta, matemático e astrônomo indiano, que, com o patrocínio real, foram traduzidos para o árabe. Dentre os matemáticos daquele período, é importante destacar o persa **Abu Abdallah Mohammed Ibn Musa Al-Khwarizmi**, que se aprofundou no estudo de várias ciências, dentre elas a aritmética, contribuindo bastante para a sua difusão.

Em sua principal obra *Liber Abaci* (Livro dos Ábacos), escrito em 1202, o italiano Leonardo Fibonacci tornou-se um defensor do sistema de numeração indiano, dedicando cinco capítulos do livro à aritmética dos números inteiros. Para Lorensatti (2012), os feitos de Leonardo de Pisa, como também era conhecido Fibonacci, deram início a uma nova era da matemática no ocidente, responsável por influenciar a introdução dos algarismos indo-arábicos e os métodos de cálculo em problemas do cotidiano. A esse respeito, Almeida (2010) afirma que o *Livro dos Ábacos* de Fibonacci levou a Aritmética prática ao seu nível mais elevado.

Por sua vez, na Idade Moderna, o conceito de número sofreu uma mudança bastante significativa. Pois, em tempos anteriores, o campo dos números atribuía apenas números racionais positivos, e desde o século XV, cada vez mais se reconhece os números irracionais, números com expoentes inteiros, positivos e negativos. Além disso, em 1948 foi impressa a mais antiga obra de aritmética, intitulada *Aritmética de Treviso*, escrita por um anônimo, que tratou de uma aritmética amplamente comercial. (EVES, 2011).

Ainda nesse período histórico, surge um gênio da Matemática, o francês Piérre de Fermat. Dentre as contribuições de Fermat para a matemática destaca-se a fundação da Teoria dos Números. Grande parte de seus trabalhos eram baseados na obra *Aritmética* de Diofanto. Posteriormente, as ideias de Fermat atraíram o interesse de Leonardo Euller, que estudou por várias décadas a teoria dos números. Euller foi o primeiro a aplicar outros ramos da matemática a problemas da teoria dos números.

Ainda sob o ponto de vista de Eves (2011), no século XIX, foram feitas as mais importantes descobertas sobre os números primos, dentre elas, está o surpreendente resultado relacionado à distribuição dos primos, chamado de Teorema dos Números Primos. Este teorema foi conjecturado por Carl Friedrich Gauss, após a análise de uma tábua de números primos.

3.2 ESTUDO DA ARITMÉTICA MODULAR

A Aritmética Modular é uma parte da Matemática que abrange uma quantidade significativa de teoremas e propriedades. Abordaremos aqui, apenas as definições, teoremas e propriedades que entendemos serem necessários à introdução deste conhecimento em turmas do ensino médio. A princípio, faremos um breve estudo sobre a divisibilidade e a divisão Euclidiana que julgamos fundamentais para uma maior compreensão a respeito da Aritmética dos Restos. Os resultados aqui apresentados foram extraídos ou baseados do livro de Hefez (2013).

3.2.1 Números Inteiros

Os números inteiros estão presentes em várias situações do nosso dia a dia, como por exemplo, para medir temperaturas, determinar a quantidade de andares de um prédio, entre outros, sendo relevante um breve estudo, na presente seção, sobre estes números.

De acordo com Hefez (2013), o conceito de números inteiros teve origem no conceito de número natural, o qual foi inicialmente utilizado em problemas de contagem. O número natural, designado pelo símbolo $\mathbb{N}$, está caracterizado por uma lista de axiomas estabelecidos pelo matemático Giuseppe Peano, que definiu os números naturais como a sequência $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

No que diz respeito ao número inteiro, a evolução da noção intuitiva do mesmo para um conceito mais aprofundado ocorreu de forma muito lenta. Apenas no final do século XIX, a noção de número passou a ser baseada em conceitos da teoria dos conjuntos os quais eram considerados mais primitivos. Nesta seção, abordaremos apenas a ideia intuitiva dos números inteiros, que denotaremos por $\mathbb{Z}$, formado pelos números naturais, seus simétricos e o número zero, ou seja, $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

No conjunto dos números inteiros, as operações de adição e multiplicação estão bem definidas, no entanto, o mesmo não ocorre com a divisão. De fato, a divisão de um número inteiro por outro nem sempre é possível. A relação de divisibilidade entre números inteiros expressa a possibilidade de efetuar ou não a divisão entre os inteiros.

3.2.2 Divisibilidade

Definição 3.1 *Dados dois números inteiros a e b, dizemos que a divide b, e escrevemos $a|b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ca$. Neste caso, diremos também que a é um divisor ou um fator de b ou, ainda, que b é um múltiplo de a.*

Se a não divide b, utilizamos a notação $a \nmid b$, significando que não existe algum inteiro c tal que $b = ca$.

Exemplos

a) $5|10$, pois existe $c = 2 \in \mathbb{Z}$ tal que$10 = 2 \cdot 5$.

b) $7|28$, pois existe $c = 4 \in \mathbb{Z}$ tal que $28 = 4 \cdot 7$.

c) $3 \nmid 16$, pois não existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $16 = c \cdot 3$.

Estabeleceremos a seguir algumas das propriedades da divisibilidade. O estudo de tais propriedades é importante, pois as mesmas auxiliam nas mais diversas situações problemas.

Propriedade 3.2 *Sejam* $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *Temos que* $1|a$, $a|a$ *e* $a|0$.

Demonstração. Isto decorre das igualdades $a = a \cdot 1$, $a = 1 \cdot a$ e $0 = 0 \cdot a$. □

Propriedade 3.3 *Sejam* $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *Se* $a|b$ *e* $b|c$, *então* $a|c$.

Demonstração. Se $a|b$ e $b|c$, logo existem $m, n \in \mathbb{Z}$, tais que $b = m \cdot a$ e $c = n \cdot b$. Substituindo o valor de b da primeira equação na segunda, obtemos

$$c = n \cdot b = n \cdot m \cdot a = (m \cdot n) \cdot a,$$

o que nos mostra que $a|c$. □

Propriedade 3.4 *Sejam* $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *Se* $a|b$ *e* $c|d$, *então* $ac|bd$.

Demonstração. Sabendo que $a|b$ e $c|d$, logo existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $b = m \cdot a$ e $d = n \cdot c$.

Então,

$$b \cdot d = a \cdot n \cdot c = (m \cdot n) \cdot a \cdot c,$$

o que nos mostra que $ac|bd$. □

Propriedade 3.5 *Sejam* $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *tais que* $a|(b \pm c)$. *Então,* $a|b$ *se, e somente se,* $a|c$.

Demonstração. Suponhamos que $a|(b + c)$. Logo, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b + c = k \cdot a. \tag{3 - 1}$$

Daí, se $a|b$, temos que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b = m \cdot a. \tag{3 - 2}$$

Substituindo o valor de b da equação ($3-2$) na equação ($3-1$), obtemos $m \cdot a + c = k \cdot a$, o que implica

$$c = k \cdot a - m \cdot a = (k - m)a$$

o que mostra que $a|c$.

Reciprocamente, se $a|c$, temos que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$c = n \cdot a. \tag{3 - 3}$$

Agora, substituindo o valor de c obtido em ($3-3$) na equação ($3-1$), teremos que $b + n \cdot a = k \cdot a$, o que implica

$$b = k \cdot a - n \cdot a = (k - n) \cdot a,$$

o que mostra que $a|b$. De modo análogo, mostramos que $a|(b-c)$. □

Propriedade 3.6 *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tais que $a|b$ e $a|c$, então $a|(xb + yc)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Se $a|b$ e $a|c$, logo existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $b = m\dot{a}$ e $c = n \cdot a$, por conseguinte, $bx = m \cdot a \cdot x$ e $cy = n \cdot a \cdot y$. Agora, somando estas últimas igualdades, obtemos

$$bx + yc = m \cdot a \cdot x + n \cdot a \cdot x = x \cdot m \cdot a + y \cdot n \cdot a,$$

daí

$$xb + yc = (x \cdot m + y \cdot n)a$$

e, portanto,

$$a|(xb + yc).$$

□

Propriedade 3.7 *Dados $a, b \in \mathbb{N}$. Se $a|b$, então $a \leq b$.*

Demonstração. Se $a|b$, logo existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = c \cdot a$. Como $a, b > 0$, pela hipótese, segue-se que $c \in \mathbb{N}$. Assim, $1 \leq c$, daí, $1 \cdot a \leq c \cdot a = b$ e, portanto, $a \leq b$. □

3.2.3 Divisão Euclidiana

Quando não existir uma relação de divisibilidade entre dois números inteiros, veremos que, ainda sim, será possível efetuar uma divisão com resto, chamada divisão euclidiana.

Teorema 3.8 *Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r, tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r \leq |b|$.*

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar a existência dos inteiros q e r, e em seguida a unicidade dos mesmos. Para isto, consideremos o conjunto

$$S = \{x = a - by; \quad y \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\}).$$

i) Existência:

Pela Propriedade Arquimediana[1], existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $a - nb > 0$, logo S é não vazio. Além disso, conjunto S é limitado inferiormente por 0, logo, pelo Princípio da Boa Ordenação[2], temos que S possui um menor elemento r. Vamos, então supor que $r = a - bq$. Sabemos que $r \geq 0$. Vamos mostrar que $r < |b|$. Suponhamos, por absurdo, que $r \geq |b|$. Portanto, existe $s \in \mathbb{N} \cap \{0\}$ tal que $r = |b| + s$, logo $0 \leq s < r$. Mas isto contradiz o fato de r ser o menor elemento de S, pois $s = (b \pm 1) \in S$, com $s < r$.

ii) Unicidade:

Suponhamos que $a = bq + r = bq' + r'$, onde $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < |b|$ e $0 \leq r' < |b|$. Assim temos que $-|b| < -r \leq r' - r \leq r' < |b|$. Daí, $|r' - r| < |b|$. Por outro lado, $b(q - q') = r' - r$, o que implica que $|b||q - q'| = |r' - r| < |b|$, o que só é possível se $q = q'$ e consequentemente, $r = r'$. □

No Teorema 3.8, os números q e r são chamados, respectivamente, de quociente e de resto da divisão de a por b. Da divisão euclidiana, temos que o resto r da divisão de a por b é igual zero se, e somente se, b divide a.

De acordo com este teorema, o quociente e o resto da divisão de 19 por 5 são $q = 3$ e $r = 4$; e o quociente e a divisão de (-19) por 5 são $q = -4$ e $r = 1$.

[1]A Propriedade Arquimediana estabelece que dados $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $nb > a$

[2] O Princípio da Boa Ordenação determina que se S é um subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$ e limitado inferiormente, então S possui um menor elemento.

Neste mesmo sentido, dado um número inteiro $n \in \mathbb{Z}$ qualquer, temos duas possibilidades:

i) o resto da divisão de n por 2 é 0, isto é, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2q$ ou

ii) o resto da divisão de n por 2 é 1, ou seja, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2q + 1.$

Portanto, os números inteiros se dividem em duas classes, a dos números da forma $2q$ para algum $q \in \mathbb{N},$ chamados de números pares, e a dos números da forma $2q + 1$ para algum $q \in \mathbb{N},$ chamados de números ímpares.

3.2.4 Aritmética dos Restos

Nesta seção, apresentaremos uma das noções mais importantes da aritmética, introduzida por Carl Friedrich Gauss, que trata de uma aritmética com os restos da divisão euclidiana por um número fixado.

Definição 3.9 *Seja m um número natural, com $m > 1.$ Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, escrevemos:*

$$a \equiv b \mod m.$$

Por exemplo, $19 \equiv 11 \mod 2$, já que os restos da divisão de 19 e de 11 por 2 são iguais a 1. Quando a relação $a \equiv b \mod m$ for falsa, diremos que a e b não são congruentes, ou que são incongruentes módulo m e escrevemos

$$a \not\equiv b \mod m.$$

Todo número inteiro é congruente módulo m ao seu resto pela divisão euclidiana por $m.$ De fato, pois seja $a \in \mathbb{Z},$ considerando a divisão euclidiana de a por $m,$ tem-se $a = qm + r,$ onde $0 \leq r < m.$ Como $0 \leq r < m,$ logo o resto da divisão de r por m é exatamente $r.$ Portanto, $a \equiv r \mod m.$

Para verificar se dois números são congruentes módulo $m,$ não é necessário efetuar a divisão euclidiana de ambos por m para depois comparar os seus restos. É suficiente aplicar o seguinte resultado:

Proposição 3.10 *Vamos supor que* $a, b, m \in \mathbb{Z}$, *com* $m > 1$. *Tem-se que* $a \equiv b \mod m$ *se, e somente se,* $m|b - a$.

Demonstração. Suponhamos que $a \equiv b \mod m$, logo, pela definição de congruência, tem-se que a e b deixam o mesmo resto r, quando divididos por m. Assim, existem q e k tais que $a = qm + r$ e $b = km + r$. Então, $b - a = (qm + r) - (km + r)$, o que implica $b - a = (q - k)m$ e, portanto, $m|b - a$.
Reciprocamente, vamos supor que $m|b - a$. Sejam $a = qm + r_1$ e $b = km + r_2$, as divisões euclidianas de a e b por m, com $r_1, r_2 < m$. Desta forma, deveremos ter $b - a = (km + r_2) - (qm + r_1) = (k - q)m + r_2 - r_1$. Como $m|b - a$ e $|r_2 - r_1| < m$, temos que $r_2 - r_1 = 0$, o que implica que $r_2 = r_1$ e, logo, $a \equiv b \mod m$. □

Decorre da Proposição 3.10 que para analisar se os números 21 e 17 são congruentes módulo 4, basta verificar se a diferença 21-17 é um múltiplo de 4. De modo análogo, verifica-se que 13 e 28 são congruentes módulo 5, haja vista a diferença 13-28 é um múltiplo de 5.

Proposição 3.11 *Seja* $m \in \mathbb{N}$. *Para todos* $a, b, c \in \mathbb{Z}$, *tem-se que:*

i) $a \equiv a \mod m$;
Demonstração. Esta afirmação é equivalente a dizer que $m|a - a$, daí, $m|0$. De fato, zero é um múltiplo de qualquer inteiro m, pois $0 \cdot m = 0$. □

ii) $a \equiv b \mod m$, então $b \equiv a \mod m$;
Demonstração. Se $a \equiv b \mod m$, tem-se que $m|b - a$, ou seja, existe um inteiro k tal que $b - a = k \cdot m$. Multiplicando esta igualdade por (-1), obtemos $a - b = (-k) \cdot m$, o que implica que $m|a - b$. Portanto, $b \equiv a \mod m$. □

iii) se $a \equiv b \mod m$ e $b \equiv c \mod m$, então $a \equiv c \mod m$.
Demonstração. Se $a \equiv b \mod m$ e $b \equiv a \mod m$, tem-se que $m|b - a$ e $m|c - b$, ou seja, existem inteiros k e q tais que $b - a = k \cdot m$ e $c - b = q \cdot m$. Somando membro a membro as duas igualdades, obtemos:

$$(b - a) + (c - b) = k \cdot m + q \cdot m,$$

Daí, $c - a = (k + q)m$ e, portanto, $a \equiv b \mod m$. □

A Proposição 3.11 estabelece que a congruência módulo m é uma relação de equivalência, uma vez que atende às propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. Relações de equivalência aparecem em outros contextos da matemática, como, vetores. As Proposições 3.12, 3.13 e 3.14 a seguir apresentam mais algumas propriedades da congruência modular.

Proposição 3.12 *Considerando* $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$, *com* $m > 1$. *Sejam* $a \equiv b \mod m$ *e* $c \equiv d \mod m$, *então* $a + c \equiv b + d \mod m$.

Demonstração. Da hipótese de que $a \equiv b \mod m$ e $c \equiv d \mod m$, temos que $m|b - a$ e $m|a - c$. De acordo com a propriedade 3.6 (seção 3.2.2), temos que $m|(b-a)+(d-c)$, mas $(b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c)$, o que implica $m|(b + d) - (a + c)$ e, portanto, $a + c \equiv b + d \mod m$. □

Proposição 3.13 *Considerando* $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$, *com* $m > 1$. *Sejam* $a \equiv b \mod m$ *e* $c \equiv d \mod m$, *então* $ac \equiv bd \mod m$.

Demonstração. Como, por hipótese, $a \equiv b \mod m$ e $c \equiv d \mod m$, logo, temos que $m|b - a$ e $m|d - c$. Então $m|d(b - a)$ e $m|a(d - c)$, o que implica $m|d(b - a) + a(d - c)$. Mas, $d(b - a) + a(d - c) = db - da + ad - ac = db - ac$, logo, $m|db - ac$. Desta forma, obtemos $ac \equiv bd \mod m$. □

Proposição 3.14 *Sejam* $a, b, m \in \mathbb{Z}$, *com* $m > 1$ *e seja* $n \in \mathbb{N}$. *Se* $a \equiv b \mod m$, *então* $a^n \equiv b^n \mod m$.

Demonstração. Para essa demonstração utilizaremos o Princípio da Indução Finita. Seja $P(n) : a^n \equiv b^n \mod m$. Seguindo os passos da indução, vamos primeiramente verificar a veracidade para $n = 1$. Assim, $a^1 \equiv b^1 \mod m$, que é uma verdade. Agora, vamos supor que $P(n)$ é verdadeira. Devemos mostrar que $P(n + 1)$ também é verdadeira. Para isso, seja $a \equiv b \mod m$, além disso, pela hipótese de indução, temos que $a^n \equiv b^n \mod m$, assim, aplicando a Proposição 3.13, obtemos $a \cdot a^n \equiv b \cdot b^n \mod m$, daí $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \mod m$, logo $P(n + 1)$ é verdadeira. Portanto, se $a \equiv b \mod m$ e m é um número natural, logo $a^n \equiv b^n \mod m.$ $\square$

Até aqui, apresentamos as noções elementares acerca da congruência modular, destacando as principais proposições e propriedades deste importante conceito, que é uma das temáticas abordadas neste trabalho.

3.3 VETORES

O estudo do vetor na Matemática e em outras áreas é essencial, pois os cálculos vetoriais podem ser utilizados em vários fenômenos.

3.3.1 Resgate Histórico

O conhecimento acerca da evolução do estudo dos vetores permite uma maior compreensão deste conceito, auxiliando desta forma o professor a desempenhar melhor seu papel no processo de ensino/aprendizagem. Neste sentido, serão apresentadas as principais contribuições deste conceito para humanidade.

De acordo com Eves (2011), os estudos vetoriais se desenvolveram através de noções geométricas que se estabeleceram em sistemas de coordenadas e se fortaleceram com outros estudos e descobertas matemáticas.

No século XVII, um gênio da Matemática, René Descartes relacionou a Álgebra com a Geometria de Euclides, estabelecendo uma correspondência unívoca entre pontos do plano e pares ordenados de números reais. Essa fusão resultou na Geometria Analítica, campo de estudo dos vetores.

Os vetores surgiram nas duas primeiras décadas do século XIX com as apresentações geométricas de números complexos. Gaspar Wessel, Jean Robert Argand, Carl Friedrich Gauss, entre outros, descreveram números complexos como pontos no plano bidimensional, isto é, como vetores bidimensionais. Utilizando-se dessa definição, muitos foram os matemáticos e cientistas que trabalharam com esses novos números e os aplicaram de varias maneiras, porém, segundo Eves (2011), a melhor abordagem foi o elegante tratamento dado aos números complexos, como pares de números reais (a, b), por Willian Rowan Hamilton, em 1837, eliminando a aura mística que cercava esses números. Nessa nova perspectiva, o sistema dos números complexos torna-se extremamente conveniente para o estudo dos vetores.

Mais adiante Hamilton, em suas novas pesquisas passou a considerar não os pares ordenados (a, b) de números reais, mas sim, os quádruplos ordenados (a, b, c, d), tendo incluído neles os números reais e os números complexos. Esses quádruplos ordenados foram chamados de quatérnios.

Em 1844, alemão Hermann Gunther Grassmann publicou a primeira edição de seu notável trabalho *Ausdehnungslehre* em que desenvolveu classes de álgebra de muito maior generalidade do que a dos quatérnios de Hamilton. Eves (2011), destaca que em vez de considerar apenas quádruplos ordenados de números reais, Grassmann considerou conjuntos ordenados de n números reais, isto é, conjuntos do tipo $\{(x_1, x_2, ..., x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$, onde $\mathbb{R}$ representa o conjunto dos números reais.

A maneira pela qual conhecemos a álgebra vetorial e a análise vetorial, foi introduzida por J. Willard Gibbs, que em 1881, apresentou o desenvolvimento desses conceitos, através de um conjunto de notas de aula para seus alunos na Universidade de Yale. Baseado nos estudos de Grassmann presentes em *Ausdehnungslehrem*, Gibbs verificou que os vetores seriam uma ferramenta fundamental para o seu trabalho em Física. Sendo assim, em1881, imprimiu notas de aulas sobre análise vetorial para seus alunos, que foram compartilhadas por vários estudiosos nos Estados Unidos, na Inglaterra e na Europa.

O primeiro livro moderno a tratar da análise vetorial foi *Vector Analysis*, de Edwin Bidwel Wilson publicado pela primeira vez em 1901, baseado nas notas de Gibbs colecionadas por um de seus alunos de pós-graduação. Além de Wilson, quem também contribuiu para o moderno entendimento e uso de vetores foi Jean Frenet , que em sua Tese de Doutorado abordou a teoria de curvas espaciais.

Nos anos de 1893, 1899 e 1912, o físico Oliver Heaviside, publicou os três volumes de seu livro *Electromagnetic Theor* que contém no seu terceiro capítulo, intitulado “Elementos de Álgebra e Análise Vetorial”, uma apresentação do moderno sistema de análise vetorial. Nesta obra, Heaviside atacou os quatérnios e desenvolveu sua própria análise vetorial

Atualmente, os vetores representam a linguagem moderna de grande parte da Física e da Matemática aplicada, além de possuírem um interesse matemático particular, único.

3.4 ESTUDO DE VETORES

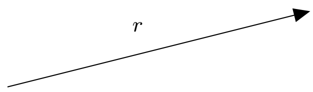
Nesta seção, faremos uma abordagem sobre os vetores os quais possuem grande relevância no estudo da Matemática. Aqui definiremos os conceitos de segmento orientado e sua equipolência e vetores no plano. Além destes aspectos, apresentaremos também as suas principais operações e propriedades. Os resultados aqui utilizados forem baseados no livro Geometria Analítica de Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

Segmentos orientados e equipolência de segmentos

A abordagem vetorial que trataremos aqui é fundamentada em segmentos orientados, equipolência de segmentos e as principais propriedades que envolvem tais conceitos. Primeiramente, vamos apresentar a ideia de reta orientada (ou eixo) e, a partir dessa ideia, definir segmento de reta orientado e segmentos equipolentes.

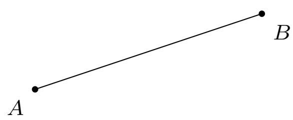
Definição 3.15 *Seja r uma reta que passa por dois pontos distintos A e B na qual fixamos um sentido de percurso positivo de A para B, essa reta é chamada reta orientada. A Figura 3.3 ilustra uma reta orientada r.*

Figura 3.3 – Reta orientada.



Definição 3.16 *Chamamos de segmento orientado, conforme ilustrado na Figura 3.4 o segmento de reta $\overrightarrow{AB}$ ao qual se estabelece um sentido de percurso de A para B, onde o ponto A é tomado como origem e o ponto B como extremidade desse segmento.*

Figura 3.4 – Segmento de reta.



Além disso, dizemos que o segmento $\overrightarrow{BA}$ é oposto ao segmento $\overrightarrow{AB}$, pois está orientado com o sentido de percurso oposto ao mesmo. Podemos afirmar que um segmento é dito nulo se, e somente se, sua origem coincide com sua extremidade.

Definição 3.17 *Dizemos que os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são equipolentes, e escrevemos $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$, quando satisfazem às seguintes propriedades:*

(a) $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{CD}$ *têm o mesmo comprimento;*

(b) $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{CD}$ *são paralelos ou colineares;*

(c) $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{CD}$ *têm o mesmo sentido.*

Figura 3.5 – Segmentos colineares AB e CD com (a) mesmo sentido e (b) sentidos contrários.

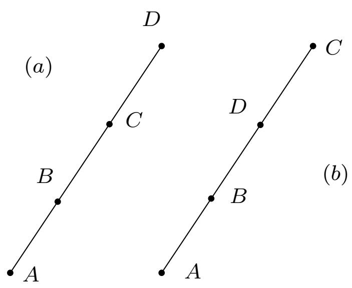
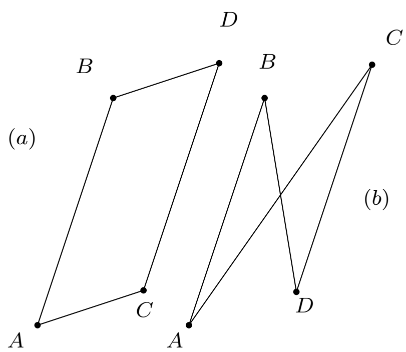


Figura 3.6 – (a) $AB \equiv CD$ (b) $AB \not\equiv CD$.



Dois segmentos colineares $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, Figura 3.5, têm o mesmo sentido quando induzem o mesmo sentido de percurso na reta que os contêm.

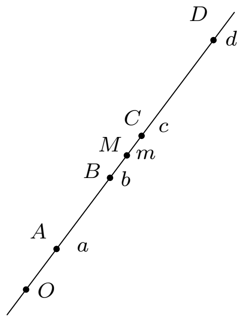
Se AB e CD são segmentos paralelos e de igual comprimento, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm o mesmo sentido quando $ABDC$ é um paralelogramo. Desta forma, na Figura 3.6 (a) $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$, porque $ABDC$ é um paralelogramo e, na Figura 3.6 (b), $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$, pois $ABDC$ não é um paralelogramo.

Proposição 3.18 *$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ se, e somente se, o ponto médio de $\overrightarrow{AD}$ é igual ao ponto médio de $\overrightarrow{BC}$.*

Demonstração. Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são dois segmentos equipolentes, então por definição, eles são paralelos ou colineares, têm o mesmo comprimento e o mesmo sentido. Se considerarmos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ paralelos, podemos observar que os pontos A, B, C e D são os vértices do paralelogramo $ABCD$. E que os segmentos $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$ são as diagonais desse paralelogramo, as quais se intersectam nos seus respectivos pontos médios. Para o caso em que os segmentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são colineares, podemos tomar uma reta r que os contém, conforme ilustra a Figura 3.7, provida de uma orientação e uma origem O escolhidas de modo que B esteja à direita de A. Sejam a, b, c e d as coordenadas de A, B, C e D, respectivamente, na reta r em relação a uma unidade de medida escolhida. Temos $a < b$ e $c < d$, pois $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm o mesmo sentido, e

$b - a = d - c$, uma vez que AB e CD têm o mesmo comprimento. Desta forma, temos $b - a = d - c$, o que implica que $a + d = b + c$ e, consequentemente $\frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{2}$ se, e somente se, o ponto médio de $\overrightarrow{AD}$ é igual ao ponto médio de $\overrightarrow{BC}$.
Reciprocamente, assumindo que o ponto médio de $\overrightarrow{AD}$ é igual ao ponto médio de $\overrightarrow{BC}$, ou seja $\frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{2}$, temos $a + d = b + c$ se, e somente se, $b - a = d - c$. Como $b - a$ e $d - c$ têm sinal e módulo iguais, os segmentos colineares $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm o mesmo sentido e o mesmo comprimento. Portanto, $AB \equiv CD$. □

Figura 3.7 – A, B, C, D colineares e $AB \equiv CD$.



Observação 3.19 *Se A, B, C e D são pontos no plano, então, pela Proposição 3.20, temos que:*

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{BD}.$$

A proposição a seguir nos diz que qualquer ponto do plano é a extremidade inicial de um segmento orientado equipolente a um segmento orientado dado.

Proposição 3.20 *Dados os pontos A, B e C, existe um único ponto D tal que*

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}.$$

Demonstração. Temos dois casos a considerar:

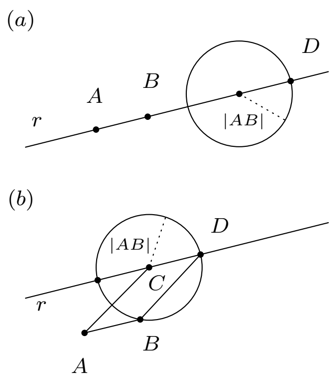
i) A, B e C colineares. Neste caso, o círculo de centro C e raio $|\overrightarrow{AB}|$ intersecta a reta que contém os pontos A, B e C em exatamente dois pontos, Figura 3.8 (a), mas apenas um deles, que chamaremos de D, é tal que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm o mesmo sentido.

ii) A, B e C não são colineares. Conforme ilustra a Figura 3.8(b), seja r a reta que passa por C e é paralela à reta que contém A e B. O círculo de centro C e raio $|\overrightarrow{AB}|$

intersecta a reta r em exatamente dois pontos, mas só um, que denotaremos por D, é tal que $ABDC$ é um paralelogramo. Ou seja, $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$.

$\square$

Figura 3.8 – $AB \equiv CD$.



Uma importante característica da equipolência é que a mesma pode ser representada por meio de coordenadas. Conforme determina a proposição a seguir.

Proposição 3.21 *Considere um sistema de eixos ortogonais OXY e sejam os pontos $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$. Então $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ se, e somente se, $b_1 - a_1 = d_1 - c_1$ e $b_2 - a_2 = d_2 - c_2$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.18, temos: $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ se, e somente se o ponto médiode $\overrightarrow{AD}$ é igual ao ponto médio de $\overrightarrow{BC}$. Daí,

$$\left(\frac{a_1 + d_1}{2}, \frac{a_2 + d_2}{2}\right) = \left(\frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{b_2 + c_2}{2}\right) \Leftrightarrow (a_1 + d_1, a_2 + d_2) = (b_1 + c_1, b_2 + c_2)$$

e consequentemente teremos $(a_1 + d_1, a_2 + d_2) = (b_1 + c_1, b_2 + c_2)$ se, e somente se, $b_1 - a_1 = d_1 - c_1$ e $b_2 - a_2 = d_2 - c_2$. $\square$

A Proposição 3.21 é muito importante para o estudo de vetores, pois a mesma possibilita o cálculo da medida de um segmento por meio das coordenadas dos pontos que o determinam no plano cartesiano

Agora, apresentaremos as principais propriedades que envolvem o conceito de equipolência de segmentos orientados.

i) $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$;

ii) se $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$, então $\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{AB}$;

iii) se $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{CD} \equiv EF$, então $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{EF}$.

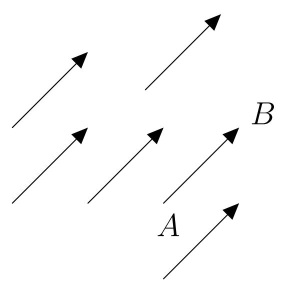
Essas propriedades fazem da relação de equipolência uma relação de equivalência, uma vez que satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Se fixarmos o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ e considerarmos o conjunto de todos os segmentos orientados que são equipolentes ao mesmo, os quais são equipolentes entre si (pela propriedade transitiva), então a esse conjunto chamamos de *classe de equipolência.*

A relação de equipolência permite classificar os segmentos do plano mediante a seguinte definição.

Definição 3.22 *Sejam A e B pontos no plano. O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a $\overrightarrow{AB}$. Cada segmento equipolente a AB é um representante do vetor AB, conforme ilustra a Figura 3.9.*

Figura 3.9 – Representantes do vetor AB



Observação 3.23

a) *Os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são equipolentes se, e somente se, representam o mesmo vetor. Isto é, $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.*

b) *Dado um ponto A do plano, o vetor $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$ é o vetor nulo. Note que $\vec{0} = \overrightarrow{BB}$, qualquer que seja o ponto B do plano.*

c) *Dado um vetor $\vec{v}$ e um ponto qualquer C, existe um único ponto D de tal forma que $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. Isto é, qualquer ponto do plano é origem de um único segmento orientado representante do vetor $\vec{v}$.*

De acordo com a Proposição 3.21 e a Definição 3.22, observamos que os vetores também podem ser manipulados através das sua representações em relação a um sistema de eixos ortogonais dado. Desta forma, é possível definir um vetor usando as coordenadas cartesianas de dois pontos A e B de um plano.

Definição 3.24 *Dados os pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, os números $b_1 - a_1$ e $b_2 - a_2$ são as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Escrevemos $\vec{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.*

Notemos que, se $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$, então,

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2) = \overrightarrow{CD}.$$

Deste modo, as coordenadas de um vetor podem ser calculadas usando qualquer segmento orientado que o represente. Assim, consideremos os pontos $A = (1, 2)$, $B = (3, 1)$ e $C = (4, 0)$. As coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e as coordenadas do ponto D tal que $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ podem ser obtidas da seguinte forma:

Temos que $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (3 - 1, 1 - 2) = (2, -1)$. Além disso, se $D = (d_1, d_2)$, segue que $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se, e somente se, $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$. Deste modo, teremos que $(2, -1) = (d_1 - 4, d_2 - 0)$ se, e somente se, $d_1 - 4 = 2$ e $d_2 - 0 = -1$. Logo, $d_1 = 2 + 4$ e $d_2 = -1 + 0$ se, e somente se, $d_1 = 6$ e $d_2 = -1$. Portanto, $D = (6, -1)$.

Da observação 3.23 (c), temos que se $\vec{v}$ é um vetor e $\overrightarrow{AB}$ é um dos seus representantes, então existe um único ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$. Desta forma, se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $P = (x, y)$, teremos:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (x - 0, y - 0) = (x, y).$$

Ou seja, vale a seguinte proposição:

Proposição 3.25 *Seja OXY um sistema de eixos ortogonais do plano. Para todo vetor $\vec{v}$ existe um único ponto P tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. Além disso, as coordenadas do ponto P coincidem com as coordenadas do vetor $\vec{v}$.*

Como exemplo desta proposição, vamos considerar os pontos $A = (-1, 2)$ e $B = (4, 1)$. O ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$ é $(5, -1)$. Pois pela Proposição 3.21 temos que $\overrightarrow{OP} = (4 - (-1), 1 - 2) = (4 + 1, -1) = (5, -1.)$

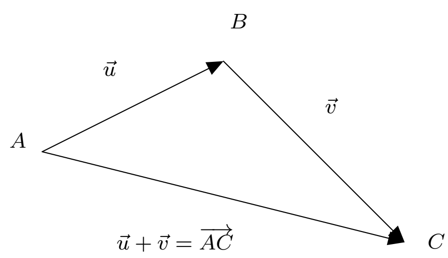
3.4.1 Operações com Vetores

Nesta seção, iremos apresentar duas importantes operações entre vetores. Trata-se da adição de vetores e do produto de um escalar por um vetor. Essas operações possuem propriedades especiais que permitem, em contextos mais avançados, a definição de uma importante estrutura matemática chamada espaço vetorial.

3.4.1.1 Adição de vetores

Definição 3.26 *A adição de vetores é a operação que a cada par de vetores $\vec{u} = AB$ e $\vec{v} = BC$ associa o vetor AC, designado $\vec{u} + \vec{v}$ e chamado soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. A Figura 3.10 ilustra a soma do vetor $\vec{u}$ com o vetor $\vec{v}$.*

Figura 3.10 – Soma de vetores: $\vec{u} + \vec{v} = AC$

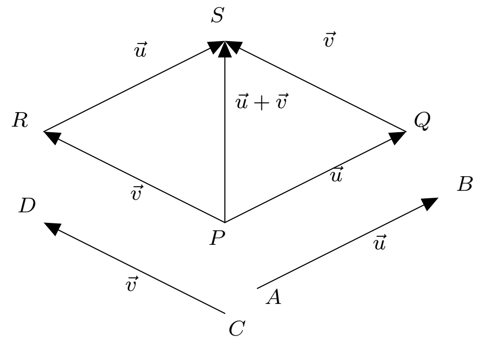


É importante saber que a adição de vetores é uma operação bem definida, isso quer dizer que a definição da soma do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ não depende da escolha do ponto A.

Observação 3.27 *Outra forma geométrica de visualizar a soma de dois vetores do plano é feita da seguinte maneira: sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ vetores do plano, P um ponto escolhido do plano e Q e R os pontos tais que $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{PR}$. Se os pontos P, Q e R não são colineares, então o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ é $\overrightarrow{PS}$, onde $\overrightarrow{PS}$ é a diagonal, com origem no vértice P, do paralelogramo $PQSR$ de lados adjacentes PQ e PR, conforme ilustrado na Figura 3.11.*

Com efeito, sendo $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$, temos $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{OS}$.

Figura 3.11 – Soma de vetores: $\vec{u} + \vec{v} = AC$



Essa forma geométrica para efetuar a adição de dois vetores é conhecida como a regra do paralelogramo. Na prática, a adição de vetores é realizada através da representação de vetores por meio de suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais.

Vejamos as principais propriedades da adição de vetores. Para tanto, consideraremos $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores no plano.

Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Demonstração. Sejam $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$ vetores quaisquer no plano, temos:

$$\vec{u} + \vec{v} = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b) = \vec{v} + \vec{u}.$$

□

Associativa: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.

Demonstração. Sejam $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ e $\vec{w} = (e, f)$, vetores quaisquer no plano, então:

$$\begin{aligned} \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) &= (a, b) + [(c, d) + (e, f)] \\ &= (a, b) + (c + e, d + f) = [a + (c + e), b + (d + f)] \\ &= [(a + c) + e, (b + d) + f] = (a + c, b + d) + (e, f) \\ &= [(a, b) + (c, d)] + (e, f) \\ &= (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}. \end{aligned}$$

□

Elemento neutro: existe um vetor $O = (0, 0)$ no plano (chamado vetor nulo) tal que para todo vetor $\vec{u} = (a, b)$ no plano, se tem $O + \vec{u} = \vec{u}$.

Demonstração. Sejam $u = (a, b)$ e $O = (0, 0)$ vetores no plano, logo:

$$O + \vec{u} = (0, 0) + (a, b) = (0 + a, 0 + b) = (a, b) = \vec{u}.$$

□

Elemento oposto ou simétrico: para cada vetor $\vec{u} = (a, b)$ no plano, existe um vetor $-\vec{u} = (-a, -b)$ tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = O$.

Demonstração. Sejam $\vec{u} = (a, b)$ e $-\vec{u} = (-a, -b)$ vetores de no plano, então:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0) = O.$$

□

Observação 3.28 *Se $\vec{v} = (a, b)$ e $\vec{w} = (c, d)$, chamamos de diferença entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$, a adição entre o vetor $\vec{v}$ e o vetor oposto de $\vec{w}$, dada por:*

$$\vec{v} + (-\vec{w}) = (a, b) + (-c, -d) = (a - c, b - d).$$

Proposição 3.29 *Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ vetores do plano expressos em termos de suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY. Então,*

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Demonstração. Sejam os pontos $P = (u_1, u_2)$ e $Q = (v_1, v_2)$ tais que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$, e seja $S = (w_1, w_2)$ o ponto tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OS}$. Pela Proposição 5, obtemos: $(v_1 - 0, v_2 - 0) = (w_1 - u_1, w_2 - u_2)$. Logo, $S = (w_1, w_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ e, portanto,

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OS} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

□

3.4.1.2 Produto de um escalar por um vetor

A seguir, iremos apresentar outra operação com vetores que trata da multiplicação entre um vetor $\vec{v}$ e um número real θ (chamado escalar).

Definição 3.30 *O produto do número real $\theta \in \mathbb{R}$ por $\vec{u} = AB$ é o vetor $\theta\vec{u} = \theta AB$, representado pelo segmento orientado AC, tal que:*

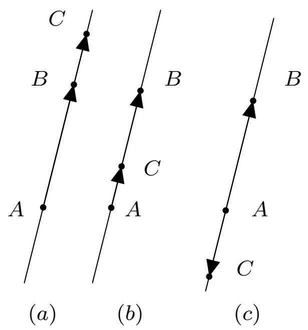
a) *A, B e C são colineares;*

b) *$d(A, C) = |\theta| d(A, B)$;*

c) *$C = A$ se $\theta = 0$;*

d) *os segmentos AC e AB têm igual sentido se $\theta > 0$, e sentidos opostos se $\theta < 0$.*

Figura 3.12 – Vetor $\lambda\vec{v} = \vec{AC}$ para: a)$\lambda > 1$; b) $0 < \lambda < 1$; c) $\lambda < 0$.



O produto de um escalar por um vetor utilizando a sua representação em coordenadas em um sistema de eixos ortogonais por um escalar pode ser obtido fazendo-se a multiplicação do escalar pelas respectivas coordenadas do vetor. Ou seja, se $\vec{u} = (a, b)$ é um vetor no plano e θ é um número real, então o produto de θ por $\vec{u}$, será dado por $\theta\vec{u} = (\theta a, \theta b)$.

Observação 3.31 *Na prática o produto do escalar θ com um vetor $\vec{v}$ produz um dos seguintes efeitos sobre $\vec{v}$: aumenta o tamanho de $\vec{v}$, diminui o tamanho de $\vec{v}$ ou muda o sentido de $\vec{v}$.*

Estabeleceremos a seguir, as principais propriedades do produto de um escalar por um vetor, para tanto, consideraremos $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores do plano e os números reais μ, θ.

Existência de elemento neutro multiplicativo: existe o número real 1, tal que $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$, para todo vetor $\vec{u}$ no plano.

Demonstração. Seja $\vec{u} = (a, b)$, um vetor qualquer no plano, então:

$$1 \cdot \vec{u} = 1 \cdot (a, b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a, b) = \vec{u}.$$

□

Associatividade: $\theta(\mu\vec{v}) = (\theta\mu)\vec{v}$.

Demonstração. Sejam μ, θ números reais e $\vec{v} = (a, b)$ um vetor no plano, logo

$$\theta(\mu\vec{v}) = \theta[\mu(a, b)] = \theta(\mu a, \mu b) = (\theta\mu a, \theta\mu b) = (\theta\mu)\vec{v}.$$

□

Distributiva 1: $\theta(\vec{v} + \vec{w}) = \theta\vec{v} + \theta\vec{w}$.

Demonstração. Sejam θ um número real e $\vec{v} = (a, b)$ e $\vec{w} = (c, d)$ vetores do plano, então,

$$\theta(\vec{v} + \vec{w}) = \theta[(a, b) + (c, d)] = \theta(a + c, b + d) = [\theta(a + c), \theta(b + d)],$$

o que implica

$$\theta(\vec{v} + \vec{w}) = (\theta a + \theta c, \theta b + \theta d) = (\theta a, \theta b) + (\theta c, \theta d) = \theta(a, b) + \theta(c, d) = \theta\vec{v} + \theta\vec{w}.$$

□

Distributiva 2: $(\theta + \mu)\vec{v} = \theta\vec{v} + \mu\vec{v}$.

Demonstração. Sejam θ, μ números reais e $\vec{v} = (a, b)$ um vetor do plano, logo,

$$(\theta + \mu)\vec{v} = (\theta + \mu)(a, b) = [(\theta + \mu)a, (\theta + \mu)b] = (\theta a + \mu b, \theta b + \mu b),$$

o que implica

$$(\theta + \mu)\vec{v} = (\theta a, \theta b) + (\mu a, \mu b) = \theta(a, b) + \mu(a, b) = \theta\vec{v} + \mu\vec{v}.$$

□

3.4.2 Produto Interno de dois Vetores

Nesta seção, definiremos uma operação entre vetores denominada produto interno, que associa a cada par de vetores um escalar. Outro nome também utilizado para esta operação é produto escalar, dando ênfase à natureza escalar do resultado da operação.

Daremos, primeiramente, uma definição geométrica do produto interno entre dois vetores e posteriormente iremos obter a expressão do produto interno em termos das coordenadas dos fatores em relação a um sistema de eixos ortogonais. Para a abordagem geométrica precisamos de dois conceitos preliminares: norma de um vetor e ângulo entre dois vetores.

Nas discussões a seguir, usaremos apenas vetores no plano. Mas, os resultados obtidos podem ser estendidos também para vetores no espaço.

Definição 3.32 *Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano. A norma ou comprimento do vetor $\vec{v}$ é o número $||\vec{v}||$ dado pelo comprimento de um segmento representante de $\vec{v}$.*

Observação 3.33

a) *A norma de um vetor independe da escolha do segmento representante. Com efeito, se $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ e, portanto, $d(A,B) = d(C,D) = \|\vec{v}\|$.*

b) *Sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, desta forma, teremos*

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

c) *Se $P = (x, y)$ é o ponto tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, então*

$$\|\vec{v}\| = d(O,P) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Considerando os pontos $A = (1,3)$ e $B = (-4,5)$, conforme a Observação 3.33 (b), temos que a norma do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é dada por:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-4+1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Observação 3.34

a) *Temos* $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0$. *Além disso,* $\vec{v} \neq 0 \Leftrightarrow \|\vec{v}\| \geq 0$.

b) *Se* $\vec{v}$ *é um vetor e* θ *é um escalar então* $\|\theta\vec{v}\| = |\theta|\|\vec{v}\|$. *De fato, se* $\vec{v} = (x, y)$ *temos* $\theta\vec{v} = (\theta x, \theta y)$, *assim,*

$$\|\theta\vec{v}\| = \sqrt{(\theta x)^2 + (\theta y)^2},$$

o que implica

$$\|\theta\vec{v}\| = \sqrt{\theta^2(x^2 + y^2)} = \sqrt{\theta}\sqrt{x^2 + y^2} = |\theta|\|\vec{v}\|.$$

c) *Um vetor é chamado de unitário quando sua norma é igual a 1.*

d) *Se* $\vec{v} \neq 0$, *o vetor* $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ *é um vetor unitário, denominado normalizado do vetor* $\vec{v}$, *com a mesma direção e sentido de* $\vec{v}$. *De fato, os vetores têm a mesma direção (são paralelos), pois um é múltiplo do outro, e pelo item (b)*

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \left\| \frac{1}{\|v\|} v \right\| = \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1$$

Como $\frac{1}{\|v\|} > 0$, *os vetores* $\vec{v}$ *e* $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ *têm também o mesmo sentido.*

e) *Se* $\vec{v} \neq 0$, *o vetor* $-\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ *é também unitário com a mesma direção do vetor* $\vec{v}$, *mas tem sentido oposto.*

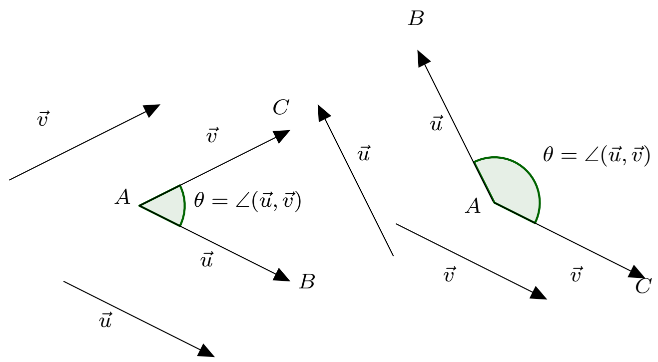
Como exemplo, vamos considerar o vetor $\vec{v}$ no plano, tal que $\vec{v} = (3, -2)$. Assim, de acordo com a Observação 3.34 d), podemos obter o vetor normalizado de $\vec{v}$ que denominaremos por $\vec{v_1}$ da seguinte forma:

Inicialmente, iremos calcular $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$, assim o normalizado de $\vec{v}$ é o vetor

$$\vec{v_1} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3, -2) = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-2}{\sqrt{13}} \right).$$

Definição 3.35 *O ângulo entre dois vetores não nulos* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *é o menor ângulo entre os segmentos representantes* AB *e* AC *de* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, *respectivamente. Denotaremos por* $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ *a medida do ângulo entre* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$.

Figura 3.13 – Ângulo entre dois vetores



Observação 3.36

a) *O ângulo entre dois vetores está bem definido.*

b) *Medimos os ângulos em radianos ou em graus.*

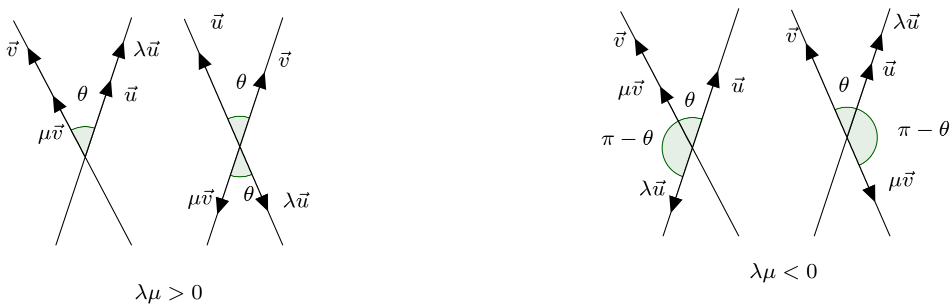
c) *Note que* $0 \leq \angle(\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi$, *equivalente,*$0° \leq \angle(\vec{u}, \vec{v}) \leq 180°$.

d) *Tem-se:* $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \angle(\vec{v}, \vec{u})$,

$\angle(\lambda\vec{u}, \mu\vec{v}) = \angle(\vec{u}, \vec{v})$, *se* $\mu\lambda > 0$

$\angle(\lambda\vec{u}, \mu\vec{v}) = \pi - \angle(\vec{u}, \vec{v})$, *se* $\mu\lambda < 0$.

Figura 3.14 – Observação 3.36 d)



Com base nos conceitos estudados e a partir das discussões realizadas, já estamos em condições de definir o produto interno de vetores, que é uma importante definição sobre vetores.

Definição 3.37 *O produto interno dos vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *do plano, que denotaremos por* $< \vec{u}, \vec{v} >$ *é o número real:*

$$< \vec{u}, \vec{v} >= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta.$$

O produto interno entre dois vetores também pode ser obtido por meio de coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais, conforme determina a proposição a seguir. Na verdade, essa é a maneira usual do cálculo do produto interno entre vetores do plano ou do espaço.

Proposição 3.38 *Sejam $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ dois vetores do plano. Então,*

$$< \vec{u}, \vec{v} >= a\alpha + b\beta.$$

Demonstração. Se um dos vetores $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é nulo, temos $< \vec{u}, \vec{v} >= 0$ e, também $a\alpha + b\beta = 0$. Logo, a identidade está satisfeita. Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$ vetores não nulos, com $P = (a, b)$ e $Q = (\alpha, \beta)$. Então,

$$PQ = OQ - OP = v - u = (\alpha - a, \beta - b).$$

Aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo OPQ, obtemos:

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\overrightarrow{OQ}\|^2 + \|\overrightarrow{OP}\|^2 - 2\|\overrightarrow{OQ}\|\|\overrightarrow{OP}\| \cos\theta,$$

deste modo, temos

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{v}\|\|\vec{u}\| \cos\theta,$$

onde $\cos\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$. Daí, obtemos:

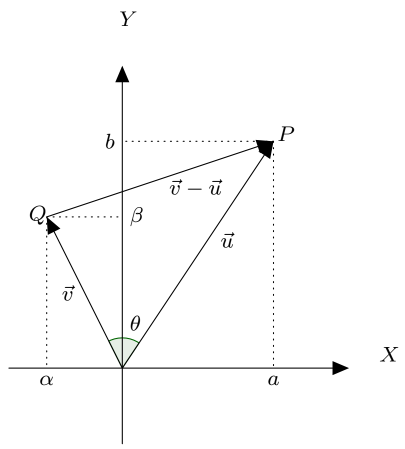
$$\begin{aligned}
2\|\vec{v}\|\|\vec{u}\| \cos\theta &= \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 \\
&= (a^2 + b^2) + (\alpha^2 + \beta^2) - ((\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2) \\
&= a^2b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - (\alpha^2 - 2\alpha a + a^2 + \beta^2 - 2\beta b + b^2) \\
&= a^2b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha a - a^2 - \beta^2 + 2\beta b - b^2 \\
&= 2\alpha a + 2\beta b = 2(\alpha a + \beta b).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$< \vec{u}, \vec{v} >= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta = a\alpha + b\beta.$$

□

Figura 3.15 – Diferença $\vec{v} - \vec{u}$



Seja $< \vec{u}, \vec{v} >= \|\vec{v}\|\|\vec{u}\| \cos\theta$, tomando o módulo em ambos os membros desta igualdade, obtemos $| < \vec{u}, \vec{v} > | = |\|\vec{v}\|\|\vec{u}\| \cos\theta|$. Como o ângulo entre os dois vetores, quando medido em radianos, é um número do intervalo $[0, \pi]$, logo $|\cos\theta| \leq 1$ para todo θ. Desta forma, obtemos a identidade abaixo, chamada *Desigualdade de Cauchy-Schwarz.*

$$| < \vec{u}, \vec{v} > | \leq |\|\vec{v}\|\|\vec{u}\||$$

A partir de agora, veremos as principais propriedades do produto interno de vetores. Dados os vetores $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$ e $\theta \in \mathbb{R}$, temos:

O produto interno é comutativo: $< \vec{u}, \vec{v} >=< \vec{v}, \vec{u} >$.

Demonstração. Sejam $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$, dois vetores no plano, daí teremos:

$$< \vec{u}, \vec{v} >=< (a, b), (c, d) >= ac + bd = ca + db =< (c, d), (a, b) >=< \vec{v}, \vec{u} > .$$

□

O produto interno é distributivo, a esquerda, em relação a adição de vetores: $< \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} >=< \vec{v}, \vec{u} > + < \vec{v}, \vec{w} >$.

Demonstração. Sejam $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ e $\vec{w} = (e, f)$, três vetores no plano, então:

$$< \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} >=< (a, b), (c, d) + (e, f) >=< (a, b), (c + e, d + f) >= a(c + e) + b(d + f),$$

daí,

$$< \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} >= a(c+e) + b(d+f) = ac + ae + bd + bf = (ac+bd) + (ae+bf),$$

logo,

$$< \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} >=< (a,b),(e,f) > + < (a,b),(e,f) >=< \vec{u}, \vec{v} > + < \vec{v}, \vec{w} > .$$

$\square$

O produto interno é distributivo, à direita, em relação a adição de vetores:
$< \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} >=< \vec{u}, \vec{w} > + < \vec{v}, \vec{w} > .$
Demonstração. Sejam $\vec{u} = (a,b)$, $\vec{v} = (c,d)$ e $\vec{w} = (e,f)$, três vetores no plano, então temos

$$< \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} >=< (a,b) + (c,d),(e,f) >=< (a+c, b+d),(e,f) >= (a+c)e + (b+d)f,$$

assim,

$$< \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} >= ce + ae + bf + df = (ae+bf) + (ce+df),$$

consequentemente

$$< \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} >=< (a,b),(e,f) > + < (c,d) + (e,f) >=< \vec{u}, \vec{w} > + < \vec{v}, \vec{w} > .$$

$\square$

O produto interno é comutativo em relação a multiplicação por um número real:
$< \theta\vec{u}, \vec{v} >= \theta < \vec{u}, \vec{v} >=< \vec{u}, \theta\vec{v} > .$
Demonstração. Sejam $\vec{u} = (a,b)$ e $\vec{v} = (c,d)$, dois vetores no plano e θ um número real, temos

$$< \theta\vec{u}, \vec{v} >=< \theta(a,b),(c,d) >=< (\theta a, \theta b),(c,d) >= \theta ac + \theta bd = \theta(ac+bd),$$

logo,

$$< \theta\vec{u}, \vec{v} >= \theta < (a,b),(c,d) >= \theta < \vec{u}, \vec{v} > .$$

Além disso,

$$< \vec{u}, \theta\vec{v} >=< (a,b), \theta(c,d) >=< (a,b), (\theta c, \theta d) >= a\theta c + b\theta d,$$

o que acarreta

$$< \vec{u}, \theta\vec{v} >= \theta(ac+bd) = \theta < (a,b),(c,d) >= \theta < \vec{u}, \vec{v} > .$$

□

Além das propriedades acima abordadas, existe uma proposição importante que relaciona o produto interno e a norma de um vetor:

O produto interno de um vetor por ele mesmo é igual ao quadrado do módulo desse vetor: $< \vec{u}, \vec{u} >= \|\vec{u}\|^2$.

Demonstração. Seja $\vec{u} = (a,b)$ um vetor qualquer no pflano, logo:

$$< \vec{u}, \vec{u} >=< (a,b), (a,b) >= aa + bb = a^2 + b^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right) = \|\vec{u}\|^2.$$

□

Como já exposto neste capítulo, os vetores no plano, também chamado de $\mathbb{R}^2$, são identificados com pares ordenados de números reais. Desta forma, um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ num plano, tal que O coincide com a origem de um sistema de coordenadas cartesianas, pode ser representado por meio das coordenadas reais x e y, ou seja, $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (x,y)$. A representação geométrica deste vetor em $\mathbb{R}^2$ encontra-se ilustrada na Figura 3.16.

Figura 3.16 – Vetor localizado em $\mathbb{R}^2$.

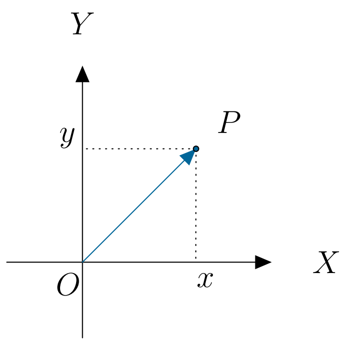
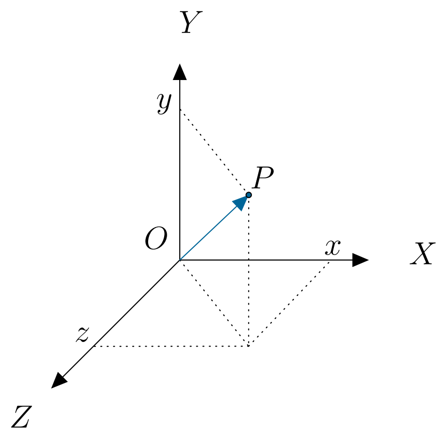


Figura 3.17 – Vetor localizado em $\mathbb{R}^3$.



Existem situações em que a representação do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ necessitará de três informações e para isto usamos a tripla (x, y, z) de números reais e dizemos que este vetor pertence ao espaço $\mathbb{R}^3$. Assim como no plano, a todo ponto P associamos o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$. Estas informações são dadas através de um sistema tridimensional de eixos coordenados, como ilustrado na Figura 3.17.

Além da ocorrência de vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, existem também circunstâncias em que há a necessidade de um vetor ser representado por quatro coordenadas reais, nestes casos dizemos que o vetor pertence ao espaço $\mathbb{R}^4$. Assim, se $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$, então $\vec{v}$ pode ser representado da seguinte forma $\vec{v} = (x, y, z, w)$. Um exemplo de aplicação de vetores no $\mathbb{R}^4$ é o deslocamento de uma partícula no espaço em relação ao tempo. Neste caso, as três primeiras coordenadas x, y e z, indicam a localização da partícula no espaço, enquanto a quarta coordenada indica o tempo. Sendo assim, o vetor $\vec{v}$ poderá ser representado por $\vec{v} = (x, y, z, t)$. Dizemos que esse espaço é de dimensão quatro, porém, não é possível fazer a representação geométrica para vetores no $\mathbb{R}^4$.

As operações de adição, produto por escalar e produto interno, bem como as propriedades dos vetores no espaço são exatamente as mesmas que para vetores no plano. Além disso, os conceitos abordados acerca dos vetores no plano e nos espaços $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ podem ser estendidos a vetores com n-uplas de números reais em que n é um número inteiro positivo, ou seja, vetores pertencentes ao espaço $\mathbb{R}^n$, onde $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n); \quad x_i \in \mathbb{R}\}$. Um exemplo de aplicação de vetores em $\mathbb{R}^n$ está na seção 2.6 do Capítulo 2, que para o cálculo do dígito verificador de um código de barras,utilizamos vetores de 12 e 13 coordenadas, ou seja, nos espaços $\mathbb{R}^{12}$ e $\mathbb{R}^{13}$, para a representação do código nos sistemas UPC e EAN, respectivamente.

Capítulo 4

METODOLOGIA

Neste capítulo serão apresentadas a metodologia utilizada no trabalho e a sequência didática aplicada no decorrer do curso ministrado com alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma Escola Estadual da cidade de Petrolina – PE.

4.1 INTRODUÇÃO

Todo conhecimento científico se desenvolveu por meio da pesquisa, norteada por um caminho, ou seja, um método. Conforme Teixeira (2011) "[...] o conhecimento cientifico exige a utilização de métodos, processos e técnicas especiais para análise, compreensão e intervenção na realidade". Perpassa, portanto, por procedimentos, uma ação metodológica, que direciona o conhecimento do pesquisador. Já, para Hissa (2006), o conhecimento científico exige mais que um caminho, o método contempla amplas concepções de interpretação de mundo, de objetos e de seres, referentes à posturas filosóficas, lógica, ideológica e política que fundamentam a ciência e os cientistas na produção do conhecimento, devendo ser compreendido por um paradigma.

Acrescentando a essas concepções, Koche (2001) assegura que a questão do método cientifico está interligada ao desejo do homem de ter procedimentos e caminhos seguros para alcançar ou produzir um conhecimento científico, sistêmico e verdadeiro. Por sua vez a metodologia é uma palavra derivada de "método" do latin "methodus", que significa o caminho para realização ou produção de um conhecimento, portanto, nesse contexto, que a metodologia da presente pesquisa se apresenta. A mesma encontra-se dividida em três tópicos: Abordagem da pesquisa, lócus da pesquisa e sujeitos da pesquisa.

4.2 ABORDAGEM DA PESQUISA

Com vistas a responder as questões propostas neste trabalho, que consistiam em verificar a receptividade e o envolvimento de alunos diante de uma proposta de ensino contextualizado, foram realizadas pesquisas bibliográfica e de campo. Com efeito, para a construção do marco conceitual, a pesquisa bibliográfica tem como objetivo, conforme Koche(2001), "conhecer e analisar as principais contribuições teóricas existentes sobre um determinado tema ou problema, tornando-se um instrumento indispensável para qualquer tipo de pesquisa". Neste sentido, foi realizada a leitura de diversos textos, como por exemplos, Abordagens em Educação Matemática (BOERI, 2009) os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, 2000), que foram fundamentais na construção deste trabalho.

No que concerne à pesquisa de campo, Marconi e Lakatos (2003), enfatizam que esse tipo de pesquisa tem por finalidade obter informações sobre um problema ou sobre uma hipótese. No primeiro caso, pretende-se dar uma resposta ao questionamento, já no segundo, objetiva-se comprovar o argumento proposto. A pesquisa de campo tem por base extrair informações diretamente da realidade através do uso de técnicas de coleta de dados com entrevistas ou questionários, a fim de dar resposta a alguma situaçao ou problema abordado anteriormente.

Desta forma, a pesquisa de campo foi uma atividade essencial neste trabalho e se efetivou pela coleta de dados em quatro etapas. A princípio foi realizado um levantamento informal de dados institucional e social, sobre a escola pesquisada. Durante o desenvolvimento da proposta de ensino, foram aplicados aos alunos dois questionários inquirindo-os sobre suas percepções e interesse em relação aos conhecimentos matemáticos contidos na elaboração dos códigos de barras usados em diversos produtos. Para Gil (2008), a aplicação de questionários trata-se de uma técnica que abrange um conjunto de questões que são submetidas aos participantes com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, expectativas, entre outros. Por fim, foi realizada uma atividade avaliativa buscando verificar o nível de compreensão dos conteúdos por parte dos alunos.

A respeito das abordagens a serem utilizadas em uma pesquisa, Neves (1996) destaca que, na pesquisa qualitativa, o pesquisador busca entender os fenômenos de acordo com as perspectivas dos participantes na situação estudada e, a partir, construir a sua interpretação a respeito dos fenômenos estudados.

Ademais, ainda segundo Gil (2008), os procedimentos analíticos utilizados na pesquisa definida como estudo de campo são essencialmente de natureza qualitativa. Por sua vez, sob o ponto de vista de Prodanov e Freitas (2013), na abordagem qualitativa, o ambiente natural é fonte direta para coleta de dados, interpretação de fenômenos e atribuição de significados. Desse modo, para o desenvolvimento do trabalho proposto, utilizamos a perspectiva qualitativa de investigação, na qual os dados empíricos coletados ao longo da pesquisa foram analisados e tratados, considerando os aspectos subjetivos/descritivos, a serem apresentados e comunicados, a posteriori, em resposta à investigação inicialmente formulada.

4.3 LÓCUS DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada em uma Escola Estadual do Município de Petrolina-PE. Embora a instituição de ensino esteja localizada em área central e comumente considerada área nobre da cidade, grande parte dos alunos são integrantes de famílias carentes do município. No último resultado do IDEB - Índice de Desenvolvimento da Educação Básica, a escola alcançou umas das melhores notas, tanto a nível regional quanto na esfera estadual.

4.4 SUJEITOS DA PESQUISA

Gil (2008) afirma que, dentre os aspectos relevantes a serem considerados para a realização de uma pesquisa, um de fundamental importância é a escolha dos sujeitos da pesquisa, os quais devem primordialmente, estar em número suficiente para proporcionar as informações requeridas.

Outra concepção importante é a de André (2010), que destaca a importância, na pesquisa qualitativa, de os dados serem coletados por meio das informações dadas pelos sujeitos em relação ao problema estudado. Com bases nessas ideias, verificamos que o sujeito “observado” também é parte fundamental para o desenvolvimento de pesquisas. Desse modo, a escolha dos sujeitos da nossa pesquisa foi realizada mediante os seguintes critérios:

a) um dos conteúdos abordados na proposta fazem parte do cronograma curricular da série em estudo;

b) conhecimentos prévios que possibilitam o desenvolvimento da abordagem;

c) relevância dos conteúdos estudados na resolução dos mais diversos problemas do cotidiano vivido pelo grupo de alunos.

Mediante tais critérios, concluímos que alunos de uma turma da 3ª série do ensino médio formariam um grupo adequado para o estudo. De fato, por estarem finalizando uma etapa escolar tão importante, constitui-se para os mesmos, uma excelente oportunidade de vivenciarem uma prática no ensino da Matemática que encontra respaldo nos parâmetros curriculares (PERNAMBUCO, 2012), que busca desenvolver habilidades Matemáticas que auxiliem o cidadão a lidar com as mais diversas formas de representações numéricas. Assim, entende-se ser oportuna a utilização de uma proposta baseada na contextualização de conteúdos a uma turma do 3º Ensino Médio de uma escola pública de Petrolina.

4.5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Uma sequência didática é um conjunto de atividades planejadas e interligadas, etapa por etapa, cujo objetivo é nortear o ensino de um determinado conteúdo. Essas etapas são organizadas e elaboradas de forma estratégica, conforme os objetivos planejados e a metodologia definida pelo professor, podendo envolver atividades de aprendizagem ou de avaliação.

A descrição da sequência didática utilizada no desenvolvimento do curso ministrado aos alunos sujeitos desta pesquisa encontra-se no Apêndice 1. Entretanto, iremos descrevê-la de forma sucinta, a seguir:

1ª Etapa: realização de uma apresentação a respeito da importância dos códigos de barras, sua definição, sua composição e as vantagens proporcionadas pelo seu uso.

2ª Etapa: momento dedicado aos alunos para a discussão e análise sobre a existência de conteúdos matemáticos na construção dos códigos de barra.

3ª Etapa: exposição, na lousa, do processo utilizado para a determinação do dígito de controle (verificador) dos códigos de barras.

4ª Etapa: realização de uma dinâmica. Os alunos deveriam analisar os códigos de barras contidos em alguns produtos, buscando reconhecer os procedimentos e conteúdos matemáticos utilizados na elaboração dos mesmos.

5ª Etapa: sistematização dos conteúdos envolvidos nos cálculos necessários para a determinação do dígito verificador.

6ª Etapa: aplicação uma atividade individual com a finalidade de diagnosticar o nível de aprendizagem dos alunos.

Por fim, verificamos que os procedimentos utilizados na metodologia foram adequados ao alcance das respostas às questões norteadoras da pesquisa, conforme os resultados expostos no capítulo a seguir.

Capítulo 5

RESULTADOS

5.1 INTRODUÇÃO

A análise dos resultados constitui uma das etapas mais importantes de um trabalho científico. Segundo Gil (2008), esta etapa tem como objetivo organizar e sumariar os dados de forma tal que possibilitem o fornecimento de respostas ao problema proposto na investigação. Na pesquisa em tela o objeto de análise perpassou por dados coletados através de questionários e exercícios avaliativos aplicados em uma turma de 3ª Série do Ensino Médio de uma Escola Estadual do Município de Petrolina-PE. Os questionários, denominados de A e B versaram sobre a opinião dos alunos no tocante a proposta deste estudo. Por sua vez, os exercícios buscaram verificar o nível de compreensão e aprendizagem dos conteúdos matemáticos utilizando-se a prática de ensino sugerida na pesquisa. Reitere-se que a aplicação dos questionários foi realizada com o intuito de obter elementos que possibilitem avaliar o nível de aceitação e a opinião dos alunos sobre o uso da contextualização de conteúdos matemáticos a partir do estudo dos códigos de barras. Além de verificar se esta prática despertaria nos discentes o interesse em investigar quais seriam os conhecimentos matemáticos específicos que estariam envolvidos na elaboração dos códigos de barras.

5.2 ANÁLISE DE QUESTIONÁRIOS

Nesta pesquisa foram propostos aos alunos questionários por escrito denominados auto-aplicados por alguns especialistas, dentre eles Gil (2008). Através desses buscamos descrever características pertinentes à população pesquisada.

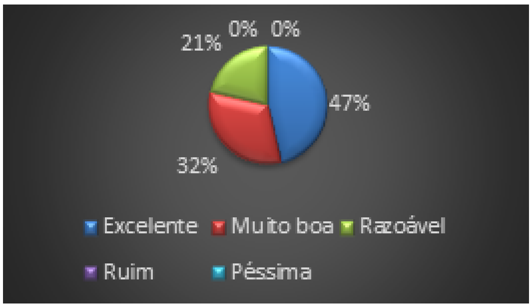
5.2.1 Questionário A

Este questionário foi aplicado logo após a apresentação dos códigos de barras. Com ele, pretendemos avaliar a aceitação e opinião dos alunos acerca do uso da contextualização de conteúdos matemáticos a partir do estudo dos códigos de barras, como também verificarmos se esta prática despertaria nos discentes o interesse em investigar quais seriam os conhecimentos matemáticos específicos que estariam envolvidos na elaboração dos códigos de barras.

5.2.1.1 Resultados

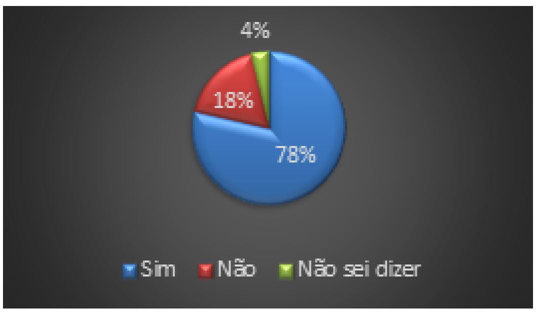
Quando solicitado o ponto de vista dos alunos a respeito da abordagem feita sobre os códigos de barras, obteve-se, conforme o Gráfico 5.1, que grande parte do universo dos alunos pesquisados consideraram a abordagem excelente ou muito boa, revelando um grau de satisfação da turma com a apresentação da proposta.

Gráfico 5.1 – Dados da questão 1 do Questionário A



Por sua vez, ao serem questionados se a abordagem utilizada havia despertado o interesse em estudar conteúdos matemáticos relacionados aos códigos de barras, os estudantes, em sua maioria, concordaram que a abordagem despertou muito interesse, uma vez que 93% responderam positivamente ao questionamento. Com relação à questão, se uma prática de ensino amparada na introdução do conteúdo por meio da contextualização - no caso, o estudo sobre os códigos de barras - atrai a atenção e desperta o interesse dos alunos para os conteúdos matemáticos envolvidos, verificamos que a maioria do alunos afirmaram que tal prática estimula sim o desejo pelo conhecimento dos mesmos, conforme evidencia o Gráfico 5.2.

Gráfico 5.2 – Dados da questão 2 do Questionário A



Quando o questionamento foi particularizado para o tema da pesquisa, ou seja, quando questionados sobre o interesse em conhecerem os conteúdos matemáticos envolvidos na criação dos códigos de barras, mais de 80% dos alunos afirmaram ter interesse em tal aprendizagem.

5.2.1.2 Análise

De acordo com os resultados obtidos, constatamos que a maioria dos entrevistados avaliou positivamente a abordagem realizada sobre os códigos de barras. Além do mais, os alunos atribuíram à proposta utilizada, o considerável interesse em reconhecer as regras matemáticas que estão por trás dos códigos de barras. Desta forma, concluimos que a utilização de um recurso didático que associe a Matemática à realidade dos discentes torna as aulas mais dinâmicas e atraentes, fazendo com que os mesmos despertem o desejo de aprender os conteúdos matemáticos. De fato, esta ideia é legitimada tanto pelos PCN e por pesquisadores na área da Educação, como por exemplo, Gil (2005). O autor destaca que a atenção dos alunos às aulas depende do grau de motivação dos mesmos. Sendo assim, com o intuito de atrair a atenção dos alunos para o conteúdo que está sendo apresentado é necessário que o professor considere alguns pontos, dentre os quais o autor propõe a aplicação prática dos conteúdos, ou seja, que o recurso da contextualização seja utilizado sempre que possível pelo professor.

5.2.2 Questionário B

Após a sistematização dos conteúdos matemáticos em sala de aula foi aplicado um questionário que buscou colher as impressões dos alunos acerca do uso da contextualização como recurso didático nas aulas de Matemática. Ademais, procurou também, avaliar o posicionamento dos estudantes sobre a importância da prática utilizada como um facilitador na aprendizagem dos conteúdos apresentados.

5.2.2.1 Resultados

Sobre a formação dos alunos no que se refere às condições de aprendizagem dos conteúdos de Matemática, os resultados revelaram que todos já encontraram algum tipo de dificuldade no aprendizado de conceitos dessa disciplina. Além disso, a maioria dos estudantes não apresenta convicção se há uma possível relação existente entre a dificuldade em aprender os conteúdos e a metodologia aplicada pelo professor.

Acerca do uso da contextualização como facilitador para a aprendizagem de conhecimentos matemáticos, verificamos que 90% dos alunos atribuíram à facilidade no entendimento desses conteúdos, ao uso dessa metodologia. Corroborando com este entendimento, o mesmo percentual de estudantes considerou muito bom ou excelente a metodologia utilizada pela professora pesquisadora para introduzir os conteúdos em estudo.

Quanto ao interesse dos alunos em estudar os assuntos matemáticos quando trabalhados por meio da utilização dos códigos de barras como instrumento didático, os resultados obtidos demostraram que mais de 80% dos alunos pesquisados apresentaram real interesse em aprender os conteúdos, por meio da proposta de ensino apresentada. Além disso, ao serem questionados se o procedimento utilizado pela professora havia possibilitado uma melhor compreensão dos conteúdos apresentados, constatamos que 80% dos alunos afirmaram que a metodologia de ensino lhes permitiu uma significativa assimilação dos mesmos. Ainda, a maioria classificou como satisfatório o grau de entendimento dos assuntos abordados a partir do estudo dos códigos de barras.

Por fim, 97% dos alunos revelaram que gostariam que os professores utilizassem, sempre que possível, a contextualização dos conteúdos, como ferramenta didática nas aulas de Matemática.

5.2.2.2 Análise

Diante dos resultados apresentados, percebemos que a maioria dos pesquisados consideraram que a utilização de uma abordagem contextualizada no desenvolvimento de aulas de Matemática, além de torná-las mais atraentes, proporciona um maior interesse dos alunos em conhecer mais profundamente os conteúdos trabalhados. Além disso, o método didático aplicado funcionou como um facilitador na aprendizagem dos conhecimentos, segundo a opinião dos estudantes. Ainda a respeito da proposta de ensino apresentada, notamos também, que toda a turma sentiu-se entusiasmada com a prática aplicada, inclusive, opinando no sentido de que a mesma pudesse ser utilizada com maior frequência nas aulas. Esses resultados demonstram que a contextualização dos conteúdos pode ser determinante para chamar a atenção dos alunos e colaborar na compreensão e assimilação dos assuntos estudados. Este entendimento compactua com o que pressupõe os Parâmetros Curriculares do Ensino

Médio que enfatiza que a Matemática pode desenvolver no aluno a capacidade de resolver problemas, criando hábitos de investigação e propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade. (BRASIL, 2010)

5.3 ANÁLISE DAS QUESTÕES DOS EXERCÍCIOS AVALIATIVOS

A avaliação é parte integrante do processo ensino/aprendizagem. Nesta etapa, buscou-se aferir qual o nível de assimilação dos conceitos pelos alunos, mediante a proposta de ensino aplicada. O exercício avaliativo foi aplicado a 35 alunos da turma, objeto de estudo.

Uma forma de apresentar as respostas fornecidas pelo universo de alunos pesquisados é a organização dos dados em categorias. A esse respeito, Gil (2008), aponta que o agrupamento das respostas em categorias é uma das maneiras mais adequadas de organizá-las e analisá-las. Seguindo esta linha de pensamento, para a análise dos resultados obtidos pelos alunos nessas questões, utilizaremos quatro categorias baseadas no trabalho de Sousa (2016), as quais serão descritas na Tabela 5.1

Tabela 5.1 – Categorias para análise das respostas da atividade avaliativa

CATEGORIA	COMPOSIÇÃO
1	Alunos que acertaram completamente a questão.
2	Alunos que aplicaram os conceitos corretamente, mas erraram contas ou manipulações algébricas.
3	Alunos que conseguiram utilizar os conceitos, mas os utilizaram de forma errada.
4	Alunos que erraram completamente a questão ou as deixaram em branco.

O exercício proposto foi elaborado com a finalidade de verificar o nível de aprendizagem dos conteúdos pelos alunos participantes, por meio de uma abordagem contextualizada. As principais descrições das questões constantes no exercício estão apresentadas, de forma sucinta, na Tabela 5.3.

Os resultados obtidos, junto aos alunos nas questões 1 e 2, foram muito promissores, visto que, respectivamente, 89% e 80% dos alunos ficaram nas categorias 1

Tabela 5.3 – Descrição dos conteúdos envolvidos nas questões da atividade avaliativa

QUESTÕES	CONTEÚDOS ENVOLVIDOS	COMPETÊNCIA
1 e 2	Produto interno de vetores	Calcular o produto interno de dois vetores
3 e 4	Produto interno de vetores	Determinar uma das coordenadas de um vetor a partir do produto interno de dois vetores
5	Congruência	Reconhecer uma congruência por meio de sua definição ou de suas propriedades
6 e 7	Congruência	Obter o resto de uma divisão por meio das propriedades da congruência
8 e 9	Congruência	Resolver o problema utilizando a definição e as propriedades da congruência

ou 2, o que demonstra que os alunos assimilaram o conteúdo ensinado. Além disso, os demais alunos conseguiram aplicar os conceitos tratados durante as aulas, porém, em situação indevida, fato este, que pode ser superado com a apresentação de mais algumas aulas sobre o conteúdo trabalhado.

Observando os resultados da 3ª questão, notamos que os alunos obtiveram um bom desempenho mesmo na resolução de uma questão de maior grau de complexidade, posto que 86% dos alunos foram identificados nas categorias 1 ou 2. Esse resultado reforça a tese de que os alunos assimilaram bem o conteúdo estudado.

Ao considerar os dados da questão 4, percebemos que os resultados continuaram satisfatórios, ante o alcance dos 83% dos participantes nas duas primeiras categorias. Ademais, foi constatado o aumento significativo, em relação às duas questões anteriores, do número de alunos que conseguiram utilizar os conceitos, mas a utilizaram erradamente.

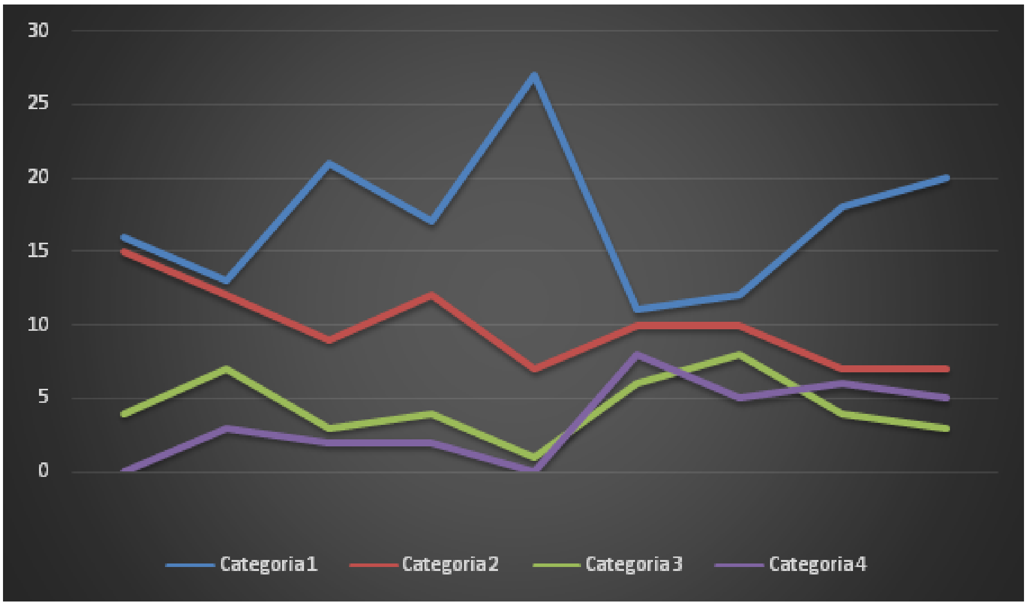
Os resultados obtidos na questão 5 mostraram que o tema foi totalmente compreendido pelos alunos, já que aproximadamente 100 % dos alunos conseguiu concluir a questão corretamente.

As respostas apresentadas nas questões 6 e 7 revelaram que houve uma pequena redução no percentual dos alunos enquadrados nas categorias 1 e 2, quando comparado às questões anteriores, entretanto, os resultados continuaram significativos. Compreendemos que os resultados apresentados se devem ao fato da questão ter exigido a aplicação de vários conceitos e propriedades referentes a um dos conteúdos, base da proposta da pesquisa.

Por fim, nas questões 8 e 9, onde foram propostos problemas contextualizados acerca dos conteúdos, notamos que os desempenhos dos alunos continuaram excelentes, uma vez que, mais de 70% dos alunos se enquadraram nas duas primeiras categorias.

O Gráfico 5.3 resume a evolução dos resultados obtidos pelos participantes em todas as questões de acordo com as categorias analisadas anteriormente. Consoante a análise dos dados coletados junto aos estudantes, consideramos que os resultados obtidos foram satisfatórios, uma vez que, em média, 78 % dos alunos conseguiram aplicar corretamente os conteúdos em todas as questões, ficando nas categorias 1 ou 2, conforme mostra o Gráfico 5.3. Ademais, o número de alunos enquadrados nas categorias 3 e 4, oscilaram no decorrer das questões, entretanto, em nenhum momento alcançou um patamar considerável nos resultados.

Gráfico 5.3 – Resultado geral das questões da avaliação de aprendizagem



A contextualização de conteúdos é uma das tendências praticadas no cenário da Educação Matemática e cuja aplicação como uma ferramenta didática vem sendo bastante discutida. Nesta linha de pensamento, Ricardo (2003) destaca que a contextualização visa dar significado ao que se pretende ensinar para o aluno, fazendo com que este sinta a necessidade de adquirir um conhecimento que ainda não tem.

Neste trabalho, apontamos uma proposta de ensino que busque utilizar a contextualização como uma maneira de tornar o ensino de matemática mais atraente e significativo. Neste sentido e a partir da interpretação dos resultados verificamos que o uso da contextualização foi relevante para que os alunos compreendessem os conteúdos matemáticos tratados nas aulas. A apresentação desses conhecimentos inseridos em um contexto cotidiano foi imprescindível para que os alunos vislumbrassem a utilidade e importância dos mesmos despertando-lhes interesse em conhecer as regras de forma mais aprofundada.

Deste modo, ficou notório que a introdução dos conteúdos utilizando uma abordagem contextualizada, além de mostrar aos alunos uma aplicação prática da Matemática, também possibilitou que os mesmos participassem frequentemente das aulas tornando-as mais dinâmicas, o que de fato permitiu um melhor entendimento, que muito contribuiu para o aprendizado significativo dos conceitos observados nos resultados apresentados dos exercícios avaliativos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentamos uma proposta de contextualização que utiliza os códigos de barras para introduzir o estudo de conceitos da aritmética modular e dos vetores. Participaram da pesquisa, em média, 32 alunos da 3ª série do ensino médio de uma escola pública de Petrolina-PE.

O propósito desta pesquisa era verificar a aceitação e receptividade dos alunos acerca da prática utilizada, além de avaliar se a metodologia aplicada contribui para assimilação dos conteúdos matemáticos em estudo. E para esta análise, utilizamos uma abordagem qualitativa no desenvolvimento da proposta, com a aplicação de questionários e exercício avaliativo.

As respostas dadas aos questionários apontam que houve uma boa aceitação da abordagem utilizada por parte dos alunos que a consideraram atrativa e interessante. No que diz respeito aos resultados da atividade avaliativa, constatamos que o recurso utilizado contribuiu significativamente para o aprendizado dos conceitos estudados, uma vez que os alunos obtiveram um bom aproveitamento nas resoluções das questões.

Constatamos, finalmente, que o uso da contextualização de conteúdos facilita a compreensão dos conhecimentos matemáticos, podendo ser aplicado com regular frequência pelos professores.

Deste modo, esperamos que este trabalho sirva como um instrumento didático para os professores de matemática, como também, esperamos que esta pesquisa venha estimular outros pesquisadores que se interessem em realizar estudos sobre esta temática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Marcel Augusto Rosa de. **O Tratado de Álgebra de John Wallis e suas relações com a álgebra britânica.** Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2010.

ANDRE, Marli. A Pesquisa no Cotidiano Escolar. In: FAZENDA, Ivani (Org.). **Metodologia de Pesquisa Educacional.** São Paulo: Editora Cortez, 2010.

BARROS, Marcos Antônio de Oliveira Barros. **Aritmética Modular**: Aplicações no Ensino Médio.2014. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá-MT, 2014.

BOERI, Camila Nicola; VIONE, Márcio Tadeu. **Abordagens em Educação Matemática.** [S. l.: s.n.], 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996.

_______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental.Brasília, 1998.

_______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** ensino médio. Brasília, 2000.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas:** conteúdos emétodos de ensino. São Paulo: Editora Ática, 2008.

COUTINHO. Severino Collier. **Criptografia.** Programa de Iniciação Científica OBMEP. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

DELGADO, Jorge. FRENSEL, Kátia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica.** Coleção Profmat. 1.ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2013.

ESQUINCA, Josiane Colombo Pedrini. **Aritmética**: Código de barras e outras aplicações de congruências.Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Federal de Mato Grosso, Campo Grande – MS, 2013.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. 5 ed. São Paulo: Editora Unicamp, 2011.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social.** 6.ed. São Paulo: Editora Atlas S.A, 2008.

GSI. Associação Brasileira de Automação. **Saiba a importância dos códigos de barras.** Julho, 2016. Disponível em blog.gs1br.org

HEFEZ, Abramo. **Iniciação à Aritmética.** Programa de Iniciação Científica OBMEP. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

HISSA, Cássio E. Viana. **A mobilidade das fronteiras** - inserções da Geografia na crise da modernidade. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2006.

KOCHE, José Carlos. **Fundamentos da Metodologia Científica:** Teoria da ciência e prática da pesquisa.19 ed., Petrópolis: Editora Vozes, 1997.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática.** São Paulo: Cortez, 1991.

LORENSATTI, Edi Jussara Cândido. **ARITMÉTICA:** Um pouco de História. In: Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul, 12, 2012. Caxias do Sul - RS. Artigo, 2012.

MARCONI, Maria de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de Metodologia Científica.** 5 ed. São Paulo: Editora Atlas, 2003.

MILIES, César Polcino. **A Matemática dos Códigos de Barras.** São Paulo: SP.IME/USP - Departamento de Matemática, 2008.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à História da Matemática.** Belo Horizonte: CAED – UFMG. 2013.

NEVES, José Luiz. **Pesquisa Qualitativa**– Características, Usos e Possibilidades. Caderno de Pesquisa em Administração. V. 1. São Paulo, 1996.

VERGNAUD, Gerard. **Gerard Verganud:** todos perdem quando a pesquisa não é colocada em prática. NOVA ESCOLA. Entrevista concedida a Gabriel Pillar Grossi. Edição 215. 2008. Disponível em www.novaescola.org.br

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco.** Recife, 2012.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani César. **Trabalho Científico:** Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico. 2 ed. Novo Hamburgo: Editora Feevale, 2013.

RICARDO, Elio Carlos. **Implementação dos PCN em sala de aula:** dificuldades e possibilidades. Artigo. Caderno Brasileiro de Ensino de Física. Florianópolis, 2003.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática.** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Editora ZAHAR, 2010.

SANT'ANNA, Iury Kersnowsky. **A Aritmética Modular como Ferramenta para as Séries Finais do Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro-RJ, 2013.

SILVA, Valeska Aparecida Rodrigues. **Propostas de Utilização de Códigos de Barras como Recurso Didático para o Ensino da Matemática.** Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro-RJ, 2013.

SOUZA, Wagner Santiago. **Relações Trigonométricas em triângulos quaisquer com o auxilio de triângulos retângulos.** Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro-BA, 2016.

TAKAHASHI, Cássia Regina dos Santos. **Ensinando Matemática através dos Códigos de Barras.** Artigo. Ciência e Natura, Santa Maria, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 278–288. Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas – UFSM, 2015.

TEIXEIRA, Elizabeth. **A três metodologias:** acadêmica, da ciência e da pesquisa. 8 ed., Petrópolis: Editora Vozes, 2001.

VASCONCELOS, Maria Betânia Fernandes. **A Contextualização na Sala de Aula:** concepções iniciais.In: IX Encontro Nacional de Matemática. Belo Horizonte, 2007.

APÊNDICE A - SEQUÊNCIA DIDÁTICA DO MINICURSO

Área: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.

Componente Curricular: Matemática.

Eixo Temático: Números e Operações. Geometria.

Ano: 3º Ensino Médio.

Tempo: 14 aulas (50 minutos cada)

CONTEÚDOS:

- Congruência modular.
- Produto interno de dois vetores.

OBJETIVOS

- Compreender a definição de congruência modular e importantes propriedades.
- Resolver e elaborar problemas envolvendo a aritmética dos restos.
- Reconhecer a importância dos restos nas resoluções de questões.
- Compreender as definições pertinentes a produto interno de vetores. Baseado nos Parâmetros Curriculares (PERNAMBUCO. 2012).
- Resolver e elaborar problemas que envolvam o produto escalar vetores. Baseado nos Parâmetros Curriculares (PERNAMBUCO. 2012).

RECURSOS DIDÁTICOS:

- Datashow.
- Fichas de exercícios.
- Textos escritos.
- Materiais concretos (produtos contendo os seus códigos de barras).

1ª Etapa

Nesta etapa foi feita uma abordagem sobre a importância dos códigos de barras, sua definição, sua composição e as vantagens proporcionadas pelo seu uso.

UM POUCO DE HISTÓRIA

Figura 1 – George J. Laurer

George J. Laurer, em 1970, criou o modelo de códigos de barras, sendo aceito formalmente, apenas em 1973, que foi conhecido como código UPC (Universal Product Code) que consistia numa sequência de 12 dígitos. Em 1976, Laurer criou um novo código, com 13 dígitos, o EAN (European Article Numbering System), sendo utilizado até os dias atuais. (MILIES,2008)

IMPORTÂNCIA DOS CÓDIGOS DE BARRAS

Atualmente, o código de barras pode ser encontrado em praticamente qualquer produto/embalagem que consumimos. Por meio dele, é possível identificar, de forma muito mais prática e ágil, a mercadoria que está sendo adquirida. Por ser padronizado, um mesmo código pode ser utilizado por várias empresas em uma cadeia produtiva. Ainda assim, a chance de erros é nula.

Figura 2 – Produto com código de barras.

O QUE SÃO CÓDIGOS DE BARRAS?

Pode-se definir o código de barras como a representação gráfica dos números que são informados logo abaixo dele. Como cada item possui um código diferente, podemos dizer que ele funciona como um RG, o que faz com que a sua identificação seja 100% assertiva.

Figura 3 – Código de barras no Brasil.

Essas barras são formadas a partir de um código binário, seguindo a mesma lógica da computação para isso: os números 1 representam as faixas pretas e os números 0 são referentes às faixas brancas.

COMO FUNCIONAM OS CÓDIGOS DE BARRAS?

- A leitura - chamada de decodificação - dos dados informados na barra é feita por um aparelho que funciona como um scanner, chamado de leitor de código de barras. Esse leitor emite um raio que incide sobre as barras.

- O padrão utilizado hoje na maioria dos países, exceto EUA e Canadá, é o EAN - sigla para Número Internacional de Artigo. A numeração nesse padrão contém 13 dígitos, divididos em quatro blocos: identificação do país, identificação da empresa e identificação do produto e o dígito verificador.

- Toda vez que esse código é escaneado, o computador realiza uma série de cálculos entre os números e o resultado final deve ser igual ao dígito verificador na numeração. É por meio desse processo que se sabe se a leitura foi correta ou não. Caso haja alguma divergência, o computador retorna com uma mensagem de erro.

- Dependendo da sequência, é possível saber se o item é um medicamento, um alimento, ou uma embalagem, por exemplo.

VANTAGENS DOS CÓDIGOS DE BARRAS

- Agilidade na captação dos dados de produtos.

- Mais velocidade nas transações.

- Redução de custos.

- Facilidade nas relações comerciais.

2ª Etapa

Este momento foi dedicado aos alunos para que os mesmos discutissem e analisassem sobre a existência de conteúdos matemáticos na construção dos códigos de barra. Foi solicitado aos alunos que trouxesse materiais/produtos contendo os respectivos códigos de barras para a próxima aula.

3ª Etapa

Nesta etapa, foi feita a exposição, na lousa, do processo utilizado para a determinação do dígito de controle (verificador) dos códigos de barras.

Consideremos o código de barras da figura abaixo:

Figura 4 – Código de barras em Portugal.

Seja $u = (7, 8, 9, 8, 3, 5, 7, 4, 1, 0, 0, 1, x)$ a sequência equivalente ao códigos de barras, onde x corresponde ao dígito de controle deste, e seja w uma sequência fixa dada por $w = (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1)$. Para definir o dígito verificador, devemos fazer o seguinte cálculo:

$7.1 + 8.3 + 9.1 + 8.3 + 3.1 + 5.3 + 7.1 + 4.3 + 1.1 + 0.3 + 0.1 + 1.3 + x.1 =$ múltiplo de 10, logo $105 + x =$ múltiplo de 10, ou seja $x = 5$.

Consideremos, agora, o código de barras da figura abaixo

Seja $u = (5, 6, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 2, 8, 2, x)$ a sequência equivalente ao códigos de barras e seja $w = (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1)$ a sequência fixa.

Então, façamos o seguinte cálculo:

$5.1 + 6.3 + 0.1 + 1.3 + 2.1 + 3.3 + 4.1 + 5.3 + 0.1 + 2.3 + x.1 =$ múltiplo de 10, então $76 + x =$ múltiplo de 10, logo, $x = 4$.

4ª Etapa

Neste momento, foi realizada uma dinâmica. A turma foi dividida em grupos de quatro ou cinco alunos.

Com os materiais (produtos) trazidos de casa sobre a mesa, os alunos analisaram os códigos de barras contidos neles, buscando reconhecer os procedimentos e conteúdos matemáticos utilizados na elaboração dos mesmos.

Em seguida, cada grupo escreveu em uma folha de papel os códigos de barras contidos nos produtos trazidos de casa, não podendo expor o dígito verificador de cada código. Em seguida, as folhas foram redistribuídas entre os grupos de tal forma que todos os grupos recebessem códigos distintos daqueles que trouxeram. Os grupos tiveram que determinar corretamente o dígito de controle dos códigos recebidos no menor tempo possível, apresentando as soluções na lousa aos demais colegas.

5ª Etapa

Nesta etapa, a partir dos exemplos utilizados na terceira e alguns dos códigos de barras contidos nos produtos trazidos pelos alunos, foi feita a sistematização dos conteúdos envolvidos nos cálculos efetuados para a determinação do dígito verificador. Analisando cada um deles, verificamos que em seus cálculos trabalhamos dois importantes conhecimentos matemáticos:

- Produto interno de dois vetores.
- Congruência modular.

Em seguida, foi feita abordagem de cada um desses temas.

Produto interno de dois vetores

Os resultados a seguir foram baseados no livro de Delgado, Frensel e Crissaff (2013). **Proposição.** Sejam $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ dois vetores do plano. Então, o produto interno dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, representado por $< u, v >$, é dado por:

$$< u, v >= a\alpha + b\beta.$$

Alguns exemplos:

i) O produto interno entre $\vec{u} = (3, 4)$ e $\vec{v} = (-2, 5)$ é:

$$< \vec{u}, \vec{v} >= 3.(-2) + 4.5 = -6 + 20 = 14.$$

ii) O produto interno entre $\vec{u} = (1, 7, -4)$ e $\vec{v} = (2, -3, 0)$ é:

$$< \vec{u}, \vec{v} >= 1.2 + 7.(-3) + (-4).0 = 2 - 21 + 0 = -19.$$

Propriedades do produto interno

Dados os vetores $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$ e $\theta \in \mathbb{R}$, temos:

i) **O produto interno (escalar) é comutativo:** $< \vec{u}, \vec{v} >=< \vec{v}, \vec{u} >$.

ii) **O produto interno (escalar) é distributivo, a esquerda, em relação a adição de vetores:** $< \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} >=< \vec{u}, \vec{v} > + < \vec{u}, \vec{w} >$.

iii) **O produto interno (escalar) é distributivo, à direita, em relação a adição de vetores:** $< \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} >=< \vec{u}, \vec{w} > + < \vec{v}, \vec{w} >$.

iv) **O produto interno (escalar) é comutativo em relação a multiplicação por um número real:** $< \theta\vec{u}, \vec{v} >= \theta < \vec{u}, \vec{v} >=< \vec{u}, \theta\vec{v} >$.

Além das propriedades acima, existe uma proposição muito importante que relaciona a norma e o produto do vetor.

O produto interno (escalar) de um vetor por ele mesmo é igual ao quadrado do módulo desse vetor: $< \vec{u}, \vec{u} >= \|\vec{u}\|^2$.

Exemplificando as propriedades.

Sejam $\vec{u} = (1, 3)$, $\vec{v} = (0, 2)$ e $\vec{w} = (1, 2)$ três vetores no plano.

i) Façamos $< \vec{u}, \vec{v} >= 1.2 + 3.2 = 6$ e, agora $< \vec{v}, \vec{u} >= 0.1 + 2.3 = 0.6$ Portanto $< \vec{u}, \vec{v} >=< \vec{v}, \vec{u} >$.

ii) Efetuemos os seguintes cálculos $< \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} >$ e $< \vec{u}, \vec{v} > + < \vec{u}, \vec{w} >$. Temos que $< \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} >=< (1, 3), (1, 4) >= 1.1 + 3.4 = 13$. Por outro lado, $< \vec{u}, \vec{v} > + < \vec{u}, \vec{w} >= (1.0 + 3.2) + (1.1 + 3.2) = 6 + 7 = 13$, desta forma, podemos concluir que $< \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} =< \vec{u}, \vec{v} > + < \vec{u}, \vec{w} >$.

iii) Sabemos que $< \vec{u}+\vec{v}, \vec{w} > = < (1,5),(1,2) > = 1.1+5+2 = 11$. Agora, $< \vec{u}, \vec{w} > + < \vec{v}, \vec{w} > = (1.1+3.2)+(0.1+2.2) = 7+4 = 11$. Portanto, $< \vec{u}+\vec{v}, \vec{w} > = < \vec{u}, \vec{w} > + < \vec{v}, \vec{w} >$.

iv) Vamos efetuar os cálculos seguintes: $5 < \vec{u}, \vec{v} >, < 5\vec{u}, \vec{v} >$ e $< \vec{u}, 5\vec{v} >$. Pelo item i) já sabemos que $< \vec{u}, \vec{v} > = 6$, daí $5 < \vec{u}, \vec{v} > = 5.6 = 30$. Agora, $< 5\vec{u}, \vec{v} > = < (5,15),(0,2) > = 5.0+15.2 = 30$. Além do mais, temos $< \vec{u}, 5\vec{v} > = < (1,3),(0,10) > = 1.0+3.10 = 30$. Então, podemos concluir que $< \vec{u}, \vec{v} > = < 5\vec{u}, \vec{v} = < \vec{u}, 5\vec{v} >$. Portanto, dado $\theta \in \mathbb{R}$, temos $< \theta\vec{u}, \vec{v} > = \theta < \vec{u}, \vec{v} >, < \vec{u}, \theta\vec{v} >$.

O produto interno entre dois vetores também pode ser obtido por meio de uma definição geométrica, onde utilizaremos dois conceitos já estudados anteriormente: norma de um vetor e ângulo entre dois vetores.

Definição. O produto interno dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do plano é o número real:

$$< \vec{u}, \vec{v} > = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \theta,$$

onde θ é o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

ARITMÉTICA MODULAR

Os resultados seguintes foram adaptados de materiais extraídos dos livros de Hefez(2009), Coutinho (2008) e Barros (2014).

Congruência Modular

Seja m um número natural, com $m > 1$. Diremos que dois números inteiros a e $b$são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros$a$ e b são congruentes módulo m, escreve-se $a \equiv b \mod m$.

Por exemplo, dados os números 58 e 43. Efetuando a divisão de ambos por 5, observamos que

Concluímos então, que $58 \equiv 43 \mod m$.

Quando a relação $a \equiv b \mod m$ for falsa, diremos que a e b não são congruentes, ou que são incongruentes módulo m, e escreveremos $a \not\equiv b \mod m.$ Vejamos mais alguns exemplos:

i) $21 \equiv 13 \mod 2$, já que os restos da divisão de 21 e de 13 por 2 são iguais a $1.$

ii) $112 \equiv 77 \mod 5,$ pois os restos da divisão de 112 e 75 por 5 são iguais a $2.$

iii) $31 \not\equiv 32$ pois o resto da divisão de 31 por 5 é $1,$ enquanto o resto da divisão de 32 por 5 é $2.$

Importante:

Todo número inteiro é congruente módulo m ao seu resto pela divisão euclidiana por $m.$

Como por exemplo, temos $21 \equiv 1 \mod 4$ e $38 \equiv 2 \mod 6.$

Para verificar se dois números são congruentes módulo m, não é necessário efetuar a divisão euclidiana de ambos por m para depois comparar os seus restos.

Uma maneira equivalente de dizer que $a \equiv b \mod m$ é afirmar que a diferença $(a-b)$ ou $(b-a)$ é divisível por $m,$ ou que m é divisor dessa diferença.

Verifiquemos os exemplos a seguir:

i) $21 \equiv 17 \mod 4,$ pois conforme a proposição acima temos $4|21-17.$

ii) $13 \equiv 28 \mod 5,$ uma vez que $5|28-13.$

iii) $5 \not\equiv 12 \mod 6$, já que $6 \nmid 12-5.$

Decorre, imediatamente, da definição que a congruência modular define uma relação de equivalência, pois atende às propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Sejam $m \in \mathbb{N}$. Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se que:

i) $a \equiv a \mod m$ (reflexiva)

Ex.: $27 \equiv 27 \mod 9$ e $8 \equiv 8 \mod 2.$

ii) Se $a \equiv b \mod m,$ então $b \equiv a \mod m$ (simétrica)

Ex.: Se $20 \equiv 15 \mod 5,$ então $15 \equiv 20 \mod 5.$

iii) Se $a \equiv b \mod m$ e $b \equiv c \mod m,$ então $a \equiv c \mod m$ (transitiva)

Ex.: Se $6 \equiv 9 \mod 3$ e $9 \equiv 27 \mod 3,$ então $6 \equiv 27 \mod 3,$ pois 6 e 27 divididos por 3 deixam restos iguais a zero.

Propriedades básicas das congruências modulares

i) Sejam $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Se $a \equiv b \mod m$ e $c \equiv d \mod m$, então $a \pm c \equiv b \pm d \mod m$.

ii) Sejam $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Se $a \equiv b \mod m$ e $c \equiv d \mod m$, então $ac \equiv bd \mod m$.

iii) Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$ e seja $n \in \mathbb{N}$. Se $a \equiv b \mod m$ e n é um número natural, logo $a^n \equiv b^n \mod m$.

A seguir, temos alguns exemplos da aplicação das propriedades acima expostas: Sejam $15 \equiv 7 \mod 4$ e $10 \equiv 6 \mod 4$, temos que:

i) $15 + 10 \equiv 7 + 6 \mod 4 \Rightarrow 25 \equiv 13 \mod 4$, pois 25 e 13 divididos por 4 deixam restos iguais a 1. Além disso, $15 - 10 \equiv 7 - 6 \mod 4 \Rightarrow 5 \equiv 1 \mod 4$, já que 5 e 1 divididos por 4 deixam restos iguais a 1.

ii) $15 \cdot 10 \equiv 7 \cdot 6 \mod 4 \Rightarrow 150 \equiv 42 \mod 4$, pois 150 e 42 divididos por 4 deixam restos iguais a 2.

iii) $15 \equiv 7 \mod 4 \Rightarrow 15^2 \equiv 7^2 \mod 4$, pois $15^2 = 225$ e $7^2 = 49$ quando divididos por 4 deixam restos iguais a 1.

Mais alguns exmplos de aplicação das propriedades:

1) Calculemos o resto da divisão por 2 do número seguir:

a) $375 + 1225 + 12501$

Observemos que, pela divisão euclidiana, $375 \equiv 1 \mod 2$, $1225 \equiv 1 \mod 2$ e $12501 \equiv 1 \mod 2$. Assim, aplicando a propriedade i) obtemos o seguinte resultado $375 + 1225 + 12501 \equiv 1 + 1 + 1 \mod 2$, daí, $375 + 1225 + 12501 \equiv 3 \mod 2$, e $3 \equiv 1 \mod 2$, logo, por trasitividade, $375 + 1225 + 12501 \equiv 1 \mod 2$. Portanto, o resto de $375 + 1225 + 12501$ por 2 é igual 1.

b) $25 \cdot 333 \cdot 78$

Inicialmente, notemos que, $25 \equiv 1 \mod 2, 333 \equiv \mod 2$ e $78 \equiv 0 \mod 2$. Assim, $25 \cdot 333 \cdot 78 \equiv 1 \cdot 1 \cdot 0 \mod 2$, daí, $25 \cdot 333 \cdot 78 \equiv 0 \mod 2$, ou seja, o reto da divisão de $25 \cdot 333 \cdot 78$ por 2 é zero.

2) (BARROS - 2014) Vamos supor que você saiba em qual dia da semana caiu o dia 1º de janeiro de um determinado ano. Em 2006, por exemplo, foi um domingo. Imaginemos que você deseja saber quando cairá um outro dia qualquer (vale para qualquer ano). É só montar uma tabela para essa primeira semana, que no caso será:

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
1	2	3	4	5	6	7

Inicialmente, verificamos que, neste caso, estamos diante de uma congruência, módulo 7. Assim, se estivéssemos interessados em descobrir em que dia da semana caiu o dia 5 de julho (e não temos um calendário em mãos). Primeiro precisamos ver quantos dias existem de 1º de janeiro até 5 de julho. Vejamos:

Janeiro = 31 dias

Fevereiro = 28 dias (2006 não é bissexto)

Março = 31 dias

Abril = 30 dias

Maio = 31 dias

Junho = 30 dias

Julho = 5 dias

Total = 186 dias.

Feita a contagem de dias, é como se tivéssemos uma fila de 186 dias e queremos saber, na congruência de módulo 7 (7 dias da semana) qual o dia que correspondente ao 186. Ao dividirmos 186 por 7, obtemos: $186 = 7 \cdot 26 + 4$. Logo, o 186 é congruente a 4, módulo 7. Como o dia 4 de janeiro de 2006 foi uma quarta-feira, o 186º dia desse mesmo ano também o será e, é claro, que todas as demais quartas-feiras deste ano serão ocupados por números congruentes ao 4, módulo 7.

3) (FUVEST - 2008) Sabendo que os anos bissextos são múltiplos de 4 e que o primeiro dia de 2007 foi segunda-feira, o próximo a começar também em uma segunda-feira:

a) 2012

b) 2011

c) 2014

d) 2018

e) 2024

Assim como no exemplo 1, temos um caso de congruência módulo 7. Vamos construir a tabela da primeira semana de um ano qualquer.

Primeiro dia	Segundo dia	Terceiro dia	Quarto dia	Quinto dia	Sexto dia	Sétimo dia
1	2	3	4	5	6	7

Observemos que $365 \equiv 1 \mod 7$. Isto significa que num ano não bissexto, o útltimo dia do ano, ou seja, o 365º dia ocorre num mesmo dia da semana que o primeiro dia desse ano. Dessa forma, o primeiro dia do próximo ano, avança um dia da semana em relação ao primeiro dia do ano anterior.

Por exemplo,2007 não é um ano bissexto e se iniciou numa segunda feira, portanto, o último dia de 2007 também será uma segunda feira, dessa forma, o primeiro dia de 2008 será uma terça-feira.

Já um ano bissexto, possui 366 dias. Observe que $366 \equiv 2 \mod 7$. Isto significa que num ano bissexto, o último dia do ano, ou seja, o 366º dia ocorre num mesmo dia que o segundo dia desse ano. Dessa forma, o primeiro dia do próximo ano, avança dois dias da semana em relação ao primeiro dia do ano anterior.

Por exemplo,2008 é um ano bissexto, e como já observamos, o primeiro dia desse ano é uma terça-feira, logo, o último dia desse ano será uma quarta feira. Dessa forma, o primeiro dia de 2009 será uma quinta feira.

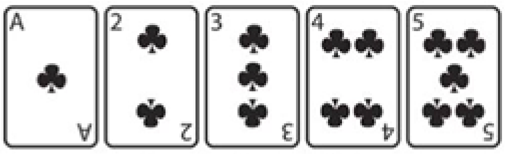
Considere que N seja o número de dias de um ano não bissexto e M o número de dias de um ano bissexto. Temos que $N \equiv 1 \mod 7$ e $M \equiv 2 \mod 7$ Temos:

ANO	CONGRUÊNCIA	ÚLTIMO DIA	PRÓXIMO ANO	INÍCIO DO PRÓXIMO
2007	$N \equiv 1 \mod 7$	SEGUNDA	2008	TERÇA
2008	$M \equiv 2 \mod 7$	TERÇA	2009	QUINTA
2009	$N \equiv 21 \mod 7$	QUINTA	2010	SEXTA
2010	$N \equiv 21 \mod 7$	SEXTA	2011	SÁBADO
2011	$N \equiv 21 \mod 7$	SÁBADO	2012	DOMINGO
2012	$M \equiv 22 \mod 7$	DOMINGO	2013	TERÇA
2013	$N \equiv 21 \mod 7$	TERÇA	2014	QUARTA

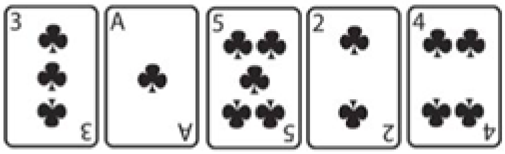
2014	$N \equiv 21 \mod 7$	QUARTA	2015	QUINTA
2015	$N \equiv 21 \mod 7$	QUINTA	2016	SEXTA
2016	$M \equiv 22 \mod 7$	SEXTA	2017	DOMINGO
2017	$N \equiv 21 \mod 7$	DOMINGO	2018	SEGUNDA

Portanto, o próximo ano a começar numa segunda feira será 2018.

4) (OBMEP - 2012) Cinco cartas, inicialmente dispostas como na figura, serão embaralhadas. Em cada embaralhamento, a primeira carta passa a ser a segunda, a segunda passa a ser a quarta, a terceira passa a ser a primeira, a quarta passa a ser a quinta e a quinta passa a ser a terceira. Qual será a primeira carta após 2012 embaralhamentos?



Posição inicial



Posição após o primeiro embaralhamento

Vamos verificar o que acontece após alguns embaralhamentos, seguindo as instruções do enunciado:

1. Posição Inicial: A 2 3 4 5

2. 1º Embaralhamento: 3 A 5 2 4

3. 2º Embaralhamento: 5 3 4 A 2

4. 3º Embaralhamento: 4 5 2 3 A

5. 4º Embaralhamento: 2 4 A 5 3

6. 5º Embaralhamento: A 2 3 4 5 (Posição Inicial).

Observemos que, a cada 5 embaralhamentos, a sequência volta a se repetir. Desta forma, temos um caso de congruência módulo 5. Dessa forma, se N é o número de embaralhamentos, então:

- Se $N \equiv 0 \mod 5$, a primeira carta será A.
- Se $N \equiv 1 \mod 5$, a primeira carta será 3.
- Se $N \equiv 2 \mod 5$, a primeira carta será 5.
- Se $N \equiv 3 \mod 5$, a primeira carta será 4.
- Se $N \equiv 4 \mod 5$, a primeira carta será 2.

Então, é fácil verificar que $2012 \equiv \quad \mod 5$, logo, após 2012 embaralhamentos, a primeira carta da sequencia será o 5 de paus.

6ª Etapa

Nesta última etapa, foi aplicada uma atividade individual com o objetivo de diagnosticar o nível de aprendizagem dos alunos.

APÊNDICE B - Questionário A

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF
Mestranda: Romênia Karoline de Aguiar Couto
Orientador: Dr. Lino Marcos da Silva

1) Você gostou da abordagem feita sobre os códigos de barras?

a) ( ) Muito

b) ( ) Razoavelmente

c) ( ) Pouco

d) ( ) Não

2) Você acredita que o estudo dos códigos de barras é relevante para o desenvolvimento de aulas da disciplina de Matemática?

a) ( ) Muito

b) ( ) Razoavelmente

c) ( ) Pouco

d) ( ) Não

3) Após a abordagem realizada a respeito dos códigos de barras, você se sente interessado em verificar se existem regras matemáticas definidas na elaboração desses códigos?

a) ( ) Muito

b) ( ) Razoavelmente

c) ( ) Pouco

d) ( ) Não

4) Numa escala de 0 a 5, no qual o 0 (zero) indica nenhum interesse e o 5 (cinco) indica total interesse, como você classifica o seu nível de interesse para conhecer a matemática por trás dos códigos de barras?

(0) (1) (2) (3) (4) (5)

APÊNDICE C - Questionário B

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF
Mestranda: Romênia Karoline de Aguiar Couto
Orientador: Dr. Lino Marcos da Silva

1) Ao longo de sua formação escolar, você apresentou dificuldade na aprendizagem dos conteúdos matemáticos?

a) ( ) Sempre

b) ( ) Quase sempre

c) ( ) Algumas vezes

d) ( ) Nunca

2) Você acredita que a dificuldade em aprender matemática pode estar associadas à metodologia utilizada na abordagem dos conteúdos?

a) ( ) Sim

b) ( ) Talvez

c) ( ) Não

d) ( ) Não sei dizer

3) Na sua opinião, a contextualização de conteúdos pode facilitar o aprendizado da Matemática?

a) ( ) Sim

b) ( ) Não

c) ( ) Não sei dizer

4) Como você classificaria a maneira na qual os conteúdos matemáticos foram introduzidos durante as aulas de aritmética modular e de produto interno de vetores?

a) ( ) Excelente

b) ( ) Muito boa

c) ( ) Razoável

d) ( ) Ruim

e) ( ) Péssima

5) Numa escala de 0 a 5, no qual o 0 (zero) indica nenhum interesse e o 5 (cinco) indica total interesse, como você classifica o seu nível de interesse em aprender os conteúdos estudados, a partir da utilização dos códigos de barras como recurso didático? (0) (1) (2) (3) (4) (5)

6) Você acredita que o procedimento usado nessa proposta de ensino lhe permitiu uma melhor assimilação dos conteúdos?

a) ( ) Totalmente

b) ( ) Razoavelmente

c) ( ) Um pouco

d) ( ) Nada

7) Numa escala de 0 a 5, no qual o 0 (zero) indica nada e o 5 indica bastante, como você classifica o seu nível de compreensão dos conteúdos matemáticos a partir do estudo dos códigos de barras?

(0) (1) (2) (3) (4) (5)

8) No seu ponto de vista, a proposta de utilização da contextualização dos conteúdos, como recurso didático, poderia ser aplicada mais vezes nas aulas de Matemática?

a) ( ) Sim

b) ( ) Não

c) ( ) Não sei dizer

APÊNDICE D - Atividade Avaliativa

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF
Mestranda: Romênia Karoline de Aguiar Couto
Orientador: Dr. Lino Marcos da Silva

1) Dados os vetores $\vec{u} = (1, -4), \vec{v} = (5, 3), \vec{w} = (6, -4)$ e $\vec{t} = (1, 9,)$ determine o produto internos dos vetores:

a) $\vec{u}$ e $\vec{w}$

b) $\vec{v}$ e $\vec{t}$

c) $\vec{u}$ e $\vec{v}$

d) $\vec{w}$ e $\vec{v}$

2) Sendo $\vec{u}$ um vetor tal que $\vec{u} = 3\vec{v}$, onde $\vec{v} = (1, -3, 4, 0)$. Obtenha o produto escalar dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

3) (DELGADO, FRENSEL, CRISSAFF. 2013) Determine $x \in \mathbb{R}$ de modo que o produto interno dos vetores $\vec{u} = (4, -3)$ e $\vec{v} = (x, 1)$ seja igual a 5.

4) Sejam $\vec{u} = (2, 3, 2, -6)$ e $\vec{v} = (1, x, x, 2)$. Sabendo que o produto escalardos vetores vale 24, determine o valor de x. 5) (HEFEZ. 2009) Verifique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) $35 \equiv 27 \mod 4$

b) $72 \equiv 32 \mod 5$

c) $83 \equiv 72 \mod 5$

d) $78 \equiv 33 \mod 9$

6) (HEFEZ. 2009) Sem efetuar as somas e subtrações indicadas, determine os restos da divisão por $2, 4$ e 5, do número abaixo:

$$3534785 + 87538\breve{}9535832.$$

7) (HEFEZ. 2009) Sejam a e b dois números inteiros cujos restos da divisão por 7 são respectivamente 6 e 2. Determine o resto da divisão de $a \times b$ por 7.

8) (BARROS. 2014) A copa do mundo de futebol será realizada no Brasil no ano de 2014. O jogo de abertura ocorrerá no dia 12 de junho. Supondo que não haja um calendário em mãos e sabendo que o dia 1º de janeiro de 2014 será uma quarta feira, determine em que dia da semana ocorrerá o jogo de abertura.

9) (OBMEP) A, B, C, D, E, F, G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a figura. A aranha continua seu trabalho. Sobre qual fio de apoio estará o número 118?