Welton Francisco de Oliveira

Uma proposta para ampliar a perspectiva de professores e alunos em relação ao estudo de matrizes

Presidente Prudente

2017

Welton Francisco de Oliveira

Uma proposta para ampliar a perspectiva de professores e alunos em relação ao estudo de matrizes

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Presidente Prudente.

Orientador: Prof. Dr. Aylton Pagamisse

Presidente Prudente
2017

Oliveira, Welton Francisco de.
Uma proposta para ampliar a perspectiva de professores e alunos em relação ao estudo se matrizes / Welton Francisco de Oliveira. -- São José do Rio Preto, 2017
129 f. : il., gráfs., tabs.

Orientador: Aylton Pagamisse
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Geometria - Estudo e ensino. 3. Matrizes (Matemática) 4. Transformações (Matemática) 5. Matemática - Currículos. 6. Tecnologia educacional. 7. Ensino auxiliado por computador. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 513(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Campus de São José do Rio Preto

Welton Francisco de Oliveira

Uma proposta para ampliar a perspectiva de professores e alunos em relação ao estudo de matrizes

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Aylton Pagamisse
Orientador

Prof. Dr. Marco Antônio Piteri
Departamento de Matemática e Computação - FCT/UNESP

Prof. Dr. Danillo Roberto Pereira
Programa de Pós-Graduação em MMADRE/UNOESTE, DC/UFSCAR e UNB

Presidente Prudente, 24 de fevereiro de 2017

Este trabalho é dedicado à minha família e amigos, em especial aos meus pais, meu tio Manuel Francisco de Lima e minha avó Maria Vicente de Lima.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Maria Aparecida de Oliveira e Edelzio Francisco de Oliveira, que apesar das dificuldades, dedicaram sua vida para educar seus filhos da melhor maneira possível.

Agradeço aos meus colegas de profissão por estarem sempre me incentivando e compartilhando seus conhecimentos.

Agradeço a toda a equipe da ETEC Professora Nair Luccas Ribeiro e meus queridos alunos por colaborarem com a elaboração deste trabalho.

Agradeço a todos os meus colegas de turma do PROFMAT de Presidente Prudente que sempre estiveram juntos nesta jornada.

Agradeço à CAPES por conceder uma bolsa de estudos durante dois anos.

Agradeço aos professores doutores do departamento de matemática FCT/UNESP por conduzirem brilhantemente as aulas durante todo o curso.

Agradeço em especial o meu orientador Dr. Aylton Pagamisse e o professor Dr. Marco Antônio Piteri, por dedicarem seu tempo e compartilharem um pouco do seu conhecimento tornando possível a elaboração desta dissertação.

"Não é paradoxo dizer que nos nossos momentos de inspiração mais teórica podemos estar o mais próximo possível de nossas aplicações mais práticas."(A. N. Whitehead)

Resumo

As matrizes são objeto de estudo na Educação Básica e na Educação Superior, porém, apesar de estarem relacionadas a diversas aplicações na Matemática, Engenharia, Computação Gráfica, e Economia, por exemplo, no Ensino Médio são abordadas de maneira superficial, mecânica e subjetiva. Em 2008, a proposta curricular do Estado de São Paulo tentou alterar esse panorama associando o estudo de matrizes a codificações e transformações geométricas. No entanto, como professor de matemática da rede estadual de ensino de São Paulo desde 2005, entendo nos diálogos com os colegas professores de Matemática e nos resultados das avaliações, sejam internas ou externas, que a estrutura do material oferecido ainda deixa lacunas que dificultam o ensino de matrizes. O presente trabalho pretende utilizar o software GeoGebra como principal agregador de teoria e prática, com foco no estudo de transformações geométricas. Além disso, serão apresentadas aplicações de matrizes na computação gráfica e imagens digitais. Outro ponto relevante é a proposta diferenciada de resolução de situações de aprendizagem contidas no material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo. Também serão elaboradas atividades sobre transformações geométricas. Essas atividades serão aplicadas como pesquisa a um grupo de alunos do Ensino Médio. Dessa forma, pretende-se não descartar o material didático existente, mas sim enriquecer e aprimorar as práticas pedagógicas em sala de aula, transformando um material muitas vezes rejeitado em uma poderosa fonte de conhecimento que oferece aos professores e alunos do ensino médio uma alternativa que amplia a perspectiva de Matriz de forma eficiente e significativa.

Palavras-chave: Matrizes. Aplicações. Transformações geométricas. Proposta curricular. GeoGebra.

Abstract

The matrices are object of study in Basic Education and Higher Education, but, although they are related to several applications in Mathematics, Engineering, Computer Graphics, and Economics, for example, in High School are approached superficially, mechanically and subjectively. In 2008, the curricular proposal of the State of São Paulo tried to change this scenario by associating the study of matrices with geometric codifications and transformations. However, as a professor of mathematics at the São Paulo state education network since 2005, I understand in the dialogues with my fellow mathematics teachers and in the results of the evaluations, whether internal or external, that the structure of the material offered still leaves gaps that make it difficult to Teaching of matrices. The present work intends to use GeoGebra software as the main aggregator of theory and practice, focusing on the study of geometric transformations. In addition, matrix applications will be presented in computer graphics and digital images. Another relevant point is the differentiated proposal for solving learning situations contained in the curriculum support material of the State of São Paulo. Also will be elaborated activities on geometric transformations. These activities will be applied as research to a group of high school students. Thus, it is intended not to discard existing teaching material, but rather to enrich and improve pedagogical practices in the classroom, transforming an often rejected material into a powerful source of knowledge that offers teachers and high school students an alternative that Extends the matrix perspective efficiently and significantly.

Key-words: Matrices. Applications. geometric transformations. Curriculum proposal. GeoGebra.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência milenar que ao longo do tempo vem acumulando conhecimentos que tornam viáveis e impulsionam o desenvolvimento de novas tecnologias. Porém, para que esse conhecimento seja transmitido de maneira eficiente é necessário que os profissionais da educação estejam em constante aprimoramento, buscando atualizações que lhes permitam elaborar estratégias de ensino diferenciadas e significativas.

Durante anos atuando como docente da rede estadual de ensino do estado de São Paulo, é possível perceber a dificuldade que alguns professores de matemática, enfrentam ao se deparar com situações de aprendizagem que se tornam complexas, abstratas e pouco significativas tanto para ele, professor, quanto para seus alunos.

É evidente que a proposta curricular para o Estado de São Paulo implantada em 2008, trouxe um material inovador, que aborda a matemática com uma visão diferenciada, fugindo do que é proposto na maioria dos tradicionais livros didáticos. Porém, ao mesmo tempo que amplia o horizonte dos professores e alunos, propondo conceitos que até então não eram trabalhados na educação básica, deixa a desejar no que diz respeito a estruturação das situações de aprendizagem, a sequência didática e principalmente em relação a qualificação do docente para utilizar corretamente o material oferecido.

Em 2014, ao ingressar no PROFMAT[1] veio a oportunidade de ampliar meus conhecimentos em álgebra linear. Isso proporcionou-me um aprofundamento no estudo de matrizes, trazendo à tona as lembranças das situações de aprendizagem contidas no caderno de estudos dos alunos. Tais situações relacionam o estudo de matrizes à geometria. Dessa forma, ao conversar com meu orientador, decidimos trabalhar as situações de aprendizagem contidas no caderno do aluno de maneira diferenciada e com foco nas transformações geométricas no plano, porém, sem descartar as outras atividades que compõe as situações de aprendizagem relacionadas a matrizes.

O *software* GeoGebra, surgiu de forma natural como uma opção para ser a principal ferramenta utilizada no desenvolvimento das atividades. Dentre os motivos dessa escolha, destacam-se a gratuidade, a popularidade e a facilidade de manipulação. Atualmente o GeoGebra está disponível *on-line* e pode ser instalado em celulares.

Dessa forma, este trabalho tem como objetivo proporcionar a professores da rede estadual de São Paulo e alunos de licenciatura em matemática uma alternativa eficiente e significativa para o estudo de matrizes com foco em transformações geométricas.

Agora veremos uma breve descrição da estrutura desta dissertação.

[1] O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) é um curso semipresencial, com oferta nacional, realizado por uma rede de Instituições de Ensino Superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil, e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática.

No Capítulo 2 aborda-se um pouco da história das matrizes. Geralmente o estudo da História da Matemática é pouco utilizado nas salas de aula, isso faz com que os alunos tenham dificuldade em construir ideias e conceitos matemáticos. Logo, recorrer a História da Matemática é muito importante, "pois perceber as evoluções das ideias matemáticas somente observando o estado atual dessa ciência não nos dá toda a dimensão das mudanças". (SANTOS, 2009)

Ainda neste capítulo são analisados os principais documentos oficiais referentes a educação, ou seja, relata-se como os parâmetros e orientações curriculares abordam as matrizes e transformações geométricas no Brasil.

No Capítulo 3, é apresentado ao leitor um resumo das concepções pedagógicas da proposta pedagógica para o Estado de São Paulo. Também relata-se a metodologia utilizada para a construção deste trabalho, a Engenharia Didática. Além disso, são descritos alguns conceitos básicos sobre matrizes necessários para o desenvolvimento das situações de aprendizagem. Outro ponto importante deste capítulo são as propostas de resolução das situações de aprendizagem, suas aplicações em sala de aula e os resultados alcançados.

No Capítulo 4 aprofunda-se o estudo de matrizes, mais precisamente, são trabalhados conceitos de nível superior com objetivo de intensificar a abordagem das transformações geométricas planas. Além disso, a fim de ampliar as perspectivas de professores e alunos também são apresentadas aplicações de matrizes em imagens digitais e na computação gráfica.

O Capítulo 5, apresenta a elaboração e aplicação de atividades para um grupo de alunos da segunda série do Ensino Médio da Escola Técnica Estadual (ETEC), Professora Nair Luccas Ribeiro em Teodoro Sampaio-SP. Além disso, são realizadas analises a partir dos resultados obtidos através da aplicação das atividades.

No Capítulo 6 estão descritas as considerações finais sobre este trabalho, ou seja, conclusões, contribuições e objetivos alcançados.

Nos Apêndices são apresentadas as atividades elaboradas para aplicação em sala de aula e realização da pesquisa.

Em Anexo está disponível um *link* que direciona o leitor para a Avaliação da Aprendizagem em Processo, que é uma das avaliações aplicadas na pesquisa.

2 MATRIZES: HISTÓRIA, PARÂMETROS E ORIENTAÇÕES CURRICULARES.

O estudo da História da Matemática é uma ferramenta poderosa que pode contribuir de maneira qualitativa auxiliando os alunos a compreenderem a importância de conceitos matemáticos que no decorrer dos séculos têm colaborado para o desenvolvimento de novas tecnologias essenciais para a transformação e aperfeiçoamento da sociedade em geral. Além disso, o estudo da História da Matemática, deve ser utilizado pelo professor como uma fonte de conhecimento que lhe permita aperfeiçoar sua prática docente. Estabelecer relações da matemática, com a economia, outras ciências e religião, permite compreender conhecimentos matemáticos do presente e do passado (SANTOS, 2009).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, relatam em uma de suas seções a importância e utilidade da História da Matemática como recurso no processo de ensino e aprendizagem:

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento.(BRASIL, 1998, p.42).

Portanto, neste capítulo aborda-se brevemente o contexto histórico do estudo de Matrizes, para isto, será desenvolvida uma análise histórica da matemática buscando em civilizações antigas e contemporâneas evidências que interligadas permitam que o leitor perceba naturalmente a influência dos sistemas lineares, dos determinantes e das formas quadráticas no desenvolvimento dos conceitos atuais sobre matrizes. Além disso, investiga-se como os documentos oficiais, parâmetros e diretrizes curriculares, abordam o estudo de matrizes e transformações geométricas na educação básica, a relevância e o grau de aprofundamento do assunto no Brasil.

2.1 Civilizações antigas

Os primeiros indícios sobre matrizes e determinantes datam do século II a.C. durante o desenvolvimento das civilizações antigas (O'CONNOR; ROBERTSON, 1996). Porém, alguns historiadores encontraram vestígios que sugerem que tal fato ocorreu aproximadamente dois séculos antes, por vota do século IV a.C.

Os babilônios [1], utilizavam a escrita cuneiforme, que consiste em utilizar objetos em forma de cunha para escrever em blocos de argila. Para que esses blocos fossem preservados por grandes períodos, eram levados a um forno, isso lhes conferia maior resistência à ação do tempo. Uma dessas tabuletas que foi confeccionada por volta de 300 a.C. mostra que os babilônios estudaram problemas que conduziram ao estudo de equações lineares, que por sua vez induziram o surgimento das matrizes e determinantes. Todavia, segundo O'Connor e Robertson (1996), foram os chineses que mais se aproximaram da noção de matrizes. O livro *Chui-Chang Suan-Shu* traduzido para o português *"Os Nove Capítulos da Arte Matemática"* [2], escrito por volta do ano 100 a.C e de autor desconhecido, esta obra é composta por 246 problemas referentes a mensuração de terras, agricultura, impostos, sociedade, engenharia e equações. Além disso, contém o que são considerados os primeiros exemplos de matrizes. Um dos problemas consiste em um sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Para resolver este sistema os chineses utilizaram operações com os elementos contidos neste quadro:

Tabela 2.1 – Quadro chinês

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Fonte: BOYER, 1974, p.144

Após reduzi-lo obtém-se um novo quadro:

Tabela 2.2 – Quadro chinês reduzido

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

Fonte: BOYER, 1974, p.144

Esse novo quadro contém as equações $36z = 99$, $5y + z = 24$ e $2x + y = 39$, que são facilmente solucionadas através de operações aritméticas básicas.

[1] Antiga civilização localizada na região da Mesopotâmia.

[2] Uma das obras matemáticas mais antigas da China, foi escrita durante a dinastia *Zhou* e compilada muitas vezes entre os séculos I e II.

Esses quadros atualmente são denominados matrizes, desta forma, acredita-se que os estudos sobre matrizes tiveram como propósito inicial a resolução de sistemas lineares. Além de matrizes, a matemática chinesa contribuiu com outros conceitos e definições, porém, poderia ter contribuído muito mais:

> Se a matemática Chinesa tivesse tido ininterrupta continuidade de tradição, algumas das notáveis antecipações dos métodos modernos poderiam ter modificado substancialmente o desenvolvimento da matemática, mas a cultura chinesa foi seriamente prejudicada por quebras abruptas. Em 213 a.C., por exemplo, o imperador da china mandou queimar livros. Algumas obras obviamente escaparam seja por transmissão oral; e o aprendizado de fato continuou com ênfase, quanto a matemática, em problemas de comércio e calendário.(BOYER, 1974, p.144).

Entretanto, durante um longo período as matrizes e determinantes permaneceram esquecidas, reaparecendo fortemente somente no século XVII. Com o passar do tempo os matemáticos de várias partes do mundo tiveram outras influências que permitiram o desenvolvimento da teoria das matrizes, dentre elas se destacam as formas quadráticas.

2.2 Matrizes e formas quadráticas

Diversos resultados do estudo da Teoria das Matrizes, tanto os resultados básicos como os mais abstratos, surgiram quando o objeto formal de investigação eram as formas quadráticas[3]

> Uma forma quadrática num espaço vetorial E é uma função que, em termos das coordenadas de um vetor relativamente a uma base de E, se exprime como um polinômio homogêneo do segundo grau. As formas quadráticas ocorrem com grande destaque em problemas de otimização (máximos e mínimos), no estudo das superfícies quádricas, na Geometria Diferencial, na Mecânica, etc. Em todas essas situações, é relevante o conhecimento do sinal (positivo ou negativo) que a forma pode assumir ou, mais precisamente, dos seus autovalores. (LIMA, 2014, p.224).

Segundo O'Connor e Robertson (1996), em 1660, Jan de Witt em sua obra "Elementos de Curva"mostrou como uma transformação dos eixos reduz uma determinada equação para uma cônica na forma canônica. Esse processo é equivalente a diagonalização de uma matriz simétrica, porém, de Witt não visualizava esse procedimento dessa forma, pois, na época as formas quadráticas eram tratadas escalarmente, diferentemente dos dias atuais, onde é extremamente relevante o estudo dessas formas com o auxílio da notação e teoria matricial.

Em 1683 o japonês Seki Kowa sistematizou um antigo método chinês de resolução de sistemas lineares cujos coeficientes eram barras de bambu dispostas em quadrados sobre uma tábua (BAUMGART, 1992). Utilizando esse método Seki encontrou determinantes

[3] Polinômios quadráticos homogêneos em n variáveis.

de matrizes até quinta ordem. Uma década depois, na Europa, o matemático alemão Gottfried Whilhelm Von Leibniz formalizou o conceito de determinantes. Em uma carta ao marquês de L'Hospital Leibniz mostrou que o sistema de equações

$$\begin{cases} 10 + 11x + 12y = 0 \\ 20 + 21x + 22y = 0 \\ 30 + 31x + 32y = 0 \end{cases}$$

apresentava solução, pois, $10 \cdot 21 \cdot 32 + 11 \cdot 22 \cdot 30 + 12 \cdot 20 \cdot 31 = 10 \cdot 22 \cdot 31 + 11 \cdot 20 \cdot 32 + 12 \cdot 21 \cdot 30$, atualmente essa ideia corresponde exatamente à condição de que a matriz dos coeficientes tem determinante zero. Leibniz ainda estudou coeficientes de formas quadráticas, o que o conduziu de forma natural para a teoria de matrizes. Contudo, segundo Baumgart (1992), em 1750, Gabriel Cramer chegou a definição de determinantes de forma independente ao publicar sua conhecida regra para solucionar sistemas de equações lineares, porém, sem utilizar a notação atual. Outros matemáticos também contribuíram com os estudos sobre determinantes, entre eles, Vandermonde, Laplace, e Cauchy.

Outro matemático a relacionar formas quadráticas à teoria de matrizes foi Lagrange em 1790. Ao estudar a caracterização de máximos e mínimos em uma função real de n variáveis, isso o direcionou ao estudo do sinal da forma quadrática agregada à matriz que tem como elementos as segundas derivadas dessa função real. No século XIX, a teoria das formas quadráticas foi tratada como um dos assuntos mais relevantes entre os matemáticos.

Em 1801, Gauss, ao discutir o estudo das formas quadráticas em sua mais famosa obra *"Disquisitiones Arithmeticae"*[4], foi o primeiro a utilizar o termo "determinante". Gauss teria recorrido a este termo, porque o determinante determina as propriedades da forma quadrática. *"Disquisitiones Arithmeticae"* foi dedicada ao Duque de Brunwisck, patrono de Gauss (BOYER, 1974). Essa obra é considerada a principal responsável pelo desenvolvimento da linguagem e notação do ramo da teoria dos números conhecido como álgebra das congruências que fornece um exemplo de classes de equivalência. Porém, esse conceito de determinante utilizado por Gauss ainda não era o mesmo utilizado atualmente. Para Baumgart (1992), em 1812 foi Cauchy que atribui o nome "determinante"ao conceito e também enunciou o teorema da multiplicação. Gauss também associava os coeficientes de suas formas quadráticas a matrizes retangulares. Ainda sem alcançar o conceito de álgebra matricial, ele descreve o produto entre matrizes e o inverso de uma matriz no mesmo contexto das matrizes de coeficientes de formas quadráticas.

Em 1826 Cauchy, no contexto de formas quadráticas em n variáveis, utilizou a expressão "quadro"para nomear a matriz de coeficientes (O'CONNOR; ROBERTSON, 1996). Além disso, descobriu os valores próprios que resultaram na diagonalização de uma matriz, que pode ser convertido de uma forma para a soma dos quadrados. Não satisfeito,

[4] Livro sobre teoria dos números escrito por Gauss em 1798.

Cauchy ainda introduziu a ideia de matrizes semelhantes, mostrando que duas matrizes semelhantes possuem a mesma equação característica. Ainda trabalhando no contexto de formas quadráticas, demonstrou que toda matriz simétrica real é diagonalizável. Desta forma, é notável a relevância da teoria das formas quadráticas no contexto de matrizes, pois seu estudo convergiu para a descoberta de vários conceitos.

2.3 A origem do termo Matriz

Nas seções anteriores nota-se que apesar da ideia de matriz estar presente em diversos estudos realizados ao longo do tempo, o termo "Matriz"com o significado atual, ainda não era abordado pelos matemáticos. O primeiro a utilizar esse termo foi o matemático inglês James Josefh Silvester em 1850. De acordo com O'Connor e Robertson (1996), Silvester teria utilizado esse nome, pois, o bloco retangular de termos, gerava uma infinidade de sistemas de determinantes. Porém para Boyer (1974), quem ficou conhecido como inventor das matrizes foi um outro matemático inglês, Arthur Cayley, em 1958, publicou um trabalho sobre a teoria de matrizes, que continha a primeira definição abstrata de matriz.

Além disso, ele definiu as operações de adição, multiplicação, multiplicação por escalar e inversão de matrizes. Assim, Cayley mostrou que os estudos realizados anteriormente envolvendo formas quadráticas e transformações lineares eram casos particulares de um conceito geral que tinha desenvolvido.

Apesar de ter contribuído largamente para o desenvolvimento da teoria de matrizes, Cayley teve a colaboração de outros grandes matemáticos, inclusive um de seus colaboradores e amigo, foi o próprio Silvester, que era advogado, assim como Cayley. "A teoria das matrizes de Cayley surgiu a partir de seu interesse, por transformações lineares e invariantes algébricos, um interesse compartilhado por James Josefh Silvester"(BAUMGART, 1992, p.53). Além disso, segundo Boyer (1974, p.426), "Mais importante que sua obra sobre eliminação, foi a colaboração de Sylvester com Cayley no desenvolvimento da teoria das "formas"[...]". Acredita-se que Willian Rowmam Hamilton foi outro matemático que colaborou com as descobertas de Cayley, tanto que um dos resultados mais importantes sobre a teoria de matrizes é conhecido como teorema de Hamilton-Cayley.

Segundo Baumgart (1992), em 1837, alguns anos após Gauss definir sua abordagem aos números complexos, Hamilton chegou de maneira autônoma as mesmas descobertas, as quais aplicou em rotações e vetores no plano. Mais tarde em 1843, generalizou de pares ordenados para n-uplas, com destaque para as quadruplas(*quatérnions*), ampliando a álgebra vetorial do plano para o espaço.

Porém, tanto Boyer (1974), como Baumgart (1992), apontam que Cayley negava a influência da teoria dos *quatérnions*[5] de Hamilton em seus estudos, ele alegava que suas ideias relativas a matriz surgiram a partir do estudo de determinantes.

[5] Teoria que generaliza o cálculo vetorial e os números complexos.

> Todavia, Cayley, com quem se iniciou explicitamente a teoria das matrizes, afirmou ter aprendido a noção "ou indiretamente da noção de determinante"ou como um modo conveniente de expressão das seguintes equações:
>
> $$x' = ax + by$$
> $$y' = cx + dy$$
>
> Cayley representou essa transformação por
>
> $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
>
> e desenvolveu uma álgebra das matrizes observando propriedades das transformações em equações lineares.(BAUMGART, 1992, p.28).

Ainda de acordo com Baumgart(1992), toda essa controvérsia iniciou-se em 1858 quando Cayley mostrou que um *quatérnion* poderia ser representado na forma de matriz. Por exemplo, se os *quatérnions* unitários I, i, j, k são representados respectivamente por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

já o *quatérnion* $4 + 5i + 6j + 7k$ pode ser representado da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} 4+5i & 6+7i \\ -6+7i & 4-5i \end{pmatrix}$$

Este fato, teria levado um dos alunos de Hamilton a conclusão errônea de que Cayley teria sido influenciado pela obra de seu mestre. Atualmente a teoria das matrizes é um dos capítulos de um assunto mais abrangente, a álgebra linear.

Após esse longo período de desenvolvimento, onde grandes matemáticos de diversas nacionalidades colaboraram para o aperfeiçoamento da teoria das matrizes, foram surgindo diversas aplicações nas mais variadas áreas do conhecimento, tornando-se atualmente instrumento matemático indispensável para o desenvolvimento do trabalho de geneticistas, estatísticos, engenheiros, cientistas sociais e físicos. Nos próximos capítulos organizaremos os conceitos e definições sobre matrizes de maneira a evidenciar algumas dessas aplicações.

2.4 Parâmetros e Orientações Curriculares

Iniciaremos nossa análise a partir dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que norteiam a construção das matrizes de referência que por sua vez indicam o conjunto de habilidades a serem desenvolvidas e avaliadas nas respectivas áreas de conhecimento em diferentes níveis de ensino. Os PCN do terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental[6]trazem na seção ,"Espaço e Forma", orientações didáticas referentes à transformações geométricas. Pode parecer estranho o fato de que o estudo sobre transformações geométricas inicia-se tão cedo na vida escolar, porém, segundo os PCN, a abordagem deste tema justifica-se pelo seu grau de contextualização:

> À primeira vista as transformações podem parecer um assunto que não tem relação com o dia-a-dia, mas, refletindo e observando um pouco, nota-se, por exemplo, que as simetrias estão muito presentes no cotidiano. Em inúmeros objetos físicos ocorrem aproximações de planos de simetria de reflexão. Em representações planas desses objetos, tais planos de simetria reduzem-se a eixos de simetria. No corpo humano pode-se observar (aproximadamente) um plano de simetria. Assim, também a imagem de um objeto no espelho é simétrica a ele. Há eixos de simetria em diversas criações do homem, como desenhos de aeronaves, edifícios e móveis. (BRASIL, 1998, p.124).

Desde a antiguidade o homem vem utilizando em pinturas, cerâmicas e tecelagem o conceito de transformações que quando aplicadas a figuras geométricas provocam nestas mudanças de direção e sentido, porém, mantém inalterada sua escala, essas transformações no plano são denominadas *Isometrias*. Veja a figura 2.1, uma das obras de Esher[7].

Figura 2.1 – Ensaio para obra circulação, 1938

Fonte: <www.slideshare.net/solanisregina/aula-simetria-com-escher>

[6] Na época da elaboração dos PCN o Ensino Fundamental era dividido em quatro ciclos, onde o terceiro e quarto ciclos abrangiam as séries de 5ª a 8ª, porém, com a implantação da lei nº 11274 de 06 de fevereiro de 2006, passa a vigorar o Ensino Fundamental de 9 anos, que é composto por três ciclos, onde no 3º ciclo estão matriculados alunos do 6º ao 9º ano, o que corresponde ao terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental de 8 anos.

[7] Maurits Cornelis Escher foi um artista gráfico holandês famoso por suas obras consideradas impossíveis, com preenchimento regular do plano, exploração do infinito, metamorfoses e isometrias.

As isometrias são classificadas em simples e compostas[8], as principais isometrias simples são as translações, reflexões e rotações. Os PCN recomendam o estudo das isometrias como referência para estimular o desenvolvimento de conceitos e propriedades relativos a congruência de figuras planas:

> O estudo das transformações isométricas [...] é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência. As principais isometrias são: reflexão numa reta (ou simetria axial), translação, rotação, reflexão num ponto (ou simetria central), identidade. Desse modo as transformações que conservam propriedades métricas podem servir de apoio não apenas para o desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas, mas também para a compreensão das propriedades destas. (BRASIL, 1998, p.124).

Além disso, para desenvolver o conceito de semelhança é necessário que os alunos compreendam o que é razão de semelhança, assim, o estudo da *Homotetia*, transformação geométrica que provoca a ampliação positiva ou negativa de figuras geométricas, mas que preserva as principais características como forma e ângulos, se torna indispensável para a assimilação de tal conceito. Sobre o estudo das homotetias nos terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental os PCN recomendam:

> O estudo das transformações que envolvem a ampliação e redução de figuras é um bom ponto de apoio à construção do conceito de semelhança. Porém, esse conceito é geralmente abordado apenas para os triângulos, tendo como única referência a definição que é apresentada ao aluno já na introdução desse conteúdo: "dois triângulos são semelhantes quando e somente quando têm os três ângulos respectivamente congruentes ou os lados correspondentes proporcionais". Tal abordagem é limitada para uma compreensão mais ampla do conceito de semelhança. Isso pode ser favorecido se tal conceito for estudado em outras figuras, inclusive nas não-poligonais. (BRASIL, 1998, p.124).

Após essa breve análise notamos que os PCN para o terceiro e quarto ciclos do ensino Fundamental, recomendam explicitamente o ensino das transformações geométricas, isso possibilita que o estudo destas transformações seja ampliado e aprofundado de maneira consistente e organizada no Ensino Médio.

Um outro documento a ser analisado são os Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio (PCNEM), que foi desenvolvido para elencar um rol de competências e habilidades básicas que devem ser adquiridas pelos estudantes deste nível de ensino. "Pretende, portanto, uma explicitação das habilidades básicas, das competências específicas, que se espera sejam desenvolvidas pelos alunos em Biologia, Física, Química e Matemática [...]"(BRASIL, 1999). Observa-se anteriormente que os PCN para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental recomendam amplamente o estudo das transformações geométricas, assim esperava-se que os PCNEM sugerissem o prosseguimento ao estudo, ampliando

[8] Isometrias compostas são obtidas através da composição de duas ou mais isometrias simples. Um exemplo de isometria composta é a reflexão deslizante, que é composta por uma reflexão e uma translação paralela ao eixo de reflexão.

conceitos e reforçando ideias sobre o tema, porém, o que verifica-se é uma abordagem diferenciada dos conteúdos, enquanto os PCN abordam os temas de maneira específica, detalhando e sugerindo práticas que possibilitem o desenvolvimento de conceitos e habilidades, os PCNEM em sua parte III, apresentam como referencial uma visão mais ampla do Ensino Médio, enfatizando interdisciplinaridade e contextualização:

> Tais referenciais já direcionam e organizam o aprendizado, no Ensino Médio, das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, no sentido de se produzir um conhecimento efetivo, de significado próprio, não somente propedêutico. De certa forma, também organizam o aprendizado de suas disciplinas, ao manifestarem a busca de interdisciplinaridade e contextualização e ao detalharem, entre os objetivos educacionais amplos desse nível de ensino, uma série de competências humanas relacionadas a conhecimentos matemáticos e científico-tecnológicos. Referenda-se uma visão do Ensino Médio de caráter amplo, de forma que os aspectos e conteúdos tecnológicos associados ao aprendizado científico e matemático sejam parte essencial da formação cidadã de sentido universal e não somente de sentido profissionalizante.(BRASIL, 1999, p.4).

Portanto, conclui-se que tratando-se de transformações geométricas os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio não dão o prosseguimento adequado às práticas sugeridas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, pois tais conhecimentos não são abordadas de maneira específica, o foco está na promoção da interdisciplinaridade entre as áreas do conhecimento.

Em 2002 foi elaborado o PCN+, que tinha por objetivo complementar as orientações educacionais descritas no primeiro documento de 1999. "Sem pretensão normativa, e de forma complementar aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), as orientações educacionais aqui apresentadas têm em vista [...]"(BRASIL, 2002). Entretanto, esse documento trata do assunto, transformações geométricas, de maneira superficial, muito breve. O documento de 2002 descreve o que se espera dos alunos no desenvolvimento das competências de cada área. Na área de matemática, sobre transformações, diz que os alunos devem:

> Identificar transformações entre grandezas ou figuras para relacionar variáveis e dados, fazer quantificações, previsões e identificar desvios. As ampliações e reduções de figuras são exemplos que devem ser entendidos como transformações de uma situação inicial em outra final. (BRASIL, 2002, p.116).

Quatro anos depois do PCN+, foram elaboradas as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, que tem como objetivo "contribuir para o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente"(BRASIL, 2006). As Orientações Curriculares para o Ensino Médio, trazem em seu volume 2, algumas citações sobre transformações geométricas. Após citar o estudo da Geometria Analítica, o documento sugere um estudo introdutório da geometria vetorial e das transformações geométricas:

> Uma introdução à geometria vetorial e às transformações geométricas no plano e no espaço – isometria e homotetia – é também mais uma oportunidade de trabalhar conceitos matemáticos sob os pontos de vista algébrico e geométrico.(BRASIL, 2006, p.93).

Além disso, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, sugerem como tema complementar o estudo mais aprofundado dos números complexos, associado às transformações geométricas:

> Outro tópico que pode ser tratado como tema complementar é o estudo mais aprofundado dos números complexos. Por um lado, podem-se explorar os aspectos históricos da introdução dos números complexos e de seu papel fundamental no desenvolvimento da álgebra. Por outro lado, podem-se explorar as conexões entre as operações com números complexos e as transformações geométricas no plano.(BRASIL, 2006, p.94).

Após a análise de alguns dos principais documentos oficiais da educação básica, conclui-se que a oferta de estratégias e ferramentas para subsidiar o estudo das transformações geométricas é extremamente escasso, sendo mais abrangente no Ensino Fundamental que no Ensino Médio. Além disso, o estudo de Matrizes não é citado de forma direta em nenhum deles, isso se deve, como já dito anteriormente, ao caráter mais geral dessas propostas e diretrizes, ou seja, deixam os conteúdos específicos em segundo plano e priorizam o acesso a estratégias de caráter formativo do professor e desenvolvimento crítico e participativo do aluno.

É importante salientar que existem documentos educacionais fora do Brasil bem estruturados e que abordam os conteúdos de forma diferenciada. Nos Estados Unidos, por exemplo, o documento oficial equivalente aos PCN são os *Standards*.

Nos *Standards* "as transformações geométricas são indicadas para estudo em cada um dos níveis escolares, acompanhando a evolução da aprendizagem do aluno e evoluindo para um maior detalhamento e aprofundamento nas séries mais avançadas [...]". (STORMOWSKI, 2008, p.9-10).

Em seus estudos Stormowski, (2008), também investiga os documentos educacionais brasileiros, a abordagem das transformações geométricas em livros didáticos e ainda analisa algumas pesquisas realizadas em programas de pós-graduação que possuem alguma relação com o ensino de matrizes e transformações geométricas.

3 PROPOSTA CURRICULAR E METODOLOGIA UTILIZADA

Este capítulo traz uma síntese das concepções pedagógicas contempladas na Proposta Curricular do Estado de São Paulo, descreve sua estrutura básica e objetivos. Além disso, serão apresentadas ao leitor algumas atividades contidas nas situações de aprendizagem 5 e 6 do caderno do aluno. Os enunciados das atividades não serão modificados, serão propostas resoluções diferenciadas, utilizando-se basicamente o software dinâmico GeoGebra. Para uma melhor compreensão das atividades realizadas, apresentaremos noções básicas sobre matrizes, pois, apesar do assunto abranger uma gama de conceitos, definições e propriedades, a resolução das atividades contidas nos cadernos dos alunos demandam apenas algumas operações e transformações com matrizes.

A matemática sem dúvida alguma está entre as disciplinas mais rejeitadas por alunos do ensino regular. No entanto, provavelmente na maioria dos casos essa rejeição está associada a abordagens inadequadas de conteúdos, as quais não permitem que os alunos percebam as possíveis aplicações e transformações dos conhecimentos estudados em ferramentas utilizadas por toda sociedade. Dessa forma, resta aos alunos uma percepção de complexidade da matemática, afastando destes a ideia de que a matemática é uma ciência que se desenvolveu de maneira natural a partir das necessidades enfrentadas pelo homem em seu cotidiano. Assim, é necessário um olhar mais carinhoso em relação a didática abordada em sala de aula.

Logo, neste capítulo também serão abordadas os métodos e procedimentos didáticos necessários para uma compreensão adequada dos conteúdos que abrangem as situações de aprendizagem 5 e 6 do caderno do aluno, bem como a metodologia utilizada para o desenvolvimento desse trabalho como um todo.

É imprescindível informar ao leitor que as figuras e quadros em que não constam referência foram elaboradas pelo autor.

3.1 Engenharia didática

A engenharia didática surge a partir de discussões realizadas no IREM [1] no final da década de 1960 na França (POMMER, 2013). A função desse instituto era auxiliar na formação de professores de matemática e desenvolver um material complementar para uso em sala de aula.

O modelo de pesquisa da engenharia didática requer do pesquisador/professor participação e análise de situações didáticas (BROUSSEAU, 2006). Ainda, é preciso ter como

[1] Instituto de Investigação do Ensino de Matemática

elemento fundamental da situação didática, a intencionalidade de ser construída em prol da aprendizagem do aluno.

A engenharia didática é uma metodologia que propõe uma sequência didática organizada de forma coerente e estruturada através da concepção, realização, observação e análise das atividades propostas, assemelhando-se ao trabalho de um engenheiro que,

> “[...] para realizar um projeto preciso, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados na ciência e, portanto, a enfrentar [...]"(ARTIGUE, 1996, p. 193).

A engenharia didática está dividida em quatro fases (ARTIGUE, 1996):

1. Análises prévias;
2. Concepção e análise a priori das situações didáticas da engenharia;
3. Experimentação;
4. Análise a posteriori da avaliação.

A primeira fase consiste em análises preliminares, onde são feitas ponderações envolvendo o quadro teórico mais geral, como também, sobre os conhecimentos mais específicos da pesquisa (MACHADO, 2002). Além disso, é necessário realizar uma revisão bibliográfica e uma análise mais geral do contexto histórico-epistemológico do tema a ser trabalhado.

A segunda fase delimita o número de variáveis didáticas que podem ser analisadas pelo pesquisador.

A terceira fase é a fase da experimentação. Segundo Machado (2002), a terceira fase, consiste basicamente no desenvolvimento da aplicação da engenharia didática, aplicada a um grupo de alunos, com o objetivo de verificar as ponderações observadas na fase anterior.

Para Artigue (1996), a quarta fase se apoia sobre o conjunto de dados obtidos ao longo da experimentação pelas observações do pesquisador, pelo registro sonoro ou através da produção escrita, ou seja, esta é a fase de tratamento e análise de dados.

Como o leitor pode notar, a primeira fase já foi desenvolvida no segundo capítulo quando foram abordados o contexto histórico de estudo de matrizes e desenvolvida uma análise dos documentos oficiais da educação.

A segunda fase está descrita na introdução quando delimita-se o tema, e durante o desenvolvimento do Capítulo 3, quando restringimos os conteúdos necessários para realização das atividades propostas e durante o desenvolvimento das mesmas.

As demais fases serão apresentadas nas próximas sessões e capítulos, onde serão propostas estratégias de resolução para as situações de aprendizagem 5 e 6 e apresentadas conclusões sobre a pesquisa desenvolvida em sala de aula.

É importante ressaltar que a metodologia da Engenharia Didática é utilizada por muitos pesquisadores, inclusive por Stormowski (2008), que também estudou matrizes e transformações geométricas e é uma importante referência para este trabalho.

3.2 Conhecimentos necessários para o desenvolvimento das situações de aprendizagem

O caderno do aluno referente ao primeiro bimestre da 2ª série do Ensino Médio é dividido em 8 situações de aprendizagem das quais duas (situações 5 e 6) são destinadas ao estudo de matrizes. Porém, os cadernos do aluno e do professor não trazem teoria alguma relativa aos conceitos básicos de matrizes, tampouco, exemplos que possam subsidiar os leitores a um primeiro contato mais formal com o tema. Assim, nesta seção serão abordados alguns conceitos básicos sobre matrizes. Para não tornar a leitura cansativa e mecânica, elenca-se apenas os conteúdos necessários para o desenvolvimento das situações de aprendizagem.

No ano de 2014 o Ministério da saúde divulgou uma tabela contendo os dados relativos ao percentual de cada tipo de criadouro do *Aedes Aegypti* por região no Brasil.

Figura 3.1 – Criadouros do *Aedes Aegypti* no Brasil.

Principais criadouros - 2014			
Região	**Armazenamento de água**	**Depósitos domiciliares**	**Lixo**
Norte	20,2%	27,4%	52,4%
Nordeste	75,3%	18,2%	6,5%
Sudeste	15,7%	55,7%	28,6%
Centro-Oeste	28,9%	27,3%	43,8%
Sul	12,9%	37%	50,1%

Fonte: Ministério da saúde

Para facilitar a compreensão do que está disposto na Figura 3.1 os dados numéricos estão dispostos em linhas e colunas e ao retirar os nomes que dão significados às linhas e colunas da figura obtém-se uma matriz. Ou seja, uma matriz é uma tabela formada por elementos dispostos em linhas (horizontais) e colunas (verticais). Matrizes são representadas por letras maiúsculas do nosso alfabeto e seus elementos que podem ser números, funções ou ainda outras matrizes, são delimitados por colchetes, parênteses ou barras duplas (BOLDRINI et al., 1980).

$$\begin{bmatrix} 20,2\% & 27,4\% & 52,4\% \\ 75,3\% & 18,2\% & 6,5\% \\ 15,7\% & 55,7\% & 28,6\% \\ 28,9\% & 27,3\% & 43,8\% \\ 12,9\% & 37\% & 50,1\% \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 20,2\% & 27,4\% & 52,4\% \\ 75,3\% & 18,2\% & 6,5\% \\ 15,7\% & 55,7\% & 28,6\% \\ 28,9\% & 27,3\% & 43,8\% \\ 12,9\% & 37\% & 50,1\% \end{pmatrix} \begin{Vmatrix} 20,2\% & 27,4\% & 52,4\% \\ 75,3\% & 18,2\% & 6,5\% \\ 15,7\% & 55,7\% & 28,6\% \\ 28,9\% & 27,3\% & 43,8\% \\ 12,9\% & 37\% & 50,1\% \end{Vmatrix}$$

No entanto, para a padronização desta dissertação será utilizada a delimitação por parênteses.

Definição 3.1. Denomina-se matriz $m \times n$(leia: "m por n")uma tabela formada por $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas.

Para indicar a ordem (número de linhas e colunas respectivamente) de uma matriz A, utiliza-se a representação $A_{m\times n}$ e para representar um elemento qualquer dessa matriz, escreve-se a_{ij}, no qual a é um elemento da matriz A, localizado na linha i e na coluna j.

Por exemplo, para verificar na Figura 3.1, qual a porcentagem de criadouros ocasionados pelo armazenamento de água na região Sudeste, basta encontrar na matriz o elemento posicionado na 3ª linha e na 1ª coluna:

$$A = \begin{pmatrix} 20,2\% & 27,4\% & 52,4\% \\ 75,3\% & 18,2\% & 6,5\% \\ \mathbf{15{,}7\%} & 55,7\% & 28,6\% \\ 28,9\% & 27,3\% & 43,8\% \\ 12,9\% & 37\% & 50,1\% \end{pmatrix}$$

Dessa forma, verifica-se que o elemento procurado é o $a_{31} = 15,7\%$ (elemento localizado na 3ª linha e na 1ª coluna).

Assim, pode-se representar a matriz A genericamente da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{pmatrix}_{5\times 3}$$

De maneira geral, representa-se uma matriz $m \times n$ por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

Uma forma mais simples dessa representação seria dada por $A = (a_{ij})_{m\times n}$; $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ com $i, j \in \mathbb{N}$. Através desta notação, representa-se os elementos de uma matriz por uma sentença matemática que relaciona a linha e a coluna onde o elemento está situado.

Exemplo: Determine a matriz $A = (a_{ij})_{2\times 3}$, tal que $a_{ij} = i + j$. Inicialmente escreve-se a matriz genérica com seus elementos, ou seja:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Agora calcula-se os elementos da matriz através da lei de formação $a_{ij} = i + j$, veja:

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 1 + 1 = 2 & a_{12} = 1 + 2 = 3 & a_{13} = 1 + 3 = 4 \\ a_{21} = 2 + 1 = 3 & a_{22} = 2 + 2 = 4 & a_{23} = 2 + 3 = 5 \end{array}$$

Logo,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Exemplo: Determine a matriz $B = (b_{ij})_{3\times 3}$, tal que $b_{ij} = 2i - j$.
Seguindo os procedimentos descritos anteriormente temos a matriz genérica:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

através da lei de formação $b_{ij} = 2i - j$, obtém-se;

$$\begin{array}{lll} b_{11} = 2\cdot 1 - 1 = 1 & b_{12} = 2\cdot 1 - 2 = 0 & b_{13} = 2\cdot 1 - 3 = -1 \\ b_{21} = 2\cdot 2 - 1 = 3 & b_{22} = 2\cdot 2 - 2 = 2 & b_{23} = 2\cdot 2 - 3 = 1 \\ b_{31} = 2\cdot 3 - 1 = 5 & b_{32} = 2\cdot 3 - 2 = 4 & b_{33} = 2\cdot 3 - 3 = 3 \end{array}$$

então,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Definição 3.2. Matriz quadrada é a matriz cujo número de linhas(m) é igual ao número de colunas (n).

$$A = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}_{1\times 1} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 7 \\ 1,5 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 4,7 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Em uma matriz A quadrada de ordem n, os elementos a_{ij} com $i = j$ $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn})$, formam a *diagonal principal*, e os elementos a_{ij} em que $i + j = n + 1$ formam a *diagonal secundária*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Na matriz A, os elementos da diagonal principal são a_{11} e a_{22}, pois temos $i = j$, já os elementos a_{12} e a_{21} pertencem à diagonal secundária, pois verificamos que $i + j = n + 1 (i + j = 2 + 1)$.

Definição 3.3. Considere uma matriz quadrada de ordem n, quando os elementos localizados acima ou abaixo da diagonal principal são todos nulos, dizemos que a matriz é triangular.

Uma matriz triangular pode ser classificada como *inferior* quando os elementos acima da diagonal principal são todos nulos e será classificada como *superior* se todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad \text{Matriz triangular inferior}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad \text{Matriz triangular superior}$$

Observe que em uma matriz triangular $a_{ij} = 0$ para $i < j$ (matriz triangular inferior) ou $a_{ij} = 0$ para $i > j$(matriz triangular superior).

Definição 3.4. Uma matriz quadrada em que são nulos todos os elementos que não pertencem a diagonal principal é chamada de matriz diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}_{2\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}_{4\times 4}$$

Observe que em uma matriz diagonal $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Definição 3.5. A matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 é chamada de matriz identidade.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Observe que em uma matriz identidade $a_{ij} = 1$ para $i = j$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Definição 3.6. Matriz nula é a matriz que possui todos seus elementos iguais a zero.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Observe que em uma matriz nula do tipo $m \times n$, temos $a_{ij} = 0, \forall i, j$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Definição 3.7. Dada uma matriz A, a matriz oposta de A é indicada por $-A$, e contém os elementos opostos de A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \\ -5 & -9 \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad -A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Definição 3.8. A matriz que possui apenas uma linha ($m = 1$) é chamada matriz linha.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 5 & \sqrt{3} \end{pmatrix}_{1\times 4}$$

Definição 3.9. A matriz que possui apenas uma coluna ($n = 1$) é chamada matriz coluna.

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

É importante relatar que tanto a matriz linha quanto a matriz coluna também podem ser chamadas de *vetores*, essa denominação é utilizada comumente no Ensino Superior, principalmente em álgebra linear e computação.

Agora considere a produção de automóveis na indústria "A"em dois semestres consecutivos, com as variáveis cor e categoria, conforme ilustram as Tabelas 3.1 e 3.2:

Tabela 3.1 – Produção de automóveis 1º semestre

	Sedã	Hatch
Branco	1200	500
Prata	2500	900
Preto	1000	700
Vermelho	800	400

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 3.2 – Produção de automóveis 2º semestre

	Sedã	Hatch
Branco	1100	400
Prata	2300	800
Preto	900	500
Vermelho	700	200

Fonte: Elaborado pelo autor

Intuitivamente conclui-se que para obter-se a produção anual de automóveis da indústria "A"basta adicionar os elementos correspondentes nas duas tabelas. Escrevendo as tabelas em forma de matrizes temos

$$\begin{pmatrix} 1200 & 500 \\ 2500 & 900 \\ 1000 & 700 \\ 800 & 400 \end{pmatrix}_{4\times 2} + \begin{pmatrix} 1100 & 400 \\ 2300 & 800 \\ 900 & 500 \\ 700 & 200 \end{pmatrix}_{4\times 2} = \begin{pmatrix} 2300 & 900 \\ 4800 & 1700 \\ 1900 & 1200 \\ 1500 & 600 \end{pmatrix}_{4\times 2}$$

Dessa forma, realizou-se a adição de duas matrizes, ou seja, dadas duas matrizes A e B, de mesma ordem $m \times n$, denomina-se de soma das matrizes A e B indica-se por $A + B$, a matriz C também de ordem $m \times n$, na qual cada elemento é obtido adicionando os elementos correspondentes de A e B.

Definição 3.10. Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ a soma das matrizes A e B é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$, tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \text{ para } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

Exemplo: Sejam as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 0 & -3 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Somando os elementos correspondentes, verifica-se

$$A + B = \begin{pmatrix} -1+1 & 2+11 \\ 7+0 & -5+(-3) \\ 4+8 & 3+(-4) \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Portanto,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 7 & -8 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Para *subtrair* duas matrizes A e B respectivamente, basta somar a matriz A com a matriz *oposta* de $B(-B)$, assim obtém-se a diferença entre A e B.

Exemplo: Sejam as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}_{2\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2} \qquad -B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

A diferença entre A e B é dada por

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} 3+1 & -2-3 \\ 5-7 & 10-2 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Definição 3.11. Seja $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e k um número real, o produto $k \cdot A$ é a matriz $k \cdot A = (k \cdot a_{ij})_{m\times n}$.

Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 7 & 10 & -2 \\ -9 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3}$, calcule a matriz $3A$.

Basta multiplcar cada elemento da matriz A por 3

$$3A = \begin{pmatrix} 3\cdot(-1) & 3\cdot 0 & 3\cdot 5 \\ 3\cdot 7 & 3\cdot 10 & 3\cdot(-2) \\ 3\cdot(-9) & 3\cdot 3 & 3\cdot 4 \end{pmatrix}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 15 \\ 21 & 30 & -6 \\ -27 & 9 & 12 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Definição 3.12. Sendo $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$, define-se o produto das matrizes A e B, como a matriz $C = (c_{ij})_{m\times p}$, tal que cada elemento c_{ij} é obtido multiplicando-se os elementos da linha i da matriz A, pelos elementos correspondentes da coluna j da matriz B, e efetuando a soma dos produtos obtidos:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} b_{kj})$$

Importante: Para as matrizes A e B, a multiplicação só será possível, se o *número de colunas* de A for igual ao *número de linhas* de B. A matriz produto AB terá o número de linhas de A e o número de colunas de B.

Exemplo: Dadas as matrizes A, B e C, verifique se é possível efetuar as multiplicações AB, BC e AC e em caso afirmativo calcule o produto indicado.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -7 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 0 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

Observando o produto AB, verifica-se que o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. logo deve-se efetuar a multiplicação. Como a matriz A possui duas linhas e a matriz B duas colunas, a matriz produto AB será uma matriz quadrada de ordem dois.

Para calcular os elementos da matriz produto AB realiza-se os seguintes procedimentos:

Multiplica-se a 1ª linha de A, pela 1ª coluna de B e soma-se os produtos.

Multiplica-se a 1ª linha de A, pela 2ª coluna de B e soma-se os produtos.

Multiplica-se a 2ª linha de A, pela 1ª coluna de B e soma-se os produtos.

Multiplica-se a 1ª linha de A, pela 2ª coluna de B e soma-se os produtos.

Então,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 0 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 6 + 4 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 9 \\ 5 \cdot 2 + 0 \cdot 6 + (-7) \cdot (-2) & 5 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + (-7) \cdot 9 \end{pmatrix}_{2\times2}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -10 & 34 \\ 24 & -68 \end{pmatrix}_{2\times2}$$

Analisando o produto BC, percebe-se que o número de colunas de B é diferente do número de linhas de C, logo, não é possível efetuar a multiplicação.

Verificando o produto AC, percebe-se que o número de colunas de A é igual ao número de linhas de C. Logo, efetua-se a multiplicação. Como a matriz A possui duas linhas e a matriz C uma coluna, a matriz produto AC será uma matriz de ordem 2×1. Utilizando-se o mesmo procedimento utilizado anteriormente temos:

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 + 4 \cdot 3 \\ 5 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + (-7) \cdot 3 \end{pmatrix}_{2\times1} = \begin{pmatrix} 9 \\ -16 \end{pmatrix}_{2\times1}$$

Verifica-se ainda que o produto CA é impossível, pois, o número de colunas de C é diferente do número de linhas de A. Logo, $AC \neq CA$, isso ocorre, pois, geralmente o produto entre matrizes não é comutativo.

3.3 O *software* GeoGebra

O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica desenvolvido durante os anos de 2001 e 2002 na Áustria pelo estudante de mestrado em educação matemática e ciência da computação, Markus Hohenwarter, da Universidade de *Salzburg*. O *software* foi o tema da tese de mestrado de Hohenwarter, que com o apoio de uma bolsa de estudos deu prosseguimento no desenvolvimento do software como parte de seu projeto de doutorado em educação matemática.

O GeoGebra, como o próprio nome sugere, oferece ao usuário ferramentas que permitem o desenvolvimento de conceitos algébricos e geométricos, ou mesmo de ambos simultaneamente.

Por exemplo, o professor que queira trabalhar função afim com seus alunos poderá pedir que marquem dois pontos e construam a reta que passa por eles, ou simplesmente instruir para que digitem a função desejada que o programa construíra a reta que a representará. Ainda é possível trabalhar crescimento e decrescimento de funções de maneira dinâmica e intuitiva.

O GeoGebra também é capaz de criar vetores e matrizes, derivar e integrar funções, gerar figuras tridimensionais dinâmicas e muito mais.

A partir de 2006, o GeoGebra recebeu o apoio do Ministério da Educação austríaco e é oferecido gratuitamente. Atualmente existem versões traduzidas para mais de 25 idiomas, isso permite que o *software* possa ser utilizado como ferramenta de apoio pedagógico em escolas e universidades do mundo inteiro.

Além da gratuidade para *download*, o software GeoGebra é oferecido *on-line* e também pode ser instalado em dispositivos móveis.

Entre a gama de conceitos que podem ser abordados pelo GeoGebra, o foco do presente trabalho é utilizar o *software* para desenvolver o estudo de matrizes e transformações geométricas de maneira intuitiva e significativa, oferecendo a professores alternativas para desenvolver competências e habilidades relacionadas a operações com matrizes e transformações geométricas como escala, reflexão, rotação, cisalhamento e translação através de aulas práticas de qualidade que sejam atraentes e despertem em seus alunos espiríto investigativo e criativo.

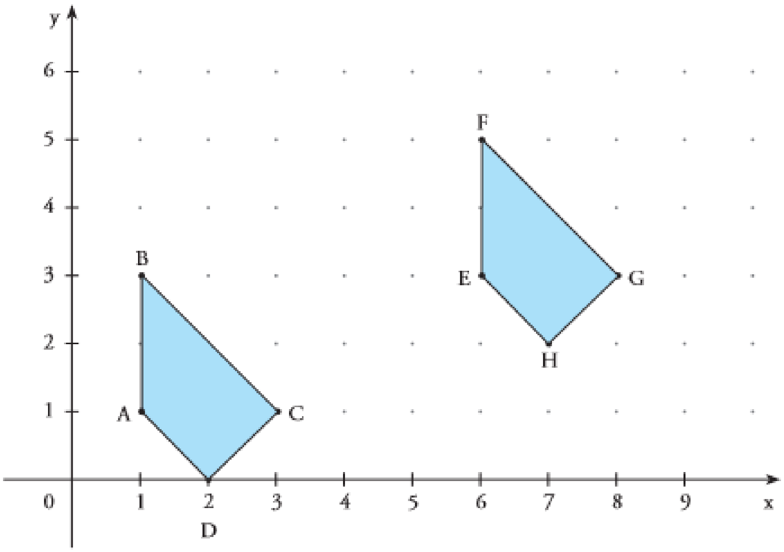
3.4 Proposta de resolução das atividades da situação de aprendizagem 5

Nesta seção serão propostas maneiras diferenciadas de resolver as cinco primeiras atividades da situação de aprendizagem 5 do material de apoio didático para a proposta curricular do Estado de São Paulo, ou seja, o caderno de matemática do aluno referente a 2ª série do Ensino Médio. As atividades serão transcritas na íntegra e resolvidas com o auxílio do GeoGebra. Essa situação de aprendizagem é intitulada "Matrizes: Diferentes significados".

As competências e habilidades trabalhadas nesta situação de aprendizagem estão associadas a utilização de elementos de matrizes para organizar e justificar situações-problema contidas no cotidiano através de representações geométricas relacionadas a comandos na linguagem matemática.

1. Observe os dois polígonos representados no plano cartesiano:

Figura 3.2 – Situação de aprendizagem 5: Atividade 1a



Fonte: Caderno do aluno (2014-2017, p.58)

Esses dois polígonos são congruentes, e podemos considerar que o polígono EFGH é uma translação do polígono ABCD, isto é, EFGH foi obtido a partir de duas movimentações de ABCD, sendo uma na horizontal e outra na vertical.

a) Quantas unidades na horizontal e quantas unidades na vertical do polígono ABCD devem ser deslocadas para que, ao final, coincidam com o polígono EFGH?

Esta atividade tem como objetivo fazer com que o aluno perceba que houve uma translação do quadrilátero $ABCD$, e que para que ele mantenha suas dimensões iniciais, cada vértice deve se deslocar à mesma distância tanto horizontalmente quanto verticalmente e por fim resulte no quadrilátero $EFGH$.

Esta atividade é uma ótima oportunidade para o professor trabalhar a notação de matriz coluna e associá-la a um vetor.

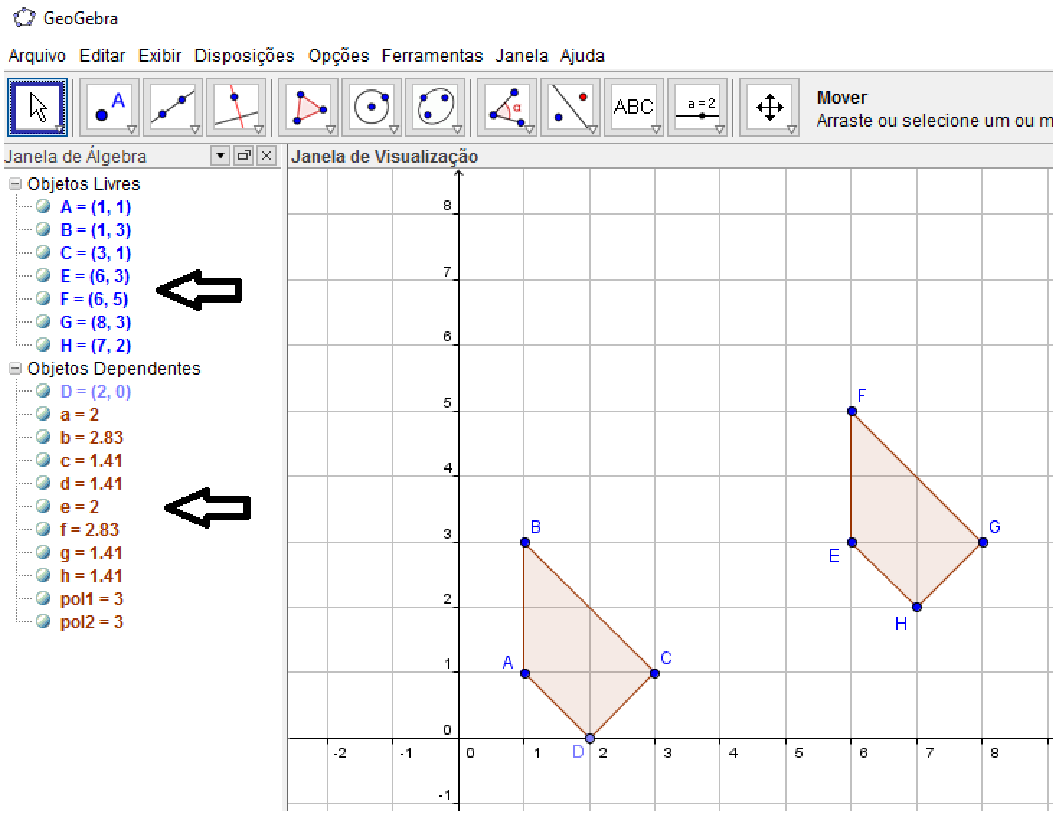
Incialmente deve-se abrir o software GeoGebra e construir os polígonos descritos na Figura 3.2. Para isso seleciona-se o botão "polígono", quinto botão da barra de ferramentas que tem a forma de um triângulo conforme indicado na Figura 3.3.

Figura 3.3 – Barra de Ferramentas do GeoGebra

Fonte: *Print screen* da barra de ferramentas do GeoGebra.

Selecionado o botão basta clicar nos pontos que são as coordenadas do vértice do polígono a ser construído, ou seja, $A(1,1)$, $B(1,3)$, $C(3,1)$, $D(2,0)$, e novamente no ponto $A(1,1)$ para que o polígono $ABCD$ se complete. Repete-se os mesmos procedimentos para o polígono $EFGH$.

Figura 3.4 – Construindo quadriláteros no GeoGebra



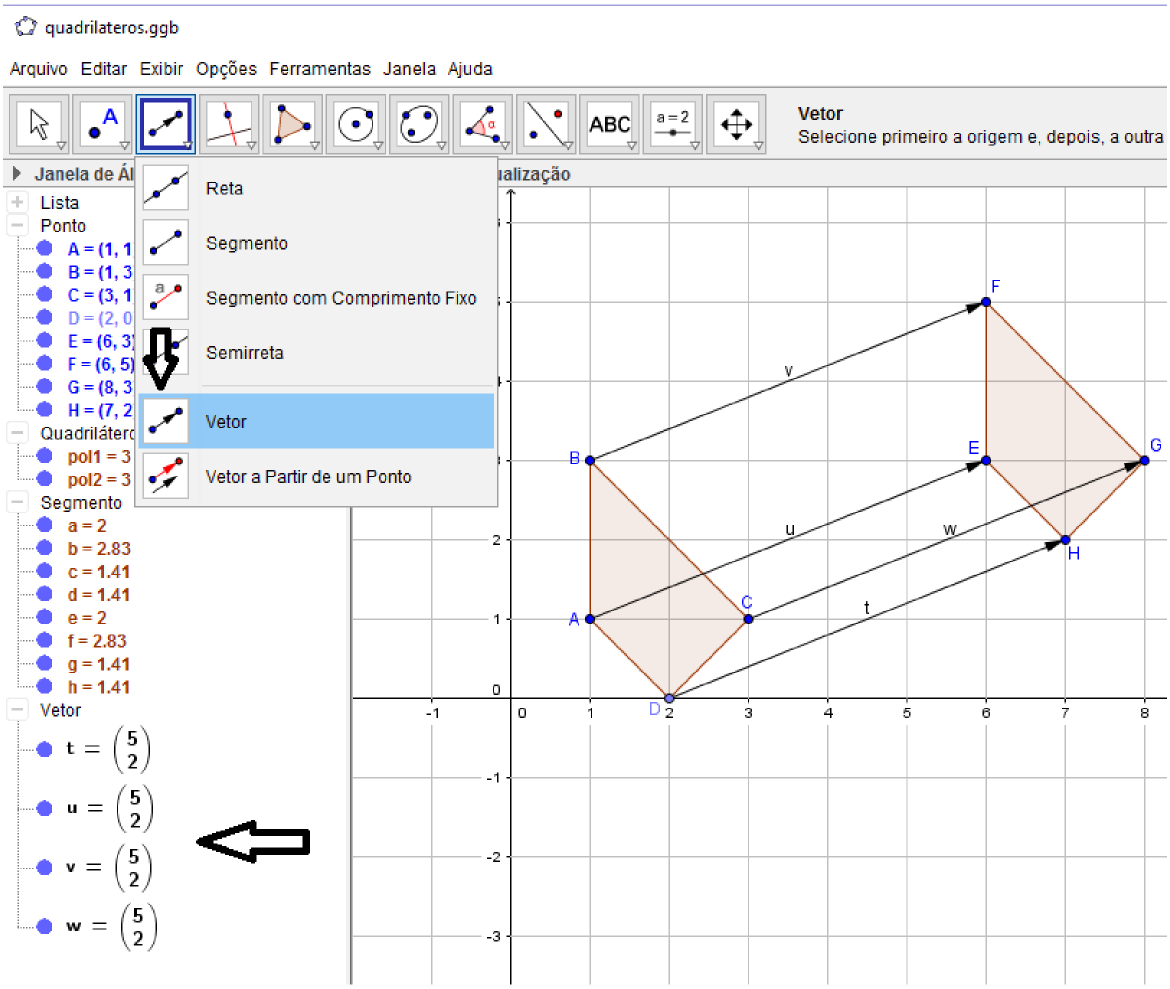
Fonte: Elaborado pelo autor

Observe na Figura 3.4 que à esquerda da janela de visualização, está a janela de álgebra, onde encontram-se os objetos livres que são os pontos ou vértices dos polígonos, representados por letras maiúsculas do nosso alfabeto juntamente com suas coordenadas, e também os objetos dependentes que são os segmentos representados por letras minúsculas acompanhadas de seu comprimento e ainda a área dos polígonos. Perceba que a janela de álgebra permite que o aluno relacione a construção geométrica com os significados algébricos, neste caso o aluno percebe que o polígono foi transportado de um lugar para o outro, que as coordenadas de seus vértices foram alteradas, porém o comprimento dos segmentos e a área dos polígonos se mantêm constante, ou seja, o polígono manteve suas dimensões.

Após a construção dos quadriláteros, deve-se construir os vetores $u = \overrightarrow{AE}$, $v = \overrightarrow{BF}$, $w = \overrightarrow{CG}$ e $t = \overrightarrow{DH}$.

Para construir os vetores posiciona-se o cursor sobre o terceiro botão da barra de ferramentas e seleciona-se a opção "Vetor"como indicado na figura3.5, em seguida clicamos nos respectivos vértices para criar os vetores.

Figura 3.5 – Construindo vetores no GeoGebra



Fonte: Elaborado pelo autor

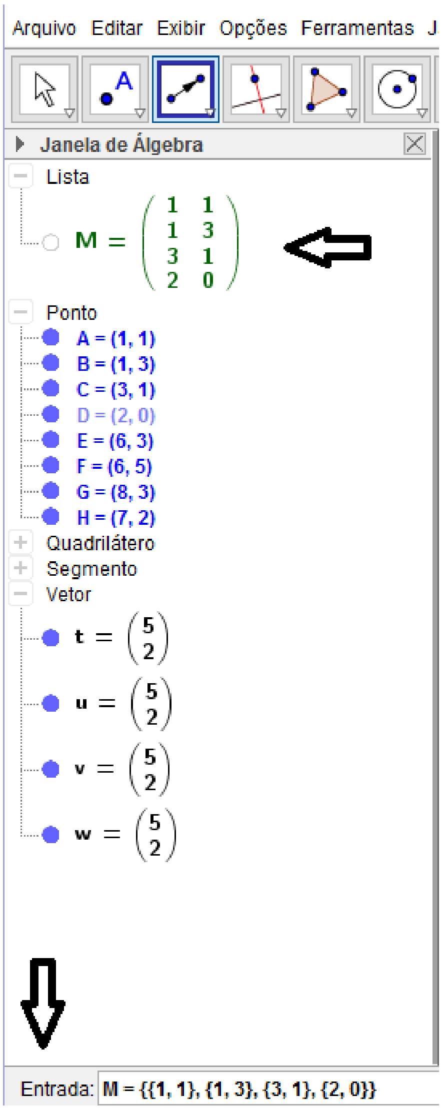
Observa-se que na janela de álgebra aparecem os vetores em forma de matriz coluna, ou seja, $t = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Neste momento o aluno deve perceber que cada vetor indica a quantidade de unidades que cada vértice se deslocou, ou seja, cinco unidades horizontalmente para a direita e duas unidades verticalmente para cima, e além disso, notar que cada vetor é composto por um par ordenado (x, y) escrito na forma de matriz coluna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

b) Represente em uma matriz $A_{(4\times2)}$ as coordenadas do polígono ABCD, de maneira que cada linha da matriz contenha coordenadas de um ponto, com abscissa na primeira coluna e ordenada na segunda coluna.

Para resolver esta atividade a matriz $A_{4\times2}$ será indicada por $M_{4\times2}$, pois como já existe um objeto indicado pela letra A, o GeoGebra não permite outro.

Figura 3.6 – Construindo matizes no GeoGebra: matriz M



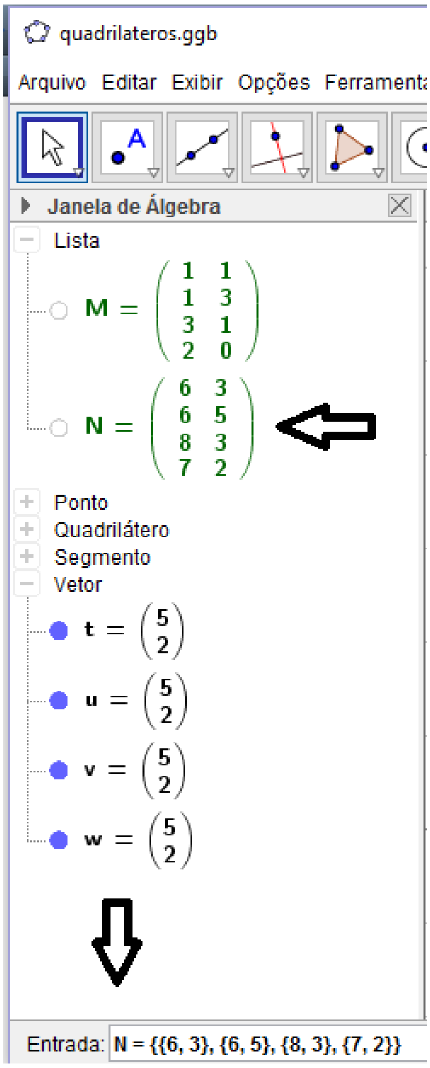
Fonte: Elaborado pelo autor

A matriz M deve ser inserida no campo "Entrada", localizado na parte inferior da área de trabalho do GeoGebra, da seguinte maneira M = {{1, 1}, {1, 3}, {3, 1}, {2, 0}}, ao pressionar a tecla *enter*, a matriz aparecerá no topo da janela de álgebra, conforme indicado na Figura 3.6. Existem outras maneiras de se escrever uma matriz no GeoGebra, porém, opta-se por esta indicada anteriormente pelo fato de que o aluno é obrigado a digitar as coordenadas de cada vértice assim como solicitado na atividade o que possibilita relacionar as linhas da matriz M aos pares ordenados que representam os vértices do quadrilátero $ABCD$.

c) Represente em uma matriz $B_{(4\times 2)}$ as coordenadas dos vértices do polígono EFGH, de maneira que cada linha da matriz contenha coordenadas de um ponto, com a abscissa na primeira coluna e a ordenada na segunda coluna.

Para resolver esta atividade procede-se analogamente à atividade anterior, pelo mesmo motivo citado anteriormente, a matriz $B_{4\times2}$ será indicada por $N_{4\times2}$. Veja a figura 3.7 .

Figura 3.7 – Construindo matrizes no GeoGebra: matriz N



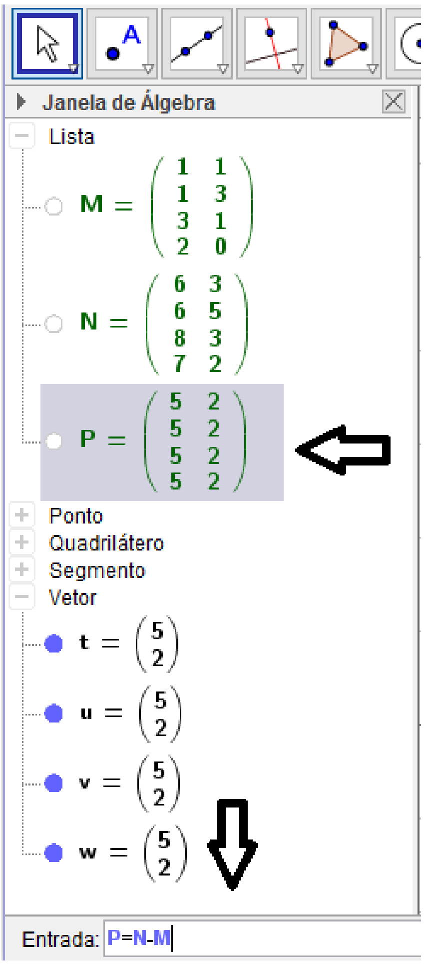
Fonte: Elaborado pelo autor

d) Escreva uma matriz $C_{(4x2)}$ de tal forma que A + C = B.

Nesta atividade é necessário realizar uma operação com matrizes, a matriz $C_{4\times2}$ será indicada por $P_{4\times2}$ e a equação $A + C = B$ substituída por $M + P = N$.

Para solucionar esta equação o aluno deve resolver a diferença $P = N - M$, o GeoGebra realizará o cálculo automaticamente, basta digitar a equação no campo entrada e o resultado, ou seja, a matriz P, será indicada na janela de álgebra como mostra a figura 3.8.

Figura 3.8 – Construindo matrizes no GeoGebra: matriz P



Fonte: Elaborado pelo autor

Após realizar as atividades anteriores o aluno deve perceber que as linhas da matriz $P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \\ 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ são os vetores t, u, v e w, ou seja, $P = \begin{pmatrix} t \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.

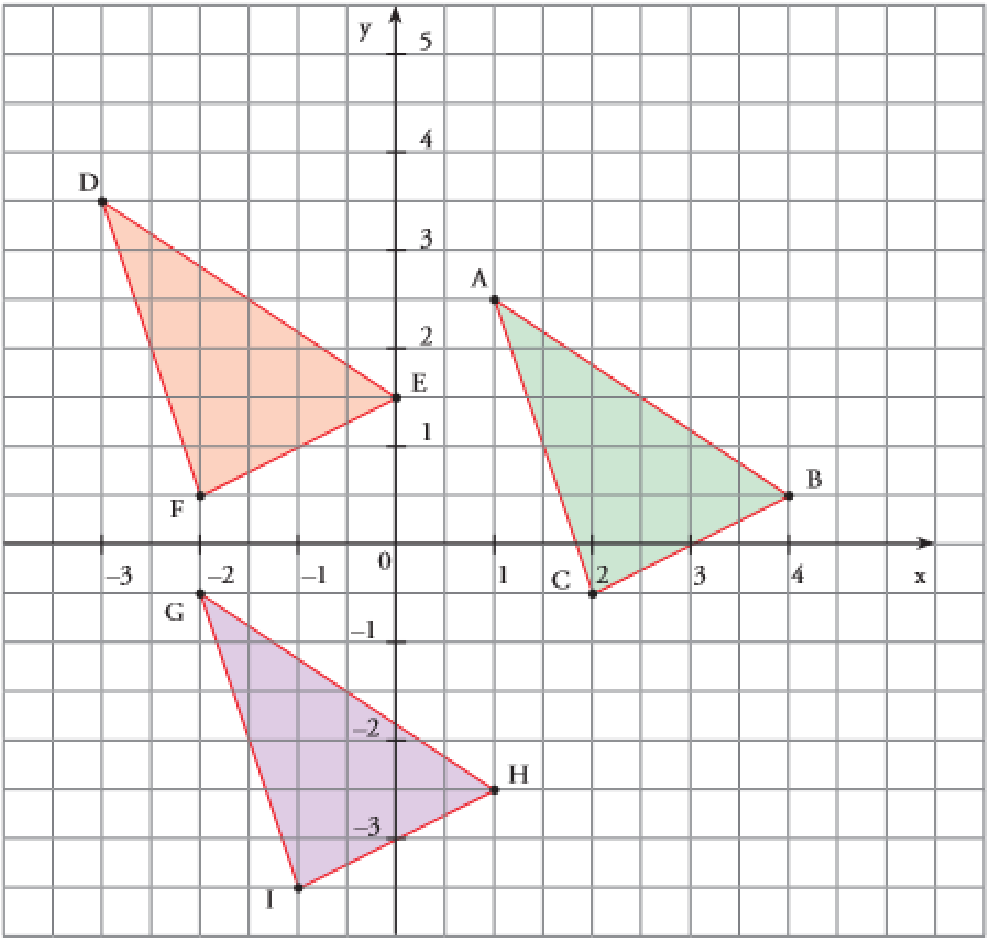
Além disso, a soma $M + P = N$, indica algebricamente o que o aluno já tinha notado geometricamente, que as coordenadas dos vértices do polígono $EFGH$ representadas pela matriz N são obtidas através de uma soma entre as coordenadas dos vértices do polígono $ABCD$ representadas na matriz M e os vetores t, u, v e w representados pela matriz P, ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \\ 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 5 \\ 8 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

.

2. Na representação a seguir de um plano cartesiano, podemos observar três triângulos congruentes. O triângulo ABC pode ser transladado até coincidir com o triângulo DEF, que, por sua vez, se transladado, poderá coincidir com o triângulo GHI.

Figura 3.9 – Situação de aprendizagem 5: Atividade 2a

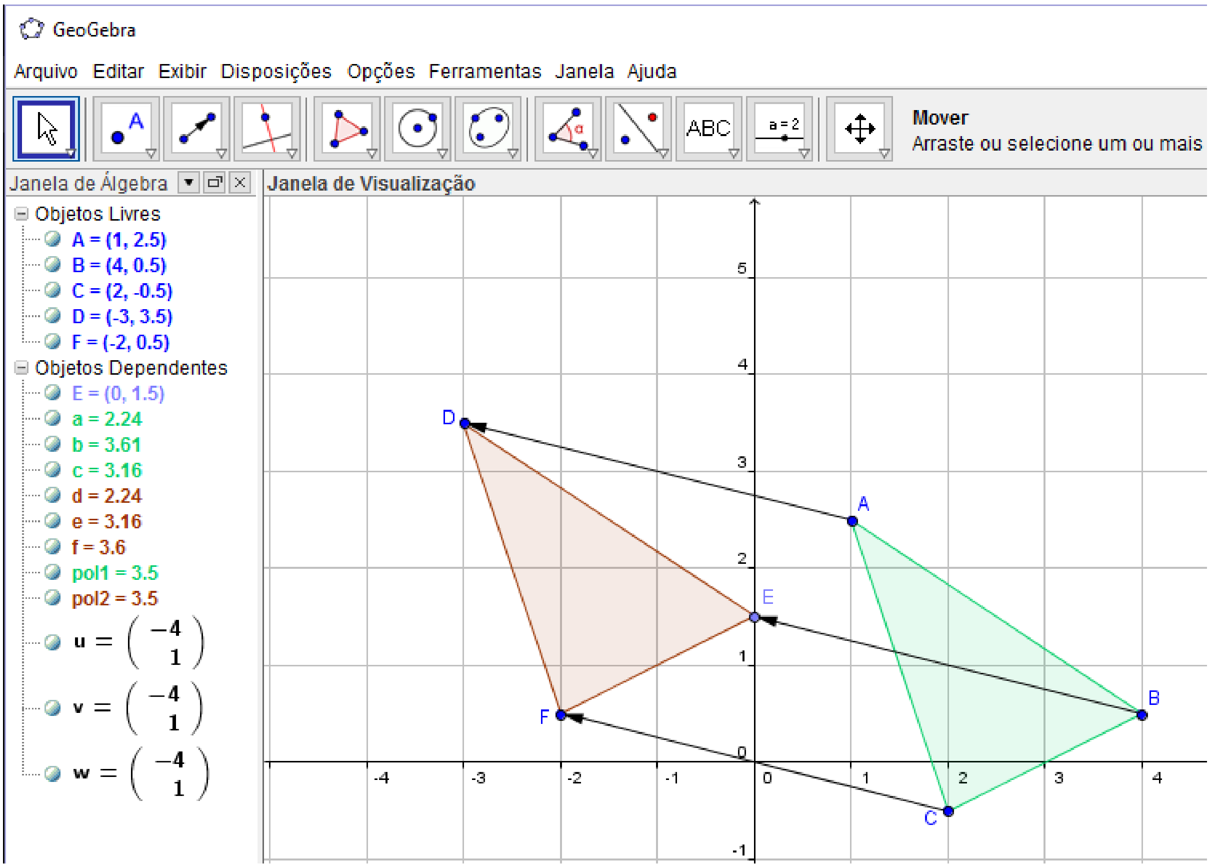


Fonte: Caderno do aluno (2014-2017, p.60)

a) Quantas unidades horizontais e quantas unidades verticais são necessárias para uma translação do triângulo ABC, a fim de que, ao final, ele coincida com o triângulo DEF?

Para resolver os itens a, b e c da atividade 2, utiliza-se procedimentos análogos. Inicialmente deve-se construir os triângulos ABC e DEF contidos na figura 3.9, em seguida utiliza-se a ferramenta, vetor definido por dois pontos, para descobrir quantas unidades horizontais e quantas verticais são necessárias para a translação do triângulo ABC.

Figura 3.10 – Situação de aprendizagem 5: solução 2a



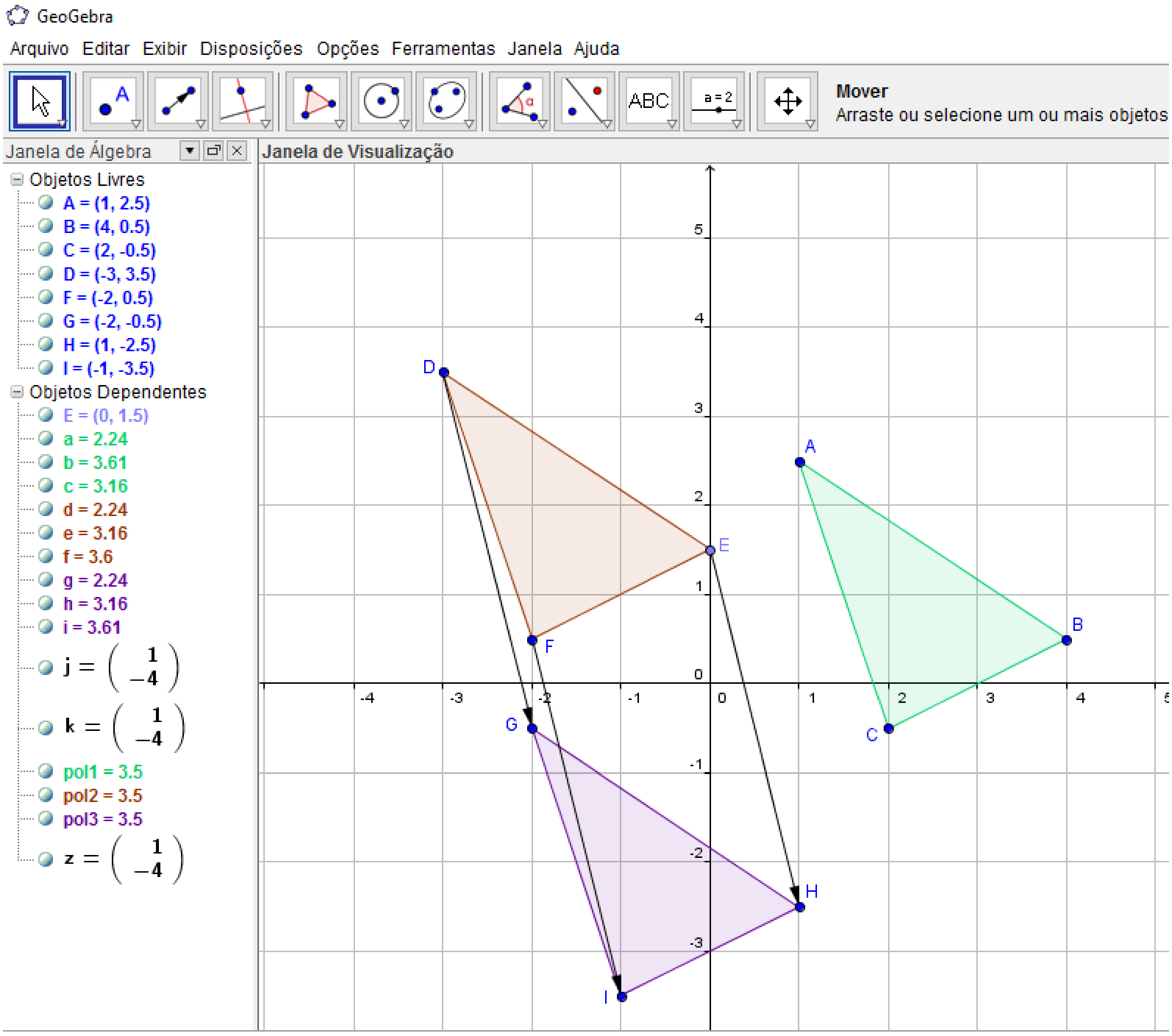
Fonte: Elaborado pelo autor

Observe na Figura 3.10, que na janela de álgebra os vetores $u = \overrightarrow{AD}$, $v = \overrightarrow{BE}$ e $w = \overrightarrow{CF}$ aparecem em forma de matriz coluna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, indicando a quantidade de unidades que o triângulo ABC transladou para coincidir com o triângulo DEF, ou seja, os vetores $u = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, indicam que são quatro unidades horizontais para a esquerda e uma unidade vertical para cima. Neste momento é importante incentivar os alunos a perceberem que o sentido de cada vetor está relacionado com os sinais de suas coordenadas.

b) Quantas unidades horizontais e quantas unidades verticais são necessárias para uma translação do triângulo DEF, a fim de que, ao final, ele coincida com o triângulo GHI?

Agora será construído o triângulo GHI e em seguida os vetores $j = \overrightarrow{DG}$, $k = \overrightarrow{EH}$ e $z = \overrightarrow{FI}$.

Figura 3.11 – Situação de aprendizagem 5: solução 2b



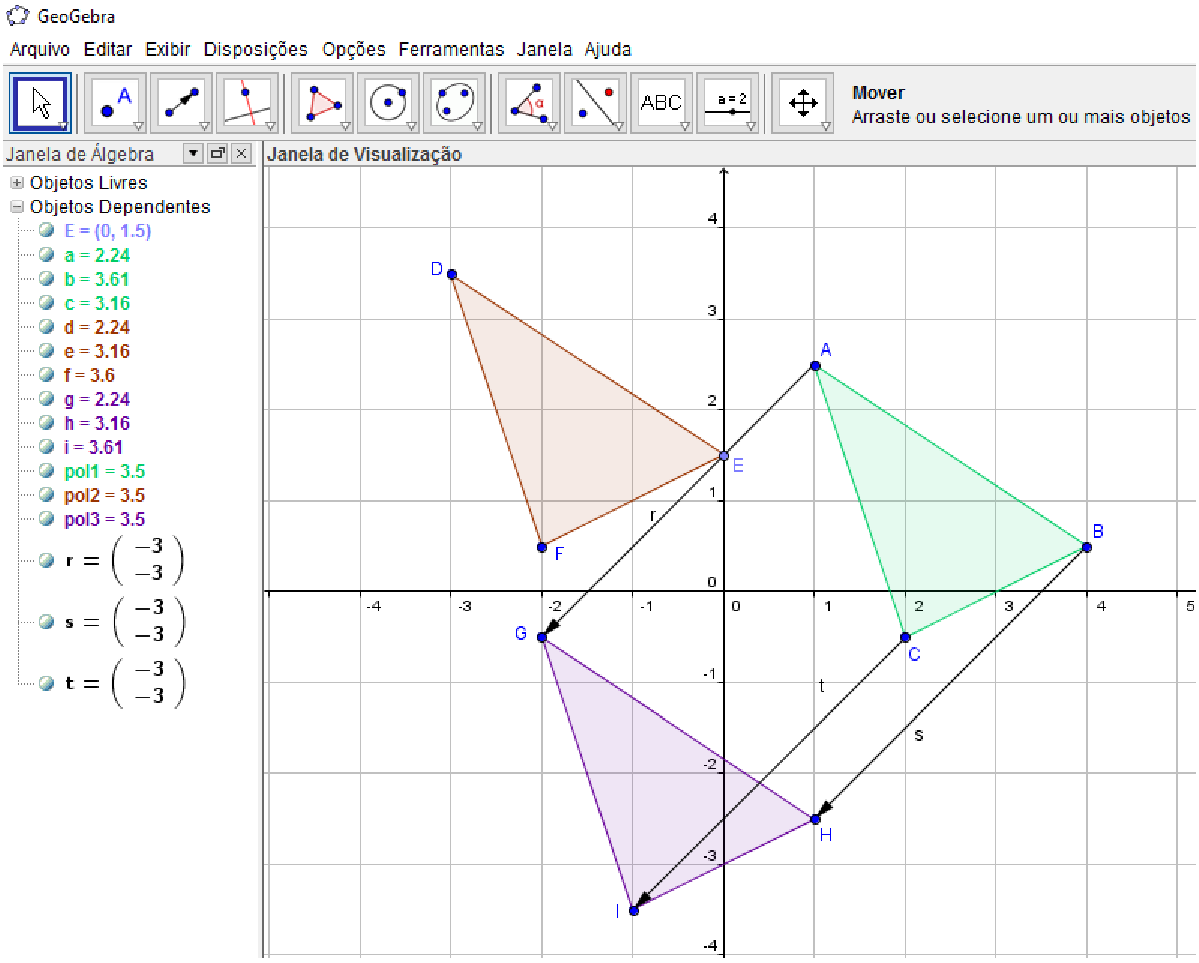
Fonte: Elaborado pelo autor

Observando os vetores $j = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ e $z = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ na janela de álgebra da figura 3.11, conclui-se que o triângulo DEF transladou uma unidade horizontal para a direita e quatro unidades verticais para baixo, coincidindo com o triângulo GHI.

c) Quantas unidades horizontais e quantas unidades verticais são necessárias para uma translação do triângulo ABC, a fim de que, ao final, ele coincida com o triângulo GHI?

Neste momento deve-se construir os vetores $r = \overrightarrow{AG}$, $s = \overrightarrow{BH}$ e $t = \overrightarrow{CI}$ e descobrir quantas unidades horizontais e quantas verticais o triângulo ABC transladou para coincidir com o triângulo GHI.

Figura 3.12 – Situação de aprendizagem 5: solução 2c



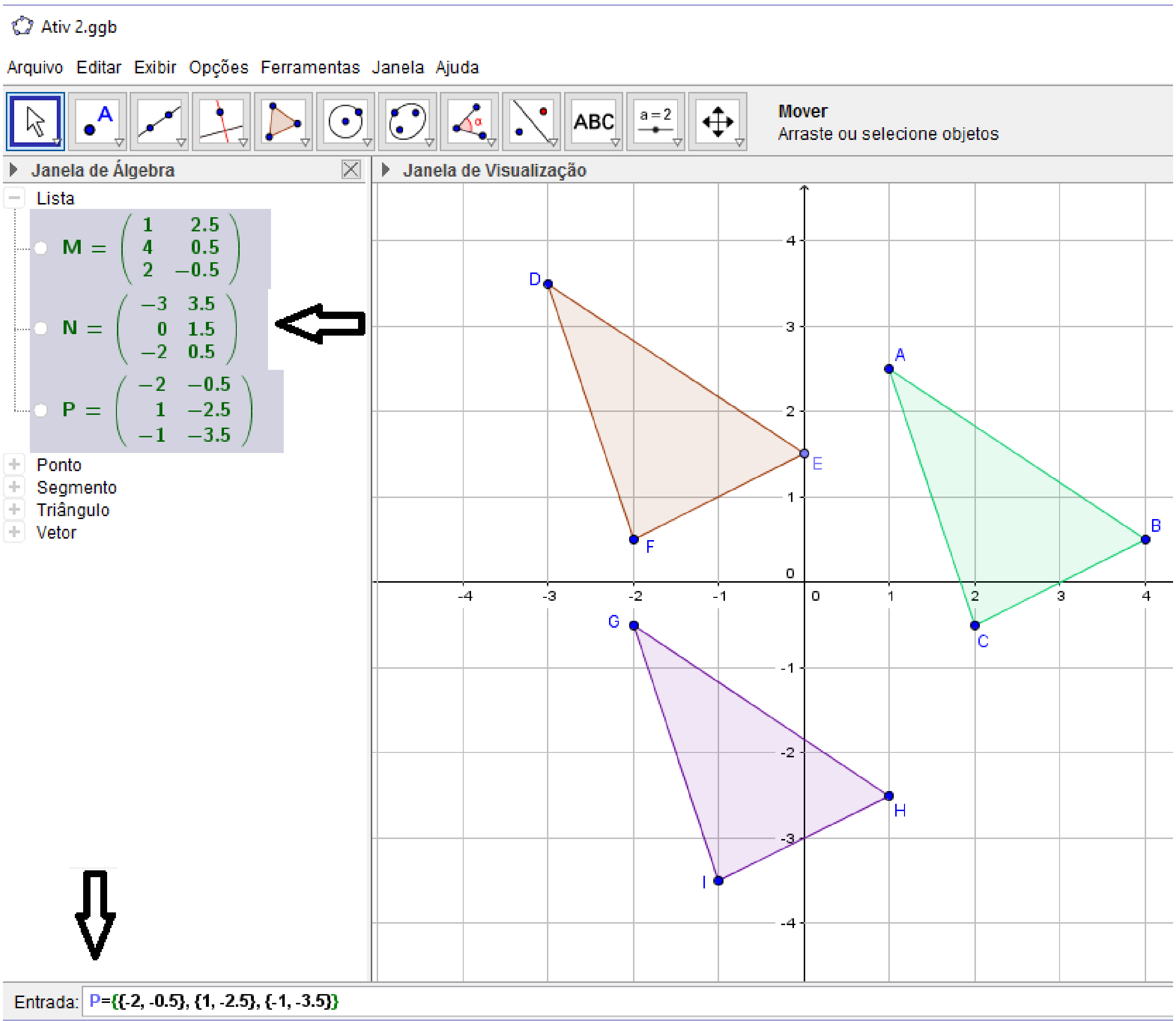
Fonte: Elaborado pelo autor

Observe na janela de álgebra da Figura 3.12 os vetores $r = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $t = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$, eles indicam que o triângulo ABC transladou três unidades horizontais para esquerda e três unidades verticais para baixo para coincidir com o triângulo GHI.

Para resolver o item d da atividade 2, utiliza-se procedimentos análogos aos utilizados na resolução da atividade 1b, ver Figura 3.6. Observe a resolução na Figura 3.13, (p.49).

d) Escreva uma matriz 3x2 para cada triângulo, de maneira que cada linha da matriz contenha coordenadas de um vértice do triângulo, com a abscissa na primeira coluna e a ordenada na segunda coluna. Denomine a matriz referente ao triângulo ABC pela letra M, a matriz referente ao triângulo DEF pela letra N, e a matriz referente ao triângulo GHI pela letra P.

Figura 3.13 – Situação de aprendizagem 5: solução 2d



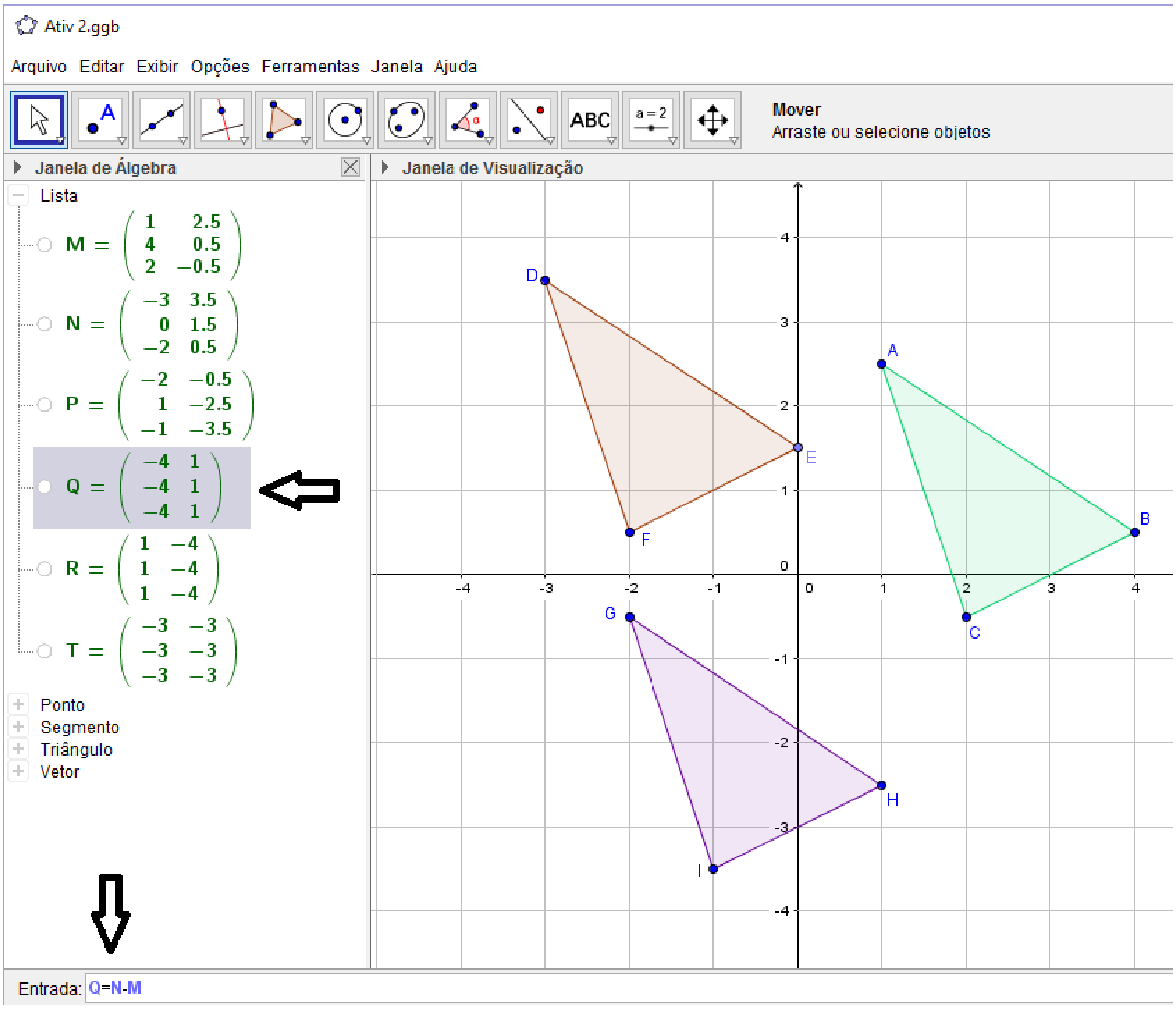
Fonte: Elaborado pelo autor

e) Escreva uma matriz Q, tal que M + Q = N.

Observe que $M + Q = N \Rightarrow Q = N - M$, logo digitando a equação $Q = N - M$ no campo entrada do GeoGebra obteremos a matriz $Q = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, indicada na janela de álgebra, conforme indicado na Figura 3.14. Como o programa GeoGebra realiza os cálculos automaticamente é importante efetuá-los separadamente para que o aluno perceba a operação de adição de matrizes, ou seja, que a matriz N está sendo adicionada à matriz oposta de M, indicada por $-M$.

Portanto, $Q = N + (-M) \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} -3 & 3,5 \\ 0 & 1,5 \\ -2 & 0,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2,5 \\ -4 & -0,5 \\ -2 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Figura 3.14 – Situação de aprendizagem 5: solução 2e



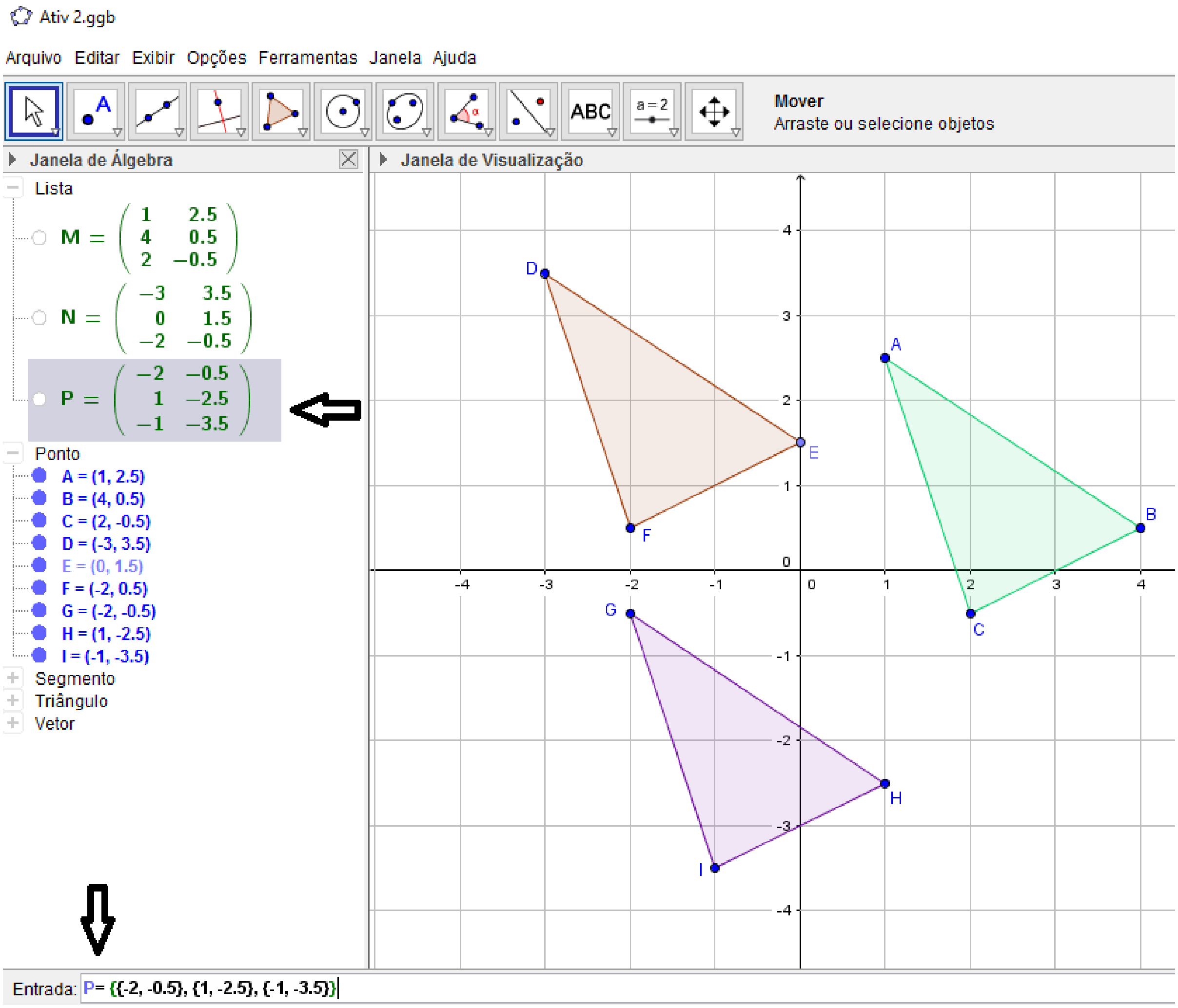
Fonte: Elaborado pelo autor

Verifica-se que a operação $Q = N - M$, resulta na matriz $Q = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, formada pelos vetores u, v e w indicados na solução do item a, Figura 3.10. Logo, a matriz $Q = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix}$ é a matriz de translação que adicionada à matriz M resulta na matriz N, ou seja, que translada o triângulo ABC quatro unidades horizontais para a esquerda e uma unidade vertical para cima fazendo com que este coincida com o triângulo DEF.

f) Escreva uma matriz R, tal que N + R = P.

Recorrendo aos procedimentos utilizados na resolução do item anterior soluciona-se os itens f e g. Veja a Figura 3.15.

Figura 3.15 – Situação de aprendizagem 5: solução 2f



Fonte: Elaborado pelo autor

Observe que $N + R = P \Rightarrow R = P - N$, logo digitando a equação $R = P - N$ no campo entrada do GeoGebra obtém-se a matriz

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Como dito anteriormente é importante efetuar os cálculos separadamente para que o aluno perceba a operação de adição de matrizes, ou seja, que a matriz P está sendo adicionada a matriz oposta de N, indicada por $-N$.

Por tanto, $R = P + (-N)$

$$R = \begin{pmatrix} -2 & -0,5 \\ 1 & -2,5 \\ -1 & -3,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3,5 \\ 0 & -1,5 \\ 2 & -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

.

Assim, conclui-se que a operação $R = P - N$, resulta na matriz

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

formada pelos vetores j, k e z indicados na solução do item b, figura 3.11, e ainda que a matriz $R = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{z} \end{pmatrix}$ é a matriz de translação que adicionada a matriz N resulta na matriz P, ou seja, que translada o triângulo DEF uma unidade horizontal para a direita e quatro unidades verticais para baixo fazendo com que este coincida com o triângulo GHI.

g) Escreva uma matriz T, tal que M + T = P.

Observe que $M + T = P \Rightarrow T = P - M$, logo digitando a equação $T = P - M$ no campo entrada do GeoGebra obtém-se a matriz $T = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$, Figura 3.16.

Efetuando os cálculos separadamente para que o aluno perceba a operação de adição de matrizes, ou seja, que a matriz P está sendo adicionada a matriz oposta de M, indicada por $-M$, temos que $T = P + (-M)$

$$T = \begin{pmatrix} -2 & -0,5 \\ 1 & -2,5 \\ -1 & -3,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2,5 \\ -4 & -0,5 \\ -2 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

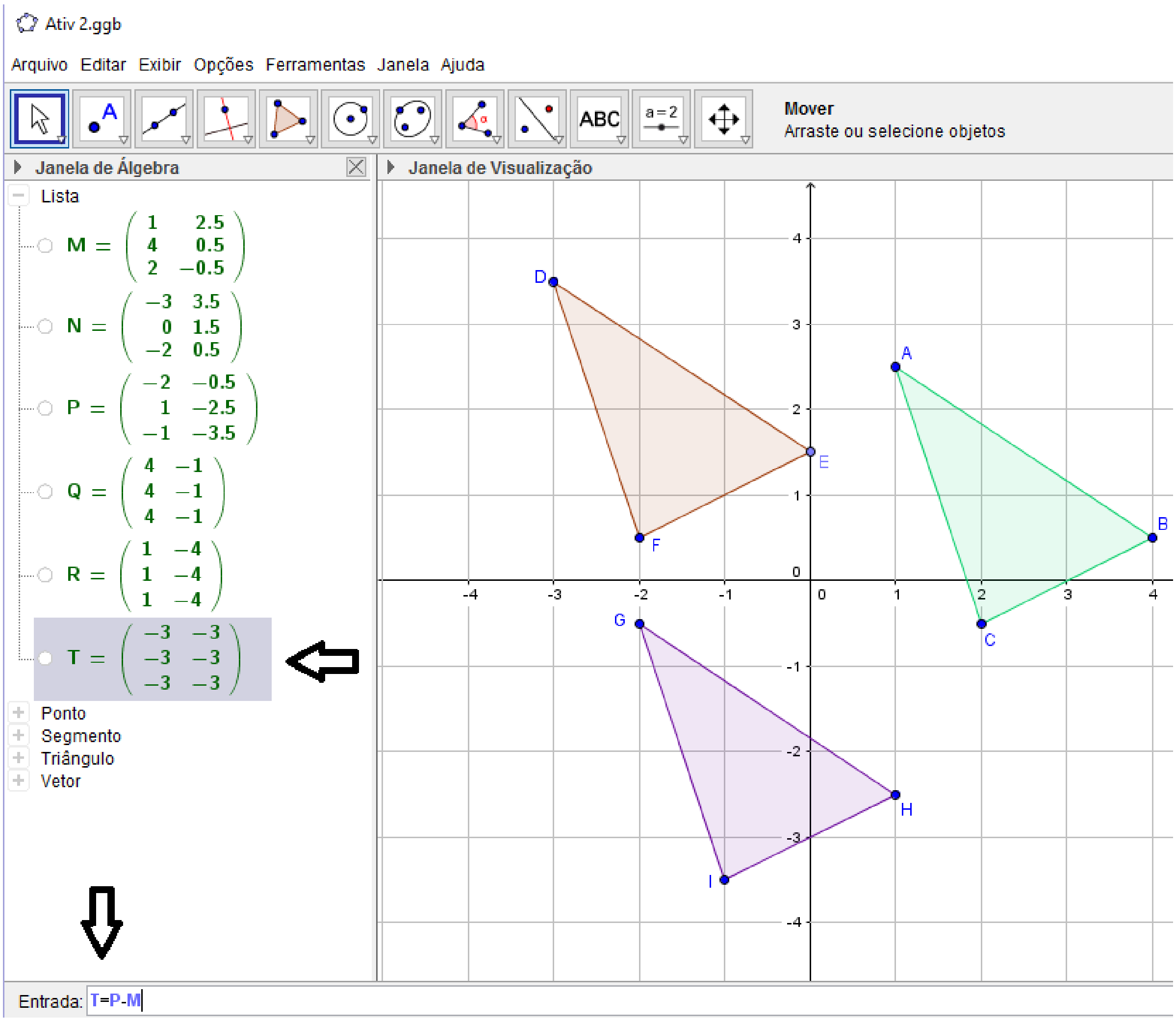
.

Assim, conclui-se que a operação $T = P - M$, resulta na matriz

$$T = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

formada pelos vetores r, s e t indicados na solução do item c, Figura 3.12, e ainda que a matriz $T = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{r} \\ \overrightarrow{s} \\ \overrightarrow{t} \end{pmatrix}$ é a matriz de translação que adicionada a matriz M resulta na matriz P, ou seja, que translada o triângulo ABC três unidades horizontais para a esquerda e três unidades verticais para baixo fazendo com que este coincida com o triângulo GHI, conforme indicado na Figura 3.16.

Figura 3.16 – Situação de aprendizagem 5: solução 2g



Fonte: Elaborado pelo autor

Desta maneira, conclui-se a resolução da atividade 2.

3. No Campeonato baiano da terceira divisão, após cinco rodadas, foram obtidos os seguintes resultados pelas cinco equipes participantes:

Figura 3.17 – Situação de aprendizagem 5: atividade 3

Equipe	Vitória	Empate	Derrota
Barro Vermelho	3	2	0
Carranca	2	1	2
Veneza	2	0	3
Colonial	1	1	3
Olaria	1	0	4

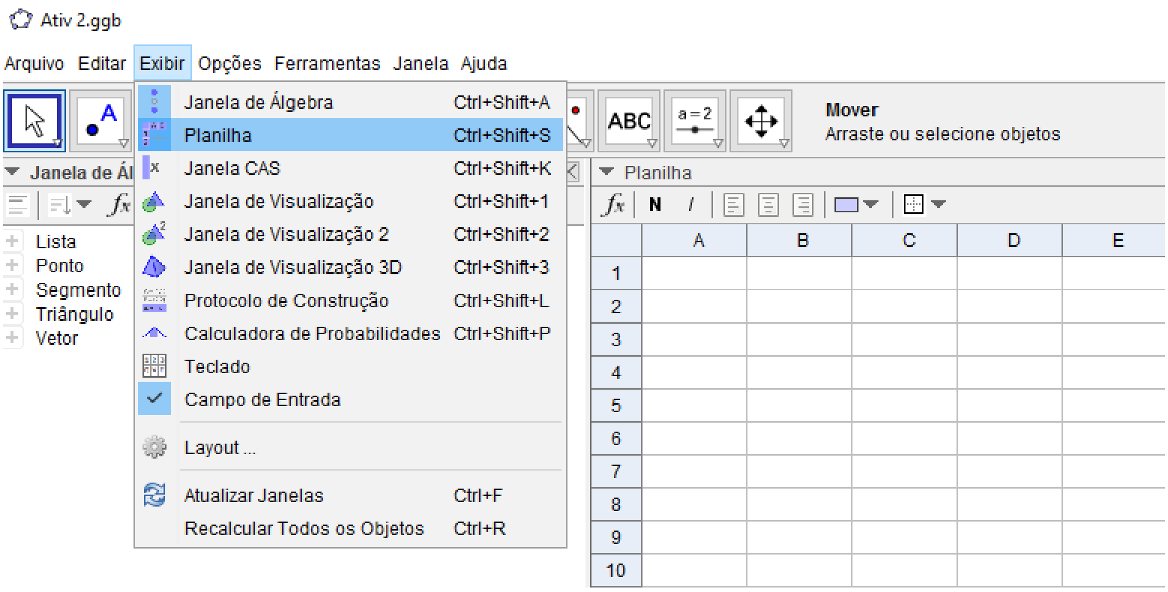
Resultado	Pontos
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

Fonte: Caderno do aluno (2014-2017, p.62)

Calcule quantos pontos cada time conquistou até agora e represente os resultados em uma matriz de ordem 5×1.

Para resolver a atividade 3, Figura 3.17, deve-se fechar a janela de visualização gráfica e no menu do GeoGebra escolher "Exibir-Planilha". Veja a Figura 3.18.

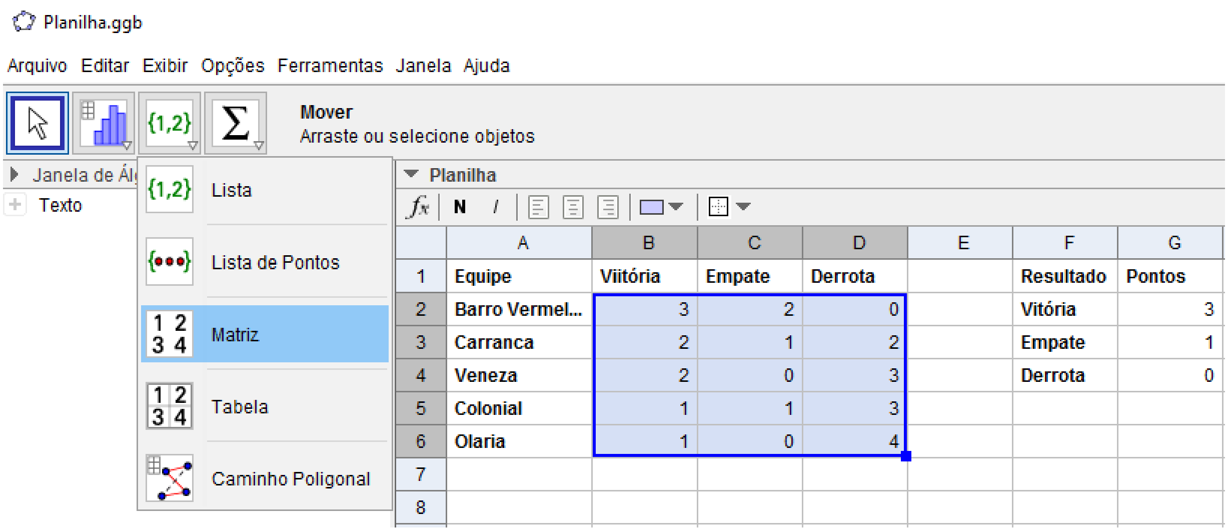
Figura 3.18 – Criando uma planilha no GeoGebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Agora será necessário criar as tabelas mostradas no exercício, para isso, digita-se todas as informações nas células da planilha, em seguida seleciona-se os dados numéricos das tabelas, clicando no botão "Matriz"e em "Criar"para gerar a matriz correspondente a cada tabela que será exibida na janela de álgebra como mostra a figura 3.19.

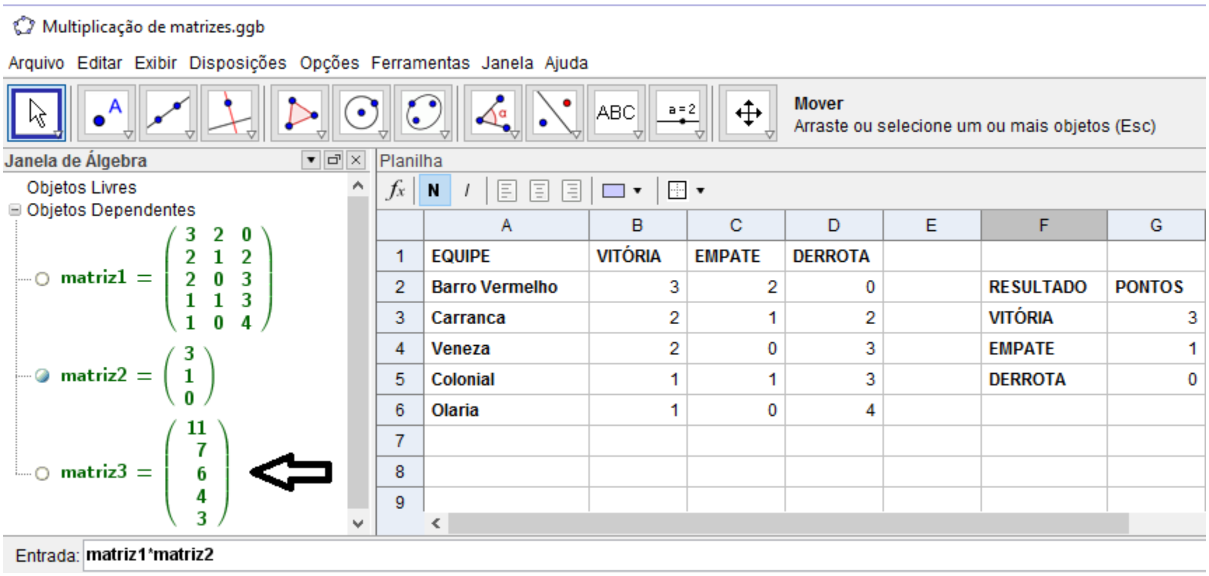
Figura 3.19 – Criando matrizes a partir de tabelas no GeoGebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Observe na Figura 3.20, que foram criadas a matriz1 e a matriz2, que podem ser renomeadas se o leitor assim preferir. Para multiplicar as matrizes e obter a solução do problema digita-se a operação desejada no campo "Entrada", ou seja, matriz1*matriz2.

Figura 3.20 – Multiplicação de matrizes no GeoGebra: solução 3



Fonte: Elaborado pelo autor

Automaticamente será gerada a matriz3, que informa a quantidade de pontos obtidos por cada equipe, ou seja, Barro Vermelho 11 pontos, Carranca 7 pontos, Veneza 6 pontos, Colonial 4 pontos e Olaria 3 pontos. É importante realizar os cálculos manualmente e trabalhar algumas definições.

$$matriz3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. O proprietário de duas cantinas, em escolas diferentes, deseja contabilizar o consumo dos seguintes produtos: suco de laranja, água mineral, queijo e presunto. Na cantina da escola A são consumidos, por semana, 40 dúzias de laranjas, 140 garrafas de água mineral, 15 quilos de queijo e 9 quilos de presunto. Na cantina da escola B são consumidos semanalmente 50 dúzias de laranjas, 120 garrafas de água mineral, 18 quilos de queijo e 10 quilos de presunto. O proprietário das cantinas compra os produtos que revende de dois fornecedores, cujos preços, em reais, são expressos na tabela a seguir:

Figura 3.21 – Situação de aprendizagem 5: Atividade 4a

Produtos	Fornecedor 1	Fornecedor 2
1 dúzia de laranjas	1,20	1,10
1 garrafa de água mineral	0,80	0,90
1 quilo de queijo	5,00	6,00
1 quilo de presunto	9,00	7,50

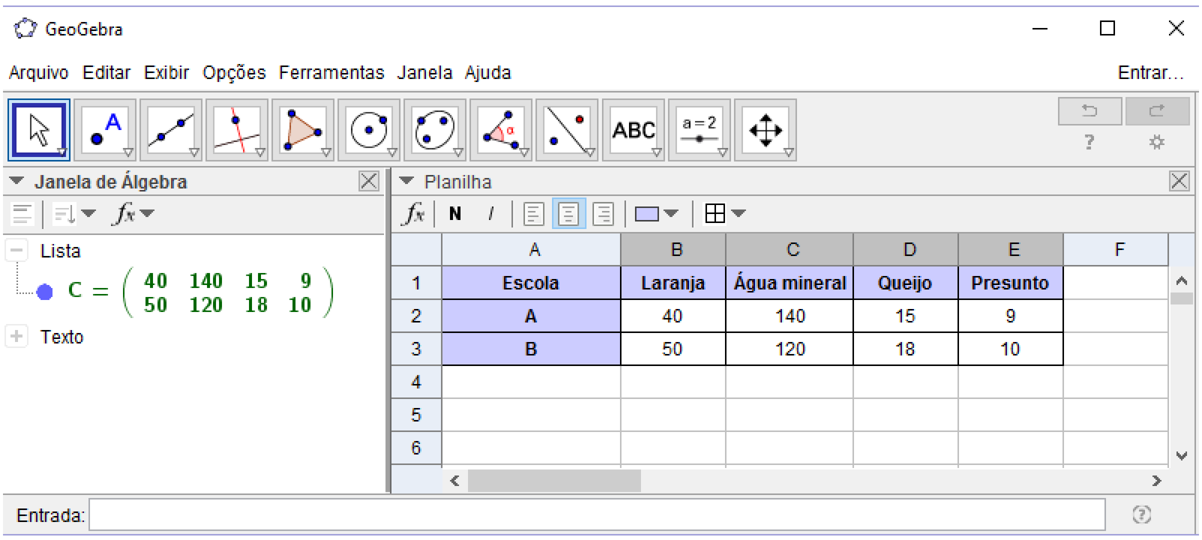
Fonte: Caderno do aluno (2014-2017, p.63)

Com base nessas informações, responda:

a) Uma matriz 2×4 em que esteja registrado o consumo semanal dos produtos listados na cantina A e também na cantina B.

Inicialmente será construída a tabela com os dados mencionados na Figura 3.21 e em seguida será gerada a matriz correspondente. Serão efetuados os mesmos procedimentos utilizados para solucionar a atividade 3, ver figura 3.18. Ao realizar todos os procedimentos corretamente obtém-se como resultado a matriz $C = \begin{pmatrix} 40 & 140 & 15 & 9 \\ 50 & 120 & 18 & 10 \end{pmatrix}$ que indica o consumo dos produtos presentes nas cantinas das escolas A e B, indicados na primeira e segunda linhas respectivamente. Veja a Figura 3.22.

Figura 3.22 – Situação de aprendizagem 5: solução 4a

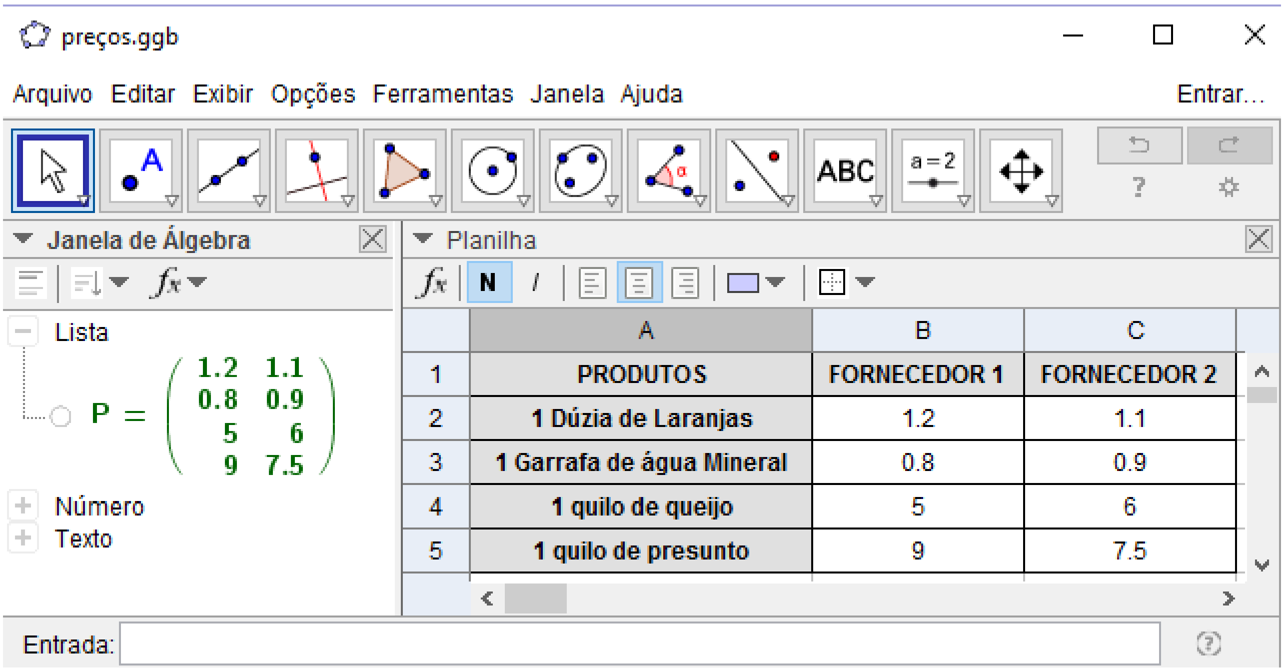


Fonte: Elaborado pelo autor

b) Uma matriz 4×2 em que estejam registrados os preços praticados pelos fornecedores 1 e 2 para os produtos listados.

Nesta atividade antes de digitar na planilha os valores cobrados por cada fornecedor, deve-se substituir as vírgulas dos preços em reais por pontos, pois, caso contrário ao criar a matriz correspondente o GeoGbra não reconhecerá o comando e não gerará a matriz, isso ocorre devido a existência de vírgulas na programação para identificar linhas e colunas na matriz e o acréscimo de novas vírgulas fará com que o programa entre em conflito. Procedendo adequadamente, ou seja, criando a tabela com os preços e substituindo as vírgulas por pontos, obtém-se como resultado a matriz $P = \begin{pmatrix} 1.2 & 1.1 \\ 0.8 & 0.9 \\ 5 & 6 \\ 9 & 7.5 \end{pmatrix}$ que indica os preços praticados pelos fornecedores 1 e 2, na primeira e segunda colunas respectivamente. Veja Figura 3.23.

Figura 3.23 – Situação de aprendizagem 5: solução 4b



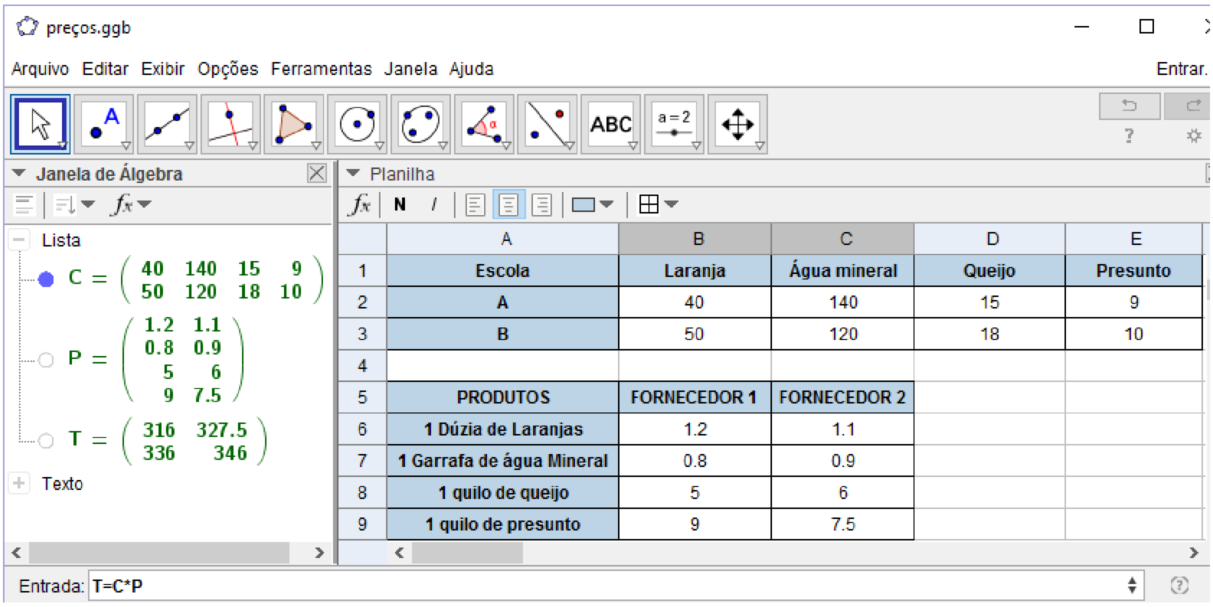
Fonte: Elaborado pelo autor

c) Uma matriz 2×2 contendo os preços totais cobrados por fornecedor para cada cantina.

Neste momento será necessário retomar com os alunos, as condições para a existência do produto entre matrizes, ou seja, lembrá-los de que o produto entre duas matrizes só será possível se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda, e ainda que caso seja possível efetuar a multiplicação a matriz produto terá o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda. Como a matriz $C_{2\times4}$ possui quatro colunas e a matriz $P_{4\times2}$ possui quatro linhas podemos realizar a multiplicação $C \times P$ e obter uma matriz produto de ordem 2×2. Note que neste caso ainda pode-se efetuar a multiplicação em outra ordem, ou seja, $P \times C$ também seria possível.

Indicando por T a matriz que contém os preços totais cobrados pelos fornecedores 1 e 2 digita-se no campo "Entrada"a equação $T = C \times P$ (no GeoGebra devemos trocar o sinal $\times$ por $*$) e obtém-se como resultado a matriz $T = \begin{pmatrix} 316 & 327.5 \\ 336 & 346 \end{pmatrix}$. Ver figura 3.24.

Figura 3.24 – Situação de aprendizagem 5: solução 4c



Fonte: Elaborado pelo autor

Realizando os cálculos manualmente temos:

$$T = \begin{pmatrix} 40 & 140 & 15 & 9 \\ 50 & 120 & 18 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.2 & 1.1 \\ 0.8 & 0.9 \\ 5 & 6 \\ 9 & 7.5 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 40 \cdot 1.2 + 140 \cdot 0.8 + 15 \cdot 5 + 9 \cdot 9 & 40 \cdot 1.1 + 140 \cdot 0.9 + 15 \cdot 6 + 9 \cdot 7.5 \\ 50 \cdot 1.2 + 120 \cdot 0.8 + 18 \cdot 5 + 10 \cdot 9 & 50 \cdot 1.1 + 120 \cdot 0.9 + 18 \cdot 6 + 10 \cdot 7.5 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 316 & 327.5 \\ 336 & 346 \end{pmatrix}$$

Observa-se que na matriz $T_{2 \times 2}$ estão indicados na primeira e segunda colunas os preços totais cobrados pelos fornecedores 1 e 2 respectivamente e que o preço pago pelas cantinas da escola A e B estão indicados na primeira e segunda linhas respectivamente. Portanto, a cantina da escola A terá uma despesa de R$ 316,00 se optar pelo fornecedor 1 e uma despesa de R$ 327,50 caso sua opção seja o fornecedor 2. Já a cantina da escola B terá uma despesa de R$ 336,00 caso sua opção seja o fornecedor 1 e de R$ 346,00 se contratar o fornecedor 2.

d) Quanto o proprietário economizará comprando sempre no fornecedor mais barato, para os dois restaurantes.

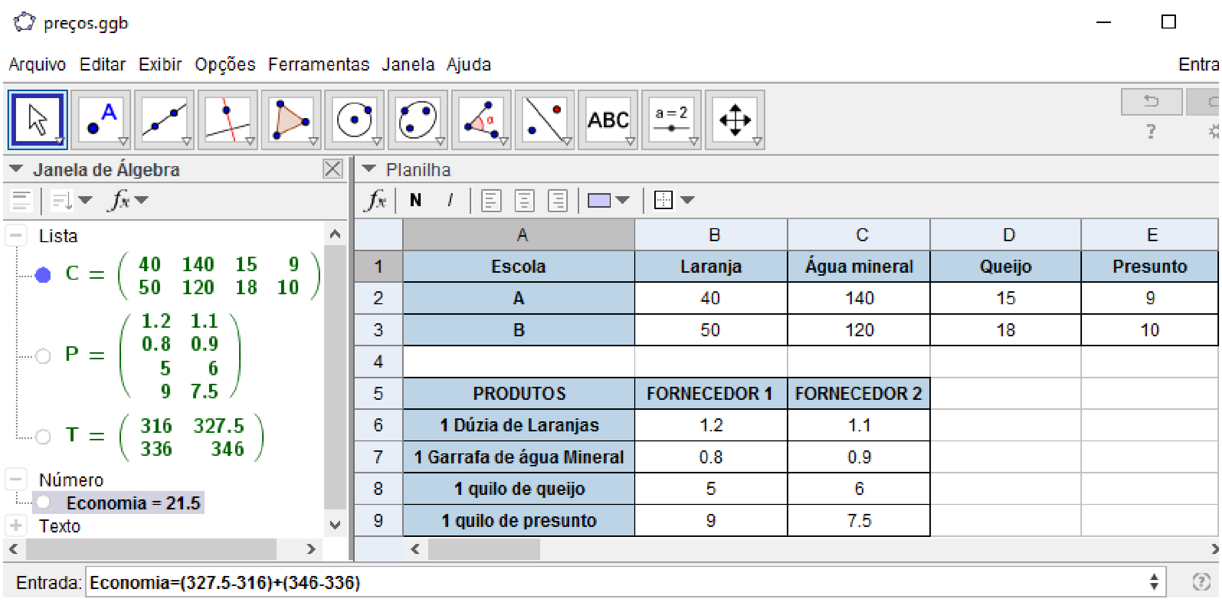
A solução desta atividade pode ser obtida facilmente observando os resultados da atividade anterior e utilizando operações simples, porém, como o intuito é tornar a atividade significativa e diferenciada os cálculos serão efetuados no próprio GeoGebra. Assim para calcular a economia que o proprietário das cantinas terá ao optar pelo fornecedor mais barato, basta efetuar a soma das diferenças entre os elementos localizados nas linhas da matriz

$$T = \begin{pmatrix} 316 & 327.5 \\ 336 & 346 \end{pmatrix}$$

.

Veja na figura 3.25 que no campo "Entrada"digita-se a operação $(327.5-316)+(346-336)$, para destacar o resultado da operação pode-se nomeá-la "Economia".

Figura 3.25 – Situação de aprendizagem 5: solução 4d



Fonte: Elaborado pelo autor

Observando-se o resultado em destaque na janela de álgebra, conclui-se que optando pelo fornecedor mais barato, fornecedor 1, o proprietário das cantinas economizará $R\$ \ 21,50$.

5. No período de Páscoa, Jair resolveu ganhar um dinheiro extra, fabricando e vendendo ovos de chocolate. Para planejar seus investimentos e lucros no projeto, Jair elaborou as seguintes planilhas com quantidades necessárias e custo de material para quatro tipos de ovos.

Figura 3.26 – Situação de aprendizagem 5: atividade 5

Tabela 1 – Quantidade de material necessário para a fabricação de uma unidade de cada tipo de ovo				
Itens	**Tipo 1**	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Tipo 4**
Chocolate (gramas)	120	250	180	160
Açúcar (gramas)	100	120	100	80
Recheio (gramas)	160	180	200	100
Embalagem (folhas)	0,5	1,5	1,0	1,0

Fonte: Caderno do aluno (2014-2017, p.64)

Figura 3.27 – Situação de aprendizagem 5: atividade 5a

Tabela 2 – Custo de cada tipo de material (R$)			
Chocolate (kg)	**Açúcar (kg)**	**Recheio (kg)**	**Embalagem (folhas)**
12,00	1,50	28,00	1,20

Fonte: Caderno do aluno (2014-2017, p.65)

a) Escreva uma matriz de ordem 1×4 contendo o custo total de fabricação de cada tipo de chocolate.

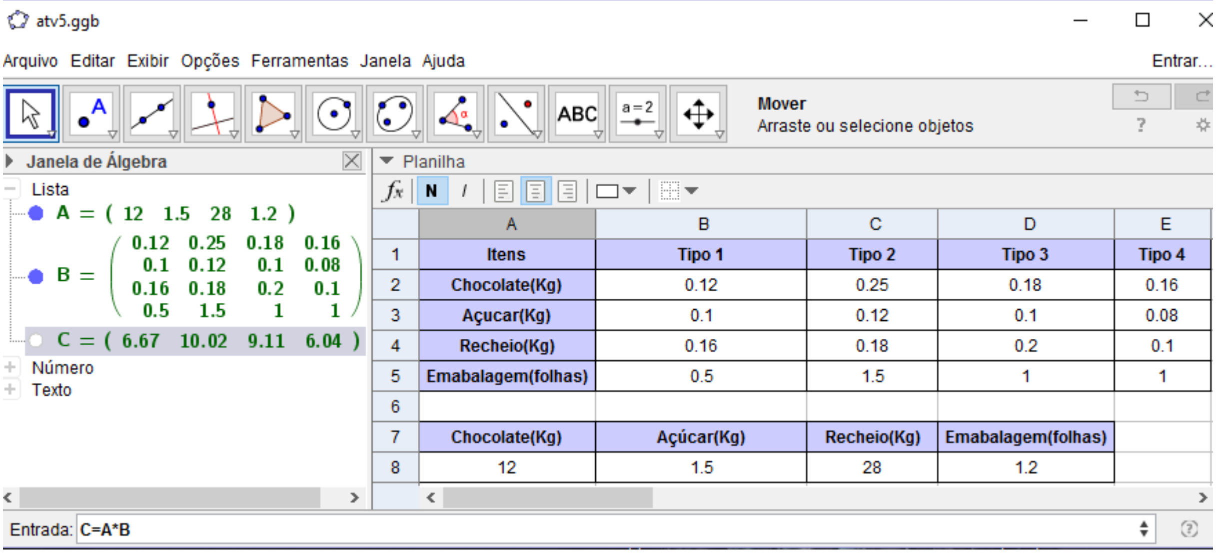
Para obter a matriz de ordem 1×4 que representa o custo total de fabricação de cada tipo de chocolate, basta multiplicar os elementos numéricos contidos nas duas tabelas citadas no enunciado. Dessa forma, multiplica-se a linha da Tabela 2, ilustrada na Figura 3.27, pelos elementos de cada uma das colunas da Tabela 1, ilustrada na Figura 3.26.

Inicialmente, será necessário criar no GeoGebra as tabelas 1 e 2 e as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 1.5 & 28 & 1.2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0.12 & 0.25 & 0.18 & 0.16 \\ 0.1 & 0.12 & 0.1 & 0.08 \\ 0.16 & 0.18 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 1.5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que apresentam os elementos numéricos contidos nas tabelas 2 e 1 respectivamente. Observe que foi preciso transformar os dados numéricos das três primeiras linhas da tabela 1 de gramas para quilogramas, pois, a tabela 2 apresenta o custo em reais de cada tipo de material por quilogramas. Em seguida, digita-se no campo "Entrada"do GeoGebra $C = A^*B$, pressionando a tecla *"enter"* a matriz $C = \begin{pmatrix} 6.67 & 10.02 & 9.11 & 6.04 \end{pmatrix}$ que apresenta o custo total de fabricação de cada tipo de chocolate, será apresentada na janela de álgebra da figura 3.28.

Figura 3.28 – Situação de aprendizagem 5: solução 5a



Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, observa-se os valores contidos na matriz C e conclui-se que os custos de produção dos tipos de chocolate 1, 2, 3 e 4, estão representados nas colunas da matriz e são respectivamente $R\$\ 6,67$; $R\$\ 10,02$; $R\$\ 9,11$ e $R\$\ 6,04$.

b) Se Jair pretende trabalhar com as margens de lucro sobre o preço de custo expressas na tabela a seguir, calcule qual é o valor total das vendas que ele espera conseguir com 200 unidades de cada tipo de chocolate.

Figura 3.29 – Situação de aprendizagem 5: atividade 5b

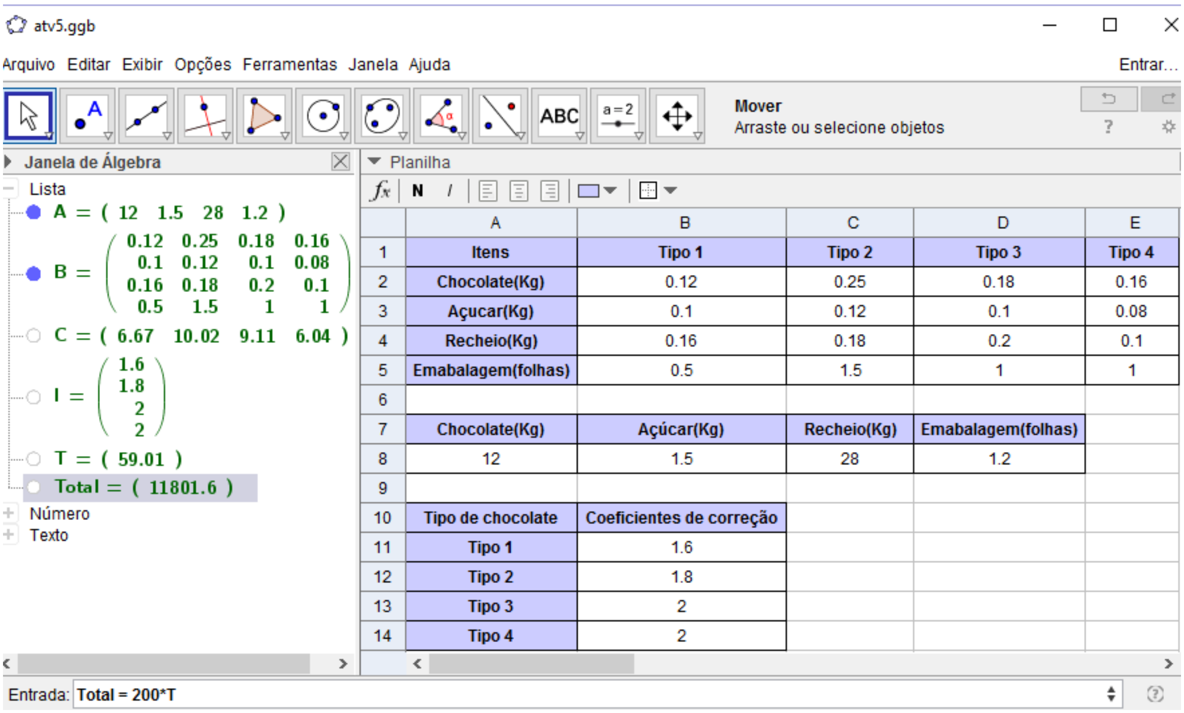
Tabela 3 – Margem de lucro por tipo produzido				
Tipo de chocolate	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
Margem de lucro (%)	60	80	100	100

Fonte: Caderno do aluno (2014-2017, p.65)

Para calcular o total de vendas, é preciso acrescentar ao custo de cada tipo de chocolate a respectiva margem de lucro, ou seja, para calcular o preço de venda do chocolate tipo 1, por exemplo, o qual a margem de lucro incidente é de 60%, multiplica-se o preço de venda em reais pelo coeficiente $1,6$, então calcula-se $6,67 \cdot 1,6$. Assim, ao efetuar a multiplicação da matriz linha $C = \begin{pmatrix} 6,67 & 10,02 & 9,11 & 6,04 \end{pmatrix}$ que representa o custo de cada tipo de chocolate, pela matriz coluna $I = \begin{pmatrix} 1,6 \\ 1,8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dos coeficientes de correção do valor inicial, será obtida a matriz $T = \begin{pmatrix} 59,008 \end{pmatrix}$ que representa o valor total das vendas de uma unidade de cada tipo. Porém, como Jair pretende vender 200 unidades de cada tipo de chocolate, deve-se multiplicar o resultado obtido por 200. Por tanto, $200 \cdot 59,01 = 11801,60$.

No GeoGebra serão construídas as tabelas e matrizes, e efetuada a multiplicação $T = C^{*}I$, em seguida, a multiplicação $200^{*}T$. Veja a Figura 3.30.

Figura 3.30 – Situação de aprendizagem 5: solução 5b



Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, conclui-se que a receita que Jair obterá na venda de 200 unidades será de $R\$ \ 11801,60$.

3.5 Proposta de resolução das atividades da situação de aprendizagem 6

Esta situação de aprendizagem aborda a construção de matrizes a partir de significados algébricos e a localização dos elementos de uma matriz de acordo com sua posição nas linhas e colunas. Além disso, pretende desenvolver as habilidades relacionadas à utilização da notação matricial para representar figuras planas, respeitando as sequências de comandos estabelecidos pelas matrizes.

A situação de aprendizagem 6, contém 4 atividades, das quais serão resolvidas as três primeiras. Novamente será utilizado o GeoGebra, no entanto, desta vez o software terá uma contribuição menor que na situação de aprendizagem anterior devido as características dos problemas, porém, não menos importante. Desta vez o GeoGebra será utilizado para criar as matrizes e representar as figuras planas geradas através de códigos contidos nas matrizes. Essa situação de aprendizagem é intitulada "Matriz de codificação: Desenhando com matrizes".

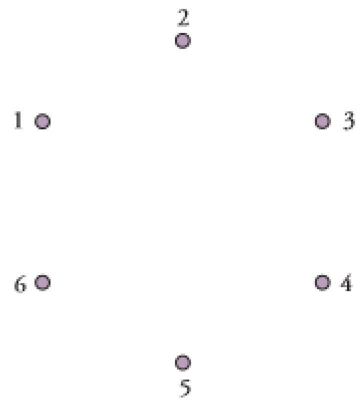
1. Dada a matriz D e os pontos desenhados, você deve uni-los ou não a partir do seguinte código estabelecido para os seus elementos:

   Se $d_{ij} = 1$, unir i com j.

   Se $d_{ij} = 0$, não unir i com j.

Figura 3.31 – Construindo matrizes no GeoGebra: Matriz D

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



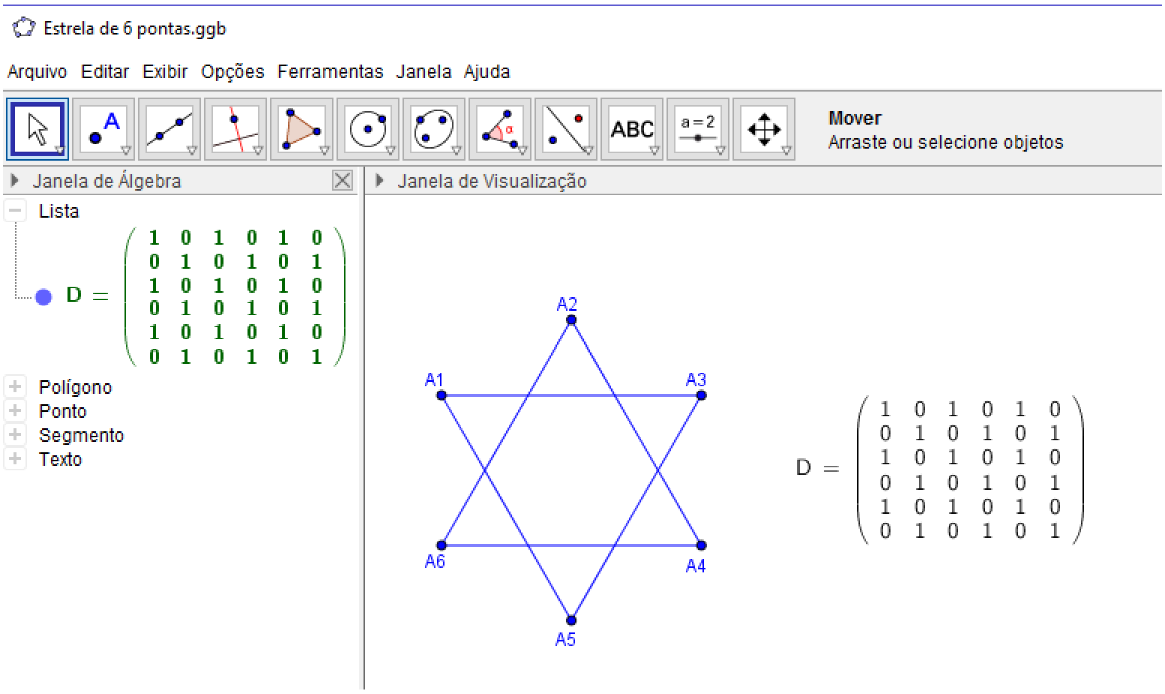
Fonte: Caderno do aluno (2014-2017, p.81)

Para resolver esta situação-problema basta verificar quais elementos da matriz D, figura 3.31, são iguais a 1 e unir os números que representam os índices i e j que localizam os elementos na matriz de acordo com a posição nas linhas e colunas respectivamente. Observando a matriz, verifica-se que estes elementos são: $d_{11} = 1$ (ligar 1 com 1), $d_{13} = 1$ (ligar 1 com 3), $d_{15} = 1$ (ligar 1 com 5), $d_{22} = 1$ (ligar 2 com 2), $d_{24} = 1$ (ligar 2 com 4), $d_{26} = 1$ (ligar 2 com 6), $d_{31} = 1$ (ligar 3 com 1), $d_{33} = 1$ (ligar 3 com 3), $d_{35} = 1$ (ligar 3 com 5), $d_{42} = 1$ (ligar 4 com 2), $d_{44} = 1$ (ligar 4 com 4), $d_{46} = 1$ (ligar 4 com 6), $d_{51} = 1$ (ligar 5 com 1), $d_{53} = 1$ (ligar 5 com 3), $d_{55} = 1$ (ligar 5 com 5), $d_{62} = 1$ (ligar 6 com 2), $d_{64} = 1$ (ligar 6 com 4) e $d_{66} = 1$ (ligar 6 com 6).

Percebe-se que elementos que apresentam índices iguais $i = j$ representam os próprios pontos, e ainda, que nos pares de elementos do tipo (d_{ij}, d_{ji}) obtém-se o mesmo segmento. Desta forma, pode-se resumir os comandos a $d_{13} = 1$ (ligar 1 com 3), $d_{15} = 1$ (ligar 1 com 5), $d_{24} = 1$ (ligar 2 com 4), $d_{26} = 1$ (ligar 2 com 6), $d_{35} = 1$ (ligar 3 com 5) e $d_{46} = 1$ (ligar 4 com 6).

No GeoGebra, será construída a matriz D e a figura obtida através dos comandos acima. Para obter uma construção geométrica perfeita, será utilizada a ferramenta "Polígono Regular"para construir um hexágono regular. Após o hexágono estar pronto, basta ocultar os segmentos, a malha e os eixos, dessa forma restarão somente os vértices do hexágono, que são os seis pontos dados no problema. Para ligá-los e resolver a atividade, utiliza-se a ferramenta "Segmento definido Por dois Pontos". Assim, clicando nos pontos de acordo com a sequência de comandos informada pela matriz, obtemos o resultado representado na Figura 3.32.

Figura 3.32 – Situação de aprendizagem 6: solução 1

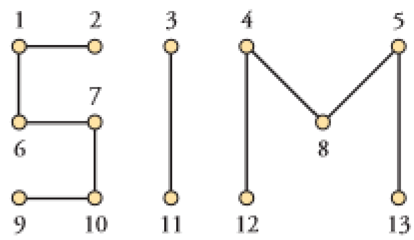


Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, conforme a construção apresentada no GeoGebra, conclui-se que a figura procurada é uma estrela de seis pontas.

2. Os pontos numerados de 1 a 13 do desenho foram unidos a partir de código definido em uma matriz. Escreva essa matriz.

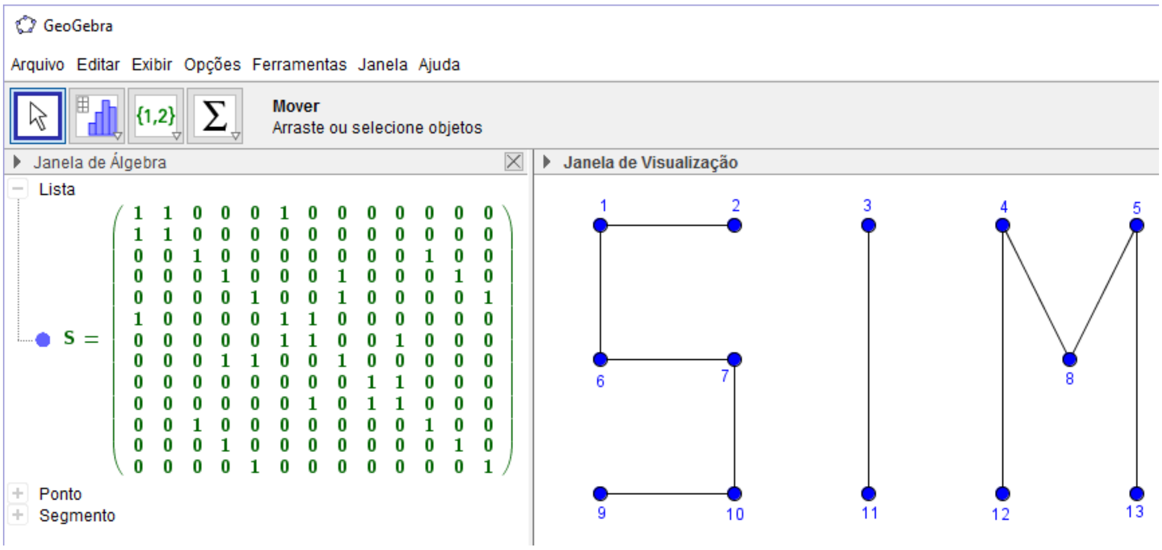
Figura 3.33 – Situação de aprendizagem 6: atividade 2



Fonte: Caderno do aluno (2014-2017, p.81)

Observe na Figura 3.33, que são 13 pontos, assim, a matriz procurada é uma matriz quadrada de ordem 13, formada por elementos iguais a 1 e 0. Além disso, deve-se recordar que os elementos da matriz em que $i = j$ devem ser iguais a 1, pois, eles representam os próprios pontos do desenho. Desta maneira, já sabemos que a diagonal principal da matriz tem todos os elementos iguais a 1. Para encontrar os demais elementos da matriz, basta observar os segmentos que unem os pontos da Figura 3.33, atentando para o fato de que o segmento que une os pontos 1 e 2, e o segmento que une os pontos 2 e 1 é o mesmo segmento, porém, na matriz são elementos distintos, ou seja, considerando que a matriz procurada seja a matriz S, o elemento que une os pontos 1 e 2 será $s_{12} = 1$, já o elemento que une os pontos 2 e 1 será $s_{12} = 1$. Logo, os elementos da matriz iguais a 1 são: , s_{12}, s_{21}, s_{16}, s_{61}, $s_{3\,11}$, $s_{11\,3}$, s_{48}, s_{84} $s_{4\,12}$, $s_{12\,4}$, s_{58}, s_{85}, $s_{5\,13}$, $s_{13\,5}$, s_{67}, s_{76}, $s_{7\,10}$, $s_{10\,7}$, $s_{9\,10}$ e $s_{10\,9}$, além dos elementos da diagonal principal já mencionados. Após descobrir os elementos que são iguais a 1, os demais sabidamente são iguais a zero, figura 3.34.

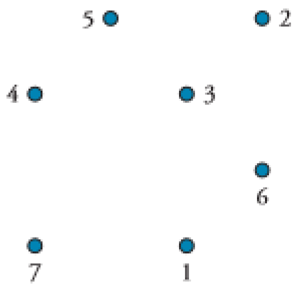
Figura 3.34 – Situação de aprendizagem 6: Solução 2



Fonte: Elaborado pelo autor

3. Observe os 7 pontos representados abaixo. Você deve escrever uma matriz de codificação, com "1" ou "0", de maneira que, ao ligar os pontos na ordem determinada, seja produzida a representação de um cubo.

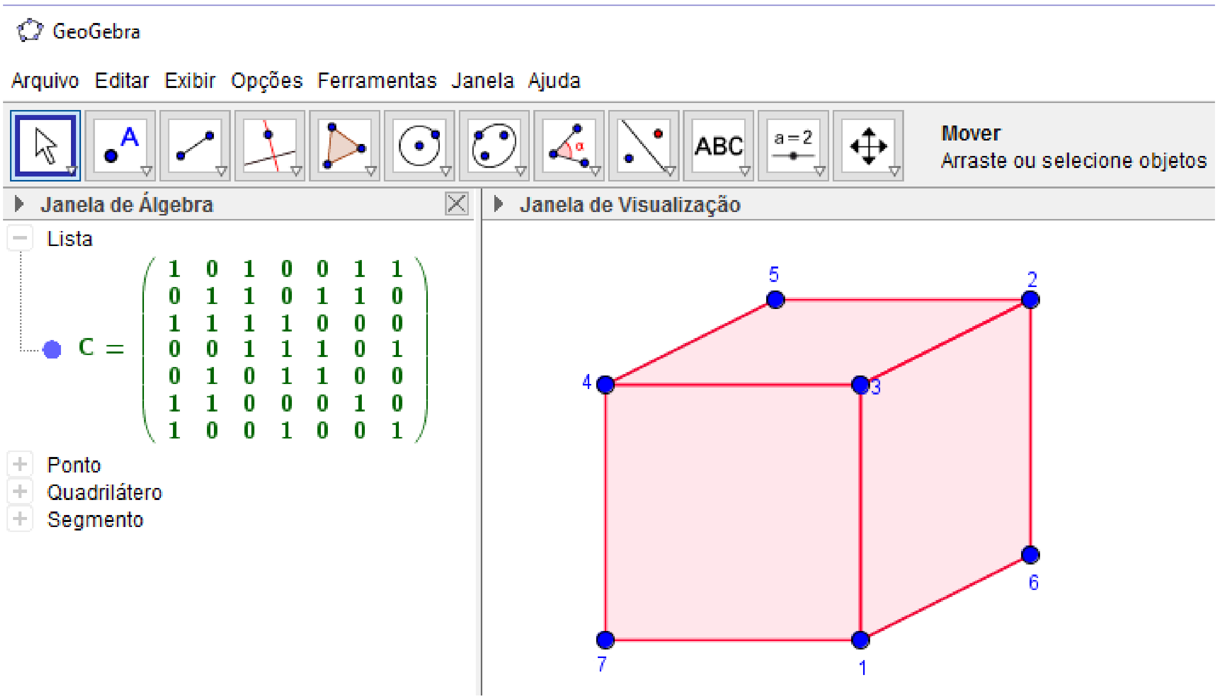
Figura 3.35 – Situação de aprendizagem 5: atividade 3



Fonte: Caderno do aluno (2014-2017, p.81)

Observe a Figura 3.35, como são 7 pontos a serem ligados, a matriz procurada é uma matriz quadrada de ordem 7. Para construir o cubo solicitado no enunciado do problema deve-se ligar os pontos 1 e 3, 1 e 6, 1 e 7, 2 e 3, 2 e 5, 2 e 6, 3 e 4, 4 e 5, 4 e 7. Assim, considerando que a matriz de codificação procurada seja a matriz $C_{7\times7}$, serão iguais a 1 os elementos da diagonal principal e ainda, os elementos: $c_{13}, c_{31}, c_{16}, c_{61}, c_{17}, c_{71}, c_{23}, c_{32}, c_{25}, c_{52}, c_{26}, c_{62}, c_{34}, c_{43}, c_{45}, c_{54}, c_{47}$ e c_{74}. Os demais elementos devem ser iguais a zero, conforme ilustra a Figura 3.36.

Figura 3.36 – Situação de aprendizagem 5: solução 3



Fonte: Elaborado pelo autor

Na próxima seção será descrito como foi o processo de aplicação das atividades propostas até aqui.

3.6 Colocando conhecimentos em prática

Durante os meses de outubro e novembro do ano de 2016, realizou-se a aplicação das atividades das situações de aprendizagem 5 e 6 que foram apresentadas ao leitor nas duas seções anteriores. O local em que se desenvolveram as aulas foi a ETEC Professora Nair Luccas Ribeiro na cidade de Teodoro Sampaio-SP.

Os alunos participantes da pesquisa estavam matriculados na segunda série do ensino médio. Deve-se ressaltar que o caderno do aluno não é utilizado na ETEC que utiliza material didático próprio. A opção de realizar a atividade nessa escola, deve-se ao fato da mesma proporcionar um ambiente adequado para o desenvolvimento das situações de aprendizagem. A ETEC Professora Nair Luccas Ribeiro conta com 3 laboratórios de informática equipados cada um com 25 computadores e banda larga. Além disso, todos os laboratórios contam com aparelhos de ar condicionado. Toda essa estrutura colabora para que o trabalho se desenvolva de maneira eficiente.

Os alunos das duas segundas séries do Ensino Médio tiveram aulas diferenciadas, na turma A, utilizou-se o processo tradicional de ensino de matrizes, ou seja, muita aula expositiva e dialogada. Os materiais didáticos utilizados foram o apostilado da ETEC, e as atividades do caderno do aluno. A maior parte das atividades contidas no apostilado eram pouco criativas, e não mencionavam em momento algum as transformações geométricas. Além disso, apresentavam um sistema de resolução mecânico e não contextualizado. O único contato que os alunos tiveram com as transformações geométricas foi através das situações de aprendizagem contidas no caderno do aluno. Durante o desenvolvimento das atividades, na sala de aula, muitos alunos se mostravam entediados com o excesso de álgebra, outros não conseguiam compreender as explicações geométricas, ou seja, as aulas não foram satisfatórias.

Na turma B, realizou-se o desenvolvimento das atividades das situações de aprendizagem 5 e 6 de acordo com a sequência didática apresentada nas duas seções anteriores. Para isso, foram utilizados os laboratórios de informática da ETEC, e o *softwre* GeoGebra.

Inicialmente os alunos se familiarizaram com os comandos do *software*, e este foi um momento de descoberta onde os próprios alunos de maneira autônoma realizaram alguns procedimentos como cálculo de área, perímetro e construção de gráficos de funções. Apesar de fugir um pouco do tema, não se deve interromper esse processo de construção do conhecimento.

Alguns alunos demonstraram pequenas dificuldades em utilizar algumas ferramentas do software, porém, tais dificuldades foram sanadas rapidamente, pois, como pode-se imaginar, a maior dificuldade dos alunos não foi a utilização do GeoGebra, até porque, as novas gerações se adaptam rapidamente às novas tecnologias da informação, pois estas estão cada vez mais presentes em seu cotidiano, tanto que, alguns alunos instalaram o software em seus celulares por iniciativa própria. No entanto, o desenvolvimento algébrico dos conceitos de matrizes se apresentaram como o maior empecilho no processo de ensino e aprendizagem. Dessa forma, foi necessário estar sempre relembrando algumas definições e conceitos durante as aulas. Contudo, apesar das dificuldades encontradas a maior parte dos alunos conseguiu desenvolver as atividades propostas. Na Figura 3.37, observa-se um dos alunos realizando umas das atividades da situação de aprendizagem 5.

Figura 3.37 – Aluno resolvendo a atividade 1 no GeoGebra

Fonte: Elaborado pelo autor

Quanto ao uso do celular em sala de aula citado anteriormente, o professor deve estar sempre aproveitando oportunidades de contextualização e aprimoramento do saber matemático.

> A partir das diversas transformações tecnológicas o professor ganha novas formas de ensinar chamando a atenção de seus alunos para as informações a serem recebidas. Fazendo com que o professor saiba utilizar as possibilidades disponíveis. Dos laptops mais baratos aos telefones que fazem de tudo, surgem instrumentos, cada vez mais ao nosso alcance, que abrem novas perspectivas para a pesquisa, o transporte e consumo de bens culturais, a troca de mensagens e para atividade de autoria de todos os tipos. Resta saber se a escola saberá explorar essas possibilidades. (RISCHBIETER, 2009)

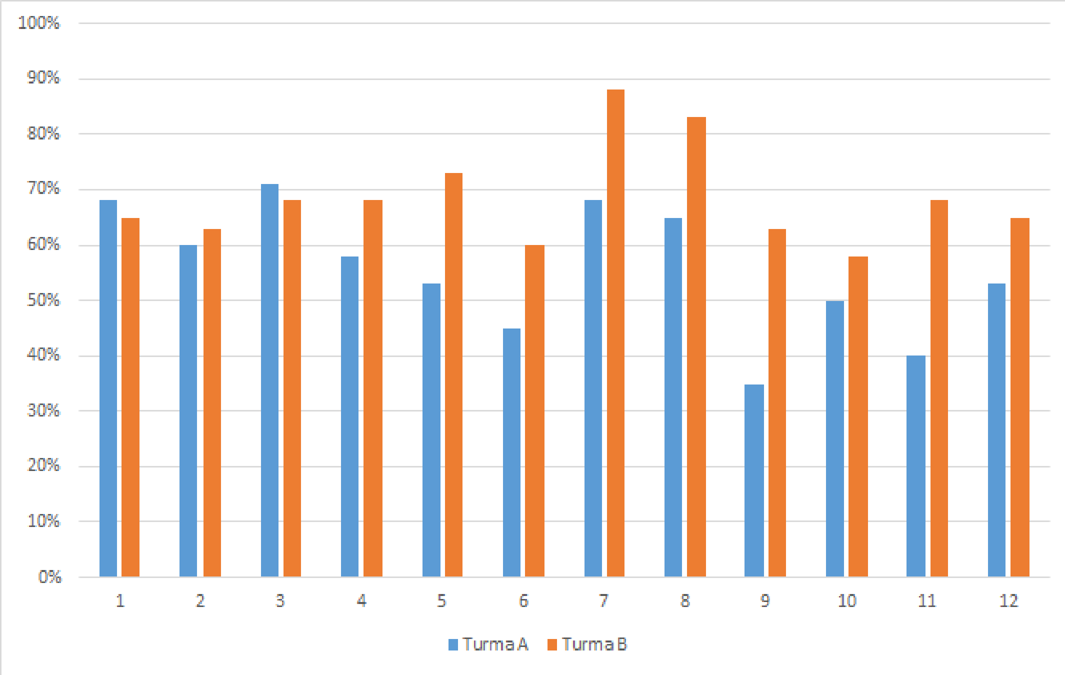
Após quatro semanas de estudos entre teoria e prática no laboratório de informática, os alunos realizaram uma avaliação que é aplicada na rede estadual pela secretaria de educação do estado de São Paulo.

Esta avaliação é intitulada avaliação da aprendizagem em processo e é aplicada semestralmente nas escolas estaduais da rede pública de São Paulo. Como a ETEC pertence a uma secretaria diferente, seus alunos não realizam essa avaliação normalmente, assim, trata-se de uma exceção. A versão da avalição realizada nessa pesquisa é referente ao segundo semestre de 2015, pois, não temos acesso a versão atualizada. Esta versão contém 24 questões referentes a matrizes, determinantes e sistemas lineares, porém, restringimos nossos estudos às 12 primeiras questões que são sobre matrizes. No Anexo encontra-se um *link*, onde estão as atividades propostas na avaliação. Na próxima seção será feita uma análise dos resultados obtidos.

3.7 Resultados alcançados

Após a realização da avaliação da aprendizagem em processo os dados foram organizados e tabulados, o gráfico na figura 3.38, compara o rendimento das duas turmas.

Figura 3.38 – Resultado da Avaliação da aprendizagem em processo



Fonte: Elaborado pelo autor

O gráfico deixa bem claro que até a terceira questão as duas séries têm rendimentos parecidos. As questões de 1 a 6 se referem à habilidade de utilizar elementos de matrizes para organizar e justificar a resolução de situações-problema baseadas em contextos do cotidiano. Apesar de as questões de 1 a 6 se referirem à mesma habilidade as três primeiras questões são elaboradas de maneira mais tradicional, como nos apostilados e livros didáticos, isso provavelmente explica o equilíbrio mostrado no gráfico apresentado na Figura 3.38.

Entretanto as demais questões são elaboradas utilizando conceitos que normalmente não são contemplados em livros didáticos e apostilados. Essas questões estão relacionadas com a habilidade de utilizar a notação matricial para representar figuras planas e espaciais e abordam transformações geométricas planas e codificações como pode ser verificado nos anexos.

Desta forma pode-se concluir que a utilização do software GeoGebra para realização de atividades que envolvam transformações geométricas planas e operações com matrizes é eficiente, pois, torna o processo de ensino aprendizagem significativo e agradável.

Porém após a resolução das atividades propostas nas situações de aprendizagem 5 e 6, fica evidente que apesar das atividades serem bem elaboradas, elas não aprofundam os estudos dos temas abordados. Na situação de aprendizagem 5, por exemplo, é apresentada somente uma transformação geométrica, a translação. Desse modo, os próximos capítulos trazem conceitos para aprofundamento do estudo de matrizes e também propostas de atividades que possam complementar o conteúdo apresentado até então.

4 AMPLIANDO CONCEITOS E PERSPECTIVAS

Neste capítulo, com o propósito de ampliar conceitos e perspectivas de professores e alunos, serão apresentadas aplicações relacionadas a imagens digitais e computação gráfica. Obviamente as aplicações de matrizes não se restringem a essas duas citadas anteriormente. Existem aplicações de matrizes em diversas áreas do conhecimento, como Estatística, Engenharia e Física, por exemplo. Porém, o foco de nosso estudo, as transformações geométricas, são indispensáveis para o desenvolvimento de imagens digitais e computação gráfica. Assim espera-se conferir um significado concreto ao estudo de matrizes e transformações geométricas.

Contudo, antes de serem apresentadas as aplicações contextualizadas, serão abordados de forma resumida conceitos que geralmente são abordados no ensino superior, na disciplina de álgebra linear, mas também podem ser aplicados de forma simplificada no ensino médio. Esta abordagem é extremamente importante, pois, os conceitos elencados a seguir são necessários para que o leitor compreenda de forma mais clara os conceitos relativos a transformações geométricas, que a partir de agora terão um tratamento vetorial.

4.1 Espaços vetoriais

Definição 4.1. Seja um conjunto V, não vazio, no qual estão definidas as operações de adição $+ : V \times V \longrightarrow V$ e multiplicação por escalar $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$, ou seja:

$$\forall u, v \in V,\ u + v \in V$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall u \in V,\ \alpha u \in V$$

O conjunto V será um espaço vetorial real se forem verificadas as seguintes propriedades:

Em relação à adição

$A_1)$ $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$ (associatividade)

$A_2)$ $u + v = v + u, \forall u, v, \in V$ (comutatividade)

$A_3)$ Existe $0 \in V$ tal que $u + 0 = u,\ \forall u \in V$ (existência de elemento neutro)

$A_4)$ Dado $u \in V,\ \exists - u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$ (existência de elemento oposto ou simétrico)

Em relação à multiplicação

M_1) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$, $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u \in V$ (associatividade da multiplicação por escalar)

M_2) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u \in V$ (distributiva de um vetor em relação a soma de escalares)

M_3) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha u$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$ (distributiva de um escalar em relação a soma de vetores)

M_4) $1u = u$, $\forall u \in V$ (existência de elemento neutro)

São exemplos de espaços vetoriais:

1) $\mathbb{R}$

2) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

3) $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

4) $\mathbb{M}_{m\times n}\ (\mathbb{R}) = \{(a_{ij}), 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ a_{ij} \in \mathbb{R}\}$ (conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ com entradas em $\mathbb{R}$).

5) $P_2(\mathbb{R}) = \{ax^2 + bx + c$, tal que $a, b, c \in \mathbb{R}\}$ (conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2 sobre $\mathbb{R}$).

Os elementos do espaço vetorial V são chamados vetores, independentemente de sua natureza. Podemos chamar números, matrizes e polinômios de vetores, pois apesar de distintos por natureza, satisfazem as mesmas propriedades definidas para a adição e multiplicação por escalar.

4.2 Subespaço vetorial

Definição 4.2. Seja V um espaço vetorial e $S \neq \varnothing$ um subconjunto de V. Se S é um espaço vetorial em relação as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V, então S é dito subespaço vetorial de V.

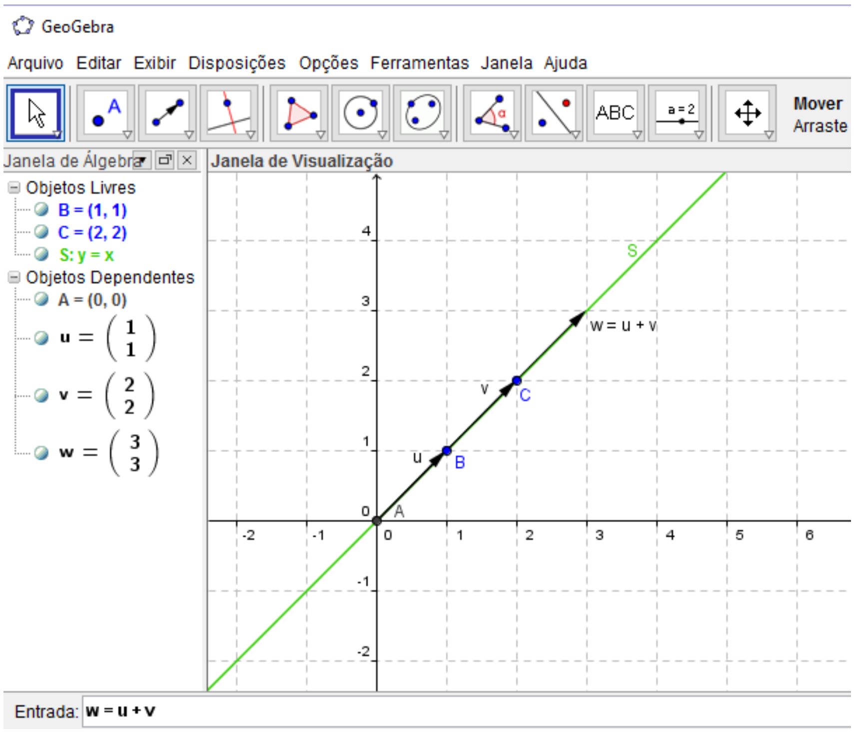
Teorema 4.2. Se $S \neq \varnothing$, $S \subset V$, V é espaço vetorial, então S é subespaço vetorial de V, se e somente se:

i) $\forall u, v \in S$, $u + v \in S$(S é fechado para a adição).

ii) $\forall u \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha u \in S$ (S é fechado para a multiplicação por escalar).

Exemplo: Seja $V = \mathbb{R}^2$, o plano, onde $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}; y = x\}$ é uma reta desse plano, que passa pela origem.

Figura 4.1 – Subespaço Vetorial



Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 4.1, percebe-se que a reta S caracteriza-se como espaço vetorial, pois se somarmos dois vetores em S, a soma permanece em S. Observe que o vetor $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S$, somado ao vetor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in S$, resulta no vetor $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in S$. O mesmo ocorrerá se multiplicarmos qualquer um dos vetores de S por um escalar, o resultado ainda pertencerá a S.

4.3 Combinação linear

Definição 4.3. Seja V um espaço vetorial e $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$, vetores de V e os escalares $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$. Então, o vetor

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + ... + a_n v_n$$

é um elemento de V chamado de *combinação linear* dos vetores $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$.

Exemplo: Seja o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ e os vetores $v_1 = (1, -2, 5)$ e $v_2 = (3, -4, -1)$. O vetor $v = (9, -14, 13)$ é uma combinação linear dos vetores v_1 e v_2, pois,

$$(9, -14, 13) = 3(1, -2, 5) + 2(3, -4, -1) \Longrightarrow v = 3v_1 + 2v_2$$

4.4 Subespaço gerado

Definição 4.4. Seja V um espaço vetorial e $S \subset V$ um subconjunto finito de V. Dado $S = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\} \in V$, o conjunto de todas as combinações lineares dos elementos de S é um subespaço vetorial denominado, subespaço *gerado* por S (S é dito gerador).

$$G(S) = \{v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + ... + a_nv_n / a_i \in \mathbb{R}\},\ G(S) \neq \varnothing$$

Exemplo: Sejam os vetores $v_1 = (0,1)$ e $v_2 = (1,0)$, qualquer par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear de v_1 e v_2, pois:

$$(x, y) = a_1v_1 + a_2v_2 = a_1(1,0) + a_2(0,1) = (a_1, 0) + (0, a_2) \Longrightarrow (x, y) = xv_1 + yv_2$$

Portanto, o espaço vetorial $G(S) = \mathbb{R}^2$ é subespaço gerado pelos vetores $v_1 = (0,1)$ e $v_2 = (1,0)$.

4.5 Dependência e independência linear

Definição 4.5. Seja $S = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\} \subset V$. Agora suponha que existam escalares tais que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + ... + a_nv_n = 0.$$

Se $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$, S é dito *linearmente independente*(LI).

Se $a_i \neq 0$ para algum $i = 1, 2, ..., n$, S é dito *linearmente dependente*(LD).

Em outras palavras, o conjunto S será dito *linearmente dependente*, se admitir alguma solução além da *trivial*, ou seja, se existe pelo menos um escalar não nulo, caso contrário, se o conjunto S admitir apenas a solução *trivial* será dito *linearmente independente.*

Exemplo:

Seja o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ e os vetores $v_1 = (0,1,1)$, $v_2 = (1,1,0)$ e $v_3 = (5,8,3)$, o conjunto $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ é dito LD, pois:

$$3v_1 + 5v_2 - v_3 = 0$$

Exemplo: Seja o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ e os vetores $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,3,-1)$ e $v_3 = (0,0,2)$, verifique se o conjunto $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ é dito LD ou LI.

Verificando a equação $a_1(1,1,0) + a_2(0,3,-1) + a_3(0,0,2) = (0,0,0)$ temos:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 + 3a_2 = 0 \Longrightarrow a_2 = 0 \\ -a_2 + 2a_3 = 0 \Longrightarrow a_3 = 0 \end{cases}$$

Portanto, como o sistema acima admite apenas a solução *trivial* o conjunto S é dito LI.

4.6 Transformações lineares

Dados dois conjuntos A e B não vazios $f : A \to B$ (Lê-se "F de A em B") é uma aplicação, se a cada elemento de A associa um único elemento de B. Seja $a \in A$ o elemento associado a $b \in B$ pela aplicação. Neste caso b é chamado de imagem de a por f e representado por $f(a)$(Lê-se "F de a"). O conjunto A é dito domínio e o conjunto B contradomínio.

Definição 4.6. Sejam V e S espaços vetoriais. Uma *transformação linear* é uma função $F : V \to S$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $F(v_1 + v_1) = F(v_1) + F(v_2)$, $\forall v_1, v_2 \in V$;

ii) $F(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot F(v)$, $\forall v \in V$, e $\alpha \in \mathbb{R}$

Exemplo: Dada uma matriz invertível $P \in \mathbb{M}_{2\times2}$, $F : \mathbb{M}_{2\times2} \to \mathbb{M}_{2\times2}$ definida por $F(A) = P^{-1} \cdot A$, mostre que P é uma transformação linear.

De fato:

i) Dados A, $B \in \mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$, tem-se

$$F(A + B) = P^{-1}(A + B) = P^{-1}A + P^{-1}B = F(A) + F(B)$$

ii) Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$, tem-se

$$F(\alpha \cdot A) = P^{-1}(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot P^{-1}A = \alpha \cdot F(A)$$

Exemplo: Determinar a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 1) = (1, 0)$ e $T(1, -1) = (0, 1)$.

Fazendo $(x, y) = a(1, 1) + b(1, -1)$, tem-se:

$$\begin{cases} x = a + b \\ y = a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2a \\ a = \dfrac{x+y}{2} \end{cases} \Rightarrow b = x - a \Rightarrow b = x - \frac{x+y}{2} = \frac{2x - x - y}{2} = \frac{x-y}{2}$$

Assim, $(x, y) = \dfrac{x+y}{2}(1, 1) + \dfrac{x-y}{2}(1, -1)$

Logo, $T(x, y) = T\left(\dfrac{x+y}{2}(1, 1) + \dfrac{x-y}{2}(1, -1)\right) = \dfrac{x+y}{2}T(1, 1) + \dfrac{x-y}{2}T(1, -1)$

$T(x, y) = \dfrac{x+y}{2}(1, 0) + \dfrac{x-y}{2}(0, 1) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x-y}{2}\right)$

Portanto, $T(x, y) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x-y}{2}\right)$

4.7 Transformações geométricas no plano

Transformações lineares são poderosas ferramentas para descrever alterações geométricas, tais como: dilatação, reflexão, rotação, cisalhamento, e outras deformações no plano.

Toda transformação linear do plano no plano é da forma, $T(x, y) = (ax+by, cx+dy)$, e a transformação de vetores no plano pode ser obtida através de um produto entre matrizes:

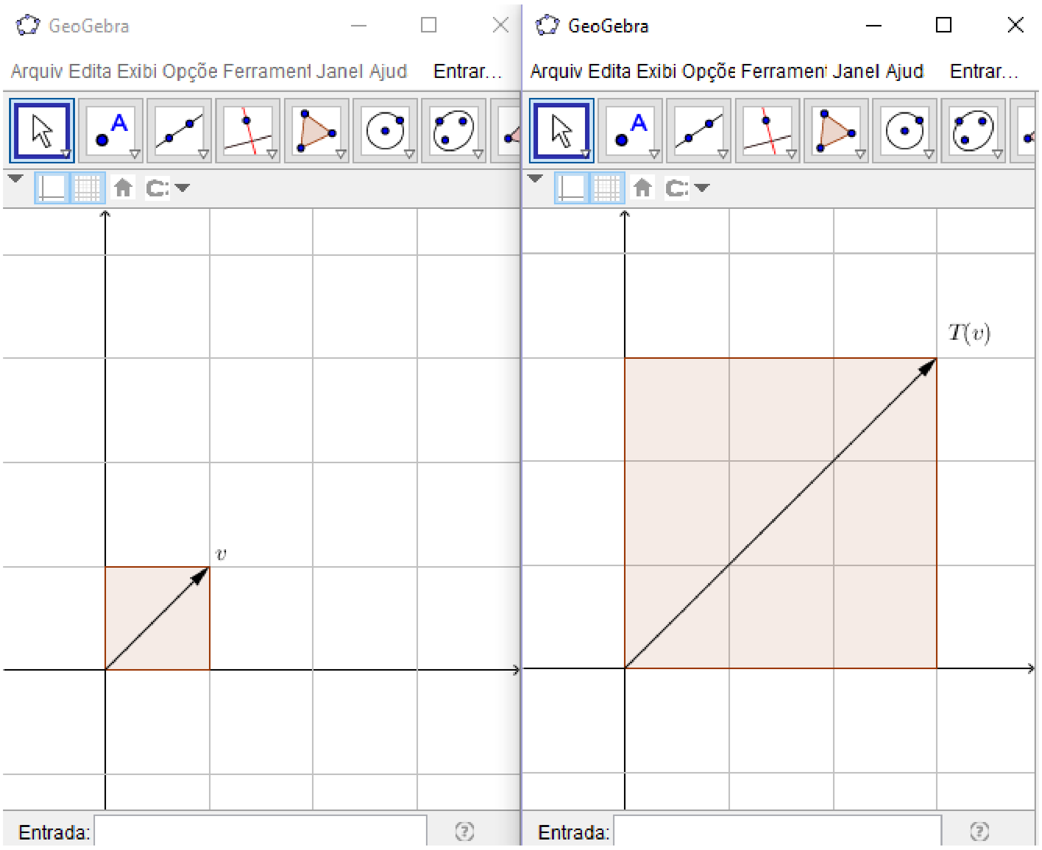
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

4.7.1 Dilatação uniforme

A transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $|\alpha| > 1$ definida por $v \longmapsto \alpha \cdot v$ ou $T(x, y) = \alpha(x, y)$ provoca uma *dilatação* no vetor v.

Exemplo: Represente no plano a transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $v \longmapsto 3{\cdot}v$ ou $T(x, y) = 3(x, y)$.

Figura 4.2 – Dilatação de um vetor no plano



Fonte: Elaborado pelo autor

Observe na Figura 4.2, que cada vetor do plano é transformado em um vetor que conserva a direção e o sentido do vetor v, porém, com um módulo 3 vezes maior. Assim, a área do polígono determinada pelo vetor v fica multiplicada por 3^2, ou seja, a área determinada pelo vetor $T(x)$ é 9 vezes maior.

Note que pode-se representar esta transformação na forma de um produto entre matrizes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$$

ou na forma de vetores-coluna

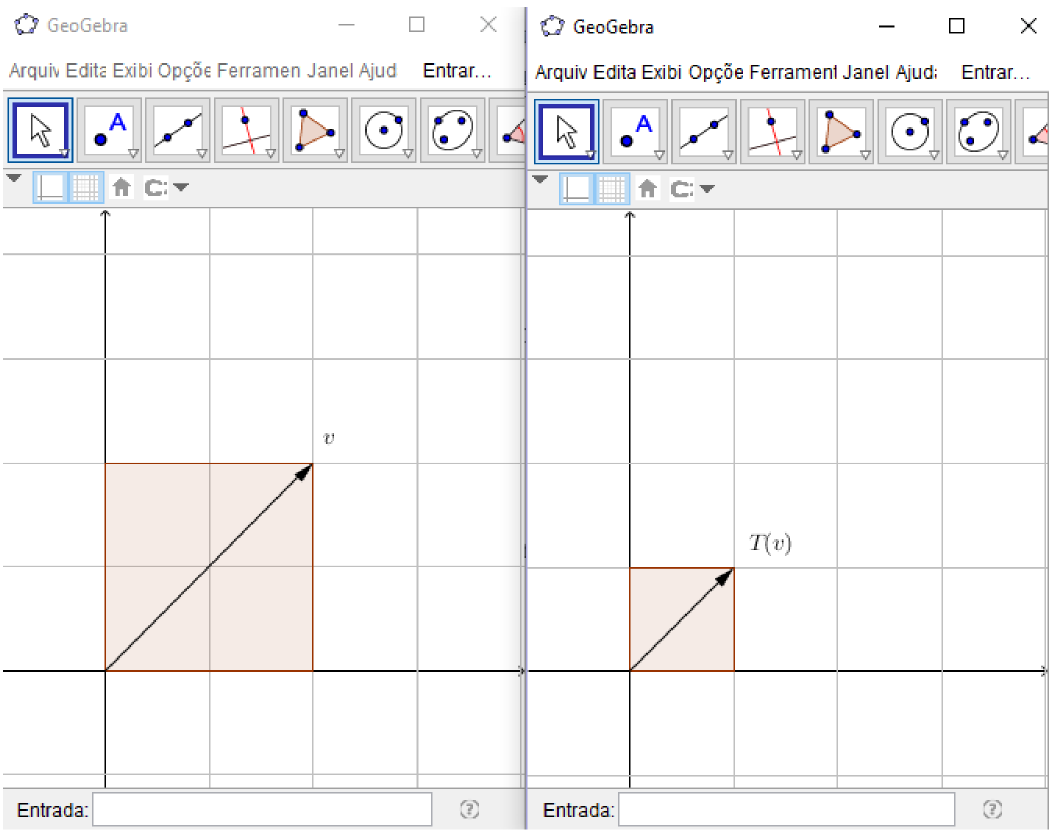
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

4.7.2 Contração uniforme

A transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = \alpha(x, y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $|\alpha| < 1$ provoca uma contração no vetor v.

Exemplo: Represente no plano a função $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $v \longmapsto \dfrac{1}{2} \cdot v$ ou $T(x, y) = \dfrac{1}{2}(x, y)$.

Figura 4.3 – Contração de um vetor no plano



Fonte: Elaborado pelo autor

Observe na Figura 4.3, que cada vetor do plano é transformado em um vetor que conserva a direção e o sentido do vetor v, porém, com um módulo reduzido pela metade. Assim, a área do polígono determinada pelo vetor v fica multiplicada por $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, ou seja, a área determinada pelo vetor $T(x)$ é 4 vezes menor. Neste caso houve uma *contração*.

Representando esta transformação na forma de um produto entre matrizes, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix}$$

ou na forma de vetores-coluna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Observa-se ainda que:

i) Se $\alpha < 1$, T troca o sentido do vetor v.

ii) Se $\alpha = 1$, T é a identidade I.

4.7.3 Dilatação horizontal

A transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (\alpha x, y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$ provoca uma dilatação no vetor v na direção do eixo Ox.

Escrevendo na forma de um produto de matrizes tem-se:

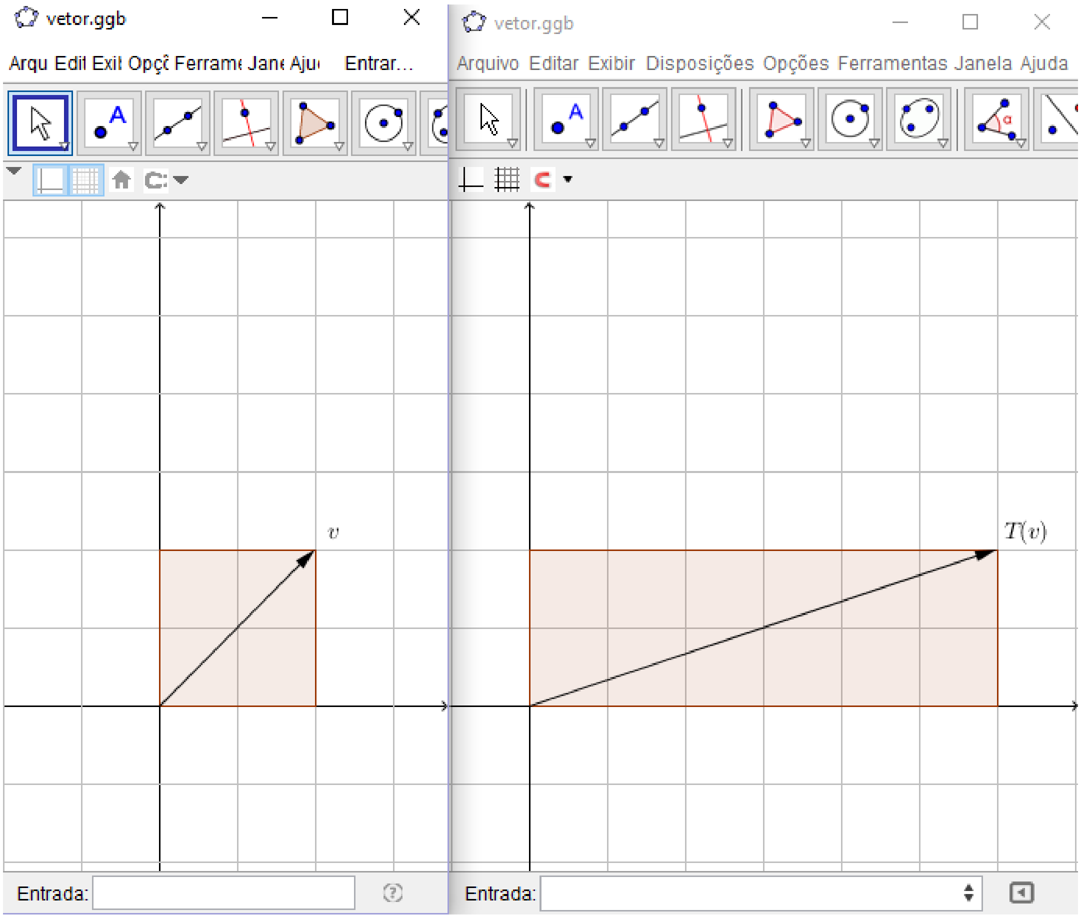
$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ y \end{pmatrix}$$

ou na forma de vetores-coluna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha x \\ y \end{pmatrix}$$

Exemplo: Represente no plano a transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (3x, y)$.

Figura 4.4 – Dilatação horizontal de um vetor no plano



Fonte: Elaborado pelo autor

Observe na Figura 4.4, que T dilata o vetor v horizontalmente, e ainda, que a área da figura determinada pelo vetor v é triplicada.

Escrevendo na forma de um produto de matrizes, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ y \end{pmatrix}$$

ou na forma de vetores-coluna

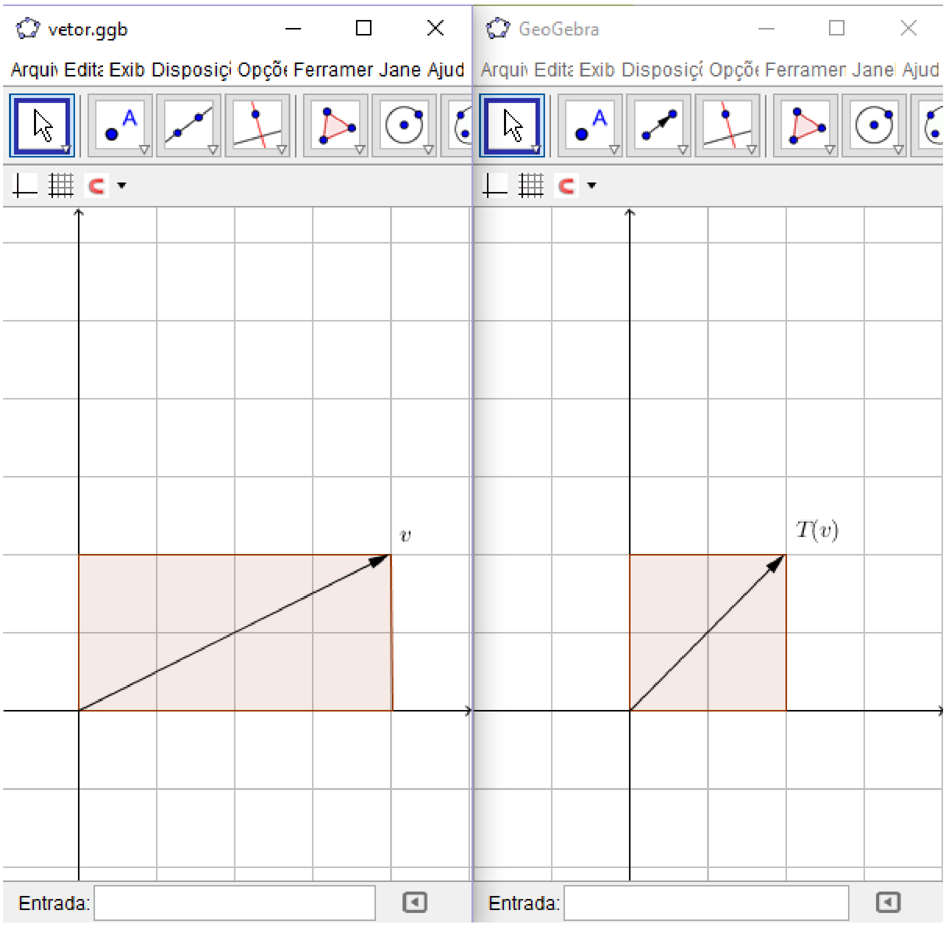
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3x \\ y \end{pmatrix}$$

4.7.4 Contração horizontal

A transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (\alpha x, y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 < \alpha < 1$ provoca uma contração no vetor v na direção do eixo Ox.

Exemplo: Represente no plano a transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, y\right)$.

Figura 4.5 – Contração horizontal de um vetor no plano



Fonte: Elaborado pelo autor

Observe na figura 4.5, que T contrai o vetor v horizontalmente, e ainda, que a área da figura determinada pelo vetor v é reduzida pela metade.

Escrevendo na forma de um produto de matrizes, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ y \end{pmatrix}$$

ou na forma de vetores-coluna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ y \end{pmatrix}$$

4.7.5 Dilatação vertical

A transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x, \alpha y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$ provoca uma dilatação no vetor v na direção do eixo Oy.

Escrevendo na forma de matrizes, tem-se:

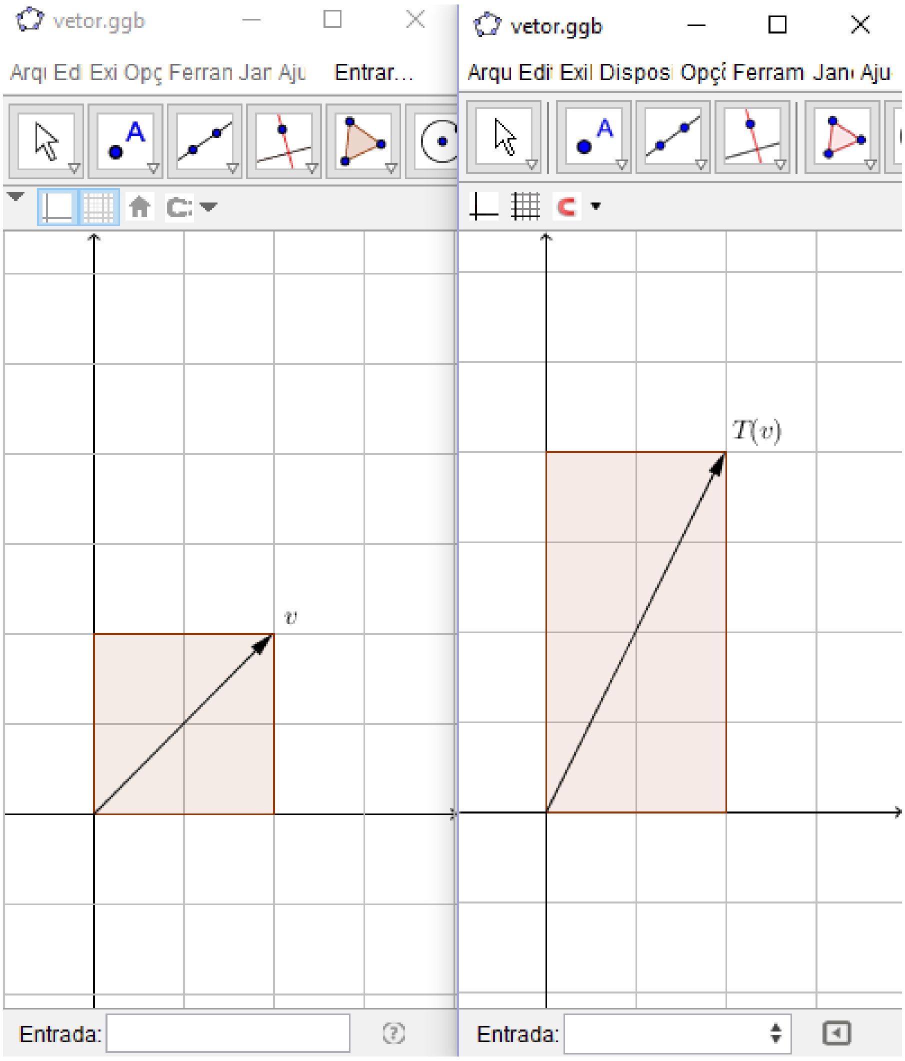
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

ou na forma de vetores-coluna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

Exemplo: Represente no plano a transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (x, 2y)$.

Figura 4.6 – Dilatação vertical de um vetor no plano



Fonte: Elaborado pelo autor

Observe na Figura 4.6, que T dilata o vetor v verticalmente, e ainda, que a área da figura determinada pelo vetor v dobra.

Escrevendo na forma de um produto de matrizes, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}$$

ou na forma de vetores-coluna

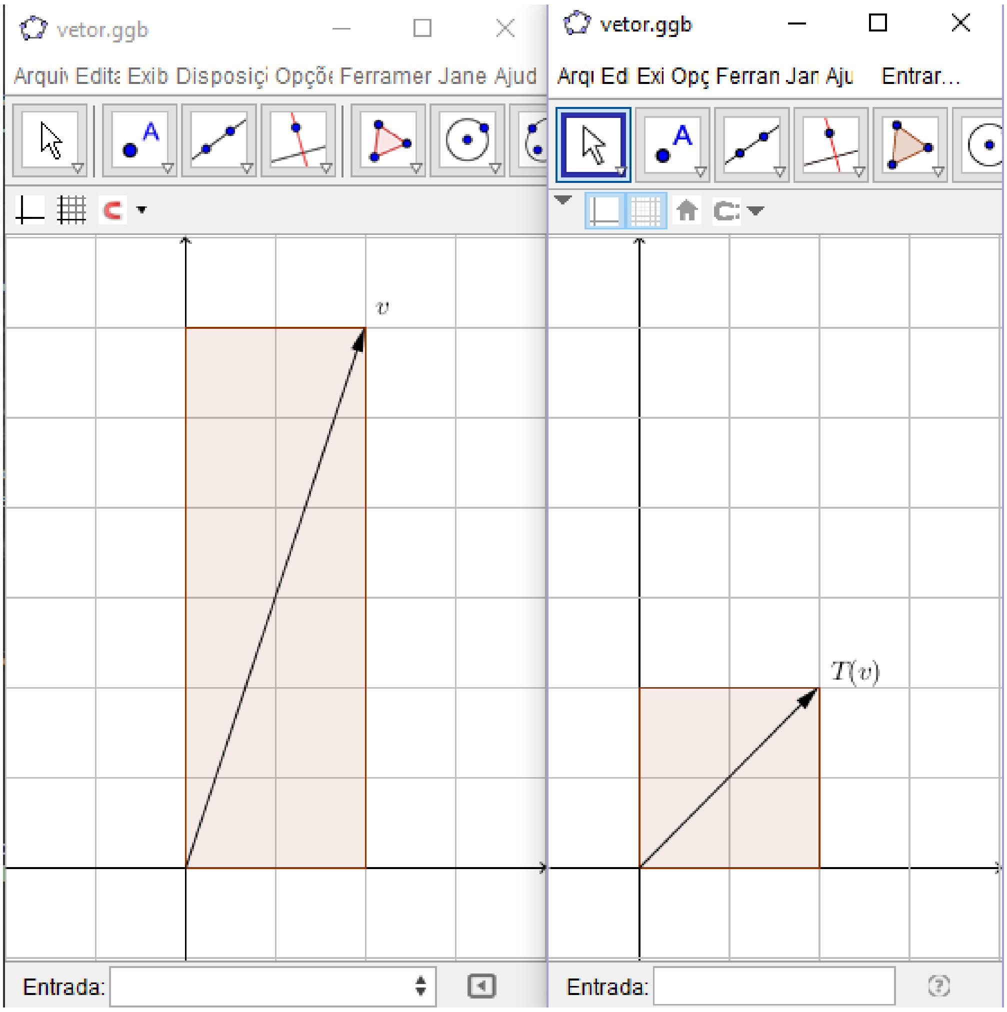
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}$$

4.7.6 Contração vertical

A transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x, \alpha y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 < \alpha < 1$ provoca uma contração no vetor v na direção do eixo Oy.

Exemplo: Represente no plano a transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = \left(x, \frac{1}{3}y\right)$.

Figura 4.7 – Contração vertical de um vetor no plano



Fonte: Elaborado pelo autor

Observe na Figura 4.7, que T contrai o vetor v verticalmente, e ainda, que a área da figura determinada pelo vetor v fica reduzida em um terço.

Escrevendo na forma de um produto de matrizes, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{3}y \end{pmatrix}$$

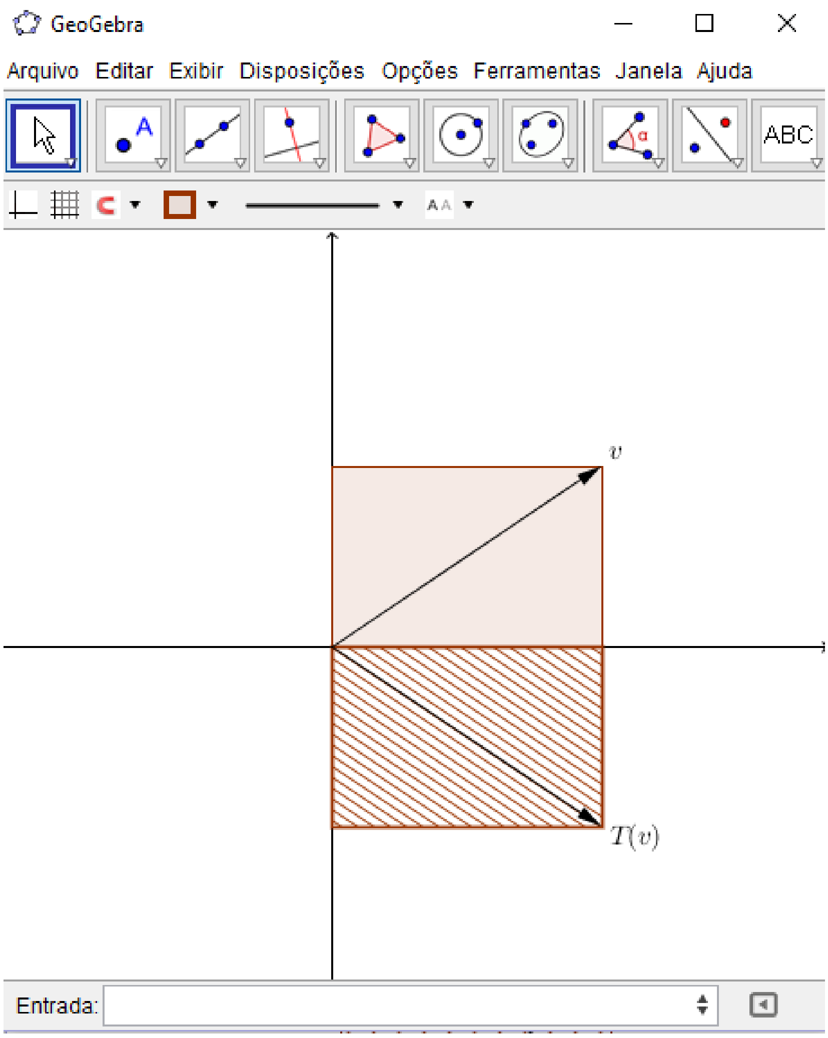
ou na forma de vetores-coluna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{3}y \end{pmatrix}$$

4.7.7 Reflexão em torno do eixo Ox

A reflexão em torno do eixo Ox, $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, é dada por $(x, y) \longmapsto (x, -y)$ ou $T(x, y) = (x, -y)$. Veja a representação geométrica dessa transformação na Figura 4.8.

Figura 4.8 – Reflexão em torno do eixo Ox



Fonte: Elaborado pelo autor

Representando esta transformação na forma de um produto entre matrizes, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

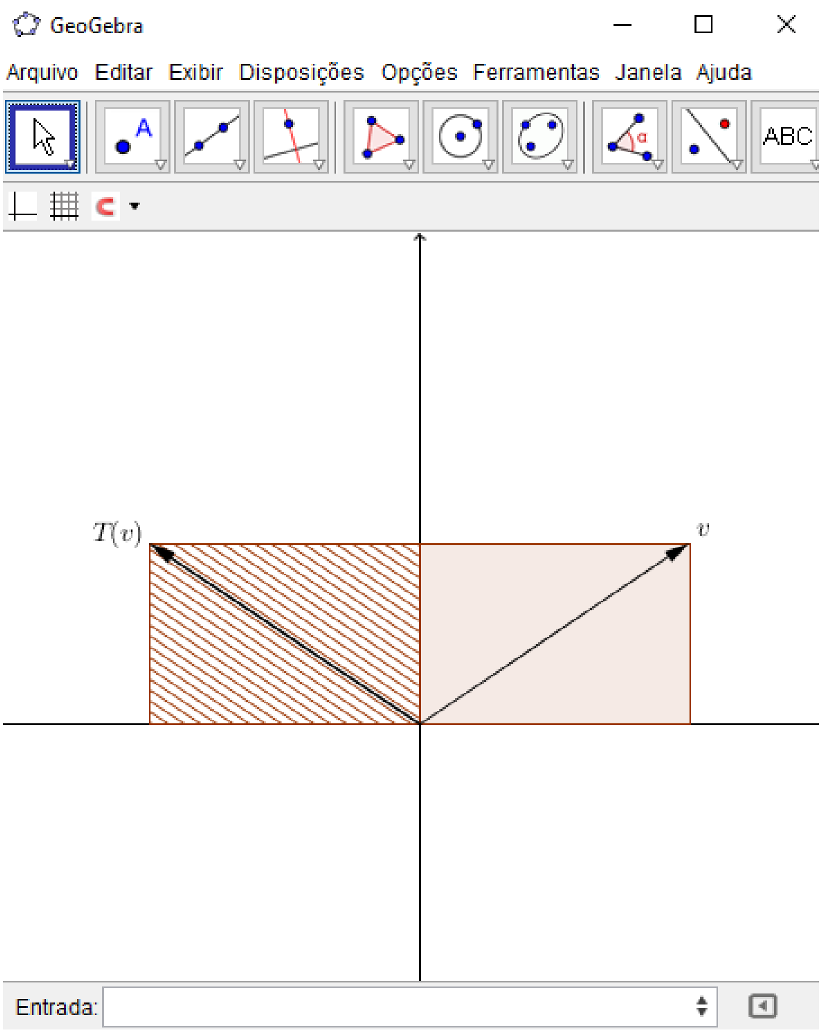
ou na forma de vetores-coluna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

4.7.8 Reflexão em torno do eixo Oy

A reflexão em torno do eixo Oy, $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, é dada por $(x, y) \longmapsto (-x, y)$ ou $T(x, y) = (-x, y)$. Veja a representação geométrica dessa transformação na Figura 4.9.

Figura 4.9 – Reflexão em torno do eixo Oy



Fonte: Elaborado pelo autor

Representando esta transformação na forma de um produto entre matrizes, tem-se:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

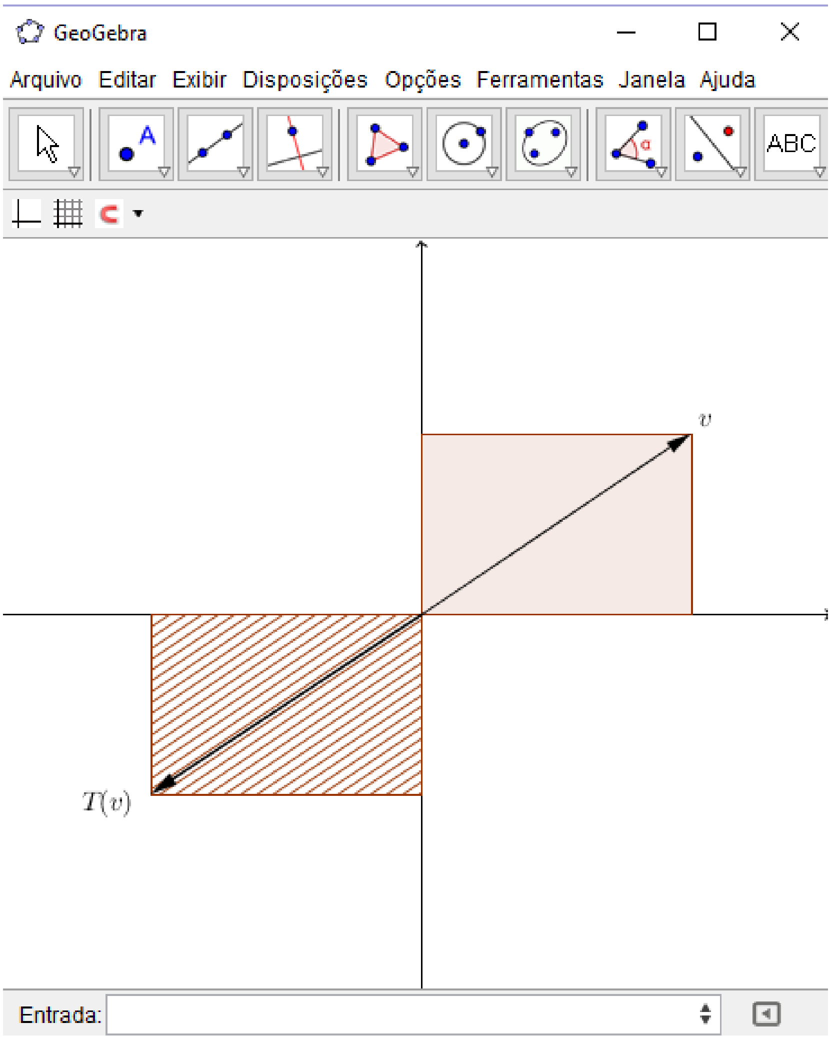
ou na forma de vetores-coluna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

4.7.9 Reflexão na origem

A reflexão na origem, $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, é dada por $v \longmapsto -v$ ou $T(x,y) = (-x,-y)$. Veja a representação geométrica dessa transformação na Figura 4.10.

Figura 4.10 – Reflexão na origem



Fonte: Elaborado pelo autor

Representando esta transformação na forma de um produto entre matrizes, tem-se:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

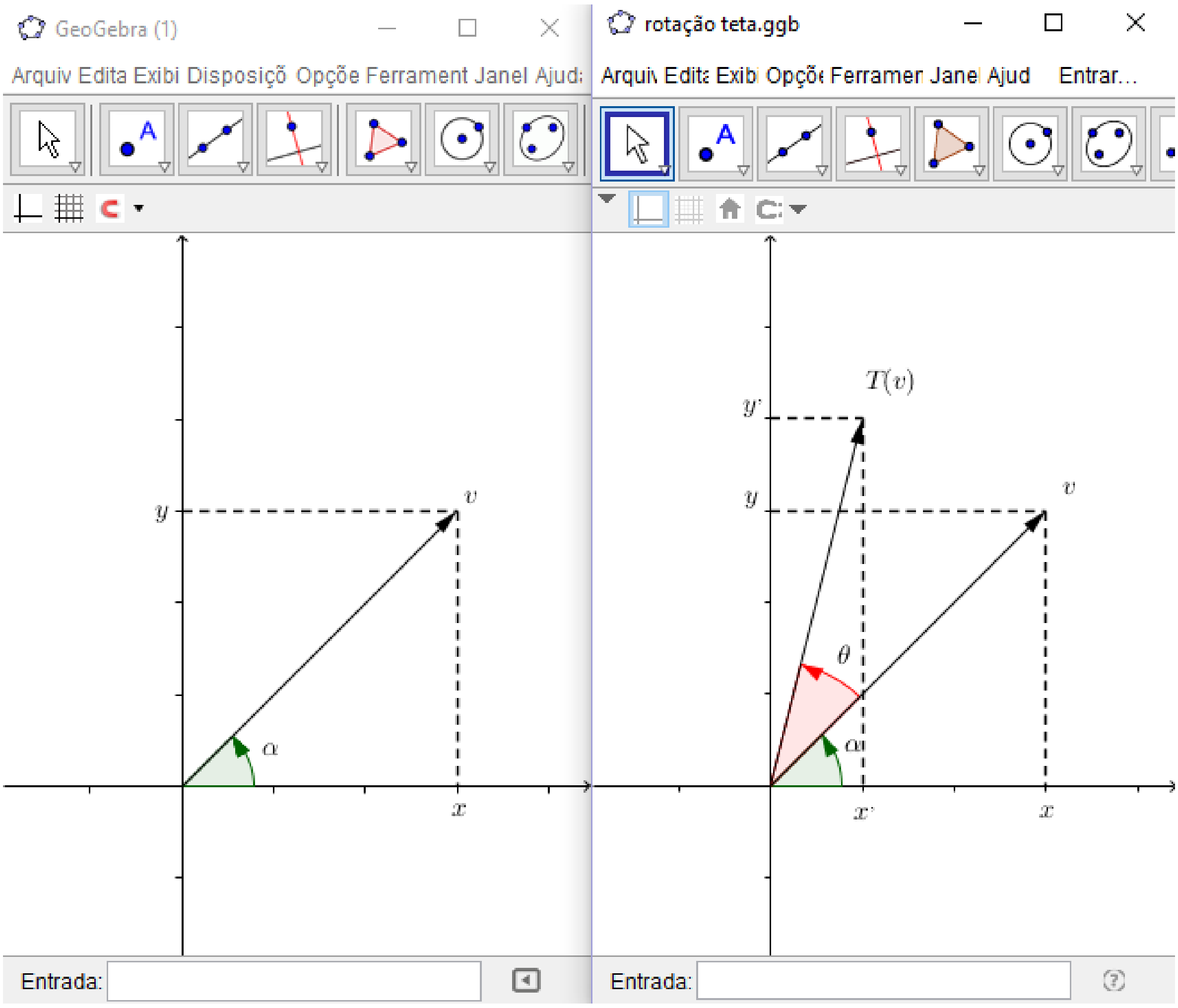
ou na forma de vetores-coluna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

4.7.10 Rotação por um ângulo θ em relação a origem

O operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que rotaciona cada vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ de um ângulo θ fixo em relação a origem é chamado de rotação por θ no plano. Veja a representação geométrica dessa transformação na Figura 4.11.

Figura 4.11 – Rotação de um vetor no plano por um ângulo θ em relação a origem



Fonte: Elaborado pelo autor

É possível mostrar que o operador T é $T(x, y) = (xcos\theta - ysen\theta, xsen\theta + ycos\theta)$, de fato:

$x' = t\ cos(\alpha + \theta) = t\ cos\alpha\ cos\theta$ - $t\ sen\alpha\ sen\theta$

Porém, $x = t\ cos\theta$ e $y = t\ sen\theta$

logo, $x' = xcos\theta$ - $ysen\theta$

Da mesma forma,

$y' = t\ sen(\alpha + \theta) = t\ sen\alpha\ cos\theta$ - $t\ cos\alpha\ sen\theta$

Porém, $x = t\ cos\theta$ e $y = t\ sen\theta$

logo, $y' = ycos\theta + xsen\theta$

Por tanto, $T(x, y) = (xcos\theta - ysen\theta, xsen\theta + ycos\theta)$

Escrevendo na forma de um produto de matrizes tem-se:

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xcos\theta - ysen\theta \\ xsen\theta + ycos\theta \end{pmatrix}$$

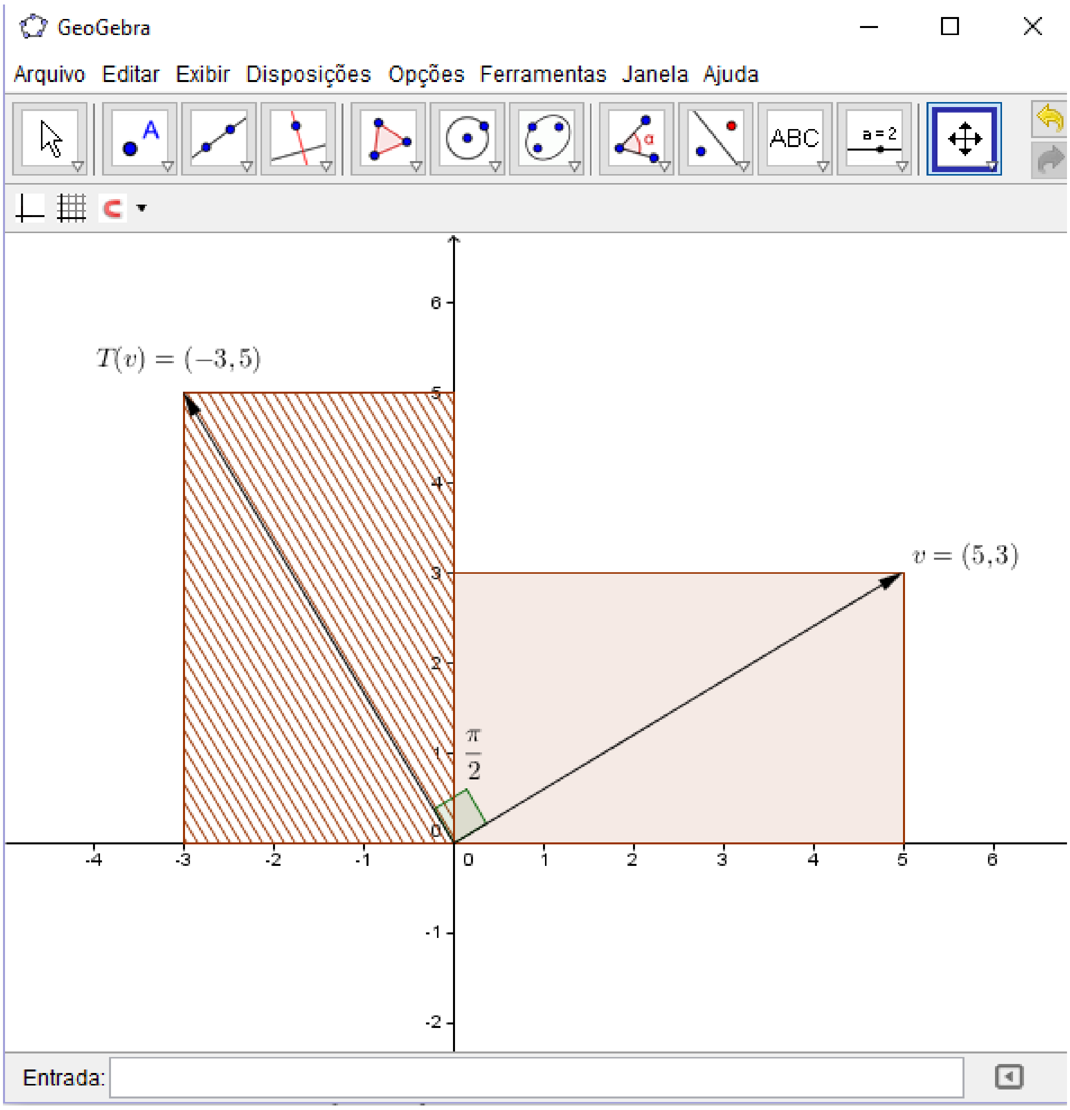
Exemplo: O operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que rotaciona cada vetor $v = (5, 3)$ de um ângulo $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ em relação a origem.

Escrevendo na forma de um produto entre matrizes tem-se:

$$\begin{pmatrix} cos\dfrac{\pi}{2} & -sen\dfrac{\pi}{2} \\ sen\dfrac{\pi}{2} & cos\dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Veja a representação geométrica dessa transformação na Figura 4.12.

Figura 4.12 – Rotação de um vetor no plano por um ângulo $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ em relação a origem

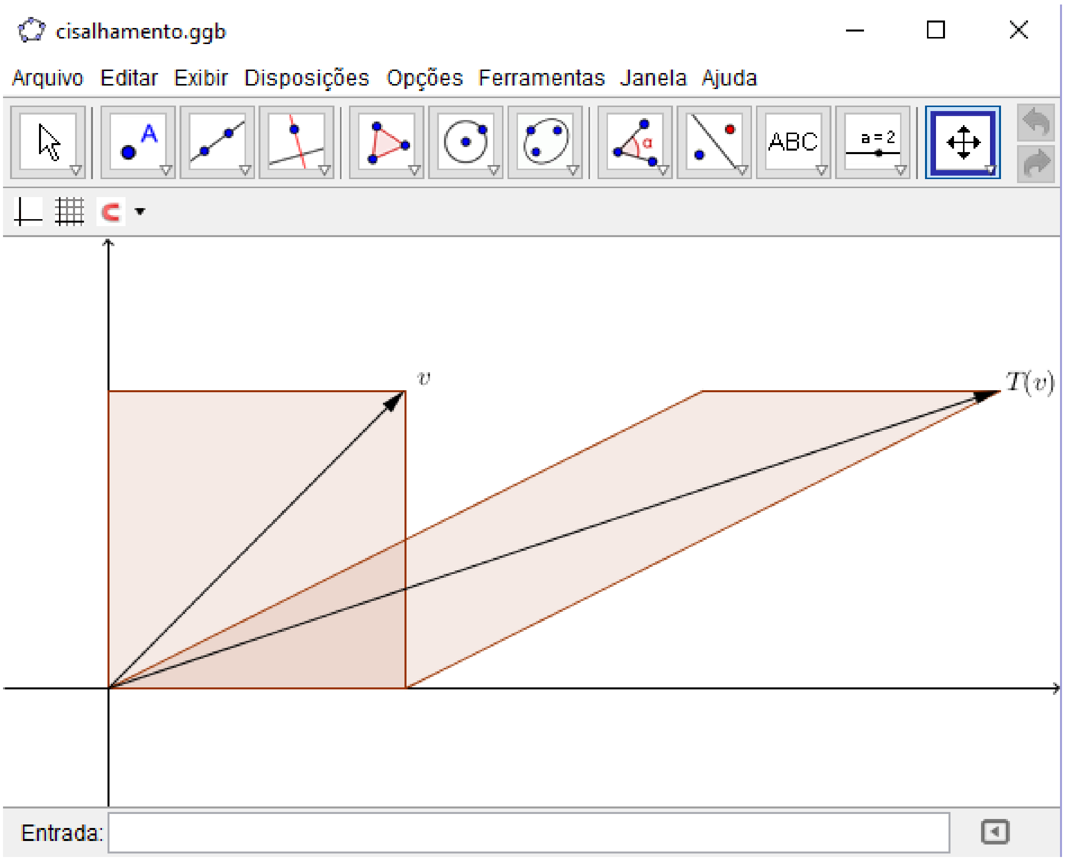


Fonte: Elaborado pelo autor

4.7.11 Cisalhamento horizontal

O cisalhamento horizontal provoca uma deformação na direção do eixo Ox, e é definido pela transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + \alpha y, y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Veja a representação geométrica dessa transformação na Figura 4.13.

Figura 4.13 – Cisalhamento Horizontal de um vetor no plano



Fonte: Elaborado pelo autor

Representando esta transformação na forma de um produto entre matrizes, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \alpha y \\ y \end{pmatrix}$$

na forma de vetores coluna

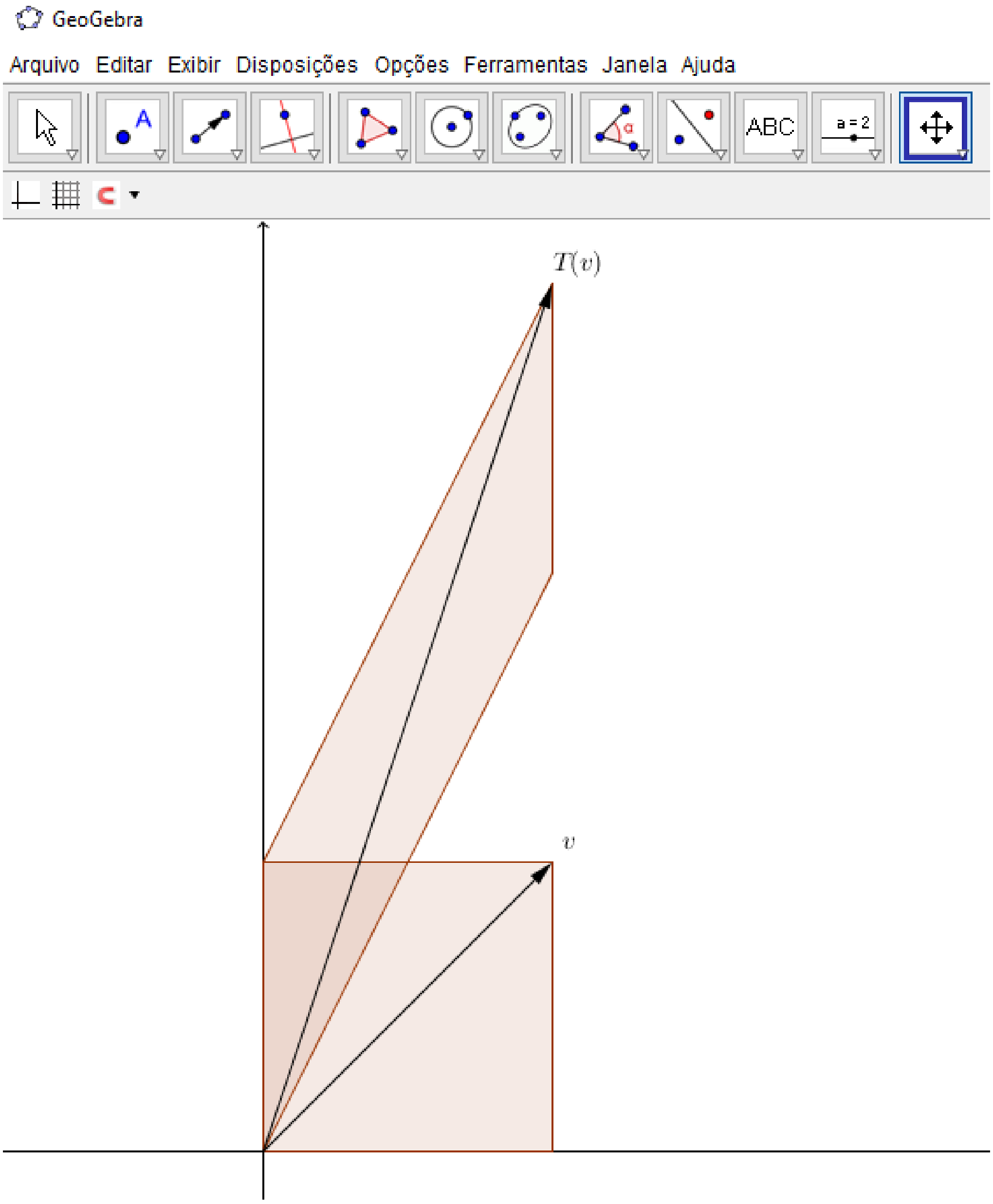
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x + \alpha y \\ y \end{pmatrix}$$

No cisalhamento o vetor v é deformado, porém, a área do polígono obtido após a transformação é igual a área do polígono antes da transformação.

4.7.12 Cisalhamento vertical

O cisalhamento vertical provoca uma deformação na direção do eixo Oy, e é definido pela transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (x, y\alpha + x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Veja a representação geométrica dessa transformação na Figura 4.14.

Figura 4.14 – Cisalhamento vertical de um vetor no plano



Fonte: Elaborado pelo autor

Representando está transformação na forma de um produto entre matrizes, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + \alpha y \end{pmatrix}$$

na forma de vetores coluna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y+\alpha y \end{pmatrix}$$

4.7.13 Translação

Uma translação no plano do vetor (α, β) é determinada pela transformação não linear $T(x, y) = (x + \alpha, y + \beta)$. Esta transformação será linear, somente se, $\alpha = \beta = 0$.

Representando está transformação na forma de matrizes, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\alpha \\ y+\beta \end{pmatrix}$$

4.8 Transformações compostas

Frequentemente ao manipular os pontos que formam uma imagem é necessário utilizar sucessivamente uma ou mais transformação simples. Porém, este processo pode ser dispendioso.

"O propósito de compor-se transformações, é o ganho de eficiência que se obtém ao aplicar-se uma transformação composta a um ponto em vez de aplicar-lhe uma série de transformações, uma após a outra"(TRAINA; OLIVEIRA, 2006, p.58).

Exemplo: Obtenha a matriz da transformada que realiza uma reflexão em relação ao eixo y, seguida de uma rotação de 90° no sentido anti-horário em relação a origem e aplique-a no vetor $v = (x, y)$.

Solução: A matriz que rotaciona o vetor v 90° no sentido anti-horário em relação a origem é

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz que reflete v em relação ao eixo y é

$$K = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo a matriz da transformada composta é dada por

$$RK = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando a transformada composta no vetor $v = (x, y)$ temos

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

No entanto nem sempre trabalhar com transformações compostas corresponde diretamente a multiplicação de matrizes, pois como sabe-se uma translação não é uma transformação linear. Para Lay (1999), a maneira padrão de se evitar essa dificuldade é a introdução das coordenadas homogêneas.

Para obter uma coordenada homogênea é preciso adicionar uma terceira coordenada a um ponto (x, y) no sistema de coordenadas cartesianas. Logo, uma coordenada homogênea é formada por uma tripla (x, y, w), onde w é chamado de peso. Em particular o par ordenado (x, y) no $\mathbb{R}^2$ pode ser identificado pela tripla $(x, y, 1)$ no $\mathbb{R}^3$. "As coordenadas homogêneas de pontos não podem ser somadas ou multiplicadas por escalares, mas podem ser transformadas através da multiplicação de matrizes 3×3"(LAY, 1999, p.145).

Em geral uma transformação da forma $(x, y) \longmapsto (x + h, y + k)$, pode ser representada em coordenadas homogêneas por $(x, y, 1) \longmapsto (x+h, y+k, 1)$. Essa transformação também pode ser obtida a partir de uma multiplicação de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + h \\ y + k \\ 1 \end{pmatrix}$$

Além disso, segundo Lay, (1999), toda transformada linear no plano, pode ser representada em coordenadas homogêneas, por uma matriz particionada [1]. $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, onde A é uma matriz 2×2.

Por exemplo, para escrever a matriz da transformada linear que provoca uma rotação por um ângulo θ em coordenadas homogêneas basta tomar a matriz

$$A = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

Logo, a matriz da transformada em coordenadas homogêneas é dada por

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Procedendo-se de maneira análoga, é possível representar outras transformadas lineares do plano em coordenadas homogêneas.

Exemplo: Encontre a matriz correspondente a transformação composta por uma contração de fator $0,4$, uma rotação de $180°$ no sentido anti-horário e uma translação que adicione $(-1, 2)$ a cada ponto.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,4 & 0 & -1 \\ 0 & -0,4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A próxima seção trata das transformações geométricas aplicadas a computação gráfica. Para Lay (1999), o movimento de uma figura na tela de um computador necessita frequentemente de duas ou mais transformações simples e a composição dessas transformações corresponderão a multiplicação de matrizes caso sejam usadas coordenadas homogêneas.

[1] Uma matriz particionada é a matriz resultante de uma divisão em blocos que constituem submatrizes indicadas por linhas divisórias horizontais e verticais

Isso justifica a abordagem das coordenadas homogêneas e transformações compostas nesta seção.

4.9 Transformações geométricas e computação gráfica

"Computação gráfica são imagens apresentadas ou animadas numa tela de computador"(LAY, 1999, p.143). As aplicações da computação gráfica são variadas e estão presentes no cinema, na engenharia, arquitetura, medicina, e outras áreas. Atualmente a computação gráfica também é muito utilizada no desenvolvimento de jogos eletrônicos, o que impulsionou o aprimoramento de dispositivos como placas de vídeo e processadores.

Para Lay (1999, p.144), "qualquer um que estude uma linguagem computacional invariavelmente gasta algum tempo aprendendo a usar ao menos, recursos gráficos em duas dimensões ($2D$)".

Na seção anterior as transformações geométricas tiveram uma abordagem vetorial, nesta seção as mesmas serão aplicadas aos pontos que formam uma imagem em $2D$. As imagens utilizadas nos exemplos serão construídas no GeoGebra de maneira simples e objetiva, de maneira a facilitar a compreensão do leitor.

4.9.1 Translação de uma imagem 2D

Uma imagem gráfica "[...] consiste em uma quantidade de pontos ligando retas e curvas e em informações sobre como preencher essas regiões limitadas por retas e curvas"(LAY, 1999, p. 144). Normalmente as curvas são aproximadas por minúsculos segmentos de reta, assim, uma figura fica matematicamente determinada por um conjunto de pontos.

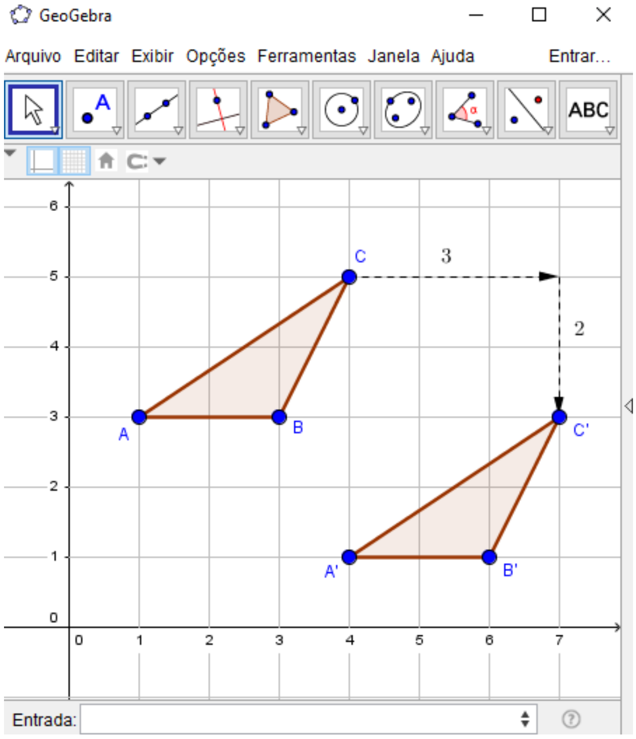
Exemplo: Transladar o triângulo com vértices nos pontos $A(1,3)$, $B(3,3)$ e $C(4,5)$, 3 unidades horizontais para a direita e 2 unidades verticais para baixo.

Solução: As coordenadas dos vértices do triângulo podem ser armazenadas em uma matriz de dados $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Para transladar 3 unidades horizontais para a direita e 2 unidades verticais para baixo, basta adicionarmos a cada ponto da matriz M a matriz de translação $T = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Assim obtém-se a matriz $M' = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ que contém as coordenadas dos vértices do triângulo transladado, ou seja, $A'(4,1)$, $B'(6,1)$ e $C'(7,3)$.

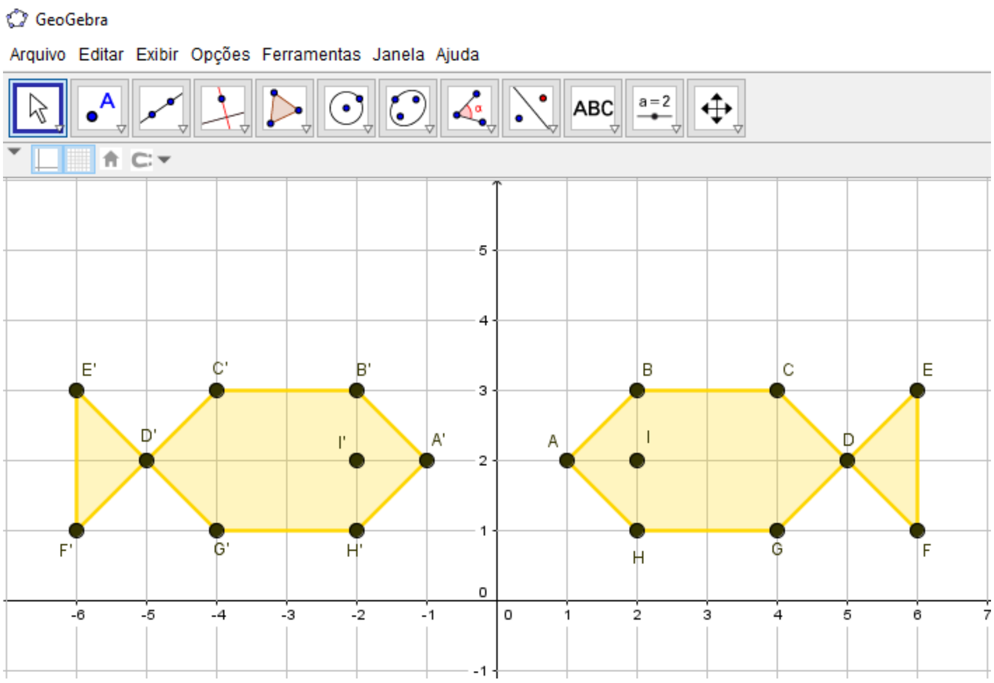
Figura 4.15 – Translação de uma imagem 2D



Fonte: Elaborado pelo autor

4.9.2 Reflexão de uma imagem 2D

Figura 4.16 – Reflexão de uma imagem 2D



Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 4.16, é determinada pelos pontos A, B, C, D, E, F, G, H e I, está associada à matriz:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 6 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

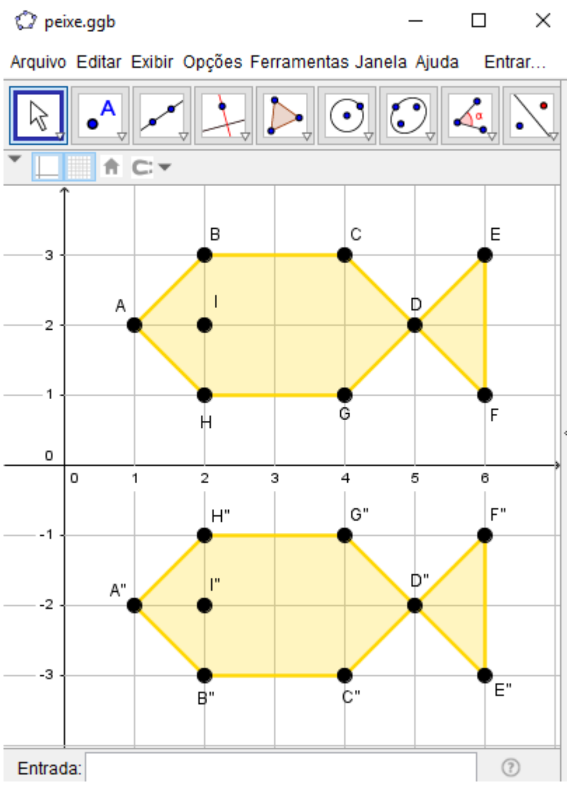
Esta figura sofreu uma reflexão em relação ao eixo das ordenadas (eixo y), dando origem a figura formada pelos pontos $A', B', C', D', E', F', G', H'$ e I' que está associada à matriz:

$$P' = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -5 & -6 & -6 & -4 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para obter a matriz P', multiplicamos a matriz P pela matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ou seja:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 6 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -5 & -6 & -6 & -4 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Figura 4.17 – Reflexão de uma imagem 2D



Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 4.17, é determinada pelos pontos A, B, C, D, E, F, G, H e I, sofreu uma reflexão em relação ao eixo das abscissas(eixo x), dando origem a figura formada pelos pontos $A'', B'', C'', D'', E'', F'', G'', H''$ e I'' que está associada à matriz:

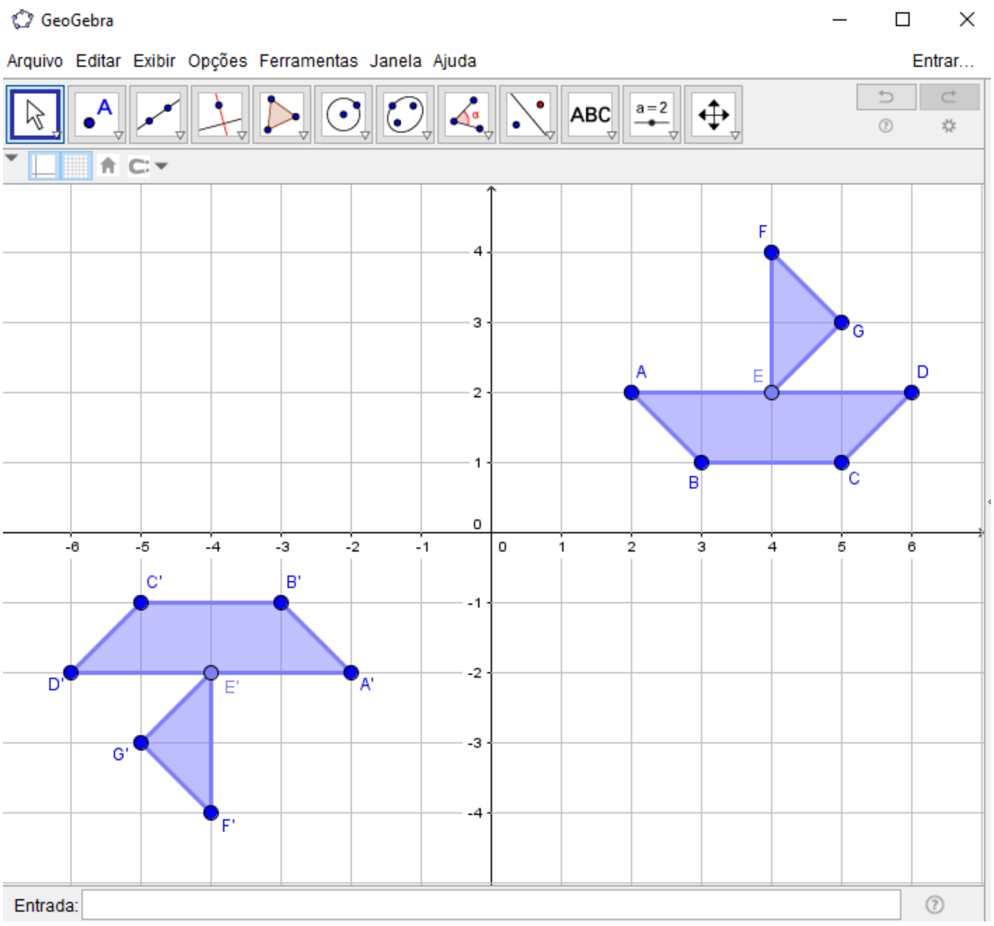
$$P'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 6 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -3 & -2 & -3 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para obter a matriz P'', multiplica-se a matriz P pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ou seja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 6 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 6 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -3 & -2 & -3 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

4.9.3 Rotação de uma imagem 2D

Figura 4.18 – Rotação de uma imagem 2D



Fonte: Elaborado pelo autor

A figura 4.18, é determinada pelos pontos $A, B, C, D, E, F,$ e G está associada à matriz:

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Essa figura sofreu uma rotação de 180º no sentido anti-horário em torno da origem, resultando na figura determinada pelos pontos $A', B', C', D', E', F',$ e G' que está associada à matriz:

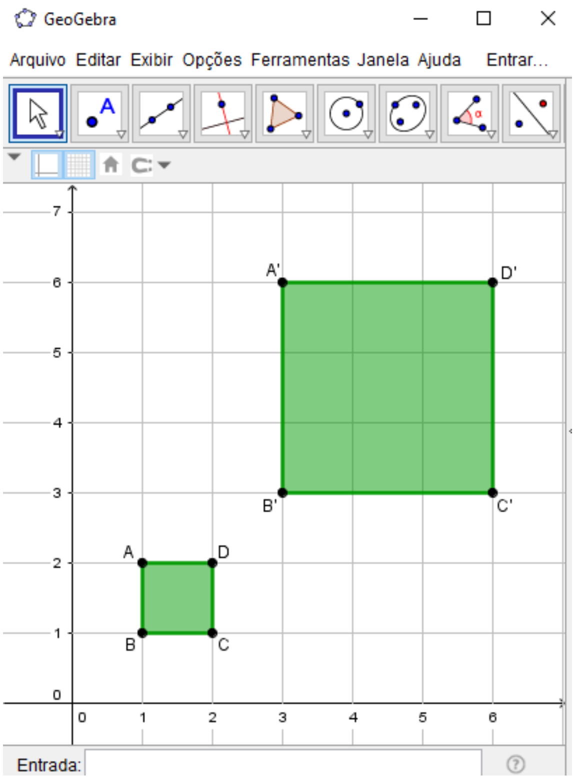
$$N' = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -5 & -6 & -4 & -4 & -5 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Para obter a matriz N', multiplica-se a matriz N pela matriz $\begin{pmatrix} cos\pi & -sen\pi \\ sen\pi & cos\pi \end{pmatrix}$, ou seja:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -5 & -6 & -4 & -4 & -5 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

4.9.4 Escala de uma imagem 2D

Figura 4.19 – Escala de uma imagem em 2D



Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 4.19, o quadrado determinado pelos pontos A, B, C e D sofreu uma mudança de escala. Essa mudança de escala originou o quadrado formado pelos pontos A', B', C' e D'. Para aplicar a transformação escala a todos os pontos do quadrado $ABCD$ em 200%, e obter o quadrado $A'B'C'D'$, multiplicamos a matriz associada a seus vértices pela matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, ou seja:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Deve-se ressaltar que as aplicações das matrizes e transformações geométricas em computação gráfica se estendem para o espaço, ou seja, três dimensões (3D). No entanto, este estudo não se aprofundará até este ponto.

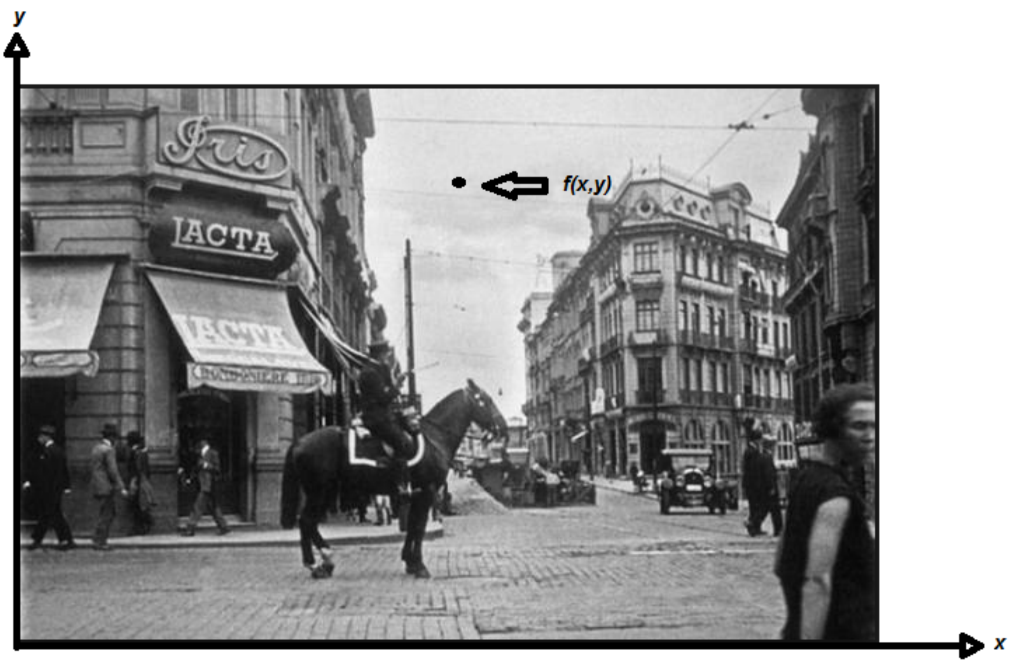
4.10 Imagens digitais

As imagens que observamos em celulares, computadores e *tablets*, são exemplos de imagens digitais. Porém, é necessário saber diferenciar uma simples fotografia de uma imagem digital. Por exemplo, uma fotografia em preto e branco, apresenta muitos tons de cinza, porém nenhuma cor. Esta foto pode ser considerada uma imagem monocromática.

> O termo imagem *monocromática*, ou simplesmente *imagem*, refere-se à função bidimensional de intensidade da luz $f(x, y)$, onde x e y denotam coordenadas espaciais e o valor de f em qualquer ponto (x, y) é proporcional ao brilho (ou níveis de cinza) da imagem naquele ponto. (GONZALES; WOODS, 2000, p.4).

Veja a Figura 4.20, essa fotografia difere de uma imagem digital, pois, neste tipo de imagem os valores de brilho podem ser representados por quaisquer números reais compreendidos no intervalo 0(preto) e 1(branco).

Figura 4.20 – Imagem como função



Fonte: <topicos.estadao.com.br>(adaptado pelo autor)

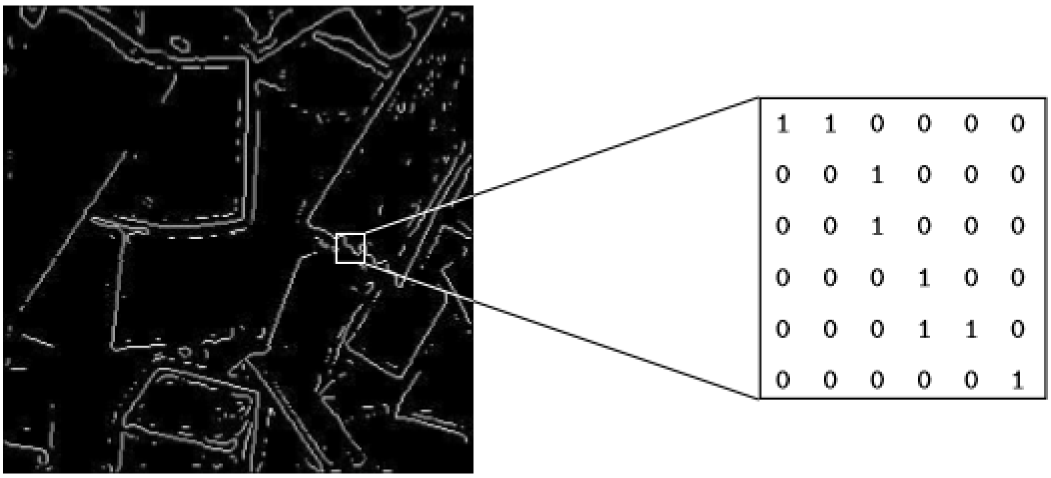
Em uma imagem digital tanto x e y quanto $f(x, y)$ são variáveis discretas, que em geral assumem somente valores inteiros, ou seja, os valores de x e y variam de 1 a 256 cada, já os valores de brilho variam entre 0(branco) e 255(preto).

> Uma *imagem digital* é uma imagem $f(x, y)$ discretizada tanto em coordenadas espaciais quanto em brilho. Uma imagem digital pode ser considerada como sendo uma matriz cujos índices de linhas e de colunas identificam um ponto na imagem, e o correspondente valor do elemento da matriz identifica o nível de cinza naquele ponto. Os elementos dessa matriz digital são chamados de *elementos da imagem, elementos da figura, "pixel"ou "pels"*, estes dois últimos, abreviações de *"picture elements"*(elementos de figura).(GONZALES; WOODS, 1992, p.4-5)

Segundo McAndrew (2004), as imagens digitais basicamente são divididas em quatro tipos: *Binary, Greyscale, RGB, e Indexed colour.*

As imagens do tipo *binary*(binário), contém *pixels* que assumem apenas duas cores, preto ou branco, assim, esse tipo de imagem se torna muito eficiente em relação a capacidade de armazenamento, pois, como existem somente dois valores para cada *pixel* é necessário apenas um *bit*[2] para cada um *pixel.* Para MacAndrew (2004), as imagens binárias são utilizadas com um melhor aproveitamento na produção de textos impressos ou manuscritos, impressões digitais e planos arquitetônicos. Na Figura 4.21, temos apenas duas cores, preto para o fundo e branco para as bordas.

Figura 4.21 – Imagem binária



Fonte: McAndrew, 2004, p.8

Em imagens do tipo *Greyscale*(escala de cinza), como na Figura 4.22, todos os *pixels* são tons de cinza, geralmente de 0 para preto a 255 para branco. Dessa forma, cada *pixel* pode ser representado por 8 *bits*, o que equivale a um *byte.* Para o reconhecimento de objetos naturais, 256 tons de cinza são suficientes, assim, imagens em escala de cinza são muito utilizadas em trabalhos impressos e na medicina com os raios-X.

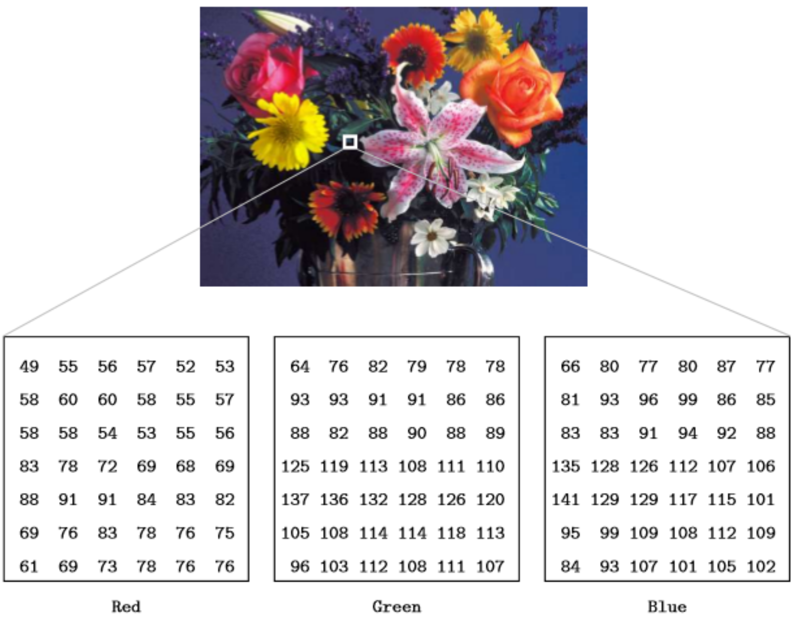
[2] O termo "bit"oriundo da palavra *"binary digit"*, em português "dígito binário", é a menor unidade de informação que pode ser armazenada ou transmitida, utilizada na computação. Um *bit* pode assumir apenas dois valores, 0 ou 1. De maneira geral, fisicamente, um *bit*, corresponde a uma carga elétrica armazenada abaixo ou acima de um nível padrão em um capacitor único, contido em um dispositivo de memória.

Figura 4.22 – Imagem em escala de cinza

Fonte: McAndrew, 2004, p.9

Imagens digitais coloridas podem ser consideradas uma sobreposição de imagens. Na imagem RGB, sigla para *red*, *green* e *blue*, cada *pixel* assume uma cor particular que é definida pela quantidade de vermelho, verde e azul que possui. A matriz que representa uma imagem RGB contém elementos representados por números inteiros e compreendidos entre 0 e 255. Dessa forma, são 256 níveis de vermelho, 256 níveis de verde e 256 níveis de azul, como mostra a Figura 4.23, totalizando 256^3=16.777.216 cores distintas para a imagem. Cada canal de cor armazena 8 *bits*, como são 3 canais de cores, essas imagens também são conhecidas como imagens de 24 *bits*, que corresponde à quantidade de *bits* necessários para cada *pixel*. Logo, a imagem RGB pode ser considerada uma sobreposição de três matrizes representando os valores de vermelho, verde e azul para cada *pixel*.

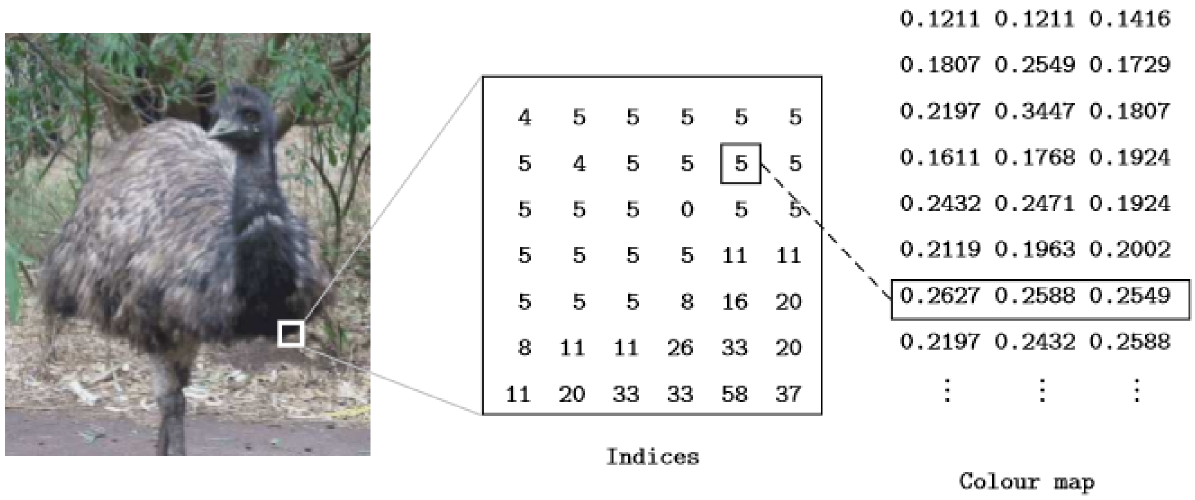
Figura 4.23 – Imagem RGB



Fonte: McAndrew, 2004, p.10

Em muitas situações é conveniente reduzir o tamanho dos arquivos, com a finalidade de ampliar a eficiência de armazenamento e manipulação. As imagens coloridas têm um mapa (paleta) de cores associado. Segundo McAndrew (2004), o modo *indexed colour* reduz a quantidade de cores disponíveis em cada imagem, através de uma paleta de cores usadas nessa imagem, conforme indica a Figura 4.24. Assim, como uma imagem em cores indexadas possui uma paleta que armazena apenas as cores presentes na imagem é possível diminuir o tamanho do arquivo reduzindo o tempo de *download* e *aploud* e o espaço ocupado no HD. [3] Diferente de uma imagem RGB, onde cada *pixel* tem um valor correspondente a sua cor, a imagem indexada tem um índice para cada cor no mapa. Dessa maneira, para uma imagem de até 256 cores são necessários apenas 8 *bits*, ou seja, um *byte* para armazenar cada um dos valores de índice.

Figura 4.24 – Imagem em cores indexadas



Fonte: McAndrew, p.11

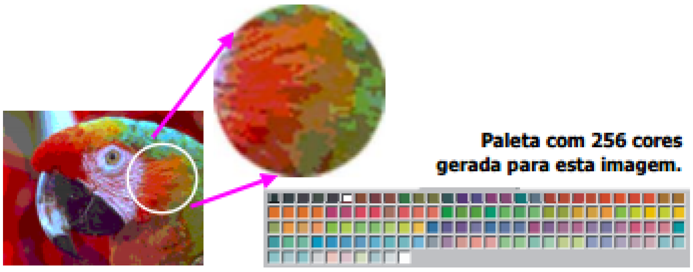
De acordo com McAndrew (2004), na Figura 4.24, os índices não são valores de cinza no *pixel*, mas apenas índices no mapa de cores. Se não existisse o mapa de cores, a imagem estaria muito escura e incolor. Repare que os *pixels* que tem valor 5 na matriz de índices, correspondem aos valores, $0,2627$; $0,2588$ e $0,2549$ no mapa de cores, e representam uma cor acinzentada escura. Veja um exemplo de paleta de cores na Figura 4.25.

Alguns formatos de imagem como o GIF[4], permitem no máximo 256 cores, exatamente pelas razões citadas anteriormente.

[3] *Hard Disk* ou disco rígido em português é o componente do computador responsável por armazenar dados. Os dados armazenados no HD não são apagados ao se desligar o computador, isso permite que o usuário acesse arquivos e execute programas instalados a qualquer momento sem precisar reinstalá-los.

[4] *Graphics Interchange Format* é um formato de imagem que suporta até 8 *bits* por *pixel* para cada imagem, permitindo que uma única imagem faça referência à sua própria paleta de até 256 cores diferentes escolhidas a partir do espaço de cores RGB de 24 *bits*. Devido sua limitação de paletas, o formato GIF não é adequado para reprodução de fotografias coloridas e imagens com cores contínuas, porém, é eficiente para reprodução de gráficos ou logotipos com áreas sólidas de cor.

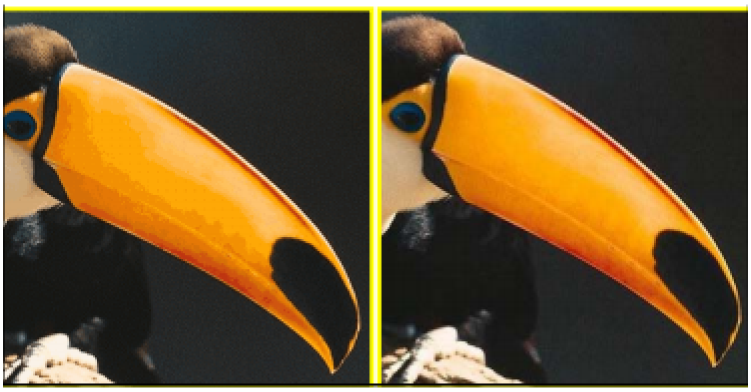
Figura 4.25 – Paleta de cores



Fonte:<www.iesp.edu.br/iesp/downloads/professores/nina/download_iesp/grafica2/modo_de_cor05.pdf>

A Figura 4.26, mostra uma comparação. A imagem à esquerda está no formato *indexed colour*, ou seja, tem no máximo 256 cores para cada *pixel*. A imagem à direita está no formato RGB, e apresenta um universo de aproximadamente 16,7 milhões de cores para cada *pixel*.

Figura 4.26 – *Indexed colour* x RGB



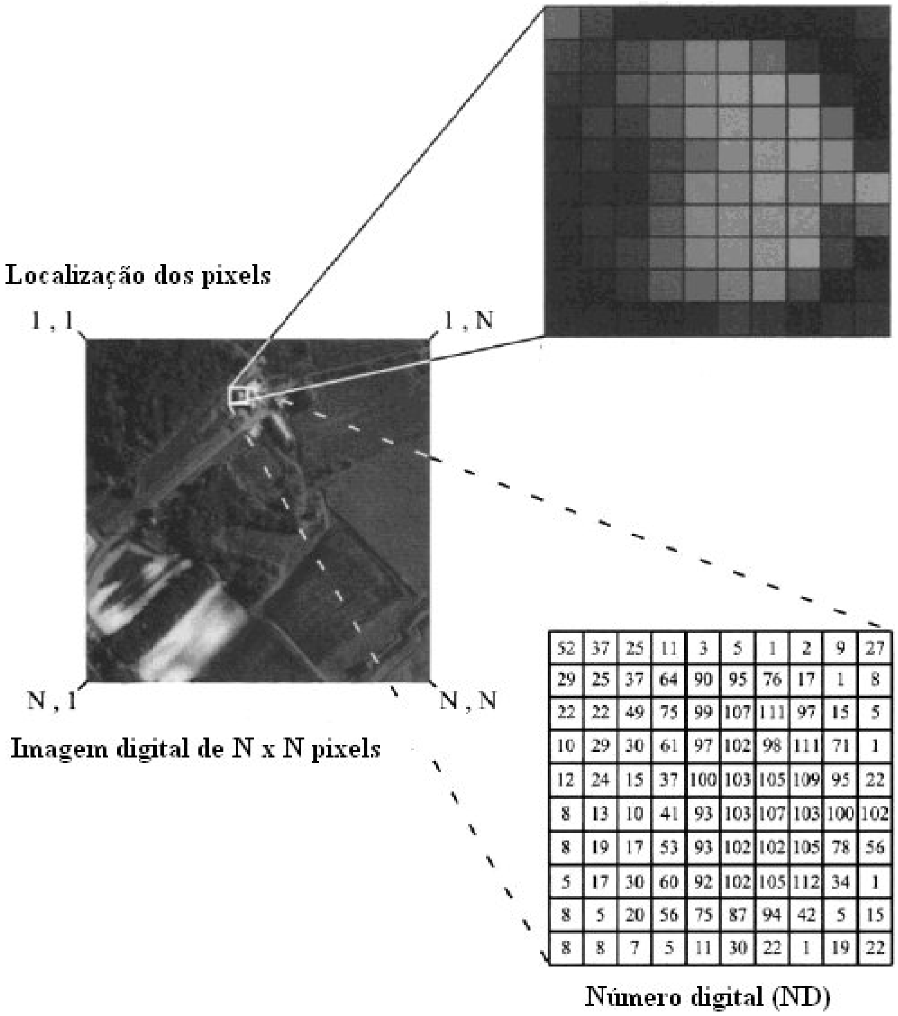
Fonte:<www.iesp.edu.br/iesp/downloads/professores/nina/download_iesp/grafica2/modo_de_cor05.pdf>

4.10.1 Imagens digitais e suas aplicações

Atualmente, devido ao extraordinário aumento da velocidade dos computadores o processamento de uma imagem é feito de forma digital, e não mais como a algumas décadas quando era essencialmente analógico. Existem muitas aplicações para o processamento de imagens, principalmente na área de ciência e tecnologia.

As imagens de satélites são utilizadas na agricultura para medir áreas e quantificar a produção, estudar relevo e clima. Na área militar para reconhecimento de território e localização. Além disso, permitem que cientistas detectem alterações na superfície terrestre, permitindo o estudo de vários fenômenos físicos como o aquecimento global.

Figura 4.27 – Imagem digital(matriz de valores)



Fonte:<www.ipma.pt/pt/educativa/observar.tempo/index.jsp?page=satelite03.xml>

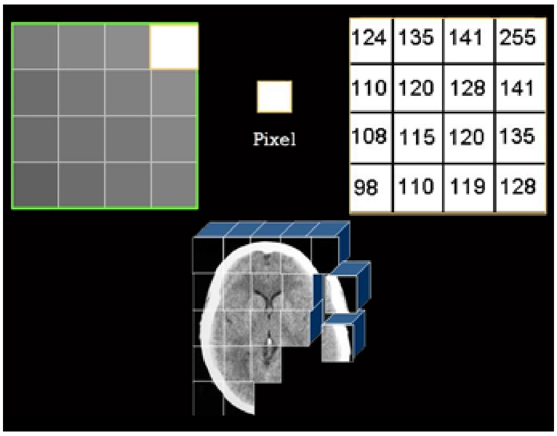
Os instrumentos a bordo de satélites de observação da Terra captam a energia em várias bandas (ou canais) do espectro eletromagnético, podendo medir a energia solar refletida ou a energia infravermelha emitida pelos corpos. Para cada banda é produzida uma imagem (uma matriz de valores) que é estruturada em *pixels*, Figura 4.27. Cada *pixel* corresponde a uma área do objeto relacionada com o IFOV [5], com a altitude do satélite e com a inclinação do angulo de observação. As imagens obtidas são obtidas por quatro tipos de resolução: espacial, espectral, temporal e radiométrica. [6]

[5] O *Instantaneous Field of View* ou campo de visão instantânea define a área do terreno focalizada a uma dada altitude pelo instrumento sensor. De uma forma simplificada, o IFOV representa o tamanho do *pixel*.

[6] A resolução espacial consiste em uma imagem digital obtida por um sensor a bordo de satélite que é representada por uma matriz de*(pixels)*. A resolução espectral é definida pelo número de bandas espectrais de um sensor e pela amplitude do intervalo de comprimento de onda de cada banda. A resolução temporal é o resultado combinado do tipo de órbita do satélite e das características do sensor. A resolução radiométrica é dada pelo número de valores digitais representando níveis de cinza, usados para expressar os dados coletados pelo sensor. Quanto maior o número de valores, maior é a resolução radiométrica.

Na **medicina** as imagens que são obtidas através de aparelhos de raio-X, ressonância magnética ou tomografia computadorizada permitem o diagnóstico preciso de lesões, fraturas e tumores, por exemplo, e também a análise de células e cariótipos cromossômicos. Em uma imagem tomográfica, Figura 4.28, a intersecção das linhas e das colunas da matriz fornecem os *pixels*, a espessura do corte forma a terceira dimensão, que está relacionada diretamente com a profundidade do corte. O volume obtido pela área do *pixel* e a profundidade do corte é denominado *voxel*.

Figura 4.28 – Imagem tomográfica



Fonte: <www.radioinmama.com.br/historiadatomografia.html>

Inspeção automática de itens da linha de produção em uma indústria e análise de impressões digitais pelas autoridades, também são exemplos de aplicações de imagens digitais.

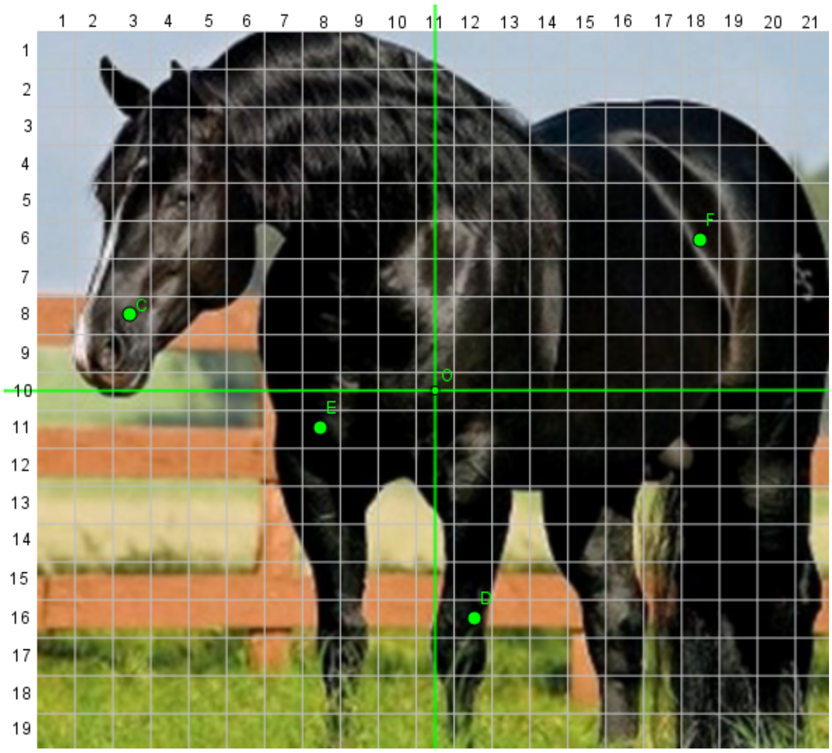
Está seção teve como objetivo mostrar ao leitor algumas aplicações de imagens digitais, porém, sem aprofundar na matemática envolvida. Na próxima seção, os conceitos matemáticos envolvendo matrizes e transformações geométricas voltam a ser contemplados.

4.10.2 Imagens digitais e trasformações geométricas

Na seção anterior foram abordadas transformações geométricas na computação gráfica, agora serão apresentadas algumas transformações aplicadas a imagens digitais. Porém, como já foi exposta a álgebra relativa às transformações simples, desta vez, apenas serão apresentadas as imagens transformadas e as matrizes correspondentes.

É importante relatar que agora estão sendo utilizadas imagens digitais formadas por *pixels*. Na Figura 4.29, observa-se a imagem de um cavalo que tem dimensões 601×534, sendo 601 linhas verticais e 534 linhas horizontais. Repare que as dimensões de uma imagem digital são dadas em uma ordem diferente da convencional para matrizes na matemática. Para facilitar a compreensão do leitor, a imagem será colocada em uma matriz 19×21, e serão traçados os eixos de simetria horizontal e vertical da matriz.

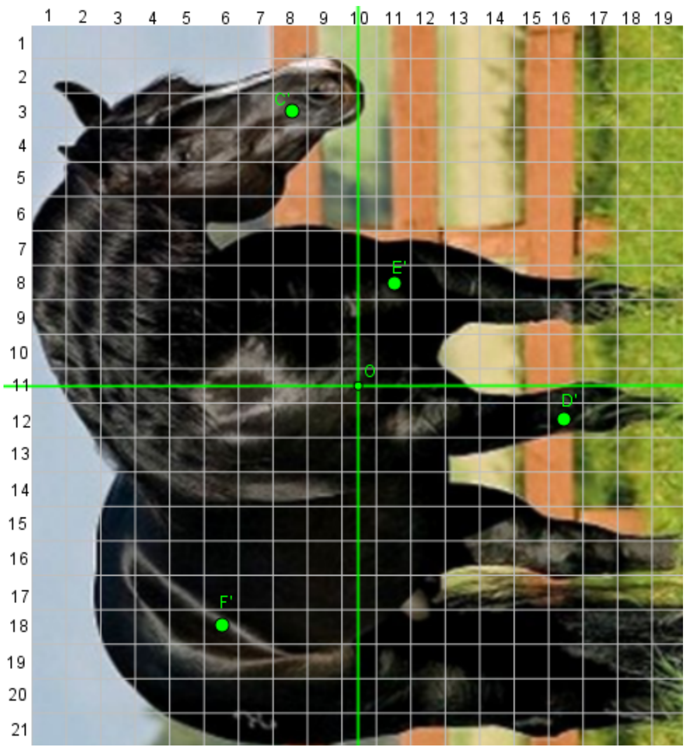
Figura 4.29 – Imagem digital e matriz



Fonte: br.pinterest.com/explore/cavalos/(imagem adaptada pelo autor)

Agora serão aplicadas na imagem uma sequência de transformações simples, ou seja, uma composição de transformações.

Figura 4.30 – Imagem digital e matriz transposta

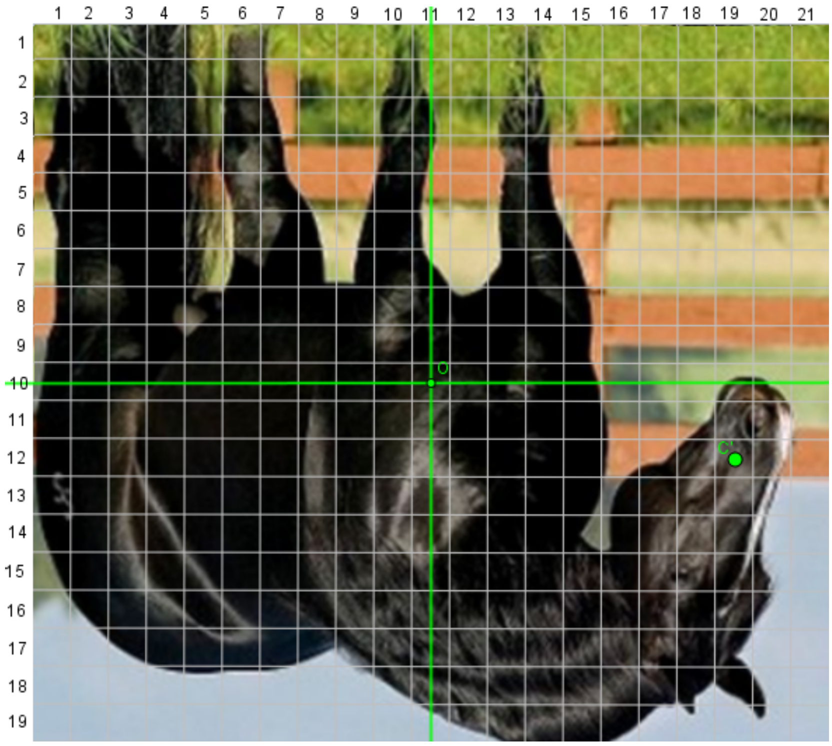


Fonte: br.pinterest.com/explore/cavalos/(imagem adaptada pelo autor)

A Figura 4.29, sofreu uma reflexão em relação ao eixo de simetria vertical seguida de uma rotação de 90° no sentido anti-horário em relação a intersecção dos eixos, resultando na imagem 4.30. Agora considere que C, D, E, F, C', D', E', e F' são *pixels* das imagens. Note que após as transformações as posições dos *pixels* aparecem invertidas em relação às linhas e colunas. Representando o conjunto de pontos que formam as Figuras 4.29 e 4.30, pelas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ respectivamente, conclui-se que $B = (b_{ij}) = (a_{ji}) = A^t$.

Para obter a Figura 4.31, representada pela matriz $M = (m_{kt})$, foram aplicadas na Figura 4.29, uma reflexão em relação ao eixo de simetria horizontal, seguida de uma reflexão em relação ao eixo de simetria vertical.

Figura 4.31 – Reflexão horizontal seguida de uma reflexão vertical



Fonte: br.pinterest.com/explore/cavalos/(imagem adaptada pelo autor)

Observe na Figura 4.31, que o ponto C' está localizado na linha 12 e na coluna 19. Porém lembre-se que na matriz $A = (a_{ij})$ esse mesmo ponto representado por C estava localizado na linha 8 e na coluna 3. Repare que $k = 21-8-1 = 12$ e $t = 21-3+1 = 19$, ou seja, na matriz $M = (m_{kt})$ qualquer elemento pertencente a uma linha k, é dado por $21-i-1$ e qualquer elemento que pertença a uma coluna t é dado por $21-j+1$. Logo, é possível concluir que $M = (m_{kt}) = (a_{21-i-1\ 21-j+1})$. Desta maneira é possível perceber as alterações que as transformações geométricas provocam na matriz de *pixels* que formam a imagem, ou seja, sempre haverá uma relação matricial entre a imagem original e a imagem transformada.

No próximo capítulo será descrito o processo de elaboração e aplicação de novas atividades a um grupo de alunos do Ensino Médio.

5 ELABORAÇÃO E APLICAÇÃO DE NOVAS ATIVIDADES

Inicialmente o foco deste trabalho resumia-se a apresentar propostas de resolução de duas das situações de aprendizagem envolvendo matrizes contidas no caderno do aluno. Para isso, utilizou-se o *software* GeoGebra com o intuito de tornar o processo de ensino aprendizagem mais agradável e significativo. Apesar dos resultados obtidos na aplicação da avaliação da aprendizagem em processo relatada no terceiro capítulo, serem positivos, percebe-se, como já citado anteriormente nessa dissertação, que em relação a transformações geométricas, o conteúdo abordado é escasso e restrito a uma única transformação geométrica, a translação. Assim, notou-se a necessidade de enriquecer esta proposta com atividades que contemplem outras transformações geométricas como a reflexão e rotação, por exemplo. Além disso, serão elaboradas atividades que abordem algumas transformações compostas.

Em uma outra análise notou-se que apesar da opção de seguir a metodologia da engenharia didática, a primeira proposta de aproveitar as atividades do caderno do aluno e não descarta-las, se mostrou viável, pois, este material é utilizado em todo o estado de São Paulo e não poderia ser substituído de uma hora para outra, porém, ao aproveitar um material já existente, ignorou-se uma das etapas da engenharia didática, exatamente aquela relativa à elaboração das atividades pelo professor pesquisador.

Logo, este capítulo traz algumas atividades elaboradas de acordo com as necessidades percebidas durante as aulas experimentais. O *software* GeoGebra continua como principal ferramenta facilitadora do processo de ensino e aprendizagem.

5.1 Análise preliminar

Essa análise ocorreu através de um questionário simples, que foi elaborado com o objetivo de verificar quais as perspectivas dos alunos referentes ao estudo de matrizes após as aulas realizadas.

Questionários são listas de questões fechadas, já validadas em um pré teste, pois cada questão precisa ser bastante clara para que o sujeito não tenha dificuldade para entender. As questões são elaboradas com intuito de buscar informações específicas. (SILVEIRA; MIOLA, 2008, p.96).

Dessa forma, elaborou-se um questionário contendo cinco questões fechadas, onde o educando deveria apenas responder sim ou não, e uma questão aberta onde tinha que citar três exemplos de aplicações de matrizes. Apesar da citação anterior dar a entender, que um questionário deve conter apenas questões fechadas, optou-se por acrescentar uma questão aberta para que o questionário não assumisse apenas um caráter quantitativo.

O questionário foi aplicado a um grupo de dez alunos voluntários que fazem parte da turma A, ou seja, esses alunos fazem parte do grupo que teve um rendimento inferior em comparação com a turma B, conforme mostra o gráfico na Figura 3.38,(p. 72). Esse baixo rendimento provavelmente deve-se ao fato de que esta turma assistiu apenas aulas tradicionais, sem nenhum recurso tecnológico envolvido, ou seja, ainda não conhecem o software GeoGebra, utilizaram apenas o apostilado da ETEC e o caderno do aluno.

Figura 5.1 – Questionário preliminar

1 – Você sabe para que servem as matrizes?

Sim( ) Não( )

2 – Se você respondeu sim à questão 1, cite 3 exemplos de aplicações de matrizes?

____
____
____
____

3 – Você sabe o que são transformações geométricas?

Sim( ) Não( )

4 – Acha que deveriam haver mais aulas práticas de matemática?

Sim( ) Não( )

5 – Você gostaria de aprender matrizes através de um software?

Sim( ) Não( )

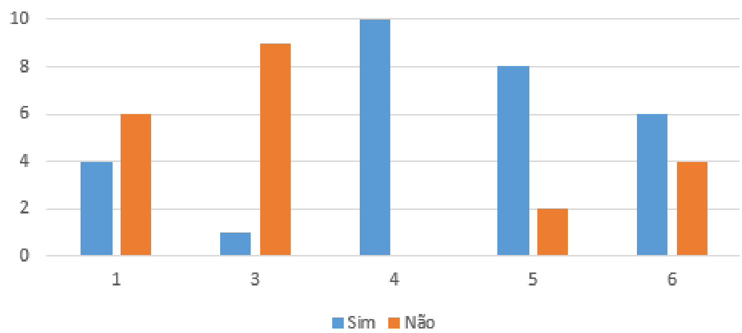
6 - Você acha importante estudar matrizes?

Sim( ) Não( )

Fonte: Elaborado pelo autor

Após a realização da pesquisa os dados obtidos foram tabulados e estão apresentados no gráfico abaixo.

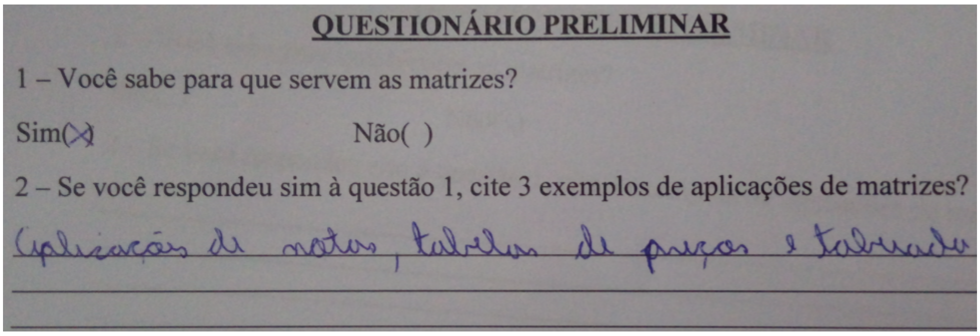
Figura 5.2 – Gráfico do questionário preliminar



Fonte: Elaborado pelo autor

Observando os resultados obtidos na Figura 5.2, verifica-se que 60% dos alunos responderam não à primeira questão, o que de certa maneira não é surpresa, pois, o leitor já foi informado anteriormente que estes alunos fazem parte da turma que teve aulas com metodologias tradicionais. No entanto, o que surpreende é que mesmo os alunos que responderam sim à primeira questão e consequentemente responderam à questão número dois tem visões muito estreitas sobre a aplicação de matrizes. A seguir são apresentadas duas das respostas desses alunos.

Figura 5.3 – Resposta aluno 1



QUESTIONÁRIO PRELIMINAR

1 – Você sabe para que servem as matrizes?

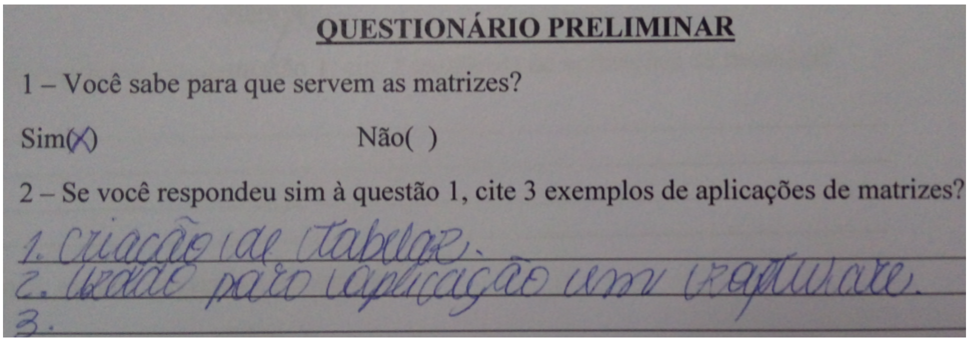
Sim(X) Não( )

2 – Se você respondeu sim à questão 1, cite 3 exemplos de aplicações de matrizes?

Aplicações de notas, tabelas de preços e tabuada

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 5.4 – Resposta aluno 2



QUESTIONÁRIO PRELIMINAR

1 – Você sabe para que servem as matrizes?

Sim(X) Não( )

2 – Se você respondeu sim à questão 1, cite 3 exemplos de aplicações de matrizes?

1. Criação de tabelas.
2. Usado para aplicação um software.
3.

Fonte: Elaborado pelo autor

Observando as respostas dos alunos nas Figuras 5.3 e 5.4, verifica-se que ambos pensam que matrizes servem para criar tabelas, enquanto o segundo ainda cita uma aplicação em *software*, sem esclarecer de que forma. Talvez, o segundo aluno tenha sido influenciado pelo enunciado da questão número cinco, que fala sobre *software*. Entretanto, fica evidente que ambos foram influenciados por um método tradicional de ensino, que faz o uso excessivo de tabelas para elaboração de problemas que envolvam matrizes.

Em relação à questão número três, foram nove respostas contrárias e apenas uma favorável. Novamente fica evidente que o material apostilado utilizado na ETEC e muitos dos livros didáticos não abordam as transformações geométricas, ou quando as abordam, fazem de maneira inadequada. O único aluno que respondeu sim, que sabia o que eram transformações geométricas, relatou que havia conversado com colegas que estudavam na outra turma, e eles comentaram sobre as aulas que estavam realizando no laboratório de informática sobre transformações geométricas.

A unanimidade da questão quatro mostra o anseio dos discentes por aulas de melhor qualidade, que extrapolem a rotina e lhes ofereçam algo desafiador e inovador. O poder da experimentação imediata "oferece ao aluno inúmeras possibilidades e agilidade para incontáveis situações matemáticas, envolvendo tarefas que antes eram inviáveis"(SILVEIRA; MIOLA, 2008, p.70).

Quanto à quinta questão, observa-se duas respostas negativas. Estes dois alunos, disseram que o motivo da resposta negativa se deve ao fato de que achavam que seria muito difícil aprender matemática dessa maneira, pois pensavam que teriam que realizar cálculos e estes seriam tão difíceis quanto os realizados de maneira algébrica em sala de aula.

Antes de comentar o resultado da sexta questão, é preciso ressaltar que os alunos não foram influenciados nas suas respostas. Para isso, não precisavam se identificar, a menos que quisessem. Verifica-se quatro respostas negativas na sexta e última questão, isso provavelmente ocorre porque esses alunos não vislumbram utilidade alguma para as matrizes, desencadeando todos os fatores já analisados nas questões anteriores.

Após esta análise preliminar, serão elaboradas algumas questões que possam auxiliar os alunos a reconsiderarem suas concepções sobre a importância do estudo de matrizes.

5.2 Elaboração das atividades

As atividades foram modeladas de acordo com os resultados obtidos na avaliação da aprendizagem em processo, apresentada no Capítulo 3 e da análise feita através do questionário preliminar na seção anterior. Todas as atividades citadas a seguir estão disponíveis no Apêndice.

Em um primeiro momento foram elaboradas 5 atividades [1] que apresentam polígonos no plano cartesiano que sofreram transformações geométricas. O aluno deve armazenar os vértices dos polígonos em matrizes de dados e tentar descobrir qual é a matriz da transformação geométrica, descrevendo as operações realizadas para chegar na matriz da imagem transformada. Também é necessário que ele tente generalizar o processo. Entre as atividades que abordam a transformação geométrica de reflexão, além da reflexão em relação aos eixos coordenados, foram acrescentados dois novos desafios que não foram abordados neste trabalho. Se trata da reflexão em relação às retas $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares) e $y = -x$ (bissetriz dos quadrantes pares). Para realizar essas atividades os alunos devem se recordar das reflexões em relação aos eixos das abscissas e eixo das ordenadas onde multiplica-se as matrizes que armazenam os vértices da figura

[1] Veja as Figuras A.1, A.2, A.3, A.4 e A.5 disponíveis no apêndice

original pelas matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ respectivamente.

O aluno deve observar que na reflexão em relação ao eixo das abscissas, obtém-se na figura refletida as mesmas abscissas, porém, ordenadas opostas. Também deve observar que na reflexão em relação ao eixo das ordenadas, obtém-se abscissas opostas, mas, ordenadas constantes. Isso o conduzirá ao raciocínio de que a matriz da transformada que provoca a reflexão em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares por exemplo, deve ser uma matriz que ao ser multiplicada provoque uma troca de linhas na matriz original, pois temos que $y = x$. Para isto basta o aluno perceber que 0 e 1 são elementos neutros da adição e da multiplicação respectivamente. Logo, como deseja-se que as linhas se invertam, ou seja, que os primeiros elementos sejam ordenadas e os segundos abscissas, deve-se multiplicar a matriz que armazena os vértices da figura original pela matriz;

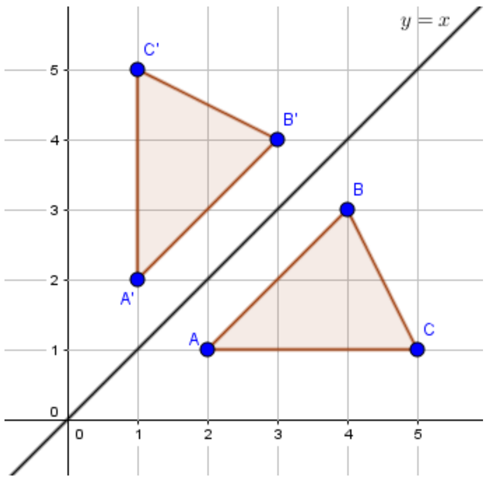
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Suponha que um aluno queira refletir o triângulo com vértices nos pontos $A = (2, 1)$, $B = (4, 3)$ e $C = (5, 1)$ em relação a reta $y = x$. Basta multiplicar a matriz da transformada pela matriz que contém os vértices do triângulo ABC, ou seja;

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Observa-se que a matriz produto contém as coordenadas $A' = (1, 2)$, $B' = (3, 4)$ e $C' = (1, 5)$. A figura 5.5, ilustra a transformação obtida.

Figura 5.5 – Reflexão em relação a reta $y = x$



Fonte: Elaborado pelo autor

Para realizar a reflexão em relação a reta $y = -x$, o aluno deve seguir os mesmos procedimentos descritos anteriormente, porém, a matriz da transformada passa a ser;

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Durante a elaboração das atividades é importante distribuir as questões em uma sequência didática coerente, que permita aos alunos estabelecerem ligações entre o conteúdo estudado. Assim, outra atividade que merece destaque é a número cinco, veja a Figura A.5 no Apêndice. Essa atividade apresenta ao aluno uma rotação de $180°$ no sentido anti-horário em relação à origem, porém, um dos itens da atividade desafia o educando a tentar descobrir se esta transformação pode ser obtida a partir de uma combinação entre duas ou mais transformações. A finalidade dessa pergunta é introduzir a noção de transformações compostas, pois, com um pouco de atenção, nota-se que uma rotação de $180°$ no sentido anti-horário pode ser obtida através de duas reflexões sucessivas por exemplo. Uma em relação ao eixo da ordenadas, seguida de outra em relação ao eixo das abscissas, ou uma em relação ao eixo das abscissas, seguida de outra em relação ao eixo das ordenadas. Ao introduzir essa noção antecipadamente, espera-se que os alunos não sejam surpreendidos ao se depararem com as três últimas atividades que tratam exatamente das transformações geométricas compostas.

As duas próximas atividades [2] consistem em utilizar o *sftware* GeoGebra para construir polígonos escolhidos pelos alunos, e aplicar a eles as transformações geométricas comtempladas nas cinco primeiras atividades. Entretanto, dessa vez, além de construir os polígonos no GeoGebra eles também utilizarão o software para criar as matrizes e também para efetuar as operações necessárias. Assim, espera-se que os alunos percebam que apesar do software ser um instrumento facilitador do processo ensino e aprendizagem, é necessário antes ter um conhecimento algébrico dos conceitos estudados.

Recorrer a novas tecnologias da informação como ferramenta complementar no processo de ensino e aprendizagem é essencial no mundo contemporâneo, os estudiosos da educação já vislumbravam esse panorama a mais de duas décadas.

> O computador adiciona uma nova dimensão - o fato do aprendiz ter que expressar a resolução do problema segundo uma linguagem de programação. Isto possibilita uma série de vantagens. Primeiro, as linguagens de computação são precisas e não ambíguas. Neste sentido, podem ser vistas como uma linguagem matemática. Portanto, quando o aluno representa a resolução do problema segundo um programa de computador ele tem uma descrição formal, precisa, desta resolução. Segundo, este programa pode ser verificado através da sua execução. Com isto o aluno pode verificar suas ideias e conceitos. Se existe algo errado o aluno pode analisar o programa e identificar a origem do erro. Tanto a representação da solução do problema como a sua depuração são muito difíceis de serem conseguidas através dos meios tradicionais de ensino.(VALENTE, 1993)

[2] Ver as figuras A.6 e A.7 disponíveis no Apêndice.

Nas atividades 8, 9 e 10 [3], procura-se ampliar os conhecimentos sobre transformações geométricas. De acordo com Lay (1999), para movimentar uma figura na tela de um computador, é necessário utilizar muitas vezes, duas ou mais transformações básicas. Desta forma, optou-se pela elaboração de algumas transformações compostas, afim de ampliar o conhecimento dos alunos e associá-lo ao que ocorre na prática.

A atividade número 8 consiste em realizar uma reflexão deslizante. Essa transformação é composta por uma reflexão seguida de uma translação na direção do eixo de reflexão ou uma translação seguida de uma reflexão com o eixo paralelo à direção de translação. Para realizar esta atividade os alunos devem construir no GeoGebra uma figura qualquer e aplicar nela uma reflexão seguida de uma translação, como descrito anteriormente. Além disso, também deverá descrever a transformação através da álgebra matricial.

Na atividade número 9, o aluno deve construir um polígono que tenha o formato de uma letra do alfabeto. Em seguida deverá criar a matriz de dados que armazena os vértices da letra (polígono) e multiplicá-la pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Após efetuar a multiplicação o aluno ocultará a letra construída inicialmente e marcará no plano cartesiano todos os pontos armazenados na matriz de dados obtida pelo produto. Ao ligar os pontos o aluno perceberá que a letra está no estilo itálico. Na verdade o que aconteceu, é que foi aplicada a figura inicial uma transformação geométrica denominada cisalhamento[4].

A décima e última atividade é uma sequência da atividade 9. Ao realizar a transformação de cisalhamento e deixar a letra construída em estilo itálico, o aluno pode achar ela um pouco larga demais e optar por estreitá-la um pouco. Para obter este efeito, o aluno deverá aplicar além do cisalhamento uma contração na coordenada x. Ou seja, tem-se novamente uma transformação composta.

Supondo que o aluno queira uma contração na coordenada x com fator $0,70$ na figura e um estilo itálico. Para isso, ele deve obter a matriz da transformada composta multiplicando a matriz de contração pela matriz de cisalhamento nessa ordem.

$$\begin{pmatrix} 0,70 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0,25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,70 & 0,18 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, para aplicar o efeito itálico um pouco mais estreito a sua letra (polígono), basta multiplicar a matriz da transformada composta, pela matriz de dados que armazena os vértices da figura original.

[3] Ver as Figuras A.8, A.9 e A.10 disponíveis no Apêndice.

[4] Caso o leitor não se recorde, a transformação geométrica cisalhamento está descrita no Capítulo 4, (p.96), assim como as demais transformações geométricas simples.

5.3 Aplicação das atividades

Como as atividades já foram descritas anteriormente, nesta seção apenas serão feitos alguns comentários e apresentadas algumas imagens dos alunos trabalhando.

As atividades foram aplicadas em duas etapas. Na primeira os alunos resolveram as cinco primeiras atividades sem o apoio do GeoGebra. Esta etapa foi realizada em sala de aula e os alunos tinham duas aulas de 50 minutos para resolver às atividades.

Nesta etapa as principais dificuldades encontradas pelos alunos estão relacionadas as operações com matrizes. A primeira atividade que apresenta uma translação, foi realizada sem maiores problemas, pois, a operação de adição de matrizes não apresenta grau de dificuldade, de acordo com o relato dos alunos esta foi a atividade mais fácil.

No entanto as transformações lineares de reflexão e rotação exigem que o aluno domine a multiplicação de matrizes. Neste momento, surgiram alguns erros relacionados a regra de sinais e posicionamento dos elementos nas linhas e colunas da matriz produto. Além disso, houve alguma confusão com os valores das razões trigonométricas seno e cosseno ao aplicarem a transformação de rotação. Entretanto, realizando uma análise global, considera-se que o aproveitamento dos alunos nesta primeira etapa tenha sido satisfatório, pois, já era esperado uma certa dificuldade dos alunos com o cálculo e a álgebra, porém, o principal objetivo foi atingido, na medida em que a maior parte deles não apresentou maiores problemas em identificar as transformações geométricas presentes em cada situação-problema.

A segunda etapa foi realizada em um dos laboratórios de informática da ETEC Professora Nair Luccas Ribeiro. Como o laboratório conta com vinte e cinco computadores e o grupo avaliado é composto por dez alunos não se encontrou problemas em relação à quantidade de máquinas disponíveis. O *software* GeoGebra foi instalado em rede a fim de facilitar a distribuição dos alunos no laboratório, dessa maneira, o aluno poderia escolher qualquer computador que encontraria o ícone do GeoGebra na área de trabalho.

Com o intuito de familiarizar os alunos com a utilização do software GeoGebra, realizou-se duas aulas preliminares para promover essa adaptação. Também é extremamente importante que o professor se aproprie das funções do software educacional utilizado em uma situação como essa. Para Follador (2007, p.58), "quando trabalhamos em ambientes informatizados, a relação ensino-aprendizagem assume uma característica diferente da sala de aula tradicional". Nesta perspectiva é necessário que o docente esteja preparado, domine as técnicas necessárias para conduzir a aula. No laboratório de informática, o professor deve exercer a função de mediador da aprendizagem, abandonando a função de mero transmissor de informações. (FOLLADOR, 2007).

Após esse primeiro contato com o GeoGebra, foram aplicadas as atividades restantes de 6 a 10. Como os alunos já tinham resolvido as atividades da primeira etapa, adquirindo os conceitos necessários para realizar essa nova etapa, o desafio ficou por conta de utilizar corretamente as ferramentas disponíveis no *software* para gerar as transformações, criar e operar matrizes. Durante a realização das atividades 6 e 7, como os alunos poderiam construir seus próprios polígonos, alguns utilizaram muitos pontos, o que dificultou a construção das matrizes. Porém, como o software realiza os cálculos necessários não houve maiores problemas.

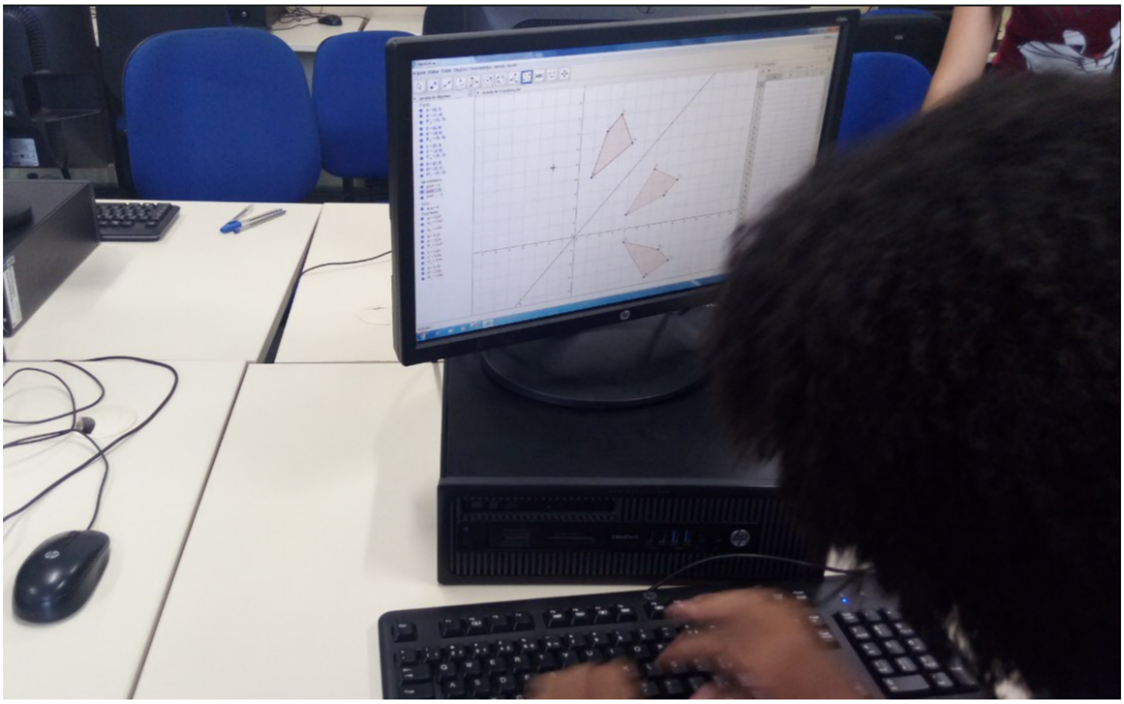
Conforme relatado na seção anterior as questões 8 e 10 apresentam transformações compostas. Essas foram as duas situações onde os alunos apresentaram mais dúvidas, porém, com uma mediação adequada do professor, os alunos foram direcionados e desenvolveram as atividades de forma eficiente.

Abaixo são apresentadas imagens dos alunos realizando algumas das atividades propostas. Afim de preservar a identidade dos alunos, seus rostos não aparecem nas fotos.

Figura 5.6 – Aluno resolvendo a atividade 6c

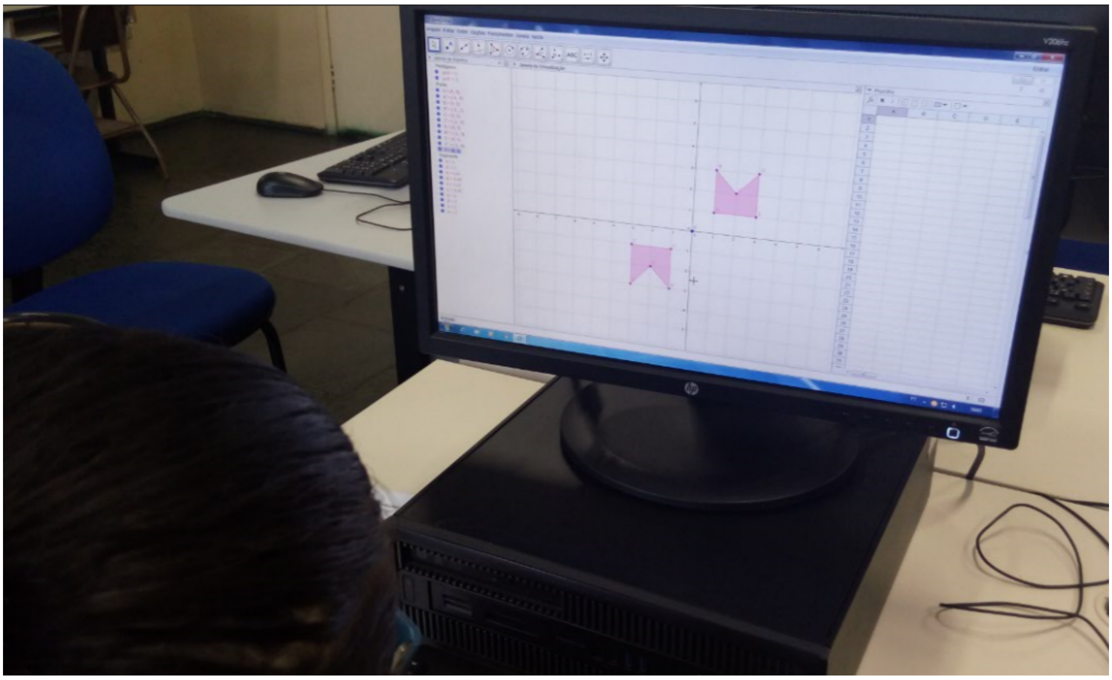
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 5.7 – Aluno resolvendo a atividade 6d



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 5.8 – Aluno resolvendo a atividade 6i



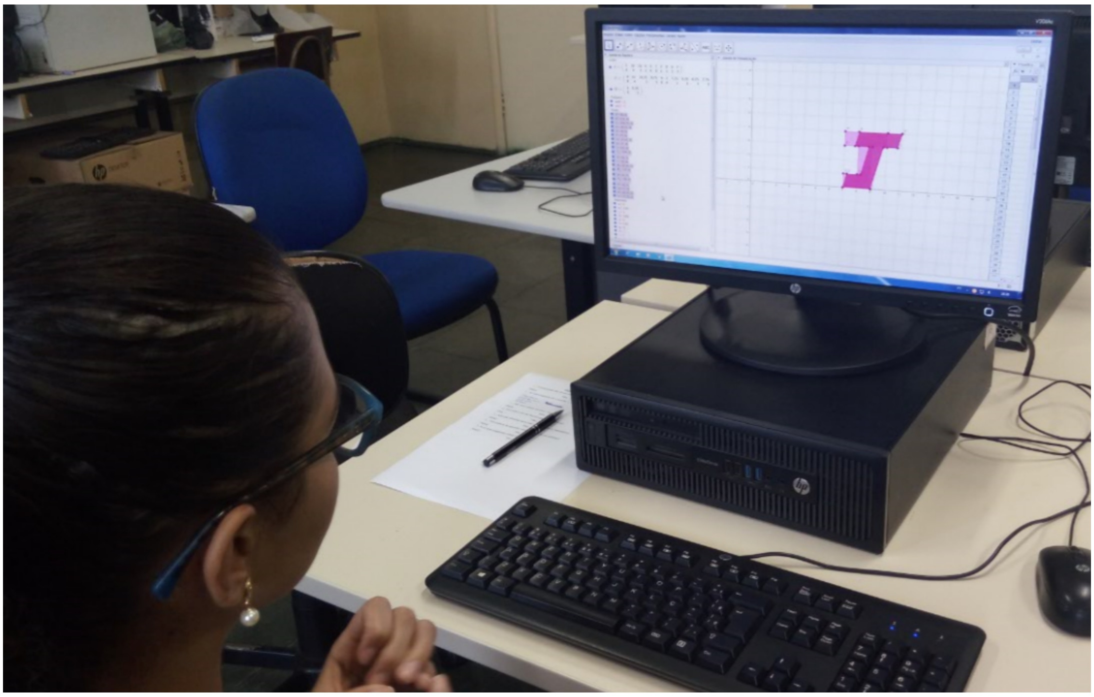
Fonte: Elaborado pelo autor

As atividades 9 e 10, foram eleitas pelos alunos como as mais interessantes. Provavelmente devido ao fato de apresentarem uma situação que está presente em seu cotidiano, pois, a todo instante estão em contato com editores de texto, seja para realizar um trabalho escolar ou para enviar mensagens em redes sociais.

Figura 5.9 – Aluno resolvendo a atividade 9

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 5.10 – Aluno resolvendo a atividade 10



Fonte: Elaborado pelo autor

5.4 Análise posterior

Para verificar quais as conclusões dos alunos e a eficiência do trabalho desenvolvido, elaborou-se um questionário final onde os educandos responderam a 6 questões simples e objetivas, sendo cinco questões fechadas e uma aberta.

Figura 5.11 – Questionário Final

1 – Você gostou de aprender matrizes e transformações geométricas através do software GeoGebra?

Sim ( ) Não ( )

2 – Acha que ficou mais fácil?

Sim ( ) Não ( )

3 – Gostaria de ter mais aulas assim?

Sim ( ) Não ( )

4 – Teve alguma dificuldade em utilizar o software ou de assimilar algum conceito?

Sim ( ) Não ( )

5 – Caso tenha respondido sim à questão 4, cite quais foram as dificuldades?

____

____

____

____

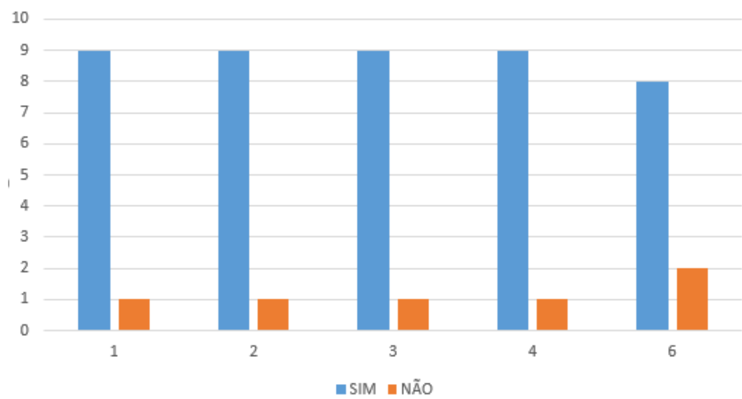
6 – Você acha importante estudar matrizes?

Sim ( ) Não ( )

Fonte: Elaborado pelo autor

Os dados foram coletados, tabulados e estão apresentados na Figura 5.12.

Figura 5.12 – Gráfico do questionário final



Fonte: Elaborado pelo autor

Ao observar o gráfico verifica-se que a maioria das respostas foram positivas. Nove dos dez alunos que realizaram o questionário responderam sim as três primeiras questões, ou seja, fica evidente que os discentes acharam positiva a experiência de aprender transformações geométricas através do GeoGebra.

Novamente ao analisar o gráfico, percebe-se que são nove respostas favoráveis e apenas uma contrária. O aluno que respondeu sim, ou seja, que teve dificuldades em utilizar o *software*, não especificou quais eram.

A última questão apresenta 80% de respostas positivas, contra 60% na análise preliminar, ou seja, dois alunos que inicialmente acreditavam que o estudo de matrizes não era importante, passaram a entender que o estudo de matrizes tem sua utilidade. Porém, dois alunos ainda acreditam que estudar matrizes é irrelevante para sua vida.

Contudo, entende-se que os resultados obtidos foram favoráveis, no geral os alunos demonstraram um maior interesse durante as aulas, apresentavam-se dispostos e mais participativos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inicialmente o objetivo central dessa dissertação restringia-se a apresentar sugestões de resolução de duas das situações de aprendizagem contidas no caderno do aluno utilizado na rede estadual de ensino de São Paulo. Entretanto, o intuito era propor algo diferente do que se encontra na maior parte dos apostilados e livros didáticos utilizados tradicionalmente. Assim, optou-se por recorrer a tópicos da história da matemática, de modo a demonstrar aos leitores que o estudo da história da matemática acompanha e influência a evolução da humanidade. Ao passear pela história das matrizes verifica-se que os conceitos e definições foram ampliados e aperfeiçoados permitindo o desenvolvimento de novas tecnologias. Além disso, o estudo da história da matemática, tem papel preponderante na formação do professor, pois, agrega diferentes saberes a sua didática contribuindo diretamente com sua prática docente.

Contudo, as atividades deveriam ser solucionadas de maneira inovadora através do *software* GeoGebra. Diferente de muitos trabalhos que abordam somente as ferramentas geométricas do *software*, foi proposto também utilizar a parte algébrica do software para criar matrizes e realizar operações que nos levariam às transformações representadas no plano.

Ao realizar as aulas experimentais e aplicar a avaliação da aprendizagem em processo, verificou-se que realmente o método de resolução das atividades com o *software* apresentou resultados favoráveis, como apresenta o gráfico ilustrado na Figura 3.38, p.77. Assim, conclui-se que o objetivo inicial foi atingido, pois foram observadas duas turmas, e aquela que participou das aulas de acordo com a metodologia diferenciada obteve resultados superiores aos da turma que teve aulas tradicionais.

Entretanto, apesar dos resultados positivos, verificou-se que recorrer a tópicos da história da matemática e utilizar o GeoGebra para resolver situações de aprendizagem restritas somente a uma transformação geométrica, era insuficiente, necessitava-se aprofundar um pouco mais. Dessa forma, decidiu-se acrescentar conceitos abordados em nível superior. Acrescentou-se ao trabalho os conceitos algébricos necessários para compreender o que são transformações geométricas planas.

Porém, ainda era pouco, necessitava-se ampliar as perspectivas, mas sem prejudicar a sequência didática. Então surgiu a ideia de apresentar aplicações das transformações geométricas, pois, isso justificaria a importância do estudo de matrizes e transformações geométricas. Assim, foram agregadas ao trabalho duas novas seções, a relativa a computação gráfica e a que trata de imagens digitais. Em um primeiro olhar, o leitor pode achar repetitivo o fato de que algumas das transformações citadas no Capítulo 3, foram abordadas novamente na seção que fala sobre computação gráfica, entretanto, inicialmente as transformações foram tratadas de forma vetorial e algébrica com generalizações. Já ao abordar a computação gráfica, o foco passou a ser a aplicação de transformações geométricas em figuras planas, trazendo ao leitor um significado menos complexo, sem muita álgebra e mais contextualizado.

A aplicação em imagens digitais foi abordada superficialmente, pois, as transformações mais complexas exigiriam do leitor muito mais conhecimentos específicos. No entanto, esse contato inicial com o tema pode gerar curiosidade, instigar o espírito investigador e incentivar alunos e professores a ampliar seus conhecimentos e conceitos relativos a imagens digitais.

Pode parecer que o conteúdo exposto até então era suficiente, o trabalho já poderia ser finalizado, porém, ao adotar a metodologia da engenharia didática era preciso seguir todas suas etapas. Entretanto, como dito anteriormente, as questões aplicadas aos alunos já estavam prontas, pertenciam ao caderno do aluno e a avaliação de aprendizagem em processo, assim, era necessário elaborar algumas atividades por conta própria, de acordo com o conteúdo disposto no trabalho e as necessidades dos alunos. Desta forma, a primeira decisão foi acrescentar situações-problema que contemplassem outras transformações geométricas e não somente a translação, assim, foram introduzidas nas atividades a reflexão, a rotação e a escala.

Todavia, era preciso algo desafiador, nesta perspectiva, optou-se pela introdução de situações-problema envolvendo transformações geométricas compostas. Obviamente, existem muitas transformações compostas, porém, foram abordadas de maneira coerente, com o cuidado, sem exagerar nas abstrações para não desestimular os alunos.

Além das atividades, foi necessário aplicar dois questionários, para verificar conhecimentos prévios e posteriores, além das perspectivas dos alunos no estudo de matrizes e transformações geométricas.

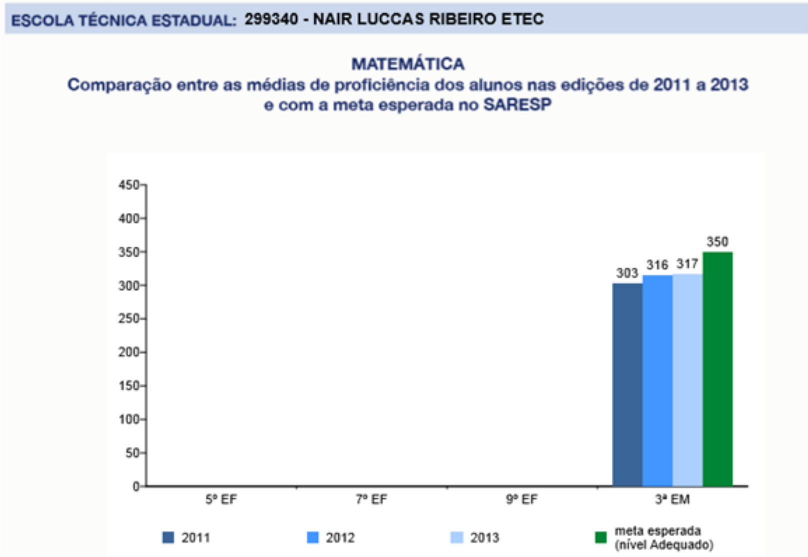
As atividades e os questionários foram aplicados, e de acordo com os resultados obtidos conclui-se que os objetivos foram alcançados, ou seja, ampliaram-se as perspectivas de alunos referente ao estudo de matrizes.

Deve-se ressaltar que existem outros trabalhos relativos a matrizes e transformações geométricas. O trabalho de Stormowski, (2008), aborda o estudo de fractais, e é uma ótima opção para o leitor ampliar seus conceitos.

O saber matemático é infinito, está sempre em construção. O objetivo desse trabalho foi o de contribuir com colegas professores e alunos, fornecendo de maneira discreta dados e informações que possam ajudá-los a construir um caminho agradável em busca de uma sequência didática dinâmica e significativa através do uso correto das novas tecnologias na educação.

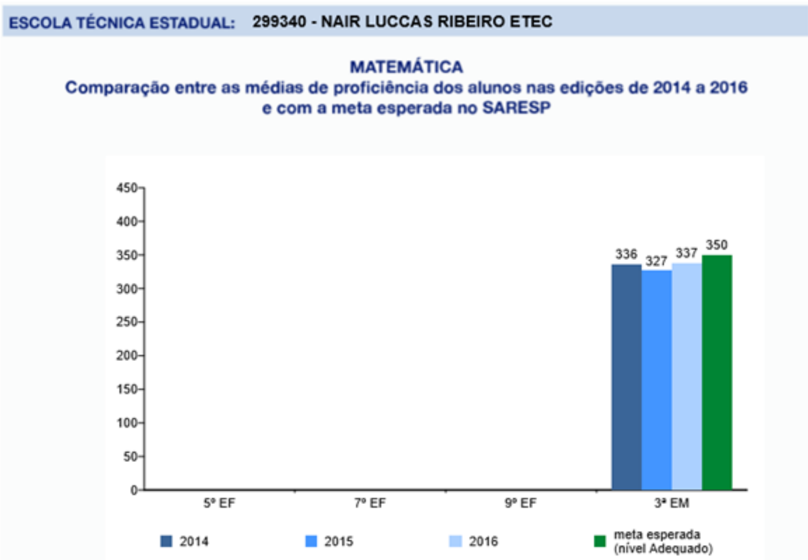
O PROFMAT colaborou de forma essencial na qualificação dos professores que tiveram a oportunidade de participar desse excelente programa de mestrado profissional. Analisando os resultados do SARESP [1] obtidos pela ETEC Professora Nair Luccas Ribeiro, escola na qual o autor da presente dissertação leciona, nota-se a melhora do desempenho dos alunos em matemática.

Figura 6.1 – Resultados do SARESP 2011 a 2013



Fonte: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2013/>

Figura 6.2 – Resultados do SARESP 2014 a 2016



Fonte:<http://saresp.fde.sp.gov.br/2016/>

Comparando os resultados obtidos no gráfico ilustrado na Figura 6.1, com aqueles indicados no gráfico ilustrado na Figura 6.2, nota-se um crescimento significante do desempenho em matemática no triênio 2014 a 2016 em relação ao resultado obtido no triênio de 2011 a 2013. Esse crescimento ocorreu exatamente durante o triênio em que cursei o

[1] Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo.

PROFMAT, ou seja, fica evidente que um profissional qualificado impacta diretamente na qualidade do ensino oferecido. Além disso, analisando os níveis de proficiência em matemática no ano de 2011, 32,4% dos alunos da ETEC Professora Nair Luccas Ribeiro encontravam-se abaixo do básico, esse número despencou para 1,3% em 2016, ou seja, não há coincidência, estou ciente que os conhecimentos adquiridos durante o mestrado proporcionaram esse ótimo desempenho.

Referências

ARTIGUE, M. Engenharia didática. In: *Didáticas das Matemáticas*. Lisboa: Horizontes pedagógicos, 1996. p. 193–217.

BAUMGART, J. K. *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula*. Traduzido por: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. v. 4. 112 p.

BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra linear*. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980. 411 p.

BOYER, C. B. K. *História da matemática*. Traduzido por: Elza F. Gomide. Edição da universidade de são paulo. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. 488 p.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Fundamental (SEF). *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental (5ª a 8ª séries)*. Brasília, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Técnologica (Semtec). *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Técnologica (Semtec). *PCN+ Ensino Médio: orientações curriculares complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Orientações curriculares para o ensino médio*. Brasília, 2006. v. 2. 135 p.

BROUSSEAU, G. Palestra. *A Teoria das Situações Didáticas e a Formação do Professor*. São Paulo: PUC, 2006.

FOLLADOR, D. *Tópicos Especiais no Ensino de Matemática*: Tecnologias e tratamento da informação. Curitiba: Ibpex, 2007. 138 p.

GONZALES, R. C.; WOODS, R. E. *Processamento de imagens digitais*. Traduzido por: Roberto M. C. Junior and Luciano da F. Costa. São Paulo: Edgard Blücher, 2000. 501 p.

LAY, D. C. *Álgebra linear e suas aplicações*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999. 504 p.

LIMA, E. L. *Álgebra linear*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 357 p.

MACHADO, S. D. A. Engenhária didática. In: *Educação Matemática*: Uma introdução. São paulo: Educ, 2002. p. 197–208.

McANDREW, A. *Introduction to Digital Image Processing with Matlab*. Boston: Thomson Learning, 2004. 260 p.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. History topc: Matrices and determinants. 1996. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants.html>. Acesso em: 05 out. 2016.

POMMER, W. M. *A engenharia didática em sala de aula*: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as equações diofantinas lineares. São Paulo: [s.n.], 2013. 72 p.

RISCHBIETER, L. Os inimigos da infância. *Folha de São Paulo*, São Paulo, p. 56, 26 jul. 2009.

SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação. *Proposta curricular do Estado de São Paulo para o ensino fundamental Ciclo II e ensino médio*: documentos de apresentação. São Paulo: SE, 2008. 35 p.

SANTOS, L. M. *Tópicos de história da física e da matemática*. Curitiba: Ibpex, 2009. v. 5.

SILVEIRA, E.; MIOLA, R. J. *Professor-Pesquisador em Educação Matemática*. Curitiba: Ibpex, 2008. v. 3.

STORMOWSKI, V. *Estudando matrizes a partir de transformações geométricas*. 144 f. Dissertação (Mestrado profissionalizante em Ensino da Matemática) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

TRAINA, A. J. M.; OLIVEIRA, M. C. F. *Apostila de Computação Gráfica*. São Paulo: ICMC-USP, 2006. 114 p.

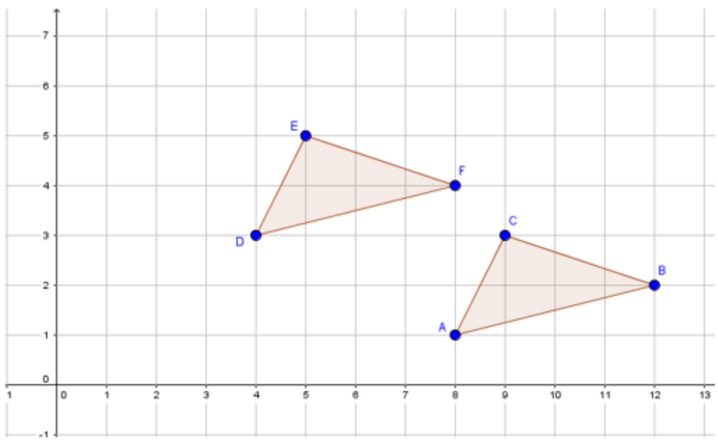
VALENTE, J. A. Diferentes usos do computador na educação. 1993. Disponível em: <http://www.educacaopublica.rj.gov.br/biblioteca/tecnologia/0022.html>. Acesso em: 13 jan. 2017.

APÊNDICE A – Atividades aplicadas

Figura A.1 – Atividade 1

Nome:____Série:_______Data___/___/___

Observe os triângulos abaixo:

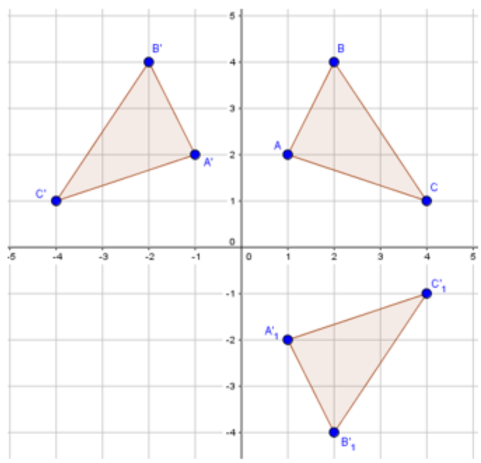


a) Escreva a matriz que contém as coordenadas dos vértices de cada polígono?
b) Qual transformação geométrica é aplicada no triângulo ABC e faz com que ele coincida com o triângulo DEF?
c) Escreva a matriz da transformação geométrica aplicada em ABC.
d) Escreva a operação entre matrizes que descreve a transformação.
e) Tente escrever de uma forma geral.

Figura A.2 – Atividade 2

Nome:____Série:_______Data___/___/___

Observe os triângulos abaixo:

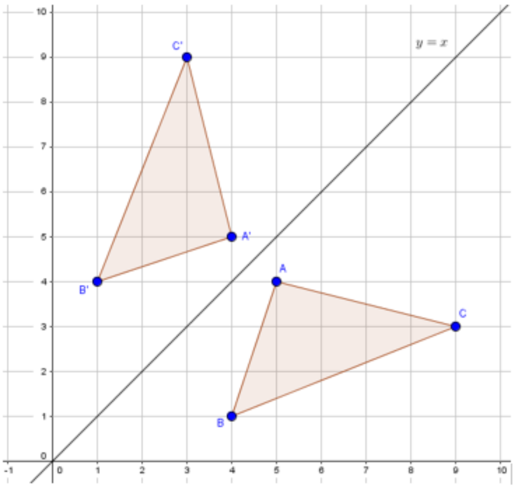


a) Escreva a matriz que contém as coordenadas dos vértices de cada polígono?
b) Qual transformação geométrica é aplicada no triângulo ABC e faz com que ele coincida com o triângulo A'B'C'? E com o triângulo $A'_1B'_1C'_1$?
c) Escreva a matriz da transformação geométrica aplicada em ABC em cada um dos casos.
d) Escreva a operação entre matrizes que descreve cada uma das transformações.
e) Tente escrever de uma forma geral.

Figura A.3 – Atividade 3

Nome:____Série:_______Data___/___/___

Observe os triângulos abaixo e a bissetriz dos quadrantes ímpares:

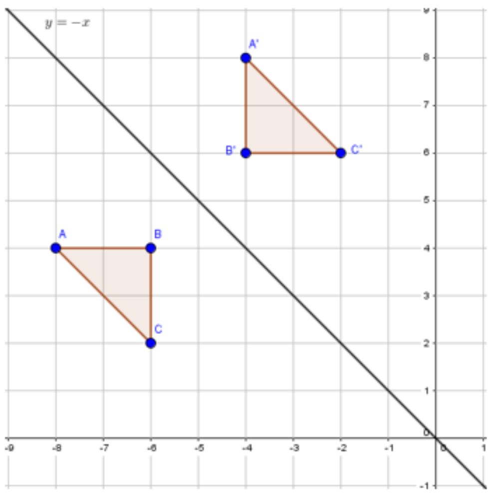


a) Escreva a matriz que contém as coordenadas dos vértices de cada polígono?
b) Qual transformação geométrica é aplicada no triângulo ABC e faz com que ele coincida com o triângulo A'B'C'?
c) Escreva a matriz da transformação geométrica aplicada em ABC.
d) Escreva a operação entre matrizes que descreve essa transformação.
e) Tente escrever de uma forma geral.

Figura A.4 – Atividade 4

Nome:____Série:_______Data___/___/___

Observe os triângulos abaixo e a bissetriz dos quadrantes pares:

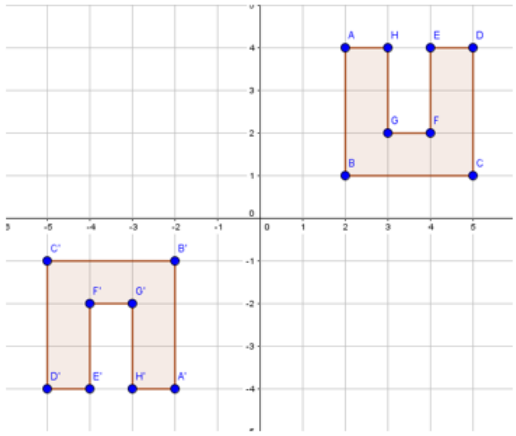


a) Escreva a matriz que contém as coordenadas dos vértices de cada polígono?
b) Qual transformação geométrica é aplicada no triângulo ABC e faz com que ele coincida com o triângulo A'B'C'?
c) Escreva a matriz da transformação geométrica aplicada em ABC.
d) Escreva a operação entre matrizes que descreve essa transformação.
e) Tente escrever de uma forma geral

Figura A.5 – Atividade 5

Nome:____Série:_______Data___/___/___

Observe os polígonos abaixo:

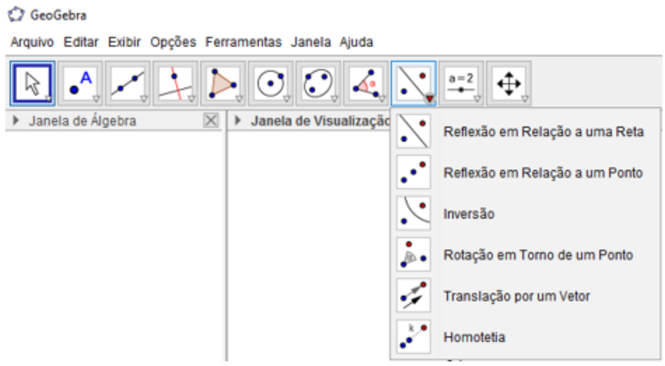


a) Escreva a matriz que contém as coordenadas dos vértices de cada polígono?
b) Qual transformação geométrica é aplicada no polígono ABCDEFGH e faz com que ele coincida com o polígono A'B'C'D'E'F'G'H'?
c) Escreva a matriz da transformação geométrica aplicada em ABCDEFGH.
d) Escreva a operação entre matrizes que descreve essa transformação.
e) Tente escrever de uma forma geral.
f) Essa transformação poderia ser representada por uma combinação de duas ou mais transformações? Em caso afirmativo descreva como.

Figura A.6 – Atividade 6

Nome:____Série:_______Data___/___/___

Utilizando o GeoGebra e as ferramentas indicadas na ilustração construa um polígono qualquer e aplique as seguintes transformações:



a) Translação de 2 unidades horizontais para direita e 3 unidades verticais para baixo
b) Reflexão em relação ao eixo das ordenadas.
c) Reflexão em relação ao eixo das abscissas.
d) Reflexão em relação a reta y = x (bissetriz dos quadrantes ímpares).
e) Reflexão em relação a reta y = -x (bissetriz dos quadrantes pares).
f) Rotação de 45° no sentido anti-horário.
g) Rotação de 90° no sentido anti-horário.
h) Rotação de 135° no sentido anti-horário.
i) Rotação de 180° no sentido anti-horário.
j) Rotação de 240° no sentido anti-horário.

Figura A.7 – Atividade 7

Nome:____Série:_______Data___/___/___

Ainda no GeoGebra crie as matrizes que representam cada uma das situações da atividade anterior e realize as operações com matrizes que descreve cada uma das transformações.

Figura A.8 – Atividade 8

Nome:____Série:_______Data___/___/___

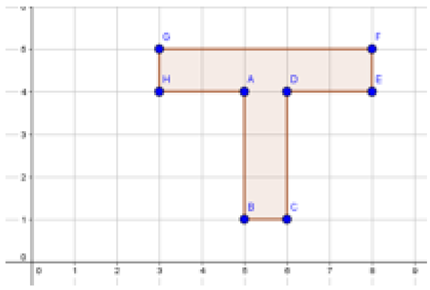
Uma reflexão deslizante é composta por uma reflexão seguida de uma translação na direção do eixo de reflexão ou uma translação seguida de uma reflexão com o eixo paralelo à direção de translação. Construa no GeoGebra uma figura e aplique nela uma reflexão deslizante, também descreva o processo através da álgebra matricial.

Figura A.9 – Atividade 9

Nome:____Série:_______Data___/___/___

Observe a letra maiúscula T, podemos determiná-la por 8 pontos que podem ter suas coordenadas armazenadas em uma Matriz de dados.

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 & 6 & 8 & 8 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 4 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$



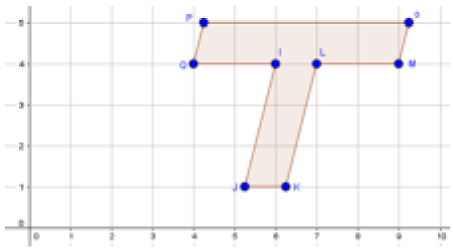
Ao multiplicarmos a matriz de dados T pela matriz

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtemos a matriz

$$NT = \begin{pmatrix} 6 & 5.25 & 6.25 & 7 & 9 & 9.25 & 4.25 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 4 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Ao marcamos os pontos indicados na matriz NT e ligarmos eles com a ferramenta "poligono", obtemos um *T* maiúsculo em itálico. Para uma melhor visualização devemos ocultar a figura original.



Agora construa uma letra e aplique o formato itálico como no procedimento acima.

Figura A.10 – Atividade 10

Nome:____Série:_______Data___/___/___

Obtenha uma matriz que realiza uma transformação composta por uma transformação de cisalhamento seguida de uma contração no eixo das abscissas com fator de 0,75. Em seguida, aplique essa transformação composta na figura que você construiu no exercício anterior.

ANEXO A – Avaliação da aprendizagem em processo

Acesse a Avaliação da Aprendizagem em Processo, prova do aluno – 2ª Série do Ensino Médio através do link:

<https://drive.google.com/file/d/0B1q1NDm0Hi3JUURuc2ZsRlhKTDQ/view>