UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

HEITOR AMARAL GARCIA

O ensino da análise combinatória através de situações problema

Campinas

2017

Heitor Amaral Garcia

O ensino da análise combinatória através de situações problema

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Laura Leticia Ramos Rifo

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Heitor Amaral Garcia e orientada pela Profa. Dra. Laura Leticia Ramos Rifo.

Campinas

2017

A ficha catalográfica será fornecida pela biblioteca

Dissertação de Mestrado profissional defendida em 04 de julho de 2017 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). LAURA LETICIA RAMOS RIFO

Prof(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

Prof(a). Dr(a). VICTOR FOSSALUZA

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

Para todos os professores de matemática.

Agradecimentos

Agradeço, em especial, à minha família, amigos e namorada pela paciência com a minha ausência, pelas diversas vezes que recebi convites para ir à festa, ao cinema e viajar e recusei, a fim de realizar a leitura e a escrita da dissertação do mestrado.

À minha mãe, Rosane Felipe Amaral, pelo carinho e interesse com os meus estudos e futuro.

Às minhas avós, que sempre estiveram presentes em toda a minha infância e me ajudarem a enxergar a vida cheia de esperança e amor.

Obrigado à professora Laura Letícia Ramos Rifo pela orientação e por ter me proporcionado momentos ricos de discussão, reflexão, revisão e apontamentos para a melhoria da minha pesquisa.

À CAPES pelo financiamento do Mestrado, dando assim a possibilidade de estudo e pesquisa com grande tempo de dedicação.

Aos meus grandes amigos da faculdade e mestrado, que me ajudaram com as discussões sobre os conteúdos acadêmicos.

Resumo

Na presente dissertação vários problemas de análise combinatória (permutações, arranjos e combinações) serão resolvidos sem a utilização de fórmulas, de maneira natural e lógica, através do princípio multiplicativo, evitando assim, a frequente pergunta realizada pelos alunos que são ensinados da forma tradicional: “Qual fórmula tenho que usar, permutação, arranjo ou combinação?”

Palavras-chave: Análise Combinatória; Princípio multiplicativo; Arranjos; Permutações e Combinação.

Abstract

In this dissertation several Combinatorial Analysis problems (permutations, arrangements and combinations) will be solved without the use of formulas, in a natural and logical way, through the multiplicative principle, thus avoiding the frequent question asked by students who are taught the traditional manner: "Which formula do I have to use, permutation, arrangement or combination?".

Keywords: Combinatorial Analysis; Multiplicative principle; Arrangements; Permutations and Combinations.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

Em resumo, a Análise Combinatória tem como objetivo verificar quantos são os possíveis resultados de um experimento. Dentro do tema Análise Combinatória existem os subtemas Permutação, Arranjo e Combinação.

A Permutação acontece quando todas as possibilidades são formadas a partir dos mesmos elementos e a única diferença entre eles é a ordem em que esses elementos se apresentam.

O Arranjo é uma forma de agrupamento em que, além de ser possível mudar a ordem dos elementos escolhidos, existe a possibilidade de mudar os próprios elementos escolhidos.

E na Combinação é desprezada a ordem entre os elementos escolhidos.

É difícil pontuar na história onde apareceu a Análise Combinatória, porém existem relatos de problemas de contagem relacionados à construção de quadrados mágicos e solução de enigmas. Segundo Tavares e Brito (2005), o matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.) propôs um jogo chamado de Stomachion, semelhante ao Tangran, que desejava definir de quantas formas 14 peças planas, com formatos e tamanhos diversos, poderiam ser unidas para construir um quadrado. É comum ligar o surgimento da Análise Combinatória com o da teoria das probabilidades ou ao desenvolvimento do binômio de Newton.

Ainda, segundo Tavares e Brito (2005), inicialmente, a Combinatória estava muito ligada aos jogos de azar, como: o lançamento de dados, porém, com o passar do tempo, passou a ser abordado pela ciência e autores, por exemplo: Moivre, Bernoulli e Euler.

No ensino da análise combinatória, é de extrema relevância, que o aluno compreenda a lógica que a envolve e não se atenha a decorar fórmulas. Para que isso ocorra, o que se propõe na presente dissertação é que, o ensino aconteça através da resolução de problemas que envolvam situações cotidianas e uso de material concreto, como: as cartas de um baralho e os jogos. D'ambrosio (2008) escreve que através da resolução de um problema, o aluno é capaz de construir de maneira mais sólida um conceito matemático. Construir hipóteses, testá-las e discutí-las em grupo até atingir a solução do problema. Pode ser um processo mais demorado e que causa maior agitação no grupo de alunos do que as práticas tradicionais de ensino, mas, ao mesmo tempo, demanda envolvimento e interesse por parte deles. Dante (1998) descreve como objetivo do ensino da matemática o pensar desafiador e motivador promovido pelas situações problemas.

E, por fim, Romanatto (2012) acredita que o processo de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória, com o uso de resolução de problemas, para além de favorecer a compreensão do tema, auxilia no pensar, no descobrir padrões e estabelecer conexões. Através dos problemas é possível consolidar novos conhecimentos e aplicar, verificar, alterar ou acrescentar algo aos conhecimentos adquiridos anteriormente. “A matemática precisa ser concebida pelo estudante como um conhecimento que favorece o desenvolvimento e aperfeiçoamento de seu raciocínio, sua capacidade expressiva, sua sensibilidade e sua imaginação.” (ROMANATTO, p. 309, 2012).

O que se pretende com o trabalho a seguir é que, baseado em autores como os acima citados, a Análise Combinatória seja realmente compreendida pelo aluno e que não seja necessário decorar fórmulas sem entendê-las e sem saber ao certo como e onde aplicá-las. Em síntese, evitar a comum pergunta: “Professor, qual fórmula eu aplico?” O aluno deixa de ser um simples aplicador de fórmulas e passa a ser sujeito ativo que produz o seu conhecimento.

1 Princípio Multiplicativo

No capítulo inicial, os conceitos de Permutação Simples e Arranjo Simples serão construídos por meio da proposição de situações problema que envolvem a lógica e a intuição, sem introduzir os conceitos teóricos.

A autora Marta Rabioglio, no livro Jogar e Aprender Matemática (2010), aborda a importância do professor não apresentar ao aluno os conceitos matemáticos como um conhecimento fechado e acabado, mas atraí-lo a pensar sobre o problema, a construir hipóteses e diferentes estratégias para resolvê-lo.

A autora acima citada, juntamente com Constance Kamii, escrevem que é comum a criança chegar à escola com grande potencial de raciocínio, curiosa e com espírito investigativo. Mas a forma como frequentemente a matemática é apresentada, com técnicas e fórmulas inquestionáveis, acaba por transformar esse desejo de aprender em "preguiça mental", ou seja, o aluno se torna dependente de uma fórmula. "Se o professor, ao contrário, mostra às crianças como resolver cada problema, elas se tornam dependentes de suas instruções. Além disso, não é por imitação do professor que elas aprendem aritmética". (KAMII, 2010, p.21).

Atividade 1. Formando Conjuntos de Roupas - Introdução à Árvore de Contagem.
Material: 2 calças jeans, 4 blusas (por grupo) e a formação de pequenos grupos, pois, baseado na experiência docente do autor da presente dissertação, a formação de grupos maiores pode atrapalhar na troca de conhecimentos e experiências, uma vez que algum paticipante pode permanecer ocioso na resolução do problema.
Situação Problema: Maria sairá com as suas amigas, elas combinaram de ir com calça jeans e blusa. Em seu armário, Maria tem duas calças jeans (uma preta e uma azul) e quatro blusinhas (uma rosa, uma amarela, uma preta e uma verde) que gostaria de usar. De quantas maneiras diferentes Maria poderia se vestir para sair de casa com as suas amigas?
Procedimento Proposto: Os alunos devem ser desafiados a contar as possibilidades e, logo após, além de contá-las, devem desenhá-las; primeiro as combinações possíveis com a calça azul e depois com a calça preta. O objetivo é que os alunos reconheçam um raciocínio lógico na contagem.
Resolução: O resultado será a formação de 8 conjuntos distintos, pois para cada calça existem 4 possibilidades de combinações, assim: $\underline{2} \cdot \underline{4} = 8$. É importante que o professor construa na lousa a árvore de contagem (a seguir) a fim de que a resolução fique mais clara para os alunos.

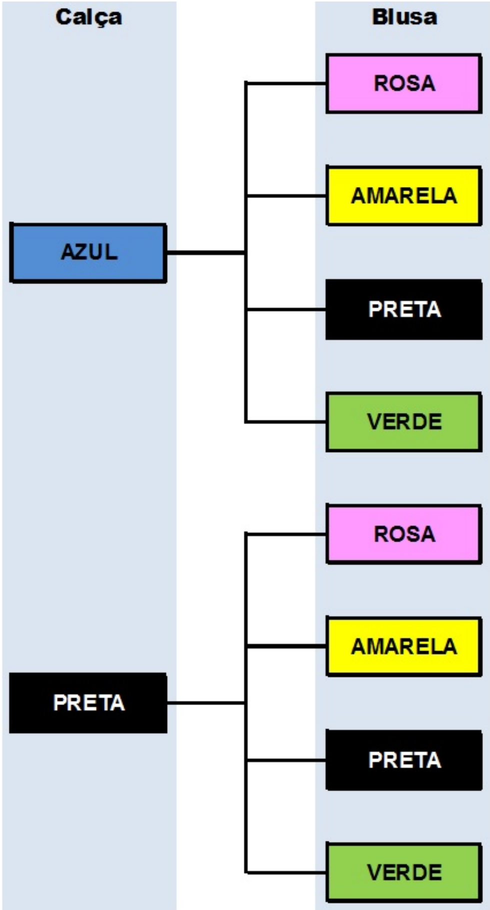


Figura 1 – Árvore de Contagem dos Conjuntos de Roupas.

Depois, o professor perguntará para a sala de quantas maneiras diferentes Maria poderia sair se tivesse, além das calças e blusinhas, três sandálias (um par branco, um par laranja e um par azul).

Os alunos terão um tempo para tentar solucionar o problema e o professor deverá sugerir o uso da árvore de contagem construída.

A árvore de contagem será ampliada. Segue na Figura 2 a árvore completa.

É possível concluir que são, no total, 24 maneiras distintas de se vestir, pois são três escolhas sequênciais que Maria deverá tomar, entre 2 calças, 4 blusas e 3 sapatos. Seguindo o raciocínio já construído com as blusas e as calças, temos: $\underline{\ 2\ } \cdot \underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 3\ } = 24$, uma calça jeans com 2 opções, uma blusa com 4 opções e um sapato com 3 opções, ou seja, quantidade de calças vezes a quantidade de blusas vezes a quantidade de sapatos.

Depois dessa atividade é possível trabalhar do exemplo 1.1 até o 1.5, pois são semelhantes. As Árvore de Contagem e tabelas serão utilizadas com a finalidade de melhorar visualização e entendimento por parte dos alunos.

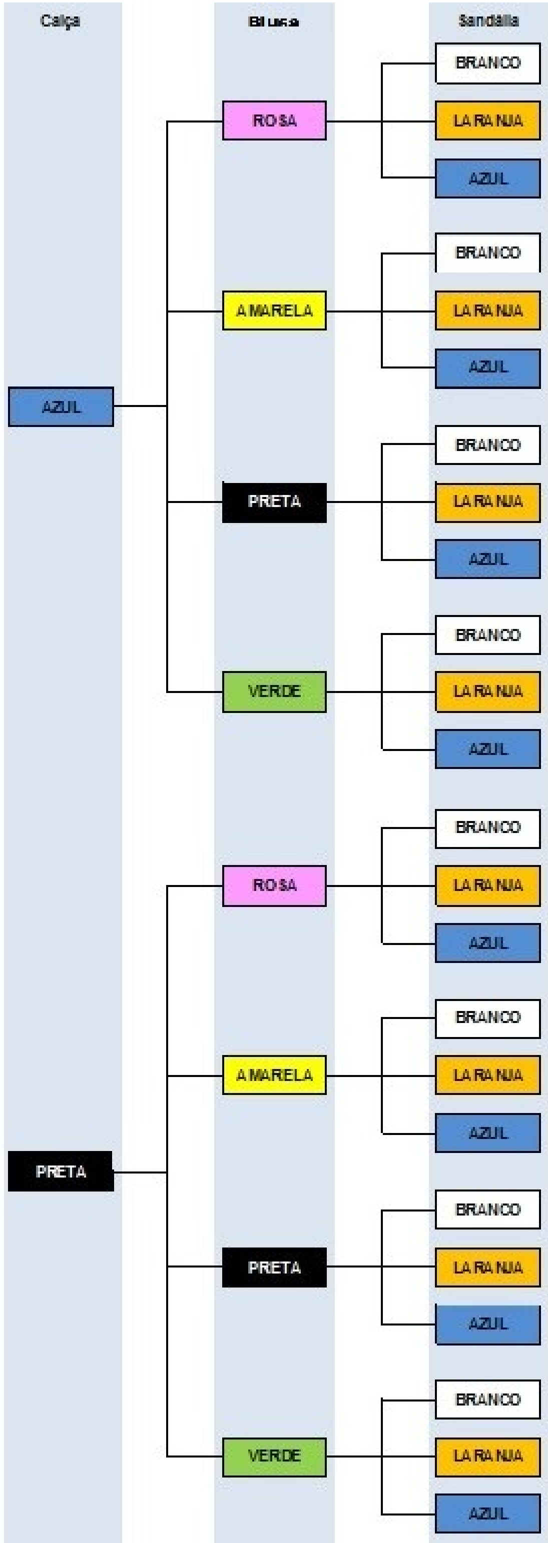


Figura 2 – Árvore de Contagem dos Conjuntos de Roupas com Sapatos.

Exemplo 1.1. Para fazer uma viagem de Portugal à França e, depois, retornar para Portugal, é possível usar como meio de transporte: o trem, o carro ou o avião. De quantas formas é possível escolher os transportes?

Usar uma tabela de dupla entrada pode ser uma estratégia eficaz para a resolução do problema, com a qual os alunos conseguem visualizar melhor os resultados possíveis.

VOLTA / IDA	TREM	CARRO	AVIÃO
TREM	TREM - TREM	TREM - CARRO	TREM - AVIÃO
CARRO	CARRO - TREM	CARRO - CARRO	CARRO - AVIÃO
AVIÃO	AVIÃO - TREM	AVIÃO - CARRO	AVIÃO - AVIÃO

Tabela 1 – Transporte.

Aplicando o Princípio Multiplicativo e considerando que a escolha do transporte de ida pode ser feita de 3 modos diferentes e, após isso, a escolha do transporte de volta também pode ser feita de 3 modos.

Assim, pelo Princípio Multiplicativo, a resposta é:

$$\underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 3\ } = 9 \, \text{maneiras.}$$

Conforme demonstrado na tabela acima.

E se o viajante não desejasse usar na volta o mesmo meio de transporte usado na ida?

Ainda usando uma tabela de dupla entrada:

VOLTA / IDA	TREM	CARRO	AVIÃO
TREM	-	TREM - CARRO	TREM - AVIÃO
CARRO	CARRO - TREM	-	CARRO - AVIÃO
AVIÃO	AVIÃO - TREM	AVIÃO - CARRO	-

Tabela 2 – Transporte.

Aplicando o Princípio Multiplicativo e considerando que a escolha do transporte de ida pode ser feita de 3 modos diferentes e, após isso, a escolha do transporte de volta, respeitando a restrição proposta no enunciado do problema, pode ser feita de 2 modos.

Assim, pelo Princípio Multiplicativo, a resposta é:

$$\underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ } = 6 \,\text{maneiras}.$$

Conforme demonstrado na tabela acima.

Exemplo 1.2. Em uma sala de aula existem 10 alunos, a professora fará uma gincana de conhecimentos e premiará os 3 primeiros lugares. De quantas maneiras pode ocorrer a premiação desta gincana?

É preciso calcular todas as maneiras de três alunos ganharem esta gincana. Analisando graficamente as possibilidades e considerando A_i: i-ésima pessoa, teremos:

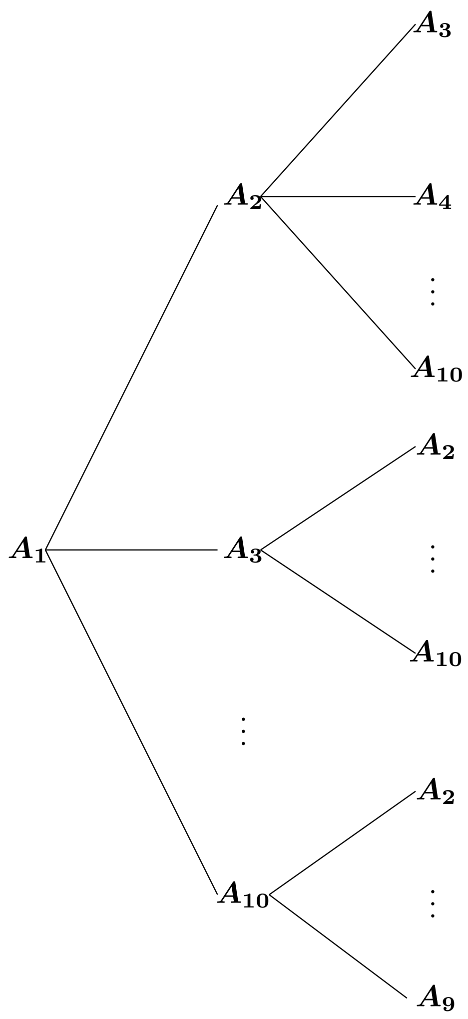


Figura 3 – Anagrama de Alunos.

É importante entender que as sequências A_1, A_2, A_3 e A_2, A_3, A_1, por exemplo, são distintas, já que a mudança de posição altera o resultado da gincana, pois no primeiro exemplo A_1 foi o vencedor, enquanto no segundo exemplo, A_2 foi o vencedor. Gerando, assim, duas situações diferentes envolvendo os mesmos alunos. Outra maneira mais simples e rápida é usar diretamente o Princípio Multiplicativo, nesta situação são 10 possibilidades para escolher o aluno 1º colocado, escolhido este, são 9 possibilidades para escolher o aluno 2º colocado e 8 possibilidades para 3º colocado, então:

$$\underline{10} \cdot \underline{9} \cdot \underline{8} = 720 \, \text{maneiras.}$$

Generalizando, para n alunos e p primeiros colocados ($n \geqslant p$) teremos:
1ª etapa: escolher um dos n alunos para o 1º colocado: n opções;
2ª etapa: escolher um dos $(n-1)$ alunos restantes para o 2º colocado: $(n-1)$ opções;
3ª etapa: escolher um dos $(n-2)$ alunos restantes para o 3º colocado: $(n-2)$ opções;
...
pª etapa: escolher um dos $(n-(p-1))$ competidores restantes para o pº colocado: $(n-(p-1))$ opções.

É possível notar que o $(p-1)$ aparece, pois na p-*ésima* etapa $(p-1)$ competidores já tinham sido utilizados, logo, restam apenas $(n-(p-1))$.

Multiplicando as opções:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot [\cdots] \cdot (n-(p-1)) \, \text{os resultados possíveis.}$$

Exemplo 1.3. (Banco de Questões da OBMEP, p.28, questão 14) Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cincos quadros da figura. Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?

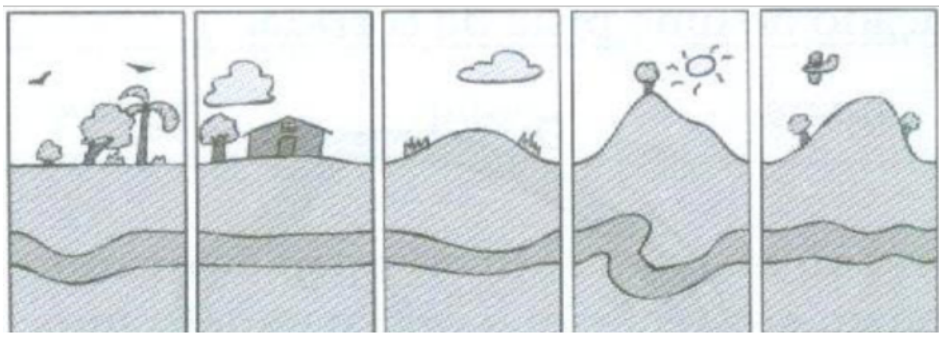


Figura 4 – Montando Paisagens.

Inicialmente é necessário colocar os cinco quadros (distintos) nas cinco posições. Na primeira posição podemos colocar um dos cinco quadros, então, existem cinco possibilidades de escolha, na segunda posição são quatro possibilidades, pois restaram quatro quadros, na terceira são três possibilidades, na quarta duas possibilidade e na quinta posição uma possibilidade. Usando o Princípio Multiplicativo:

$$\underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ } \cdot \underline{\ 1\ } = 120 \,\text{paisagens diferentes, ou seja, 120 dias.}$$

Exemplo 1.4. (OBMEP-2011) Com os algarismos 1, 4, 6 e 8 pode se formar vários números de três algarismos distintos. Qual é a soma de todos esses números?

Primeiro são calculados todos os números possíveis:

$$\underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ } = 24 \,\text{números.}$$

Então, quando todos os 24 números forem somados, cada algarismo vai aparecer 6 vezes em cada casa (unidade, dezena e centena), totalizando 18 vezes. É possível observar isso se, por exemplo, o algarismo um for fixado na casa da centena, são três possibilidades de número para colocar na dezena (4, 6 ou 8) e duas possibilidades de número para colocar na unidade, desconsiderando o numéro que foi usado na dezena, assim:

$$\underline{\ \text{UM}\ } \cdot \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ } \text{ ou } \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ \text{UM}\ } \cdot \underline{\ 2\ } \text{ ou } \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ } \cdot \underline{\ \text{UM}\ }$$

Então:

$$6 + 6 + 6 = 18 \text{ vezes aparece um dos algarismos.}$$

Fazendo o mesmo para cada número:

$$18 \cdot 1 + 18 \cdot 4 + 18 \cdot 6 + 18 \cdot 8 = 342 \text{ é a soma de todos os números.}$$

Exemplo 1.5. Uma franquia de cosméticos deseja montar kits para vender no dia das mães. Em seus anúncios e propagandas de TV para o público alvo (público em potencial) que são os filhos que querem presentear suas queridas mães, a franquia pretende informar o total de variedades de kits que as lojas possuem. Em cada kit deve conter dois itens diferentes, a loja tem 30 tipos de perfumes, 14 desodorantes e 7 tipos de xampu. Quantos kits diferentes a franquia pode anunciar em suas propagandas?

Temos as seguintes opções:

- kitA: 1 perfume e 1 desodorante.
  $\underline{\ 30\ } \cdot \underline{\ 14\ } = 420 \,\text{maneiras.}$

ou

- kitB: 1 perfume e 1 xampu
  $\underline{\ 30\ } \cdot \underline{\ 7\ } = 210\,\text{maneiras}$.

ou

- kitC: 1 desodorante e 1 xampu.
  $\underline{\ 14\ } \cdot \underline{\ 7\ } = 98\,\text{maneiras}$.

Logo, o total de maneiras de formar um kit é a soma de maneiras de todos os tipos de kits, ou seja, 420 + 210 + 98 = 728 maneiras diferentes.

Atividade 2. Formando senhas com um baralho.
Material necessário: Um baralho para cada grupo composto de 3 a 5 pessoas.

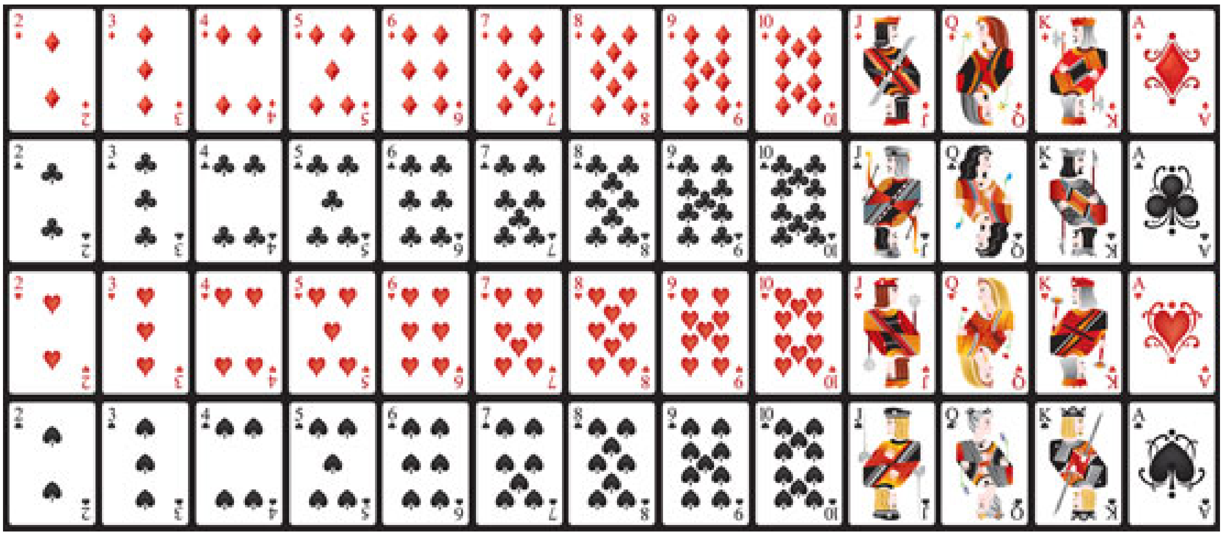


Figura 5 – Baralho Completo.

Situação Problema: De quantas maneiras é possível formar uma senha de 1 dígito com um baralho? E com 2, 3 e 4 dígitos? Levando em consideração que as cores e os naipes são irrelevantes para senha.
Procedimento Proposto: Cada grupo deverá receber um baralho e terá, aproximadamente, quinze minutos para tentar solucionar o problema. Após isso, deve ser realizada uma discussão de quantas senhas serão possíveis formar com 2, 3 e 4 dígitos.
Resolução: Opções de escolha: {A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K}, é importante considerar a informação que existem quatro cartas de cada.

Para formar uma senha com um dígito existem 13 possibilidades distintas.

Com dois dígitos, temos:

$$\underline{\ 13\ } \cdot \underline{\ 13\ } = 13^2 = 169 \text{ senhas distintas.}$$

Utilizando o mesmo raciocínio, é possível concluir que com 3 dígitos existem 13 maneiras para escolher o primeiro dígito, 13 para o segundo e, ainda, 13 para o terceiro e usando o Princípio Multiplicativo:

$$\underline{\ 13\ } \cdot \underline{\ 13\ } \cdot \underline{\ 13\ } = 13^3 = 2197 \text{ senhas distintas.}$$

Com 4 dígitos são 13 maneiras para escolher o primeiro dígito, 13 para o segundo, 13 para o terceiro e 13 para o quarto dígito, com o Princípio Multiplicativo:

$$\underline{\ 13\ } \cdot \underline{\ 13\ } \cdot \underline{\ 13\ } \cdot \underline{\ 13\ } = 13^4 = 28561 \text{ senhas distintas.}$$

Situação Problema 2:

a) Quantas senhas com 4 dígitos é possível formar, utilizando apenas as cartas do baralho que contêm letras (A, J, K e Q), nas quais os dígitos devem ser diferentes entre si?

$$\underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ } \cdot \underline{\ 1\ } = 24 \text{ senhas diferentes.}$$

b) Quantas senhas com 8 dígitos é possível formar, utilizando apenas as cartas do baralho que contêm os números 2, 3, 4, 5 ,6 ,7, 8 e 9, nas quais os dígitos devem ser diferentes entre si?

$$\underline{\ 8\ } \cdot \underline{\ 7\ } \cdot \underline{\ 6\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ } \cdot \underline{\ 1\ } = 8! = 40320 \text{ senhas diferentes.}$$

Observação importante, notação para os alunos:

Durante a resolução do item b) combinar com a turma o uso da notação (abreviação) do ! (fatorial) como se fosse uma abreviação do facebook ou whatsapp, algo mais prático para escrever como "vc"= você ou "bom fds"= bom final de semana, para simplificar.

Depois dessa atividade é possível trabalhar do exemplo 1.6 até o 1.11, pois são semelhantes.

As cartas são utilizadas como material concreto com a finalidade de melhorar o entendimento por parte dos alunos.

Exemplo 1.6. Recentemente, os números de celulares de algumas regiões do Brasil passaram a ter 9 dígitos, pois a Anatel (Agência Nacional de Telecomunicações) observou a necessidade de aumentar a disponibilidade de números na telefonia celular, já que os números à disposição com 8 dígitos estavam acabando.

a) Considere que antigamente os celulares de oito dígitos começavam apenas com 7,8 ou 9. Quantos números de celulares diferentes eram possíveis?

São três maneiras para o primeiro dígito {7;8;9} e, para os outros, são 10 maneiras {0;1;2;3;4;5;6;7;8;9}, então temos:

$\underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 10\ } \cdot \underline{\ 10\ } \cdot \underline{\ 10\ } \cdot \underline{\ 10\ } \cdot \underline{\ 10\ } \cdot \underline{\ 10\ } \cdot \underline{\ 10\ } = 30000000 =$ 30 milhões de linhas de celulares diferentes.

b) Considere agora que todos os celulares têm 9 dígitos e que todos começam com o número 9. Quantos números de celulares são possíveis hoje?

É apenas uma maneira para o primeiro dígito, o número nove, e, para os outros, são dez maneiras {0;1;2;3;4;5;6;7;8;9} então temos:

$\underline{\ 1\ } \cdot \underline{\ 10\ } \cdot \underline{\ 10\ } \cdot \underline{\ 10\ } \cdot \underline{\ 10\ } \cdot \underline{\ 10\ } \cdot \underline{\ 10\ } \cdot \underline{\ 10\ } \cdot \underline{\ 10\ } = 100000000 =$ 100 milhões de linhas de celulares diferentes existem hoje.

c) Com essa nova política da Anatel, quantos números de celulares novos podem existir no máximo? (Lembre-se que todos os números de celulares de 8 dígitos passaram a ter 9 dígitos, com o número 9 na frente).

Item b) menos item a) = 100 milhões - 30 milhões = 70 milhões de novas linhas de celulares diferentes, no máximo.

João foi abrir uma conta em um banco; após entregar todos os documentos necessários, o gerente do banco pediu para que ele escolhesse uma senha, utilizando alguns algarismos, que deveriam ser diferentes entre si por motivo de segurança. Calcule:

a) quantas são as senhas de 4 dígitos, usando 1, 2, 3 e 4?

$$\underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ } \cdot \underline{\ 1\ } = 24 \text{ senhas diferentes.}$$

b) quantas são as senhas de 7 dígitos, usando 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?

$$\underline{\ 7\ } \cdot \underline{\ 6\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ } \cdot \underline{\ 1\ } = 5040 \text{ senhas diferentes.}$$

c) quantas são as senhas de 10 dígitos, usando 0, 1, 2, 3, 4, 5 ,6 ,7, 8 e 9?

$$\underline{\ 10\ } \cdot \underline{\ 9\ } \cdot \underline{\ 8\ } \cdot \underline{\ 7\ } \cdot \underline{\ 6\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ } \cdot \underline{\ 1\ } = 10! = 3628800 \text{ senhas diferentes.}$$

Observação importante, notação para os alunos:

Durante a resolução desse exemplo no item c) combinar com a turma o uso da notação (abreviação) do ! (fatorial) como se fosse uma abreviação do facebook ou whatsapp, algo mais prático para escrever como “vc”= você ou “bom fds”= bom final de semana, para simplificar.

Exemplo 1.7. Tio Zé tem 6 brinquedos diferentes, de quantas maneiras ele pode distribuir os brinquedos entre duas crianças, o Arthur e a Bruna? Considerando que:

a) tio Zé entregará todos os brinquedos, porém existe a possibilidade de uma das crianças não receber brinquedo algum.

   É possível considerar que cada brinquedo pode ser distribuído de 2 maneiras distintas, pois cada brinquedo pode ser distribuído para o Arthur ou para Bruna e, como são 6 objetos, então:

   $\underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} = 2^6 = 64$ é o número de maneiras desses objetos serem distribuídos.

b) entregando todos os brinquedos, de modo que cada criança receba pelo menos 1 brinquedo.

   No caso anterior tínhamos 64 maneiras desses objetos serem distribuídos, incluindo a possibilidade de todos os objetos irem para a mesma criança, o que nos fornece 2 casos a serem excluídos, o caso do Arthur ficar com todos os brinquedos e o caso da Bruna ficar com todos. Logo, temos:

   $$64 - 2 = 62 \text{ maneiras.}$$

c) entregando quantos brinquedos ele quiser ou não entregando nenhum, podendo alguma ou ambas as crianças ficarem sem brinquedo.

   É possível considerar que cada brinquedo pode ser distribuído de 3 maneiras diferentes, pois cada brinquedo pode ser distribuído para o Arthur, para a Bruna ou ficar ainda com o Tio Zé e, como são 6 objetos, então:

   $\underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} = 3^6 = 729$ é o número de maneiras desses objetos serem distribuídos.

d) entregando quantos brinquedos ele quiser, de modo que cada criança receba pelo menos um brinquedo.

   No caso do item anterior, tínhamos: $\underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} = 3^6 = 729$ é o número de maneiras desses objetos serem distribuídos, incluindo a possibilidade de alguma criança ficar sem brinquedo, os casos dos brinquedos ficarem apenas com o Arthur e o Tio Zé são: $\underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} = 2^6 = 64$ e os casos dos brinquedos ficarem apenas com a Bruna e o Tio Zé são: $\underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} = 2^6 = 64$, observe que contamos 2 vezes a possibilidade do Tio Zé ficar com todos brinquedos. Logo, temos: $64 + 64 - 1 = 127$ casos a serem excluídos. Assim, temos:

   $$729 - 127 = 602 \text{ maneiras.}$$

Exemplo 1.8. De quantas maneiras 12 moças e 12 rapazes podem formar casais (um homem e uma mulher) para uma dança?

Enumerando as moças de 1 a 12, a primeira moça tem 12 possibilidades para escolher o seu par. A segunda moça tem 11 possibilidades, a terceira moça 10 possibilidades, e, assim, sucessivamente, de modo que a última moça tem apenas uma possibilidade de escolha. Então, pelo Princípio Multiplicativo, podemos concluir que há:

$$\underline{\ 12\ } \cdot \underline{\ 11\ } \cdot \underline{\ 10\ } \cdot \ldots \cdot \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ } \cdot \underline{\ 1\ } = 12! = 479001600 \,\text{maneiras.}$$

Exemplo 1.9. De quantas maneiras n moças e n rapazes podem formar casais (um homem e uma mulher) para uma dança?

Enumerando as moças de 1 a n, a primeira moça tem n possibilidades para escolher o seu par. A segunda moça tem $n-1$ possibilidades, a terceira moça $n-2$ possibilidades, e, assim, sucessivamente, de modo que a última moça tem apenas uma possibilidade de escolha. Então, pelo Princípio Multiplicativo, podemos concluir que há:

$$\underline{\ n\ } \cdot \underline{\ n-1\ } \cdot \underline{\ n-2\ } \cdot \ldots \cdot \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ } \cdot \underline{\ 1\ } = n! \,\text{maneiras.}$$

Exemplo 1.10. De quantas maneiras 12 moças e 12 rapazes podem formar pares (independente do sexo) para uma dança?

Escolhendo aleatoriamente uma pessoa, ela tem 23 possibilidades para escolher o seu par. E, após isso, outra pessoa tem 21 possibilidades de escolher um par, e, ainda outra, tem 19 possibilidades, e, assim, sucessivamente, de modo que a penúltima pessoa tem apenas uma possibilidade de escolha. Então, pelo Princípio Multiplicativo, podemos concluir que há:

$$\underline{\ 23\ } \cdot \underline{\ 21\ } \cdot \underline{\ 19\ } \cdot \ldots \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 1\ } = 316234143225 \,\text{maneiras.}$$

Exemplo 1.11. De quantas maneiras n moças e n rapazes podem formar pares (independente do sexo) para uma dança?

A primeira pessoa tem $2n-1$ possibilidades para escolher seu o par. A segunda pessoa a escolher tem $2n-3$ possibilidades, a terceira pessoa a escolher tem $2n-5$ possibilidades, e, assim, sucessivamente, de modo que a penúltima pessoa a escolher tem apenas uma possibilidade de escolha. Então, pelo Princípio Multiplicativo, podemos concluir que há:

$$(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 =$$

$$(2n-1)\cdot\frac{(2n-2)}{2\cdot(n-1)}\cdot(2n-3)\cdot\frac{(2n-4)}{2\cdot(n-2)}\cdot(2n-5)\cdot\frac{(2n-6)}{2\cdot(n-3)}\cdot\ldots\cdot5\cdot\frac{4}{2\cdot2}\cdot3\cdot\frac{2}{2\cdot1}\cdot1=$$

$$\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}\text{ maneiras.}$$

Observação: Após os exemplos, é possível concluir que pelo Princípio Multiplicativo (que também é chamado de Princípio Fundamental da Contagem): *"Em um experimento que ocorre em várias etapas, o número de possibilidades diferentes que o experimento pode se desenvolver é a multiplicação das quantidades de possibilidades de escolha para cada uma das etapas".*

1. Definições Formais a partir do Princípio Multiplicativo

As definições de permutações simples, arranjos simples e arranjos com repetições podem, indiretamente, induzir o aluno a não refletir sobre cada situação problema, desejando apenas aplicar uma das fórmulas aprendidas, se confundindo com qual fórmula deve aplicar para cada situação problema diferente, apresentando grande dificuldade de associar a fórmula a um contexto e quem são os p's e n's do problema. As três definições abaixo, trazem grande confusão para os alunos durante o aprendizado.

1.1- Definição Formal de Permutações Simples.

Uma permutação de n objetos distintos é qualquer ordenação desses objetos, de modo que, se denominarmos P_n o número das permutações simples dos n objetos, então:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

Definição $P_0 = 0! = 1$

1.2- Definição Formal de Arranjos Simples.

Arranjo simple de n elementos tomados p a p, onde $n \geqslant 1$ e p é um número natural tal que $p \leqslant n$, é a quantidade de grupos de p elementos distintos escolhidos dentre os n possíveis, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos p elementos que compõem cada grupo. Notação:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Vamos deduzir uma expressão matemática que use o princípio multiplicativo e caracterizar o arranjo simples. Tomando n elementos dos quais queremos tomar p escolhas (p lugares). Este é um problema equivalente a termos n objetos com os quais queremos preencher p lugares:

$$\underset{1^{\underline{o}}\text{ lugar}}{\underline{\qquad\qquad}} \cdot \underset{2^{\underline{o}}\text{ lugar}}{\underline{\qquad\qquad}} \cdot \underset{3^{\underline{o}}\text{ lugar}}{\underline{\qquad\qquad}} \cdot \ldots \cdot \underset{p\text{-ésimo lugar}}{\underline{\qquad\qquad\qquad}}$$

O primeiro lugar pode ser preenchido de n maneiras diferentes. Tendo preenchido o $1^{\underline{o}}$ lugar, restam $(n-1)$ objetos e, portanto, o segundo lugar pode ser preenchido de $(n-1)$ maneiras diferentes. Após o preenchimento do $2^{\underline{o}}$ lugar, há $(n-2)$ maneiras diferentes de se preencher o $3^{\underline{o}}$ lugar e, assim, sucessivamente, vamos preenchendo as posições de forma que p-ésimo lugar terá $(n-(p-1))$ maneiras diferentes de ser preenchido. Pelo Princípio Multiplicativo podemos dizer que as p posições podem ser preenchidas sucessivamente de $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(p-1))$ maneiras diferentes; portanto:

$$A_n^p = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-(p-1))$$

Sabemos que uma igualdade não se altera se a multiplicarmos e dividirmos por um mesmo valor, então:

$$[n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(p-1))]\cdot\frac{[(n-p)\cdot(n-p-1)\cdot(n-p-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1]}{[(n-p)\cdot(n-p-1)\cdot(n-p-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1]}$$

Que pode ser escrito como:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

1.3- Definição Formal de Arranjos com Repetição.

Vimos acima que o número de arranjos simples de n elementos no total, tomados p elementos como quantidade de escolha, conta todos os possíveis modos de se retirar de um conjunto de n elementos distintos, p elementos, levando-se em conta a ordem dos elementos.

Caso repetições sejam permitidas, o princípio multiplicativo nos diz que o número total de maneiras de se retirar, levando-se em conta a ordem, p dos n objetos distintos é igual a:

$$[n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n\cdot n\cdot n] = n^p$$

uma vez que o primeiro elemento pode ser retirado de n maneiras, o segundo também de n maneiras e, assim, sucessivamente, até que a $p^{\text{ésima}}$ escolha seja feita. Notação matemática usual:

$$AR_n^p = n^p$$

Conclusão do Capítulo

É importante que durante a aplicação dos exercícios propostos, o professor adote uma postura construtivista, que, segundo Fernando Becker (1994), não se trata de um método, mas de uma teoria que entende o conhecimento como uma construção realizada pelo sujeito, que repudia a escola transmissora de conteúdos prontos e incontestáveis através de repetição.

Eva Maria Siqueira observou criticamente, nos cursos que ministrava para professores das redes municipais, estaduais e federais de ensino e também posicionou-se de maneira contrária a prática pedagógica tradicional, centralizada na figura do professor e com alunos passivos.

> Em grande parte das escolas e da sociedade, de modo geral, costuma-se não enaltecer nem sequer propiciar atitudes investigadoras, mas, sim, desencadear atitudes de apatia e infertilidade em relação ao poder criativo de cada um. Isso ocorre quando é bloqueado o potencial de descobertas e redescobertas, ao oferecer respostas prontas às questões levantadas por nossos filhos ou alunos, ou ainda ao desenvolver um ensino árido com exercícios sem prazer nem ludicidade. (2001, p.104).

E quando o aluno é convidado a construir o conhecimento, não significa, segundo Kamii (2010), que o professor cruzará os braços e esperará passivamente por essa construção. O aluno cria novas formas de resolver problemas a partir do conhecimento que já internalizou, então é relevante que o professor saiba o que o aluno já conhece.

Marta Rabioglio escreve sobre o papel do professor :

> Sistematizar não significa descer de paraquedas com a técnica operatória convencional e impô-la à classe, ainda que compartimentalizada em pequenas doses. Sistematizar quer dizer partir daquilo que os estudantes são capazes de fazer, de suas hipóteses e conhecimentos prévios. Ao professor cabe ajudá-los a repensar e reorganizar esses conhecimentos. (2010, p.92).

Na atividade 1 – Formando Conjunto de Roupas, quando o professor propõe o uso da árvore de contagem, ele está auxiliando os seus alunos a organizarem os seus conhecimentos.

O que se pretende é, como escreveu Marta Rabioglio(2010), que diante de um problema (como a atividade 2 – Formando Senhas com um Baralho) o aluno ou grupo de alunos interprete o que está sendo pedido, organize os dados, relacione as quantidades e se aproxime do resultado. Inicialmente ele ou eles construirão maneiras de resolver e essas maneiras serão posteriormente socializadas. As diferentes formas de resolver o problema serão analisadas e as formas mais eficazes serão escolhidas. "Ao ter que explicar ao colega como pensou para encontrar a resposta e ao ouvir outros pontos de vista, cada um estará ampliando o seu conhecimento acerca do cálculo". (RABIOGLIO, 2010, p.91). Ou, ainda:

"A troca de ideias é importante porque, ao tentar convencer o outro de que seu raciocínio faz sentido, a criança precisa encontrar argumentos e raciocinar com afinco" (KAMII, 2010, p.21). E não seja necessário inculcar no aluno a fórmula de arranjo com repetição.

2 Combinação e Permutação com Repetição

A ordem importa ou não importa? O que deve ser considerado? Como fazer? No capítulo 1 é possível concluir, através de alguns exemplos, que a ordem dos elementos pode ser importante, ou seja, as senhas 1234 e 4321 ou 1212 e 2121 usam os mesmos dígitos, mas são senhas diferentes. Nesse capítulo serão apresentados exercícios nos quais a ordem não tem importância. Assim, em um primeiro momento, não serão oferecidos os conceitos teóricos de combinação e permutação com repetição, porém situações interessantes que motivem e deixem os alunos confiantes para resolvê-las.

Atividade 3. Construindo Anagramas.
Materiais Necessários: Cartolina e caneta ou 4 alfabetos impressos.
Importante: Para a realização da atividade, sugere-se a formação de pequenos grupos, pois, baseado na experiência docente do autor da presente dissertação, a formação de grupos maiores pode atrapalhar na troca de conhecimentos e experiências, uma vez que algum paticipante pode permanecer ocioso na resolução do problema.

a	b	c	d	e	f
g	h	i	j	k	l
m	n	o	p	q	r
s	t	u	v	w	x
y	z	1	2	3	4
5	6	7	8	9	0

Figura 6 – Alfabeto, Números e Letras Móveis.

Os alunos cortarão quadrados de 6cm por 6cm e cada quadrado receberá uma letra do alfabeto. Em seguida, o professor deverá propor a formação do maior número de palavras utilizando, inicialmente, as letras da palavra **UVA** e, depois, as letras da palavra **PAZ**. Após a realização dessa proposição inicial, os alunos deverão contar quantas palavras diferentes foram construídas para cada conjunto de letras e se foi possível observar algum padrão. O professor concluirá, junto aos alunos, que através do Princípio Multiplicativo, exposto no capítulo 1 da dissertação, existem 3 escolhas para a primeira letra, 2 escolhas para a segunda letra e 1 escolha para a última letra, temos:

$$\underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ } \cdot \underline{\ 1\ } = 3! = 6\,\text{maneiras}.$$

É interessante construir a árvore de contagem na lousa para que os alunos possam visualizar melhor o Princípio Multiplicativo.

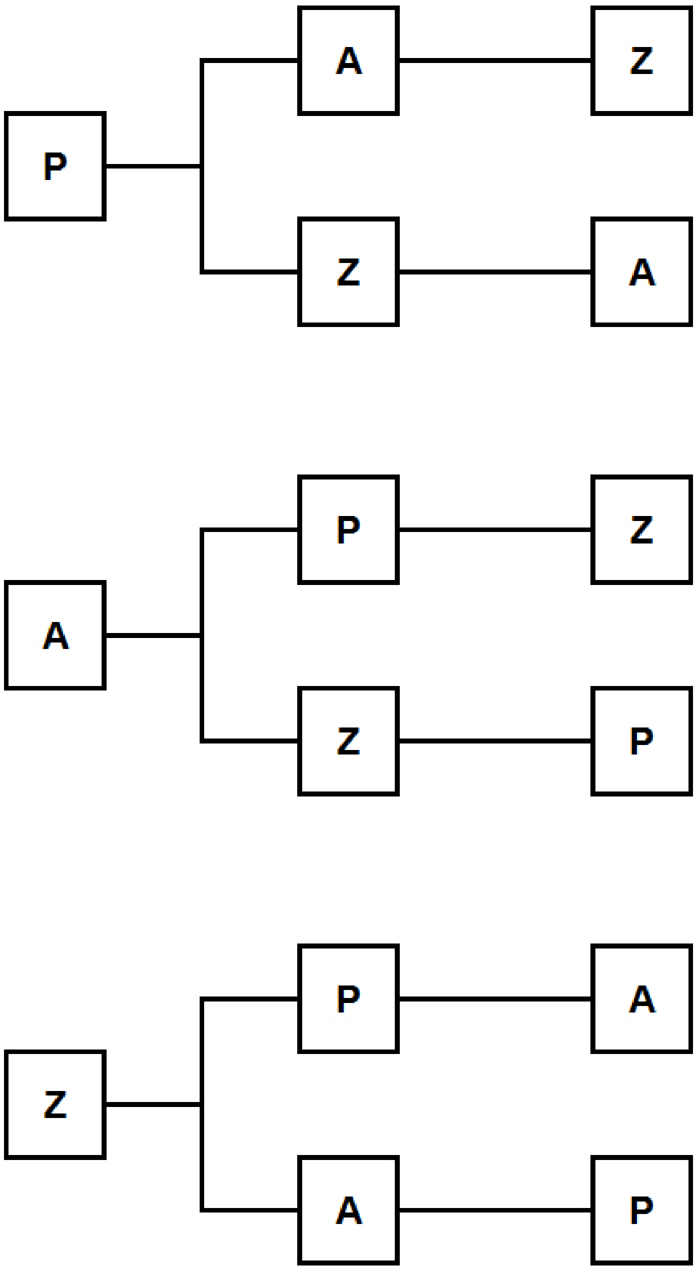


Figura 7 – Árvore de Contagem da palavra PAZ.

Agora a atividade deverá ser realizada utilizando as palavras **ANA** e **OVO**. E será questionado o motivo pelo qual com as letras das palavras **UVA** e **PAZ** foi possível criar mais palavras distintas do que com as letras de **ANA** e **OVO**. Os alunos deverão chegar a conclusão de que isso ocorre, pois nas palavras **ANA** e **OVO** existem letras que se repetem, na primeira palavra a letra A e na segunda a letra O e, quando mudam de lugar, não existe a formação de uma nova palavra.

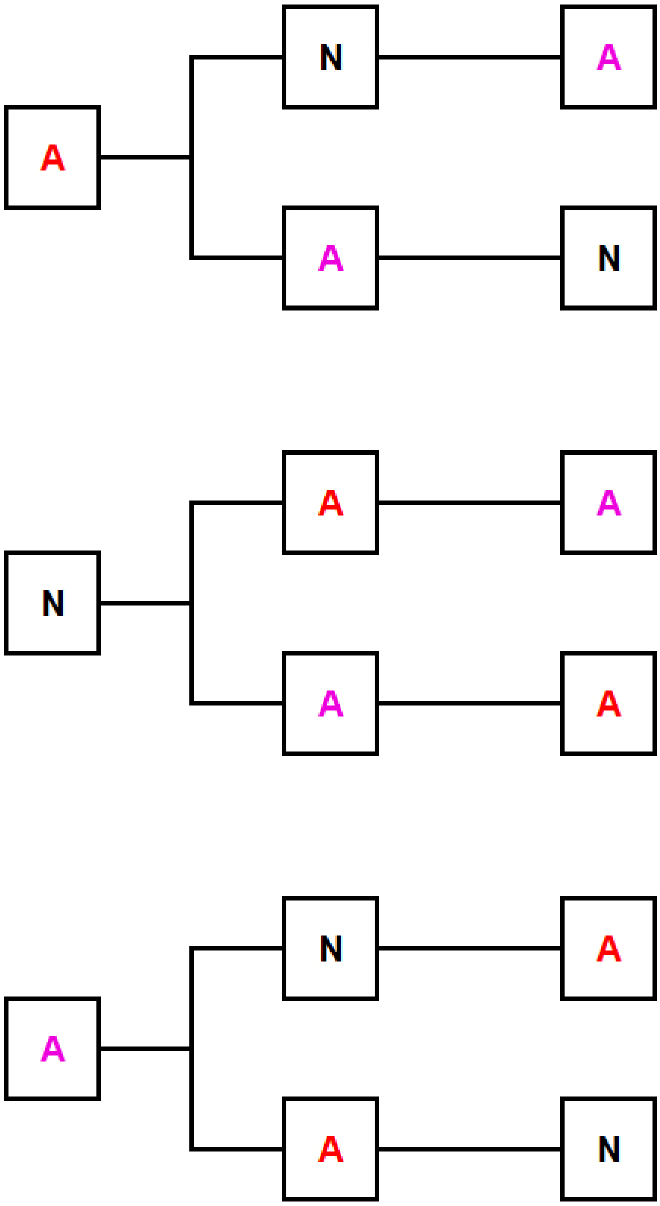


Figura 8 – Árvore de Contagem da palavra ANA.

Na árvore de contagem anterior foram utilizadas cores diferentes para as letras, a fim de facilitar o entendimento do aluno.

ANA=ANA NAA=NAA AAN=AAN

Assim, após contar o máximo de palavras formadas com cada grupo de letras, será necessário dividir o resultado por dois, tendo em vista que o mesmo caso é contado duas vezes.

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 3 \text{ maneiras.}$$

O resultado da conta é o mesmo obtido através do uso do material concreto (letras móveis).

Usando o anagrama **AAA** e **ANNA**, é possível concluir com os alunos que, pelo Princípio Multiplicativo, **AAA** é igual a $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras; porém, como a letra A se repete três vezes, é possível escrever apenas uma palavra. Desse modo, quando existem três letras iguais, tem que dividir por 3!, então:

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} = 1 \text{ maneira.}$$

Com a palavra **ANNA** é possível observar que a quantidade de vezes que a letra se repete na palavra é a mesma quantidade fatorial utilizada na divisão. Como a palavra têm duas letras A's e duas letras N's, então:

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2! \cdot 2!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6 \text{ maneiras.}$$

As letras são utilizadas como material concreto com a finalidade de melhorar o entendimento por parte dos alunos.

Exemplo 2.1. Quantos anagramas podem ser formados com as seguintes palavras?

a) HEITOR
$\underline{\ 6\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ } \cdot \underline{\ 1\ } = 6! = 720\,\text{anagramas.}$

b) GARCIA
$\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2!} = \dfrac{6!}{2!} = 360\,\text{anagramas.}$

c) AMARAL
$\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} = \dfrac{6!}{3!} = 120\,\text{anagramas.}$

d) PARALELEPÍPEDO
$\dfrac{14!}{3! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 2!} = 605404800\,\text{anagramas.}$

Nesse caso são 2 A's, 3 E's, 2 L's e 3 P's repetidos, por isso, divide-se por $2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 3!$. Logo, são mais de 600 milhões de anagramas possíveis utilizando as letras da palavra PARALELEPÍPEDO.

Observação: Na atividade 3 e no exemplo 2.1 é possível verificar que é preciso dividir os resultados pela quantidade de repetições de cada letra fatorial, pois os casos repetidos foram contados várias vezes. Do exemplo 2.2 até o 2.4 o mesmo raciocínio é usado para resolver outras situações problema.

Exemplo 2.2. No placar Brasil 4x3 Argentina, de quantas maneiras distintas os gols das equipes podem ocorrer?

Considere B = gol do Brasil e A = gol da Argentina. Considerando o anagrama BBBBAAA, onde a primeira letra é o primeiro gol, a segunda letra é o segundo gol, a terceira letra é o terceiro gol, ... , a última letra é o último gol, através do Princípio Multiplicativo e, levando em conta as repetições, temos:

$$\frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35 \, \text{maneiras.}$$

Exemplo 2.3. Em uma urna contém p bolas pretas e b bolas brancas, as bolas são retiradas uma por uma até a urna ficar vazia. Em quantas ordens distintas isto pode ocorrer?

Imagine as bolas alinhadas, conforme vão sendo retiradas da urna existe um total de $p + b$ bolas, se as bolas pretas forem trocadas de lugar entre si, ou ainda, as bolas brancas, a sequência permanecerá a mesma, logo:

$$\frac{(p+b)!}{p! \cdot \ b!}$$

Exemplo 2.4. A figura abaixo representa o mapa de uma cidade, na qual há 7 avenidas na direção norte-sul e 6 avenidas na direção leste-oeste.

a) Quantos caminhos são possíveis percorrer do ponto A até o ponto B?

b) Quantos caminhos são possíveis percorrer do ponto A até o ponto B, passando pelo ponto C?

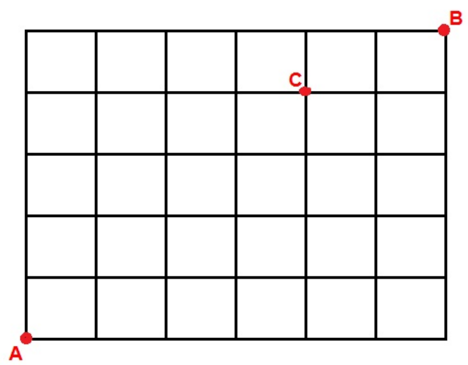


Figura 9 – Caminhos Um.

a) Para que o caminho de A até B seja o menor possível é preciso ir sempre para leste (L) ou para norte (N), dessa forma, sempre serão percorridos 6 quarteirões para leste e 5 para norte (LLLLLLNNNNN) o que pode mudar é apenas a direção do trajeto, que é determinada pela ordem das letras na palavra. Neste caso temos uma

Permutação com elementos repetidos, 6 letras L's + 5 letras N's = 11 letras no total (elementos), com 6 repetições da letra L e 5 repetições da letra N, temos:

$$\frac{11!}{6! \cdot \ 5!} = 462 \text{ trajetos.}$$

b) Basta multiplicar as possibilidades de ir de A para C (LLLLNNNN) pelas de C para B (LLN), então:

$$\frac{8!}{4! \cdot \ 4!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot \ 1!} = 210 \text{ trajetos.}$$

Exemplo 2.5. Considerando as seguintes pessoas Ana (A), Bruno (B), Caio (C) e Daniel (D):

a) quantas duplas podem ser formadas?

b) quantos trios podem ser formados?

a) Listando os casos, temos:

AB	BC	CD
AC	BD	
AD		

No total são 6 duplas possíveis, mas se o Princípio Multiplicativo fosse aplicado, seriam $4 \cdot 3 = 12$ duplas, $4 \cdot 3$ porque são 4 pessoas para primeira escolha e 3 pessoas para segunda escolha, porém o resultado está errado, pois o Princípio considera todos os casos abaixo como sendo diferentes:

AB	BA	CA	DA
AC	BC	CB	DB
AD	BD	CD	DC

E existem duplas que se repetem:

AB=BA	BC=CB	CD=DC
AC=CA	BD=DB	
AD=DA		

Logo, todas as duplas são consideradas 2 vezes, se o resultado for dividido por 2, a resposta correta será alcançada:

$$\frac{4 \cdot 3}{2!} = 6$$

b) Usando o mesmo racicínio do item anterior, listando os casos:

ABC ACD ABD BCD

Apenas 4 trios.

Se o Princípio Multiplicativo fosse utilizado, teríamos:

$\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} = 24$ maneiras, resposta incorreta, pois os casos abaixo foram considerados diferentes e

são iguais:

ABC ACB BAC BCA CAB CBA

Assim como os casos:

ABD ADB BAD BDA DAB DBA

ou:

ACD ADC DAC DCA CAD CDA

ou ainda:

BCD BDC DBC DCB CBD CDB

Logo, o mesmo trio é considerado $6 = 3!$ vezes, então, ocorrerá a divisão por $6 = 3!$, pois não importa a ordem.

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4 \text{ maneiras.}$$

Observação: No exemplo 2.5 item a) o Princípio Multiplicativo é usado e foi preciso dividir por $2 = 2!$, já no item b) foi necessário dividir por $6 = 3!$, pois quando a ordem não for importante é preciso dividir pela quantidade de anagramas dos objetos escolhidos, já que são as vezes que se conta a mais a mesma dupla ou trio. Do exemplo 2.6 até o 2.13 é o mesmo raciocínio com alguns detalhes e casos particulares de restrição.

Exemplo 2.6. Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida em um grupo de 8 homens e 4 mulheres.

a) Quantas comissões podem ser formadas?

b) Qual seria a resposta caso um dos homens não aceitasse participar da comissão se nela estivesse a sua esposa?

a) Como a ordem não interfere na formação das comissões:

$$\frac{\overbrace{8 \cdot 7 \cdot 6}^{\text{Homens}}}{3!} \cdot \frac{\overbrace{4 \cdot 3 \cdot 2}^{\text{Mulheres}}}{3!} = 224 \text{ comissões.}$$

b) Do total do item anterior são subtraídas as possibilidades do marido e sua esposa participarem juntos, calculando o número de comissões dessa forma:

$$\frac{1 \cdot 7 \cdot 6}{2!} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{2!} = 63 \text{ comissões.}$$

Efetuando a subtração:

$$224 - 63 = 161 \text{ comissões.}$$

Exemplo 2.7. No início de uma festa há 6 homens desacompanhados e 10 mulheres desacompanhadas.

a) Quais são todas as possibilidades de casais (de um homem e uma mulher), que podem estar formados ao fim da festa?

b) Quais são todas as possibilidades de casais (independente do sexo), que podem estar formados ao fim da festa?

a)

- Existe uma possibilidade de não ser formado casal.

- Para a formação de 1 casal, são 6 possibilidades de escolha para o homem e 10 possibilidades de escolha para a mulher, assim:

$$6 \cdot 10 = 60 \text{ possibilidades.}$$

- Para a formação de 2 casais, são 6 possibilidades para a escolha do homem do primeiro casal, 10 possibilidades para a escolha da mulher do primeiro casal, 5 possibilidades para a escolha do homem do segundo casal e 9 possibilidades para a escolha da mulher do segundo casal. Entretanto, é possível notar que a ordem entre os casais é irrelevante, ou seja, os casais formados $\{h_1; m_1\}$ e $\{h_2; m_2\}$ são os mesmos casais do que $\{h_2; m_2\}$ e $\{h_1; m_1\}$. Logo:

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 9}{2!} = 1350 \text{ possibilidades nesse caso.}$$

- Para a formação de 3 casais, são 6 possibilidades para o homem do primeiro casal e 10 para a mulher do primeiro casal; 5 para o homem do segundo casal e 9 para a mulher do segundo casal; 4 para o homem do terceiro casal e 8 para a mulher do terceiro casal. Desprezando a ordem entre os 3 casais formados, teremos:

$$\frac{6 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 8}{3!} = 14440 \text{ possibilidades nesse caso.}$$

- Para a formação de 4 casais, são 6 possibilidades para o homem do primeiro casal e 10 para a mulher do primeiro casal; 5 para o homem do segundo casal e 9 para a mulher do segundo casal; 4 para o homem do terceiro casal e 8 para a mulher do terceiro casal; 3 para o homem do quarto casal e 7 para a mulher do quarto casal. Desprezando a ordem entre os 4 casais formados, teremos:

$$\frac{6 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 7}{4!} = 75600 \text{ possibilidades nesse caso.}$$

- Para a formação de 5 casais, são 6 possibilidades para o homem do primeiro casal e 10 para a mulher do primeiro casal; 5 para o homem do segundo casal e 9 para a mulher do segundo casal; 4 para o homem do terceiro casal e 8 para a mulher do terceiro casal; 3 para o homem do quarto casal e 7 para a mulher do quarto casal; 2 para o homem do quinto casal e 6 para a mulher do quinto casal. Desprezando a ordem entre os 5 casais formados, teremos:

$$\frac{6 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 6}{5!} = 181440 \text{ possibilidades nesse caso.}$$

- Para a formação de 6 casais, são 6 possibilidades para o homem do primeiro casal e 10 para a mulher do primeiro casal; 5 para o homem do segundo casal e 9 para a mulher do segundo casal; 4 para o homem do terceiro casal e 8 para a mulher do terceiro casal; 3 para o homem do quarto casal e 7 para a mulher do quarto casal; 2 para o homem do quinto casal e 6 para a mulher do quinto casal; 1 para o homem do sexto casal e 5 para a mulher do sexto casal. Desprezando a ordem entre os 6 casais formados, teremos:

$$\frac{6 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 5}{6!} = 151200 \text{ possibilidades nesse caso.}$$

Portanto, existem: $1+60+1350+14400+75600+181440+151200 = 424051$ estados possíveis ao final da festa.

b)

- Existe uma possibilidade de não ser formado casal.
- Para a formação de 1 casal são:

$$\frac{16 \cdot 15}{2!} = 120 \text{ possibilidades.}$$

- Para a formação de 2 casais são:

$$\frac{\frac{16\cdot 15}{2!} \cdot \frac{14\cdot 13}{2!}}{2!} = 5460 \text{ possibilidades.}$$

- Para a formação de 3 casais são:

$$\frac{\frac{16\cdot 15}{2!} \cdot \frac{14\cdot 13}{2!} \cdot \frac{12\cdot 11}{2!}}{3!} = 120120 \text{ possibilidades.}$$

- Para a formação de 4 casais são:

$$\frac{\frac{16\cdot 15}{2!} \cdot \frac{14\cdot 13}{2!} \cdot \frac{12\cdot 11}{2!} \cdot \frac{10\cdot 9}{2!}}{4!} = 1351350 \text{ possibilidades.}$$

- Para a formação de 5 casais são:

$$\frac{\frac{16\cdot 15}{2!} \cdot \frac{14\cdot 13}{2!} \cdot \frac{12\cdot 11}{2!} \cdot \frac{10\cdot 9}{2!} \cdot \frac{8\cdot 7}{2!}}{5!} = 7567560 \text{ possibilidades.}$$

- Para a formação de 6 casais são:

$$\frac{\frac{16\cdot 15}{2!} \cdot \frac{14\cdot 13}{2!} \cdot \frac{12\cdot 11}{2!} \cdot \frac{10\cdot 9}{2!} \cdot \frac{8\cdot 7}{2!} \cdot \frac{6\cdot 5}{2!}}{6!} = 18918900 \text{ possibilidades.}$$

- Para a formação de 7 casais são:

$$\frac{\frac{16\cdot 15}{2!} \cdot \frac{14\cdot 13}{2!} \cdot \frac{12\cdot 11}{2!} \cdot \frac{10\cdot 9}{2!} \cdot \frac{8\cdot 7}{2!} \cdot \frac{6\cdot 5}{2!} \cdot \frac{4\cdot 3}{2!}}{7!} = 16216200 \text{ possibilidades.}$$

- Para a formação de 8 casais são:

$$\frac{\frac{16\cdot 15}{2!} \cdot \frac{14\cdot 13}{2!} \cdot \frac{12\cdot 11}{2!} \cdot \frac{10\cdot 9}{2!} \cdot \frac{8\cdot 7}{2!} \cdot \frac{6\cdot 5}{2!} \cdot \frac{4\cdot 3}{2!} \cdot \frac{2\cdot 1}{2!}}{8!} = 2027025 \text{ possibilidades.}$$

Portanto, existem $1 + 120 + 5460 + 120120 + 1351350 + 7567560 + 18918900 + 16216200 + 2027025 = 46206736$ estados possíveis ao final da festa.

Exemplo 2.8. Considere um baralho com 9 números e 4 letras, tendo 4 cartas de cada número e letra, apenas com símbolos diferentes (naipes).

a) Quantas maneiras diferentes uma mão com cinco cartas de baralho pode ser formada?

$$\frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} = 2598960 \text{ maneiras.}$$

b) Quantas maneiras diferentes uma dupla e uma trinca ("full house" no poker) podem ser formadas com cinco cartas de baralho?

$$\frac{\overbrace{52 \cdot 3}^{\text{Dupla}}}{2!} \cdot \frac{\overbrace{48 \cdot 3 \cdot 2}^{\text{Trinca}}}{3!} = 3744 \text{ maneiras.}$$

c) Quantas maneiras diferentes uma mão com sete cartas de baralho pode ser formada?

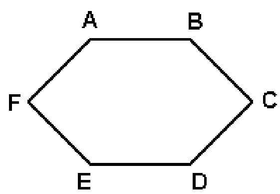
$$\frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{7!} = 133784560 \text{ maneiras.}$$

d) Quantas maneiras diferentes uma dupla e uma trinca ("full house" no poker) podem ser formadas com sete cartas de baralho?

$$\frac{\overbrace{52 \cdot 3}^{\text{Dupla}}}{2!} \cdot \frac{\overbrace{48 \cdot 3 \cdot 2}^{\text{Trinca}}}{3!} \cdot \frac{\overbrace{47 \cdot 46}^{\text{Quaisquer cartas}}}{2!} = 4047264 \text{ maneiras.}$$

Observação: Neste caso podem ocorrer duas trincas; ou uma quadra; ou duas duplas e uma trinca; ou uma quadra e uma trinca; ou uma quadra e uma dupla; pois as duas últimas cartas podem ser quaisquer cartas, incluindo as cartas da dupla e do trio.

Exemplo 2.9. Quantas diagonais possui um polígono de 6 lados?



Consideremos o polígono de 6 lados acima, é preciso escolher dois vértices que não estejam um ao lado do outro.

Para a primeira escolha, são 6 opções e, para segunda, são 3. Como a ordem não importa, pois o segmento AE = EA, ocorre a divisão por 2!. Assim, temos:

$$\frac{6 \cdot 3}{2!} = 9 \text{ diagonais.}$$

Exemplo 2.10. Quantas diagonais possui um polígono regular de n lados?

O mesmo raciocínio usado no item anterior, n vértices para a primeira escolha, vezes $(n-3)$ vértices para a segunda escolha, dividido por dois, temos:

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2!} \text{ diagonais.}$$

Exemplo 2.11. Quantos triângulos diferentes podem ser construídos utilizando 6 pontos no espaço, dentre os quais não há 3 pontos colineares?

Como não há 3 pontos alinhados, basta escolher 3 pontos dentre os 6 para construir um triângulo, como a ordem de escolha não importa, ocorrerá a divisão por 3!.

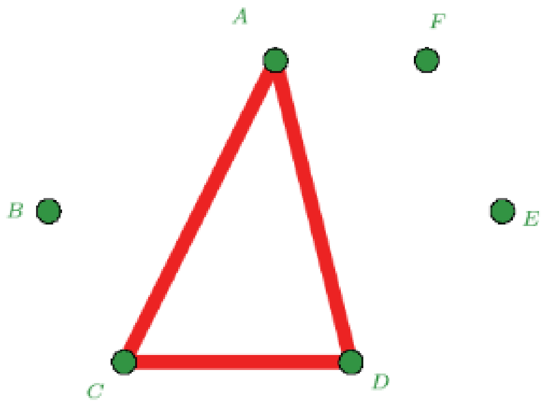


Figura 10 – Triângulo nos Pontos.

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20 \text{ diferentes.}$$

Exemplo 2.12. Existem 5 pontos sobre uma reta r e 8 sobre uma reta s que está paralela a r. Quantos quadriláteros com vértices em 4 desses 13 pontos existem?

Para formar um quadrilátero, basta escolher dois pontos em r e dois pontos em s. Lembrando que a ordem de escolha dos dois pontos em cada reta não importa. Então, temos:

$$\frac{\overbrace{5 \cdot 4}^{\text{Na reta } r}}{2!} \cdot \frac{\overbrace{8 \cdot 7}^{\text{Na reta } s}}{2!} = 280 \text{ quadriláteros.}$$

Exemplo 2.13. Quantas diagonais possui o icosaedro regular (poliedro regular com 20 faces triangulares) e o dodecaedro regular (poliedro regular com 12 faces pentagonais)?

O professor pode propor o uso de um molde de icosaedro para montar, a fim de facilitar a visualização dos vértices pelo aluno, como a figura abaixo:

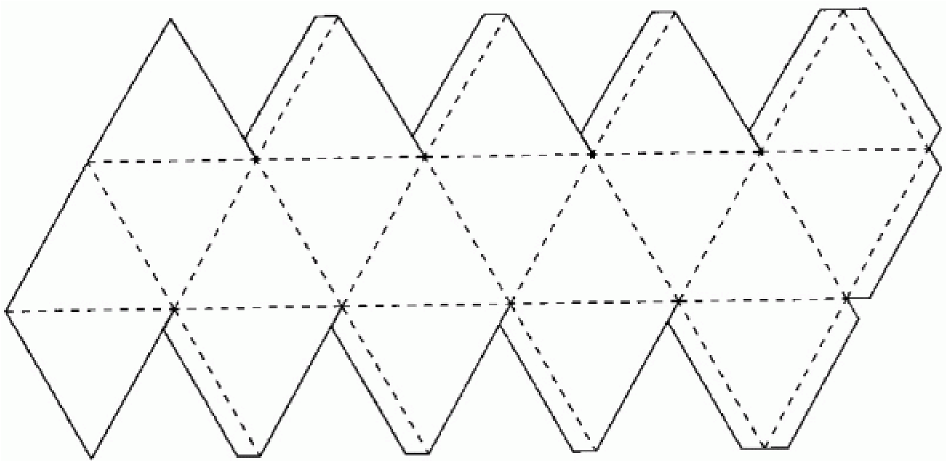


Figura 11 – Molde icosaedro.

Usando uma ideia similar a dos itens anteriores, a diagonal de um poliedro consiste em um segmento formado por dois vértices do poliedro que não estejam em uma mesma face. O icosaedro é uma figura formada por 20 faces triangulares e de cada vértice partem 5 arestas. São, no total, 30 arestas e 12 vértices.

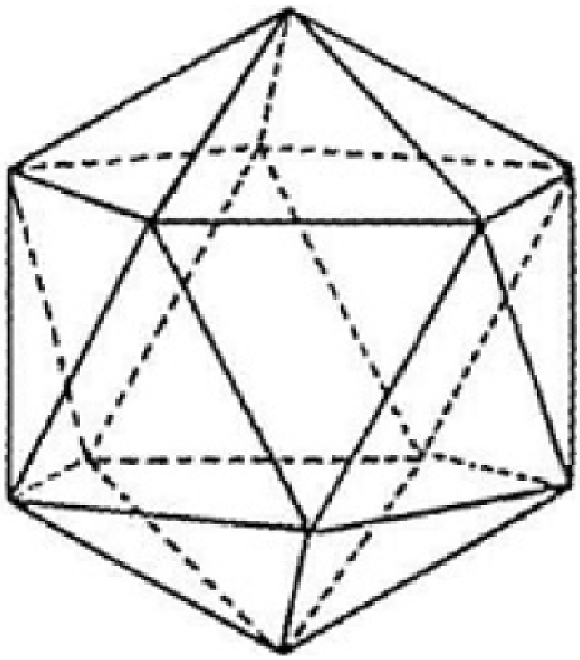


Figura 12 – Icosaedro.

Assim, é preciso escolher o primeiro vértice que formará a diagonal, o que pode ocorrer de 12 formas e o segundo vértice não poderá ser, obviamente, o primeiro escolhido e nem ser qualquer vértice que possua uma face em comum com ele (5 outras possibilidades a menos); portanto, para a escolha do segundo vértice, serão apenas 6 possibilidades. Desprezando a ordem entre os vértices que formam a diagonal, teremos:

$$\frac{12 \cdot 6}{2!} = 36 \text{ diagonais para o icosaedro.}$$

Para o dodecaedro:

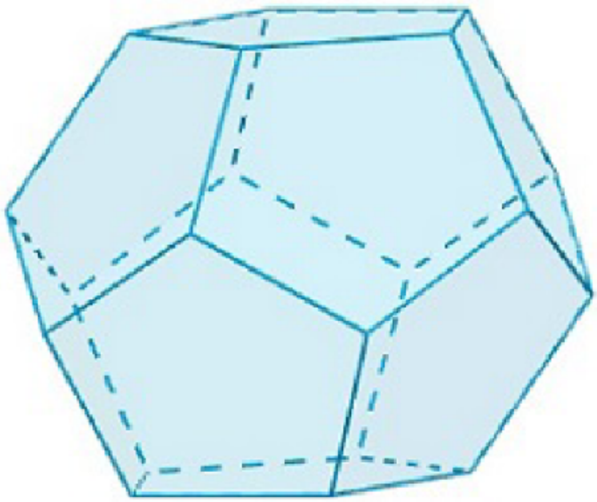


Figura 13 – Dodecaedro.

O número de possibilidades para a escolha do primeiro vértice é 20 e para o segundo vértice são apenas 10 possibilidades. Assim, o dodecaedro terá:

$$\frac{20 \cdot 10}{2!} = 100 \text{ diagonais.}$$

Observação: Não existe uma fórmula genérica para calcular o número de diagonais de um poliedro, uma vez que não há regularidade. No icosaedro, para o primeiro vértice são 12 possibilidades de escolha e, para o segundo, são 6 possibilidades a menos, já para o dodecaedro, são 20 possibilidades de escolha para o primeiro vértice e, para o segundo, são 10 possibilidades a menos.

2. Definições Formais a partir do Princípio Multiplicativo

Em alguns exercícios os alunos não conseguem aplicar a fórmula direto, devido algumas restrições, é possível observar isso nos exemplos: 2.6 item b, 2.12 e 2.13.

2.1- Definição Formal de Combinação.

Combinação simples de n elementos tomados p a p, onde $n \geqslant 1$ e p é um número natural tal que $p \leqslant n$, são todos os números de possíveis escolhas não ordenadas de p desses n elementos. Notação:

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \text{ (Lê-se: combinação de } n,\ p \text{ a } p)$$

Se $p > n$, p e n inteiros, define-se $C_n^p = 0$

Demonstração:

A partir da fórmula de Arranjo Simples:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

E observando nos exemplos apresentados que, quando a ordem não for importante para p escolhas é preciso dividir o resultado por $p!$. Chegaremos a fórmula de Combinação:

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

2.2- Definição Formal de Permutação com Repetição.

Logo, no caso de n elementos com n_1 iguais a a_1, n_2 iguais a $a_2, \ldots, n_r$ iguais a a_r, precisamos escolher n_1 lugares para a colocação dos a_1's, dos $n - n_1$ lugares restantes, escolher n_2 para colocação dos a_2's e assim por diante, obtendo:

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdots C_{n-n_1-\cdots-n_{r-1}}^{n_r} =$$

$$= \frac{n_1!}{n_1! \cdot (n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2! \cdot (n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3! \cdot (n-n_1-n_2-n_3)!} \cdots \frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1})!}{n_r! \cdot (n-n_1-n_2-\cdots-n_r)!}$$

$$= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdots n_r!}.$$

Denotamos este número por $PR(n; n_1; n_2; \cdots; n_r)$.

Conclusão do Capítulo

Através dos exemplos contidos no Capítulo 2, é possível perceber que o professor exigirá do aluno uma postura ativa na construção do seu conhecimento, pois não terá acesso às fórmulas de Combinação e Permutação com Repetição, diferente do que acontece na escola tradicional, onde é comum que o aluno seja condicionado a seguir o modelo proposto pelo professor. "[...] o indivíduo passa a ser o dinamizador do seu próprio processo de aprendizagem e não mais um mero assimilador de conhecimentos transmitidos". (GRANDO, 2004, p.10).

Se nos exemplos do Capítulo 1 a ordem dos elementos importava, o aluno terá que perceber que, como no exemplo 2.5, a dupla Ana e Bruno é a mesma dupla que Bruno e Ana e não podem ser contabilizadas como duas duplas distintas. Assim, se ocorrer a repetição de um ou mais elementos, ocorrerá a divisão pela quantidade de vezes que se repetir fatorial. Não poderá solucionar os problemas do Capítulo 2 da mesma forma como fez no Capítulo 1.

O aluno será novamente convidado a refletir sobre o que o problema está pedindo, terá um novo desafio para enfrentar, criando estratégias e socializando as suas hipóteses.

3 Permutações Circulares e O que fazer com as Restrições

Serão abordadas nesse capítulo resoluções de situações problema que tenham restrições, como a Permutação Circular. Ainda sem utilizar fórmula inicialmente, pretendendo que, em grupo, os alunos discutam, criem soluções e compreendam a problemática do exercício. É importante que o grupo de alunos não esqueça de levar a restrição em consideração, pois segundo o Princípio da Preferência *"Se em um experimento que é realizado em diversas etapas, uma ou mais dessas etapas apresentarem alguma restrição, daremos preferência de escolha às possibilidades dessas etapas com restrição para, somente após isso, escolhermos as possibilidades das etapas que não apresentam restrição"*.

Atividade 4. Ciranda Cirandinha.

O professor pedirá para os alunos fazerem uma ciranda com o seu grupo de três pessoas. Após isso, questionará de quantas maneiras distintas é possível formar uma ciranda com três pessoas. Os alunos devem realizar as contas e, depois, o professor perguntará quantas maneiras seriam possíveis se fossem utilizados anagramas. O professor deve fornecer um tempo para a turma pensar, realizar um debate e concluir que, considerando que cada letra equivale a uma pessoa, as maneiras possíveis para Ana, Bia e Carla cirandarem são:

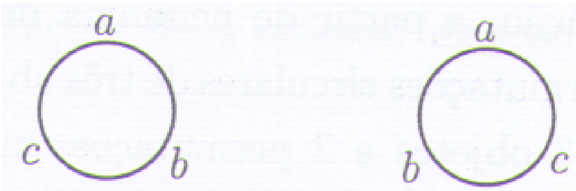


Figura 14 – Permutação Circular com três pessoas.

Considerando idênticas as formas que podem ser obtidas por uma simples rotação. Para melhor compreensão é preciso considerar todas as Permutações Simples de A, B e C em um círculo, como na figura a seguir:

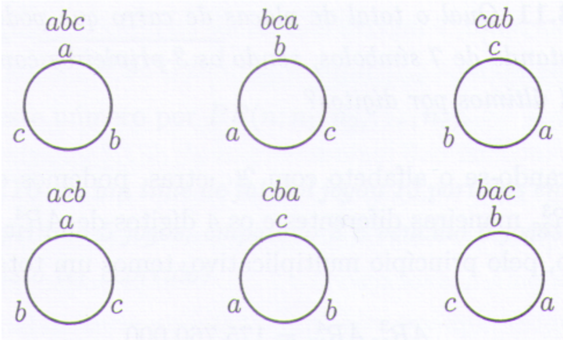


Figura 15 – Repetições da Permutação Circular com três pessoas.

Na primeira linha da figura anterior, qualquer uma das três figuras pode ser obtida a partir de outra por uma simples rotação; porém nenhuma das três primeiras pode ser obtida por simples rotação das 3 últimas. Logo, existem apenas 2 Permutações Circulares de três pessoas. Como existem 3! Permutações Simples de 3 pessoas e 2 Permutações Circulares, temos que $2 = \frac{3!}{3}$. No caso de 4 pessoas, Ana, Bia, Carla e Daniel, são possíveis $6 = \frac{4!}{4}$ maneiras.

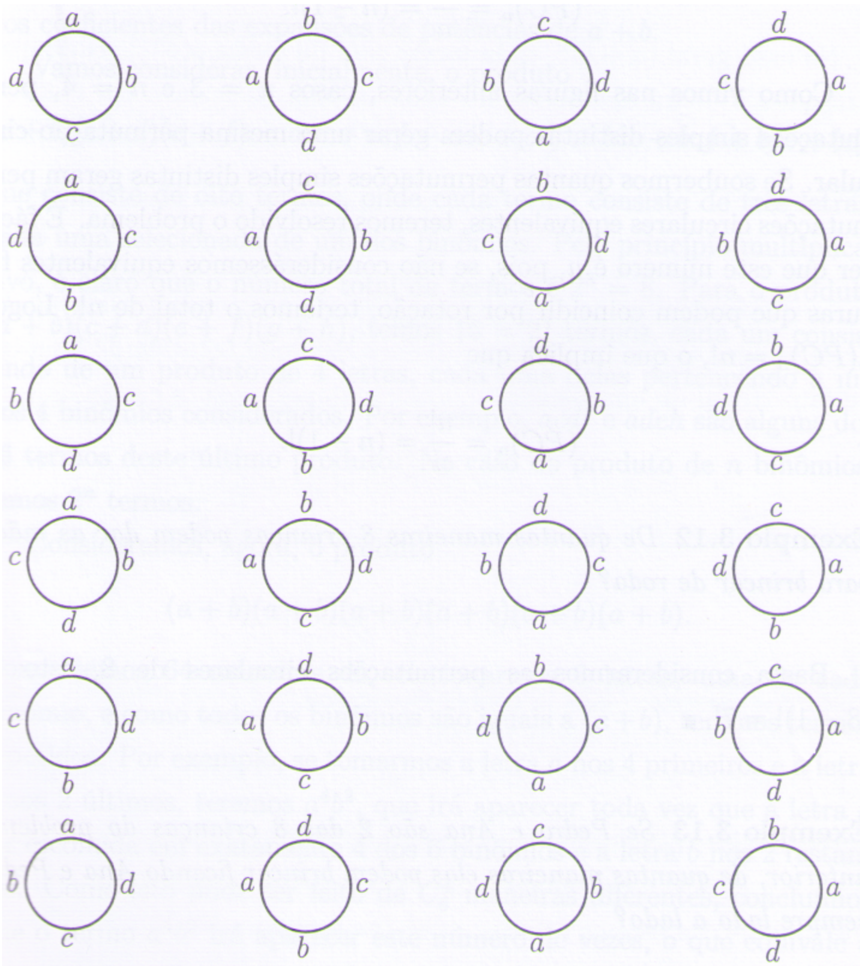


Figura 16 – Repetições da Permutação Circular com quatro pessoas.

Para 3 pessoas é possível rotacionar 3 vezes e alcançar a mesma formação e por isso é dividido por 3; já para 4 pessoas, é possível rotacionar 4 vezes e conseguir a mesma formação e por isso é dividido por 4. Então, quando se trata de uma Permutação Circular é preciso dividir pela quantidade de pessoas/objetos. Generalizando, o número de Permutações Circulares de n objetos,é de:

$$\frac{n!}{n}$$

É possível também fazer uma árvore de contagem sobre as posições, considerando inicialmente 3 pessoas, se você é o primeiro a entrar na roda, existem 2 pessoas que podem segurar sua mão direita e, depois, uma pessoa pode segurar a mão direita da pessoa que está segurando a sua mão direita, e, após isso, a roda será fechada. Veja o diagrama:

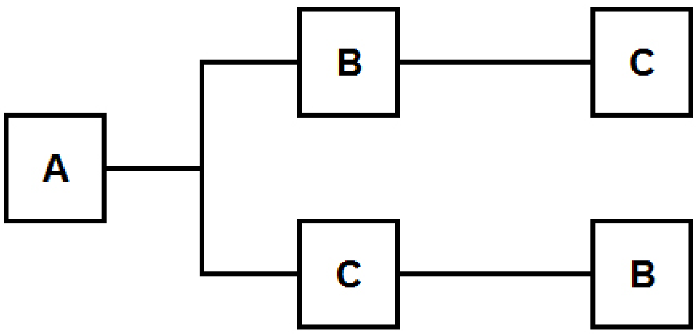


Figura 17 – Árvore de Contagem de Permutação Circular com três pessoas.

Por isso, temos:

$$2 \cdot 1 = \frac{3!}{3} = 2 \text{ maneiras.}$$

Para 4 pessoas, temos a Figura 18 a seguir.

Por isso, temos:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{4!}{4} = 6 \text{ maneiras.}$$

Depois dessa atividade é possível trabalhar o exemplo 3.1. A Ciranda Cirandinha e a Árvore de Contagem foram utilizadas com a finalidade de melhorar o entendimento e visualização por parte dos alunos.

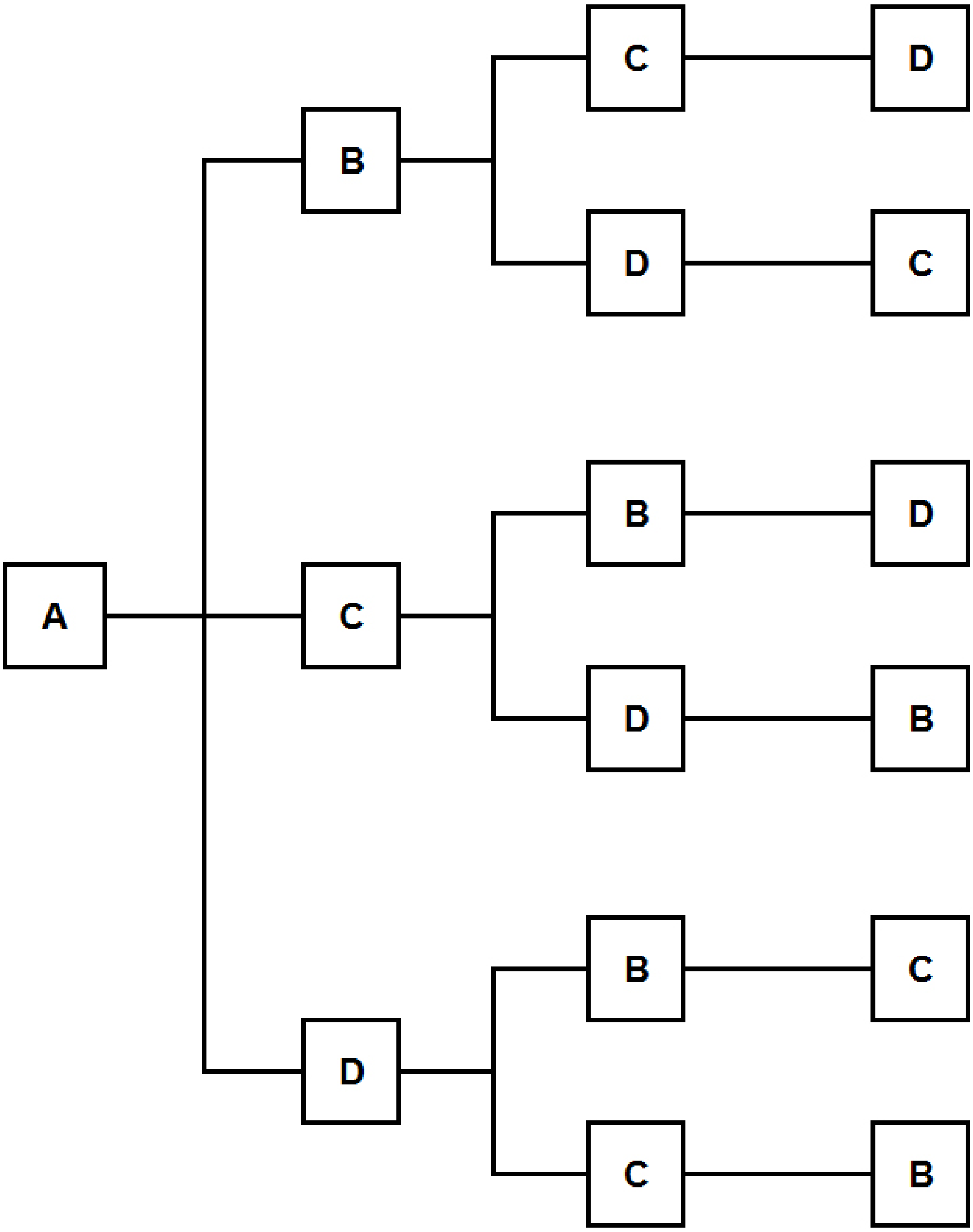


Figura 18 – Árvore de Contagem de Permutação Circular com quatro pessoas.

Exemplo 3.1.

a) De quantas maneiras distintas 7 crianças podem dar as mãos para brincar de ciranda?

$$\frac{7!}{7} = 6! = 720 \text{ maneiras distintas.}$$

b) De quantas maneiras distintas 7 crianças podem dar as mãos para brincar de ciranda, sendo que as crianças Angélica e Luciano têm que ficar lado a lado?

Considerando Angélica e Luciano uma única pessoa, teríamos 6 crianças que podem brincar de $\frac{6!}{6} = 5!$ maneiras distintas. Como Angélica e Luciano podem estar lado a lado de duas maneiras diferentes, Luciano segurando a mão direita ou esquerda de Angélica, deve ocorrer a multiplicação do resultado por 2.

$$\frac{6!}{6} \cdot 2 = 240 \text{ maneiras distintas.}$$

c) De quantas maneiras distintas 7 crianças podem dar as mãos para brincar de ciranda, sendo que as crianças Chimbinha e Joelma **não** podem ficar lado a lado?

Basta fazer o total de maneiras para 7 crianças, menos as maneiras de duas crianças ficarem juntas, ou seja, situação do item a) menos a situação do item b):

$$720 - 240 = 480 = \text{maneiras distintas.}$$

Exemplo 3.2. Considerando os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. Quantos números distintos, superiores a 100 e inferiores a 1000, podem ser formados sem repetir nenhum dígito? Com as seguintes restrições:

a) números pares.

b) números ímpares.

c) números que forem pares ou ímpares.

d) se fosse possível repetir os dígitos, de quantas maneiras diferentes os números dos itens anteriores poderiam ser formados?

Os números a serem considerados têm 3 dígitos, então, 3 escolhas devem ser feitas:

$$\underset{1^{\underline{o}} \text{ lugar}}{\underline{\qquad\qquad}} \cdot \underset{2^{\underline{o}} \text{ lugar}}{\underline{\qquad\qquad}} \cdot \underset{3^{\underline{o}} \text{ lugar}}{\underline{\qquad\qquad}}$$

Nos itens a) e b) existem restrições quanto à forma do número da unidade ($3^{\underline{o}}$ lugar), então, facilitaria, se esse lugar fosse considerado primeiro.

a) $\_\_ \cdot \_\_ \cdot \underline{\ 2\ }$, pois existem dois números pares que podem ser usados, que são os números 2 e 4, os outros lugares são preenchidos sem restrição, considerando que já foi utilizado um número na unidade, então, temos:

$$\underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ } = 24 \text{ maneiras.}$$

b) $\_\_ \cdot \_\_ \cdot \underline{\ 3\ }$, pois são três números ímpares que podem ser usados, que são os números 1, 3 e 5, os outros lugares são preenchidos sem restrição, considerando que já foi utilizado um número na unidade, então, temos:

$$\underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 3\ } = 36 \text{ maneiras.}$$

c) Não existe restrição, logo, temos:

$$\underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 3\ } = 60 \text{ maneiras.}$$

É possível observar que o resultado é a soma do item a) com o b), pois são todos os números possíveis.

d) Números pares: $\underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 2\ } = 50$ maneiras;
números ímpares: $\underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 3\ } = 75$ maneiras;
todos os números: $\underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 5\ } = 125$ maneiras.

Exemplo 3.3. Os bilhetes de uma rifa são enumerados de 1000 a 9999, Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

Inicialmente, é preciso encontrar as posições que o número 7 pode ocupar: 777X, 77X7, 7X77, X777, onde X é um número qualquer diferente de zero. É possível verificar que isso pode ocorrer de 4 maneiras distintas. Preenchidas as três posições com o número sete, resta ainda uma posição, que poderá ser preenchida por algarismos diferentes de sete e zero, ou seja, restam 8 algarismos. Agora é só multiplicar 8 por 4:

$$8 \cdot 4 = 32 \text{ números.}$$

Exemplo 3.4. Com os dígitos 0, 1, 2, 3 e 4 quantos números podem ser formados?

a) com 4 algarismos.

b) com 4 algarismos distintos.

c) pares com 4 algarismos.

d) pares com 4 algarismos distintos.

e) divisíveis por 5, com 4 algarismos distintos.

a) Nesse item é necessário escolher primeiro o algarismo do milhar, que não pode ser o 0 (zero), são 4 possibilidades. Para os demais algarismos, são 5 possibilidades cada um, inclusive, podendo ser o 0 (zero). Assim:

$$4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500 \text{ números.}$$

b) O algarismo do milhar, novamente, tem que ser diferente de zero (4 possibilidades), o algarismo da centena não pode ser o algarismo escolhido para ocupar a casa do milhar e pode ser 0 (zero), sendo assim, permanecem as 4 possibilidades de escolha. Para os algarismos da dezena e da unidade são, respectivamente, 3 e 2 possibilidades. Assim, são:

$$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96 \text{ possibilidades.}$$

c) Devido à restrição proposta nesse item, o número deve ser par, existem 3 possibilidades (0, 2 ou 4) para ocupar a unidade, para o algarismo do milhar são 4 possibilidades (não pode ser o zero) e, para os demais algarismos, são 5 possibilidades. Assim:

$$4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 = 300 \text{ números.}$$

d) Não é possível solucionar esse item tendo como base o mesmo raciocínio utilizado no item anterior, pois é preciso estar atento ao fato de que se o zero for escolhido para ocupar a casa da unidade, existem 4 possibilidades (1, 2, 3 e 4) para ocupar a casa do milhar. E se o zero não for escolhido para unidade, são apenas três opções para o milhar. Dessa forma, a resolução do problema será dividida em duas etapas: calcular os números terminados em 0 (zero) e calcular os números terminados em um outro algarismo par que não seja o 0 (zero):

   1) Números terminados em 0 (zero): existe apenas uma possiblidade para a casa da unidade (o próprio zero) e para os algarismos do milhar, centena e dezena são, respectivamente, 4, 3 e 2 possibilidades. Assim, são:

   $$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ números terminados com 0 (zero).}$$

   2) Números terminados em 2 ou 4: são 2 possibilidades para o algarismo da unidade (2 ou 4), 3 possibilidades para o algarismo do milhar (não pode ser o zero e nem o usado para a unidade), 3 possibilidades para a centena (não pode ser nenhum dos que foram utilizados na unidade e no milhar, porém pode ser o zero) e 2 possibilidades para a dezena. Assim, existem:

   $$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36 \text{ números terminados em 2 ou 4.}$$

Portanto, somando:

$$24 + 36 = 60 \text{ números pares com 4 algarismos distintos.}$$

e) Existe apenas uma possibilidade de algarismo para ocupar a unidade (o zero) e para ocupar a casa do milhar, da centena e da dezena são, respectivamente, 4, 3 e 2 possibilidades. Assim, são:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ números.}$$

Exemplo 3.5. (OBMEP-2011) Com os dígitos 1, 4, 6 e 8 pode-se formar vários números de três algarismos distintos. Qual é a soma de todos esses números?

Primeiro são calculados todos os números possíveis:

$$\underline{\ 4\ } \cdot \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ } = 24 \ \text{ números.}$$

Então, quando todos os 24 números forem somados, cada algarismo vai aparecer 6 vezes em cada casa (unidade, dezena e centena), totalizando 18 vezes. É possível observar isso se, por exemplo, o algarismo um for fixado na casa da centena, sendo assim, são três possibilidades de número para colocar na dezena (4, 6 ou 8) e duas possibilidades de número para colocar na unidade, desconsiderando o numéro que foi usado na dezena, assim:

$$\underline{\ \text{UM}\ } \cdot \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ } \text{ ou } \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ \text{UM}\ } \cdot \underline{\ 2\ } \text{ ou } \underline{\ 3\ } \cdot \underline{\ 2\ } \cdot \underline{\ \text{UM}\ }$$

Então:

$$6 + 6 + 6 = 18 \text{ vezes aparece o algarismo UM.}$$

Fazendo o mesmo para cada número:

$$18 \cdot 1 + 18 \cdot 4 + 18 \cdot 6 + 18 \cdot 8 = 342 \text{ é a soma de todos os números.}$$

Exemplo 3.6. Delegados de 10 países devem se sentar em 10 cadeiras enfileiradas. De quantas maneiras isso pode ocorrer, sendo que os delegados do Brasil e de Portugal devem sentar juntos e os do Iraque e dos Estados Unidos da Améria não podem sentar juntos?

Primeiro, é preciso calcular as possibilidades do delegado brasileiro sentar-se ao lado do delegado português, ou seja: $2 \cdot 9!$ (2 possibilidades devido à posição poder ser BRASILEIRO/PORTUGUÊS ou PORTUGUÊS/BRASILEIRO e 9!, pois são agora 8 delegados mais a dupla BRASILEIRO/PORTUGUÊS ou vice-versa). Quando foram calculadas as possibilidades do delegado brasileiro sentar ao lado do português, em algumas dessas possibilidades o estadunidense estaria junto ao iraquiano e, segundo o problema, isso não pode ocorrer. Por isso, essas possibilidades devem ser subtraídas. Elas podem ser alcançadas usando o mesmo raciocínio inicial, mas agora considerando também a dupla ESTADUNIDENSE/IRAQUIANO: $2 \cdot 2 \cdot 8!$. Logo:

$$2 \cdot 9! - 2 \cdot 2 \cdot 8! = 725760 - 161280 = 564480 \text{ maneiras.}$$

Exemplo 3.7. Considere os anagramas obtidos da palavra VESTIBULAR:

a) Quantos são os anagramas?

$$10! = 3628800 \text{ anagramas.}$$

b) Quantos apresentam as letras V,T e R juntas?

Substituindo VTR por X, surge uma nova palavra que é XESIBULA, com 8 letras distintas, 8! anagramas podem ser formados com essa nova palavra, X pode ser igual a todas as permutações das letras VTR, ou seja, $3! = 6$ maneiras. Logo, temos:

$$8! \cdot 3! = 241920 \text{ anagramas.}$$

c) Quantos começam e terminam por vogais?

Primeiro, é preciso resolver a restrição, são 4 vogais na palavra (A, E, I e U), assim, para a primeira letra da palavra são 4 opções de escolha, para última letra da palavra, como já foi usada uma vogal na primeira letra, sobraram 3 vogais.Então, temos:

$$\underline{4} \cdot \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} \cdot \underline{3}$$

Para preencher os outros lugares da palavra, são 8 letras que restaram. Logo, temos:

$$\underline{4} \cdot \underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} \cdot \underline{3} = 483840 \text{ anagramas.}$$

Exemplo 3.8. Considere os anagramas da palavra PORTA.

a) Quantos são no total?

b) Quantos começam com uma vogal?

c) Quantos começam com uma consoante e terminam com uma vogal?

d) Quantos começam e terminam com uma consoante?

e) Quantos não começam com a letra A e não terminam com a letra O?

f) Quantos possuem as vogais juntas e em ordem alfabética?

g) Quantos possuem as vogais juntas?

h) Quantos possuem as vogais separadas?

i) Quantos possuem as consoantes juntas?

a) É preciso escolher a posição que cada uma das 5 letras da palavra PORTA ocupará. Assim, para a escolha da primeira letra são 5 possibilidades, para a segunda letra são 4 possibilidades (não usar a letra escolhida para ocupar a primeira posição), para a terceira letra são 3 possibilidades, para a quarta letra são 2 possibilidades e para a quinta letra uma única possibilidade. Dessa forma:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ anagramas no total.}$$

b) Nesse item existe uma restrição, o anagrama deve começar com uma vogal, a vogal inicial é escolhida e são apenas 2 possibilidades (A ou O) e, em seguida, as 4 demais letras são permutadas. Assim:

$$2 \cdot 4! = 48 \text{ anagramas começados por vogal.}$$

c) Nesse item existem duas restrições, a primeira letra do anagrama deve ser uma consoante e são 3 possibilidades (P, R ou T) e a última letra deve ser uma vogal, são 2 possibilidades (A ou O). As três letras restantes são permutadas. Logo:

$$3 \cdot 3! \cdot 2 =$$
$$120 \text{ anagramas começados por uma consoante e terminados por uma vogal.}$$

d) Esse item se assemelha bastante ao item c), porém a primeira e a última letra do anagrama devem ser consoantes e o raciocínio será bastante similar ao do item anterior. São 3 possibilidades para a primeira letra (P, R ou T) e apenas 2 possibilidades para a última letra, que também deve ser uma consoante, mas a letra usada na primeira posição não pode ser utilizada novamente. As três letras restantes são permutadas, portanto:

$$3 \cdot 3! \cdot 2 = 120 \text{ anagramas que começam e terminam com uma consoante.}$$

e) Esse item seria aparentemente simples se não fosse por um pequeno erro que pode ser cometido. Observe que são duas restrições: a primeira letra não deve ser a letra A e a última letra não deve ser a letra O. Dessa forma, um pensamento cabível, porém equivocado, seria imaginar que existiriam 4 possibilidades para a primeira letra (P, O, R ou T) e também 4 possibilidades para a última letra (P, R, T ou A). O problema dessa resolução reside no fato de que, se a primeira letra escolhida for P, R ou T, esta letra não pode ser utilizada novamente e isso reduziria o número de possibilidades da última letra para 3; entretanto, se a primeira letra escolhida for a letra O, ainda existirão 4 possibilidades para a última letra. Assim, é preciso separar o problema em dois casos:

1) anagramas que começam com a letra O.
2) anagramas que começam com as letras P, R ou T.

Dessa maneira, para o primeiro caso, existe apenas uma possibilidade para a primeira letra (deve ser a letra O) e 4 possibilidades para a última letra (P, R, T ou A) e as demais três letras restantes são permutadas de 3! formas, portanto:

$$1 \cdot 3! \cdot 4 = 24 \text{ anagramas nesse primeiro caso.}$$

Já no segundo caso, são 3 possibilidades para a escolha da primeira letra (P, R ou T), 3 possibilidades para a última letra e as demais três letras restantes são permutadas de 3! formas. Como:

$$3 \cdot 3! \cdot 3 = 54 \text{ anagramas nesse segundo caso.}$$

Totalizando $24 + 54 = 78$ anagramas que não começam com a letra A e não terminam com a letra O.

Uma outra forma mais sofisticada de resolver esse problema seria ignorar uma das restrições. Por exemplo, esquecer o fato de que a última letra não pode ser a letra O e calcular todos os anagramas que não começam com a letra A. Assim, são 4 possibilidades para a primeira letra e as demais 4 letras são permutadas de 4! formas, portanto:

$$4 \cdot 4! = 96 \text{ anagramas.}$$

Entre esses 96 anagramas, obviamente, existem alguns que terminam com a letra O e devem ser descontados, portanto, calculando quantos anagramas terminam com a letra O (e não começam com a letra A) existe apenas 1 possibilidade para a última letra (deve ser a letra O), 3 possibilidades para a primeira letra (não pode ser a letra A e nem a letra O) e as três letras restantes são permutadas de 3! formas.

$$1 \cdot 3! \cdot 3 = 18 \text{ anagramas.}$$

É necessário, portanto, descontar 18 anagramas dos 96 que foram calculados, o que atinge o mesmo resultado anterior de 96 - 18 = 78 anagramas que não começam com a letra A e não terminam com a letra O.

f) Esse item traz uma situação típica entre os problemas de anagramas, a exigência de que duas ou mais letras estejam juntas em uma determinada posição. Nesse caso, basta considerá-las como apenas uma letra. As vogais A e O são consideradas como a letra "AO" (o problema pede que a união seja em ordem alfabética). Assim, a palavra PORTA fica com apenas 4 letras:

$$4! = 24 \text{ anagramas que possuem as vogais juntas e em ordem alfabética.}$$

g) Para resolver esse item é preciso usar o mesmo raciocínio do item f), entretanto, como é possível modificar a posição das letras no grupo das vogais (não é necessário manter a ordem alfabética como no item anterior), essa ordem deve ser levada em consideração e pode ocorrer de 2! formas. Pelo Princípio Multiplicativo:

$$4! \cdot 2! = 48 \text{ anagramas que possuem as vogais juntas e em qualquer ordem.}$$

h) Com os resultados dos itens a) e g) é possivel responder esse item, pois se as vogais não estão juntas, então, devem estar separadas, logo:

$$120 - 48 = 72 \text{ anagramas que possuem as vogais separadas.}$$

i) Esse item assemelha-se bastante ao item g), porém agora o grupo de letras que deve permanecer unido possui três elementos (P, R e T). Inicialmente é preciso considerar esse grupo de letras como apenas uma letra e, dessa forma, a palavra PORTA fica com três letras: "PRT", "A" e "O" e elas podem ser permutadas de 3! maneiras, pois a ordem alfabética não foi exigida no problema, portanto:

$$3! \cdot 3! = 36 \text{ anagramas que possuem as consoantes juntas e em qualquer ordem.}$$

Exemplo 3.9. De quantas maneiras é possível colocar, lado a lado, em uma estante, 5 livros de Matemática, 4 livros de Física e 3 livros de Química, todos diferentes entre si, de modo que permaneçam juntos os livros de uma mesma disciplina?

É possível verificar que são, no total, 12 livros (5 de Matemática, 4 de Física e 3 de Química) e que poderíamos arrumá-los de 12! formas nessa estante. Entretanto, devido à restrição dos livros de uma mesma disciplina permanecerem juntos, é preciso considerar todos os 5 livros de Matemática como um só livro, todos os 4 livros de Física como um só livro e o mesmo ocorre com os 3 livros de Química. Assim, somente 3 livros podem ser permutados de 3! formas. Contudo, devido ao fato de que é possível modificar a posição que o livro ocupa na disciplina, são 5! maneiras de modificar a ordem dos livros de Matemática (mantendo-os juntos); 4! maneiras de modificar a ordem dos livros de Física e 3! maneiras de modificar a ordem dos livros de Química. Assim, utilizando o Princípio Multiplicativo:

$$3! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3! = 103680 \text{ formas diferentes de arrumar esses livros na estante.}$$

Observação: Perceba que esse problema, apesar de não ter nenhuma relação com os anagramas, foi resolvido de uma maneira muito similar aos itens g) e h) do exemplo anterior.

Exemplo 3.10. Numa sala de aula existem 8 alunas e 7 alunos, comissões constituídas de 4 pessoas serão construídas. Quantas comissões são possíveis? Considerando que:

a) sem restrição.

b) pelo menos uma mulher e um homem.

c) uma pessoa líder.

d) uma pessoa líder e uma vice.

Resolução:

a) São, no total, 15 estudantes = 8 alunas + 7 alunos, logo, temos:

$$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4!} = 1365 \text{ comissões.}$$

b) Separando em 3 casos:

Caso 1: Uma mulher e três homens.

$$\frac{8}{} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 280 \text{ comissões.}$$

Caso 2: Duas mulheres e dois homens.

$$\frac{8 \cdot 7}{2!} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2!} = 588 \text{ comissões.}$$

Caso 3: Três mulheres e um homem.

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{7}{} = 392 \text{ comissões.}$$

Somando os três casos, temos:

$$280 + 588 + 392 = 1260 \text{ comissões.}$$

c)

$$\frac{\overbrace{15}^{\text{Lider}}}{} \cdot \frac{\overbrace{14 \cdot 13 \cdot 12}^{\text{3 integrantes do grupo}}}{3!} = 5460 \text{ comissões.}$$

d)

$$\frac{\overbrace{15}^{\text{Lider}}}{} \cdot \frac{\overbrace{14}^{\text{Vice lider}}}{} \cdot \frac{\overbrace{13 \cdot 12}^{\text{2 integrantes do grupo}}}{2!} = 16360 \text{ comissões.}$$

Exemplo 3.11. Um grupo de 11 pessoas será dividido em 3 subgrupos A, B e C, cada subgrupo discutirá um tema específico. A e B devem ter 4 membros, C deve ter apenas 3 membros.Uma vez que o grupo seja distinguível (por conta do assunto), de quantas maneiras os subgrupos podem ser formados?

$$\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4!} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} = 11550 \text{ maneiras de formar os subgrupos.}$$

Note que se os temas analisados fossem iguais, não haveria problema de trocar os subgrupos A e B de lugar (eles têm a mesma quantidade de membros), por isso, ocorreria a divisão por 2!, ficando:

$$\frac{\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4!} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!}}{2!} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} = 5775 \text{ maneiras de formar os subgrupos.}$$

Exemplo 3.12. (OBMEP-2008) Manuela quer pintar as quatro paredes do seu quarto, cada parede de uma cor diferente, usando as cores: azul, rosa, verde e branco. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar o seu quarto?

Para resolver o problema, basta permutar as quatro cores das paredes e, através disso, será obtido o total de maneiras que o quarto pode ser pintado, utilizando uma cor em cada parede. Ou seja:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ maneiras.}$$

E, depois, subtrair as possibilidades de que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. São 8 as possibilidades disso acontecer, pois são dois pares de paredes opostas e dois modos de cada par ser pintado, AZUL/ROSA ou ROSA/AZUL combinado com VERDE/BRANCO ou BRANCO/VERDE, portanto:

$$24 - 8 = 16 \text{ maneiras de pintar o quarto de Manuela.}$$

Exemplo 3.13. Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura a seguir. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e do mesmo lado?

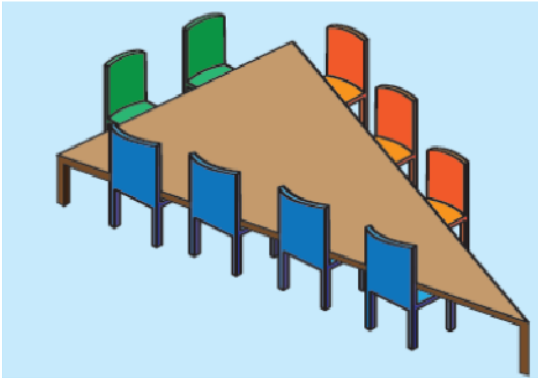


Figura 19 – Mesa triangular.

Como Alice e Bernardo devem sentar juntos, eles são considerados como uma única pessoa, primeiro será escolhida a ordem de acomodação deles, são 2 as possibilidades: ALICE/BERNARDO ou BERNARDO/ALICE, em seguida será escolhido o par de cadeiras em que sentarão Alice e Bernardo, são 6 maneiras (1 possibilidade de sentar do lado menor, 2 possibilidades do lado médio e 3 do maior lado) e, por fim, acomodar os 4 outros amigos nos 7 lugares restantes: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$, então, basta multiplicar tudo:

$$2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 10080 \text{ maneiras.}$$

Exemplo 3.14. Em uma escola, x professores se distribuem em 8 bancas examinadoras, de modo que cada professor participa de exatamente duas bancas e cada duas bancas têm exatamente um professor em comum.

a) calcule x.

b) determine quantos professores existem em cada banca.

Inicialmente, é preciso encontrar quantos professores existem em cada banca, para isso, suponha a i-ésima banca, com $1 \leqslant i \leqslant 8$. Essa i-ésima banca terá um e somente um elemento em comum com cada j-ésima banca, sendo $i \neq j$. Como existem 7 outras bancas diferentes da i-ésima então, cada banca deve possuir 7 professores.

Como são 8 bancas com 7 professores cada uma e cada professor pertence a somente duas bancas, então:

$$\frac{8 \cdot 7}{2!} = 28 \text{ professores. Logo, } x = 8 \text{ professores.}$$

3. Definições Formais a partir do Princípio Multiplicativo

3.1- Definição Formal de Permutação Circular

O número de permutações circulares de n objetos, denotado por:

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Explicação:

Como ocorreu na atividade 4, permutações simples distintas podem gerar uma mesma permutação circular. Logicamente, é possível observar que permutações simples distintas de n objetos/ pessoas geram $n!/n$ permutações circulares equivalentes.

Alguns alunos, geralmente, perguntam qual fórmula o professor recomenda usar se é a $\frac{n!}{n}$ ou $(n-1)!$. O professor deve explicar e demonstrar a igualdade entre elas, abrindo o termo $\frac{n!}{n} = \frac{n \cdot (n-1)!}{n}$ e simplificando n com n. Porém é aconselhável apresentar apenas o $\frac{n!}{n}$ para toda a turma, pois é mais didático e intuitivo, já que os alunos sabem que se rotacionar n objetos n vezes resultará em n casos iguais e, por isso, ocorre a divisão por n, a fórmula $(n-1)!$ vem da $\frac{n!}{n}$ e não o contrário.

Conclusão do Capítulo.

A atividade 4, inicialmente, pode parecer de fácil entendimento, porém, quando o número de pessoas para formar a ciranda aumenta para quatro, o processo para a resolução do problema passa a ser mais trabalhoso. E quando o aluno descobre que para três pessoas a resposta é 2! e para 4 pessoas é 3! e o professor propõe um novo desafio: uma roda com cinco pessoas, é comum que o aluno responda 4! prontamente, sem raciocinar sobre a resolução e sem ser capaz de explicar o cálculo utilizado. O professor deve intervir, solicitando que o aluno justifique a sua maneira de pensar, descrevendo o que e como fez; propor facilitadores, como: dizer que quando existe uma restrição causando dificuldade, ela deve ser satisfeita em primeiro lugar ou que, separar os casos, pode facilitar na resolução, sistematizando junto com o aluno o seu raciocínio.

A autora Regina Célia Grando (2004) escreve sobre a importância do trabalho em grupo na escola (proposto, por exemplo, para solucionar a atividade 4) que leva o indivíduo a compreender, respeitar o seu colega e se autoconhecer. “Em atividades grupais, os sujeitos são capazes de se conhecerem, conhecerem mais seus próprios limites, atitudes, valores e capacidades, a fim de contribuir para que o trabalho se desenvolva da melhor forma”. (GRANDO, 2004, p.34).

4 Equações e Inequações Lineares com Coeficientes Unitários e Combinações com Repetição

Nesse capítulo, através do uso de materiais concretos, será contado o número de soluções de inteiros não negativos das equações, como:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n = m$$

Onde X_i para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ e m são inteiros. Esses valores serão usados também para inequação, do tipo:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n \leqslant m$$

Atividade 5. Dividindo igualmente bolinhas de gude.
Material necessário: Oito bolinhas de gude iguais (mesma cor, modelo e tamanho) e 4 lápis ou canetas, ou ainda, lapiseiras.

Para a realização da atividade é preciso entregar 8 bolinhas de gude a cada grupo composto por 4 pessoas e propor a resolução do problema. Sugere-se a formação de pequenos grupos, pois, baseado na experiência docente do autor da presente dissertação, a formação de grupos maiores pode atrapalhar na troca de conhecimentos e experiências, uma vez que algum paticipante pode permanecer ocioso na resolução do problema.

Em um almoço de família na casa da vovó, o tio Heitor levou 8 bolinhas de gude iguais para distribuir para seus quatro sobrinhos Xuxa, Yago, Ziraldo e Willian. De quantas maneiras diferentes é possível o tio Heitor distribuir as 8 bolinhas de gude para os seus sobrinhos? Considere as seguintes possibilidades:

a) todas as bolinhas têm que ser distribuídas e alguns sobrinhos podem ficar sem nenhuma bolinha.

b) todas as bolinhas têm que ser distribuídas e todos os sobrinhos têm que receber pelo menos uma bolinha.

c) não necessariamente todas as bolinhas têm que ser distribuídas e alguns sobrinhos podem ficar sem nenhuma bolinha.

d) nem todas as bolinhas precisam ser distribuídas, porém todos os sobrinhos têm que receber pelo menos uma bolinha.

e) nem todas as bolinhas têm que ser distribuídas e todos os sobrinhos têm que receber pelo menos uma bolinha, apenas o Ziraldo, que é o afilhado do tio Heitor, tem que receber pelo menos duas bolinhas.

Talvez seja interessante colocar as bolinhas alinhadas e os lápis ou canetas para separar as bolinhas, como mostra a figura abaixo:

Figura 20 – Bolinhas de gude e canetas.

Os alunos terão um tempo para tentar solucionar a questão a). O professor fará o levantamento de quais foram as estratégias utilizadas para a resolução do primeiro problema proposto. O ideal é que o professor resolva a situação problema a partir das hipóteses construídas pelos alunos, caso não seja possível, ele deverá fornecer dicas, uma de cada vez, com intervalos entre elas, a fim de que os alunos tenham a possibilidade de tentar resolver.

Dica 1:

A soma da quantidade de bolinhas que o tio Heitor entregou para os sobrinhos tem que ser igual a 8, considerando X, Y, Z e W a quantidade de bolinhas de gude que cada sobrinho recebeu, respectivamente, Xuxa, Yago, Ziraldo e Willian, temos:

$$X + Y + Z + W = 8$$

Colocando as bolinhas alinhadas:

o o o o o o o o

É preciso dividir essa quantia em quatro partes, para isso, são usadas três barras, como no exemplo:

$$\underbrace{o}_{X} \mid \underbrace{o\ o}_{Y} \mid \underbrace{o\ o\ o}_{Z} \mid \underbrace{o\ o}_{W}$$

Assim, Xuxa ficará com 1 bolinha, Yago com 2, Ziraldo com 3 e Willian com 2 bolinhas.

Dica 2:

Após a primeira dica, os alunos são incentivados a pensar de quantas maneiras as bolinhas de gude podem ser repartidas, de quantas maneiras diferentes é possível colocar a primeira, a segunda e a terceira barra.

o o o o o o o o

| | |

Dica 3:

A primeira barra pode ser colocada em 9 posições diferentes, por exemplo:

o o o o o o o o |

A segunda barra pode ser colocada em 10 posições diferentes, como:

o o o o o o o o | |

A terceira barra pode ser colocada em 11 posições diferentes, por exemplo:

o o o | o o o o o | |

Nesse caso:

$$\underbrace{o\ o\ o}_{X} \mid \underbrace{o\ o\ o\ o\ o}_{Y} \mid \underbrace{\quad}_{Z} \mid \underbrace{\quad}_{W}$$

Xuxa receberá 3 bolinhas, Yago 5, Ziraldo 0 e Willian 0.

Dica 4:

Analisando as maneiras de posicionar cada barra e considerando que, se trocarmos as barras de lugar entre elas, a quantidade de bolinhas para cada sobrinho se conservará, então, é necessário dividir por 3!, assim:

$\dfrac{9 \cdot 10 \cdot 11}{3!} = 165$ maneiras diferentes para o tio Heitor distribuir as bolinhas.

O mesmo processo deve ser realizado com os demais itens, a seguir, existem formas de resolução, porém o aluno deve ser ativo na construção do conhecimento, sempre buscando solucionar os problemas propostos.

Existem duas maneiras de selecionar o item b):

A primeira forma é dar uma bolinha para cada sobrinho, assim, $8 - 4 = 4$ bolinhas restantes e resolver o sistema: $X + Y + Z + W = 4$, a fim de distribuir as 4 últimas bolinhas com o mesmo raciocínio utilizado no item a). Dessa forma, cada sobrinho ganharia o resultado do sistema mais a bolinha já entregue, portanto:

$\dfrac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3!} = 35$ maneiras diferentes para o tio Heitor distribuir as bolinhas.

Na segunda maneira, oito bolinhas e três barra:

$$\mathbf{o\ o\ o\ o\ o\ o\ o\ o}$$
$$|\quad|\quad|$$

A primeira barra pode ser colocada em 7 posições diferentes, pois ela não pode estar antes de todas as bolinhas e nem depois delas, pois dessa forma algum sobrinho ficaria sem bolinha.

A segunda barra pode ser colocada em 6 posições diferentes, porque não pode estar nas pontas e nem ao lado da outra barra, para que nenhum sobrinho fique sem ganhar bolinha. Por exemplo:

$$\mathbf{o\ o\ o\ o} \mid \mathbf{o\ o} \mid \mathbf{o\ o} \mid$$

A terceira barra pode ser colocada em 5 posições diferentes, como:

$$\mathbf{o\ o\ o} \mid \mathbf{o} \mid \mathbf{o\ o} \mid \mathbf{o\ o}$$

Logo:

$$\underbrace{\mathbf{o\ o\ o}}_{X} \mid \underbrace{\ \mathbf{o}\ }_{Y} \mid \underbrace{\mathbf{o\ o}}_{Z} \mid \underbrace{\mathbf{o\ o}}_{W}$$

Xuxa receberá 3 bolinhas, Yago 1, Ziraldo 2 e Willian 2. Ocorre a divisão por 3!, pois, como já foi visto anteriormente, se trocarmos as barras de posições entre elas, não existe alteração de quantidade de bolinhas recebida por sobrinho.

$\dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$ maneiras diferentes para o tio Heitor distribuir as bolinhas.

Para a resolução do item c) é necessário considerar que: $X + Y + Z + W \leqslant 8$, que é o mesmo do que o sistema: $X + Y + Z + W + H = 8$, no qual H seria a quantidade de bolinhas que o tio Heitor levaria embora. Neste item, uma barra a mais será utilizada, pois existe uma pessoa a mais para entrar na divisão das bolinhas de gude:

o o o o o o o o

| | | |

$\dfrac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{4!} = 495$ maneiras diferentes que o tio Heitor tem para distribuir as bolinhas.

Para a resolução do item d) existem duas formas possíveis, que se assemelham à solução dos itens b) e c).

A primeira consiste em dar uma bolinha para cada sobrinho, então, temos: $8 - 4 = 4$. E para a distribuição das bolinhas restantes é preciso resolver o sistema: $X + Y + Z + W + H = 4$.

o o o o

| | | |

$\dfrac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4!} = 70$ maneiras diferentes para o tio Heitor distribuir as bolinhas.

E, na segunda, existem oito bolinhas e quatro barra: $X + Y + Z + W + H = 8$

o o o o o o o o

| | | |

A primeira barra pode ser colocada em 8 posições diferentes, pois ela não pode estar antes de todas as bolinhas, porém, dessa vez, pode estar depois de todas, pois o tio Heitor pode sair sem bolinha. Por exemplo:

o o o o o o o o |

A segunda barra pode ser colocada em 7 posições diferentes, pois ela não pode estar antes de todas as bolinhas e nem ao lado de outra barra, porque algum sobrinho ficaria sem bolinha, como:

o o o o | **o o o o** |

A terceira barra pode ser colocada em 6 posições diferentes, por exemplo:

o o o | o | o o o o |

E a quarta barra pode ser colocada em 5 posições diferentes, por exemplo:

o o o | o | o o o o |

Nesse caso:

$$\underbrace{\mathbf{o\ o\ o}}_{\text{X}} \mid \underbrace{\ \mathbf{o}\ }_{\text{Y}} \mid \underbrace{\mathbf{o\ o}}_{\text{Z}} \mid \underbrace{\mathbf{o\ o}}_{\text{W}} \mid \underbrace{\qquad}_{\text{H}}$$

$\dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = 70$ maneiras diferentes para o tio Heitor distribuir as bolinhas.

Para solucionar o item e) é possível usar o mesmo raciocínio do item d):

$$X + Y + Z + W + H = 8$$

Onde X, Y e $W \geqslant 1$, $Z \geqslant 2$ e $H \geqslant 0$.

Cada sobrinho receberá uma bolinha e apenas o afilhado Ziraldo receberá duas bolinhas, assim, 8-5=3 bolinhas. Após isso, resolver o novo sistema da mesma maneira como foi resolvido no item d):

$$X + Y + Z + W + H = 3$$

Onde X, Y e $W \geqslant 0$, $Z \geqslant 0$ e $H \geqslant 0$.

Três bolinhas e quatro barra: $X + Y + Z + W + H = 8$

o o o

| | |

$\dfrac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4!} = 35$ maneiras diferentes que o tio Heitor tem para distribuir as bolinhas.

Depois dessa atividade é possível trabalhar do exemplo 4.1 até o 4.6, pois são semelhantes. As bolinhas de gude e as canetas são utilizadas como material concreto com a finalidade de melhorar o entendimento e visualização por parte dos alunos.

Exemplo 4.1. Em um parque de diversões, existem quatro tipos de brinquedos: Barco Viking, Montanha Russa, Carrinho de bate-bate e Roda Gigante. Uma pessoa tem dinheiro para comprar quatro fichas de brinquedo, do mesmo valor. De quantas maneiras diferentes ela poderia comprar essas quatro fichas?

Tomando:

B= Quantidade de fichas do Barco Viking,
C= Quantidade de fichas do Carrinho de bate-bate,
M= Quantidade de fichas da Montanha Russa,
R= Quantidade de fichas da Roda Gigante.

Considerando o mesmo raciocínio do exemplo anterior e utilizando as fichas no lugar das bolinhas e os brinquedos no lugar dos sobrinhos, temos:

$$B + C + M + R = 4$$

Quatro fichas e três barras:

o o o o
| | |

$$\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3!} = 35 \text{ maneiras diferentes de comprar as fichas.}$$

Exemplo 4.2. De quantas maneiras 3 refrigerantes podem ser comprados em um bar que vende 5 tipos de refrigerantes?

Considere os refrigerantes A, B, C, D e E, seja X a quantidade do refrigerante A, Y a quantidade do refrigerante B, Z a quantidade do refrigerante C, W a quantidade do refrigerante D e H a quantidade do refrigerante E. Logo, temos:

$$X + Y + Z + W + H = 3$$

Três refrigerantes para comprar e quatro barras:

o o o
| | | |

$$\frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4!} = 35 \text{ maneiras diferentes de comprar os refrigerantes.}$$

Exemplo 4.3. Quantos números inteiros entre 1 e 99999 têm a soma dos algarismos iguais a 6?

Temos a equação:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 6$$

Onde cada x_n (com $n = 1, 2, 3, 4, 5$) representa o valor dos algarismos nas suas respectivas casas (por exemplo, x_1 é o valor do algarismo da dezena de milhar, x_2 é do algarismo da unidade de milhar e assim por diante). O esquema abaixo mostra uma solução da equação, bem como sua representação no esquema bola - barra (cada bola representa uma unidade no valor da incógnita, cada barra é usada para separar duas incógnitas):

$$\mathbf{o\ o\ o\ o\ o\ o}$$
$$|\ |\ |\ |$$

Note que 31002 é o exemplo abaixo de um número cuja soma dos algarismos é 6

$$\underbrace{\mathbf{o\ o\ o}}_{X_1} | \underbrace{\ \mathbf{o}\ }_{X_2} | \underbrace{\qquad}_{X_3} | \underbrace{\qquad}_{X_4} | \underbrace{\mathbf{o\ o}}_{X_5}$$

Como neste caso são 6 bolas e 4 barras, temos:

$$\frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{4!} = 210 \text{ números distintos}$$

Exemplo 4.4. Qual é o número de maneiras de distribuir 5 bolas indistinguíveis em 4 urnas distintas, de tal forma que cada urna contenha pelo menos uma bola?

Considere as caixas M_1, M_2, M_3 e M_4. Seja X_1 a quantidade de bolas na urna M_1, X_2 a quantidade de bolas na urna M_2, X_3 a quantidade de bolas na urna M_3 e X_4 a quantidade de bolas na urna M4. Então:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 5$$

Isso pode ser mostrado ao aluno colocando as bolas alinhadas e 3 barras entre elas para separar em 4 conjuntos, como na figura abaixo:

$$\mathbf{o\ o\ o\ o\ o}$$
$$|\ |\ |$$

Usando o mesmo raciocínio da atividade anterior:

$$\frac{(5-1) \cdot (4-1) \cdot (3-1)}{3!} = 4 \text{ maneiras diferentes de distribuir as bolas nas urnas.}$$

Exemplo 4.5. Qual é o número de maneiras de atribuir n bolas indistinguíveis para m urnas distintas, de tal forma que cada urna contenha pelo menos uma bola e que $n \geqslant m$?

Considere as caixas $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_m$. Seja X_1 a quantidade de bolas na urna M_1, X_2 a quantidade de bolas na urna M_2, X_3 a quantidade de bolas na urna $M_3, \ldots, X_m$ a quantidade de bolas na urna M_m, então:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_m = n$$

Logo:

$$\frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot\overbrace{(n-1-(m-1))}^{\text{quantidade de urnas - 1}}}{(m-1)!} = \frac{(n-1)!}{(m-1)!\cdot(n-1-(m-1))!}$$

maneiras

diferentes de distribuir as bolas nas urnas.

4. Definições Formais a partir do Princípio Multiplicativo

O aluno, geralmente, se confunde durante a aplicação de um dos teoremas abaixo, então seria interessante que o professor o alertasse, durante as atividades ou até mesmo na prova, a fazer o uso das bolinhas e das barras. Assim não é necessário decorar dois teoremas, saber identificar os m's e r's das fórmulas: C_{m-1}^{r-1} para inteiros positivos ou C_{m+r-1}^{r-1} para inteiros não-negativos.

Teorema 1. O número de soluções em inteiros positivos da equação $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r = m$, para $m > 0$, é dado por C_{m-1}^{r-1}

Demonstração do Teorema 1.

Pretende-se expressar o inteiro positivo m como soma de r inteiros positivos, colocando, como foi feito detalhadamente na atividade 5 e praticado nos exemplos anteriores, $r-1$ barras divisoras entre as m bolinhas de gude:

$$\overbrace{\mathbf{o}\ \mathbf{o}\ \mathbf{o} \cdots \mathbf{o}\ \mathbf{o}\ \mathbf{o}}^{\text{m bolinhas}}$$
$$\underbrace{|\quad|\quad|\cdots|\quad|}_{\text{r-1 barra}}$$

Temos a seguinte equação:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{r-1} + X_r = m$$

O valor de X_1 é o número de bolinhas antes da primeira barra, o valor de X_2 é o número de bolinhas depois da primeira barra e antes da segunda e, assim, sucessivamente, até o valor X_r que estará depois da barra número $r-1$. Como a cada possível distribuição das barras corresponde uma única solução para equação acima, basta contarmos de quantas formas isto pode ser feito. Devemos selecionar $r-1$ dos $m-1$ possíveis locais entre as bolinhas para a colocação das barras divisoras, o que pode ser feito da forma:

$$C_{m-1}^{r-1} \text{ maneiras diferentes.}$$

Teorema 2. O número de soluções em inteiros não negativos da equação $y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_r = m$, para $m > 0$, é dado por C_{m+r-1}^{r-1}

Demonstração do Teorema 2.

Pretende-se expressar o inteiro positivo m como soma de r inteiros não negativos, de maneira semelhante ao teorema anterior, fazendo as seguintes substituições:

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= X_1 - 1 \\
Y_2 &= X_2 - 1 \\
Y_3 &= X_3 - 1 \\
&\vdots \\
Y_r &= X_r - 1
\end{aligned}
$$

Somando tudo, temos:

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots + Y_{r-1} + Y_r = X_1 - 1 + X_2 - 1 + X_3 - 1 + \cdots + X_{r-1} + X_r = m$$

Desenvolvendo a última igualdade, temos:

$$
\begin{aligned}
&X_1 - 1 + X_2 - 1 + X_3 - 1 + \cdots + X_r - 1 = m \\
&X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_r = m + r
\end{aligned}
$$

$m + r$ bolinhas e $r - 1$ barras:

$$\overbrace{\mathbf{o\ o\ o} \cdots \ \mathbf{o\ o\ o}}^{\text{m + r bolinhas}}$$

$$\underbrace{|\quad|\quad|\cdots|\quad|}_{\text{r-1 barra}}$$

Temos a seguinte equação:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{r-1} + X_r = m + r$$

Então, temos a seguinte notação:

$$C_{m+r-1}^{r-1}$$

Conclusão do Capítulo

Na resolução da atividade 5, os grupos formados por cinco pessoas tendem a compreender melhor que existe uma pessoa, que não é um sobrinho, que levará algumas ou nenhuma bolinha para casa. Essa quinta pessoa, fará parte na divisão, como sendo o tio. Em grupos menores, de quatro pessoas por exemplo, o professor pode ajudar e exercer o papel do tio.

Com o uso das bolinhas e barras o aluno soluciona os problemas na ação, constrói hipóteses e verifica as possibilidades, sem se tornar dependente dos teoremas e nem precisar saber identificar os m's e r's das fórmulas: C_{m-1}^{r-1} para inteiros positivos ou C_{m+r-1}^{r-1} para inteiros não-positivos.

Nos exemplos desse capítulo foram apresentadas as resoluções de situações problema do número de soluções inteiras não-negativas e inteiras para equações e inequações, ou seja, Equações Lineares com Coeficientes Unitários e Inequações Lineares com Coeficientes Unitários. A mesma linha de raciocínio utilizada para solucionar problemas que envolvem a Combinação de Repetição pode ser usada com Equações Lineares com coeficientes unitários.

5 Princípio da Inclusão e da Exclusão

Serão abordadas nesse capítulo resoluções de situações problema, nas quais o Princípio da Inclusão e Exclusão será utilizado, além dos conceitos abordados nos Capítulos 1, 2, 3 e 4.

Ainda que seja possível usar, em alguns exercícios, a fórmula da Permutação Caótica, não será preciso, pois a solução será alcançada através da compreensão do que está sendo pedido em cada exercício e do uso do Princípio Multiplicativo e de Inclusão e Exclusão.

No Princípio da Inclusão e da Exclusão os conjuntos não precisam ser disjuntos, a intersecção entre eles não é necessariamente vazia e ele deve ser aplicado a fim de que o erro de contar os elementos da intersecção mais do que uma vez não seja cometido. Se A e B forem conjuntos de um conjunto universo U, conforme ilustra a figura abaixo, então podemos representar $(A \cup B)$ como a união dos seguintes três conjuntos disjuntos mutuamente $(A - B)$, $(B - A)$ e $(A \cap B)$:

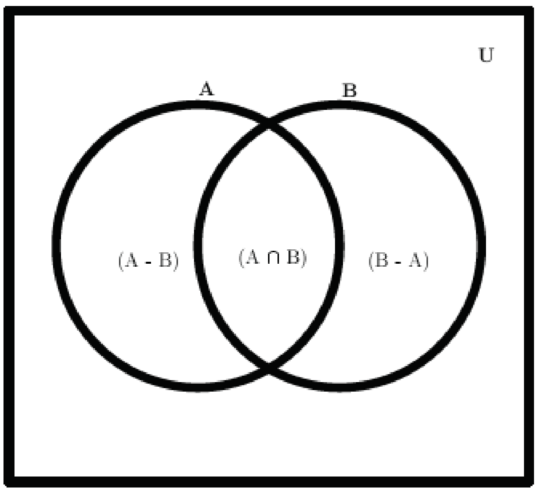


Figura 21 – Intersecção de Dois Conjuntos.

Então, a união dos conjuntos A e B seria igual à união dos conjuntos $(A - B)$, $(B - A)$ e $(A \cap B)$:

$$A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$$

Assim, o número de elementos da união dos conjuntos A e B corresponde ao número de elementos da união de três conjuntos disjuntos mutuamente, o que possibilita a construção do seguinte teorema:

Teorema 3. Teorema da Inclusão e Exclusão de Dois Conjuntos.

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer de um mesmo conjunto universo U. O número de elementos do conjunto $A \cup B$ é dado por:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Demonstração:

$$n(A \cup B) = n((A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B))$$

$$n((A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$$

Deve-se ainda saber que:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

e:

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$$

Teremos:

$$n(A \cup B) = n((A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B))$$

Consequentemente:

$$n((A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$$

Efetuando as substituições adequadas, obtemos:

$$n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B) = n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B) + n(A \cap B)$$

Equivalente:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Exemplo 5.1. Em um grupo de turistas, 8 falam inglês, 10 falam francês e 3 falam inglês e francês. Qual é o total de turistas desse grupo e quantos falam apenas inglês ou apenas francês?

Nesse problema os conjuntos não são disjuntos, pois existem 3 turistas que falam ambas as línguas. Assim, estaria errado dizer que o total de turistas é igual a 18 (resultado conquistado através da soma dos 8 turistas que falam inglês com os 10 turistas que falam francês); pois os três turistas que falam inglês e francês foram contados duas vezes (uma vez no grupo que fala inglês e outra vez no grupo que fala francês).

Dessa maneira, a solução correta seria a seguinte: Os 8 turistas que falam inglês devem ser somados com os 10 turistas que falam francês e subtraídos 3 turistas, a fim de eliminar os elementos contados duas vezes. Usando a linguagem dos conjuntos, sendo A o conjunto dos turistas que falam inglês e B o conjunto dos turistas que falam francês, teríamos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 8 + 10 - 3 = 15 \text{ maneiras.}$$

Com isso também é possível descobrir quantos desses turistas falam apenas inglês ou apenas francês. Dos 8 turistas que falam inglês, 3 também falam francês, o que significa que 5 turistas falam apenas inglês. Analogamente, dos 10 turistas que falam francês, 3 falam também inglês, o que significa que 7 falam apenas francês.

Caso fossem três conjuntos, o número de elementos da intersecção teria sido contado três vezes. Para corrigir esse excesso de contagem, seria necessário excluir as três intersecções, duas a duas, para no final somarmos a intersecção dos três conjuntos.

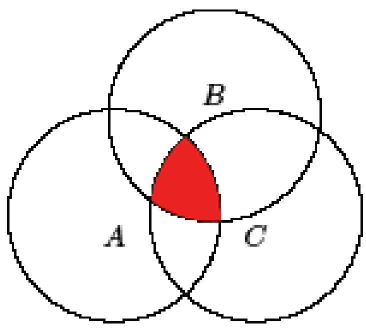


Figura 22 – Intersecção de Três Conjuntos.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Exemplo 5.2. Numa sala de aula, 14 falam inglês, 5 falam alemão e 7 falam francês. Sabendo que 3 falam inglês e alemão, 2 falam inglês e francês, 2 falam alemão e francês e que 1 fala as 3 línguas, quantos alunos têm na sala de aula?

Seja:

$$n(A) = \text{conjunto dos alunos que falam inglês} = 14;$$

$$n(B) = \text{conjunto dos alunos que falam alemão} = 5;$$

$$n(C) = \text{conjunto dos alunos que falam francês} = 7;$$

$$n(A \cap B) = \text{alunos que falam inglês e alemão} = 3;$$

$$n(A \cap C) = \text{alunos que falam inglês e francês} = 2;$$

$$n(B \cap C) = \text{alunos que falam alemão e francês} = 2;$$

$$n(A \cap B \cap C) = \text{aluno que fala inglês, alemão e francês} = 1.$$

Pelo Princípio de Inclusão e Exclusão, temos:

$$14 + 5 + 7 - 3 - 2 - 2 + 1 = 20 \text{ alunos}.$$

É possível generalizar o que foi visto entre dois ou três conjuntos para um número qualquer de conjuntos, através do seguinte teorema:

Teorema 4. Princípio da Inclusão e da Exclusão Generalizado.

O Número de elementos da união de n conjuntos finitos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, com $n \geqslant 2$, será:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} n(A_i \cap A_j) +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} n(A_i \cap A_j \cup A_k) \cdots (-1)^{n-1} n(A_i \cup A_j \cup A_k \cup A_l \cdots A_n)$$

Demonstração: A demonstração será feita através do Princípio da Indução Finita.

Base indutiva: Para $n = 2$, já foi demonstrado ao provar o Teorema da Inclusão e Exclusão de dois conjuntos.

Passo indutivo: Supondo que o teorema seja válido para $n = k$, é preciso mostrar que também é válido para $n = k + 1$, o que será feito aplicando o Teorema da Inclusão e Exclusão de dois conjuntos, tomando-os dois a dois da seguinte maneira:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{k+1}) =$$
$$n((A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cup A_{k+1}) =$$
$$n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) + n(A_{k+1}) - n((A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cap A_{k+1}) =$$
$$= \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} n(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < m \leqslant k} n(A_i \cap A_j \cap A_m) - \cdots +$$
$$(-1)^k \cdot n(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_k) - [(\sum_{1 \leqslant i \leqslant k} n(A_i \cap A_{k+1}) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} n(A_i \cap A_j \cap A_{k+1}) + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^k \cdot \sum_{1 \leqslant i < j < \cdots < m \leqslant k} n((A_i \cap A_{k+1}) \cap (A_j \cap A_{k+1}) \cap \cdots \cap (A_m \cap A_{k+1})) +$$
$$+ (-1)^{k+1} \cdot n(A_1 \cap A_{k+1})]$$

Usando a hipótese de indução, temos que: $A_1 \cap A_{k+1}, A_2 \cap A_{k+1}, \ldots, A_k \cap A_{k+1}$ então:

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant k+1} n(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k+1} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < m \leqslant k+1} n(A_i \cap A_j \cap A_m) - \cdots + (-1)^{k+2} \cdot (A_1 \cap \cdots \cap A_{k+1})$$

encerrando a demonstração.

Exemplo 5.3. Quantos são os números inteiros entre 1 e 3600 divisíveis por 3, 5 ou 7?

Os conjuntos não são disjuntos, pois existem múltiplos comuns aos números 3 e 5, 3 e 7, 5 e 7 e aos três simultaneamente, por isso o Princípio da Inclusão e Exclusão será utilizado. Seja A o conjunto dos múltiplos de 3, B o conjunto dos múltiplos de 5 e C o conjunto dos múltiplos de 7 e, considerando que os possíveis múltiplos começam em 1 e vão até 3600, para descobrir o número de múltiplos em cada um dos casos em questão, basta dividir da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} n(A) &= \frac{3600}{3} = 1200 \text{ múltiplos de 3.} \\ n(B) &= \frac{3600}{5} = 720 \text{ múltiplos de 5.} \\ n(C) &= \frac{3600}{7} = 514 \text{ múltiplos de 7.} \end{aligned}$$

Em seguida, serão calculados os números de múltiplos de dois em dois. Assim, os múltiplos de 3 e 5 são os múltiplos de $3 \cdot 5 = 15$; os múltiplos de 3 e 7 são os múltiplos de $3 \cdot 7 = 21$ e os múltiplos de 5 e 7 são os múltiplos de $5 \cdot 7 = 35$. Assim sendo, teremos:

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= \frac{3600}{15} = 240 \text{ múltiplos de 3 e 5.} \\ n(A \cap C) &= \frac{3600}{21} = 171 \text{ múltiplos de 3 e 7.} \\ n(B \cap C) &= \frac{3600}{35} = 102 \text{ múltiplos de 5 e 7.} \end{aligned}$$

Por fim, será calculado o número de múltiplos dos três números simultaneamente, ou seja, múltiplos de $3.5.7 = 105$, obtendo:

$$n(A \cap B \cap C) = \frac{3600}{105} = 34 \text{ múltiplos de 3, 5 e 7.}$$

Em seguida, pelo Princípio da Inclusão e da Exclusão, é possível obter a resposta da seguinte maneira:

$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) =$$

$$1200 + 720 + 514 - 240 - 171 - 102 + 34 = 1955 \text{ maneiras.}$$

Entre os números inteiros de 1 até 3600 existem 1955 números que são divisíveis por 3, 5 ou 7.

Agora será apresentado o Problema dos Anagramas Condicionados sem Repetição (Permutação Caótica).

Exemplo 5.4. Na palavra PRATO, quantas são as permutações em que a letra T aparece em segundo lugar ou a letra P em primeiro lugar ou a letra R em penúltimo lugar?

Esses anagramas são denominados condicionados, porque existem condições a serem obedecidas Inicialmente, vamos calcular o número de anagramas de $n(A)$, $n(B)$ e $n(C)$, lembrando que, fixada uma das letras, sobram outras quatro letras a serem permutadas:

$$n(A) = 4! = 24 \text{ anagramas com a segundo letra T;}$$

$$n(B) = 4! = 24 \text{ anagramas com a primeira letra P;}$$

$$n(C) = 4! = 24 \text{ anagramas com a penúltima letra R.}$$

Em seguida, calculamos os números dos anagramas de dois em dois conjuntos, simultaneamente. Assim, $n(A \cap B)$ é o conjunto dos anagramas com a primeira letra P e também a segunda letra T; $n(A \cap C)$ é o conjunto dos anagramas com a segunda letra T e também a penúltima letra R; $n(B \cap C)$ é o conjunto dos anagramas com a primeira letra P e também a penúltima letra R. Em todas essas situações são fixadas duas letras e sobram outras três letras a serem permutadas:

$$n(A \cap B) = 3! = 6 \text{ anagramas com a segunda letra T e a primeira letra P;}$$

Por fim, calculamos o número dos anagramas que, simultaneamente, têm a letra T aparecendo em segundo lugar, a letra P em primeiro e a letra R em penúltimo, ou seja, são fixadas as três letras e sobram outras duas letras a serem permutadas:

$n(A \cap B \cap C) = 2! =$ 2 anagramas com a letra T aparecendo em segundo lugar, a letra P em primeiro e a letra R em penúltimo.

Em seguida, pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, podemos obter a seguinte resposta:

$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) =$$

$$24 + 24 + 24 - 6 - 6 - 6 + 2 = 56 \text{ permutações.}$$

Ou seja, existem 56 anagramas com as letras de PRATO em que a letra T aparece em segundo lugar ou a letra P em primeiro ou a letra R em penúltimo.

Será apresentado um problema de Anagramas Condicionados com Repetição, no qual não é possível usar a fórmula de Permutação Caótica, mas usa-se o Príncipio de Inclusão e Exclusão.

Exemplo 5.5. Quantos são os anagramas da palavra ITALIA nos quais a letra I ocupa o primeiro lugar ou a letra T ocupa o segundo ou a letra A ocupa o último ou que começam e terminam por vogal?

Trata-se de um exemplo diferente do anterior, porque existem letras repetidas, são duas letras I's e duas letras A's. Seja A o conjunto dos anagramas em que a letra I ocupa o primeiro lugar; B o conjunto dos anagramas em que a letra T ocupa o segundo; C o conjunto dos anagramas em que a letra A ocupa o último e D o conjunto dos anagramas que começam e terminam por vogal. Note que existem diversas situações de intersecção, o que significa que será necessário o uso do Princípio da Inclusão e da Exclusão.

Começaremos contando o número de elementos do conjunto A, ou seja, anagramas em que a letra I ocupa o primeiro lugar:

$$n(A) = \frac{5!}{2!} = 60 \text{ maneiras.}$$

Vejamos, agora, o conjunto B, que corresponde ao número de casos em que a letra T ocupa o segundo lugar:

$$n(B) = \frac{5!}{2! \cdot\ 2!} = 30 \text{ maneiras.}$$

Vejamos, agora, o conjunto C, que corresponde ao número de casos em que a letra A ocupa o último lugar:

$$n(C) = \frac{5!}{2!} = 60 \text{ maneiras.}$$

Em seguida, vejamos o conjunto D, que corresponde ao número de casos em que os anagramas começam e terminam por vogal. Aqui, note que há quatro casos. No primeiro caso, o anagrama começa com a vogal I e termina com a vogal A. No segundo caso, o anagrama começa com a vogal I e também termina com vogal I. No terceiro caso, o anagrama começa com a vogal A e também termina com a vogal A. No quarto e último caso, o anagrama começa com a vogal A e termina com a vogal I. Assim sendo, temos:

$$n(D) = 4! + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + 4! = 24 + 12 + 12 + 24 = 72 \text{ maneiras.}$$

Agora, vejamos as intersecções duas a duas, que são, no total, seis casos. O primeiro desses casos será $n(A \cap B)$, que corresponde aos anagramas em que primeira letra é I e a segunda letra é T. O segundo caso será $n(A \cap C)$, correspondente aos anagramas em que a primeira letra é I e a última letra é A. O terceiro caso será $n(A \cap D)$, correspondente aos casos em que a primeira letra é I, a primeira e a última letra são vogais. O quarto caso será $n(B \cap C)$, correspondente aos casos em que a segunda letra é T e a última letra é A. O quinto caso será $n(B \cap D)$, correspondente aos casos em que a segunda letra é T, começam e terminam por vogal. O sexto e último caso será $n(C \cap D)$, correspondente aos casos que terminam com a vogal A, começam e terminam por vogal. Assim, teremos:

$$n(A \cap B) = \frac{4!}{2!} = 12 \text{ maneiras;}$$
$$n(A \cap C) = 4! = 24 \text{ maneiras;}$$
$$n(A \cap D) = \frac{4!}{2!} + 4! = 12 + 24 = 36 \text{ maneiras;}$$
$$n(B \cap C) = \frac{4!}{2!} = 12 \text{ maneiras;}$$
$$n(B \cap D) = 3! + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 3! = 6 + 3 + 3 + 6 = 18 \text{ maneiras;}$$
$$n(C \cap D) = 4! + \frac{4!}{2!} = 36 \text{ maneiras.}$$

Vejamos, agora, os casos de intersecção de três conjuntos, que são quatro casos. O primeiro desses casos será $n(A \cap B \cap C)$, que corresponde ao caso em que a letra I ocupa o primeiro lugar, a letra T ocupa o segundo e a letra A ocupa o último. O segundo será $n(A \cap B \cap D)$, que corresponde ao caso em que a letra I ocupa o primeiro lugar, a letra T ocupa o segundo, começam e terminam por vogal. O terceiro será $n(A \cap C \cap D)$, que corresponde ao caso em que a letra I ocupa o primeiro lugar, termina com a letra A, terminam e começa por vogal. E, por último, o quarto caso será $n(B \cap C \cap D)$, que corresponde ao caso em que a letra T ocupa o segundo lugar, a letra A ocupa o último e começam ou terminam por vogal. Assim, teremos:

$$n(A \cap B \cap C) = 3! = 6 \text{ maneiras;}$$
$$n(A \cap B \cap D) = \frac{3!}{2!} + 3! = 3 + 6 = 9 \text{ maneiras;}$$
$$n(A \cap C \cap D) = 4! = 24 \text{ maneiras;}$$
$$n(B \cap C \cap D) = 3! + \frac{3!}{2!} = 6 + 3 = 9 \text{ maneiras.}$$

Por fim, temos um único caso de intersecção dos quatro conjuntos, $n(A \cap B \cap C \cap D)$, que, simultaneamente, ocorrem todas as situações possíveis:

$$n(A \cap B \cap C \cap D) = 3! = 6 \text{ maneiras.}$$

Em seguida, pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, faremos:

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D)$$
$$-n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D) =$$
$$60 + 30 + 60 + 72 - 12 - 24 - 36 - 12 - 18 - 36 + 6 + 9 + 9 + 24 - 6 = 126 \text{ maneiras.}$$

Segundo o que já foi dito anteriormente, decorar as fórmulas não é garantia de conseguir solucionar todos os exercícios propostos. A seguir, será apresentado um exemplo de Permutação Circular juntamente com Princípio de Inclusão e Exclusão, não sendo possível a aplicação, de forma direta, da Permutação Caótica:

Exemplo 5.6. De quantas maneiras 3 casais podem se sentar em uma mesa redonda, de forma que o homem e a mulher de um casal não podem estar um ao lado do outro?

- Todas as maneiras sem restrição:
$$\frac{6!}{6} = 120 \text{ maneiras;}$$
- Considerando, o homem e a mulher de um determinado casal sentados um ao lado do outro: Dos três casais, um será escolhido e a mulher poderá sentar-se do lado direito ou esquerdo do seu parceiro. Logo, são duas as possibilidades de posição e restam ainda quatro pessoas para se sentarem. Estabelecendo o casal como uma unidade, são 5! maneiras de organizá-los nas cadeiras da mesa redonda (casal + 4 pessoas). Assim:
$$3 \cdot 2 \cdot \frac{5!}{5} = 144 \text{ maneiras;}$$
Seguindo o mesmo raciocínio, temos:
- Dois casais sentados juntos:
$$\frac{3 \cdot 2}{2!} \cdot 2^2 \cdot \frac{4!}{4} = 72 \text{ maneiras;}$$
- Três casais sentados juntos:
$$\frac{3!}{3!} \cdot 2^3 \cdot \frac{3!}{3} = 16 \text{ maneiras.}$$
Pelo Princípio de Inclusão e Exclusão, temos:
$$120 - 144 + 72 - 16 = 32 \text{ maneiras.}$$

Exemplo 5.7. De quantas maneiras n casais podem se sentar em uma mesa redonda, de forma que o homem e a mulher de um determinado casal não podem estar um ao lado do outro?

- Todas as maneiras sem restrição:
$$\frac{(2n)!}{(2n)} = C_n^n \cdot 2^0 \cdot \frac{(2n-0)!}{(2n-0)} \cdot (-1)^0$$
- Um casal sentado junto:
$$C_n^{n-1} \cdot 2^1 \cdot \frac{(2n-1)!}{(2n-1)} \cdot (-1)^1$$

- Dois casais sentados juntos:

$$C_n^{n-2} \cdot 2^2 \cdot \frac{(2n-2)!}{(2n-2)} \cdot (-1)^2$$

- Três casais sentados juntos:

$$C_n^{n-3} \cdot 2^3 \cdot \frac{(2n-3)!}{(2n-3)} \cdot (-1)^3$$

$$\cdots$$

- Para $n-2$ casais sentados juntos:

$$C_n^{n-(n-2)} \cdot 2^{(n-2)} \cdot \frac{(2n-(n-2))!}{(2n-(n-2))} \cdot (-1)^{(n-2)}$$

- Para $n-1$ casais sentados juntos:

$$C_n^{n-(n-1)} \cdot 2^{(n-1)} \cdot \frac{(2n-(n-1))!}{(2n-(n-1))} \cdot (-1)^{(n-1)}$$

- Para n casais sentados juntos:

$$C_n^{n-(n)} \cdot 2^{(n)} \cdot \frac{(2n-(n))!}{(2n-(n))} \cdot (-1)^{(n)}$$

Logo, temos:

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot 2^{(i)} \cdot \frac{(2n-i)!}{(2n-i)} \cdot (-1)^{(i)}$$

Onde i é o número de casais sentados juntos e n é o número total de casais informados no enunciado.

Exemplo 5.8. De quantas maneiras podemos colocar 8 torres de cor branca em um tabuleiro de xadrez? Considerando que:

a) não tenha duas torres na mesma linha ou na mesma coluna.

b) não tenha duas torres na mesma linha ou na mesma coluna e não podendo colocar nenhuma torre na diagonal branca maior.

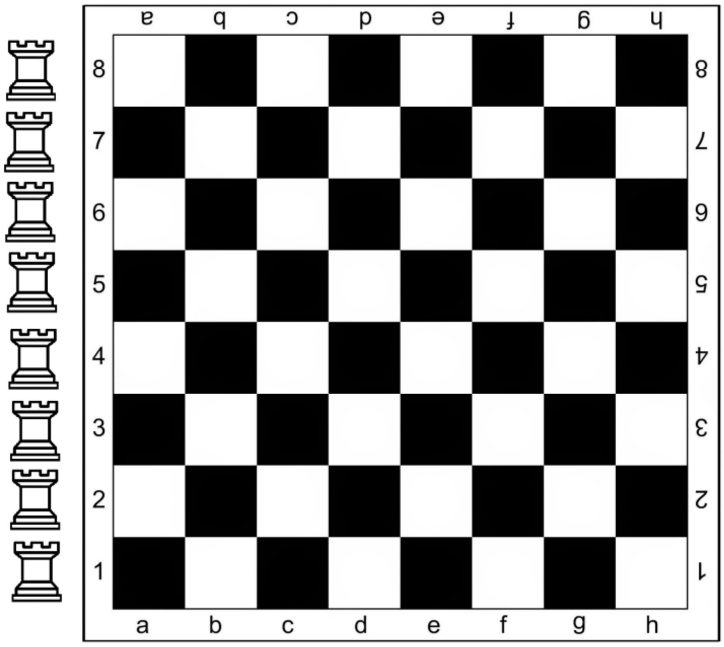


Figura 23 – Tabuleiro de Xadrez e Oito Torres

a) Colocando uma torre na primeira linha, existem 8 opções e, colocando uma torre na segunda linha, são 7 opções, já que não é possível colocar na mesma coluna em que está a torre da primeira linha. Seguindo o mesmo raciocínio, são 6 opções para terceira linha, 5 opções para quarta linha, 4 opções para quinta linha, 3 opções para sexta linha, 2 opções para sétima linha e 1 opção para oitava linha. Então, temos:

$$8! = 40320 \text{ maneiras.}$$

b)

- Todas as maneiras possíveis sem restrição:

$$8! = 40320 \text{ maneiras;}$$

- Uma torre na diagonal branca maior:

$$C_8^1 \cdot 7! = 40320 \text{ maneiras;}$$

- Duas torres na diagonal branca maior:

$$C_8^2 \cdot 6! = 20160 \text{ maneiras;}$$

- Três torres na diagonal branca maior:

$$C_8^3 \cdot 5! = 6720 \text{ maneiras;}$$

- Quatro torres na diagonal branca maior:

$$C_8^4 \cdot 4! = 1680 \text{ maneiras;}$$

- Cinco torres na diagonal branca maior:

$$C_8^5 \cdot 3! = 336 \text{ maneiras;}$$

- Seis torres na diagonal branca maior:

$$C_8^6 \cdot 2! = 56 \text{ maneiras;}$$

- Sete torres na diagonal branca maior:

$$C_8^7 \cdot 1! = 8 \text{ maneiras;}$$

- Oito torres na diagonal branca maior:

$$C_8^8 = 1 \text{ maneira.}$$

Pelo Princípio de Inclusão e Exclusão, temos:

$$40320 - 40320 + 20160 - 6720 + 1680 - 336 + 56 - 8 + 1 = 14833 \text{ maneiras.}$$

Exemplo 5.9. Em uma corrida de fórmula 1 com 10 competidores, de quantas maneiras distintas pode terminar a classificação final dos pilotos? Considerando que:

a) o piloto André está em primeiro lugar ou o piloto Bruno está em segundo lugar.

b) o piloto André não está em primeiro lugar, o piloto Bruno não está em segundo lugar e nem o piloto Caio está em terceiro lugar.

c) dada a largada da corrida, quantas são as classificações finais que têm exatamente 4 pilotos em suas posições de largada?

a) Seja:

$n(A)$ = classificações finais com o André em primeiro lugar = $9! = 362880$ maneiras;

$n(B)$ = classificações finais com o Bruno em segundo lugar = $9! = 362880$ maneiras;

$n(A \cap B)$ = André em primeiro lugar e o Bruno em segundo= $8! = 40320$ maneiras.

Pelo Princípio de Inclusão e Exclusão, temos:

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 362880 + 362880 - 40320 = 685440 \text{ maneiras.}$$

b) Seja:

$$n(T) = \text{todas as maneiras possíveis sem restrições} = 10! = 3628800 \text{ maneiras};$$

$$n(A) = \text{classificações finais com o André em primeiro lugar} = 9! = 362880 \text{ maneiras};$$

$$n(B) = \text{classificações finais com o Bruno em segundo lugar} = 9! = 362880 \text{ maneiras};$$

$$n(C) = \text{classificações finais com o Caio em terceiro lugar} = 9! = 362880 \text{ maneiras};$$

$$n(A \cap B) = 8! = 40320 \text{ maneiras};$$

$$n(A \cap C) = 8! = 40320 \text{ maneiras};$$

$$n(B \cap C) = 8! = 40320 \text{ maneiras};$$

$$n(A \cap B \cap C) = 7! = 5040 \text{ maneiras}.$$

Pelo Princípio de Inclusão e Exclusão, temos:

$$n(T) - n(A) - n(B) - n(C) + n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) =$$

$$3628800 - 362880 - 362880 - 362880 + 40320 + 40320 + 40320 - 5040 = 2656080 \text{ maneiras}.$$

c) Como não são fixados os 4 pilotos que permanecem nas posições originais, devemos escolhê-los, o que pode ser feito da seguinte forma:

$$C_{10}^{4} = 210 \text{ maneiras};$$

Em seguida, deve-se multiplicar pelo caso de terem 4 pilotos fixados:

$$n(P_4) = \text{classificações finais com 4 pilotos fixados} = 6! = 720 \text{ maneiras};$$

$$n(P_5) = \text{classificações finais com 5 pilotos fixados} = 6 \cdot 5! = 720 \text{ maneiras};$$

$$n(P_6) = \text{classificações finais com 6 pilotos fixados} = C_6^2 \cdot 4! = 360 \text{ maneiras};$$

$$n(P_7) = \text{classificações finais com 7 pilotos fixados} = C_6^3 \cdot 3! = 120 \text{ maneiras};$$

$$n(P_8) = \text{classificações finais com 8 pilotos fixados} = C_6^4 \cdot 2! = 30 \text{ maneiras};$$

$$n(P_9) = \text{classificações finais com 9 pilotos fixados} = C_6^5 \cdot 1! = 6 \text{ maneiras};$$

$$n(P_{10}) = \text{classificações finais com 10 pilotos fixados} = C_6^6 \cdot 0! = 1 \text{ maneiras}.$$

Pelo Princípio de Inclusão e Exclusão, temos:

$$720 - 720 + 360 - 120 + 30 - 6 + 1 = 265 \text{ maneiras}.$$

Então:

$$210 \cdot 265 = 55650 \text{ maneiras}.$$

Exemplo 5.10. Encontre o número de soluções em inteiros da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 13$ em que $2 \leqslant x_1 \leqslant 4$; $3 \leqslant x_2 \leqslant 6$; $4 \leqslant x_3 \leqslant 8$; com $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$.

Para isso, é preciso fazer a mudança de variáveis a fim de resolver o problema, como aprendido no Capítulo 4 de soluções de inteiros não negativos.

Considerando $y_1, y_2, y_3 \geqslant 0$, temos:

$$x_1 = y_1 + 2 \text{ com } 0 \leqslant y_1 \leqslant 2;$$

$$x_2 = y_2 + 3 \text{ com } 0 \leqslant y_2 \leqslant 3;$$

$$x_3 = y_3 + 4 \text{ com } 0 \leqslant y_3 \leqslant 4.$$

Substituindo em $x_1 + x_2 + x_3 = 19$, temos:

$$y_1 + 2 + y_2 + 3 + y_3 + 4 = 13$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 13 - 2 - 3 - 4$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 4$$

Utilizando o número total de soluções em inteiros não negativos, temos:

$$C_{m+r-1}^{r-1}$$

Neste caso, $r = 3$ e $m = 4$, então:

$$C_{4+3-1}^{3-1} = C_6^2 = 15 \text{ maneiras.}$$

Mas, na resolução anterior, foram contabilizados casos que não existem, um exemplo é $y_1 = 4$ e $y_2, y_3 = 0$, então o Princípio de Inclusão e Exclusão é utilizado para retirar os casos não desejados.

Seja:

$$n(A) = \text{número de soluções para } 3 \leqslant y_1;$$

$$n(B) = \text{número de soluções para } 4 \leqslant y_2;$$

$$n(C) = \text{número de soluções para } 5 \leqslant y_3.$$

Fazendo as substituições para $w_1, w_2, w_3 \geqslant 0$, inteiros não negativos, temos:

Para $n(A)$:

$$y_1 = w_1 + 3 \text{ com } 0 \leqslant w_1;$$

Substituindo em $y_1 + y_2 + y_3 = 4$, temos:

$$w_1 + 3 + y_2 + y_3 = 4$$

Logo:

$$w_1 + y_2 + y_3 = 1$$

Então, o número de soluções em inteiros não negativos, nesse caso, é:

$$C_{1+3-1}^{3-1} = C_3^2 = 3 \text{ maneiras.}$$

Para $n(B)$:

$$y_2 = w_2 + 3 \text{ com } 0 \leqslant w_2;$$

Substituindo em $y_1 + y_2 + y_3 = 4$, temos:

$$y_1 + w_2 + 4 + y_3 = 4$$

Logo:

$$y_1 + w_2 + y_3 = 0$$

Então, o número de soluções em inteiros não negativos, nesse caso, é:

$$C_{0+3-1}^{3-1} = C_2^2 = 1 \text{ maneiras.}$$

Para $n(C)$:

$$y_3 = w_3 + 5 \text{ com } 0 \leqslant w_3;$$

Substituindo em $y_1 + y_2 + y_3 = 4$, temos:

$$y_1 + y_2 + w_3 + 5 = 4$$

Logo:

$$y_1 + y_2 + w_3 = -1$$

Então, o número de soluções em inteiros não negativos, nesse caso, é:

$$C_{-1+3-1}^{3-1} = C_1^2 = 0 \text{ maneiras.}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, teremos:

$$n(A \cap B) = 0 \text{ maneiras;}$$

$$n(A \cap C) = 0 \text{ maneiras;}$$

$$n(B \cap C) = 0 \text{ maneiras;}$$

$$n(A \cap B \cap C) = 0 \text{ maneiras.}$$

Então, temos:

Todos os casos possíveis sem restrições $-n(A)-n(B)-n(C)+n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(B\cap C)-$

$$n(A \cap B \cap C) = 15 - 3 - 1 - 0 + 0 + 0 + 0 - 0 = 11 \text{ soluções possíveis.}$$

Como podemos ver, na Árvore de Contagem, as 11 soluções possíveis:

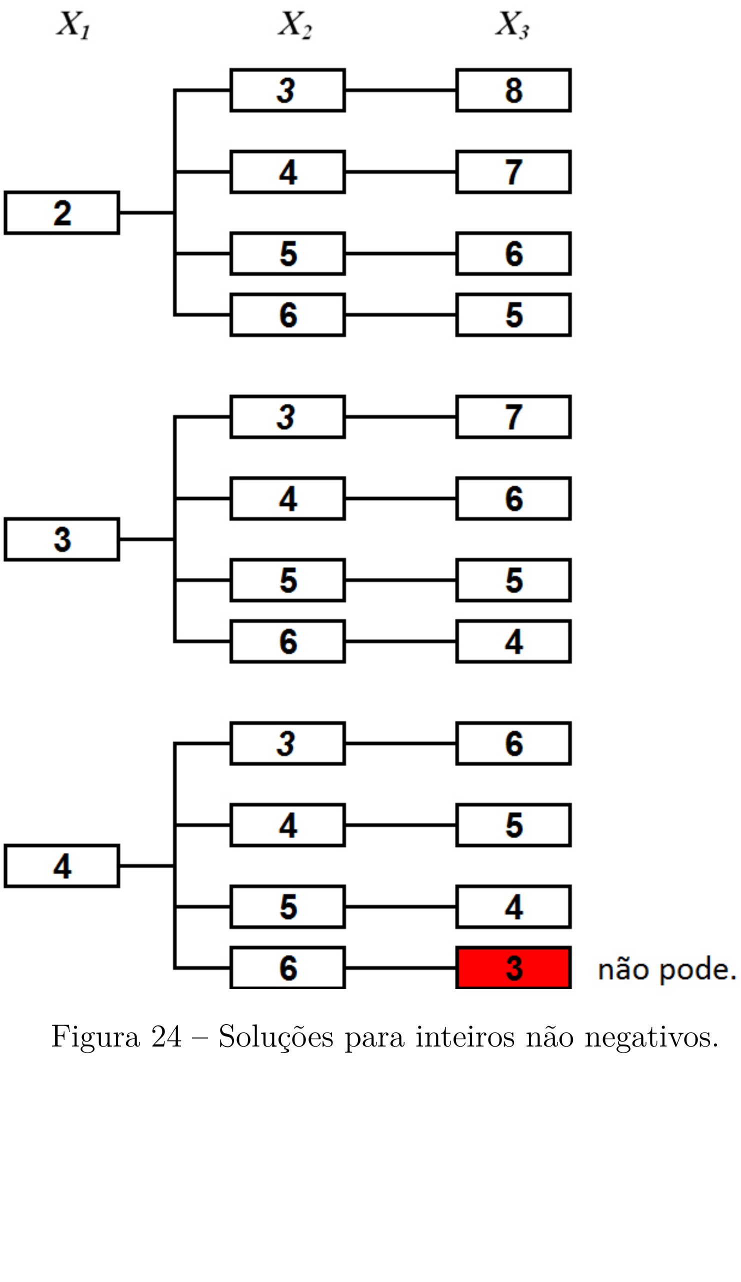


Figura 24 – Soluções para inteiros não negativos.

Exemplo 5.11. Encontre o número de soluções em inteiros da inequação $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 15$ em que $2 \leqslant x_1 \leqslant 6$; $3 \leqslant x_2 \leqslant 8$; $4 \leqslant x_3 \leqslant 6$; com $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$.

Para isso, é preciso fazer a mudança de variáveis, a fim de resolver o problema e atingir soluções de inteiros não negativos, com uma incógnita auxiliar z inteira não negativa, que representará o que falta para a inequação se tornar uma igualdade. Como aprendido na Atividade 5, do Capítulo 4, quando o tio Heitor não precisava, necessariamente, entregar todos os presentes aos seus sobrinhos.

Para $y_1, y_2, y_3, z \geqslant 0$, temos:

$$x_1 = y_1 + 2 \text{ com } 0 \leqslant y_1 \leqslant 4;$$

$$x_2 = y_2 + 3 \text{ com } 0 \leqslant y_1 \leqslant 5;$$

$$x_3 = y_3 + 4 \text{ com } 0 \leqslant y_1 \leqslant 2.$$

Substituindo em $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 15$ e adicionando a incógnita auxiliar para se tornar uma igualdade, temos:

$$y_1 + 2 + y_2 + 3 + y_3 + 4 + z = 15$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + z = 15 - 2 - 3 - 4$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + z = 6$$

Utilizando o número total de soluções em inteiros não negativos, temos, neste caso, $r = 4$ e $m = 4$, então:

$$C_{m+r-1}^{r-1} = C_{6+4-1}^{4-1} = C_9^3 = 84 \text{ maneiras.}$$

Mas, na resolução anterior, foram contabilizados casos que não existem, um exemplo é $y_3 = 6$ e $y_1, y_2, z = 0$, então o Princípio de Inclusão e Exclusão é utilizado para retirar os casos não desejados.

Seja:

$$n(A) = \text{número de soluções para } 5 \leqslant y_1;$$

$$n(B) = \text{número de soluções para } 6 \leqslant y_2;$$

$$n(C) = \text{número de soluções para } 3 \leqslant y_3.$$

Fazendo as substituições para $w_1, w_2, w_3 \geqslant 0$, inteiros não negativos, temos:

Para $n(A)$:

$$y_1 = w_1 + 5 \text{ com } 0 \leqslant w_1;$$

Substituindo em $y_1 + y_2 + y_3 + z = 6$, temos:

$$w_1 + 5 + y_2 + y_3 = 6$$

Logo:

$$w_1 + y_2 + y_3 = 1$$

Então, o número de soluções em inteiros não negativos, nesse caso, é:

$$C_{1+4-1}^{4-1} = C_4^3 = 4 \text{ maneiras.}$$

Para $n(B)$:

$$y_2 = w_2 + 6 \text{ com } 0 \leqslant w_2;$$

Substituindo em $y_1 + y_2 + y_3 + z = 6$, temos:

$$y_1 + w_2 + 6 + y_3 = 6$$

Logo:

$$y_1 + w_2 + y_3 = 0$$

Então, o número de soluções em inteiros não negativos, nesse caso, é:

$$C_{0+4-1}^{4-1} = C_3^3 = 1 \text{ maneiras.}$$

Para $n(C)$:

$$y_3 = w_3 + 3 \text{ com } 0 \leqslant w_3;$$

Substituindo em $y_1 + y_2 + y_3 + z = 6$, temos:

$$y_1 + y_2 + w_3 + 3 = 6$$

Logo:

$$y_1 + y_2 + w_3 = 3$$

Então, o número de soluções em inteiros não negativos, nesse caso, é:

$$C_{3+4-1}^{4-1} = C_6^3 = 20 \text{ maneiras.}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, teremos:

$$n(A \cap B) = 0 \text{ maneiras;}$$

$$n(A \cap C) = 0 \text{ maneiras;}$$

$$n(B \cap C) = 0 \text{ maneiras;}$$

$$n(A \cap B \cap C) = 0 \text{ maneiras.}$$

Então:

Todos os casos possíveis sem restrição $-n(A)-n(B)-n(C)+n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(B\cap C)-$

$$n(A \cap B \cap C) = 84 - 4 - 1 - 20 + 0 + 0 + 0 - 0 = 59 \text{ soluções possíveis.}$$

5. Definições Formais a partir do Princípio Multiplicativo

5.1- Definição Formal de Permutação Caótica.

Uma Permutação de $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, é chamada de Caótica quando nenhum dos a_i's se encontra na posição original, isto é, na *i-ésima* posição.

Desta forma, $a_2a_1a_5a_3a_4$ e $a_5a_4a_1a_2a_3$ são exemplos de Permutações Caóticas de a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5, enquanto $a_3a_4a_1a_2a_5$ não é, pois a_5 está em seu lugar original.

Se definirmos por A_i o conjunto das permutações de $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, tendo a_i no $i-ésimo$ lugar, para calcularmos o número de Permutações Caóticas denotados por D_n (a letra D vem da palavra desarranjo, palavra sinônima de Permutação Caótica), devemos calcular o número de elementos que não pertencem a nenhum dos A_i's, isto é, o número de elementos no complementar da união dos $A_i's$. Logo:

$$D_n = n! - \sum_{i=1}^{n} n(A_i) + \sum_{1 \leqslant i<j} n(A_i \cap A_j) - \sum_{1 \leqslant i<j<k} n(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^n n(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

Como existem n termos na primeira soma, C_n^2 termos na segunda, C_n^3 termos na terceira, $\cdots$, $C_n^n = 1$ na última, e:

$$n(A_i) = (n-1)!;$$

$$n(A_i \cap A_j) = (n-2)!;$$

$$n(A_i \cap A_j \cap A_k) = (n-3)!;$$

$$\ldots$$

$$n(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = (n-n)! = 0! = 1.$$

Temos:

$$D_n = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Conclusão do Capítulo.

Na resolução dos exercícios apresentados no Capítulo 5, optou-se por não utilizar a fórmula de Permutação Caótica. Um dos motivos é que, alguns exercícios apresentam restrições, o que impossibilita o uso da fórmula. E o outro é que, na presente dissertação, pretende-se atingir uma aprendizagem significativa e não mecânica, em que o pensamento autônomo, a criatividade e a capacidade de resolver problemas a partir de conhecimentos anteriores (nesse caso, usando os conhecimentos de Análise Combinatória e Princípio de Inclusão e Exclusão adquiridos nos exercícios realizados previamente) sejam estimulados. Como bem escreveram Santos, França e Santos (2007):

> A educação de uma nova escola exige um novo professor, alguns professores continuam cobrando memorizações que não fazem sentido para o aluno, ele simplesmente decora [...] ou seja, uma aprendizagem mecânica, fazendo destes alunos, depósitos de signos sem significados, sem relações primordiais com seu contexto. (p.37).

6 Jogo - Corrida na Cidade com Perguntas de Análise Combinatória

Segundo Regina Célia Grando (2004) o jogo matemático tem utilidade em todos os níveis de ensino como uma ferramenta que facilita o aprendizado de estruturas matemáticas. O professor deve ter, ao aplicar o jogo, objetivos claros e propor jogos desafiadores que gerem conflitos cognitivos nos alunos. Para além do caráter motivacional, o aluno deve refletir com o jogo, analisar, compreender os conceitos matemáticos envolvidos, criar hipóteses, testá-las e avaliá-las com autonomia e cooperação.

> Quando são propostas atividades com jogos para os alunos a reação mais comum é de alegria e prazer pela atividade a ser desenvolvida: "Oba! Que legal!". O interesse pelo material do jogo, pelas regras ou pelo desafio proposto envolvem o aluno, estimulando-o à ação. Esse interesse natural pelo jogo já é concebido no senso comum. Entretanto, alguns professores acreditam que, pelo fato do aluno já se sentir estimulado somente pela proposta de uma atividade com jogos e estar durante todo o jogo envolvido na ação, participando, jogando, isso garante aprendizagem. É necessário fazer mais do que simplesmente jogar um determinado jogo. O interesse está garantido pelo prazer que esta atividade lúdica proporciona, entretanto, é necessário o processo de intervenção pedagógica a fim de que o jogo possa ser útil à aprendizagem principalmente para os adolescentes e adultos. (GRANDO, 2004, p.25).

Número de jogadores: 3

Material necessário:

- 1 dado;
- 1 cronômetro;
- 1 cidade (tem um exemplo a seguir, mas os alunos podem, por exemplo, criar uma nova cidade em uma cartolina ou usar o mapa da cidade);
- 3 peões, um azul, um vermelho e um preto (podem ser usadas tampas de canetas);
- Perguntas do peão vermelho, feitas pelo jogador vermelho;
- Perguntas do peão azul, feitas pelo jogador azul;
- Perguntas do peão preto, feitas pelo jogador preto;
- Perguntas de Vestibular e do Enem, feitas pelos jogadores e/ou professor;
- Cartas bônus (abaixo seguem alguns exemplos de cartas bônus que podem ser impressas, mas, caso os alunos queiram criar novas cartas bônus, fiquem à vontade).

É aconselhável que cada peão tenha, no mínimo, 10 perguntas.

Regras:

1. Vence o jogo quem chegar ao final primeiro.
2. Cada jogador inicia o jogo com 3 cartas bônus.
3. Cada jogador lança o dado em seu turno e anda de acordo com o número sorteado no dado. O jogador deve pegar uma pergunta da mesma cor da casa em que parou, se for a cor do seu peão, não pegue nenhuma carta; se for uma casa em branco, pegue uma carta de vestibular e, se conseguir responder, ganha uma carta bônus; se for de outra cor, pegue uma carta da respectiva cor e responda, se não conseguir responder e a pessoa que fez a pergunta conseguir, volte ao lugar em que estava, se a pessoa que fez a pergunta não conseguir responder, perde uma carta bônus.
4. Cada jogador pode usar uma carta bônus por turno, em qualquer momento do turno.
5. Cada jogador tem 4 minutos para responder cada questão.

Cartas Bônus:

Manifestação no Cruzamento.

Escolha um cruzamento para ser bloqueado pelos manifestantes, o cruzamento só será liberado quando outra carta dessa for usada.

Bloqueio Policial no Cruzamento

Escolha um cruzamento para ser bloqueado pelos policiais, o cruzamento só será liberado quando outra carta dessa for usada.

Reforma na rua

Escolha uma rua para ser reformada (uma parte entre dois pontos), interditando assim a passagem. Essa carta permanece até o próximo turno do jogador que a utilizou.

Ponte Suspensa

Crie uma ponte suspensa sobre um rio, lago ou córrego, ligando dois pontos.

Pare

Escolha uma pessoa para responder uma pergunta de Vestibular, se ela errar, perde a vez de jogar.

Míssil

Se outro jogador estiver à sua frente na mesma rua, use essa carta. Esse jogador perderá um turno e responderá a uma pergunta de Vestibular, se errar, perde mais um turno.

Turbo - Velocidade em dobro

Após jogar o dado mostre essa carta e ande o dobro de casas marcadas no dado.

Ambulância na rua

Escolha uma rua, todos que estiverem nela andarão no máximo duas casas em seus respectivos turnos. Essa carta permanece até o próximo turno do jogador que a utilizou.

Engarrafamento

Escolha uma rua inteira para ficar engarrafada, quem estiver nela, perde um turno e quem for cruzá-la, é obrigado a parar no cruzamento e só voltará a andar em seu próximo turno. Essa carta permanece até o próximo turno do jogador que a utilizou.

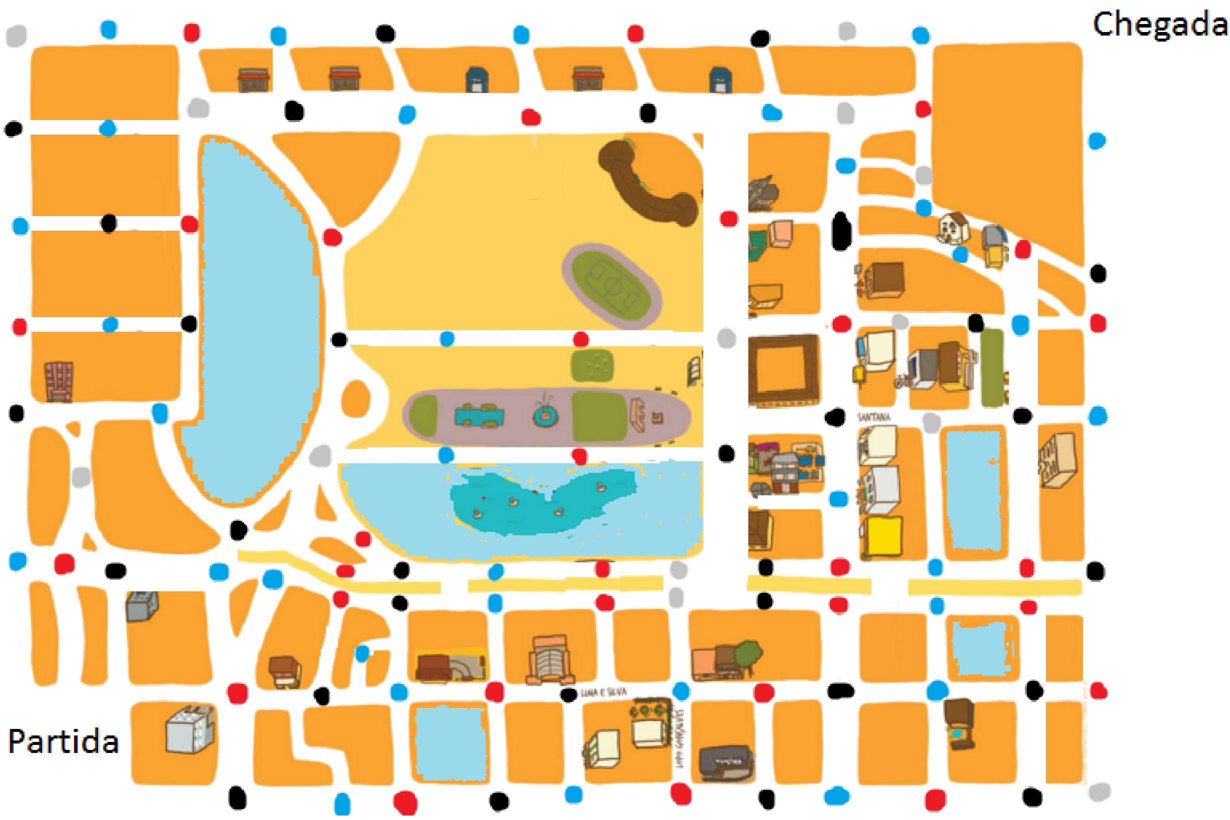
Lesma - Velocidade reduzida

Escolha um jogador para andar no máximo 2 casas em seu turno.

Criar túnel

Construa um túnel que passe pelo meio de uma quadra ligando 2 pontos.

Mapa



Reflexões realizadas após a aplicação do jogo

- Sugiro que o professor conceda um tempo para que os alunos leiam e interpretem as regras do jogo e, após isso, ele faça a leitura em voz alta retirando possíveis dúvidas. Ao longo do jogo, é interessante que o professor percorra os grupos levantando outras dúvidas geradas, ele, não necessariamente, precisa responder a todas elas, mas pode conduzir ricas discussões entre os participantes, fazendo os relacionar conhecimentos e levando os à resposta.

- Aconselho que o professor monte grupos produtivos, nos quais o critério para a escolha do agrupamento não será a afinidade entre o pares e isso pode gerar reclamações por parte dos alunos, mas o professor não deve ceder, uma vez que o objetivo é a interação cognitiva e a promoção da participação e do aprendizado para todos do grupo.

- Durante o jogo pode ocorrer conflito entre o jogador que está ganhando e o que está perdendo e o professor deve atuar como mediador a fim de que o aprendizado não seja prejudicado. É uma boa oportunidade para abordar a necessidade de respeitar o colega independente dos vínculos emocionais estabelecidos.

- Alguns jogadores, aqueles com maior dificuldade no aprendizado de matemática, tentaram evitar o uso das cartas com as perguntas e o professor teve que intervir mostrando a importância do uso delas para o alcance do aprendizado.

Conclusão do Capítulo

Segundo Eva Maria Siqueira Alves (2001), na antiguidade, como o trabalho não ocupava muito tempo, o brincar era uma ação comum para adultos e crianças e unia a população. Platão considerava que as crianças deveriam aprender matemática de maneira envolvente, por exemplo, com o jogo ao invés de através da violência e repressão. Para a igreja, os jogos eram profanos e imorais e quando ocorreu a ascensão do cristianismo, que tomou posse do império romano, a educação tornou-se rígida e disciplinadora e os jogos foram proibidos. Com a Companhia de Jesus de Ignácio de Loyola, em 1534, o jogo ganhou novamente prestígio como aliado do aprendizado. No século XVI surgiu o jogo educativo como ferramenta de aprendizado. O filósofo americano John Dewey (1859-1952) propôs o jogo no processo de ensino-aprendizagem contrário às práticas de obediência e submissão do aluno ao professor.

Historicamente e segundo autores como Kishimoto (1994), Machado (1990), Vygotsky (1991), Macedo (1993) e Kamii e DeVries (1991) o jogo é uma importante ferramenta de ensino. É através do jogo que o aluno desenvolve habilidade de resolução de problemas, constrói planos para vencer, avalia as suas jogadas e as refaz de outra forma quando necessário. O aluno se torna sujeito ativo do processo de aprendizagem. "Entre outras coisas, o jogo favorece o desenvolvimento da criatividade, do senso crítico, da participação, da competição "sadia", da observação, das várias formas de uso da linguagem e do resgate do prazer em aprender". (GRANDO, 2004, p.31).

Ainda segundo Grando (2004), durante o jogo, o professor deve participar enquanto mediador ora como observador, ou juiz, ou organizador, ou ainda, como questionador. E deve preocupar-se com o material utilizado, o tempo gasto para aplicação e os objetivos da atividade. "[...] ao assumir uma proposta de trabalho com jogos, deve assumi-la como uma opção, apoiada em uma reflexão com pressupostos metodológicos, prevista em seu plano de ensino, vinculada a uma concepção coerente com o projeto pedagógico da escola". (GRANDO, 2004, p.32).

7 Considerações Finais

O principal objetivo da presente dissertação é tratar de um dos temas do currículo de matemática do ensino básico, a Análise Combinatória, a partir de uma perspectiva distinta da tradicional. Propor que o aluno não decore a fórmula sem compreendê-la, mas que ele seja capaz de extrair os dados do problema, refletir sobre eles e apresentar uma solução. Tendo como base as experiências relatadas por diversos professores, nas quais, através da matemática tradicional apresentada com técnicas e fórmulas, o aluno se torna dependente da instrução do professor para solucionar os problemas.

Em resumo, é se afastar do modelo tradicional de ensino, que deposita no aluno passivo conhecimentos prontos e acabados através de exercícios chatos e repetitivos.

Nesse modelo de educação que deseja formar alunos investigativos e que não são meros assimiladores de conhecimentos transmitidos, o professor não perde a sua função, pelo contrário, segundo Kamii (2010),caberá a ele ajudar o aluno a organizar o seu conhecimento, propor novos desafios e ricas discussões sobre formas variadas de resolver um problema.

O jogo pode ser uma ferramenta interessante nesse processo de ensino e aprendizagem, pois envolve naturalmente o aluno de qualquer idade, mas cabe ao professor organizá-lo, estabelecer objetivos claros e intervir pedagogicamente a fim de que o aluno planeje as suas jogadas, avalie e, se for necessário, mude de estratégia e perceba os conceitos matemáticos envolvidos.

> Para se ter um corpo ágil e flexível, que esteja em forma e responda a diferentes necessidades, é preciso um programa regular de exercícios. Não é mesmo? Da mesma forma, se queremos uma mente ágil e flexível, pronta para raciocinar sobre diferentes problemas e buscar soluções variadas e adequadas a cada situação, o exercício é também fundamental. Para tanto os jogos podem ser grandes aliados. Há muitos jogos que são verdadeiras ginásticas para o cérebro. (RABIOGLIO, 2010, p.91).

Não é desejado por um fim à discussão sobre como ensinar Análise Combinatória de maneira atraente e acessível ao aluno, mas assumir que já não é possível ensiná-la como outrora e dar início a uma reflexão sobre a prática pedagógica e a didática da matemática, como bem escreveu Grando (2004), a intenção é melhorar o ensino e aproximar o aluno do objeto de conhecimento: a matemática.

Referências

[1] ALVES, E. M. S. *A ludicidade e o ensino de matemática: Uma prática possível.* Papirus, Campinas, 2001.

[2] ASSIS, O. *et al. Jogar e aprender matemática.* IBD, Campinas, FE/UNICAMP, 2010.

[3] BECKER, F. *O que é construtivismo. Série Idéias 20* (1994), 87–93.

[4] D' AMBROSIO, B. *A evolução da resolução de problemas no currículo matemático. Seminário em Resolução de Problemas* (2008). <http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos_completos/completo1.pdf>.

[5] D' AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*, 10 ed. Papirus Editora, Campinas, 2003.

[6] DANTE, L. R. *Didatica da resolução de problemas de matematica, 1a. a 5a. series: para estudantes do curso de Magisterio e professores do 1o. grau.* Ática, 2003.

[7] FELLER, W. *Introdução à Teoria das Probabilidades e Aplicações.* Editora Edgard Blucher, São Paulo, 1976.

[8] GRANDO, R. C. *O jogo e a matemática no contexto da sala de aula*, 2 ed. Paulus, São Paulo, 2008.

[9] JOHNSON, N. L., AND KOTZ, S. *Urn Models and Their Application, An Apprbach to Modern Discrete Probability Theory.* John Wiley & Sons, Canadá, 1977.

[10] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., AND MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio (Coleção do professor de matemática)*, 6 ed., vol. 2. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[11] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., AND MORGADO, A. C. *Temas e Problemas Elementares (Coleção do professor de matemática)*, 2 ed. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[12] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., AND MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio (Coleção do professor de matemática)*, 1 ed., vol. 4. SBM, Rio de Janeiro, 2010.

[13] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., AND MORGADO, A. C. *Temas e Problemas (Coleção do professor de matemática)*, 3 ed. SBM, Rio de Janeiro, 2010.

[14] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., AND MORGADO, A. C. *Temas e Problemas Elementares (Coleção PROFMAT)*, 3 ed. SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[15] MORGADO, A. C., AND CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta (Coleção PROFMAT)*, 1 ed. SBM, Rio de Janeiro, 2014.

[16] MORGADO, A. C., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., CARVALHO, B. P., AND FERNANDEZ, P. *Análise Combinatória e Probabilidade.* SBM, Rio de Janeiro, 2004.

[17] MORGADO, A. C., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., CARVALHO, B. P., AND FERNANDEZ, P. *Análise Combinatória e Probabilidade, com as soluções dos exercícios (Coleção do professor de matemática)*, 9 ed. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[18] NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar - Combinatória (Coleção do Professor de Matemática)*, 1 ed., vol. 4. SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[19] OBMEP. *Banco de Questões.* Disponível em: <http://www.obmep.org.br/banco.htm>, 18 de Janeiro de 2017.

[20] OBMEP. *Provas.* Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>, 18 de Janeiro de 2017.

[21] RIBEIRO, J. *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia. Volume 2 Ensino Médio*, 1 ed. Scipione, São Paulo, 2011.

[22] ROMANATTO, M. C. *Resolução de problemas nas aulas de Matemática. Revista Eletrônica de Educação 6*, 1 (2012), pg 309.

[23] SANTOS, J. A., FRANÇA, K. V., AND SANTOS, L. *Dificuldades na aprendizagem de Matemática.* São Paulo, 2007.

[24] SANTOS, J. P. O., AND ESTRADA, E. L. *Problemas Resolvidos de Combinatória*, 1 ed. Editora Ciência Moderna Ltda, Rio de Janeiro, 2007.

[25] SANTOS, J. P. O., MELLO, M. P., AND MURARI, I. *Introdução à Análise Combinatória*, 4 ed. Editora Ciência Moderna Ltda, Rio de Janeiro, 2007.

[26] TAVARES, C. S., AND BRITO, F. R. M. Contando a história da contagem. *Revista do Professor de Matemática 57* (2005), 33.