JAMERSON HENRIQUE DA SILVA MARQUES

ESTUDO DO QUADRADO MÁGICO COM USO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Julho, 2017

JAMERSON HENRIQUE DA SILVA MARQUES

ESTUDO DO QUADRADO MÁGICO COM USO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação submetida por Jamerson Henrique da Silva Marques como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dra. DAIANE SILVA DE FREITAS

Coorientador: Dra. FABIOLA AIUB SPEROTTO

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Julho, 2017

Colaboradores

Universidade Federal do Rio Grande
http://www.furg.br

Instituto de Matemática, Estatística e Física
http://www.imef.furg.br

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
http://www.profmat-sbm.org.br

Sociedade Brasileira de Matemática
http://www.sbm.org.br

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
http://www.capes.gov.br

Ficha catalográfica

M357e Marques, Jamerson Henrique da Silva.
Estudo do quadrado mágico com uso nos anos finais do ensino fundamental / Jamerson Henrique da Silva Marques. – 2017.
96 p.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-graduação em Matemática, Rio Grande/RS, 2017.
Orientadora: Drª. Daiane Silva de Freitas.
Coorientadora: Drª. Fabíola Aiub Sperotto.

1. Quadrado mágico 2. Matemática recreativa 3. Ensino fundamental I. Freitas, Daiane Silva de II. Sperotto, Fabíola Aiub II. Título.

CDU 51:37

Catalogação na Fonte: Bibliotecário Me. João Paulo Borges da Silveira CRB 10/2130

JAMERSON HENRIQUE DA SILVA MARQUES

ESTUDO DO QUADRADO MÁGICO COM USO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação submetida por Jamerson Henrique da Silva Marques como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, 31 de Julho de 2017:

Daiane Freitas

Dra. DAIANE SILVA DE FREITAS
(Orientador - FURG)

Fabiola Aiub Sperotto

Dra. FABIOLA AIUB SPEROTTO
(Coorientadora - FURG)

Rodrigo Soares

Dr. RODRIGO BARBOSA SOARES
(Avaliador - FURG)

Débora de Oliveira Bastos

Ma. DEBORA DE OLIVEIRA BASTOS
(Avaliadora - IFRS)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Julho, 2017

Este trabalho é dedicado à minha MÃE e a todos os "J"da minha vida e aos que amo.

Agradecimentos

Agradeço

A Mãe pelo apoio e dedicação, esta guerreira que sacrificou tudo em prol de seus filhos.

A minha família e a compreensão pelos dias e noites que estive fora e aos dias e noites que mesmo presente estava ausente.

Aos professores orientadores, Dra. DAIANE SILVA DE FREITAS e Dra. FABIOLA AIUB SPEROTTO, que sem elas não teria conseguido corrigir e terminar este trabalho.

Aos meus colegas que sempre incentivaram e trocaram conhecimento nos momentos das angustiantes avaliações.

OBRIGADO!!!

"Você tem todo o direito de tentar me ensinar das tuas coisas,
porque a vida é séria e guerra é dura, mas se eu não quiser aprender tudo,
deixe eu viver minha loucura, pois nunca criticarei a sua."
(Raul Seixas)

"Antes de ler o livro que o guru lhe deu,
você tem que escrever o seu."
(Raul Seixas)

Resumo

Este trabalho tenta salientar a importância do raciocínio lógico, seu uso na resolução de problemas e busca de soluções para o desafio do dia a dia, em especial a resolução de Quadrados Mágicos. Com várias formas de se fazer, completar ou explorar esta matemática recreativa e intrigante, propondo desafios aos alunos do ensino fundamental.

Palavras-chaves: quadrado mágico, matemática recreativa, ensino fundamental.

Abstract

This paper tries to emphasize the importance of logical reasoning, its use in solving problems and finding solutions to the day-to-day challenge, especially the resolution of Magic Squares. With several ways to do, complete or explore this recreational and intriguing mathematics, posing challenges to elementary school students.

Key-words: Magic square, recreational mathematics, fundamental teaching.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

O estudo da matemática foi movido inicialmente para resolver problemas imediatos do cotidiano, começando a se estruturar da forma como conhecemos com os gregos. Conforme Mol (MOL, 2013) o pensamento axiomático e dedutivo surge a partir de Tales de Mileto, seguindo por Pitágoras, Eudoxo, Aristóteles, Euclides e outros, na notação e organização da matemática, passando por vários processos, por matemáticos e pensadores, contribuindo para a matemática que conhecemos hoje.

Acompanhando esta evolução, sempre esteve presente alguma forma de pensamento lógico, influenciando nas criações de "charadas", desafios entre matemáticos, bem como jogos e curiosidades matemáticas. Considerando o Quadrado Mágico como um jogo de números que tem como objetivo a soma de termos e a obtenção de valores constantes, usamos as palavras de Gardner:

> Como as outras ciências, a Matemática é uma espécie de jogo cujo adversário é o universo. Os melhores matemáticos e os melhores professores de matemática são obviamente aqueles que, para além de compreenderem as regras do jogo, também sabem desfrutar o prazer do jogo. (GARDNER, 1992)

Através de jogos, desafios numéricos e brincadeiras, o professor pode tornar o ensino da matemática mais sutil e fácil. Desta forma, contribuindo para estimular a grande potencialidade que há dentro de cada aluno.

Os Quadrados Mágicos são matrizes que obedecem a uma determinada ordem, onde a sequência numérica informada precisa ser distribuída de forma a construir uma soma pré-estabelecida nas três possíveis posições: horizontal, vertical e diagonal. Ao longo dos anos, os Quadrados Mágicos vêm sendo aprimorados por interessados no assunto e podem contribuir como uma ferramenta lúdica no intuito de despertar e aprimorar o raciocínio lógico.

Sabendo da grande versatilidade dos Quadrados Mágicos, que podem abranger muitos conteúdos, em forma de atividades, vistos inclusive em alguns livros, como por exemplo Bianchini (BIANCHINI, 2008), este trabalho apresenta atividades e o relato da aplicação das mesmas usando os Quadrados Mágicos que podem ser ajustados de acordo com o nível escolar.

Estas atividades, tem como principal objetivo estimular o desenvolvimento do raciocínio lógico, incentivar o processo lúdico-pedagógico, propor desafios para oportunizar a aprendizagem do aluno e mostrar que o ensino de matemática pode ser alegre e divertido.

A proposta deste trabalho foi aplicada nos quatro anos finais do ensino fundamental, mas podem ser adaptadas e modificadas para serem aplicadas em qualquer nível abrangendo uma grande quantidade de conteúdos.

O texto foi estruturado em seis capítulos. No capítulo 1 apresentamos o Quadrado Mágico. No capítulo 2, apresentamos um pouco da história dos Quadrados Mágicos, falando de sua origem, dos principais tipos, além de curiosidades e outros formatos "mágicos". No capítulo 3, apresentamos as construções de três tipos de Quadrados Mágicos que possibilitam a construção de outros. No capítulo 4 trazemos exemplos de atividades mostrando a diversidade dos Quadrados Mágicos. No capítulo 5 são abordadas as atividades aplicadas em sala de aula e o relato de experiências. Finalizando, no capítulo 6 trazemos as conclusões deste trabalho.

Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal propor atividades com o uso do Quadrado Mágico. E além disso:

- **Objetivos Gerais**
  - Estimular o racíocinio lógico;
  - Despertar o gosto pela matemática;
  - Apresentar os Quadrados Mágicos;
  - Explorar as características do Quadrado Mágico e suas propriedades;
  - Construir Quadrados Mágicos;
  - Mostrar os conteúdos Matemáticos de uma forma diferente.
- **Objetivos Específicos**
  - Disponibilizar atividades com o uso dos Quadrados Mágicos;
  - Mostrar de uma forma diferente os conteúdos matemáticos dos anos finais do Ensino Fundamental;
  - Trabalhar com números naturais, inteiros, expressões numéricas, raízes.

1 Quadrado Mágico

Neste capítulo apresentamos a definição de Quadrado Mágico (QM), suas propriedades e vários nomes que o mesmo recebe dependendo da forma que é composto.

Um quadrado mágico nada mais é que uma matriz quadrada $n \times n$, ou seja, uma grade quadricular de n quadrinhos por n quadrinhos, composta por n^2 casas, onde a soma dos termos de cada coluna, bem como a soma dos termos de cada linha é sempre a mesma constante , chamada Constante Mágica (CM). A soma dos elementos da diagonal principal e da secundária não necessariamente resultam no mesmo número. Neste caso, as matrizes ficam conhecidas como Quadrados Mágicos Defeituosos ou Imperfeitos. Quando as duas diagonais também resultam na Constante Mágica, temos um Quadrado Mágico Perfeito.

1.1 Definição Algébrica

O QM é uma matriz quadrada $n \times n$, onde a_{ij} representam os elementos que se localizam na linha i e coluna j. Com esta configuração podemos montar infinitos Quadrados Mágicos. Como por exemplo:

$$QM = \begin{bmatrix} k & k & \cdots & k \\ k & \ddots & \vdots & k \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ k & k & \cdots & k \end{bmatrix}$$

Para cada linha, a soma dos elementos pode ser escrita como:

$$CM = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = nk.$$

ou a soma dos elementos de cada coluna como:

$$CM = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = nk.$$

com $k \in \mathbb{R}$.

Observe que, neste caso, a soma dos elementos da diagonal principal (a_{ij} tal que $i = j$) e secundária (a_{ij} tal que $i + j = n + 1$), também são $CM = nk$.

Para simplificar a escrita, usamos quando necessário a notação QM_n para representar a ordem do quadrado $n \times n$, consequentemente CM_n para a Constante Mágica.

A matriz que é formada pelos elementos a_{ij}, é denotada por QM_A:

$$QM_A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

com a_{ij} distintos e $i, j \in \{1, 2, 3, 4, ..., n\}$.

A Constante Mágica para cada linha é dada por:

$$CM_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}.$$

A Constante Mágica para cada coluna é dada por:

$$CM_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj}.$$

A Constante Mágica na diagonal principal é dada por:

$$CM_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, \quad se \quad i = j.$$

A Constante Mágica na diagonal secundária é dada por:

$$CM_n = a_{1n} + a_{2n-1} + a_{3n-2} + \cdots + a_{(n-1)2} + a_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, \quad se \quad i + j = n + 1.$$

Mas claro que o interessante é construir Quadrados Mágicos com números distintos e se possível em sequência.

1.1.1 Propriedades

Sejam QM_A, QM_B Quadrados Mágicos de ordem n com os termos a_{ij}, b_{ij}, repectivamente, CM_A, CM_B suas respectivas Constantes Mágicas e escalar $k \in \mathbb{R}$.

i) $QM_A + QM_B = QM_{A+B}$ (Adição)

Devemos provar que na soma das matrizes o resultado também é um QM, para isso a matriz resultante deve possuir uma CM. A Constante Mágica para cada linha da matriz QM_A e QM_B é dada respectivamente por:

$$CM_A = a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

$$CM_B = b_{i1} + b_{i2} + \cdots + b_{in} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}.$$

Somando termo a termo uma linha de cada QM, temos:

$$CM_A + CM_B = (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) + (b_{i1} + b_{i2} + \cdots + b_{in}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij}) = CM_{A+B}.$$

O mesmo equivale para as somas das colunas

$$CM_A = a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

$$CM_B = b_{1j} + b_{2j} + \cdots + b_{nj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}.$$

Somando termo a termo uma coluna de cada QM, temos:

$$CM_A + CM_B = (a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj}) + (b_{1j} + b_{2j} + \cdots + b_{nj}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij}) = CM_{A+B}.$$

Portanto, na soma de dois ou mais Quadrados Mágicos, $QM_A + QM_B = QM_{A+B}$ a soma de suas Constantes Mágicas se mantém, isto é:

$$CM_A + CM_B = CM_{A+B}.$$

ii) Existe um Quadrado Mágico QM_0 onde $a_{ij} = 0\ \forall a_{ij}$, com $CM = 0$, pois em cada linha, temos:

$$CM_0 = 0 + 0 + \cdots + 0 = \sum_{j=1}^{n} 0 = 0.$$

Além disso, em cada coluna:

$$CM_0 = 0 + 0 + \cdots + 0 = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0.$$

Usando a propriedade de Adição, temos

$$QM_A + QM_0 = QM_{A+0} = QM_A,$$

de onde decorre que

$$CM_{A+0} = CM_A.$$

iii) $kQM_A = QM_{kA}$ (Multiplicação por escalar)

Observe que quando multiplicamos um QM_A por uma constante ainda obtemos um QM, cuja Constante Mágica é kCM_A. De fato, para cada linha temos:

$$(ka_{i1} + ka_{i2} + \cdots + ka_{in}) = k(a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) = k\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = kCM_A$$

e o mesmo vale para cada coluna:

$$(ka_{1j} + ka_{2j} + \cdots + ka_{nj}) = k(a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj}) = k\sum_{i=1}^{n} ka_{ij} = kCM_A.$$

Observação:

- Note que existe o quadrado mágico QM_k onde cada $a_{ij} = k\ \forall i, j$ (conforme primeiro exemplo da seção 1.1), com sua Constante Mágica dada por $CM_k = nk$.
  Sendo assim, $QM_k + QM_A$ possui Constante Mágica $nk + CM_A$, pela propriedade i).
- Se permutamos duas linhas ou duas colunas, a Constante Mágica, se mantém.

1.2 Tipos de Quadrados Mágicos

Existem muitos tipos de Quadrados Mágicos, como por exemplo os pan-mágicos, ultramágicos, endiabrado, greco-latino e outros. Destacamos alguns para serem comentados no decorrer do trabalho.

1.2.1 Normal ou Puro

Chamamos de Quadrado Mágico Normal ou Puro, o quadrado formado pelos n^2 números naturais $\{1, 2, 3, 4, ..., n^2\}$. Por exemplo:

$$QM = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{cc} = & 15 \\ = & 15 \\ = & 15 \end{array} , \\ \begin{array}{ccc} = & = & = \\ 15 & 15 & 15 \end{array} \end{array} \tag{1.1}$$

note que Constante Mágica na primeira na linha $CM = 4 + 9 + 2 = 15$.

O Quadrado Mágico Puro será estudado mais detalhadamente no decorrer do trabalho, na Seção 1.3.

1.2.2 Derivado

Chamamos de Quadrado Mágico Derivado, quando obtido a partir do Quadrado Mágico Puro, onde a cada número do quadrado é somado ou subtraído uma constante, por exemplo:

$$QM = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 14 & 19 & 12 \\ 13 & 15 & 17 \\ 18 & 11 & 16 \end{bmatrix} \begin{array}{cc} = & 45 \\ = & 45 \\ = & 45 \end{array}, \\ \begin{array}{ccc} = & = & = \\ 45 & 45 & 45 \end{array} \end{array}$$

Este Quadrado Mágico Derivado é obtido a partir do Quadrado Mágico Puro 1.1, no qual foi somando 10 unidades a cada número, assim obtemos a nova Constante Mágica $CM = 15 + nk$, isto é, $CM = 15 + 3.10 = 45$, conforme mostrado na Propriedade 1.1.1.

1.2.3 Composto

É um Quadrado Mágico que pode ser dividido em outros pequenos Quadrados Mágicos. Por exemplo:

31	36	29	76	81	74	13	18	11		369
30	32	34	75	77	79	12	14	16	CM = 42	369
35	28	33	80	73	78	17	10	15		369
22	27	20	40	45	38	58	63	56		369
21	23	25	39	41	43	57	59	61	CM = 177	369
26	19	24	44	37	42	62	55	60		369
67	72	65	4	9	2	49	54	47		369
66	68	70	3	5	7	48	50	52	CM = 150	369
71	64	69	8	1	6	53	46	51		369
	CM = 204			CM = 15			CM = 150		CM = 369	
369	369	369	369	369	369	369	369	369		369

Figura 1 – Quadrado Mágico Composto.

Com este tipo de Quadrado Mágico, a partir de quadrados de ordem n, podemos construir quadrados de ordem n^2, conforme a Figura 1, são 9 Quadrados Mágicos Derivados, Seção 1.2.2, do Quadrado Mágico Puro 1.1.

Neste caso a partir do quadrado de ordem 3, foi construído um quadrado de ordem $3^2 = 9$.

1.2.4 Multimágicos

É o Quadrado Mágico, que ao invés de usar a operação adição, usamos a operação de multiplicação, onde os números de cada coluna ou linha são multiplicados de modo a formar a Constante Mágica, conhecido também como Quadrado Multiplicativo.

O exemplo a seguir foi construído com os divisores de 36: $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

$$QM = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 36 & 2 \\ 4 & 6 & 9 \\ 18 & 1 & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{cc} = & 216 \\ = & 216 \\ = & 216 \end{array} , \\ \begin{array}{ccc} = & = & = \\ 216 & 216 & 216 \end{array} \end{array}$$

veja que a Constante Mágica da primeira linha é: $CM = 3 \cdot 36 \cdot 2 = 216$.

1.3 Quadrado Mágico Puro

Nesta seção, estudaremos mais detalhadamente o Quadrado Mágico Puro (QMP), começando pela Constante Mágica (CM).

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} = CM \\ = CM \\ \vdots \\ = CM \end{array} \\ \begin{array}{cccc} = & = & & = \\ CM & CM & \cdots & CM \end{array} \end{array}$$

com $\quad a_{ij} \in \{1, 2, 3, 4, ..., n^2\} \subset \mathbb{N}$.

Somando todos os termos e separando linha por linha, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} &= a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{nn-1} + a_{nn} \\ &= \underbrace{(a_{11} + \cdots + a_{1n})}_{\text{linha 1}} + \underbrace{(a_{21} + \cdots + a_{2n})}_{\text{linha 2}} + \cdots + \underbrace{(a_{n1} + \cdots + a_{nn})}_{\text{linha n}} \\ &= \underbrace{CM + CM + \cdots + CM}_{\text{n linhas}} = nCM.\end{aligned}$$

Se considerarmos que o Quadrado Mágico Puro é relacionado com a_{ij} correspondente a um número distinto do conjunto $\{1, 2, 3, ..., n^2\}$, observamos que estes números se organizados estão em Progressão Aritmética, logo a soma de todos os elementos do Quadrado Mágico Puro pode ser calculado pela fórmula:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2},$$

considerando que o número de elementos é n^2, $a_1 = 1$ e $a_n = n^2$ obtemos a equação:

$$\frac{(1 + n^2)n^2}{2} = nCM,$$

e assim no Quadrado Mágico Puro a Constante Mágica é:

$$CM = \frac{(1 + n^2)n}{2}.$$

1.3.1 Combinações

Para cada Quadrado Mágico, temos várias combinações dependendo do tamanho da matriz, conforme a Tabela 1. Salientamos que nem toda permutação entre os elementos de um Quadrado Mágico Perfeito[1] gera outro Quadrado Mágico Perfeito. Se permutarmos os elementos de uma matrix 3×3, teremos 362.880 matrizes, mas apenas 8 são Quadrados Mágicos Perfeitos.

Tabela 1 – Quantidade de Combinações

Ordem	Quantidade
3	8
4	880
5	275.305.224
6	estima-se $1,7.10^{19}$

[1] Quadrado Mágico Perfeito, quando a soma dos elementos da diagonal principal (e secundária) também resultam na CM.

Para os Quadrados Mágicos de ordem 3, obtidos com a rotação, reflexão e permutação dos números, existem oito combinações, conforme Figura 2:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2	7	6
9	5	1
4	3	8

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	3	4
1	5	9
6	7	2

2	9	4
7	5	3
6	1	8

6	7	2
1	5	9
8	3	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Figura 2 – Quadrados Mágicos 3×3.

Fonte: http://www.math.wichita.edu/ richardson/mathematics/magic%20squares/order3magicsquare.html

2 História

Neste capítulo apresentamos um pouco da história do Quadrado Mágico, que pode ser visto em livros que abordam a História da Matemática, como por exemplo, em Boyer (BOYER, 1996), Eves (EVES, 1997), Contador (CONTADOR, 2008). Estes livros descrevem que a civilização chinesa desenvolveu-se desde o 3º milênio a.C., ao longo das margens do Rio Amarelo e do Rio Azul, na dinastia Hsia, iniciada pelo Imperador Yu, a qual teve continuidade com a dinastia Shang, por volta de 1500 a.C., que ocupou a região de Shangai. São desta dinastia os primeiros numerais chineses inscritos sobre carapaças de tartarugas e ossos de animais, usados para adivinhações. Por volta de 700 a.C. até aproximadamente 400 a.C. surgiu o primeiro texto sobre matemática, CHOU PEI SUAN CHING, com propriedades do triângulo retângulo, demonstração geométrica e cálculo aritmético.

Na dinastia Han (200 a.C. a 220 d.C.) foi compilado o CHIU CHANG SUAN SHU (Os nove capítulos da arte da matemática) com 246 problemas. No texto de SHU SHU CHI YI, encontramos a primeira abordagem sobre os Quadrados Mágicos, na dinastia do Imperador Yu, por volta de 2200 a.C., quando observava uma tartaruga, Figura 3, na margem do Rio Amarelo e recebeu o nome de Lo-shu.

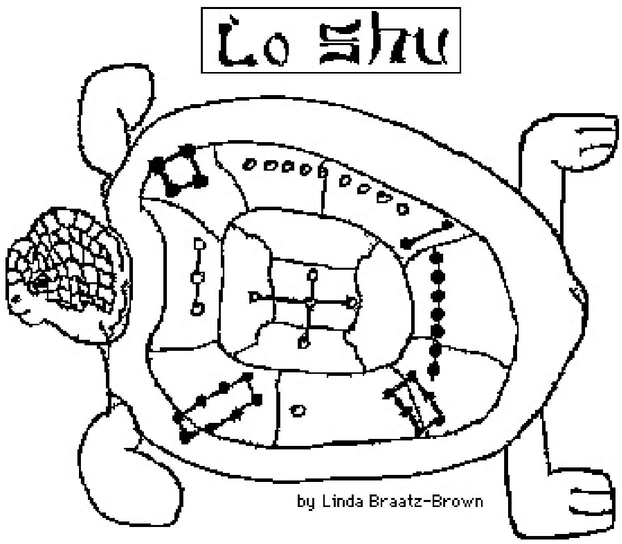


Figura 3 – LO SHU.

Fonte: http://mathforum.org/alejandre/magic.square/loshu.html

2.1 O oráculo lo-shu

Para os chineses, desde a antiguidade a tartaruga representa a longevidade, os números de 1 a 9, formam todo o conhecimento, cada número é uma etapa de um caminho espiritual com seu próprio significado. O número 5 que está localizado no centro representa o eixo, o número 1 a água, o princípio de tudo, o número 9 é o fogo, os números 3 e 4 são madeira, o 6 e 7 metal, 2 e 8 a terra, conforme a Figura 4 e a Tabela 2.

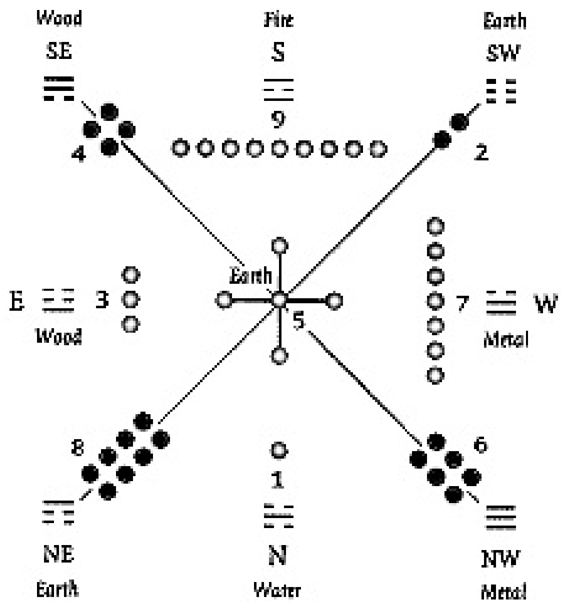


Figura 4 – Os Elementos.

Fonte: http://www.kheper.net/topics/eastern/Chinese_ cosmology.html

Os Números ímpares, representam o masculino (Yang), os pares, o feminino (Yin). Estes números, em alguns lugares, são chamados de astronomia das nove estrelas pois refletem a posição de Vegas, Polaris e as sete estrelas da Ursa Maior.

Tabela 2 – Elementos, Posição e Astronomia

Número	Elemento	Tempo	Posição	Astronomia
1	Água	Inverno	Norte	Mercúrio
2	Terra	Verão	Sudoeste	Lua
3	Madeira	Primavera	Leste	Júpiter
4	Madeira	Primavera	Sudeste	Eclipse
5	Terra	Neutro	Centro	Saturno
6	Metal	Outono	Noroeste	Eclipse
7	Metal	Outono	Oeste	Vênus
8	Terra	Inverno	Nordeste	Sol
9	Fogo	Verão	Sul	Marte

O Quadrado Mágico tem profundas ligações com o I CHING (livro das mutações), sendo usado como oráculo (Tabela 3), em horóscopo, tarô, númerologia, baguá (Figura 5) e astronomia, entre outros.

Tabela 3 – I CHING

Número	I CHING	Sorte (Baguá)	Cor
1	Água	Carreira	Preto
2	Terra	Relacionamento	Rosa
3	Trovão	Família	Verde
4	Vento	Riqueza	Roxo
5	Yin Yang	Saúde	Amarelo
6	Céu	Viagens	Cinza
7	Lago	Crianças	Branco
8	Montanha	Evolução	Azul
9	Fogo	Reconhecimento	Vermelho

Figura 5 – Baguá.

Fonte: Roserley Macedo

Os chineses acreditavam que se possuíssem um Quadrado Mágico teriam sorte e felicidade para toda vida, talvez por isto, muitas mandalas envolvam algum tipo de Quadrado Mágico.

Heinrich Cornelius Agrippa von Netteshein estudou sobre o sobrenatural e magias, criando uma relação entre os Quadrados Mágicos, os planetas e os metais, confeccionando amuletos conforme Tabela 4.

Tabela 4 – Quadrados Mágicos e Planetas

Quadrado Mágico	Constante	Total	Feito em	Planeta
3 x 3	15	45	chumbo	Saturno
4 x 4	34	136	estanho	Júpiter
5 x 5	65	325	ferro	Marte
6 x 6	111	666	ouro	Sol
7 x 7	175	1225	cobre	Vênus
8 x 8	260	2080	liga de prata	Mercúrio
9 x 9	369	3321	prata	Lua

Como a música e a matemática estão ligadas, em Fauvel (FAUVEL; WILSON, 2006), é explicada esta relação, onde o Quadrado Mágico greco-latino, aparece em *"A Mirror of Whifening Light"* (Sir Peter Maxwell) e no trabalho de Roberts (ROBERTS, 2015).

O Quadrado Mágico em outros formatos e até com outros significados aparecem em diversas áreas, mexem com a curiosidade humana e ainda hoje trazem grandes mistérios.

2.2 Quadrados Mágicos Famosos

Conforme (LOPES, 2012), muitas personalidades e célebres matemáticos estudaram e construíram os mais variados tipos de Quadrados Mágicos, como Bernard Frénicle de Bessy (1602-1675), Cleude-Gaspar Bachet(1581-1638), Pierre de Fermat (1601-1665) e Leonhard Euler (1707-1783), Albrecht Dürer, Benjamin Franklin, La Loubère, Philipe de la Hire, entre outros.

A seguir destacamos alguns destes Quadrados Mágicos.

2.2.1 Quadrado de Dürer

No trabalho do pintor Albertcht Dürer (1471-1528), notamos a influência da matemática com a proporção em sua gravura (Adão e Eva), expressando suas teorias no livro "The Four Books on Human Proprotions- 1528.

Em 1514 pinta o quadro "Melancolia", Figura 6, onde aparece o QM_4 com $CM_4 = 34$, observe que aparece no quadro o ano da pintura.

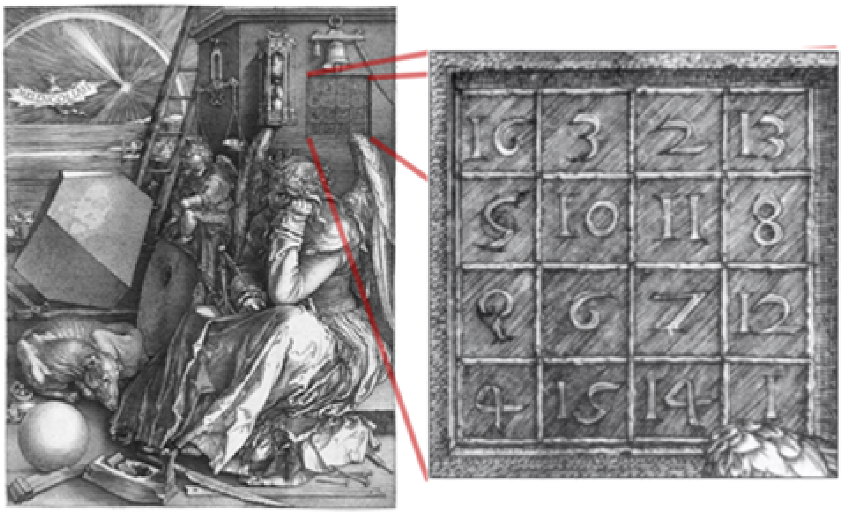


Figura 6 – Melancolia.

Fonte: http://maismat.blogspot.com.br/2013/07/quadrados-magicos.html

2.2.2 Tabuleiro de Euler

Em um tabuleiro de xadrez, Leonhard Euler (1707 - 1783) propõe com o movimento do cavalo "L", montar o Quadrado Mágico da Figura 7, com $CM = 260$. Tempos depois, na tentativa de resolver este desafio, foram feitos muitos estudos na área de grafos.

	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

Figura 7 – Passeio do Cavalo.

2.2.3 Pitagórico

Existe mais de uma versão do Quadrado Pitagórico, tanto para a demonstração ou interpretação do teorema de Pitágoras. Analisaremos o exemplo de Heath (HEATH, 1953) que mostra esta curiosa forma de interpretar o teorema de Pitágoras usando Quadrados Mágicos de ordem 3, 4 e 5 (terno pitagórico).

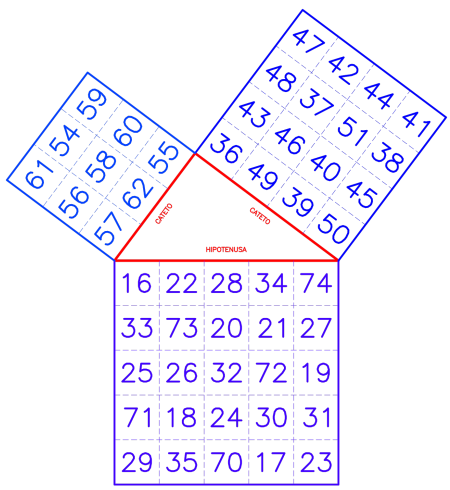


Figura 8 – Quadrado Pitagórico.

Fonte: http://mathluiz.blogspot.com.br/2014/10/o-quadrado-magico-da-hipotenusa-de-um.htm

Observe na Figura 8 que os números não se repetem e há quase uma sequência de números, mas com alguns ajustes, pois no QM_5 da hipotenusa figuram os números de 16 até 35 e depois do 70 ao 74 (25 números e duas sequências), entretanto os Quadrados Mágicos dos catetos são Quadrados Mágicos Derivados Perfeitos [1], seção 1.2.2, onde QM_4 começa no 36 e vai até 51 (16 números em sequência), já o QM_3 é do 54 até 62 (9 números em sequência) todos os três com $CM = 174$.

Heath associou, não por coincidência, esses quadrados mágicos com o Teorema de Pitágoras que poderíamos enunciar da seguinte forma:

"Catetos (soma dos números) ao quadrado somados é igual (soma dos números) ao quadrado da hipotenusa."

Observe que a soma de todos os números do QM_3 é igual a 522; a soma de todos os números do QM_4 é igual a 696, correspondentes aos catetos e por fim, a soma de todos os números do QM_5 é igual a 870, associado a hipotenusa. Ora estes números satisfazem ao Teorema de Pitágoras, onde:

$$522^2 + 696^2 = 870^2.$$

[1] Quadrado Mágico Derivado Perfeito. Derivado quando a sequência não inicia no um. Perfeito quando as diagonais também resultam da CM.

2.2.4 Primos

Com os 9 primeiros números primos $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$ não é possível preencher um QM_3, essencialmente por causa do 2, por ser o único par.

$$QM = \begin{bmatrix} ímpar & ímpar & ímpar \\ ímpar & par & ímpar \\ ímpar & ímpar & ímpar \end{bmatrix} \begin{matrix} = & ímpar \\ = & par \\ = & ímpar \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} = & = & = \\ ímpar & par & ímpar \end{matrix}$$

veja que sempre obteremos uma linha ou coluna, uma par e outra ímpar.

Podemos retirar o 2 e construir com os demais $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}$ veja o exemplo:

$$QM = \begin{bmatrix} 43 & 61 & 7 \\ 1 & 37 & 73 \\ 67 & 13 & 31 \end{bmatrix},$$

com $CM = 111$, ou ainda:

$$QM = \begin{bmatrix} 3 & 61 & 19 & 37 \\ 43 & 31 & 5 & 41 \\ 7 & 11 & 73 & 29 \\ 67 & 17 & 23 & 13 \end{bmatrix},$$

com $CM = 120$.

2.2.5 Sudoku

Tendo origem a partir dos quadrados latinos de Leonhard Euler (ORIHUELA, 2016), no século XVIII, levado para o Japão onde era denominado *"suji wa dokushini ni kagiru"* (os números têm que ser únicos) ou SUDOKU como ficou popularizado.

O SUDOKU consiste de 9 matrizes 3×3, formando uma matriz 9×9, o qual deve ser preenchido com números de 1 a 9, onde cada número só pode aparecer uma vez em cada linha, coluna e matriz 3×3. Na, Figura 9, é um exemplo que nos permite ter uma ideia de como funciona.

Existe uma construção de Quadrados Mágicos a partir de quadrados greco-latinos, muito bem exposta em (CAHú, 2013), no qual são definidos as construções, as regras e demonstrações, bem com uma proposta didática.

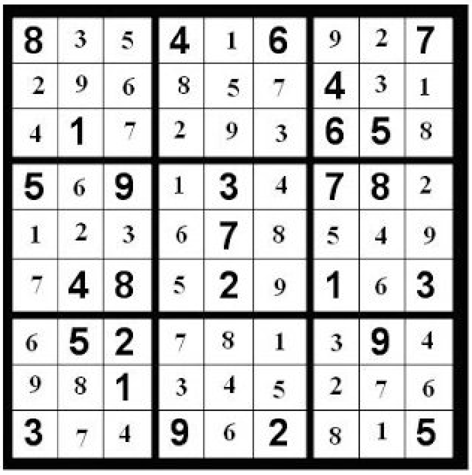


Figura 9 – SUDOKU

Fonte: Ricardo Mendes.

2.3 Formatos Mágicos

Nesta seção apresentamos outros tipos de formatos de "Quadrados Mágicos", considerando que basta somarmos os números em diferentes direções e obtermos o mesmo resultado, para que tenhamos algo "mágico".

Por exemplo, no primeiro triângulo da Figura 10, somando os números que estão em sua base obtemos ($CM = 2 + 4 + 3 = 9$) que é o mesmo resultado que obtido ao somarmos os números que estão em seus lados ($CM = 1+6+2 = 9$), ($CM = 1+5+3 = 9$).

As figuras "mágicas"são muito diversificadas. Apresentaremos algumas destas para que tenhamos uma ideia mais geral.

2.3.1 Triângulos Mágicos

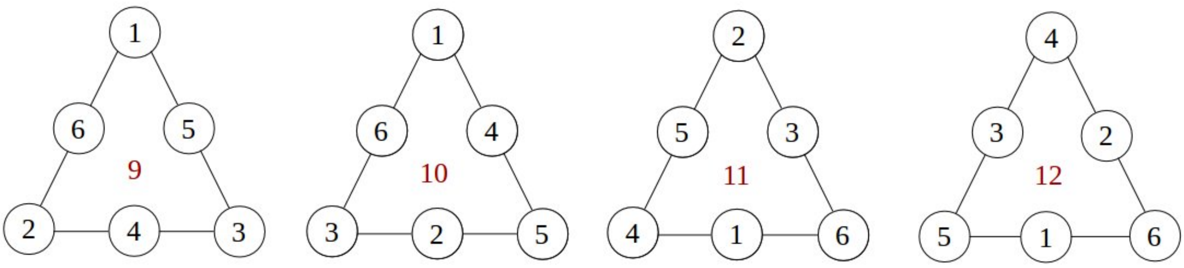


Figura 10 – Triângulos.

Na Figura 10 observamos outros Triângulos Mágicos formados com os mesmos números em posições diferentes, e assim a soma das linhas resultam em 9, 10, 11, 12.

2.3.2 Hexágonos Mágicos

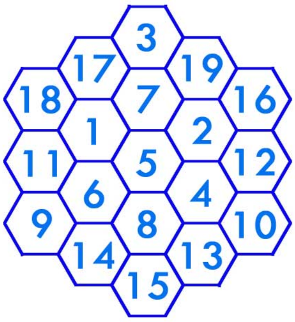


Figura 11 – Hexágonos.

Fonte: https://matemelga.worpress.com/2015/10/01el-hexagono-magico/

São 19 pequenos hexágonos formando um hexágono maior, Figura 11, usando os números de 1 a 19, também podemos calcular a CM, que neste caso é 38. Podem ser vistos hexágonos maiores em (WORDPRESS, 2015) onde comenta-se que já existiam jogos com este formato em 1887, feito por Ernst Von Haselberg.

2.3.3 Estrela Mágica

Podendo ter 5, 6, 7, 8 pontas, como por exemplo na Figura 12, com números nas pontas e nos encontros das interseções .

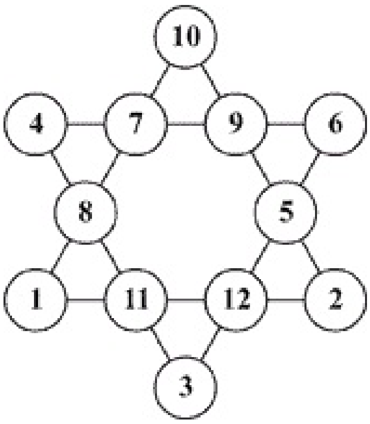


Figura 12 – Estrela de Davi.

Fonte: http://introduccionalsimbolismo.com/portugues/modulo3i.htm

Usada também como talismã onde a CM é 26.

3 Construções

Neste capítulo são apresentadas algumas formas de construção dos Quadrados Mágicos, uma vez que existem várias maneiras de construirmos, principalmente se considerarmos os Quadrados Mágicos de ordem maior, os quais podem ser obtidos através de tentativas e erros, movimentos pré definidos (cavalo do xadrez), tornando o Quadrado Mágico maleável com certas regras como por exemple o Passo Uniforme.

Agora, vamos expor alguns métodos que podem ser úteis na construção de Quadrados Mágicos, especialmente os Quadrados Mágicos Puros.

3.1 Passo Uniforme

Nesta primeira construção iremos expor de forma simples e direta as ideias de Lehmer (LEHMER, 1929) e Apostol (APOSTOL; ZUCKERMAN, 1951) sobre congruências lineares de duas variavéis $\pmod n$ e o método do Passo Uniforme, com 6 números escolhidos pelo construtor do Quadrado Mágico, seguindo algumas regras para garantir o bom desempenho do método e o preenchimento completo do mesmo.

Os Quadrados Mágicos deste trabalho podem parecer diferentes, no entanto para manter o sistema de matrizes não serão definidas as coordenadas cartesianas como em (ICHIHARA, 2014), (ICHIHARA; ABREU, 2015), usaremos a notação MPU para fazermos referência ao Método do Passo Uniforme.

Primeiro definiremos as constantes, para tentar facilitar usaremos outras notações para melhor identificá -las, onde (L, C) representa a posição inicial na Linha e Coluna da "matriz"do QM, com $L, C \leq n$.

Segundo, denominamos P_i para o "passo"da linha e P_j o "passo"da coluna, que define o preenchimento do Quadrado Mágico, ainda temos Q_i e Q_j que denotamos "Quebra do Passo"para evitar a sobreposição de números.

Como demonstrado em (ICHIHARA, 2014), o MPU serve para Quadrados Mágicos de ordem ímpar onde temos que distribuir a sequência $1, 2, 3, \cdots, n^2$ da seguinte forma:

- O número 1 começa na posição (L, C), no primeiro passo, o número 2 fica na posição $(L+P_i, C+P_j)$, o número 3 fica na posição $(L+2P_i, C+2P_j)$, a assim sucessivamente até n na posição $(L + (n-1)P_i, C + (n-1)P_j)$, onde ocorre que o número $n+1$ no $(L + nP_i, C + nP_j) \pmod n$ volta à (L, P), entram em cena os Q_i e Q_j que representam a Quebra do Passo.

- Posicionando o número $n+1$ em um novo local $(L+Q_i, C+Q_j)$, para evitar sobreposição de números, continuando com $n+2$, $n+3$, $n+4$ para $(L+P_i+Q_i, C+P_j+Q_j)$, $(L+2P_i+Q_i, C+2P_j+Q_j)$, $(L+3P_i+Q_i, C+3P_j+Q_j)$ até chegarmos a $2n+1$ onde $(L+2nP_i+Q_i, C+2nP_j+Q_j) \pmod{n}$ recai em $(L+Q_i, C+Q_j)$. Logo é necessário outra Quebra $(L+2Q_i, C+2Q_j)$ e podemos reposicionar os demais $2n+2$, $2n+3$, $2n+4$ nas casas repectivamente $(L+P_i+2Q_i, C+P_j+2Q_j)$, $(L+2P_i+2Q_i, C+2P_j+2Q_j)$, $(L+3P_i+2Q_i, C+3P_j+2Q_j)$, repetindo o processo até n^2.

- De um modo mais geral, para localizar qualquer número $x \in \{1, 2, 3, \cdots, n^2\}$ podemos usar as seguintes fórmulas onde L_x e C_x representam a Linha e a Coluna onde deve estar o número x.

$$L_x = L + P_i(x-1) + Q_i\left[\frac{x-1}{n}\right] \pmod{n} \tag{3.1}$$

$$C_x = C + P_j(x-1) + Q_j\left[\frac{x-1}{n}\right] \pmod{n}, \tag{3.2}$$

onde $\left[\frac{x-1}{n}\right]$ representa somente a parte inteira da divisão.

- Sejam $P_i, P_j, Q_i, Q_j \in \mathbb{Z}$, escolhidos de forma que $mdc(P_iQ_j - P_jQ_i, n) = 1$, para garantir o preenchimento de todo o Quadrado e fazer com que estes sejam primos com n para que o quadrado seja Mágico. Os resultados que garantem a existência e as condições necessárias para que tenhamos um Quadrado Mágico podem ser vistas com detalhes no trabalho de Ichihara (ICHIHARA, 2014).

3.1.1 Construção MPU

Para exemplificar o Método do Passo Uniforme usaremos um exemplo do trabalho de (STEPHENS, 1993) que é um QM_5 com as seguintes constantes:

$$(L, C) = \left(\frac{(n+1)}{2}, \frac{(n+1)}{2}\right) = (3, 3),$$

que é o centro do QM. Considerando a notação matricial, os outros parâmetros serão $P_i = -1$, $P_j = 3$ para definir o "passo"e $Q_i = 3$, $Q_j = 4$ para a "Quebra".

Usando as fórmulas 3.1 e 3.2 para indicar a posição L_x e C_x , onde $\left[\frac{x-1}{n}\right]$ representa somente a parte inteira da divisão.

Nos números $x = 1$ a "Quebra"é dada $\left[\frac{1-1}{5}\right] = 0$, seguindo desta forma até $x = 5$, onde a "Quebra"é dada por $\left[\frac{5-1}{5}\right] = 0$, logo a posição não é alterada.

Tabela 5 – MPU: números 1-5

x	(L_x, C_x)	$P_i = -1, P_j = 3$	Posição	(mod 5)
1	(L, C)	$(3, 3)$	$(3, 3)$	$(3, 3)$
2	$(L + 1P_i, C + 1P_j)$	$(3 + 1(-1), 3 + 1.3)$	$(2, 6)$	$(2, 1)$
3	$(L + 2P_i, C + 2P_j)$	$(3 + 2(-1), 3 + 2.3)$	$(1, 9)$	$(1, 4)$
4	$(L + 3P_i, C + 3P_j)$	$(3 + 3(-1), 3 + 3.3)$	$(0, 12)$	$(5, 2)$
5	$(L + 4P_i, C + 4P_j)$	$(3 + 4(-1), 3 + 4.3)$	$(-1, 15)$	$(4, 5)$
6	$(L + 5P_i, C + 5P_j)$	$(3 + 5(-1), 3 + 5.3)$	$(-2, 18)$	$(3, 3)$

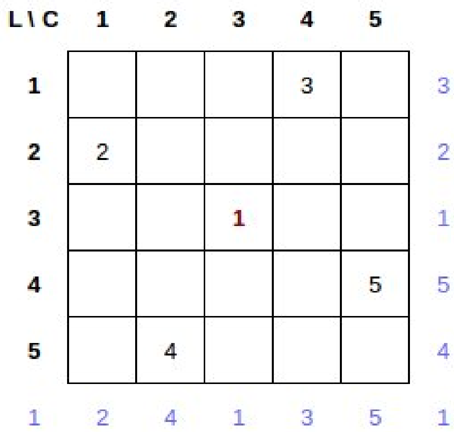


Figura 13 – MPU: números 1-5

Fica claro, na Tabela 5, que o número 6 repete a posição (3,3), como citado anteriormente.

Para os números $x = 6$ até 10 a "Quebra"é dada por: $\left[\frac{6-1}{5}\right] = 1$ até $\left[\frac{10-1}{5}\right] = 1$, logo acontece a primeira "Quebra".

Tabela 6 – MPU: números 6-11

x	$P_i = -1$,$P_j = 3$ e $Q_i = 3$,$Q_j = 4$	Posição	(mod 5)
6	$(3+5(-1)+1.3, 3+5.3+1.4)$	$(1,22)$	$(1,2)$
7	$(3+6(-1)+1.3, 3+6.3+1.4)$	$(0,25)$	$(5,5)$
8	$(3+7(-1)+1.3, 3+7.3+1.4)$	$(-1,28)$	$(4,3)$
9	$(3+8(-1)+1.3, 3+8.3+1.4)$	$(-2,31)$	$(3,1)$
10	$(3+9(-1)+1.3, 3+9.3+1.4)$	$(-3,34)$	$(2,4)$
11	$(3+10(-1)+1.3, 3+10.3+1.4)$	$(-4,37)$	$(1,2)$

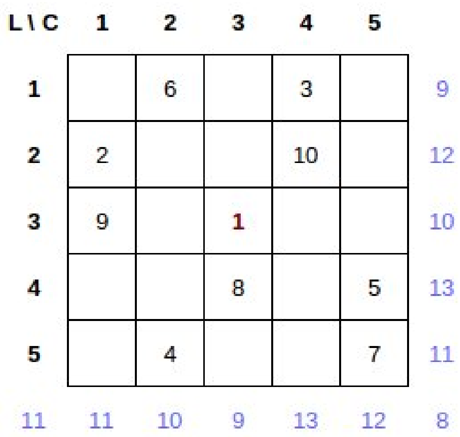


Figura 14 – MPU: números 6-10

Observe, na Tabela 6, que o número 11 repete a posição (1,2), que já está ocupado pelo 6, sendo assim precisamos de uma nova "Quebra".

Nos números $x = 11$ até 16 a "Quebra"é dada por $\left[\frac{11-1}{5}\right] = 2$ até $\left[\frac{16-1}{5}\right] = 2$, logo ocorre a segunda "Quebra". Seguindo desta forma para os números de 17 a 25 e fazendo as "Quebras"necessárias, obtemos a Tabela 7.

Tabela 7 – MPU números 11-25

x	$P_i = -1, P_j = 3$ e $Q_i = 3, Q_j = 4$	Posição	(mod 5)
11	$(3 + 10(-1) + 2.3, 3 + 10.3 + 2.4)$	$(-1, 41)$	$(4, 1)$
12	$(3 + 11(-1) + 2.3, 3 + 11.3 + 2.4)$	$(-2, 44)$	$(3, 4)$
13	$(3 + 12(-1) + 2.3, 3 + 12.3 + 2.4)$	$(-3, 47)$	$(2, 2)$
14	$(3 + 13(-1) + 2.3, 3 + 13.3 + 2.4)$	$(-4, 50)$	$(1, 5)$
15	$(3 + 14(-1) + 2.3, 3 + 14.3 + 2.4)$	$(-5, 53)$	$(5, 3)$
16	$(3 + 15(-1) + 3.3, 3 + 15.3 + 3.4)$	$(-3, 60)$	$(2, 0)$
17	$(3 + 16(-1) + 3.3, 3 + 16.3 + 3.4)$	$(-4, 63)$	$(1, 3)$
18	$(3 + 17(-1) + 3.3, 3 + 17.3 + 3.4)$	$(-5, 66)$	$(0, 1)$
19	$(3 + 18(-1) + 3.3, 3 + 18.3 + 3.4)$	$(-6, 69)$	$(4, 4)$
20	$(3 + 19(-1) + 3.3, 3 + 19.3 + 3.4)$	$(-7, 72)$	$(3, 2)$
21	$(3 + 20(-1) + 4.3, 3 + 20.3 + 4.4)$	$(-5, 79)$	$(0, 4)$
22	$(3 + 21(-1) + 4.3, 3 + 21.3 + 4.4)$	$(-6, 82)$	$(4, 2)$
23	$(3 + 22(-1) + 4.3, 3 + 22.3 + 4.4)$	$(-7, 85)$	$(3, 0)$
24	$(3 + 23(-1) + 4.3, 3 + 23.3 + 4.4)$	$(-8, 88)$	$(2, 3)$
25	$(3 + 24(-1) + 4.3, 3 + 24.3 + 4.4)$	$(-9, 91)$	$(1, 1)$

O Quadrado Mágico, agora completamente preenchido, da Figura 15 com $CM_5 = 65$, conforme (STEPHENS, 1993), era muito usado nos séculos XVI e XVII pelos Mulçumanos Medievais, por acreditarem ter poderes maravilhosos, principalmente por ser o número 1 a origem (ou DEUS) como centro de tudo.

L \ C	1	2	3	4	5	
1	25	6	17	3	14	65
2	2	13	24	10	16	65
3	9	20	1	12	23	65
4	11	22	8	19	5	65
5	18	4	15	21	7	65
65	65	65	65	65	65	65

Figura 15 – Quadrado Mágico GOD.

3.2 Método de Loubère

Este método serve para qualquer ordem ímpar, quando $n \geq 3$ este pode ser visto como um caso particular do Método Passo Uniforme. Se necessário usaremos a abreviatura ML para fazer referência a este método.

O Quadrado Mágico Lo Shu, relacionado nas Figuras 3, 4, 20, tem a mesma estrutura resultante do ML, por isso usaremos esse QM como exemplo.

Vamos seguir os seguintes passos para a construção de um Quadrado Mágico:

- Passo 1: Colocar o número 1 na casa central inferior.

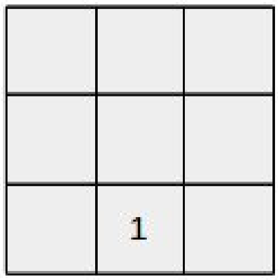


Figura 16 – Método Loubère Passo 1.

- Passo 2: Enumerar em diagonal, isto é, uma linha para baixo e uma coluna para direita.

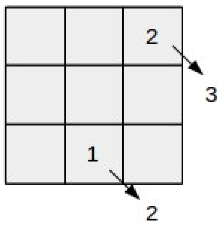


Figura 17 – Método Loubère Passo 2.

- Passo 3: Quando a contagem "sair"do quadro, deslocar o número para a primeira casa, se "sair em baixo"colocar na primeira linha daquela coluna, se "sair a direita" colocar na primeira coluna daquela linha.

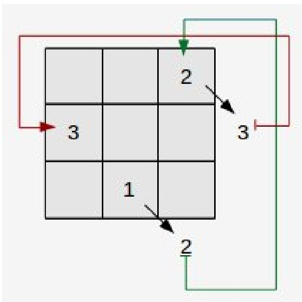


Figura 18 – Método Loubère Passo 3.

- Passo 4: Quando o número for ocupar uma casa já ocupada, "subimos"uma casa.

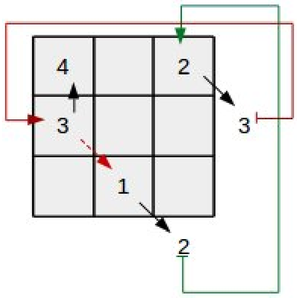


Figura 19 – Método Loubère Passo 4.

Seguimos repetindo os passos 2, 3 e 4 até finalizarmos a Figura 20.

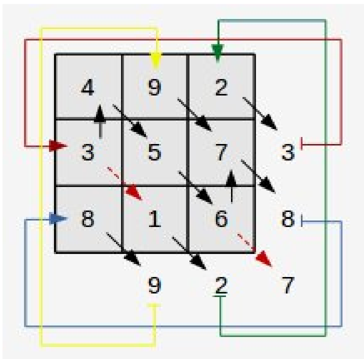


Figura 20 – Método Loubère e Lo Shu.

3.2.1 Loubère no Espaço

Para exemplificar o Médodo Loubère no espaço usaremos um QM_7 confeccionado com os passos anteriores.

Podemos pensar este plano do Quadrado Mágico se moldando no espaço, formando um Toro de Revolução, observe na Figura 22, com a primeira linha se unindo com a última formando um cilindro e depois a primeira coluna com a coluna n.

Com isso em mente, podemos ver que o ML usa esse tipo de topologia preenchendo todo o Toro, observe também que na Figura 21 o número 28 está na posição $(7, 7)$ quando vamos colocar o 29, caímos na posição (1,1), já ocupada pelo 22, por isto seu deslocamento para cima.

Neste QM_7 $(n = 7)$, usando este método, os n números centrais $\{22$, 23, 24, 25, 26, 27, $28\}$ da sequência ficam na diagonal principal e o número central da sequência $\frac{(n^2+1)}{2} = 25$ fica sempre na posição central, $\left(\dfrac{n+1}{2}, \dfrac{n+1}{2}\right) = (4, 4)$.

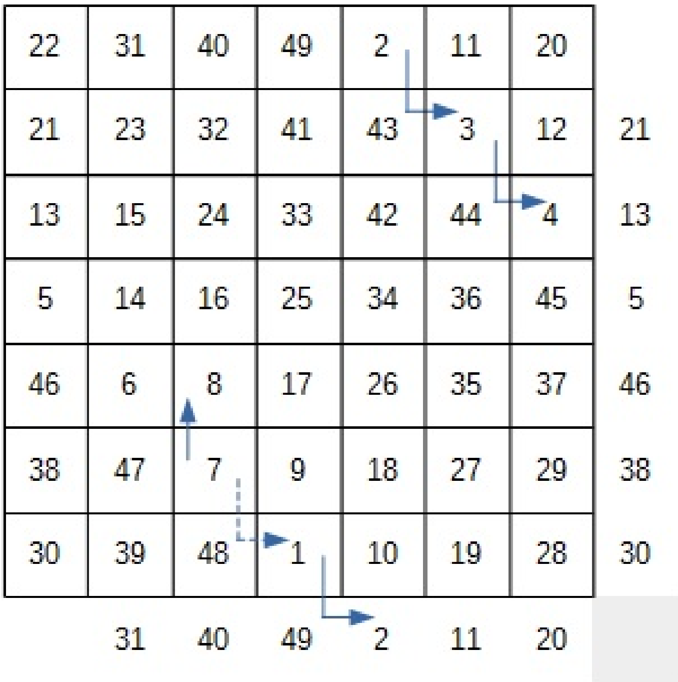


Figura 21 – Método Loubère.

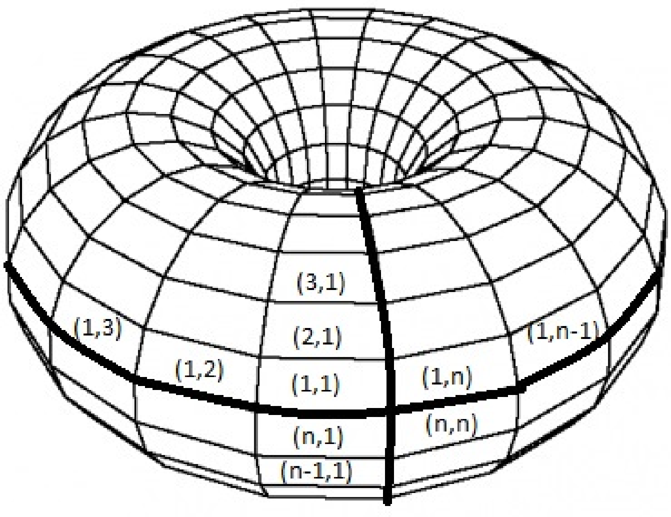


Figura 22 – Método Loubère no espaço.

Podemos fazer outras observações, na Figura 22, onde: cada anel vertical (meridiano), representa uma coluna onde a soma dos termos resultam na CM, de mesmo modo na horizontal (paralelo), formado pela linha também resulta na CM.

3.3 Método para QM_{4n}

Usando as ideias de (GRASHA; MURUGAN, 2014), com algumas modificações na intenção de facilitar e exemplificar o método, construiremos um QM_8 seguindo os passos a seguir:

- Passo 1: Separando em quadrados 4×4, marcando suas diagonais, como na Figura 23.

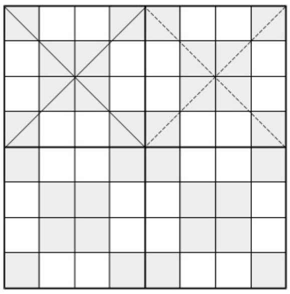


Figura 23 – Construção 4n passo 1.

Os a_{ij} cortados pelas diagonais serão marcados ou sombreados como na Figura 23.

- Passo 2: Podemos enumerar todo o quadrado começando pela primeira posição e seguindo a sequência, como na Figura 24 e depois apagar os números das posições sombreadas. Ou simplesmente enumerar, escreveendo os números nas posições em branco.

	2	3			6	7	
9			12	13			16
17			20	21			24
	26	27			30	31	
	34	35			38	39	
41			44	45			48
49			52	53			56
	58	59			62	63	

Figura 24 – Construção 4n passo 2.

- Passo 3: Agora fazemos o processo inverso, isto é começamos a enumerar da última posição para a primeira seguindo a sequência, apenas colocando os números nas posições sombreadas.

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

Figura 25 – Quadrado Mágico 8×8.

Devemos ter um resultado parecido com a Figura 25, que é um QM_8 com $CM = 260$.

3.4 Construções QM_{4n+2}

Para começarmos devemos saber construir um quadrado de ordem ímpar, usando o Método de Loubère. Em seguida, dividir o QM_{4n+2} em 4 quadrados de ordem ímpar pois: $4n+2 = 2(2n+1)$, o que significa que estamos multiplicando um Quadrado Mágico ímpar por 2 e dividindo nossa "matriz"em 4 áreas conforme a Figura 26 e a Tabela 8.

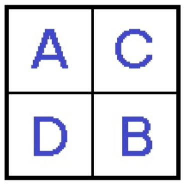


Figura 26 – Divisão do Quadrado Mágico 4n+2.

Tabela 8 – Divisão dos Quadrados Mágicos 4n + 2

n	Tamanho	Divisão	Áreas A,B,C,D
1	6	2 . 3	4 QM_3
2	10	2 . 5	4 QM_5
3	14	2 . 7	4 QM_7
⋮	⋮	⋮	⋮
n	4n+2	2 . (2n+1)	4 QM_{2n+1}

Depois preenchermos as 4 áreas na ordem da Figura 26, com cada Quadrado Mágico seguindo a sequência do anterior e usando o ML para obtermos a Figura 27

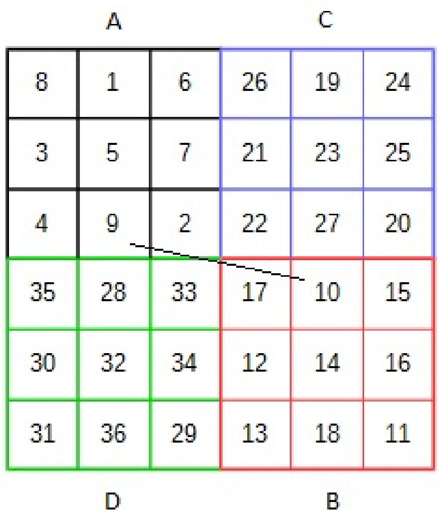


Figura 27 – Preenchimento do Quadrado Mágico 4n+2.

Para finalizar, fazemos a permuta dos números, indicada na Figura 28, obtendo o QM_6, Figura 29, com $CM_6 = 111$.

sem coluna - sem troca

8	1	6	26	19	24
3	5	7	21	23	25
4	9	2	22	27	20
35	28	33	17	10	15
30	32	34	12	14	16
31	36	29	13	18	11

Figura 28 – Permuta do Quadrado Mágico 4n+2

35	1	6	26	19	24	111
3	32	7	21	23	25	111
31	9	2	22	27	20	111
8	28	33	17	10	15	111
30	5	34	12	14	16	111
4	36	29	13	18	11	111
111	111	111	111	111	111	111

Figura 29 – Quadrado Mágico 6×6.

Para $QM_{4n+2} \geqslant 10$, as áreas A,B,C,D ficam maiores, usando um Quadrado Mágico ímpar de ordem maior. Sendo assim, temos que compensar com a colunas finais que também devem ser permutadas como na Figura 30. Além disso, a cada coluna completa selecionada para trocarmos nas áreas A, D também trocamos as colunas finais de B, C. Observe que o números centrais da primeira coluna das área A, D não são alterados, mas os números centrais sim.

1 coluna 1 troca

17	24	1	8	15	67	74	51	58	65
23	5	7	14	16	73	55	57	64	66
4	6	13	20	22	54	56	63	70	72
10	12	19	21	3	60	62	69	71	53
11	18	25	2	9	61	68	75	52	59
92	99	76	83	90	42	49	26	33	40
98	80	82	89	91	48	30	32	39	41
79	81	88	95	97	29	31	38	45	47
85	87	94	96	78	35	37	44	46	28
86	93	100	77	84	36	43	50	27	34

92	99	1	8	15	67	74	51	58	40
98	80	7	14	16	73	55	57	64	41
4	81	88	20	22	54	56	63	70	47
85	87	19	21	3	60	62	69	71	28
86	93	25	2	9	61	68	75	52	34
17	24	76	83	90	42	49	26	33	65
23	5	82	89	91	48	30	32	39	66
79	6	13	95	97	29	31	38	45	72
10	12	94	96	78	35	37	44	46	53
11	18	100	77	84	36	43	50	27	59

Figura 30 – Quadrado Mágico 10×10.

Fonte: http://www.1728.org/magicsq3.htm

Considerando $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$ então $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \cdots\}$. Dividindo em duas sequências, uma par e outra ímpar, temos:

- Ímpar: $\{3, 5, 7, 9, 11, 13, \cdots\}$ temos: $a_n = 3 + (n-1)2$ logo $a_n = 2n + 1$.
- Pares em outras duas sequência:
  P1: $\{4, 8, 12, \cdots\}$ temos: $a_n = 4 + (n-1)4$ logo $a_n = 4n$.
  P2: $\{6, 10, 14, \cdots\}$ temos:$a_n = 6 + (n-1)4$ logo $a_n = 4n + 2$.

Então com as construções MPU ou ML, para os ímpares $(2n+1)$ e para os pares, QM_{4n} $(4n)$ e QM_{4n+2} $(4n+2)$. Construímos Quadrados Mágicos de qualquer ordem com $n \geq 3$.

Com esta construção, $(4n+2)$ e a anterior $(4n)$, formamos Quadrados Mágicos de ordem par e usando o Método de Loubère (caso particular MPU), conseguimos Quadrados Mágicos de ordem ímpar, com isto podemos construir qualquer QM_n.

4 Diversidade de Aplicações

Neste capítulo apresentamos atividades para serem usadas em sala de aula, modificadas ou adaptadas, criando Quadrados Mágicos com as mais diversas formas e diversificar as aulas de Matemática. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, está "implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução."(BRASIL, 1997)

A matemática quase sempre é vista como umas das matérias mais difíceis, mas acredita-se que expondo os conteúdos de uma forma mais descontraída, divertida, sem deixar de ser estimulante e desafiadora, podemos estimular nos alunos um "gosto"por esta rainha das ciências.

4.1 Atividades

Nesta seção serão apresentadas atividades para sala de aula, abrangendo os mais variados assuntos e conteúdos matemáticos que mostram a versatilidade dos Quadrados Mágicos.

Nos livros didáticos (BIANCHINI, 2008), (VIDIGAL CARLOS AFONSO REGO; SPIRA, 2002), (DANTE, 2013), (MORI; ONAGA, 2012), (CHAVANTE, 2015), (CENTURION; JAKUBOVIC, 2012), (ANDRINI, 2012), (LEONARDO, 2010), trazem vários exemplos, aplicações e exercícios, lançaremos alguns exercícios como sugestão.

Os exemplos estão divididos por conteúdos e níveis para que os professores possam adequar a cada situação. Em cada atividade, as respostas estão na parte sombreada do Quadrado Mágico.

4.1.1 Inicio e Lógica

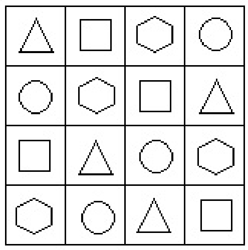
Nesta seção, todo embasamento, raciocínio e conculsões matemáticas partem, de certa forma, da lógica. Segundo os PCNs:

> A Matemática desenvolveu-se seguindo caminhos diferentes nas diversas culturas. O modelo de Matemática hoje aceito, originou-se com a civilização grega, no período que vai aproximadamente de 700 a.C. a 300 d.C., abrigando sistemas formais, logicamente estruturados a partir de um conjunto de premissas e empregando regras de raciocínio preestabelecidas. A maturidade desses sistemas formais foi atingida no século XIX, com o surgimento da Teoria dos Conjuntos e o desenvolvimento da Lógica Matemática. (BRASIL, 1997)

Segue um exemplo de atividade de lógica que pode ser aplicada em qualquer ano:

1. Com figuras geométricas coloridas, construir um quebra cabeça com 16 peças onde há quatro figuras diferentes e um tabuleiro com 4×4 "casas".

   Distribuir as figuras em cada "casa"para que na linha e na coluna tenham figuras diferentes.



Pode ser usado tampas de garrafas com cores diferentes, números de 1 a 4 ou mistura de critérios como por exemplo espessura, cor, número. Podemos também aumentar o número de casas do tabuleiro.

4.1.2 Números Naturais

Estes exemplos podem ser usados a partir do 6º ano, começando com o Quadrado Mágico de Lo shu, que não poderia faltar.

1. Complete com os números de 1 a 9 o Quadrado Mágico, onde a soma dos termos das linhas, colunas e diagonais é sempre a mesma.

8	1	6	15
3	5	7	15
4	9	2	15
15	15	15	15

Esta é uma das oito configurações possíveis.

2. Para este Quadrado Mágico precisamos de dois jogadores e um tabuleiro com 9 casas (3×3). Cada jogador possui fichas de 1 a 9 de duas cores diferentes. No estilo jogo da "velha", o jogador coloca uma ficha no tabuleiro, procurando fazer uma linha, coluna ou diagonal em que a soma de seus números seja 15. Ganha o primeiro que conseguir.

3. Completar o Quadrado com os números de 6 a 16 para que o mesmo seja considerado mágico, isto é, a soma dos números de cada linha e de cada coluna seja igual a 34.

1	12	7	14
8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4

Podemos adaptar este quadrado facilitando o preenchimento com mais números ou com a intenção de aumentar o desafio usando um Quadrado Mágico de ordem maior com mais espaços sem numeração, para o aluno completá-lo.

4.1.3 Números Inteiros

Os números inteiros, fazem parte do conteúdo do 7º ano, podendo ser usado como revisão nos anos seguintes. Vejamos alguns exemplos de atividades:

1. Construa um Quadrado Mágico com os números -8, -4, -3 , 0, 2, 5, 6, 10 . A soma deve ser 3.

5	2	-4	3
-8	1	10	3
6	0	-3	3
3	3	3	3

2. Neste Quadrado Mágico, a soma deve ser 2.

-7	7	6	-4
4	-2	-1	1
0	2	3	-3
5	-5	-6	8

3. Somando os números de cada linha, de cada coluna ou de cada diagonal, o resultado é sempre o mesmo. Descubra esse resultado. Depois complete o quadrado.

2	-5	0
-3	-1	1
-2	3	-4

4.1.4 Números Racionais

As atividades com números racionais podem ser usadas em qualquer nível a partir do 7º ano. A seguir duas atividades, uma com múmeros decimais e outra com frações.

1. Neste Quadrado Mágico, a soma é $7,5$.

4	0,5	3
1,5	2,5	3,5
2	4,5	1

2. Somando os números de cada linha, de cada coluna ou de cada diagonal, o resultado é sempre o mesmo. Descubra esse resultado. (Solução: $CM = 5$)

$1\frac{1}{3}$	3	$\frac{2}{3}$
1	$1\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{3}$
$2\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

4.1.5 Equações

Na sequência, atividades para o 7º ano. Outros exemplos podem ser vistos em (ANDRINI, 2012):

1. Encontre o valor de x e complete o Quadrado Mágico. (Solução: $x = 9, CM = 27$)

x-1	13	x−3
7	x	11
12	5	x+1

2. Determine o valor de x no Quadrado Mágico.(Solução: $x = 5$)

16	x+4	x+9
11	x+8	15
x+7	17	10

4.1.6 Multiplicação

A multiplicação de números naturais, está presente em todos os anos, podendo ser trabalhado os divisores e múltiplos no 6º ano, observe que nas atividades a seguir trata de Quadrado Mágicos Multiplicativo, onde a Constantes Mágica é calculada usando o produtos dos fatores de cada linha ou coluna:

1. Neste Quadrado Mágico multiplicativo (o produto das linha ou coluna é uma constante) de números naturais, encontre o valor de x. (Solução: $x = 2, CM = 1000$)

5	100	x
4	10	25
50	1	20

2. Construir um quadrado multimágico (o produto das linha ou colunas é uma constante) com os divisores de 36. (Solução: $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$).

3	36	2
4	6	9
18	1	12

4.1.7 Potência

Considere os quadrados multiplicativos (quadrado multimágico) e as propriedades das potências. Estas atividades fazem parte do conteúdo do 7º e 8º ano:

1. Neste Quadrado Mágico multiplicativo (o produto das linhas ou colunas é uma constante) qual o valor ou o expoente dos números que faltam.(Solução: $x = 2, CM = 1000$) $CM = 32768$ ou $CM = 2^{15}$)

16	512	4		2^4	2^9	2^2
8	32	128	=	2^3	2^5	2^7
256	2	64		2^8	2^1	2^6

2. Ache o valor da constante mágica e complete o quadrado multimágico (o produto das linhas ou colunas é uma constante). (Solução: $CM = \frac{1}{8}$ ou $CM = 2^{-3}$)

4	$\frac{1}{32}$	1		2^2	2^{-5}	2^0
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	2	=	2^{-3}	2^{-1}	2^1
$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{16}$		2^{-2}	2^3	2^{-4}

5 Proposta de Atividades

Neste capítulo, apresentamos algumas atividades que foram aplicadas nos anos finais do ensino fundamental e um relato de experiência com os Quadrados Mágicos em sala de aula.

Foram preparadas atividades para os quatro anos finais do ensino fundamental, associando os conteúdos que estavam sendo trabalhados na época da aplicação, pois em quase todos os conteúdos usamos a operação adição.

Todas as atividades estão no anexo, separadas por ano. Antes de começarmos as elaborações das atividades, tivemos uma conversa com os outros professores da área, após escolhidos os conteúdos e os exemplos, r epassamos aos colegas esperando um retorno, pois a ideia seria aplicar em outras turmas. Para este fim foi feito um questionário básico, em anexo, para ter a opinião dos alunos, totalmente anônimo e de preenchimento voluntário.

5.1 A Escola

No Bairro Três de outubro, em São Gabriel, Rio Grande do Sul, tivemos a oportunidade de participar do quadro de docentes da Escola Municipal de Ensino Fundamental Menino Jesus, montada sobre a estrutura do Centro de Atendimento Integrado a Criança-CAIC, que atende a população carente e de risco. São aproximadamente 188 discentes nos anos finais (6º ao 9º ano), distribuídos em quatro sextos anos (60,61,62,63), dois sétimos anos (70,71), um oitavo ano e um nono, todos no turno da manhã.

5.2 Atividades

Nesta seção são apresentadas atividades, separadas por conteúdos específicos de cada ano. A Atividade 1 foi aplicada em todas as turmas com o intuito de apresentar e familiarizar os alunos com o Quadrado Mágico.

Cada atividade é dividida em três partes: primeira um exemplo, segunda uma questão de fácil resolução e de conteúdo bem familiarizado pelo aluno e o terceiro com um nível de dificuldade maior ou exposto de uma forma diferente do que estão acostumados.

5.2.1 Atividade 6º ano

Publico Alvo - Alunos do 6º ano de ensino fundamental.

Pré- Requisitos - Números naturais.

Objetivos da Atividade

- Apresentar os Quadrados Mágicos;
- Estimular o raciocínio lógico;
- Mostrar os conteúdos de números naturais numa forma diferente.

Duração: Para as três atividades, um período de 45 minutos, no qual os primeiros 15 minutos dedicados a Atividade 1. O restante do tempo foi destinado para esclarecimento sobre a execução das tarefas, propiciando que todos cheguem a solução de forma independente e autônoma. Caso necessário, o professor pode dar uma sugestão básica que seria comparar os números e posições da atividade 1, Figura 31, fazendo uma correlação.

Atividade 1: O Exemplo

1) Quadrados Mágicos são números distribuidos na forma quadrangular em que as sequências numéricas nos sentidos: horizontal, vertical e diagonal totaliza sempre o mesmo valor. Ou seja, a soma das diagonais, linhas ou colunas dá sempre o mesmo valor e o chamamos de Constante Mágica. Observe o seguinte exemplo, em que a constante mágica é 15.

4	9	2	=	15
3	5	7	=	15
8	1	6	=	15
=	=	=	=	
15	15	15		15

Figura 31 – Atividade 1 6ºano.

Esta atividade é um exemplo, que é importante para o aluno se familiarizar, conhecer, entender e já se preparar para as próximas atividades. Que pode ser enriquecida com um pouco de história, com a imagem da tartaruga (lo shu) ou salientando o lado místico que envolve os Quadrados Mágicos.

Atividade 2

2) Usando os números $10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90,$ complete os quadrados de forma que na linha e na coluna seja sempre o mesmo valor:

			=
			=
			=

Figura 32 – Atividade 2 6º ano.

Esta atividade trabalha de uma forma simples os números naturais, pois são todos os números da atividade 5.2.1, Figura 31, multiplicado por 10 e a Constante Mágica é 150.

Solução da Atividade 2

40	90	20	=	150
30	50	70	=	150
80	10	60	=	150
=	=	=	=	
150	150	150		150

Figura 33 – Solução da Atividade 2 6º ano.

Atividade 3

3) Agora usado os números de 11 à 19, complete o próximo Quadrado Mágico:

			=
			=
			=

Figura 34 – Atividade 3 6º ano.

Esta atividade trabalha a noção de sequência (11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19), observe que são todos os números da Figura 31 somando 10 em cada termo, conforme a propiedades 1.1.1, a Constante Mágica é 45.

Solução da Atividade 3

14	19	12	=	45
13	15	17	=	45
18	11	16	=	45
=	=	=	=	
45	45	45		45

Figura 35 – Solução da Atividade 3 6º ano.

5.2.2 Atividade 7º ano

Publico Alvo - Alunos do 7º ano de ensino fundamental.

Pré- Requisitos - Números naturais e Números inteiros.

Objetivos da Atividade

- Apresentar os Quadrados Mágicos;
- Estimular o raciocínio lógico;
- Mostrar os conteúdos de números naturais e inteiros numa forma diferente;
- Trabalhar os números naturais;
- Trabalhar os números inteiros.

Duração: Para as atividades, podemos utilizar um período de 45 minutos, no qual nos primeiros 15 minutos podemos usar a **Atividade 1** 5.2.1. O restante do tempo será destinado aos questionamentos e oportunizando para que os alunos tentem encontrar uma solução. Se necessário, o professor pode dar a sugestão básica que é comparar os números e posições da Figura 31.

Atividade 1

O Professor pode iniciar a aplicação das atividades usando a **Atividade 1** 5.2.1 com a intenção dos alunos se familiarizarem com o Quadrado Mágico.

Atividade 2

2) Usado os números de 11 à 19, complete o Quadrado Mágico:

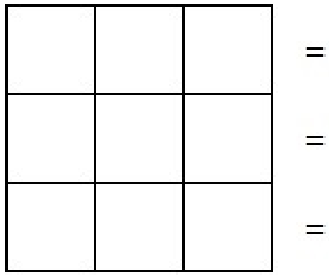


Figura 36 – Atividade 2 7º ano.

Esta atividade trabalha a noção de sequência (11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19), observe que são todos os números da atividade Figura 31 somando 10 em cada termo, conforme a propiedades 1.1.1, a Constante Mágica é 45.

Solução da Atividade 2

14	19	12	=	45
13	15	17	=	45
18	11	16	=	45
=	=	=	=	
45	45	45		45

Figura 37 – Solução da Atividade 2 7º ano.

Atividade 3

3) Usando os números $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, complete os quadrados de forma que na linha e na coluna a soma seja sempre o mesmo valor:

			=
			=
			=

Figura 38 – Atividade 3 7º ano.

Esta atividade trabalha os números inteiros, observe que são todos os números da Figura 31 subtraindo 5 em cada termo, com isto e a propiedade 1.1.1, a Constante Mágica é 0.

Solução da Atividade 3

-1	4	-3	=	0
-2	0	2	=	0
3	-4	1	=	0
=	=	=	=	
0	0	0		0

Figura 39 – Solução da Atividade 3 7º ano.

5.2.3 Atividade 8º ano

Publico Alvo - Alunos do 8º ano de ensino fundamental.

Pré- Requisitos - Números inteiros e Expressões numéricas.

Objetivos da Atividade

- Apresentar os Quadrados Mágicos;
- Estimular o raciocínio lógico;
- Trabalhar os números inteiros;
- Resolver expressões numéricas.

Duração: Para as atividades, podemos utilizar um período de 45 minutos, no qual nos primeiros 15 minutos podemos usar a **Atividade 1** 5.2.1. O restante do tempo será destinado aos questionamentos e oportunizando para que os alunos tentem encontrar uma solução. Se necessário, o professor pode dar a sugestão básica que é comparar os números e posições da Figura 31.

Atividade 1

O Professor para iniciar a aplicação das atividades pode usar a **Atividade 1** 5.2.1 com a intenção dos alunos se familiarizarem com o Quadrado Mágico.

Atividade 2

2) Usando os números $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, complete os quadrados de forma que na linha e na coluna a soma seja sempre o mesmo valor:

			=
			=
			=

Figura 40 – Atividade 2 8º ano.

Esta atividade trabalha os números inteiros, observe que são todos os números da Figura 31 subtraindo 5 em cada termo, com isto e a propiedades 1.1.1, a Constante Mágica é 0.

Solução da Atividade 2

-1	4	-3	=	0
-2	0	2	=	0
3	-4	1	=	0
=	=	=	=	
0	0	0		0

Figura 41 – Solução da Atividade 2 8º ano.

Atividade 3

3) Considerando o Quadrado Mágico, então resolva as expressões numéricas de cada quadro e calcule quanto é a Constante Mágica:

-1.(8-10)	8-[(3+1):4]	0.{2+[5-(2+1)]}	=
10-[3.(9-6)]	3+{2-[5-(2+1)]}	(5+10):3	=
{3.[1+(2.1)]}-3	(8-10)+1	8-[2.(10-8)]	=

Figura 42 – Atividade 3 8º ano.

Esta atividade trabalha expressões numéricas de forma diferente, onde é necessário resolver pelo menos três expressões para achar a Constante Mágica. Que neste caso é 9.

Solução da Atividade 3

-1.(8-10)= 2	8-[(3+1):4]= 7	0.{2+[5-(2+1)]}= 0	=	9
10-[3.(9-6)]= 1	3+{2-[5-(2+1)]}= 3	(5+10):3= 5	=	9
{3.[1+(2.1)]}-3= 6	(8-10)+1= -1	8-[2.(10-8)]= 4	=	9
=	=	=		
9	9	9		

Figura 43 – Solução da Atividade 3 8º ano.

5.2.4 Atividade 9º ano

Publico Alvo - Alunos do 9º ano de ensino fundamental.

Pré- Requisitos - Extração de raízes exatas e decomposição de raízes.

Objetivos da Atividades

- Apresentar os Quadrados Mágicos;
- Estimular o raciocínio lógico;
- Trabalhar com radiciação;
- Resolver decomposição de raízes.

Duração: Para as atividades, podemos utilizar um período de 45 minutos, no qual nos primeiros 15 minutos podemos usar a **Atividade 1** 5.2.1. O restante do tempo será destinado aos questionamentos e oportunizando para que os alunos tentem encontrar uma solução. Se necessário, o professor pode dar a sugestão básica que é comparar os números e posições da Figura 31.

Atividade 1

O Professor para iniciar a aplicação das atividades pode usar a **Atividade 1** 5.2.1 com a intenção dos alunos se familiarizarem com o Quadrado Mágico.

Atividade 2

2) Usando as seguintes raízes exatas $\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \sqrt{25}, \sqrt{36}, \sqrt{49}, \sqrt{64}, \sqrt{81}$, complete os quadrados de forma que na linha e na coluna a soma seja sempre o mesmo valor:

			=
			=
			=

Figura 44 – Atividade 2 9º ano.

Esta atividade trabalha a extração de raízes exatas, pois através das respostas das raízes, podemos localizar seu respectivo local no Quadrado Mágico, cuja Constante Mágica é 15.

Solução da Atividade 2

$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{81}=9$	$\sqrt{4}=2$	=	15
$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{25}=5$	$\sqrt{49}=7$	=	15
$\sqrt{64}=8$	$\sqrt{1}=1$	$\sqrt{36}=6$	=	15
=	=	=		
15	15	15		

Figura 45 – Solução da Atividade 2 9º ano.

Atividade 3

3) Considerando que tanto a soma na linha ou na coluna são sempre o mesmo valor, usando as propriedades de decomposição da radiciação, simplifique as raízes e calcule quanto é a Constante Mágica:

$\sqrt{8}$	$\sqrt{98}$	$\sqrt[3]{0}$	=
$\sqrt{2}$	$\sqrt{18}$	$\sqrt{50}$	=
$\sqrt{72}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{32}$	=

Figura 46 – Atividade 3 9º ano.

Esta atividade trabalha a decomposição de raízes e a soma destas raízes decompostas, formam a Constante Mágica que é $9\sqrt{2}$.

Solução da Atividade 3

$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$	$\sqrt{98}=7\sqrt{2}$	$\sqrt[3]{0}=0$	=	$9\sqrt{2}$
$\sqrt{2}=\sqrt{2}$	$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$	$\sqrt{50}=5\sqrt{2}$	=	$9\sqrt{2}$
$\sqrt{72}=6\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}=-\sqrt{2}$	$\sqrt{32}=4\sqrt{2}$	=	$9\sqrt{2}$
=	=	=		
$9\sqrt{2}$	$9\sqrt{2}$	$9\sqrt{2}$		

Figura 47 – Solução da Atividade 3 9º ano.

5.3 Relato

Neste capítulo apresenta-se o relato das Atividades em cada ano, separado por turma e um questionário de avaliação das atividades. Todo material e questionário estão em anexo, com alguns ajustes citados no relato, corrigindo erros e dificuldades encontradas durante a aplicação.

Estas atividades foram realizadas na Escola Municipal de Ensino Fundamental Menino Jesus (conhecida como escola CAIC), em São Gabriel, Rio Grande do Sul, que atende nos anos finais (6º ao 9º ano) ao total 188 alunos de classe média baixa, carentes e em situação de risco. As atividades foram realizadas em cada turma num período de 45 minutos, (salvo turma 90), no turno da manhã, totalizando 90 alunos que participaram das atividades, não abrangendo todas as turmas dos anos finais, mas no mínimo uma turma de cada ano.

As atividades foram preparadas após uma conversa com os outros professores de matemática, para que cada atividade fosse ao encontro do conteúdo trabalhado na época da aplicação (inicio do ano letivo, 1º trimestre), repassadas para os colegas, exemplos das atividades que seriam aplicadas para suas avaliações e ajustes caso necessário e definir o nível de aprofundamento de cada conteúdo.

Em cada turma a sistemática foi a mesma, após as devidas apresentações, foram distribuídas as folhas do questionário, anexo A, explicando o preenchimento e que era anômino e não obrigatório. Em seguida foram distribuídas as folhas de atividades (anexo B, C, D, E), no qual se deteve um tempo considerável, expondo e explicando a atividade 1 5.2.1, que apresenta o Quadrado Mágico.

As aplicações, sempre com a presença do autor, para orientação e acompanhamento, se deram em horário e dias diversos, conforme horário e disponibilidade dos outros professores, sendo relatado em ordem de turmas (não de aplicação), onde cada uma com características diferentes, comportamentos e interrelações, que tiveram reações distintas no momento da aplicação.

Turma 60: Eram 14 alunos, que seguindo a sistemática escrita anteriormente e com as distribuições das atividades do anexo B. Logo no início alguns não queriam fazer a tarefa e sugeriram trabalhar em duplas, mas como pode ser visto na Figura 48, foi totalmente individual. Com a leitura e explicação da atividade 1 5.2.1, reprodução no quadro e comentários sobre a mesma, foi direcionado a tentarem resolver as atividades seguintes.

Foi orientado que podiam usar a folha do questionário para fazer os cálculos, caso não houvesse espaço nas folhas das atividades para facilitar o processo de ter que virar as folhas para fazer contas. No preenchimento da atividade 2, Figura 32, tiveram dificuldade em distribuir os números sem repetir, levaram cerca de 15 minutos até que os primeiros começassem a acertar, que depois da sugestão, no qual foi direcionado a compararem os números e as posições de atividade 1 com a atividade 2, relacionando o 10 com 1 o 20 com 2 e assim por diante e completando o quadrado conforme o anterior, depois que perceberam a semelhança, fizeram rápido.

Mostraram mais dificuldade com o a atividade 3, pois não percebiam a semelhança com as outras atividades, mas depois que os primeiros conseguiram, trocaram ideias entre eles e já começaram a se dispersar, pois já tinham resolvido tudo e queriam entregar as tarefas, mas foi contornado, dando ênfase ao preenchimento do questionário. Alguns alunos não desistiram e tentaram encontrar a solução sozinho até o último minuto. Tiveram dificuldade e não preencheram as lacunas e perguntaram no questionário o que é "ponto positivo", podendo ser trocado por (o que mais gostou na atividade).

Figura 48 – Turma 60.

Turma 62: Com 14 alunos, esta turma se apresentou mais dispersa por terem vindo de uma atividade física (aula de Educação Física), por isso alguns não queriam realizar as tarefas sobre Quadrados Mágicos. Dessa forma, levou-se algum tempo para conseguir acalmá-los e convencê-los de executar as atividades propostas. Com a explicação da primeira tarefa 5.2.1 os trabalhos se deram naturalmente.

Figura 49 – Turma 62.

A Figura 49, mostra os alunos bastante interessados, começaram a fazer a atividade usando os cadernos para os cálculos, entretando uns riscaram na classe e até usaram calculadora (celular). Com as dúvidas que vinham surgindo (exemplo: pode repetir número?), esclarecidas geralmente em voz alta, para todos da classe. Com a sugestão repetida na turma anterior (turma 60), ficou mais fácil, com isto muitos conseguiram resolver e já queriam entregar as atividades antecipadamente, mas teve quem tentou completar as atividades até o final da aula.

Turma 63: Uma das turmas mais "críticas", por serem de alunos repetentes e com problemas de relacionamentos entre colegas e professores. Com 10 alunos presentes no dia, seguimos com a distribuição das atividades aos interessados em participar, os quais uns trabalharam em duplas. Entretanto os alunos que não quiseram participar ficaram em suas classes, não atrapalhando os demais colegas. Com a sugestão (mesma da turma 60), conseguiram fazer a atividade 2. Mesmo completando corretamente os quadrados, apresentaram muitos erros na soma, até mesmo nos múltiplos de dez. Assim que o primeiro aluno completou tudo, começaram a passar as respostas uns para os outros e mesmo os alunos com dificuldades de aprendizagem e comportamento chegaram as respostas certas.

Analisando as respostas das Atividade 2 e 3 do 6º ano, conforme o gŕafico da Figura 51 mostra que a maioria dos alunos conseguiram responder a atividade 2 e a quase metade a atividade 3.

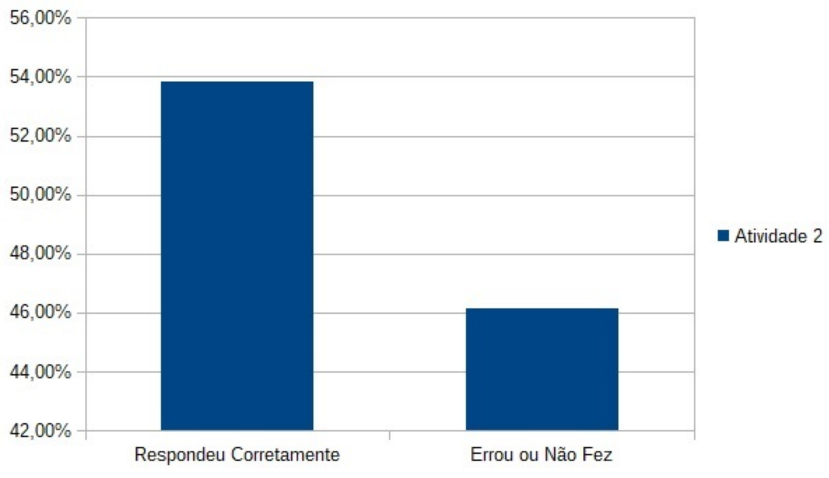


Figura 50 – Resultado da atividade 2 6º ano.

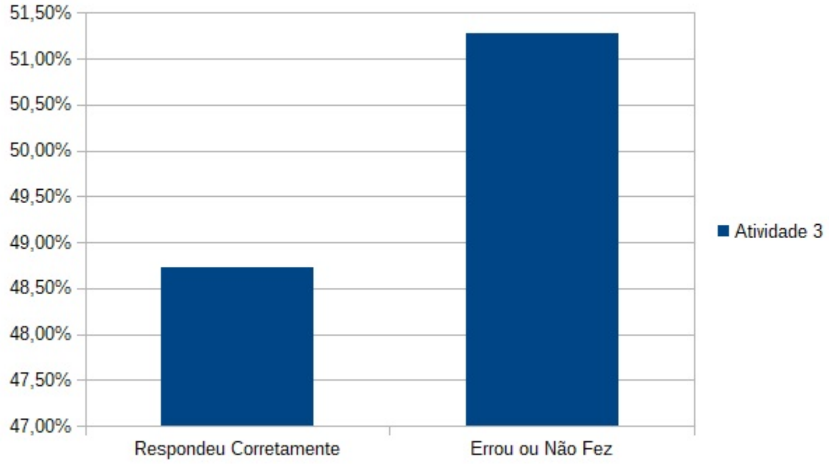
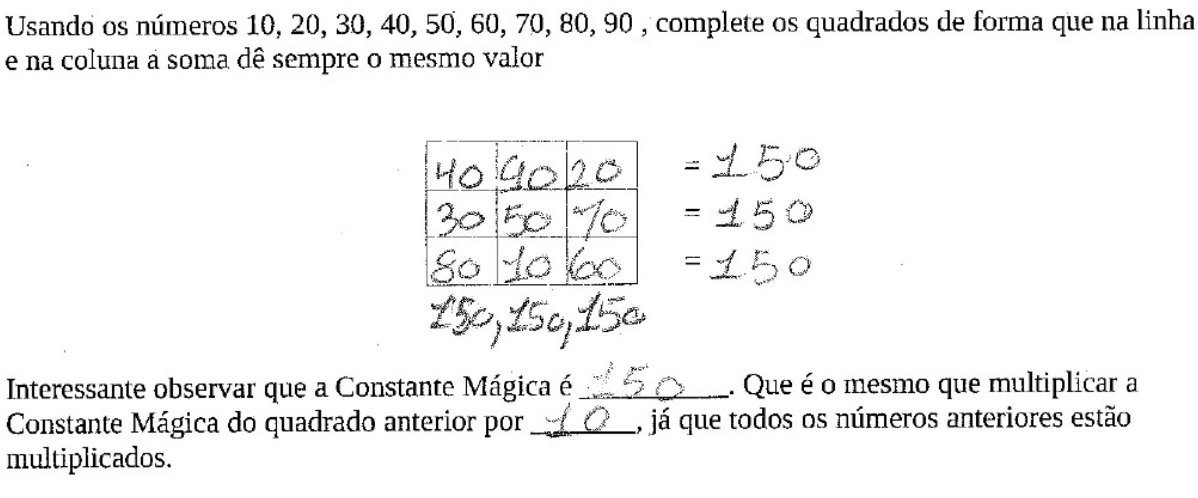


Figura 51 – Resultado da atividade 3 6º ano.

Nas Figuras 52, 53, algumas soluções apresentadas pelos alunos do 6º ano.



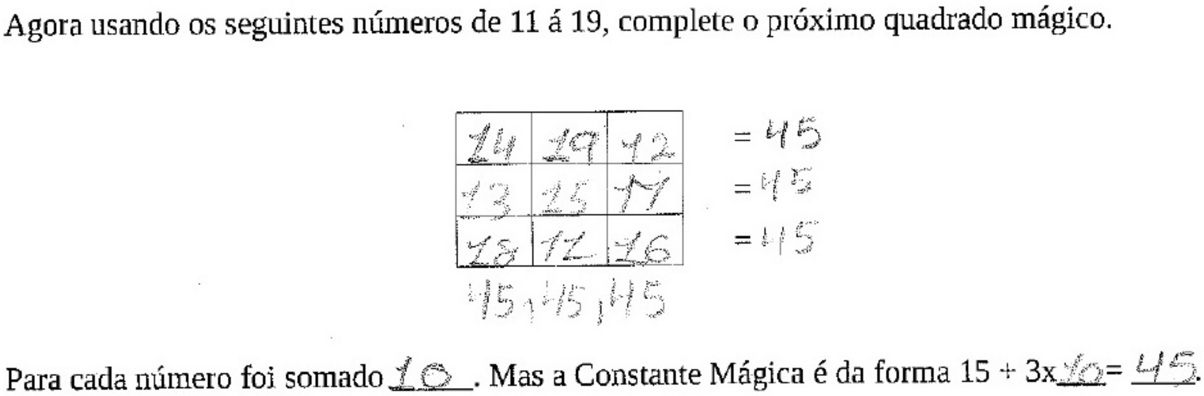
Usando os números 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 , complete os quadrados de forma que na linha e na coluna a soma dê sempre o mesmo valor

40	90	20	= 150
30	50	70	= 150
80	10	60	= 150

150, 150, 150

Interessante observar que a Constante Mágica é 150. Que é o mesmo que multiplicar a Constante Mágica do quadrado anterior por 10, já que todos os números anteriores estão multiplicados.

Figura 52 – Resposta da Atividade 2: aluno do 6º ano.



Agora usando os seguintes números de 11 á 19, complete o próximo quadrado mágico.

14	19	12	= 45
13	15	17	= 45
18	11	16	= 45
45	45	45	

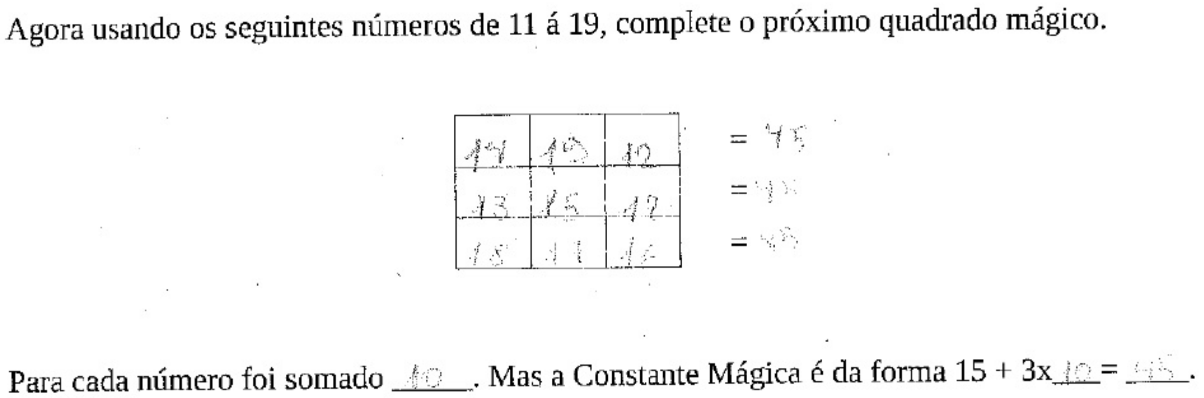
Para cada número foi somado 10. Mas a Constante Mágica é da forma 15 + 3x10= 45.

Figura 53 – Resposta da Atividade 3: aluno do 6º ano.

Turma 71: Uma turma que no dia da aplicação estava com poucos alunos, somente 8. Trabalharam quase que em grupo, conforme a Figura 54, na biblioteca. Foi interessante pois não se misturavam, mas se ajudavam. Mesmo após o debate sobre a primeira questão, que foi reescrita no quadro e explicada para todos, alguns mais desatentos em poucos minutos já começaram a desistir. Percebendo a necessidade de mais ajuda, foi dada a sugestão de comparação de números e posições com a atividade 1 5.2.1, tornando a realização da tarefa mais acessível. Fizeram as contas no caderno e usaram a calculadora, o que facilitou a finalização da atividade. Em 30 minutos, no geral, conseguiram executar o que foi proposto e assim usaram o tempo restante para responder o questionário, trocando algumas informações entre os colegas.

Figura 54 – Turma 71.

Nas figuras 55 e 56 algumas soluções apresentadas pelos alunos do 7º ano.

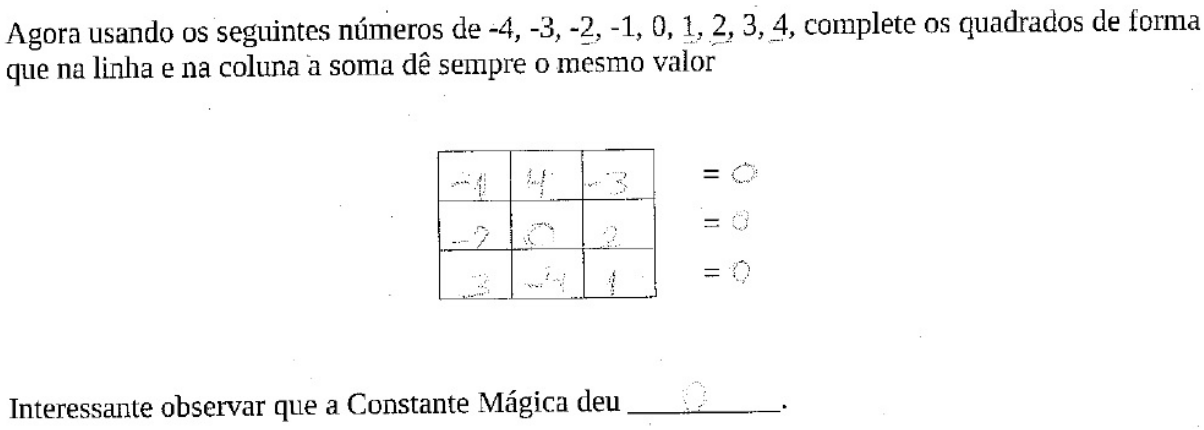


Agora usando os seguintes números de 11 á 19, complete o próximo quadrado mágico.

14	19	12	= 45
13	15	17	= 45
18	11	16	= 45

Para cada número foi somado 10. Mas a Constante Mágica é da forma 15 + 3x10 = 45.

Figura 55 – Resposta da Atividade 2: aluno do 7º ano.



Agora usando os seguintes números de -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, complete os quadrados de forma que na linha e na coluna a soma dê sempre o mesmo valor

-1	4	-3	= 0
-2	0	2	= 0
3	-4	1	= 0

Interessante observar que a Constante Mágica deu 0.

Figura 56 – Resposta da Atividade 3: aluno do 7º ano.

Podemos considerar que os objetivos foram atingindos, apesar de quase a metade ter chegado às respostas da atividade 2 e poucos terem chegado à resposta da atividade 3, conforme gráfico da Figura 58. Acreditamos que esses resultados foram influenciados pelo tempo reduzido para as resoluções das questões, devido ao deslocamento da turma até a biblioteca.

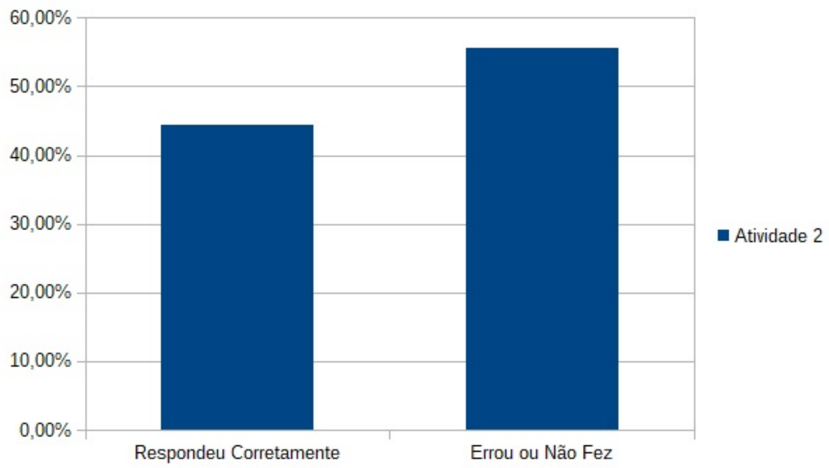


Figura 57 – Resultado da atividade 2 7º ano.

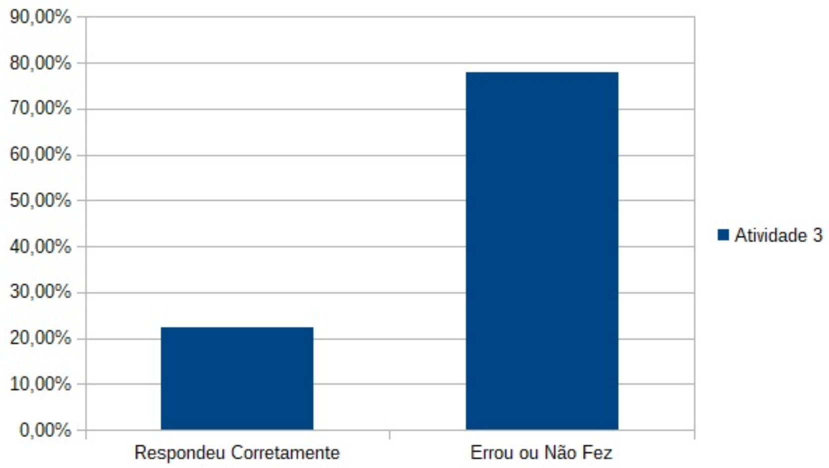
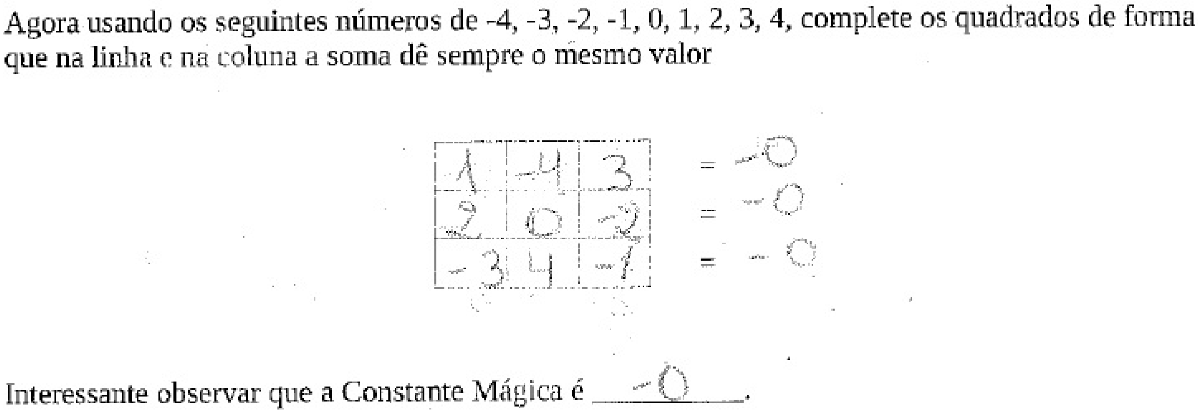


Figura 58 – Resultado da atividade 3 7º ano.

Turma 80: Dos 17 alunos que fizeram as atividades individualmente sendo que quase todos trabalharam, o que pode ser observado na Figura 59. Muitos alunos, mesmo no 8º ano apresentam dificuldades em trabalhar com números negativos ou no primeiro momento a proposta da atividade 2 não ficou muito clara. Foi questionado se para a realização da tarefa os números deveriam ser somados, assim foi respondido que sim, mas alertado que não esquecessem as regras de sinais. Somente um aluno, com a orientação direta do professor, conseguiu concluir a atividade 3, chegando a montar a fórmula da Constante Mágica. Por ser bem mais complicada, os alunos levaram muito tempo nesta questão, pois começaram a fazer algumas das expressões de cada quadro do quadrado separadamente e assim não conseguiram montar a resposta final em tempo hábil. Observe os dados dessa turma na Figura 63. Para melhor execução da tarefa, pensaríamos em reestruturar esta atividade diminuindo os colchetes e chaves.

Figura 59 – Turma 80.

Nas figuras 60 e 61 algumas soluções apresentadas pelos alunos do 8º ano.

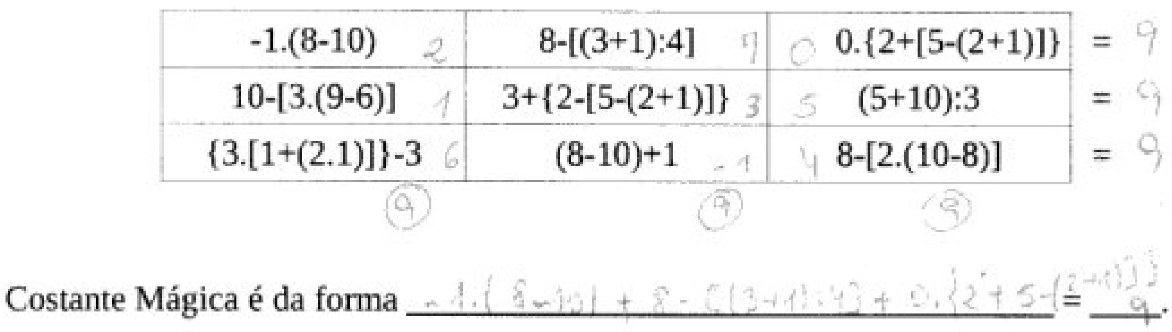


Agora usando os seguintes números de -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, complete os quadrados de forma que na linha e na coluna a soma dê sempre o mesmo valor

1	-4	3	=	-0
2	0	-2	=	-0
-3	4	-1	=	-0

Interessante observar que a Constante Mágica é -0.

Figura 60 – Resposta da Atividade 2: aluno do 8º ano.



-1.(8-10) 2	8-[(3+1):4] 7	0 0.{2+[5-(2+1)]}	= 9
10-[3.(9-6)] 1	3+{2-[5-(2+1)]} 3	5 (5+10):3	= 9
{3.[1+(2.1)]}-3 6	(8-10)+1 -1	4 8-[2.(10-8)]	= 9
9	9	9	

Costante Mágica é da forma -1.(8-10) + 8-[(3+1):4] + 0.{2+5-(2+1)]} = 9.

Figura 61 – Resposta da Atividade 3: aluno do 8º ano.

Conforme o gráfico da Figura 63, a maioria chegou a resposta correta da atividade 2, mas a atividade 3 tomou muito tempo, onde somente um completou satisfatóriamente toda atividade.

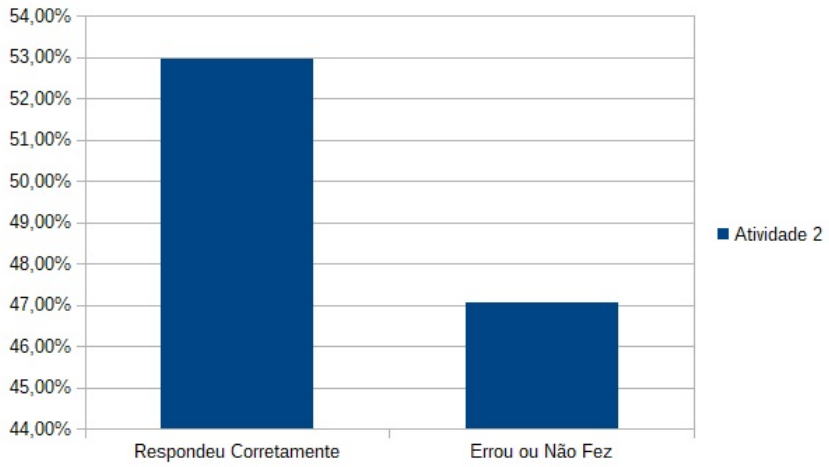


Figura 62 – Resultado da atividade 2 8º ano.

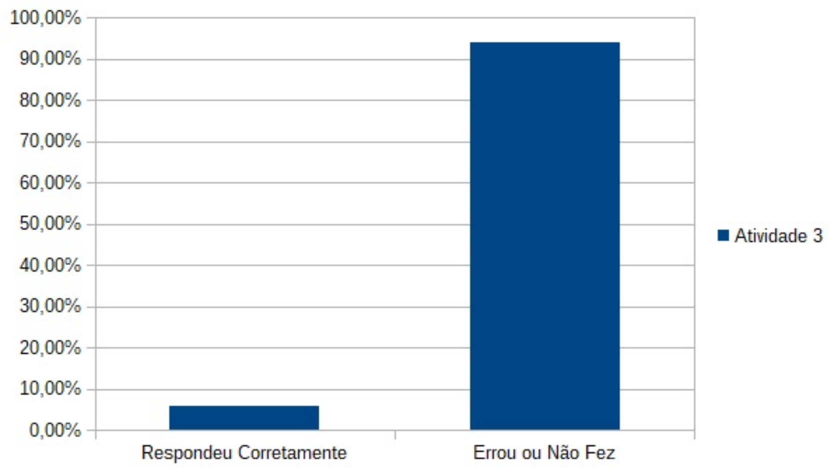
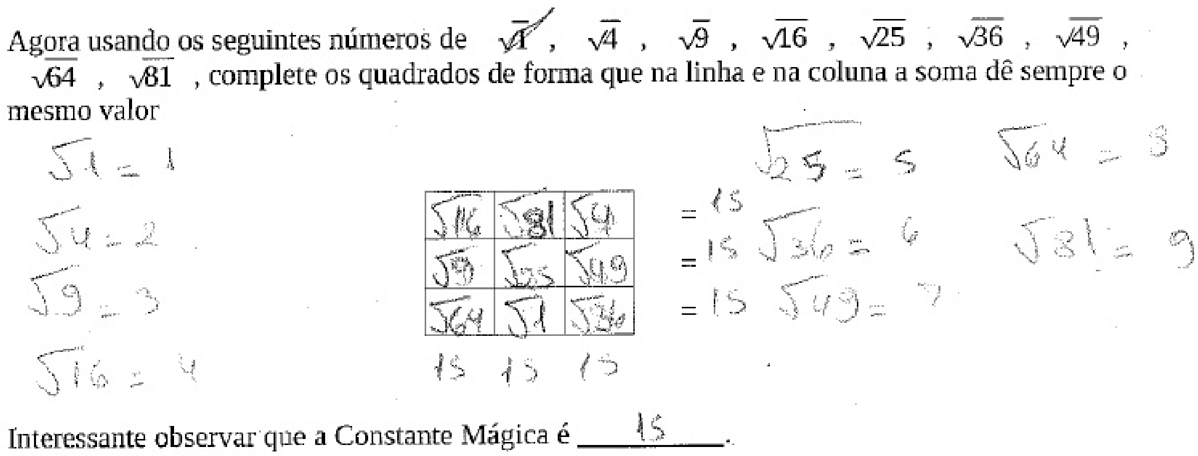


Figura 63 – Resultado da atividade 3 8º ano.

Turma 90: Mesmo sendo uma das maiores turmas, as atividades foram executadas com sucesso, ainda mais com ajuda da professora de Matemática. Seguiu-se, a partir daí, os mesmos procedimentos aplicados na turma 60, chamando atenção para a atividade 1 5.2.1 e as raízes exatas da atividade 2. Passado algum tempo, talvez pela grande quantidade de alunos, começaram a se agitar de maneira inadequada, desta forma foi necessário a intervenção da professora regente. Após esse momento, foi preciso também passar algumas sugestões aos alunos, como extrair as raízes e comparar com a primeira atividade. Com essa intervenção, conseguiram finalizar a tarefa em poucos minutos, embora muitos colocaram apenas as respostas das raízes no Quadrado Mágico. Neste dia, a escola, envolvida com outros compromissos, fez horário reduzido e assim tivemos que interromper a aula. Foram recolhidas todas as atividades para podermos dar continuidade a elas em outra oportunidade. Interessante foi notar que os alunos sairam comentando a aula, demonstrando vontade de continuar fazendo as atividades, levando-as para casa. Num outro dia, as atividades foram retomadas com o mesmo entusiasmo da aula anterior. Desta vez, com a presença de mais três alunos. Encontraram dificuldades em iniciar a atividade 3, foi comunicado que era preciso decompor as raízes primeiro antes de calcular a Constante Mágica. O problema de alguns alunos foi justamente na decomposição das raízes, apesar de já terem estudado o conteúdo. Superadas estas dificuldades, a maioria conseguiu executar as tarefas com êxito. No geral, foi a turma que obteve melhor aproveitamento. Atribuimos esse resultado ao fato de que essa turma teve dois períodos para realizar as atividades e também do menor número de alunos que não quiseram participar da proposta apresentada.

Nas figuras 64 e 65 algumas soluções apresentadas pelos alunos do 9º ano.



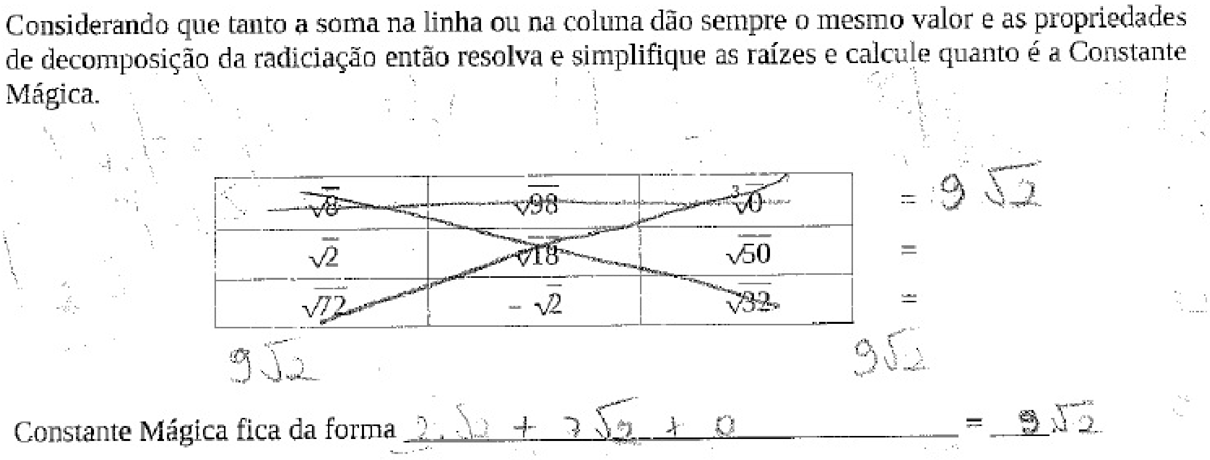
Agora usando os seguintes números de $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{36}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{81}$, complete os quadrados de forma que na linha e na coluna a soma dê sempre o mesmo valor

$\sqrt{1} = 1$ $\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{25} = 5$ $\sqrt{36} = 6$ $\sqrt{49} = 7$ $\sqrt{64} = 8$ $\sqrt{81} = 9$

$\sqrt{16}$	$\sqrt{81}$	$\sqrt{4}$	= 15
$\sqrt{9}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{49}$	= 15
$\sqrt{64}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{36}$	= 15
15	15	15	

Interessante observar que a Constante Mágica é 15.

Figura 64 – Resposta da Atividade 2: aluno do 9º ano.



Considerando que tanto a soma na linha ou na coluna dão sempre o mesmo valor e as propriedades de decomposição da radiciação então resolva e simplifique as raízes e calcule quanto é a Constante Mágica.

$\sqrt{8}$	$\sqrt{98}$	$\sqrt[3]{0}$	$= 9\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$	$\sqrt{18}$	$\sqrt{50}$	=
$\sqrt{72}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{32}$	=
$9\sqrt{2}$		$9\sqrt{2}$	

Constante Mágica fica da forma $2\sqrt{2} + 7\sqrt{2} + 0$ = $9\sqrt{2}$

Figura 65 – Resposta da Atividade 3: aluno do 9º ano.

Objetivos alcançados, conforme o gráfico da Figura 67, quase 80% da turma respondeu a atividade 2 e a maioria fez a atividade 3.

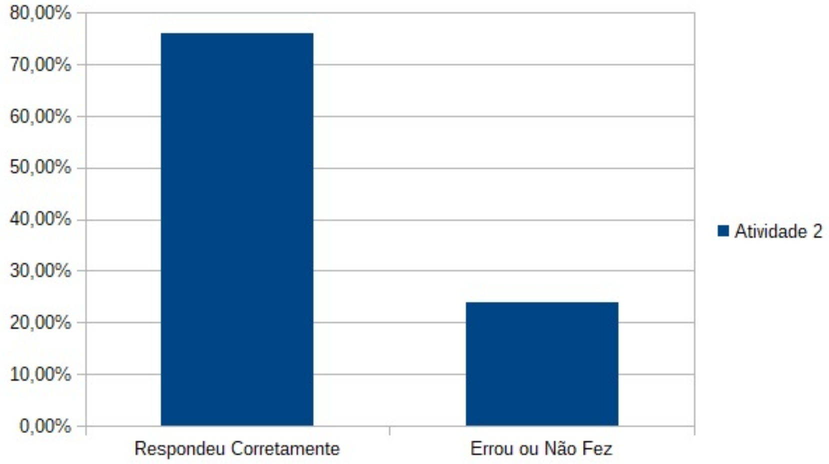


Figura 66 – Resultado da atividade 2 9º ano.

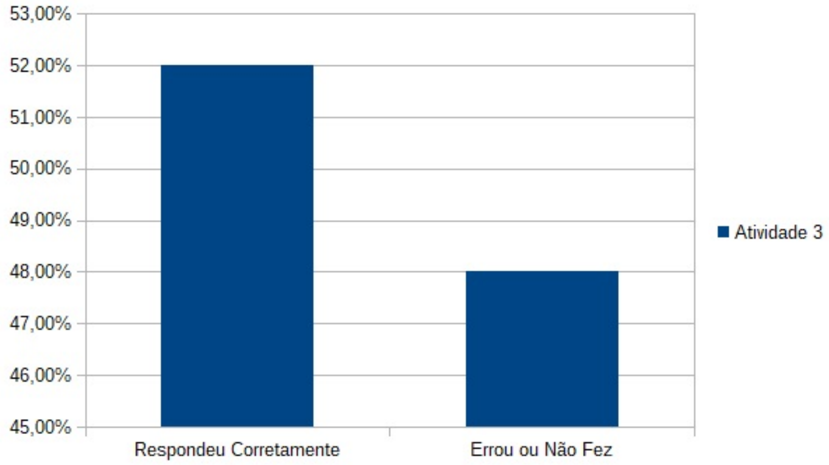


Figura 67 – Resultado da atividade 3 9º ano.

5.3.1 Análise Questionário

Como o questionário era de preenchimento livre e anônimo, os mesmos foram analisados todos juntos, sem distinção de ano ou turma.

Questão 1 - Você gosta de Matemática? Pela Figura 68, mais de 40 % respondeu que Sim e quase 30 % Raramente (RM). Percebemos que este gosto por matemática que pode ser estimulado, através de atividades diversificadas e estimulantes.

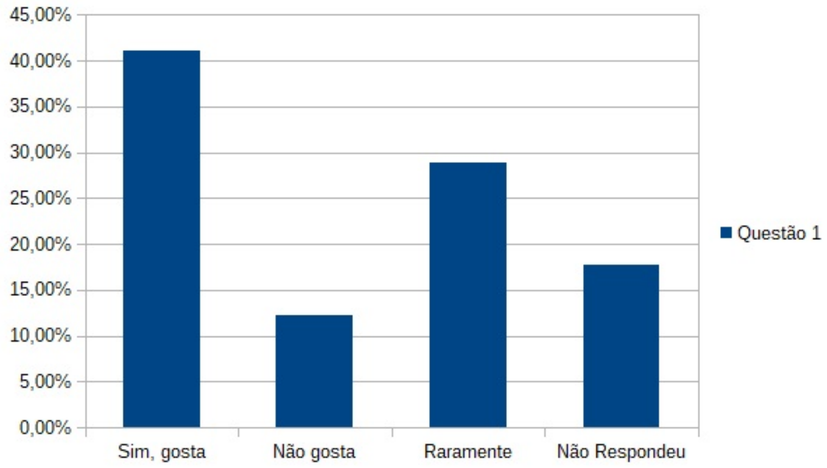


Figura 68 – Você gosta de Matemática.

Questão 2 - Você já jogou algum jogo que use números? Nos surpreendemos com o resultado de apenas 50% responder afirmativamente, conforme observamos a Figura 69, pois a maioria dos jogos, para não dizer todos, se relacionam com números de uma forma ou de outra, nem que seja pelo pontuação ou escore dos jogos. Ou os alunos não perceberam isso, ou só consideraram jogos numéricos do tipo SUDOKU.

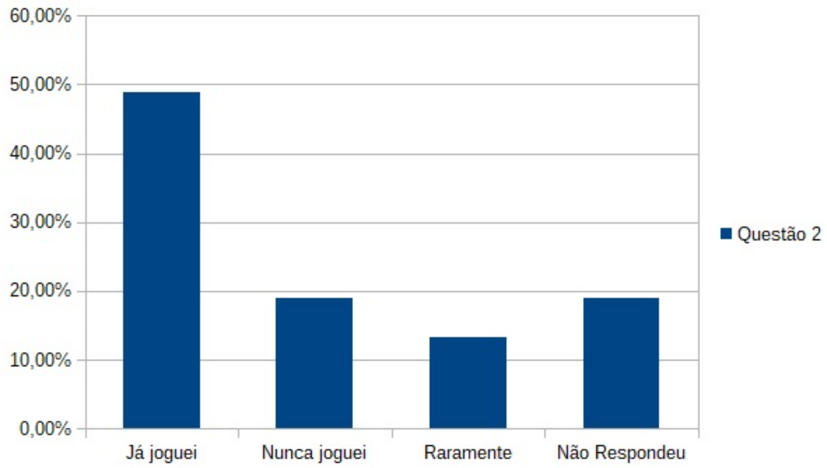


Figura 69 – Você já jogou algum jogo que use números.

Questão 3 - Você já participou de jogos que usam raciocínio lógico, estratégia? Pela estatística verificada na Figura 70, parece que os alunos não gostam de jogos que exijam algum raciocínio, de jogos de estratégia, lógica ou apresente alguma dificuldade. Nós professores, temos o papel ou a possibilidade de desenvolver esse lado nos alunos, ainda mais como professores de matemática.

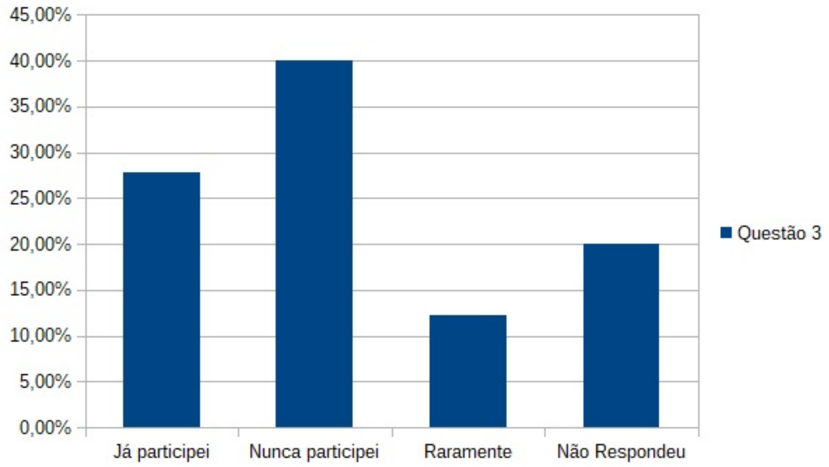


Figura 70 – Você já participou de jogos que usam raciocínio lógico, estratégia.

Questão 4 - Sabe ou ouviu falar de Quadrado Mágico na Matemática? O desconhecimento neste caso pode até ser interessante, pois o Quadrado Mágico é algo novo e diferente, mesmo tendo inúmeros livros didáticos que trazem atividades com o Quadrado Mágico, conforme apresenta a Figura 71.

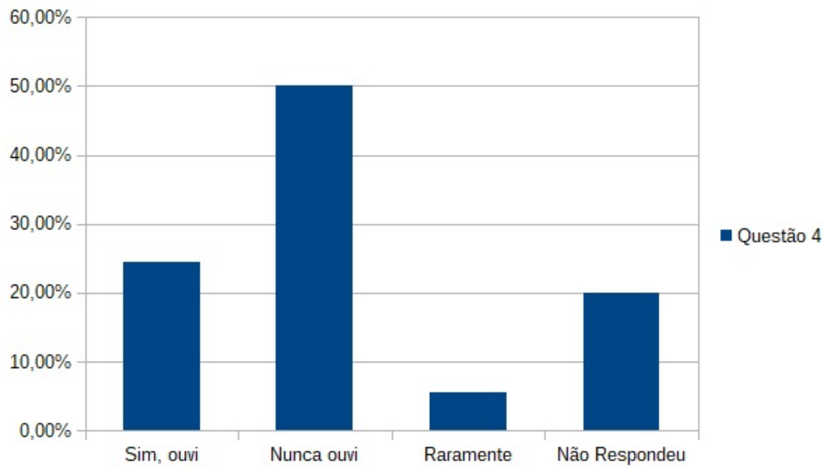


Figura 71 – Sabe ou ouviu falar de Quadrado Mágico na Matemática.

Questão 5 - Achou as atividades sobre Quadrado Mágico difíceis? Figura 72 Tudo que é novo ou desconhecido, pode ser tornar difícil no início, os alunos acharam complicadas as atividades com Quadrado Mágico, principalmente a atividade 3 do 8º ano.

Questão 6 - Gostou de participar da atividade? A Figura 73 mostra que atividades diferentes atraem a curiosidades dos alunos e possivelmente o interesse pela matéria.

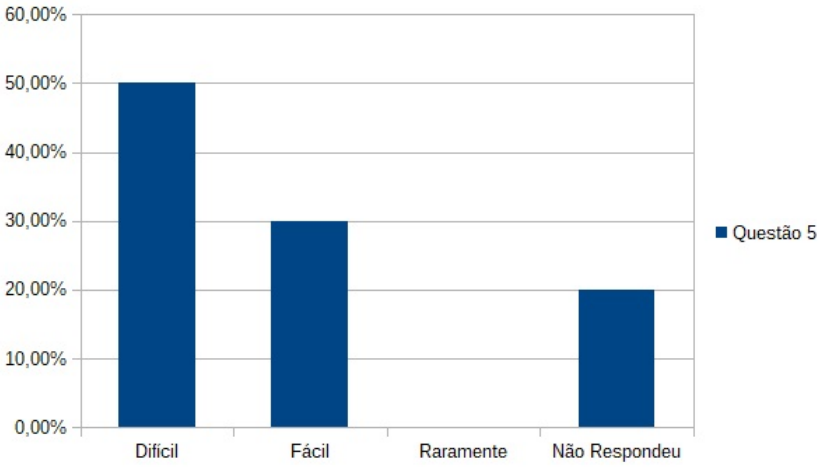


Figura 72 – Achou as atividades sobre Quadrado Mágico difíceis.

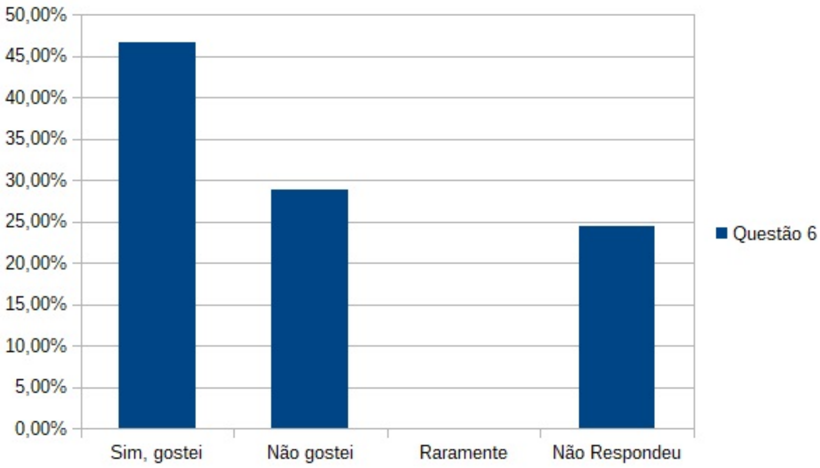


Figura 73 – Gostou de participar da atividade.

As questões 7 e 8 foram descritivas, como o questionário não era obrigatório, vamos expor algumas respostas interessantes, Figuras 74 e 75.

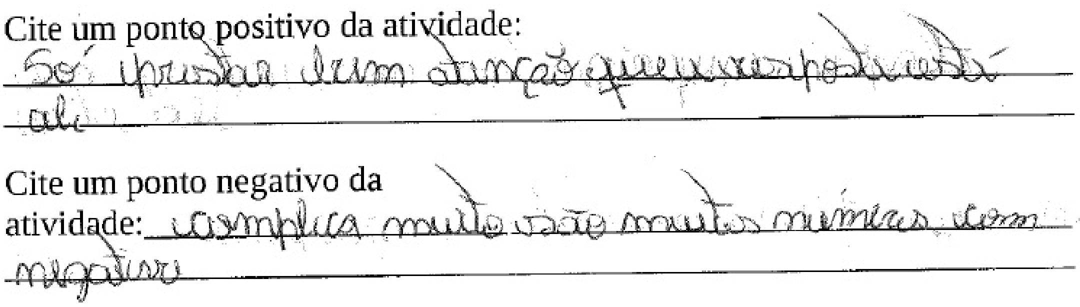


Figura 74 – Pontos positivos e negativos.

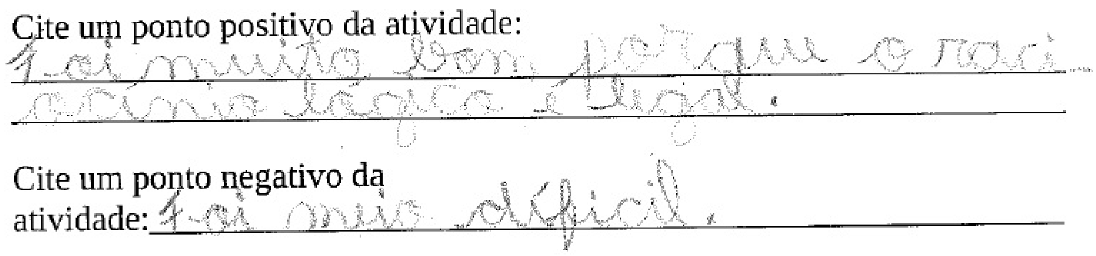


Figura 75 – Pontos positivos e negativos.

Questão 9 - O tempo para realizar a atividade foi suficiente? A Figura 76 mostra que mais de 50% respondeu que sim, assim como o observado em aula, acreditamos que o tempo é suficiente para a realização das atividades propostas. Devemos apenas evitar os problemas que ocorreram, como horários reduzidos, translado para outras salas, aula de Matemática após aula de Educação Física, etc. Chamamos a atenção também da preparação necessária ao professor que executar esse tipo de atividade.

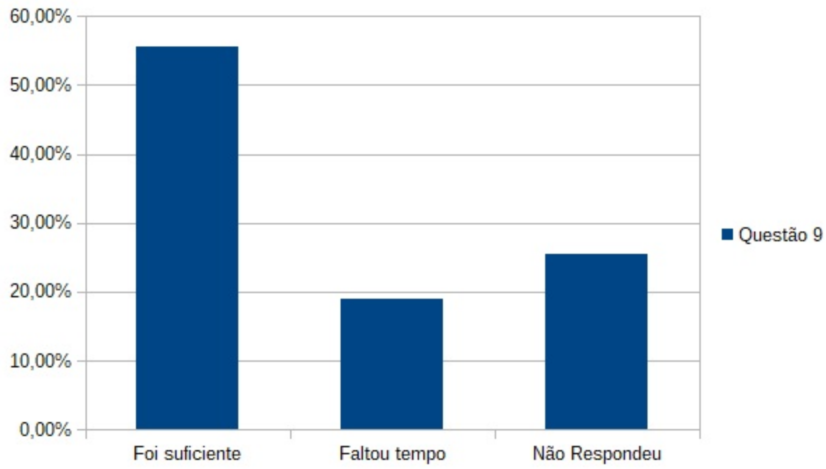


Figura 76 – O tempo para realizar a atividade foi suficiente.

Questão 10 - Gostaria de participar de atividades que envolvam matemática novamente? Pela Figura 77, percebemos que quase metade dos alunos gostariam de algo novo nesta matéria.

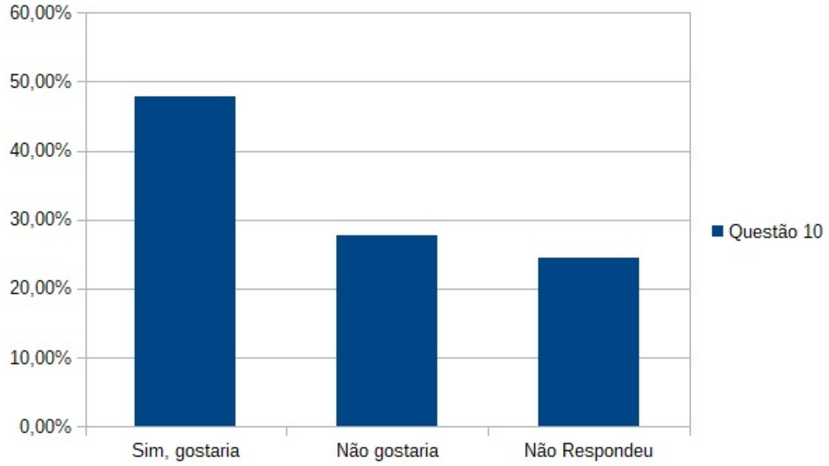


Figura 77 – Gostaria de participar de atividades que envolvam matemática novamente.

6 Conclusão

A escolha do tema, vem do interesse em tentarmos construir Quadrados Latinos (ORIHUELA, 2016), cada vez maiores, começando por 3×3, passando por 9×9 (SUDOKU) e indo até quase 100×100. Estudando o Quadrado Mágico quando aluno na Universidade Federal de Santa Maria, encontramos um método de construção num livro antigo e escrito a mão, Mello (MELLO, 1957) que em meio a tantos outros, inspirou um estudo mais aprofundado sobre o assunto.

Continuando os estudos, encontramos o Método $4n$, seção 3.3. Algum tempo depois, mais precisamente, quando estruturávamos este trabalho, obtemos o Método $4n+2$, seção 3.4, completando a meta de conseguir construir qualquer Quadrado Mágico de tamanho 3×3 até 100×100.

Apresentamos um pouco da história dos Quadrados Mágicos e sua influência com os matemáticos e em muitas áreas do conhecimento, dando grande importância ao místico, bem além de observar a Constante Mágica em outras formas, como por exemplo no triângulo. Lembramos que a História da Matemática e especificamente dos Quadrados Mágicos pode ser usada como recurso para despertar e estimular o interesse dos alunos pela Matemática e as atividades desenvolvidas.

Salientamos as construções dos Quadrado Mágicos, nos quais podemos aumentar sua "ordem" como quisermos, aumentando ou diminuído sua dificuldade, cuidando que para cada ordem devemos usar um método específico.

Neste trabalho fica evidente a grande versatilidade dos Quadrados Mágicos, se adaptando a quase todo tipo de conteúdo que envolva alguma operação de adição, como nos números naturais, números inteiros, expressões numéricas e equações.

Sobre a aplicação do uso do Quadrado Mágico em sala de aula, citamos Cabral, no qual salienta trabalhar matemática de formas diferentes:

> Acredito que o ensino de matemática não deve continuar sendo feito apenas com seu método tradicional, pois os alunos não conseguem aplicar os conhecimentos ensinados na escola em sua vida em sociedade. Penso que, se utilizarmos os jogos em sala de aula, de maneira consciente e compromissada, podemos melhorar a situação que se encontra o ensino/aprendizagem de matemática. Para isso, não devemos tornar o uso do jogo algo obrigatório, pois ele deve servir para o aluno apreender os conteúdos de maneira alegre e prazerosa. (CABRAL, 2006)

Tivemos a experiência de aplicar todo esse conhecimento sobre os Quadrados Mágicos, em uma Escola Pública Municipal (CAIC, São Gabriel - RS) com 90 alunos carentes, como citado no relato, em períodos de 45 minutos.

Estas atividades não puderam ser aplicadas com todos os alunos, pois as vezes os períodos de aula entraram em conflito com outro horários ou até mesmo a indisponibilidade de algum professor ceder sua aula e claro nem sempre estão presentes todos os alunos e geralmente aparecem aqueles que não querem participar das atividades. Pode acontecer que um período de 45 minutos não seja o suficiente para a aplicação de todas as atividades, ficando a cargo do professor dar continuidade em outro momento ou indicar para o aluno concluir as atividades em casa.

Este trabalho apresenta formas diferentes de estimular os professores e os alunos na fixação de conteúdos, mostrando que é possível atividades alternativas, desafiadoras, bem como divertivas e curiosas para aprofundar o conhecimento.

De modo geral os objetivos propostos foram alcançados, envolvendo um grande número de alunos participando, questionando, se envolvendo com cada atividade, enriquecendo a matemática e a troca de conhecimento. Apesar de alguns momentos surgirem dúvidas mais ao conteúdo relacionado que ao Quadrado Mágico, talvez pela dificuldades de apropriação do conteúdo ou em outros anos, demonstrado a necessidade de trabalhar e retrabalhar certos conteúdos, por exemplo, expressões numéricas, números inteiros, números racionais das formas mais variadas possíveis. A proposta do presente trabalho, utilizando Quadrados Mágicos, vai ao encontro dessa necessidade.

Esperamos que este trabalho tenha contribuído para o conhecimento dos Quadrados Mágicos, principalmente suas propriedades, que através das quais, podemos construir infinitos Quadrados Mágicos a partir de um único exemplo.

Para trabalhos futuros projetamos a aplicação no ensino médio usando conteúdos como números complexos, exponencial, adição de matrizes, explorando ainda mais as potencialidades dos Quadrados Mágicos. Os Quadrados Mágicos possuem potencial ainda a ser explorado, como por exemplo, o estudo em três dimensões formando com os números um "Cubo Mágico". Alguns autores, como (WEISSTEIN, 2003), já estão trabalhando neste aspecto, o que demonstra uma aplicabilidade ainda maior dos Quadrados Mágicos.

A realização deste trabalho nos permitiu ver como a educação necessita de algo a mais e que a constante busca por ferramentas lúdicas devem ser incorporadas à prática docente, tornando o ensino da matemática mais desafiador tanto para o professor quanto para o aluno. Com isso, os Quadrados Mágicos cumprem essa proposta, corroborando o disse Cabral, "os jogos matemáticos podem nos ajudar em sala de aula, tornando as aulas mais divertidas e prazerosas". (CABRAL, 2006)

Podemos explorar os jogos e desafios, como recursos extras para estimular os alunos e deixar a matemática mais atrativa que as aulas tradicionais, tornando o aprendizado mais rico e duradouro.

Referências

ANDRINI, M. J. V. Álvaro. *Praticando Matemática 7ano*. São Paulo: Editora do Brasil, 2012. 66 p. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 53.

APOSTOL, T. M.; ZUCKERMAN, H. S. *On Magic Squares Constructed by Uniforme Step Method*. [S.l.]: California Institute of Technology and University of Washington, 1951. Citado na página 36.

BIANCHINI, E. *Matemática 7 ano*. 6. ed. São Paulo: Moderna, 2008. 110 p. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 49.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 1996. 265 p. Citado na página 27.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, 1997. 57 p. Citado na página 49.

CABRAL, M. A. *A utilização de jogos no ensino de matemática*. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 82 e 83.

CAHú, R. D. *Quadrados mágicos de ordem ímpar a partir de quadrados latinos*. PROFMAT, Recife: Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2013. Citado na página 33.

CENTURION, M.; JAKUBOVIC, J. *Matemática 7ano*. São Paulo: Saraiva, 2012. 33, 53, 64, 119 p. Citado na página 49.

CHAVANTE, E. R. *Matemática 7ano*. São Paulo: SM, 2015. 28 p. Citado na página 49.

CONTADOR, P. R. M. *Matemática, uma breve história*. São Paulo: Livraria da Física, 2008. Citado na página 27.

DANTE, L. R. *Matemática 6ano*. São Paulo: Atica, 2013. 140 p. Citado na página 49.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas,SP: UNICAMP, 1997. Citado na página 27.

FAUVEL, R. F. J.; WILSON, R. *Music and Mathematics: from Pythagoras to Fractals*. [S.l.]: Oxford University Press, 2006. Citado na página 30.

GARDNER, M. *Rodas, vida e outras diversões matemáticas*. [S.l.]: Gradiva, 1992. Citado na página 16.

GRASHA, J.; MURUGAN, D. A. On the construction of doubly even order magic squares. 2014. Citado na página 44.

HEATH, R. V. *Mathemagic: Magic, Puzzles and Games with Numbers*. Dover Recreational Math, 1953. Disponível em: <extraidodehttp://mathluiz.blogspot.com.br/2014/10/o-quadrado-magico-da-hipotenusa-de-um.html>. Acesso em: 26.1.2016. Citado na página 32.

ICHIHARA, J. T. *Construção de quadrados mágicos pelo método do passo uniforme.* [S.l.]: Dissertação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.

ICHIHARA, P. N. d. S. J. T.; ABREU, R. C. P. de. *Quadrados mágicos: quando o método falha.* [S.l.]: Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM, 2015. Citado na página 36.

LEHMER, D. N. *On the congruences connected with certain magic squares.* [S.l.]: Transactions of the American Mathematical Society, 1929. Citado na página 36.

LEONARDO, F. M. de. *Projeto Araribá: Matemática.* São Paulo: Moderna, 2010. 21 p. Citado na página 49.

LOPES, T. I. D. A história dos quadrados mágicos. Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra, 2012. Citado na página 30.

MELLO, L. M. B. de. *Quadrados magicos.* [S.l.]: S. Ed., 1957. Citado na página 82.

MOL, R. S. *Introdução à história da matemática.* Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. Citado na página 16.

MORI, I.; ONAGA, D. S. *Matemática Ideias e desafios 6ano.* São Paulo: Saraiva, 2012. 56 p. Citado na página 49.

ORIHUELA, F. E. T. *Monografia: Quadrados Latinos.* UNICAMP, Campinas, SP: Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 82.

ROBERTS, G. E. *Composing with Numbers: Sir Peter Maxwell Davies and Magis Squares.* Worcester, MA: Departament of Mathematics and Computer Science, 2015. Citado na página 30.

STEPHENS, D. L. *Matrix properties of magic squares.* Denton, Texas: College of Arts and Sciences -School of Texas Woman's University, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 40.

VIDIGAL CARLOS AFONSO REGO, M. d. G. G. B. A.; SPIRA, M. *Matemática 6serie.* Belo Horizonte: Formato, 2002. 242 p. Citado na página 49.

WEISSTEIN, E. W. Perfect magic cube of order 5 discovered. Wolfram MathWord, 2003. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/news/2003-11-18/magiccube/>. Citado na página 83.

WORDPRESS. *Sobre todo, Matemáticas.* Wordpress, 2015. Disponível em: <https://matemelga.wordpress.com/2015/10/01/el-hexagono-magico/>. Acesso em: 26.1.2016. Citado na página 35.

Anexos

ANEXO A – Questionário

Questionário

1 -Você gosta de Matemática:

( )não ( )sim ( )raramente, as vezes

2 -Você já jogou algum jogo que use números:

( )não ( )sim ( )raramente, as vezes

3 -Você já participou de jogos que usam raciocínio lógico, estratégia:

( )não ( )sim ( )raramente, as vezes

4 -Sabe ou ouviu falar o que é Quadrado Mágico na Matemática:

( )não ( )sim ( )raramente, as vezes

5- Achou as atividades sobre Quadrado Mágico difíceis:

( )não ( )sim ( )raramente, as vezes

6- Gostou de participar da atividade:

( ) não ( ) sim ( )raramente, as vezes

7- Cite o que gostou nas atividades:

____

____

8- Cite o que não gostou nas atividades:

____

____

9- O tempo para realizar as atividades foi suficiente:

( ) não ( ) sim

10 -Gostaria de participar de atividades diferentes que envolvam matemática novamente:

( ) não ( ) sim

11- Tem alguma sugestão de atividade que envolva questões, desafios, raciocínio, curiosidades Matemáticas:

ANEXO B – Atividades 6º ano

Nome:____________________________________ Turma:___________ Idade:_________

Atividades 6° ANO

Quadrados Mágicos

1) Quadrados Mágicos são números distribuídos na forma quadrangular em que os números nos sentidos: horizontal, vertical e diagonal totaliza sempre o mesmo valor. Ou seja, a soma das diagonais, linhas ou colunas dá sempre o mesmo valor e o chamamos de Constante Mágica. Observe o seguinte exemplo, em que a Constante Mágica é 15:

4	9	2	=	15
3	5	7	=	15
8	1	6	=	15
=	=	=	=	
15	15	15		15

2) Usando os números 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, complete os quadrados de forma tenhamos um Quadrado Mágico:

	90		=
			=
	10		=
=	=	=	=

Interessante observar que a Constante Mágica é __________.
Que é o mesmo que multiplicar a Constante Mágica do quadrado anterior por _______, já que todos os números anteriores estão multiplicados.

3) Agora usando os números inteiros de 11 á 19, complete o próximo Quadrado Mágico e ache o valor da Constante Mágica:

			=
	15		=
18			=
=	=	=	=

Para cada número foi somado _________.
A Constante Mágica é da forma 15 + 3x____= ____.

ANEXO C – Atividades 7º ano

Nome:_________________________________ Turma:__________ Idade:________

Atividades 7° ANO

Quadrados Mágicos

1) Quadrados Mágicos são números distribuídos na forma quadrangular em que os números nos sentidos: horizontal, vertical e diagonal totaliza sempre o mesmo valor. Ou seja, a soma das diagonais, linhas ou colunas dá sempre o mesmo valor e o chamamos de Constante Mágica. Observe o seguinte exemplo, em que a Constante Mágica é 15:

4	9	2	=	15
3	5	7	=	15
8	1	6	=	15
=	=	=	=	
15	15	15		15

2) Usando os números inteiros de 11 á 19, complete o próximo Quadrado Mágico e ache o valor da Constante Mágica:

14			=
	15		=
			=
=	=	=	=

Para cada número foi somado _____.
Mas a Constante Mágica é da forma 15 + 3x___= ____.

3) Agora usando os seguintes números {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}, complete os quadrados de forma que tenhamos um Quadrado Mágico:

			=
	0		=
			=
=	=	=	=

A Constante Mágica é __________.

ANEXO D – Atividades 8º ano

Nome:_______________________________________ Turma:____________ Idade:__________

Atividades 8° ANO

Quadrados Mágicos

1) Quadrados Mágicos são números distribuídos na forma quadrangular em que os números nos sentidos: horizontal, vertical e diagonal totaliza sempre o mesmo valor. Ou seja, a soma das diagonais, linhas ou colunas dá sempre o mesmo valor e o chamamos de Constante Mágica. Observe o seguinte exemplo, em que a Constante Mágica é 15:

4	9	2	=	15
3	5	7	=	15
8	1	6	=	15
=	=	=	=	
15	15	15		15

2) Usando os seguintes números {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,} complete os quadrados de forma que tenhamos um Quadrado Mágico:

			=
	0		=
			=
=	=	=	=

A Constante Mágica é ___________.

3) Considerando que temos um Quadrado Mágico abaixo, resolva as expressões numéricas de cada quadro e calcule quanto é a Constante Mágica.

-1.(8-10)	8:2+3	0.(2+1)	=
-9+10	3+{2-[5-(2+1)]}	(5+10):3	=
[1+(2.1)]+3	(8-10)+1	2.(10-8)	=
=	=	=	=

O valor final da Constante Mágica é _____.

ANEXO E – Atividades 9º ano

Nome:______________________________________ Turma:___________ Idade:_________

Atividades 9° ANO

Quadrados Mágicos

1) Quadrados Mágicos são números distribuídos na forma quadrangular em que os números nos sentidos: horizontal, vertical e diagonal totaliza sempre o mesmo valor. Ou seja, a soma das diagonais, linhas ou colunas dá sempre o mesmo valor e o chamamos de Constante Mágica. Observe o seguinte exemplo, em que a Constante Mágica é 15:

4	9	2	=	15
3	5	7	=	15
8	1	6	=	15
=	=	=	=	
15	15	15		15

2) Usando as seguintes raízes exatas $\sqrt{64}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{36}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, complete todos quadrados de forma que tenhamos um Quadrado Mágico:

			=
	$\sqrt{25}$	$\sqrt{49}$	=
$\sqrt{64}$			=
=	=	=	=

Extraindo as raízes, a Constante Mágica é __________.

3) Considerando temos abaixo um Quadrado Mágico e as propriedades da radiciação, calcule a Constante Mágica, simplificando as raízes:

$\sqrt{8}$	$\sqrt{98}$	$\sqrt[3]{0}$	=
$\sqrt{2}$	$\sqrt{18}$	$\sqrt{50}$	=
$\sqrt{72}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{32}$	=
=	=	=	=

O Valor final da Constante Mágica é _________.