



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Mayara de Moura Pesse

Cônicas: Classificação e Atividades com o *Software* GeoGebra

São José do Rio Preto

2017

Pesse, Mayara de Moura.

Cônicas: classificação e atividades com o *Software GeoGebra* /
Mayara de Moura Pesse. -- São José do Rio Preto, 2017
98 f. : il., tabs.

Orientador: Ermínia de Lourdes Campello Fanti. Dissertação
(Mestrado profissional) – Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Cônicas - Estudo e
ensino. 3. Geometria analítica. 4. Matemática – Ensino auxiliado pelo
computador. 5. GeoGebra I. Fanti, Ermínia de Lourdes Campello. II.
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de
Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Mayara de Moura Pesse

Cônicas: Classificação e Atividades com o *Software* GeoGebra

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientadora: Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti.

São José do Rio Preto

2017

Mayara de Moura Pesse

Cônicas: Classificação e Atividades com o *Software* GeoGebra

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti
UNESP - São José do Rio Preto - SP
Orientadora

Profa. Dra. Evelin Menegusso Barbaresco.
UNESP - São José do Rio Preto – SP

Profa. Dra. Ana Paula Tremura Galves
UFU-Universidade Federal de Uberlândia – MG

São José do Rio Preto
02 de março de 2017

Dedico este trabalho à minha família, amigos, colegas de trabalho, alunos, professores e à minha orientadora Ermínia, que foram de fundamental importância na realização deste sonho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela oportunidade que me deu de estudar, viver experiências importantes para minha formação e, principalmente, pela conclusão desse mestrado que é um sonho realizado.

Aos meus pais, Auriovalte e Izabel, e às minhas irmãs, Bárbara, Beatriz e Jessyca, que sempre me apoiaram, incentivaram e deram bons conselhos que procurei seguir para alcançar meus objetivos.

Ao meu marido João que sempre me apoiou e esteve comigo nos momentos alegres e difíceis que tive durante os estudos.

A todos os meus alunos que me motivaram a seguir esse caminho de professora. Eles me dão forças para ir mais além.

À minha orientadora Ermínia pela dedicação e empenho comigo durante esses estudos. Agradeço também a todos os professores do Profmat que lecionaram com muita competência e foram fundamentais para minha formação.

À CAPES pelo apoio financeiro concedido.

A todas as pessoas que me auxiliaram neste trabalho: Muito Obrigada!

“Não existem sonhos impossíveis para aqueles que realmente acreditam que o poder realizador reside no interior de cada ser humano, sempre que alguém descobre esse poder algo antes considerado impossível torna-se realidade.”

(Albert Einstein)

RESUMO

O estudo das cônicas (não degeneradas) Elipse, Hipérbole e Parábola é de grande importância não apenas na Matemática mas também em outras áreas afins, como Astronomia e Física. As cônicas estão presentes no nosso cotidiano, podemos encontrá-las, por exemplo, na arquitetura, na natureza, em alguns aparelhos utilizados na medicina e odontologia, em antenas de televisão, em faróis de automóveis, etc. As órbitas dos planetas ao redor do Sol têm formato de Elipses. Este trabalho aborda um estudo das cônicas, incluindo a classificação e uma análise de como esse assunto é tratado no Ensino Médio. Apresenta-se também propostas de atividades experimentais para serem desenvolvidas utilizando o software GeoGebra no estudo das mesmas, bem como o resultado da aplicação para uma turma de alunos da 3ª Série do Ensino Médio de uma escola pública estadual. Espera-se que as atividades aqui propostas possam contribuir para o estudo das cônicas no Ensino Médio, podendo ser utilizadas e adaptadas pelos professores da Educação Básica para serem desenvolvidas com os alunos, no Laboratório de Informática, de acordo com o nível de ensino e o conhecimento dos seus alunos.

Palavras-chave: Cônicas, Classificação, Ensino de Matemática, Atividades Experimentais com GeoGebra.

ABSTRACT

The study of the conics (not degenerated) Ellipse, Hyperbole and Parabola is of great importance not only in mathematics but also in other related areas, such as Astronomy and Physics. Conics are present in the our everyday life, we can find them, for example, in architecture, in some apparatus used in medicine and dentistry, television antennas, Car headlights, etc. The orbits of the planets around the Sun are shaped like Ellipses. This work approaches a study of the conics, including classification and an analysis of how this subject is treated in High School. It also presents proposals for experimental activities to be developed using software GeoGebra in their study, as well as the result of the application for a class of students in the 3rd Grade of High School of one public school of the state. It is hoped that the activities proposed here may contribute in the study of conics in High School, and may be used and adapted by teachers of Basic Education to be developed with the students, in the Laboratory of Informatics, according to the level of education and the knowledge of its students.

Keywords: Conics, Classification, Mathematics Teaching, Experimental Activities with GeoGebra.

Sumário

Introdução	10
1 Cônicas: introdução e classificação via Geometria Analítica	13
1.1 Elipse, Hipérbole e Parábola como lugar geométrico	13
1.2 Equações reduzidas e esboço das curvas	15
1.2.1 Equação reduzida e esboço da Elipse	15
1.2.2 Equação reduzida e esboço da Hipérbole	17
1.2.3 Equação reduzida e esboço da Parábola	18
1.3 Cônica: definição geral	20
1.4 Classificação das Cônicas via Geometria Analítica	22
1.4.1 Identificando Cônicas: Exemplos	28
2 Classificação das cônicas usando o Teorema Espectral	38
2.1 Classificação das Cônicas via diagonalização de matrizes - Teorema Espectral	40
2.1.1 Identificando Cônicas: Exemplos	47
2.1.2 Classificação das Cônicas - Versão Simplificada	60
3 O conteúdo Cônicas no Ensino Médio	65
3.1 Cônicas no Currículo do Estado de São Paulo e Caderno do Professor/Aluno	65
3.2 Cônicas na Avaliação da Aprendizagem em Processo (AAP)	73
3.2.1 Questões da AAP - 2016	73
3.2.2 Comentário acerca das questões apresentadas da Avaliação da Aprendizagem em Processo	75
3.3 Cônicas na Matriz de Referência para Avaliação do SARESP	76

3.4	Cônicas nos PCNEM e nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio	76
4	Cônicas: Atividades experimentais para o Ensino Médio	79
4.1	Sequências didáticas para o estudo das Cônicas	79
4.1.1	Atividade 1: Um estudo da Elipse utilizando o GeoGebra	80
4.1.2	Atividade 2: Um estudo da Hipérbole com o GeoGebra	82
4.1.3	Atividade 3: Um estudo da Parábola com o GeoGebra	84
4.2	Aplicação das Atividades em Sala de Aula	86
4.3	Questionário Online-sobre o desenvolvimento das atividades com o GeoGebra	92
	Considerações finais	96
	Referências	97

Introdução

O estudo das cônicas Elipse, Hipérbole e Parábola é de grande importância não apenas na Matemática, mas também em outras áreas afins, como Astronomia e Física. As cônicas estão presentes no nosso cotidiano; podemos encontrá-las, por exemplo, na arquitetura, na natureza, em alguns aparelhos utilizados na medicina e odontologia, em antenas de televisão, em espelhos/faróis de automóveis, etc.

A Elipse tem aplicações na área da saúde (por meio de um procedimento denominado litotripsia extracorpórea muito utilizado no tratamento de cálculo renal); no campo da acústica utilizada em igrejas, auditórios e teatros; em ótica estando presente em espelhos de forma elíptica usados em consultórios odontológicos e em Engenharia e Arquitetura na construção de arcos, igrejas e pontes.

Uma aplicação da hipérbole (e parábola) é na tecnologia dos telescópios. Observa-se que Galileu Galilei foi o primeiro cientista a construir um telescópio para observação astronômica (o telescópio refrator), que foi mais tarde aperfeiçoado por Isaac Newton e depois pelo astrônomo francês Cassegrain, chegando a sua forma atual (o telescópio refletor). O telescópio refletor nada mais é do que um espelho parabólico no fundo de um tubo, Newton colocou um espelho plano entre o espelho parabólico e o foco; Cassegrain utilizou um espelho hiperbólico no lugar do espelho plano, utilizado por Newton. (ÁVILA, 1997). O gráfico de uma transformação isotérmica (transformação gasosa que ocorre com a temperatura constante, enquanto as outras variáveis, pressão e volume, variam), colocando os valores da pressão no eixo das ordenadas e os valores do volume no eixo das abscissas, é representado por uma curva que é uma hipérbole (um dos ramos), uma vez que a pressão e o volume do gás, nesta transformação são inversamente propor-

cionais. O hiperboloide (sólido) originado a partir da rotação de uma hipérbole sobre seu eixo é utilizado na Engenharia Civil, na construção de torres de refrigeração de usinas nucleares. Por fim, outra importante utilização das hipérbolas é no sistema de localização em navegação, denominado de LORAN (Long Range Navigation - Navegação de Longa Distância). Este sistema permite a um navegante de um navio ou o piloto de um avião achar sua posição sem confiar em marcos visíveis.

A parábola têm aplicações na Engenharia de Comunicações em antenas parabólicas; na automobilística, estando presente em faróis de veículos; em fornos solares e também em telescópios. É amplamente utilizada por alguns arquitetos e engenheiros como, por exemplo, na “Igrejinha” da Pampulha, projeto do arquiteto Oscar Niemeyer. A trajetória de um objeto lançado de forma oblíqua na superfície terrestre nos dá também um exemplo de parábola. De fato, muitas situações do cotidiano podem ser descritas por uma função polinomial de segundo grau (conteúdo presente no Ensino Fundamental e Médio) cujo gráfico é uma parábola.

Tratados sobre as seções cônicas são conhecidos antes da época de Euclides. E, associado à história dessas curvas, temos o geômetra Grego Apolônio que nasceu por volta de 262 a.C., na cidade de Perga, no sul da Ásia Menor. A obra de Apolônio, intitulado “Secções Cônicas” é composta de oito livros com cerca de 400 proposições, sendo que somente os sete primeiros deles chegaram até a atualidade - os quatro primeiros em grego e os outros três numa tradução árabe do século IX - o desaparecido Livro VIII foi restaurado, por inferência, por Edmund Halley, que mais tarde (em 1710) deu uma tradução latina aos sete livros. A obra apresenta um estudo exaustivo das curvas: elipse, hipérbole e parábola, mas supera os trabalhos anteriores de Menaecmo, Aristeu e Euclides. Os nomes elipse, parábola e hipérbole foram introduzidos por Apolônio e foram tomados da terminologia pitagórica antiga referente à aplicação de áreas. (EVES, 2011, p. 198).

Este trabalho tem como objetivo um estudo das Cônicas, incluindo a classificação e uma análise de como esse assunto é tratado no Ensino Médio. Apresenta-se também propostas de atividades experimentais para serem desenvolvidas utilizando o software GeoGebra no estudo das mesmas, bem como o resultado da aplicação para uma turma de alunos da 3ª Série do Ensino Médio de uma escola pública estadual.

No Capítulo 1 inicialmente apresentamos uma introdução das cônicas (não degeneradas) Elipse, Hipérbole e Parábola, abordamos as definições (como lugar geométrico), as equações reduzidas, seus elementos, propriedades e apresentamos um esboço de cada uma delas. Na sequência, o conceito geral de Cônica é apresentado e um exemplo de cada tipo possível de Cônica (casos degenerados e não degenerados) é dado. Por fim, apresentamos um processo para o reconhecimento das Cônicas via Geometria Analítica, por meio de mudanças de variáveis, através de translação e rotação, bem como alguns exemplos. A referência básica para esse capítulo é Boulos e Camargo (2005).

No Capítulo 2 abordamos o reconhecimento das cônicas utilizando ferramentas de Álgebra Linear, autovalores e autovetores, diagonalização de matrizes (Teorema espectral). Apresentamos o Teorema de Classificação e exemplos. As referências para este capítulo são Callioli, Domingues e Costa (1995) e Hefez e Fernandes (2016). Os pré-requisitos (que não serão tratados aqui) podem ser vistos nas referências mencionadas.

No Capítulo 3 analisamos como o conteúdo Cônicas é abordado em alguns documentos oficiais (e avaliações) da Educação Básica: Currículo do Estado de São Paulo, Caderno do Professor/Aluno - SEE-SP, Matriz de Referência para a Avaliação do SARESP, Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.

No Capítulo 4 apresentamos propostas de atividades para o estudo das cônicas: Elipse, Hipérbole e Parábola, para serem desenvolvidas com alunos da 3ª Série do Ensino Médio, com auxílio do software GeoGebra, bem como o resultado de aplicação para uma turma de alunos de uma escola Estadual. É apresentado também o resultado de um questionário online sobre a forma em que o trabalho foi feito, ocasião em que os alunos puderam apresentar suas impressões a respeito do uso do software como ferramenta de ensino nas aulas de Matemática.

Por fim são apresentadas as considerações finais acerca deste trabalho e as referências bibliográficas.

Capítulo 1

Cônicas: introdução e classificação via Geometria Analítica

No estudo das cônicas são de grande destaque as conhecidas como Elipse, Hipérbole e Parábola. Neste capítulo definimos inicialmente essas cônicas (como lugar geométrico) e apresentamos, fixado um sistema ortogonal, as equações reduzidas e seus elementos. Na sequência, o conceito geral de cônica é apresentado e um processo para o reconhecimento de uma cônica a partir da sua equação, via Geometria Analítica (por meio de mudanças de variáveis, através de translação e rotação) é abordado. A referência básica para esse capítulo é Boulos e Camargo (2005).

1.1 Elipse, Hipérbole e Parábola como lugar geométrico

Definição 1.1.1. (*Lugar geométrico*): Denominamos **lugar geométrico** (*l.g.*) a um conjunto de pontos tais que todos eles e só eles possuem uma dada propriedade.

Definição 1.1.2. *Elipse*: é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante (maior que a distância entre os dois pontos fixos).

Mais precisamente, consideremos um plano π e dois pontos F_1 e F_2 (de π) tais que a distância entre F_1 e F_2 , $d(F_1, F_2) = 2c > 0$. Seja $a > c$. Ao conjunto de todos os pontos

P tais que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \quad (1.1)$$

dá - se o nome de **elipse**. Os pontos F_1 e F_2 são denominados **focos da elipse**.

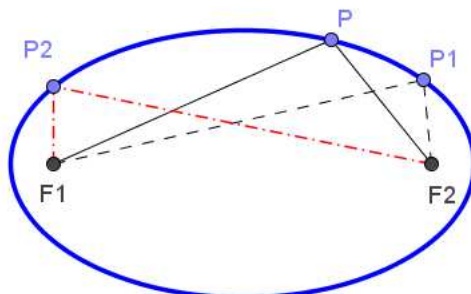


Figura 1.1 - Elipse.

Definição 1.1.3. **Hipérbole** é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias (em módulo) a dois pontos fixos é constante.

Mais especificamente, consideremos num plano π dois pontos F_1 e F_2 , distantes $2c > 0$ entre si. Seja $a \in \mathbb{R}$; $0 < a < c$. Ao conjunto dos pontos P de π tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \quad (1.2)$$

se dá o nome de **hipérbole**.

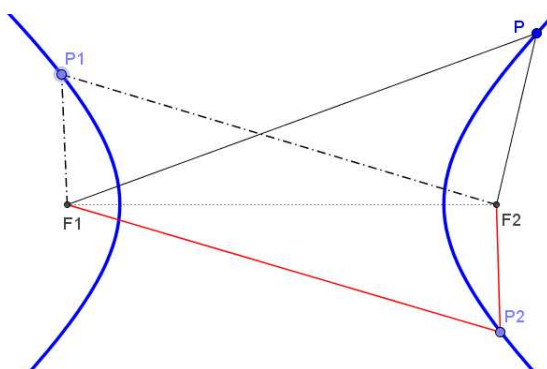


Figura 1.2 - Hipérbole.

Definição 1.1.4. **Parábola** é o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam de uma reta dada e de um ponto dado não pertencente a reta.

Assim, considerando num plano π um ponto F e uma reta r (fixos), tal que F não está sobre r , a **parábola** (associada a r e F) é o lugar geométrico dos pontos de π

equidistantes de F e r . O ponto F chama-se **foco** e a reta r chama-se **reta diretriz**. Chamamos **parâmetro da parábola**, e representamos por $2p$, a distância entre o foco F e a reta r , isto é;

$$d(P, F) = d(P, r) \quad (1.3)$$

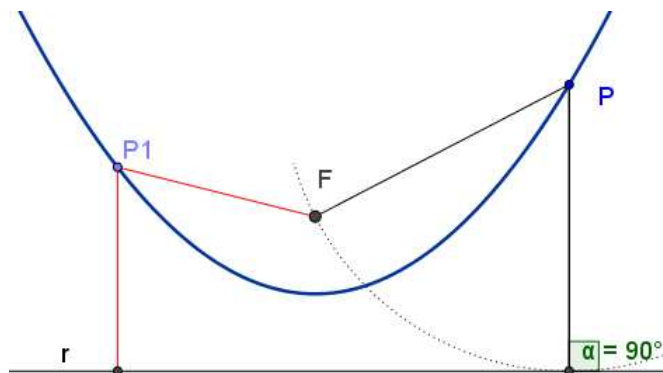


Figura 1.3 - Parábola.

1.2 Equações reduzidas e esboço das curvas

Tomemos um plano π e fixemos um sistema ortogonal $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Considerando este sistema ortogonal, dados $P = (x, y)$ e $Q = (x_0, y_0)$ pontos em π , temos que a distância entre P e Q é dada por

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

1.2.1 Equação reduzida e esboço da Elipse

Considere $c > 0$ e $a > c$. Suponhamos que os focos estejam centrados na origem e sobre o eixo OX , de modo que $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Vamos analisar a igualdade (1.1) para um ponto $P = (x, y)$.

$$\text{Tem-se: } d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

Daí, $\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$. Elevando os dois lados da igualdade anterior ao quadrado e simplificando temos: $a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx$. Elevando novamente ao quadrado e simplificando, resulta: $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$. Como $a^2 - c^2 \neq 0$ e $a^2 \neq 0$ (pois $a > c > 0$), podemos dividir por $a^2(a^2 - c^2)$. Daí, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$.

Considerando $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, então $b < a < c$ e $a^2 = b^2 + c^2$, e a equação se escreve na forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tal equação é denominada **equação reduzida** da elipse. Assim, se $P = (x, y)$ pertence a elipse, x e y satisfazem a equação acima. Reciprocamente, pode-se verificar que se $P = (x, y)$ satisfaz a equação anterior, então P é ponto da elipse.

Esboço da Elipse: Achemos as interseções da elipse com os eixos coordenados. *Interseções com OX:* fazendo $y = 0$, vem $x = \pm a$, logo os pontos de interseção com o eixo x são $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$.

Interseções com OY: fazendo $x = 0$, tem-se $y = \pm b$, logo os pontos de interseção com o eixo y são $B_1 = (0, -b)$, $B_2 = (0, b)$. Graças à simetria, podemos restringir-nos ao primeiro quadrante, onde $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq a$. Atribuindo valores a x entre 0 e a e calculando y , obtemos o esboço, onde $a^2 = b^2 + c^2$.

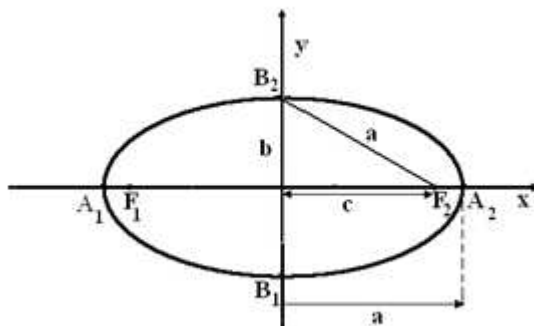


Figura 1.4 - Esboço da Elipse (centrada na origem)

Elementos da Elipse:

F_1, F_2 : focos

$2c$: distância focal ($= d(F_1, F_2)$)

A_1A_2 : eixo maior (é o segmento de comprimento $2a$ que contém os focos)

B_1B_2 : eixo menor ($B_1B_2 \perp A_1A_2$ no seu ponto médio)

O : centro (é o ponto médio do segmento F_1F_2)

A_1, A_2, B_1, B_2 : vértices

F_1F_2 : segmento focal

Observe que, se adotarmos um sistema ortogonal em que F_1 e F_2 estão no eixo OY , então teremos, de modo análogo, a seguinte equação reduzida:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Assim, por exemplo, a elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ tem focos no eixo OY , e a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ tem focos no eixo OX .

1.2.2 Equação reduzida e esboço da Hipérbole

Assim como a elipse, podemos encontrar a equação da hipérbole na forma reduzida. Dados $c > 0$, $0 < a < c$ e supondo que $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, isto é, que os focos estão sobre o eixo OX , após cálculos similares aos apresentados para a elipse, conclui-se que um ponto $P = (x, y)$ está na hipérbole, se e somente se, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$. Considerando $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, a equação na forma reduzida fica assim:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde $0 < b < c$ e $c^2 = a^2 + b^2$,

Esboço da Hipérbole: Ao acharmos a interseção com os eixos vemos que neste caso, o eixo OY não intersecta a curva enquanto que o eixo OX a intersecta nos pontos $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$. Novamente, graças à simetria, podemos restringir-nos ao primeiro quadrante, e aí

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \geq a.$$

As retas $r : y = \frac{b}{a}x$ e $s : y = -\frac{b}{a}x$ são denominadas **assíntotas da hipérbole**. As assíntotas são retas das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais, à medida que os pontos se afastam dos focos. Atribuindo valores a x e calculando y , obtemos o esboço, onde $c^2 = a^2 + b^2$.

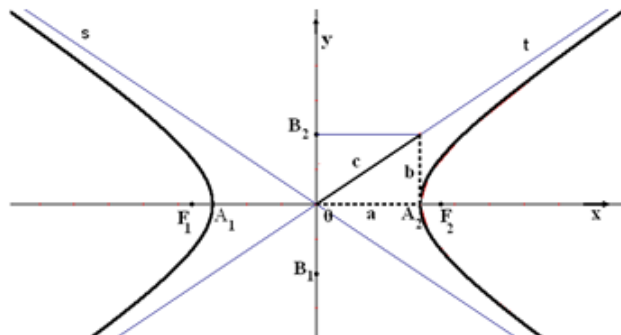


Figura 1.5 - Esboço da Hipérbole (centrada na origem)

Elementos da Hipérbole:

F_1, F_2 : focos

$2c$: distância focal

A_1A_2 : eixo transverso

B_1B_2 : eixo conjugado

O : centro (é o ponto médio do segmento F_1F_2)

A_1, A_2 : vértices

F_1F_2 : segmento focal

r e s : assíntotas

Note que, se adotarmos um sistema ortogonal em que F_1 e F_2 estão no eixo OY , obtemos a equação reduzida $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, onde $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ e, $r : y = \frac{a}{b}x$ e $s : y = -\frac{a}{b}x$ são, neste caso, as assíntotas da hipérbole.

Assim, por exemplo, $x^2 - y^2 = 2$ representa uma hipérbole com focos em OX e $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{100} = 1$ representa uma hipérbole com focos em OY .

1.2.3 Equação reduzida e esboço da Parábola

Definição 1.2.1. (*Distância entre ponto e reta*) Dados um ponto $P = (x_1, y_1)$ e uma reta r de equação $r : ax + by + c = 0$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que P não pertence a r , definimos a distância entre P e r como

$$d(P, r) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{a^2 + b^2}.$$

Vamos determinar a equação reduzida da parábola supondo que F esteja sobre o eixo OX , que a reta diretriz r seja paralela ao eixo OY , que a origem O seja o ponto médio de HF , onde H é a projeção ortogonal de F sobre r (ou seja, O é o “vértice” da parábola) e que F esteja à direita de r . Daí, como $2p = d(F, r)$, temos, neste caso, que $F = (p, 0)$ e $r : x = -p$. Logo, $P = (x, y)$ está na parábola se e somente se $d(P, F) = d(P, r)$, ou seja,

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \frac{|x+p|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$$

que, elevando ao quadrado e simplificando, é equivalente a

$$y^2 = 4px,$$

que é a equação reduzida da parábola, nas condições impostas.

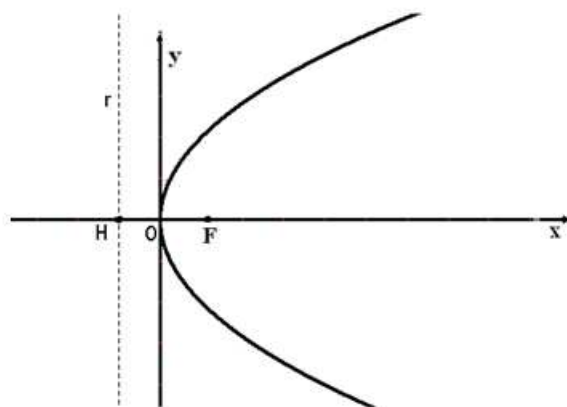


Figura 1.6 - Esboço da Parábola (centrada na origem)

Elementos da Parábola:

F : foco

r : reta diretriz

O : vértice (ponto médio do segmento HF)

$2p$: distância entre o foco F e a reta r , ($d(F, r)$ é a medida do segmento HF)

p : parâmetro ($p = d(F, r)/2$)

Observação: São também equações reduzidas da parábola:

$y^2 = -4px$: quando $F = (-p, 0)$ e $r : x = p$, de modo que $V = O$ e F pertence ao eixo OX estando a esquerda de r ;

$y = \frac{1}{4p}x^2$: quando $F = (0, p)$ e $r : y = -p$, de modo que $V = O$, F pertence ao eixo OY estando acima de r ;

$y = -\frac{1}{4p}x^2$: quando $F = (0, -p)$ e $r : y = p$, de modo que $V = O$, F pertence ao eixo OY estando abaixo de r .

Como pode ser observado, fixado um sistema ortogonal de coordenadas num plano π , os pontos das cônicas elipse, hipérbole ou parábola satisfazem uma equação do 2º grau em x e y . Isto conduz a uma definição mais geral de cônicas. Usualmente, após fixar o sistema ortogonal $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, identificamos o plano com \mathbb{R}^2 .

1.3 Cônica: definição geral

Definição 1.3.1. Fixado um sistema ortogonal de coordenadas num plano π , chama-se **cônica** ao lugar geométrico (curva) dos pontos $X = (x, y)$ de π que satisfazem uma equação do segundo grau

$$g(x, y) = 0, \quad \text{em que} \quad g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f. \quad (1.4)$$

Os termos com coeficientes ax^2 , bxy e cy^2 são chamados **termos quadráticos**, sendo bxy o **termo quadrático misto**, dx e ey são os **termos lineares** e f o **termo independente** de $g(x, y)$.

Faremos referência à equação apresentada em (1.4) como equação da cônica.

São exemplos de cônicas:

- Conjunto vazio: $x^2 + y^2 + 1 = 0$;
- Conjunto formado por um ponto: $(x - 1)^2 + y^2 = 0$ com solução $(1, 0)$;
- Reta: $(x + y)^2 = 0$ com $r : x + y = 0$;
- Reunião de duas retas paralelas: $(x + y)(x + y + 1) = 0$ com $r : x + y = 0$ e $s : x + y + 1 = 0$;
- Reunião de duas retas concorrentes: $(x - y)(x + y) = 0$ com $r : x - y = 0$ e $s : x + y = 0$;
- Circunferência: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ com centro em $C = (2, 3)$ e raio $r = 5$;

- Elipse: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$;
- Hipérbole: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$;
- Parábola: $y^2 = x$.

Nos primeiros cinco exemplos tem-se o que usualmente chamamos de *cônicas degeneradas*. Alguns autores referem duas retas paralelas ou um par de retas coincidentes ($ax^2 - b = 0$, com $a > 0$ e $b > 0$) e uma reta ($x^2 = 0$) como degenerações da parábola; um par de retas concorrentes como degeneração da hipérbole ($\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a}x$, com $a > 0$ e $b > 0$); um ponto como degeneração da elipse ($ax^2 + by^2 = 0$, com $a > 0$ e $b > 0$) e o vazio como degeneração da elipse ou parábola ($ax^2 + by^2 + r^2 = 0$, com $a > 0$, $b > 0$ e $r \neq 0$).

Dois perguntas que surgem naturalmente são:

1. Os tipos de cônicas que aparecem nos exemplos descritos acima são todos os possíveis?

2. Dada a equação de uma cônica, como fazer seu reconhecimento e seu esboço no plano (lugar geométrico)?

De fato, pode-se mostrar que os tipos apresentados são todos os possíveis. Uma prova (detalhada) disso será apresentada no Capítulo 2, no entanto, neste capítulo isto já pode ser observado. No que segue e no capítulo seguinte abordaremos como reconhecer uma cônica a partir de sua equação (classificação).

Observação 1.3.1. *Quando a equação da cônica não apresenta termo quadrático misto, em geral pode-se usar “completamento de quadrados” para fazer seu reconhecimento, como ilustrado no exemplo seguinte. De fato, o que se obtém no final é uma forma de translação.*

Ao completar quadrados, leva-se em conta os coeficientes quadráticos não nulos (de x e/ou y) apresentados na equação 1.4, observando que:

$$mx^2 + kx = m[x^2 + 2(k/2m)x] = m[(x^2 + 2(k/2m)x + (k/2m)^2 - (k/2m)^2)] = m[(x^2 + 2(k/2m)x + (k/2m)^2) - m(k/2m)^2] = m[x + k/2m]^2 - k^2/4m.$$

Exemplo 1.3.1. *Identifique a cônica de equação: $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$.*

Notemos que a equação $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$ não possui o termo quadrático misto. Vamos usar completamento de quadrados para identificar a cônica representada por essa equação. Temos,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0 &\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) - 1 - 1 + 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = -2. \end{aligned}$$

Esta última equação não tem solução, visto que o primeiro membro da equação é maior do que zero e o segundo é menor do que zero.

Então, a cônica dada pela equação inicial é o conjunto vazio, que é uma cônica degenerada.

1.4 Classificação das Cônicas via Geometria Analítica

No que segue é apresentado um processo (descrito em duas etapas), que consiste em usar mudanças de variáveis na equação da cônica a fim de tornar nulos o termo quadrático misto e os termos lineares, por meio de rotações e translações, transformando a equação em outra reduzida, visando facilitar a identificação da cônica e seu esboço. Esse procedimento é usualmente abordado no estudo de Cônicas na disciplina de Geometria Analítica. A bibliografia utilizada para esta parte foi Boulos e Camargo (2005). Observamos que, dependendo da equação, efetua-se uma ou outra etapa, ou ambas. Alguns exemplos ilustrando este processo também são apresentados.

Etapa 1: Eliminação dos termos lineares da equação da cônica por meio de uma translação (caso existam).

Sejam $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ e $\Sigma_2 = (O', \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, dois sistemas ortogonais de coordenadas tais que Σ_2 é obtido pela translação de Σ_1 para o ponto O' . Como as bases de Σ_1 e Σ_2 são iguais, a matriz de mudança de base é a matriz identidade 2×2 . Logo, se temos $O' = (h, k)_{\Sigma_1}$ e $P = (x, y)_{\Sigma_1} = (u, v)_{\Sigma_2}$, então as equações de translação de Σ_1 para O' são assim obtidas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = h + u \\ y = k + v \end{cases}$$

Dada uma equação

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

façamos a mudança de coordenadas proposta, substituindo x por $h + u$ e y por $k + v$.

Assim,

$$\begin{aligned} g(x, y) &= g(h + u, k + v) = \\ &= a(h + u)^2 + b(h + u)(k + v) + c(k + v)^2 + d(h + u) + e(k + v) + f = \\ &= au^2 + buv + cv^2 + (2ah + bk + d)u + (2ck + bh + e)v + (ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f) = 0. \end{aligned}$$

Vamos indicar a última equação (nas variáveis u e v) por $\bar{g}(u, v) = 0$ (que corresponde a $g(x, y) = 0$, após a substituição de $x = h + u$ e $y = k + v$). Assim, tem-se

$$\bar{g}(u, v) := \bar{a}u^2 + \bar{b}uv + \bar{c}v^2 + \bar{d}u + \bar{e}v + \bar{f} = 0,$$

onde: $\bar{a} = a$, $\bar{b} = b$, $\bar{c} = c$, $\bar{d} = 2ah + bk + d$, $\bar{e} = 2ck + bh + e$ e $\bar{f} = ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f$. Observe que:

(i) os coeficientes dos termos quadráticos após a translação não se alteram (são os mesmos de $g(x, y)$);

(ii) o termo independente (de u e v) é $\bar{f} = g(h, k)$.

Como queremos eliminar os termos lineares em u e v , devemos impor que $\bar{d} = 0$ e $\bar{e} = 0$, isso equivale a obter h e k tais que:

$$\begin{cases} ah + \frac{b}{2}k + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}h + ck + \frac{e}{2} = 0 \end{cases} \iff S : \begin{cases} ah + \frac{b}{2}k = -\frac{d}{2} \\ \frac{b}{2}h + ck = -\frac{e}{2} \end{cases}$$

Vamos estudar as soluções do sistema S através do determinante δ da matriz $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$, dos coeficientes:

$$\delta = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = ac - \frac{b^2}{4}.$$

Como o sistema tem duas equações e duas incógnitas (h e k), se o determinante $\delta \neq 0$ o sistema S tem uma única solução, caso contrário poderá ter infinitas ou nenhuma solução. Neste último caso não é possível eliminar os termos lineares por este processo e efetua-se diretamente a Etapa 2, descrita abaixo.

Se (h, k) é solução de S , então a expressão de $g(h, k)$ pode ser melhorada:

$$\begin{aligned}
 g(h, k) &= ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f = \\
 &= ah^2 + \frac{b}{2}hk + \frac{b}{2}hk + ck^2 + \frac{d}{2}h + \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + \frac{e}{2}k + f = \\
 &= h\left(ah + \frac{b}{2}k + \frac{d}{2}\right) + k\left(\frac{b}{2}h + ck + \frac{e}{2}\right) + \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f = \\
 &= h \cdot 0 + k \cdot 0 + \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f = \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f. \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

Portanto, $\bar{g}(u, v) = 0$ fica:

$$\bar{g}(u, v) = \bar{a}u^2 + \bar{b}uv + \bar{c}v^2 + \bar{f} = au^2 + buv + cv^2 + \left(\frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f\right) = 0. \quad (1.6)$$

Consideremos a seguinte matriz simétrica associada aos coeficientes:

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}.$$

Note que com as duas primeiras linhas de M_3 podemos escrever o sistema S (e encontrar a solução (h, k) de S). A terceira linha de M_3 tem os coeficientes da expressão simplificada (1.5) de $g(h, k)$.

Etapa 2: Eliminação do termo quadrático misto (caso exista) por meio de uma rotação

Sejam $\Sigma_1(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ um sistema ortogonal e

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

a equação de uma cônica neste sistema.

Considere $\Sigma_2 = (O, \vec{f}_1, \vec{f}_2)$ o sistema ortogonal de coordenadas obtido de Σ_1 por uma rotação de um ângulo θ radianos no sentido anti-horário (em torno do ponto O). Se $P = (x, y)_{\Sigma_1} = (x', y')_{\Sigma_2}$, a mudança de coordenadas é obtida considerando as equações

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

que rotaciona o sistema ortogonal $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ para $\Sigma_2 = (O, \vec{f}_1, \vec{f}_2)$ sob um ângulo de θ radianos, em sentido anti-horário, onde $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ é a matriz de mudança de base (matriz de rotação).

Assim,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow S' : \begin{cases} x' = x \cos \theta + y \text{sen} \theta \\ y' = -x \text{sen} \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

Temos que a matriz de mudança de base é ortogonal, isto é, $M^{-1} = M^t$.

Fazendo a mudança de coordenadas, isto é, tomando $x = x' \cos \theta - y' \text{sen} \theta$ e $y = x' \text{sen} \theta + y' \cos \theta$ na equação inicial, indicando por $g'(x', y') = 0$ a equação obtida nas variáveis x' e y' , e utilizando as identidades trigonométricas $\text{sen} 2\theta = 2 \text{sen} \theta \cos \theta$ e $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta$, obtemos:

$$g'(x', y') := a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0 \quad (1.7)$$

onde

$$\begin{cases} a' = a \cos^2 \theta + b \text{sen} \theta \cos \theta + c \text{sen}^2 \theta \\ b' = (c - a) \text{sen} 2\theta + b \cos 2\theta \\ c' = a \text{sen}^2 \theta - b \text{sen} \theta \cos \theta + c \cos^2 \theta \\ d' = d \cos \theta + e \text{sen} \theta \\ e' = -d \text{sen} \theta + e \cos \theta \\ f' = f. \end{cases} \quad (1.8)$$

Note que:

- Se $g(x, y)$ não possui os termos lineares (isto é, $d = e = 0$), então $g'(x', y')$ também não os apresentará ($d' = e' = 0$).
- O termo independente de $g(x, y)$ não se altera em $g'(x', y')$, isto é, $f = f'$.
- As expressões de d' e e' são similares às apresentadas em S' para x' e y' .

Vamos supor $b \neq 0$, pois, caso contrário, a equação inicial já não teria termo quadrático misto. Queremos que a rotação θ seja de tal modo que $b' = 0$, afim de que não exista mais o termo quadrático misto da equação (1.7). Note que para obter $b' = 0$ devemos tomar θ tal que $\text{sen} 2\theta \neq 0$, pois se θ é tal que $\text{sen} 2\theta = 0$, então $\cos 2\theta \neq 0$ e $b' = b \cos \theta \neq 0$, o que não é de interesse. Suponhamos então que θ seja tal que $\text{sen} 2\theta \neq 0$.

Então,

$$b' = 0 \iff (c - a)\text{sen}2\theta + b \cos 2\theta = 0 \iff \cotg 2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\text{sen}2\theta} = \frac{a - c}{b}. \quad (1.9)$$

E das igualdades em (1.8), obtém-se que

$$a' + c' = a(\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta) + c(\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) = a + c,$$

e ainda:

$$\begin{aligned} a' - c' &= a(\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) + 2b \text{sen} \theta \cos \theta + c(\text{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta) \\ &= a \cos 2\theta + b \text{sen} 2\theta - c \cos 2\theta = (a - c) \cos 2\theta + b \text{sen} 2\theta. \end{aligned}$$

Se θ satisfaz (1.9), então

$$a' - c' = b \cotg 2\theta \cos 2\theta + b \text{sen} 2\theta = b \left(\frac{\cos^2 2\theta}{\text{sen} 2\theta} + \text{sen} 2\theta \right) = \frac{b(\cos^2 2\theta + \text{sen}^2 2\theta)}{\text{sen} 2\theta} = \frac{b}{\text{sen} 2\theta},$$

isto é,

$$a' - c' = \frac{b}{\text{sen} 2\theta}.$$

Podemos utilizar a identidade $\text{sen}^2 2\theta = \frac{1}{1 + \cotg^2 2\theta}$ para calcular $\text{sen} 2\theta$, no entanto na extração da raiz quadrada temos a questão do sinal. Note que 2θ pode ser escolhido no intervalo $]0, \pi[$ para qualquer valor obtido para $\cotg 2\theta$, e neste caso $\text{sen} 2\theta > 0$ e $\theta \in]0, \pi/2[$. Vamos supor sempre que $2\theta \in]0, \pi[$ ($\Leftrightarrow \theta \in]0, \pi/2[$). De modo que,

$$\text{sen} 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 2\theta}} > 0 \quad (1.10).$$

Daí, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a' + c' = a + c \\ a' - c' = \frac{b}{\text{sen} 2\theta} \end{cases}$$

obtemos a' e c' (tais que $b' = 0$), e a equação toma a forma:

$$g'(x', y') = a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$$

ou

$$g'(x', y') = a'x'^2 + c'y'^2 + f' = 0,$$

caso a equação inicial seja tal que $d = e = 0$, uma vez que $d = e = 0 \implies d' = e' = 0$.

Observemos que para obter d' e e' não foi necessário conhecer o ângulo θ e, em geral é possível reconhecer a cônica inicial a partir dessa etapa (se já não existiam os termos lineares, isto é, $d = e = 0$).

Porém, se $d \neq 0$ e $e \neq 0$, para obter d' e e' é necessário conhecer o ângulo θ . Logo, devemos calcular:

$$\begin{cases} d' = d \cos \theta + e \operatorname{sen} \theta, \\ e' = -d \operatorname{sen} \theta + e \cos \theta. \end{cases} \quad (1.11)$$

Para determinar esses valores usa-se as seguintes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad e \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = \cot g 2\theta \operatorname{sen} 2\theta,$$

o fato de que $\cot g 2\theta$ e $\operatorname{sen} 2\theta$ já são conhecidos e que $\theta \in]0, \pi/2[$.

Brevemente, na prática, a aplicação do processo se dá da seguinte forma:

- Eliminar, se possível, os termos lineares (caso necessário) seguindo os passos da Etapa 1.

- Em seguida aplicar a Etapa 2 em uma equação que talvez já não tenha os termos lineares (para eliminar o termo quadrático misto, se existir).

- Assim, através da equação resultante fica fácil o reconhecimento da cônica.

Note que na Etapa 1 nem sempre conseguimos eliminar os termos lineares por meio de uma translação, pois há casos em que o sistema S é incompatível. Caso não seja possível eliminar os termos lineares aplica-se diretamente a Etapa 2 (para eliminar o termo quadrático misto), o que é sempre possível. Logo, através da equação resultante fica fácil o reconhecimento da cônica.

Neste processo de classificação de cônicas, se as duas etapas forem necessárias, na Etapa 1 (translação) eliminamos os termos lineares e a equação da cônica $g(x, y) = 0$ é transformada em $\bar{g}(u, v) = 0$. Na sequência, aplicamos a Etapa 2 (rotação) eliminamos o termo quadrático misto e esta última equação será transformada em $g'(u', v') = 0$.

1.4.1 Identificando Cônicas: Exemplos

Exemplo 1.4.1. Identifiquemos a cônica representada pela equação: $4x^2 + 6xy - 4y^2 + 20x - 20y - 19 = 0$.

Vamos inicialmente aplicar a **Etapa 1: Eliminação dos termos lineares da equação da cônica por meio de uma translação**. Temos que os coeficientes são: $a = 4$, $b = 6$, $c = -4$, $d = 20$, $e = -20$, $f = -19$.

Neste caso, a matriz simétrica associada aos coeficientes da equação da cônica é:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 3 & -4 & -10 \\ 10 & -10 & -19 \end{pmatrix}$$

Considerando a mudança de coordenadas $x = h + u$ e $y = k + v$ vemos que, para encontrar o ponto (h, k) de translação, temos que resolver o sistema (em h e k), obtido a partir das duas primeiras linhas de M_3 :

$$\begin{cases} 4h + 3k + 10 = 0 \\ 3h - 4k - 10 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema segue que $k = -\frac{14}{5}$ e $h = -\frac{2}{5}$, assim $(h, k) = (-\frac{2}{5}, -\frac{14}{5})$.

Notemos que,

$$g(h, k) = \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f = 10h - 10k - 19 = 10(-\frac{2}{5}) - 10(-\frac{14}{5}) - 19 = -4 + 28 - 19 = 5.$$

Logo, a equação inicial se reduz, no novo sistema, a:

$$\bar{g}(u, v) = 4u^2 + 6uv - 4v^2 + 5 = 0.$$

Etapa 2: Eliminação do termo quadrático misto por meio de uma rotação.

As mudanças de coordenadas agora são dadas por $u = u'\cos\theta - v'\sin\theta$ e $v = u'\sin\theta + v'\cos\theta$. Consideremos 2θ em $]0, \pi[$, de modo que $\sin 2\theta > 0$, e tem-se

$$\cotg 2\theta = \frac{a - c}{b} = \frac{4 + 4}{6} = \frac{4}{3} > 0,$$

$$\sin 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Resolvendo o sistema } \begin{cases} a' + c' = a + c = 0 \\ a' - c' = \frac{b}{\operatorname{sen}2\theta} = 10 \end{cases}$$

obtemos $a' = 5$ e $c' = -5$. Assim, temos

$$g'(u', v') = 5u'^2 - 5v'^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow v'^2 - u'^2 = 1.$$

A equação acima representa uma hipérbole e, conseqüentemente, a cônica dada pela equação inicial no exemplo é uma hipérbole.

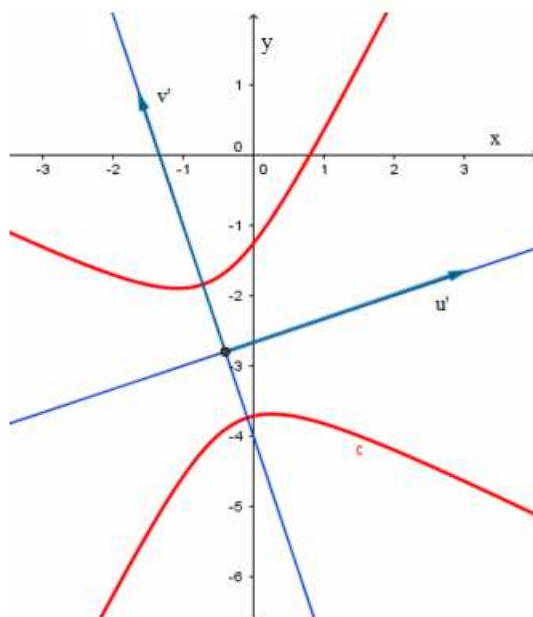


Figura 1.7 - Hipérbole dada pela equação $4x^2 + 6xy - 4y^2 + 20x - 20y - 19 = 0$

Observação 1.4.1. (i) Para determinar o ângulo θ de rotação, na Etapa 2 acima, observemos que:

$$\operatorname{sen}2\theta = 4/3 \text{ e } \operatorname{cotg}2\theta = 3/5 \Rightarrow \operatorname{cos}2\theta = \operatorname{sen}2\theta \cdot \operatorname{cos}2\theta = 4/3 \cdot 3/5 = 4/5.$$

Daí, usando que

$$\begin{cases} \operatorname{cos}^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \operatorname{cos}2\theta = \frac{4}{5} \\ \operatorname{cos}^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1, \end{cases}$$

obtemos que $\operatorname{cos}\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, de modo que $\theta \approx 18,43^\circ$, e matriz de rotação é dada por

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{cos}\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \operatorname{cos}\theta \end{pmatrix}.$$

(ii) A representação nos eixos OX e OY da cônica dada no exemplo, partindo da cônica obtida pela equação reduzida, pode ser assim obtida: traçamos a cônica centrada (vide hipérbole apresentada, na Figura 1.8, pontilhada e na cor preta), de equação reduzida

$$-x^2 + y^2 = 1.$$

Em seguida, efetuamos a rotação no sentido anti-horário desta cônica, em torno da origem $((0,0)$ dos eixos OX e OY), pelo ângulo de rotação dado em (i), $\theta \approx 18,43^\circ$. Obtém-se então a cônica representada pela cor azul de traço contínuo (Figura 1.8), que terá equação:

$$4x^2 + 6xy - 4y^2 + 5 = 0.$$

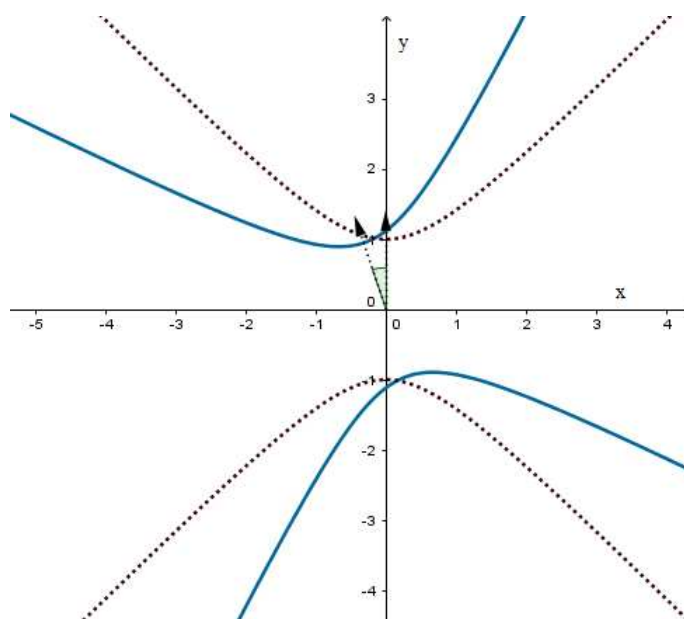


Figura 1.8 - Esboçando a Hipérbole - Rotação

Agora trasladando essa cônica pelo vetor $(-\frac{2}{5}, -\frac{14}{5})$, a cônica resultante que está representada na cor vermelha (na Figura 1.9 seguinte) é a relativa a equação dada inicialmente.

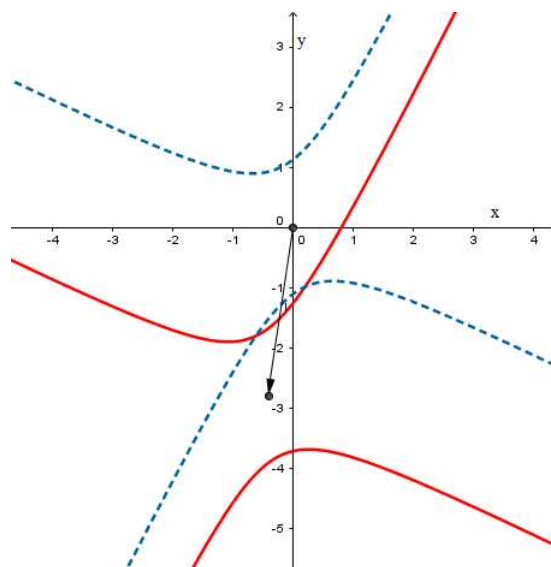


Figura 1.9 - Esboçando a Hipérbole - Translação

Quando a equação não apresenta termos lineares aplica-se apenas a Etapa 2 como mostrado no exemplo seguinte:

Exemplo 1.4.2. Identifiquemos a cônica dada pela equação $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 12 = 0$.

Etapa 2: Eliminação do termo quadrático misto por meio de uma rotação. Para essa equação os coeficientes são: $a = 5, b = 4, c = 2, f = -12$. Vamos fazer a mudança de coordenadas $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$ e $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$. Por (1.9) e (1.10), temos que

$$\cotg 2\theta = \frac{a - c}{b} = \frac{5 - 2}{4} = \frac{3}{4} > 0.$$

Então, tomando 2θ em $]0, \pi[$ segue que $\sen 2\theta > 0$ de modo que

$$\sen 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} > 0.$$

$$\text{Assim, } \begin{cases} a' + c' = a + c = 5 + 2 = 7 \\ a' - c' = \frac{b}{\sen 2\theta} = \frac{4}{\frac{4}{5}} = \frac{20}{4} = 5. \end{cases}$$

Resolvendo obtém-se $a' = 6$ e $c' = 1$ ($b' = d' = e' = 0$ e $f' = f = -12$) e a equação em x' e y' é dada por:

$$g'(x', y') = a'x'^2 + b'y'^2 + f' = 0 \Leftrightarrow 6x'^2 + y'^2 - 12 = 0,$$

que é equivalente a

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{12} = 1.$$

Portanto, no novo sistema de coordenadas (x', y') temos uma elipse, centrada na origem com semieixos coordenados medindo $\sqrt{2}$ e $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Assim, a cônica inicial é também uma elipse obtida da última elipse por uma rotação (do ângulo θ que surge naturalmente durante o desenvolvimento da Etapa 2, θ é tal que $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$ e $\sin 2\theta = \frac{4}{5}$).

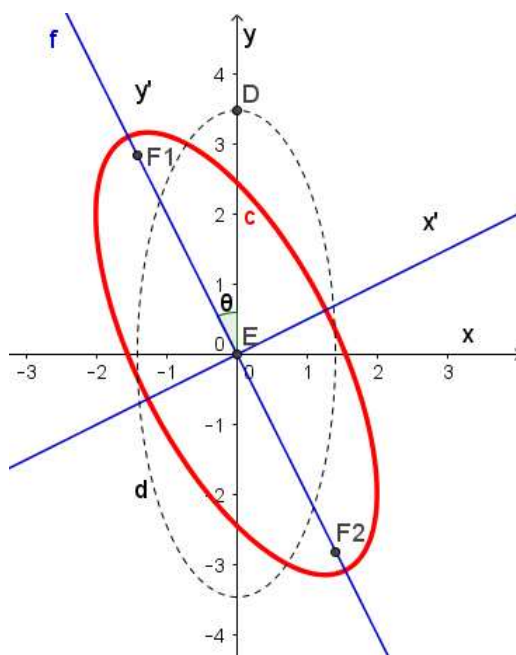


Figura 1.10 - Elipse dada pela equação $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 12 = 0$

Exemplo 1.4.3. Identifiquemos a cônica com equação: $x^2 - 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0$.

Etapa 1: Eliminação dos termos lineares da equação da cônica por meio de uma translação.

Os coeficientes da equação da cônica são: $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$, $d = -8\sqrt{2}$, $e = -8\sqrt{2}$, $f = 0$.

A matriz (simétrica) associada aos coeficientes é:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4\sqrt{2} \\ -1 & 1 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que resolver o sistema obtido a partir das duas primeiras linhas de M_3 :

$$\begin{cases} h - k = 4\sqrt{2} \\ -h + k = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Mas, este sistema é incompatível/impossível. Logo, não conseguimos eliminar os termos lineares de acordo com a Etapa 1. Vamos aplicar então a Etapa 2 a fim de eliminar o termo quadrático misto.

Etapa 2: Eliminação do termo quadrático misto por meio de uma rotação. Consideremos a mudança de coordenadas $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$ e $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$. Tomando 2θ em $]0, \pi[$ segue que $\sin 2\theta > 0$ e obtém-se

$$\cotg 2\theta = \frac{a - c}{b} = \frac{1 - 1}{-2} = 0,$$

de modo que

$$\sin 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1.$$

$$\text{Resolvendo o sistema} \begin{cases} a' + c' = a + c = 2 \\ a' - c' = \frac{b}{\sin 2\theta} = -2 \end{cases}$$

obtemos $a' = 0$ e $c' = 2$.

Como aplicamos a Etapa 2 para uma equação com termos lineares não nulos ($d \neq 0$ e $e \neq 0$), precisamos calcular d' e e' em (1.11). Para tanto precisamos conhecer os valores de $\sin\theta$ e $\cos\theta$ e, conseqüentemente, o ângulo de rotação da cônica. Temos:

$$\cos 2\theta = \sin 2\theta \cdot \cotg 2\theta = 1 \cdot 0 = 0,$$

Daí $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta = 0$ e usando que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, segue que $\cos^2\theta = \frac{1}{2} = \sin^2\theta$. Como estamos tomando $2\theta \in]0, \pi[\Leftrightarrow \theta \in]0, \pi/2[$, temos que $\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$. Assim,

$$d' = d \cdot \cos \frac{\pi}{4} + e \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -16,$$

$$e' = -d \cdot \sin \frac{\pi}{4} + e \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Substituindo na equação inicial (e considerando o novo sistema cartesiano em x', y') obtemos

$$g'(x', y') = 0x'^2 + 2y'^2 - 16x' + 0 \cdot y' = 2y'^2 - 16x' = 0,$$

que é equivalente a

$$y'^2 = 8x',$$

que é a equação de uma parábola não transladada, rotacionada por $\theta = \frac{\pi}{4}$ no sentido anti-horário.

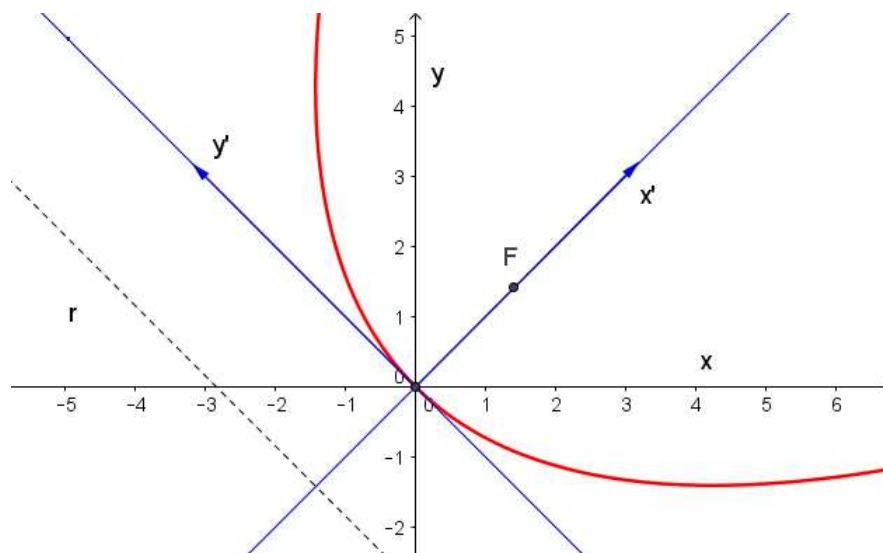


Figura 1.11 - Parábola dada pela equação $x^2 - 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0$

Exemplo 1.4.4. Identifiquemos a cônica de equação: $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$.

Etapa 1: Eliminação dos termos lineares da equação da cônica por meio de uma translação.

Neste caso, os coeficientes da equação são: $a = 7$, $b = 6$, $c = -1$, $d = 28$, $e = 12$, $f = 28$. Consideremos a matriz (simétrica) associada aos coeficientes:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 14 \\ 3 & -1 & 6 \\ 14 & 6 & 28 \end{pmatrix}$$

Para encontrar o ponto (h, k) de translação temos que resolver o sistema (em h e k), obtido a partir das duas primeiras linhas de M_3 :

$$\begin{cases} 7h + 3k + 14 = 0 \\ 3h - k + 6 = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação temos que $k = 3h + 6$. Substituindo na primeira equação:

$$7h + 3(3h + 6) + 14 = 0 \Leftrightarrow 7h + 9h + 18 + 14 = 0 \Leftrightarrow 16h = -32 \Leftrightarrow h = -2.$$

Como $k = 3h + 6$, então $k = 3(-2) + 6 = -6 + 6 = 0$. Assim, $(h, k) = (-2, 0)$.

Notemos que, $\bar{f} = g(h, k) = \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f = 14h + 6k + 28 = 14(-2) + 6.0 + 28 = 28 - 28 = 0$ e a equação, nos eixos u e v , se reduz a:

$$\bar{g}(u, v) = 7u^2 + 6uv - v^2 = 0.$$

Etapa 2: Eliminação do termo quadrático misto por meio de uma rotação. Por (1.9) e (1.10) temos, tomando 2θ em $]0, \pi[$ que $\cotg 2\theta = \frac{a-c}{b} = \frac{7-(-1)}{6} = \frac{4}{3} > 0$, $\text{sen} 2\theta > 0$ e assim,

$$\text{sen} 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{9}}} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Substituindo obtemos} \quad \begin{cases} a' + c' = a + c = 6 \\ a' - c' = \frac{b}{\text{sen} 2\theta} = 10 \end{cases}$$

Daí, $a' = 8$ e $c' = -2$ e, como a equação $\bar{g}(u, v)$ não tem termo constante, a equação no novo sistema (com eixos u' e v') é dada por

$$g'(u', v') = 8u'^2 - 2v'^2 = 0 \Leftrightarrow 4u'^2 - v'^2 = (2u' + v')(2u' - v') = 0,$$

o que nos dá um par de retas concorrentes. Isso significa que a cônica inicial representa também um par de retas concorrentes (transladadas por $(-2, 0)$ e rotacionadas pelo ângulo θ tal que $\cos 2\theta = \frac{4}{5}$ e $\text{sen} 2\theta = \frac{3}{5}$).

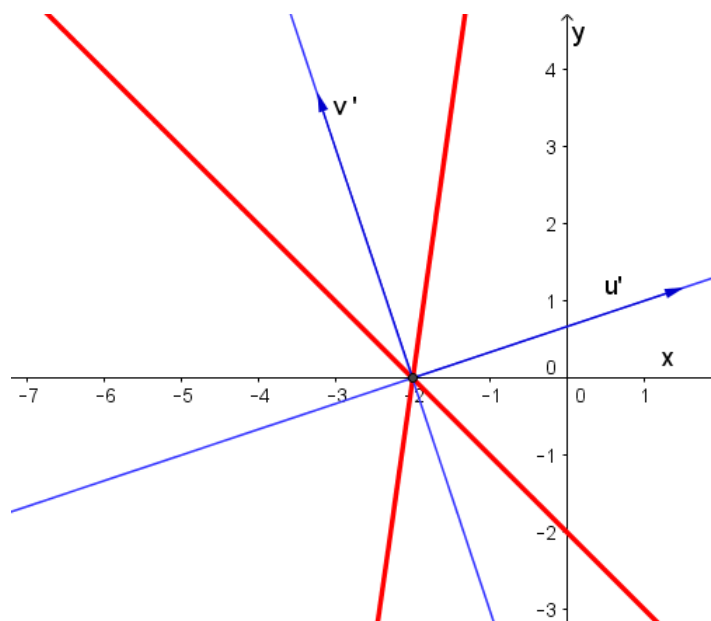


Figura 1.12 - Retas dadas pela equação $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$

Exemplo 1.4.5. Determinar a cônica representada pela equação $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$.

Etapa 1: Eliminação dos termos lineares da equação da cônica por meio de uma translação. Temos que os coeficientes da equação da cônica são: $a = 1, b = 0, c = 1, d = -6, e = 4, f = 13$.

Consideremos as equações de translação: $\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$. Substituindo, temos:

$$(u + h)^2 + (v + k)^2 - 6(u + h) + 4(v + k) + 13 = 0.$$

Elevando ao quadrado e agrupando, obtemos:

$$\bar{g}(u, v) := u^2 + v^2 + (2h - 6)u + (2k + 4)v + (h^2 + k^2 - 6h + 4k + 13) = 0.$$

Assim,

$$\bar{a} = a = 1; \quad \bar{b} = b = 0; \quad \bar{c} = c = 1; \quad \bar{d} = 2h - 6; \quad \bar{e} = 2k + 4; \quad \bar{f} = h^2 + k^2 - 6h + 4k + 13.$$

Temos, $\bar{a}u^2 + \bar{b}uv + \bar{c}v^2 + \bar{d}u + \bar{e}v + \bar{f} = 0$.

Queremos eliminar os termos lineares, ou seja, devemos ter $\bar{d} = \bar{e} = 0$. Logo,

$$\begin{cases} 2h - 6 = 0 \\ 2k + 4 = 0, \end{cases}$$

obtemos $h = 3$ e $k = -2$, ou seja, $(h, k) = (3, -2)$.

Como $\bar{f} = h^2 + k^2 - 6h + 4k + 13$ e $(h, k) = (3, -2)$, temos que:

$$\bar{f} = 3^2 + (-2)^2 - 6 \cdot 3 + 4(-2) + 13 = 9 + 4 - 18 - 8 + 13 = 26 - 26 = 0.$$

Assim, as equações de translação são: $\begin{cases} x = u + 3 \\ y = v - 2 \end{cases}$

e a equação (em u e v) é dada por $\bar{g}(u, v) = u^2 + v^2 + 0 = 0$, cuja solução é $(u, v) = (0, 0)$ que representa a cônica degenerada dada pelo conjunto $\{(0, 0)\}$. De modo que a cônica (em relação aos eixos x e y , dada pela equação inicial) é também degenerada, dada pelo conjunto formado pelo ponto $(x, y) = (3, -2)$, como ilustrado na figura seguinte.

Notemos que não foi necessário realizar a Etapa 2, pois a equação inicial não possuía termo quadrático misto.

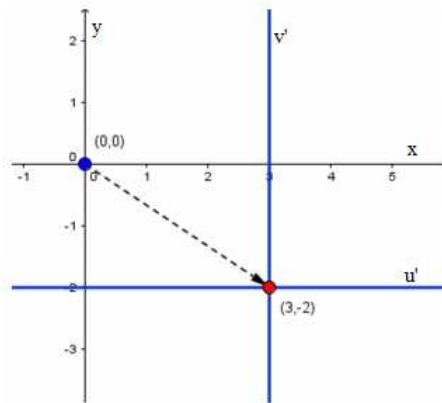


Figura 1.13 - Cônica (degenerada) dada pelo conjunto unitário $\{(3, -2)\}$

Completando quadrados: Note que poderíamos reconhecer a cônica por completamento de quadrados, como já observado anteriormente. Neste caso teríamos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0 &\Leftrightarrow (x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) + 13 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 + 13 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (3, -2), \end{aligned}$$

Capítulo 2

Classificação das cônicas usando o Teorema Espectral

Neste capítulo abordaremos a classificação de cônicas usando o Teorema Espectral, mais precisamente “diagonalização de matrizes simétricas”. Para tanto, alguns pré-requisitos de Álgebra Linear serão necessários, destacam-se espaços vetoriais, transformações lineares/operadores lineares, autovalores, autovetores, diagonalização de operadores e o Teorema Espectral. Porém, como as matrizes simétricas envolvidas são do tipo 2×2 tudo se torna bastante simples. As referências para este capítulo são Callioli, Domingues e Costa (1995), e Hefez e Fernandes (2016). Os pré-requisitos (não abordados aqui) podem ser vistos nestas referências.

Inicialmente enunciaremos o Teorema Espectral e apresentaremos a prova do teorema na forma matricial para $n = 2$.

Teorema 2.0.1. (Teorema Espectral): *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre \mathbb{R} com produto interno. Se $T : V \rightarrow V$ é um operador simétrico (isto é, tal que $\langle T(v), u \rangle = \langle v, T(u) \rangle, \forall u, v \in V$), então existe uma base ortonormal β de V tal que $(T)_\beta$ é matriz diagonal, onde $(T)_\beta = (T)_{\beta, \beta}$ indica a matriz de T em relação a base β . (Hefez e Fernandes, 2016, p. 253)*

Teorema 2.0.2. (Teorema Espectral, versão matricial): *Se $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$ é simétrica, então existe uma matriz ortogonal $P \in M_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $P^{-1}AP (= P^t AP)$ é matriz diagonal. (Hefez e Fernandes, 2016, p. 254)*

O Teorema Espectral (versão matricial) quando $n = 2$, é bastante simples, como mostra a proposição seguinte:

Teorema 2.0.3. (Teorema Espectral, caso $n=2$) Toda matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} a & k \\ k & c \end{pmatrix}$ já é diagonal se $k = 0$, ou é diagonalizável com autovalores λ_1 e λ_2 distintos se $k \neq 0$. De modo que existe uma base β ortonormal de autovetores e $P = (I)_{\beta, \alpha}$ é a matriz que diagonaliza A , sendo α a base canônica do \mathbb{R}^2 .

Demonstração: Temos que o polinômio característico da matriz A é:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} a-t & k \\ k & c-t \end{vmatrix} = (a-t)(c-t) - k^2 = t^2 - (a+c)t + (ac - k^2).$$

Para obter os autovalores temos que encontrar as raízes de $P_A(t)$. Notemos que $\Delta = (a+c)^2 - 4(ac - k^2) = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac + 4k^2 = (a-c)^2 + 4k^2 \geq 0$ e

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ e \\ k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (e nesse caso todo vetor não}$$

nulo é auto vetor). Para $k \neq 0$ temos $\Delta > 0$ e assim $P_A(t)$ possui duas raízes reais distintas λ_1 e λ_2 e, necessariamente, $\dim V(\lambda_1) = 1$ e $\dim V(\lambda_2) = 1$, de modo que existe uma base β ortonormal de autovetores, A será diagonalizável e $P = (I)_{\beta, \alpha}$ é a matriz que diagonaliza A , pois $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. ■

Observação 2.0.1. Notemos que, no teorema acima, se λ_1, λ_2 são autovalores distintos, dados v_i autovetor associado a $\lambda_i (i = 1, 2)$, do fato da matriz A ser simétrica (ou equivalentemente, o operador associado $T_A \equiv A$, dado por $T_A(x, y) = [A \cdot (x \ y)^t]^t$, ser simétrico) segue que v_1 e v_2 são ortogonais. De fato,

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle - \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \langle Av_1, v_2 \rangle - \langle v_1, Av_2 \rangle = \\ &= \langle Av_1, v_2 \rangle - \langle Av_1, v_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Logo, para $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$ implica que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, ou seja, v_1 e v_2 são ortogonais. Assim, $\beta = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\}$ será uma base ortonormal.

2.1 Classificação das Cônicas via diagonalização de matrizes - Teorema Espectral

Consideremos a equação geral do segundo grau nas duas variáveis x e y :

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (2.1)$$

onde a, b, c, d, e e f são números reais dados (com pelo menos um dos coeficientes a, b ou c não nulo). Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \quad e \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Note que a matriz A é simétrica e a equação $g(x, y) = 0$ pode ser reescrita na forma matricial como:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = \\ &= X^t A X + (d \ e) X + f = 0, \quad (2.2) \end{aligned}$$

em que f e 0 indicam matrizes do tipo 1×1 .

Como $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$ é simétrica então A é diagonalizável e existe uma base ortonormal β de \mathbb{R}^2 formada por autovetores de A , associados aos autovalores λ_1, λ_2 .

Algumas observações importantes:

1) Na classificação de cônicas via abordagem de Álgebra Linear por diagonalização de operadores, que apresentaremos a seguir, o interesse é no caso em que a equação da cônica possui o termo xy (isto é, $b \neq 0$), pois se $b = 0$ a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, já é uma matriz diagonal. E a classificação/reconhecimento de uma cônica dada por uma equação que não tem o termo xy , pode-se em geral ser obtida completando quadrados.

2) Uma vez obtidos λ_1 e λ_2 (distintos), uma base ortonormal β associada a esses autovalores terá, por exemplo, a forma $\beta = \{v_1 = (x_0, y_0); v_2 = (y_0, -x_0)\}$, já que os vetores são ortogonais, e deve-se ter $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Neste caso, a matriz ortogonal

$P = (I_{\mathbb{R}^2})_{\beta, \alpha}$ (com α sendo a base canônica do \mathbb{R}^2), será da forma $P = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ y_0 & -x_0 \end{pmatrix}$, com $\det(P) = -1$, que é uma matriz de reflexão. No entanto podemos escolher os vetores ortonormais, de modo que a matriz P seja uma matriz de rotação do tipo $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, com $\det(P)=1$; basta considerar a base ortonormal $\beta' = \{v_1 = (x_0, y_0); -v_2 = (-y_0, x_0)\}$. Observamos que tanto a base β quanto a base β' podem ser usadas no processo de classificação dado no teorema seguinte. No entanto, para o esboço da cônica a partir das equações reduzidas esse fato (de que $\det(P) = 1$ ou -1) deve ser levado em consideração. No Exemplo 2.1.1, apresentado após o teorema, ilustramos como isso ocorre.

Teorema 2.1.1. (Classificação das Cônicas) Considere a equação de uma cônica

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

(sendo a, b ou c não nulo). Sejam λ_1, λ_2 os autovalores associados a matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}. \text{ Se:}$$

(I) $\lambda_1\lambda_2 = 0$, então a cônica é uma parábola ou os casos degenerados dados pelo conjunto vazio, duas retas paralelas ou um par de retas coincidentes.

(II) $\lambda_1\lambda_2 > 0$, então a cônica é uma elipse ou um ponto ou o conjunto vazio.

(III) $\lambda_1\lambda_2 < 0$, então a cônica é uma hipérbole ou um par de retas concorrentes.

Demonstração: Como já observamos acima, como $A \in M_{\mathbb{R}}(2)$ é simétrica existe, pelo Teorema Espectral, uma base ortonormal β de \mathbb{R}^2 formada por autovetores de A (associados a autovalores λ_1, λ_2) e a matriz ortogonal $P = (I_{\mathbb{R}^2})_{\alpha, \beta}$ (com α sendo a base canônica do \mathbb{R}^2) que diagonaliza A (ortogonalmente). Isto é,

$$P^{-1}AP = P^tAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D, \quad (2.3)$$

com D a matriz diagonal.

Se $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [v]_{\alpha}$ indica as coordenadas de um vetor genérico v na base α ,

então $P^tX = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (I_{\mathbb{R}^2})_{\alpha, \beta} \cdot [v]_{\alpha} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Y$ é a matriz das coordenadas

de um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ em relação a nova base β , isto é, $[v]_\beta = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Notemos que $P^t X = Y$ implica, multiplicando ambos os membros por P , que $X = PY$ (que representa a mudança de base determinada por P). Ainda, considerando a transposta das matrizes nas igualdades $X = PY$ e $P^t X = Y$, tem-se $X^t = Y^t P^t$ e $X^t P = Y^t$ (ou equivalentemente, $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}$)

Com estas considerações, a equação (2.2) $g(x, y) = X^t A X + (d \ e) X + f = 0$ se transforma em

$$\begin{aligned} & Y^t (P^t A P) Y + (d \ e) P Y + f = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (d \ e) P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f = 0 \\ \Leftrightarrow & g'(x', y') := \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d' x' + e' y' + f = 0 \quad (2.4), \end{aligned}$$

onde d' e e' são expressos em função de d , e e dos elementos da matriz P . A mudança de base determinada por P (para a eliminação do termo xy) corresponde geometricamente a uma rotação (se tomarmos β de forma que $\det(P) = 1$).

Vamos agora reconhecer a cônica dada pela equação (2.4).

Gostaríamos de destacar que o processo, grosseiramente falando, consistirá em “completar quadrados” na equação (2.4).

Considere os autovalores λ_1 e λ_2 . Temos que analisar três casos:

- (I) $\lambda_1 \lambda_2 = 0$,
- (II) $\lambda_1 \lambda_2 > 0$,
- (III) $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.

Vejam os:

(I) $\lambda_1 \lambda_2 = 0$

Note que não podemos ter λ_1 e λ_2 nulos, pois caso isso aconteça, teríamos de (2.3) que $A = P \cdot D \cdot P^t$ seria nula, o que é um absurdo.

Suponhamos $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ (o raciocínio é análogo para $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$).

A equação (2.4) fica

$$\lambda_2 y'^2 + d' x' + e' y' + f = 0. \quad (2.5)$$

Temos, então, dois casos a considerar: $d' = 0$ ou $d' \neq 0$.

(I) (i) $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ ($\lambda_1\lambda_2 = 0$) e $d' = 0$.

A equação acima transforma-se em

$$\lambda_2 y'^2 + e' y' + f = 0.$$

Completando quadrado, esta equação pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \lambda_2 y'^2 + e' y' + f + \frac{e'^2}{4\lambda_2^2} - \frac{e'^2}{4\lambda_2^2} &= 0 \iff \\ \iff \lambda_2 \left(y'^2 + \frac{e' y'}{\lambda_2} + \frac{e'^2}{4\lambda_2^2} \right) + f - \frac{e'^2}{4\lambda_2^2} &= 0 \iff \\ \iff \lambda_2 \left(y' + \frac{e'}{2\lambda_2} \right)^2 + f - \frac{e'^2}{4\lambda_2^2} &= 0. \end{aligned}$$

Logo, a translação

$$x'' = x' \quad e \quad y'' = y' + \frac{e'}{2\lambda_2}$$

transforma a equação anterior em

$$\lambda_2 y''^2 + f' = 0, \text{ com } f' = f - \frac{e'^2}{4\lambda_2^2}.$$

Aqui, devemos considerar três casos: $f' \neq 0$, com λ_2 e f' com sinais iguais ou opostos (isto é, $\lambda_2 f' > 0$ e $\lambda_2 f' < 0$) e $f' = 0$,

- Se $\lambda_2 f' > 0$, então a equação $\lambda_2 y''^2 + f' = 0 \iff y''^2 = \frac{-f'}{\lambda_2}$, com $y''^2 \geq 0$ e $\frac{-f'}{\lambda_2} < 0$, o que resulta no **conjunto vazio**.

- Se $\lambda_2 f' < 0$ então, pela diferença de quadrados

$$\lambda_2 y''^2 + f' = 0 \iff \frac{\lambda_2 y''^2}{\lambda_2} + \frac{f'}{\lambda_2} = y''^2 - \left(-\frac{f'}{\lambda_2} \right) = 0 \iff \left(y'' + \sqrt{\left(-\frac{f'}{\lambda_2} \right)} \right) \left(y'' - \sqrt{\left(-\frac{f'}{\lambda_2} \right)} \right) = 0$$

onde teremos **duas retas paralelas** ao eixo x'' .

- Se $f' = 0$, então

$$y''^2 + \frac{f'}{\lambda_2} = 0 \iff y''^2 = 0,$$

que representa **um par de retas coincidentes**.

(I) (ii) $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ ($\lambda_1\lambda_2 = 0$) e $\frac{d'}{2} \neq 0$.

Completando quadrado, a equação (2.5) pode ser escrita como

$$\lambda_2 y'^2 + d' x' + e' y' + f = 0 \iff \lambda_2 y'^2 + e' y' + \frac{e'^2}{4\lambda_2} + d' x' + f - \frac{e'^2}{4\lambda_2} = 0 \iff$$

$$\lambda_2(y'^2 + \frac{e'y'}{\lambda_2} + \frac{e'^2}{4\lambda_2^2}) + d'x' + \frac{d'f}{d'} - \frac{d'e'^2}{4d'\lambda_2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_2(y' + \frac{e'}{2\lambda_2})^2 + d'(x' + \frac{f}{d'} - \frac{e'^2}{4d'\lambda_2}) = 0.$$

Chamando

$$x'' = x' + (\frac{f}{d'} - \frac{e'^2}{4d'\lambda_2}) \quad e \quad y'' = y' + \frac{e'}{2\lambda_2}$$

a translação assim definida nos remete a

$$\lambda_2 y''^2 + d' x'' = 0$$

que representa uma **parábola**, com λ_2 e $\frac{d'}{2}$ não nulos.

Para os casos (II) e (III), tem-se que $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. Observemos, inicialmente, que uma vez obtida a equação (2.4) por meio de uma rotação, nestes dois casos podemos completar quadrados de modo a obter a equação:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f + \frac{d'^2}{4\lambda_1} - \frac{d'^2}{4\lambda_1} + \frac{e'^2}{4\lambda_2} - \frac{e'^2}{4\lambda_2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1(x'^2 + \frac{x'd'}{\lambda_1} + \frac{d'^2}{4\lambda_1^2}) + \lambda_2(y'^2 + \frac{y'e'}{\lambda_2} + \frac{e'^2}{4\lambda_2^2}) + (f - \frac{d'^2}{4\lambda_1} - \frac{e'^2}{4\lambda_2}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1(x' + \frac{d'}{2\lambda_1})^2 + \lambda_2(y' + \frac{e'}{2\lambda_2})^2 + f' = 0,$$

onde $f' = f - \frac{d'^2}{4\lambda_1} - \frac{e'^2}{4\lambda_2}$. Daí, a translação no \mathbb{R}^2 , dada por

$$x'' = x' + \frac{d'}{2\lambda_1}; \quad y'' = y' + \frac{e'}{2\lambda_2}$$

transforma a última equação em

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' = 0. \quad (2.6)$$

Assim, a equação inicial (2.1) se transforma em (2.6), por meio de uma rotação (usando a matriz P , via o Teorema Espectral), seguida de uma translação.

Analisemos, a seguir, as possíveis cônicas para os casos (II) e (III). Em ambos os casos temos que analisar separadamente quando $f' = 0$ ou $f' \neq 0$.

(II) (i) $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ e $f' = 0$.

Se $f' = 0$, segue de (2.6) que $x'' = y'' = 0$ e assim a única solução é o ponto $(0, 0)$, de modo que a cônica da equação inicial é também **um ponto** (cônica degenerada).

(II) (ii) $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, $f' \neq 0$.

Aqui, devemos considerar dois casos: $\lambda_1, \lambda_2, f' > 0$ (análogo para $\lambda_1, \lambda_2, f' < 0$) e os sinais de f' e λ_1 são contrários (e conseqüentemente, de f' e λ_2 também são contrários).

- $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, $f' \neq 0$, com $\lambda_1, \lambda_2, f' > 0$ (análogo para $\lambda_1, \lambda_2, f' < 0$).

De (2.6), segue que

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = -f'$$

onde $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 \geq 0$ e $-f' < 0$, o que é impossível. Logo, neste caso a solução de (2.6) é o **conjunto vazio**.

- $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, $f' \neq 0$, e os sinais de f' e λ_1 são contrários (e conseqüentemente, de f' e λ_2 também são contrários).

Temos

$$\begin{aligned} \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda_1 x''^2}{-f'} + \frac{\lambda_2 y''^2}{-f'} &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x''^2}{\left(\sqrt{-\frac{f'}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{-\frac{f'}{\lambda_2}}\right)^2} &= 1 \end{aligned}$$

que representa a equação de uma **elipse**.

(III) (i) $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ e $f' = 0$.

Como λ_1, λ_2 têm sinais contrários, suponhamos $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$. Temos

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 x''^2 - (-\lambda_2) y''^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{\lambda_1} x'' - \sqrt{-\lambda_2} y'')(\sqrt{\lambda_1} x'' + \sqrt{-\lambda_2} y'') = 0.$$

que representa um **par de retas concorrentes**.

(III) (ii) $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ e $f' \neq 0$.

Suponhamos $f' < 0$, $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$, temos $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda_1 x''^2}{-f'} + \frac{\lambda_2 y''^2}{-f'} = \frac{-f'}{-f'} \Leftrightarrow \frac{x''^2}{-\frac{f'}{\lambda_1}} - \frac{y''^2}{-\frac{f'}{\lambda_2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x''^2}{\left(\sqrt{-\frac{f'}{\lambda_1}}\right)^2} - \frac{y''^2}{\left(\sqrt{-\frac{f'}{\lambda_2}}\right)^2} = 1.$$

Assim, a cônica inicial é uma **hipérbole**.

Conclui-se então a prova do teorema. ■

Sintetizando o processo de reconhecimento da cônica: (Passos)

Dada uma cônica de equação

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad (*)$$

para reconhecer a cônica, usando diagonalização de matrizes simétricas (Teorema Espectral), devemos:

1) Formar a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$. Por A ser simétrica sabemos, pelo Teorema Espectral que A é diagonalizável. Note que a equação inicial (*) é equivalente a

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$

2) Calcular o polinômio característico (em λ), $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ e em seguida calcular suas raízes obtendo os autovalores λ_1, λ_2 .

3) Calcular uma base de autovetores, calculando os subespaços dos autovetores $V(\lambda_i)$, associados a $\lambda_i, i = 1, 2$ e, em seguida, tomar uma base ortonormal β de autovetores.

Como observamos no início da seção, se $v_1 \in V(\lambda_1)$ e $v_2 \in V(\lambda_2)$, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então v_1 e v_2 serão ortogonais e assim $\beta = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\}$ será uma base ortonormal.

4) Calcular $P = (I_{\mathbb{R}^2})_{\beta, \alpha}$, a matriz do operador idêntico de \mathbb{R}^2 , que se obtém escrevendo os elementos da base ortonormal β como combinação linear dos elementos da base canônica α canônica do \mathbb{R}^2 . (Pode-se escolher os sinais nos vetores da base β de modo que $\det(P) = 1$ e P seja matriz de rotação).

5) Observar que, considerando as coordenadas (x', y') de um vetor (x, y) na nova base β , a equação inicial se transforma em:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f = 0,$$

ou equivalentemente, em

$$g'(x', y') := \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0 \quad (**)$$

em que d' e e' são expressos em função de $d, e,$ e dos elementos da matriz P .

6) Completar quadrados e assim obter o reconhecimento da cônica.

Ao completar quadrados, leva-se em conta os coeficientes apresentados na equação anterior (**), que necessariamente tem $\lambda_1 \neq 0$ ou $\lambda_2 \neq 0$.

2.1.1 Identificando Cônicas: Exemplos

Exemplo 2.1.1. Identifiquemos a cônica de equação $7x^2 - 8xy + y^2 - 17\sqrt{5}x + 11\sqrt{5}y + 41 = 0$.

A equação acima pode ser transformada em:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -17\sqrt{5} & 11\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 41 = 0 \quad (2.7)$$

Como $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ é simétrica então, pelo Teorema Espectral, A é ortogonalmente diagonalizável. Encontremos os autovalores de A :

$$\begin{aligned} P_\lambda(A) = \det(A - \lambda I) = 0 &\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{matrix} 7-\lambda & -4 \\ -4 & 1-\lambda \end{matrix} \right| = \\ &= (7-\lambda)(1-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0. \end{aligned}$$

Assim, os autovalores de A são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 9$

Para determinar os autovetores associados aos autovalores de A devemos resolver o sistema linear obtido a partir de:

$$\begin{pmatrix} 7-\lambda & -4 \\ -4 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ é o autovetor associado ao autovalor λ .

Assim, para $\lambda_1 = -1$, temos

$$\begin{pmatrix} 7+1 & -4 \\ -4 & 1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 2x,$$

e $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ é um autovetor (unitário) associado a $\lambda_1 = -1$. Para $\lambda_2 = 9$:

$$\begin{pmatrix} 7-9 & -4 \\ -4 & 1-9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -2y.$$

Logo, $(-2, 1)$ é um autovetor e $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ é um autovetor (unitário) associado a $\lambda_2 = 9$.

Temos então a base ortonormal $\beta = \{(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}), (\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})\}$.

Considere a matriz que diagonaliza A ortogonalmente, obtida escrevendo os elementos da base ortonormal β como combinação linear dos elementos da base canônica α do \mathbb{R}^2 (matriz de mudança de base), $P = (I_{\mathbb{R}^2})_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Então $P^{-1}.A.P = P^t.A.P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = D$ (matriz diagonal formada pelos autovalores) e $A = P.D.P^t$. Se $[v]_{\alpha} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ são as coordenadas de um vetor genérico v na base α , então $P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (I_{\mathbb{R}^2})_{\alpha, \beta} \cdot [v]_{\alpha} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ é a matriz das coordenadas de um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ em relação a base β , isto é, $[v]_{\beta} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Considerando a matriz transposta e o fato que $P^t = P^{-1}$, obtem-se $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Substituindo em (2.7), a equação inicial (na nova base) é equivalente a

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -17\sqrt{5} & 11\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 41 = 0$$

Efetuando o produto, obtemos:

$$-x'^2 + 9y'^2 + 5x' + 45y' + 41 = 0. \quad (2.8)$$

Com a mudança da base ortonormal β para a base canônica α , conseguimos reduzir a equação inicial a (2.8), eliminando o termo misto $x'y'$, responsável pela rotação da cônica. Agora, completando quadrados:

$$\begin{aligned} -x'^2 + 9y'^2 + 5x' + 45y' + 41 = 0 &\Leftrightarrow -(x'^2 - 5x') + 9(y'^2 + 5y') + 41 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -(x' - \frac{5}{2})^2 + 9(y' + \frac{5}{2})^2 = -41 + 50 = 9 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x' - \frac{5}{2})^2}{9} + (y' + \frac{5}{2})^2 = 1.$$

Essa equação (nos eixos x' e y') representa uma hipérbole centrada em $(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$, com focos em Oy' , que é equivalente, nos eixos x'' e y'' (se efetuamos a translação) a

$$-\frac{x''^2}{9} + y''^2 = 1.$$

Assim, a cônica da equação inicial é uma hipérbole.

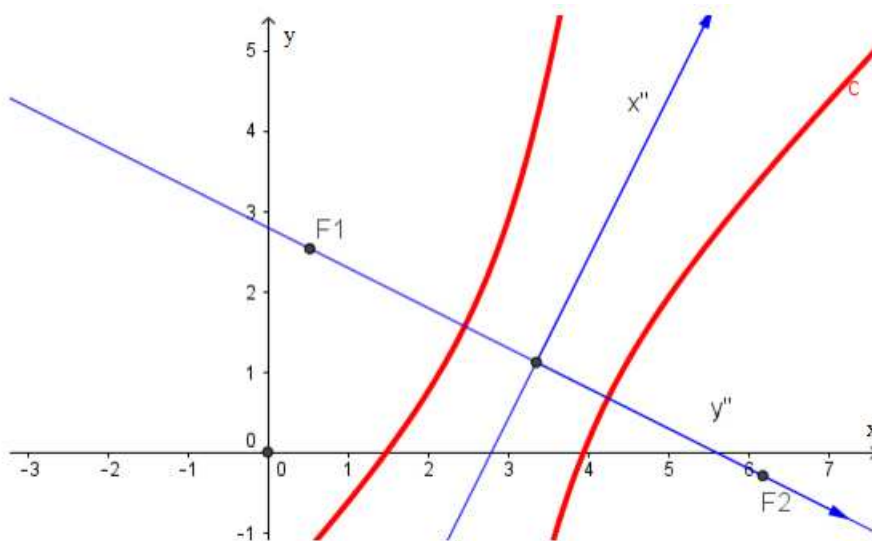


Figura 2.1 - Hipérbole dada pela equação $7x^2 - 8xy + y^2 - 17\sqrt{5}x + 11\sqrt{5}y + 41 = 0$

Observação 2.1.1. i) Neste exemplo, a representação nos eixos OX , OY da cônica solicitada, partindo da cônica dada pela equação reduzida, pode ser assim obtida: traçamos a cônica centrada (vide hipérbole apresentada, na figura seguinte, na cor preta e pontilhada), de equação

$$-\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$$

e em seguida efetuamos a translação relativa ao vetor $(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$ obtendo a cônica representada pela cor azul de traço contínuo, que terá equação:

$$-x^2 + 9y^2 + 5x + 45y + 41 = 0.$$

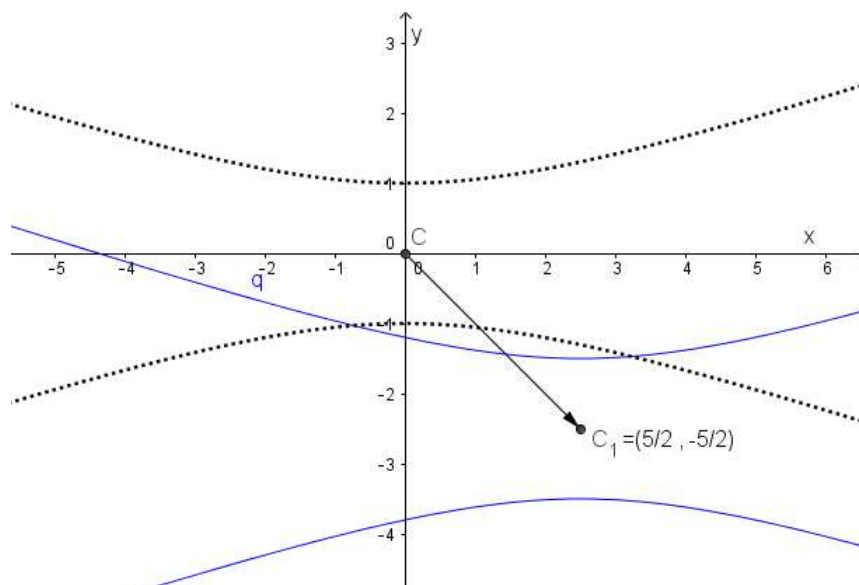


Figura 2.2 - Esboço da Hipérbole - Translação

Agora rotacionamos essa cônica em torno da origem $((0,0)$ dos eixos OX, OY) pelo ângulo θ correspondente a matriz de rotação $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (no caso $\theta \approx 63,43^\circ$). A cônica resultante que está representada em vermelho é a relativa a equação dada inicialmente, como ilustrado na figura abaixo.

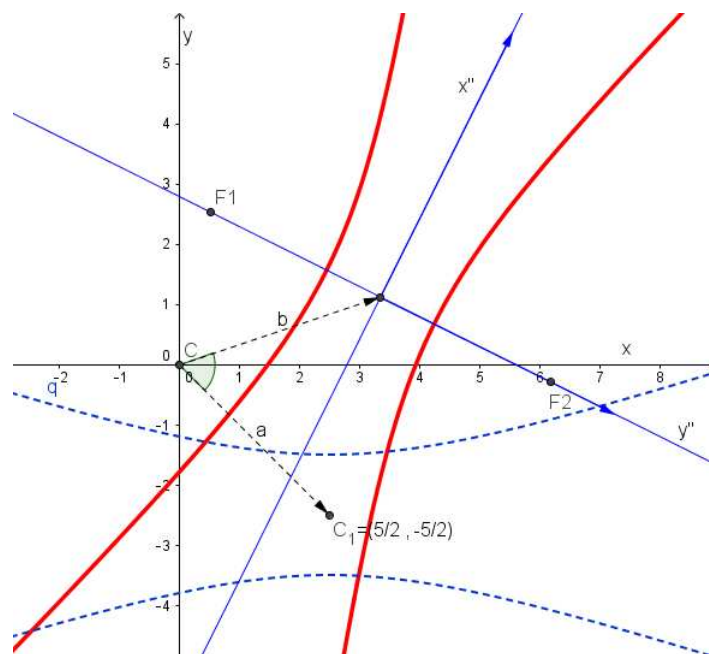


Figura 2.3 - Esboço da Hipérbole - Rotação

ii) Se tivéssemos escolhido a base ortonormal $\beta_1 = \{u_1, -u_2\} = \{(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}), (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}})\}$, teríamos neste caso a matriz ortogonal $P = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ y_0 & -x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, com $\det(P) = -1$.

Com esta escolha de base, a equação inicial após a mudança de coordenadas tomaria a forma

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -17\sqrt{5} & 11\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 41 = 0$$

Efetuando o produto, obtemos a equação:

$$-x'^2 + 9y'^2 + 5x' - 45y' + 41 = 0.$$

Completando quadrados, obtém-se:

$$\frac{-(x' - \frac{5}{2})^2}{9} + (y' - \frac{5}{2})^2 = 1.$$

Que, efetuando a translação resulta em

$$-\frac{x''^2}{9} + y''^2 = 1,$$

que é a equação da hipérbole centrada.

Observamos que neste caso a cônica pode ser assim obtida: traçamos a cônica centrada (vide hipérbole apresentada, na figura seguinte, na cor preta pontilhada), de equação

$$-\frac{x^2}{9} + y^2 = 1,$$

e em seguida efetuamos a translação relativa ao vetor $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ obtendo a cônica representada pela cor azul de traço contínuo (vide Figura 2.4), que terá equação:

$$-x^2 + 9y^2 + 5x - 45y + 41 = 0.$$

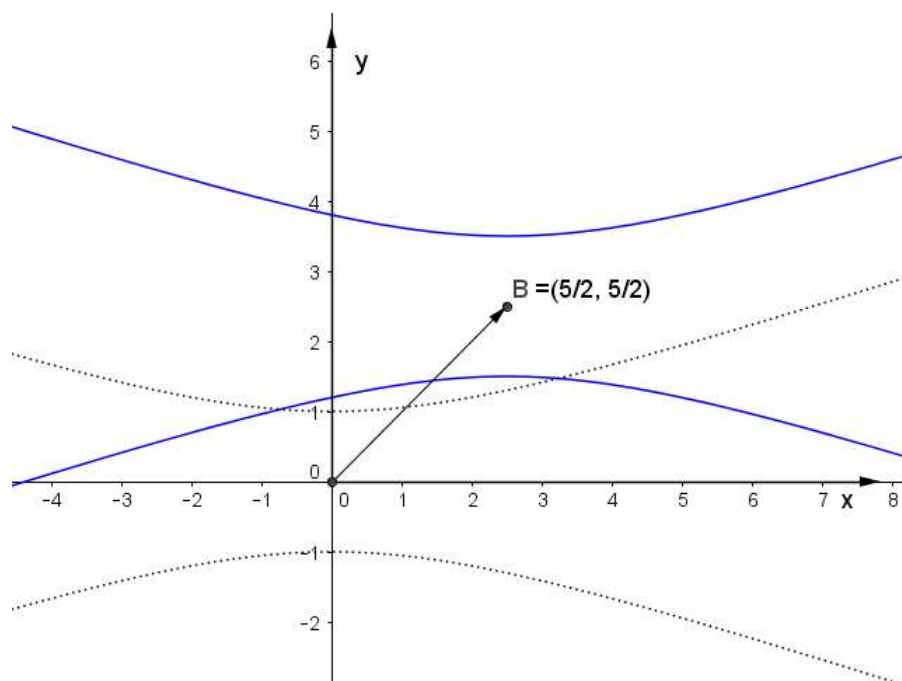


Figura 2.4 - Esboço da Hipérbole - Translação

Agora refletimos essa cônica (que na figura estamos indicando na forma tracejada) em torno da reta $y = \frac{y_0}{1+x_0} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} x$, a cônica procurada, referente a equação dada inicialmente, é a resultante de cor vermelha e traço contínuo, como ilustrado na Figura 2.5 abaixo.

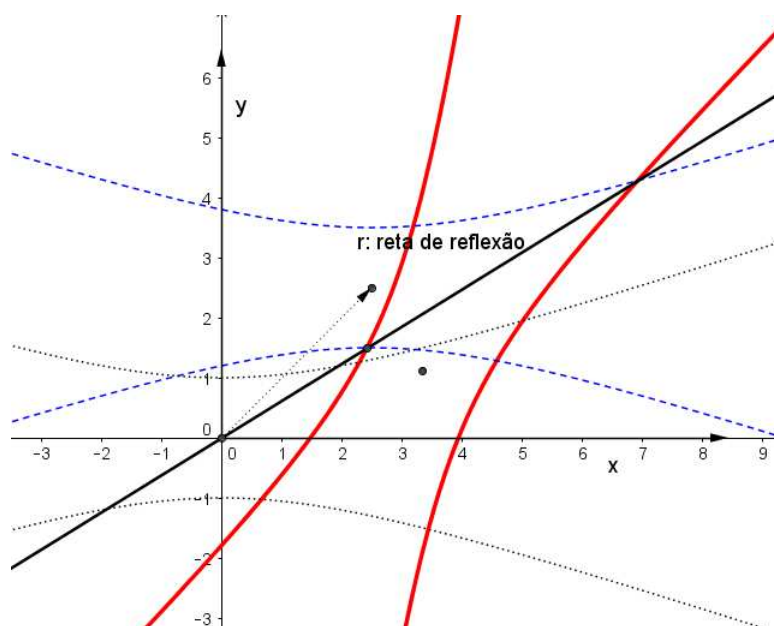


Figura 2.5 - Esboço da Hipérbole - Reflexão

Exemplo 2.1.2. Identifiquemos a cônica de equação: $x^2 - 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0$.

Observamos que no Exemplo 1.4.3, usando os procedimentos apresentados no capítulo anterior, já foi feita a identificação da cônica dada por esta equação. Faremos aqui utilizando diagonalização de matriz simétrica (Teorema Espectral).

Temos que $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e a equação acima pode ser transformada em:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8\sqrt{2} & -8\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad (2.9)$$

Como A é simétrica, A é ortogonalmente diagonalizável. Encontremos os autovalores de A :

$$\begin{aligned} P_\lambda(A) = \det(A - \lambda I) = 0 &\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = \\ &= (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2) = 0 \end{aligned}$$

Assim, os autovalores associados a A são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$.

Determinemos os autovetores associados aos autovalores de A . Para $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1-0 & -1 \\ -1 & 1-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y.$$

Logo, $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ é o um autovetor (unitário) associado a $\lambda_1 = 0$.

Para $\lambda_2 = 2$, temos

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -x,$$

e $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ é um autovetor (unitário) associado a $\lambda_2 = 2$.

Temos então a base ortonormal $\beta = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$.

Seja $P = (I_{\mathbb{R}^2})_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ a matriz (de rotação) que diagonaliza A ortogonalmente. Então $P^{-1}.A.P = P^t.A.P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D$ e $A = P.D.P^t$. Substituindo em (2.9), obtemos:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8\sqrt{2} & -8\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0. \quad (2.10)$$

Como feito no exemplo anterior, considerando as coordenadas de $v = (x, y)$ na nova base β , $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = [v]_{\beta} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e substituindo em (2.10), temos:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8\sqrt{2} & -8\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0.$$

De onde se obtém:

$$g'(x', y') = 2y'^2 - 16x' = 0 \Leftrightarrow y'^2 = 8x',$$

que representa uma parábola centrada na origem, com reta diretriz sendo $x' = -2$ (nos eixos x' e y') e foco dado por $F = (2, 0)$. Assim, a cônica inicial (considerando os eixos x e y) também é uma parábola, que pode ser obtida da anterior por rotação, tendo foco $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e reta diretriz $y = -x - 2\sqrt{2}$, como no Exemplo 1.4.3, já visto no capítulo anterior.

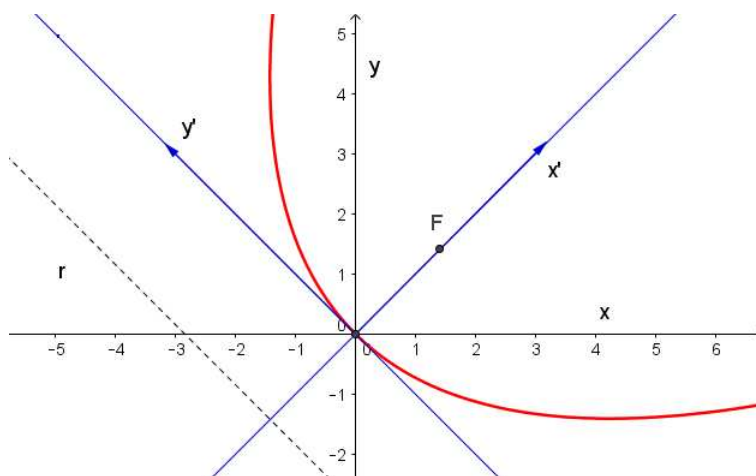


Figura 2.6 - Parábola dada pela equação $x^2 - 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0$

Exemplo 2.1.3. Identifiquemos a cônica de equação: $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 12 = 0$ (dada no capítulo anterior, Exemplo 1.4.2, porém agora usando o Teorema Espectral).

A matriz associada aos coeficientes quadráticos é $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e a equação acima pode ser transformada em:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 12 = 0 \quad (2.11)$$

Uma vez que a equação não apresenta termos lineares, essa equação tem a forma mais simples:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 12 = 0 \quad (2.11')$$

Como A é simétrica, pelo Teorema Espectral, A é ortogonalmente diagonalizável. Encontremos os autovalores de A , isto é, raízes do polinômio característico:

$$\begin{aligned} P_\lambda(A) = \det(A - \lambda I) &= \left| \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{matrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{matrix} \right| = \\ &= (5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6. \end{aligned}$$

Temos $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$.

Para determinar os autovetores associados aos autovalores de A devemos resolver o sistema linear obtido de:

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ indica um autovetor qualquer associado a λ .

Para $\lambda_1 = 1$, temos

$$\begin{pmatrix} 5 - 1 & 2 \\ 2 & 2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -2x.$$

Logo, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = 1$.

E, para $\lambda_2 = 6$:

$$\begin{pmatrix} 5-6 & 2 \\ 2 & 2-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2y.$$

Logo, temos que $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ é um autovetor associado a $\lambda_2 = 6$ que é ortogonal a v_1 .

Temos que ortonormalizar $\{v_1, v_2\} = \{(1, -2), (2, 1)\}$. Ortonormalizando obtemos a base ortonormal $\beta = \{(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}), (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})\}$.

Seja $P = (I_{\mathbb{R}^2})_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ a matriz que diagonaliza A ortogonalmente (onde α indica a base canônica).

Então $P^{-1}.A.P = P^t.A.P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = D$ (diagonal) e $A = P.D.P^t$. Substituindo A em (2.11'), tem-se:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 12 = 0 \quad (2.12)$$

Considerando $[v]_{\alpha} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, as coordenadas de um vetor genérico v na base α , segue que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} := P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (I_{\mathbb{R}^2})_{\alpha, \beta} \cdot [v]_{\alpha} = [v]_{\beta}$ é a matriz das coordenadas de um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ em relação a base β e tomando a matriz transposta, temos $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}$ e substituindo em (2.12), temos:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 12 = 0$$

Efetuando o produto, obtemos a equação:

$$x'^2 + 6y'^2 - 12 = 0. \quad (2.13)$$

Mas

$$x'^2 + 6y'^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{12} + \frac{y'^2}{2} = 1.$$

Essa última equação é a de uma elipse centrada na origem no plano $x'Oy'$, com semieixo maior medindo $\sqrt{12}$ e semieixo menor medindo $\sqrt{2}$, sendo paralelos aos eixos x' e y' , como no Exemplo 1.4.2.

Notemos que neste caso, para a ordem dos autovalores e para os vetores escolhidos na base β , a matriz de rotação no sentido anti-horário é, $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, de onde se obtém-se que $\theta \approx 296,57^\circ$.

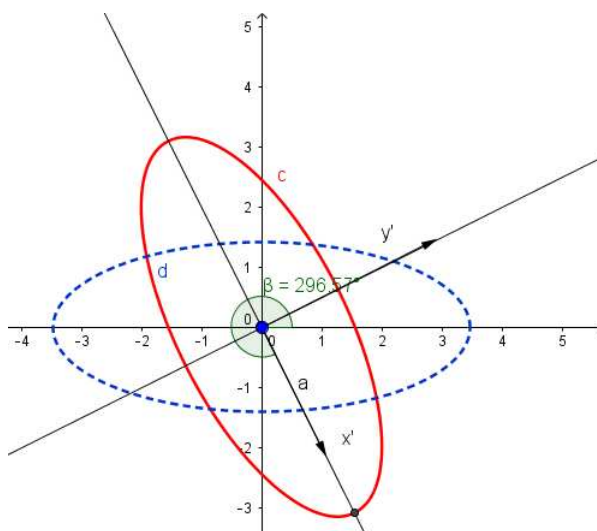


Figura 2.7 - Elipse dada pela equação $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 12 = 0$

Exemplo 2.1.4. Identifiquemos a cônica de equação: $2x^2 + 2\sqrt{2}xy + y^2 - 12 = 0$.

Novamente esta é uma equação que não possui termos lineares. Usando a linguagem matricial, equação acima pode ser transformada em:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 12 = 0 \quad (2.14)$$

Ou mais simplesmente, em:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 12 = 0 \quad (2.14')$$

Encontremos os autovalores da matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
 P_\lambda(A) = \det(A - \lambda I) = 0 &\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = \\
 &= (2-\lambda)(1-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 3\lambda = 0.
 \end{aligned}$$

Assim os autovalores são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 3$. Para determinar os autovetores associados aos autovalores de A devemos resolver o sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sendo $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ autovetor associado a λ .

$$\text{Para } \lambda_1 = 0, \begin{pmatrix} 2-0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -\sqrt{2}x.$$

Logo, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = 0$.

Para $\lambda_2 = 3$, temos

$$\begin{pmatrix} 2-3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \sqrt{2}y,$$

de modo que $v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ é um autovetor associado a $\lambda_2 = 3$.

Temos então a base ortonormal $\beta = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$.

Seja $P = (I_{\mathbb{R}^2})_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ a matriz que diagonaliza A ortogonalmente. Então

$$P^{-1}.A.P = P^t.A.P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D \text{ e } A = P.D.P^t.$$

Substituindo A em (2.14') obtém-se:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 12 = 0 \quad (2.15)$$

Temos que $P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (I_{\mathbb{R}^2})_{\alpha, \beta} \cdot [v]_{\alpha} = [v]_{\beta} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ é a matriz das coordenadas de um vetor $v(x, y) \in \mathbb{R}^2$ em relação a base β , onde estamos indicando $[v]_{\beta}$ por $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Substituindo em (2.15), temos:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 12 = 0.$$

De onde se obtém a equação:

$$3y'^2 - 12 = 0.$$

Agora,

$$3y'^2 - 12 = 0 \Rightarrow y'^2 = 4 \Rightarrow y' = \pm 2.$$

Assim a cônica é um par de retas paralelas, que é um dos casos de cônica degenerada. (Notemos que neste caso, $\theta \approx 305,26^\circ$, $\cos(305,26^\circ) \approx 0,5773 \approx 1/\sqrt{3}$ e $\sin(305,26^\circ) \approx -0,8163 \approx -\sqrt{2}/\sqrt{3}$)

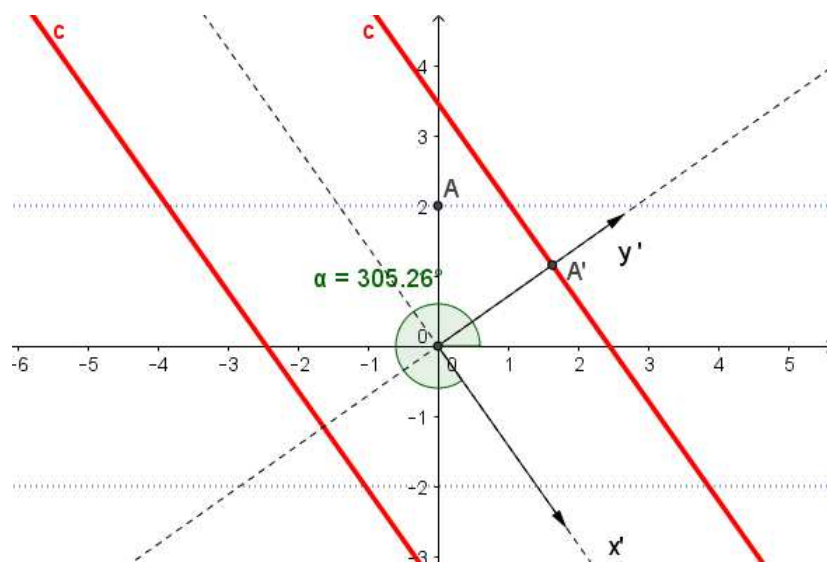


Figura 2.8 - Retas paralelas dadas pela equação $2x^2 + 2\sqrt{2}xy + y^2 - 12 = 0$

2.1.2 Classificação das Cônicas - Versão Simplificada

O procedimento apresentado anteriormente para a classificação das cônicas é bastante interessante, pois além de classificar, indica como obter um esboço da cônica. Porém, se estamos interessados apenas na classificação, o procedimento pode ser simplificado.

Teorema 2.1.2. (Classificação das Cônicas - versão Simplificada) Dada a equação de uma cônica

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

(sendo a , b ou c não nulo), considere os determinantes das matrizes

$$\delta = \det \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta = \det \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix}.$$

Então as cônicas são classificadas de acordo com o quadro seguinte:

Classificação das Cônicas		
$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$	A cônica é uma Parábola
	$\Delta = 0$	conj. vazio, par de retas paralelas ou coincidentes
$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$	$\Delta < 0$: Elipse
		$\Delta > 0$: a cônica é o conjunto vazio
	$\Delta = 0$	Ponto
$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$	Hipérbole
	$\Delta = 0$	Par de retas concorrentes

Demonstração:

Considere a equação (2.1) $g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ e a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$. O polinômio característico da matriz A é:

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$\left| \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} a - \lambda & b/2 \\ b/2 & c - \lambda \end{pmatrix} \right| =$$

$$(a - \lambda)(c - \lambda) - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = ac - a\lambda - c\lambda + \lambda^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Assim

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + \left(ac - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right).$$

Temos que $\sigma := \text{tr}A = a + c$ (soma dos elementos da diagonal principal) e $\delta := \det A = ac - \left(\frac{b}{2}\right)^2$ é o termo independente, de modo que

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \sigma\lambda + \delta = \lambda^2 - (\text{tr}A)\lambda + \det A.$$

Agora observemos que:

• Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico (Callioli, Domingues e Costa, 1995, Proposição 1, p. 248), então quando tomamos a matriz diagonal D semelhante a A , que existe porque A é diagonalizável, $P^{-1}.A.P = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ tem-se

$$P_D(\lambda) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = P_A(\lambda),$$

de modo que $\sigma = \text{tr} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 + \lambda_2$ e $\delta = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1\lambda_2$.

• Em qualquer equação do segundo grau em duas variáveis x e y , se fizermos uma translação $x = x' + h$ e $y = y' + k$, e calculamos a nova equação em x' e y' , os valores correspondentes a σ e δ , veremos que eles são os mesmos que na primeira (em x e y), já que os termos quadráticos a , b e c não mudam (como visto na Etapa 1 - Eliminação dos termos lineares por translação, apresentada no capítulo 1). Ou seja, σ e δ são invariantes de uma equação do segundo grau em x e y .

• Pode-se verificar também que o determinante de terceira ordem

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix}$$

é outro invariante de uma equação do segundo grau em x e y (Callioli, Domingues e Costa, p. 288).

Analisando a prova do Teorema de Classificação de Cônicas (Teorema 2.1.1), vimos que a equação (2.1) foi transformada, por meio de uma rotação, na equação referida como (2.4)

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

o que fornece

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & d'/2 \\ 0 & \lambda_2 & e'/2 \\ d'/2 & e'/2 & f \end{pmatrix},$$

e seguida de uma translação, para λ_1 e λ_2 não nulos (isto é $\delta = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$) a transforma na equação já referida anteriormente como (2.6)

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' = 0.$$

Neste caso, isto é, para $\delta = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, da invariância de σ e δ , tem-se que

$$\delta = \lambda_1 \lambda_2 \quad e \quad \Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & f' \end{vmatrix} = f' \lambda_1 \lambda_2 = f' \delta.$$

A prova segue essencialmente o que foi feito na prova do Teorema 2.1.1, analisando agora $\delta = \lambda_1 \lambda_2$ e Δ . Vamos tratar separadamente os casos:

- (I) $\delta = 0$,
- (II) $\delta > 0$,
- (III) $\delta < 0$.

Vejamos:

- (I) $\delta = \lambda_1 \lambda_2 = 0$.

Já foi observado, na prova do teorema acima referido, que não podemos ter λ_1 e λ_2 nulos. Suponhamos $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. Então a equação toma forma

$$\lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

$$e \quad \Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & d'/2 \\ 0 & \lambda_2 & e'/2 \\ d'/2 & e'/2 & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & d'/2 \\ 0 & \lambda_2 & e'/2 \\ d'/2 & e'/2 & f \end{vmatrix} = -\frac{d'^2 \lambda_2}{4}.$$

Daí, como $\lambda_2 \neq 0$, tem-se que $\Delta = 0 \Leftrightarrow d' = 0$ (e $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow d' \neq 0$). Assim, a análise de Δ recai nos casos considerados na prova do Teorema 2.1.1:

(I) (i) $\delta = \lambda_1\lambda_2 = 0$ (com $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$) e $\Delta = 0$ ($\Leftrightarrow d' = 0$).

Neste caso, a equação se torna $\lambda_2 y'^2 + e'y' + f = 0$.

E considerando $f' := f - \frac{e'^2}{4\lambda_2}$, provamos que:

- para $f' \neq 0$ e $\lambda_2 f' > 0$, a cônica é o **conjunto vazio**;
- se $f' \neq 0$ e $\lambda_2 f' < 0$, então a cônica é dada por **duas retas paralelas** ao eixo x'' ;
- se $f' = 0$, então a cônica é dada por **um par de retas coincidentes**.

(I) (i) $\delta = \lambda_1\lambda_2 = 0$ (com $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$) e $\Delta \neq 0$ ($\Leftrightarrow d' \neq 0$).

E, da mesma forma que foi mostrado no Teorema 2.1.1, conclui-se que a cônica neste caso, é uma **parábola**.

Consideremos agora os casos em que $\delta = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$.

Como já observamos a equação neste caso, após translação tem a forma

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' = 0 \quad \text{e} \quad \Delta = f'\delta.$$

Assim, como estamos tomando $\delta \neq 0$, segue que $\Delta = 0 \Leftrightarrow f' = 0$ (e $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow f' \neq 0$). Novamente a análise de Δ recai nos casos considerados na demonstração do Teorema 2.1.1 e a prova, em cada caso, é a mesma:

(II) (i) $\lambda_1\lambda_2 > 0$ e $\Delta = 0$ ($\Leftrightarrow f' = 0$).

Situação em que a cônica é um **um ponto** (cônica degenerada).

(II) (ii) $\delta = \lambda_1\lambda_2 > 0$, $\Delta \neq 0$ ($\Leftrightarrow f' \neq 0$).

Notemos que, como $\Delta = f'\delta$ e $\delta > 0$, o sinal de Δ é o mesmo de f' .

Assim, considera-se duas situações:

- $\delta = \lambda_1\lambda_2 > 0$, $\Delta \neq 0$, com $\lambda_1, \lambda_2, \Delta > 0$ (análogo para $\lambda_1, \lambda_2, \Delta < 0$).

Neste caso, a solução é o **conjunto vazio**.

- $\delta = \lambda_1\lambda_2 > 0$, $\Delta \neq 0$, e os sinais de Δ ($\Leftrightarrow f'$) e λ_1 são contrários (e conseqüentemente, de Δ e λ_2 também são contrários).

E conclui-se, como feito no Teorema 2.1.1, que a cônica é uma **elipse**.

(III) (i) $\delta = \lambda_1\lambda_2 < 0$ e $\Delta = 0$ ($\Leftrightarrow f' = 0$).

Neste caso a equação tem a forma $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0$, e como λ_1, λ_2 têm sinais

contrários, concluímos que representa um **par de retas concorrentes**.

(III) (ii) $\delta = \lambda_1 \lambda_2 < 0$ e $\Delta \neq 0$ ($\Leftrightarrow f' \neq 0$).

Supondo $\Delta \neq 0$ ($\Leftrightarrow f' \neq 0$) e $\lambda_2 < 0$, verifica-se que a cônica inicial é uma **hipérbole**.

Uma vez analisadas todas as possibilidades, conclui-se a prova do teorema. ■

Exemplo 2.1.5. Reconhecer a cônica dada pela equação $x^2 - 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0$, usando o procedimento anterior (isto é, por meio de análise dos determinantes δ e Δ).

$$\text{Temos } \delta = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0, \text{ e}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4\sqrt{2} \\ -1 & 1 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = -128 \neq 0.$$

Logo, como $\delta = 0$ e $\Delta \neq 0$, da análise dos determinantes na tabela dada no teorema anterior, concluímos que a cônica representada dada pela equação acima é uma parábola, como já visto no Exemplos 1.4.3 e 2.1.2.

Vale lembrar que esse procedimento não nos fornece informações que permitam o esboço da cônica, como nos exemplos citados acima. Ele apenas nos informa o tipo de cônica representada pela equação.

Capítulo 3

O conteúdo Cônicas no Ensino Médio

Neste capítulo, analisamos como o assunto Cônicas é tratado em alguns dos documentos oficiais (e avaliações) referentes ao Ensino Médio.

3.1 Cônicas no Currículo do Estado de São Paulo e Caderno do Professor/Aluno

O conteúdo “Cônicas: noções, equações, aplicações”, de acordo com o “Quadro de Conteúdos e Habilidades de Matemática”, apresentado no Currículo do Estado de São Paulo, faz parte da 3ª Série do Ensino Médio (1º Bimestre) e tem como habilidades: “Saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas”. (SAO PAULO, 2011, p. 69).

3ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
1º Bimestre	Geometria/Relações Geometria analítica <ul style="list-style-type: none">• Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos• Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares• Ponto e reta: distância• Circunferência: equação• Reta e circunferência: posições relativas• Cônicas: noções, equações, aplicações	<ul style="list-style-type: none">• Saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações• Saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas• Compreender a representação de regiões do plano por meio de inequações lineares• Saber resolver problemas práticos associados a equações e inequações lineares• Saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas

Figura 3.1 - Quadro de Conteúdos da 3ª Série do Ensino Médio

Mais detalhadamente, o assunto cônicas é tratado no Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor/Aluno de Matemática (3ª Série do Ensino Médio, v.1), na Situação de Aprendizagem 4: “Circunferências e Cônicas: Significados, Equações, Aplicações” (SAO PAULO, 2014, p. 43 - 59). Os conteúdos e temas abordados são: Caracterização da circunferência e das cônicas (elipse, hipérbole e parábola) por meio de propriedades; equações da circunferência e das cônicas em situações simples, com centro na origem; utilização das equações das circunferências e das cônicas em diferentes contextos.

As competências e habilidades exploradas são: Capacidade de expressar por meio da linguagem algébrica as propriedades características de curvas muito frequentes na natureza, como as circunferências e as cônicas; capacidade de reconhecer, em diferentes contextos, a presença das circunferências e das cônicas, expressas por meio de suas equações; capacidade de lidar com as equações das circunferências e das cônicas para resolver problemas simples, em diferentes contextos.

As sugestões e estratégias para o estudo deste tema são: apresentação de um conjunto de situações em que as circunferências e as cônicas estão presentes, explorando suas propriedades tendo em vista a representação de tais curvas por meio de equações; apresentação de alguns exercícios exemplares, para sinalizar aos professores os principais centros de interesses dos temas estudados.

Nesse material é destacado algumas das aplicações das cônicas e enfatizado a facilidade que as mesmas são encontradas no cotidiano e na natureza. É observado que as circunferências e as cônicas (elipses, hipérbolas e parábolas) são curvas que também podem ser representadas no plano cartesiano e cuja propriedade obedecida pelos seus pontos pode ser descrita por meio de uma equação de duas variáveis. São apresentadas as equações de tais curvas em situações bem simples, quando situadas em um plano cartesiano convenientemente escolhido, e as curvas são centradas na origem (de modo a obter equações na forma reduzida, como as apresentadas no Capítulo 1). Ilustra que esses quatro tipos de curvas podem ser visualizadas através da intersecção entre planos e um cone de duas folhas.

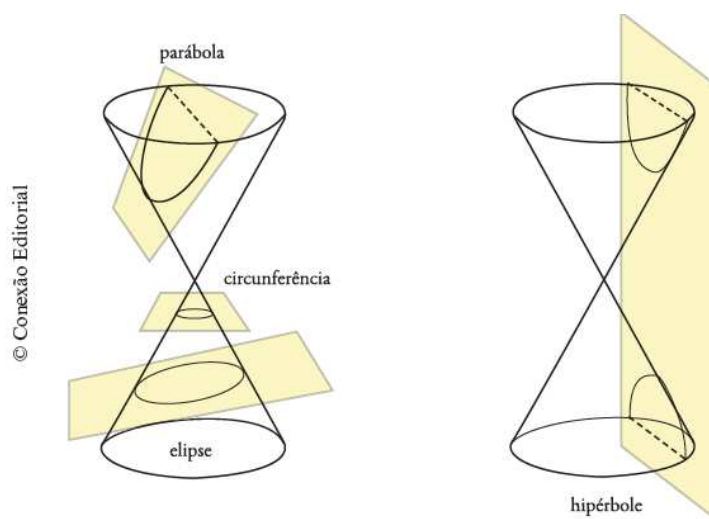


Figura 3.2 - Curvas como seções Cônicas - Fonte: São Paulo (2014, p. 44)

Na sequência, apresentamos algumas situações em que as cônicas podem ser visualizadas/encontradas no cotidiano e natureza e que são abordadas nesse material.

Elipse:

É observado que a sombra projetada de uma circunferência situada num plano vertical, quando uma luz qualquer, incide obliquamente é uma elipse.

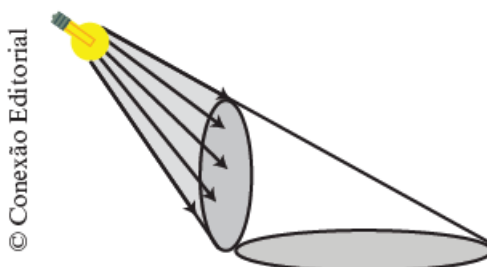
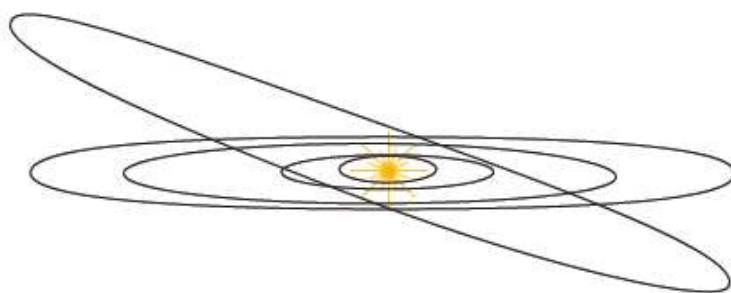


Figura 3.3 - Elipse como sombra de uma circunferência - Fonte: São Paulo (2014, p. 46)

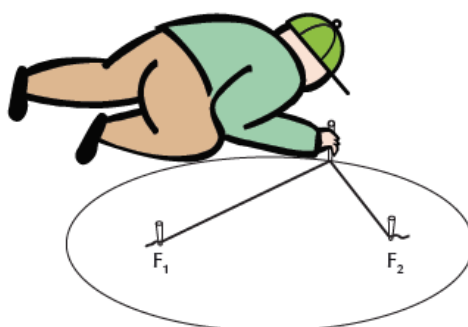
Ainda, que as órbitas dos planetas ao redor do Sol tem formato de elipses (circunferências “achatadas”). Essa descoberta foi feita por Johannes Kepler (1571-1630), em seus estudos sobre Astronomia, que associou as trajetórias dos planetas ao redor do Sol a elipses (não mais circunferências, como se pensava). Nessas elipses ele observou a existência de dois pontos simetricamente opostos em relação ao centro, chamados focos, em um dos quais o Sol se situava.



© Conexão Editorial

Figura 3.4 - Órbitas dos planetas - Fonte: São Paulo (2014, p. 47)

A propriedade da Elipse (de que qualquer um de seus pontos é tal que a soma das distâncias até dois pontos fixados, que são os focos, é constante) é utilizada por jardineiros na construção de canteiros elípticos: eles fixam duas estacas (cada uma considerada como um dos focos), prendem as pontas de um barbante de comprimento fixo (maior do que a distância entre os focos) em cada estaca e deslocam um estilete através deste barbante, mantendo-o esticado de modo a traçar a elipse no chão.



© Conexão Editorial

Figura 3.5 - Elipse traçada pelo Jardineiro - Fonte: São Paulo (2014, p. 47)

As elipses podem ser consideradas como curvas intermediárias entre a circunferência e o segmento de reta. Essa variação depende da “excentricidade” da elipse (que varia de 0 a 1). Dada a equação de uma elipse na forma reduzida,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

a **excentricidade da elipse** representada pela letra “e”, é definida como a razão $e = c/a = \sqrt{a^2 - b^2}/a$.

Um coador de café de plástico pode ilustrar essa situação. Inicia tendo uma circun-

ferência como contorno (na boca), vai passando por elipses e termina (no fundo) com um “segmento” (onde tem o furo).



Figura 3.6 - Visualizando elipses como curvas intermediárias - Fonte: São Paulo (2014, p. 47)

Como $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, fixando o valor de a , quanto menor for o valor de b , mais a excentricidade da elipse se aproxima de 1 e a elipse se aproxima de um segmento de reta. Quando o valor de b se aproxime do valor de a , a excentricidade se aproxima de zero e a elipse se aproxima de uma circunferência.

A órbita da Terra, que Kepler concluiu ser uma elipse com o Sol em um dos focos, tem excentricidade igual a 0,01675, próxima de zero, assim é quase uma circunferência. Nesse caso, os semieixos são, aproximadamente, $a = 153493000$ km e $b = 153454000$ km.

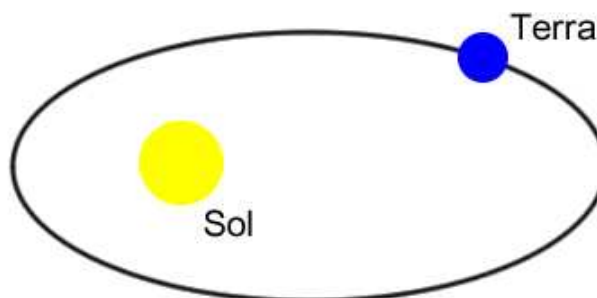


Figura 3.7 - Órbita da Terra - Fonte: São Paulo (2014, p. 49)

Hipérbole:

Sobre a Hipérbole é observado que a curva obtida quando representamos graficamente pares (x, y) de grandezas inversamente proporcionais, isto é, cujo produto $x \cdot y$ é constante e não-nulo, é uma hipérbole.

Uma curiosidade apresentada sobre esse tema é que quando um avião desloca-se hori-

zontalmente a uma certa altura do chão, existe uma região na superfície terrestre onde é possível escutar o barulho dos motores deste, chamada zona de audibilidade e se desloca com o avião. Pode-se mostrar que o contorno desta área, a cada instante em que o avião se desloca, é uma hipérbole.

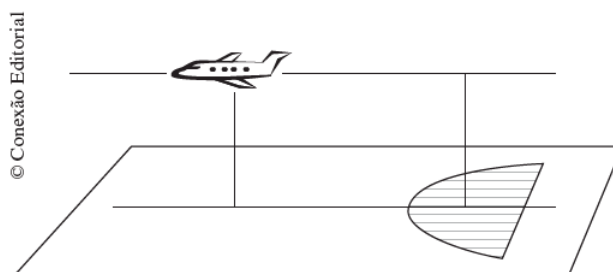


Figura 3.8 - Zona de Audibilidade - Fonte: São Paulo (2014, p. 50)

Parábola:

A trajetória de todos os projéteis lançados obliquamente em relação à superfície da Terra, desconsiderados os efeitos do ar, é uma parábola.

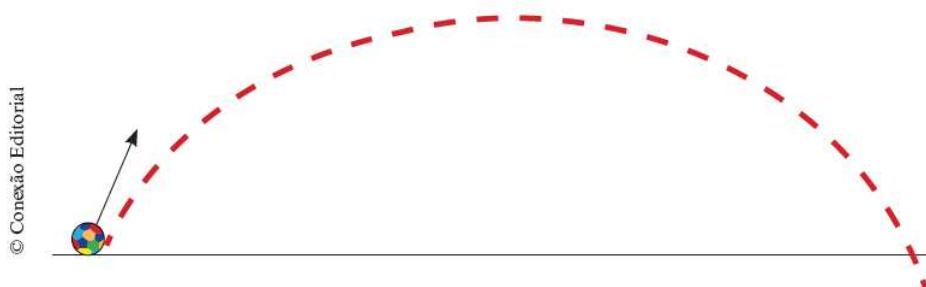


Figura 3.9 - Trajetória de um projétil - Fonte: São Paulo (2014, p. 55)

Ainda, o contorno da região determinada pelos pontos (em um plano vertical) que podem ser atingidos pelos projéteis quando, de um ponto fixado no solo, lançamos projéteis em todas as direções possíveis, sempre com a mesma velocidade inicial, é uma parábola, chamada parábola de segurança.

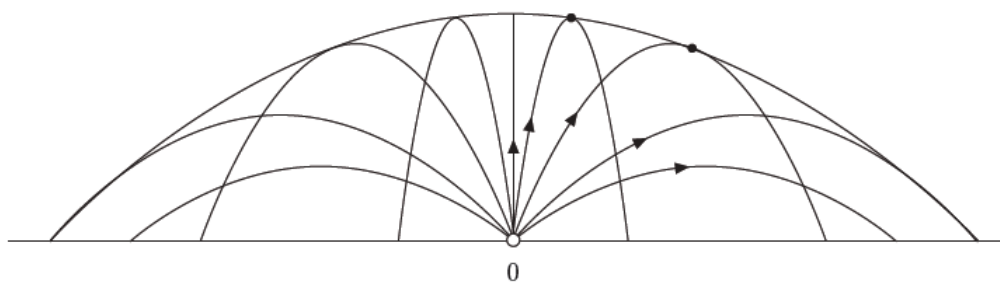


Figura 3.10 - Parábola de segurança - Fonte: São Paulo (2014, p. 55)

Um exemplo do uso dessa curva no cotidiano é o fato dos faróis dos automóveis serem envolvidos por uma superfície que é um parabolóide, ou seja, é a superfície gerada por uma parábola que dá uma volta completa em torno de seu eixo. Isso é explicado por uma interessante propriedade das parábolas, de que a reta que passa pelo foco F e por P forma com a tangente à parábola em P um ângulo igual ao formado pela tangente com a reta paralela ao eixo da parábola passando por P (figura abaixo). Assim, se a lâmpada situar-se exatamente no foco, os raios de luz formarão um feixe paralelo ao eixo, como é de interesse.

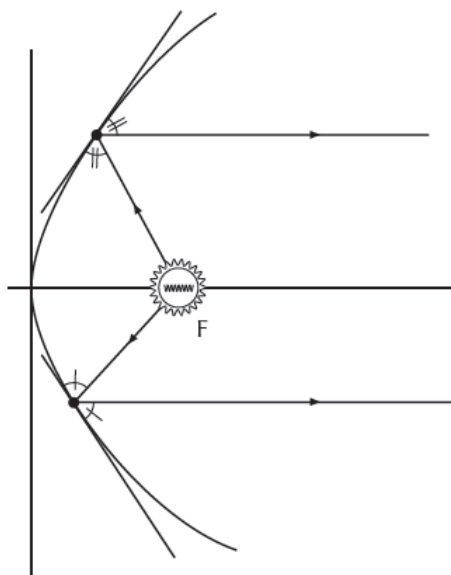


Figura 3.11 - Formato de faróis de Automóvel - Fonte: São Paulo (2014, p. 55)

Nos exercícios apresentados, um sobre elipse é o seguinte:

Exercício: Usando o fato de que a elipse é uma circunferência “achatada”, ou seja,

é a curva obtida quando reduzimos (ou ampliamos) na mesma proporção todas as cordas perpendiculares a um diâmetro dado, mostre que a equação da elipse de centro na origem e com os semieixos a e b é $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. (SAO PAULO, 2014, p. 48).

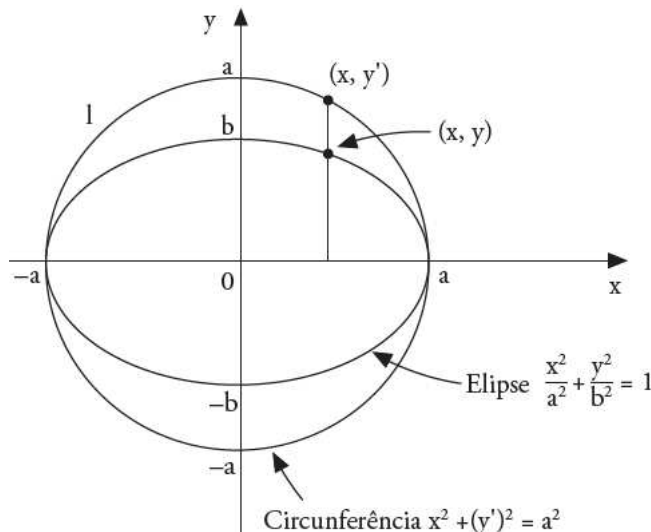


Figura 3.12 - Obtendo a Equação da Elipse - Fonte: São Paulo (2014, p. 55)

Solução: Consideremos a circunferência de centro na origem e raio a , de equação $x^2 + y'^2 = a^2$, de modo que os pontos que satisfaçam a equação sejam da forma (x, y') . Reduzir as cordas perpendiculares significa reduzir as ordenadas. Os pontos (x, y) obtidos reduzindo todas as ordenadas na proporção de a para b ($a > b > 0$) são tais que $y'/y = a/b$, ou seja, $y' = y.a/b$. Substituindo esse valor de y' na equação da circunferência $x^2 + y'^2 = a^2$, obtemos $x^2 + (y.a/b)^2 = a^2$, de onde resulta: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, que é a equação da elipse.

Propõe-se que o professor apresente:

- i) exercícios de identificação dos dois semieixos de elipses dadas por equações na forma $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, com a correspondente representação no plano cartesiano, bem como exercícios de escrita das equações de elipses já representadas no plano, com o centro na origem do sistema e com os valores dos semieixos indicados sobre os eixos coordenados;
- ii) exercícios de representação no plano cartesiano de hipérbolas dadas por equações na forma reduzida, sempre destacando as assíntotas, que podem ser obtidas pela simples fatoração da diferença de quadrados, característica da equação da hipérbole nessa forma;
- iii) exercícios de identificação do foco e da diretriz de diversas parábolas, expressas

por meio de equações do tipo $y = ax^2 + bx + c$, podem ser propostos. Para achar o foco, é fundamental antes achar o vértice; a partir daí, determina-se a equação da diretriz (se houver tempo disponível).

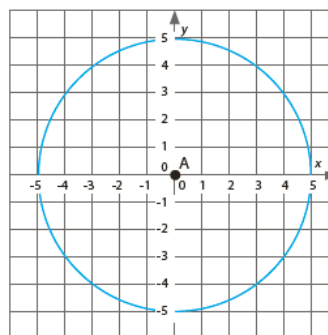
3.2 Cônicas na Avaliação da Aprendizagem em Processo (AAP)

A Avaliação da Aprendizagem em Processo - AAP, é uma avaliação realizada pelo Governo do Estado de São Paulo - SEE, ao final de cada bimestre. Em 2016, na Avaliação da Aprendizagem em Processo para a 3ª Série do Ensino Médio, relativa ao 1º bimestre, constavam três questões envolvendo os conteúdos circunferência, elipse, hipérbole e parábola (Questões 10, 11 e 12), que descrevemos a seguir:

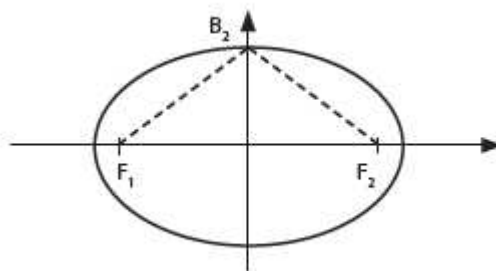
3.2.1 Questões da AAP - 2016

Questão 10) A equação que representa a circunferência de raio igual a 5 indicada no plano cartesiano a seguir é:

- (A) $x^2 + y^2 = \sqrt{5}$.
- (B) $x^2 + y^2 = 25$.
- (C) $-5x^2 + 5y^2 = \sqrt{5}$.
- (D) $5x^2 + 5y^2 = 5$.



Questão 11) Dada a elipse:



Qual é a área do triângulo $F_1F_2B_2$, de tal forma que F_1 e F_2 são focos e B_2 é o vértice do eixo menor da elipse: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$?

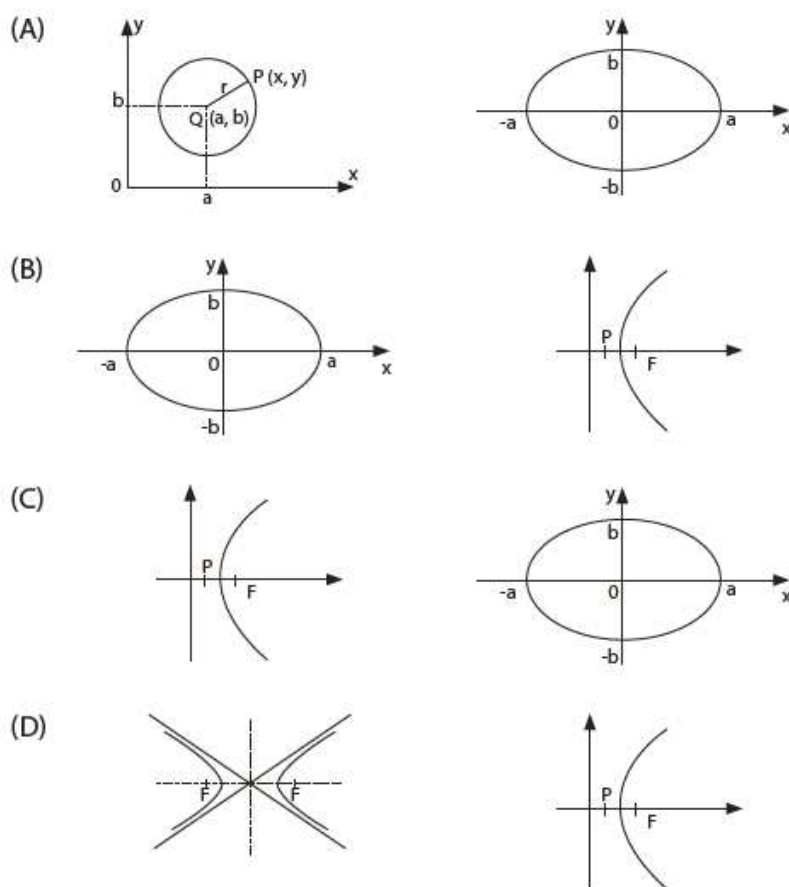
- (A) 12.
 (B) 13.
 (C) 16.
 (D) 25.

Questão 12) As definições I e II referem-se a duas superfícies cônicas

I) “é o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante e maior que a distância entre eles”

II) “é o conjunto dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo (foco) e de uma reta (diretriz), que não contém o ponto”

Portanto as definições apresentadas na ordem I e II, referem-se às seguintes representações gráficas.



3.2.2 Comentário acerca das questões apresentadas da Avaliação da Aprendizagem em Processo

As três questões (10, 11 e 12) tiveram, cada uma, um índice de 40% de acerto dos estudantes da 3ª Série do Ensino Médio que realizaram a avaliação na escola. A habilidade cobrada foi: “Resolver problemas por meio de equações da circunferência e das cônicas, com centro na origem em situações simples”. As três questões tinham níveis de dificuldade diferentes, de acordo com o apresentado no Quadro das Habilidades da Matriz Processual de Matemática - 1º Bimestre, a Questão 10 foi considerada de nível fácil, a 11 de nível difícil e a Questão 12 de nível médio.

Para obter a solução da Questão 10 basta observar que a circunferência está centrada na origem $(0,0)$ e que seu raio mede 5 cm. Daí, substituindo esses dados encontrados na equação canônica da circunferência: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, onde (x_0, y_0) indica o centro da circunferência e r é o raio ($r = 5$), obtém-se a equação $x^2 + y^2 = 25$. Logo, a alternativa correta é (B).

Já na Questão 11 temos que observar que a soma das distâncias $d(F_1, B_2) + d(B_2, F_2) = 2a$ e que o triângulo $F_1B_2F_2$ é isósceles de base F_1F_2 . Daí, segue que os segmentos F_1B_2 e B_2F_2 são congruentes de medida a . Logo, observando a equação da elipse $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ conclui-se que $(x_0, y_0) = (0,0)$, $a = 5$ e $b = 4$ e, conseqüentemente, os segmentos F_1B_2 e B_2F_2 medem 5cm cada. Assim, chamando o centro $(0,0)$ da elipse de O temos o triângulo F_1B_2O retângulo em O e, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras nele com $OF_1 = c$, $F_1B_2 = 5$ e $B_2O = 4$. Daí, temos que $OF_1 = c = 3$ cm. Aplicando, agora, a fórmula da área do triângulo para $F_1B_2F_2$ temos:

$$A(\triangle F_1B_2F_2) = \frac{F_1F_2 \times OB_2}{2} = \frac{6 \times 4}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

Logo a alternativa correta é a (A).

A Questão 12, o Item I) refere-se a Elipse e o II) a Parábola, assim tem como resposta a alternativa (B). O objetivo dessa questão era destacar o aprofundamento da competência leitora por meio da interpretação de um texto (definição da cônica) que descreve as características de duas formas de cônicas (elipse e parábola) e solicita-se a associação das definições (textos) com a representação gráfica das cônicas contidas nas

alternativas. Assim, não foram necessários cálculos ou o conhecimento da equação geral das cônicas, mas sim como estas são definidas.

Notemos que no enunciado da Questão 12, utilizar a expressão “superfícies cônicas” para as representações gráficas apresentadas não é adequado, uma vez que entende-se por superfície cônica a superfície (bidimensional) gerada por uma reta que passa por um ponto fixo e se apoia continuamente numa curva.

3.3 Cônicas na Matriz de Referência para Avaliação do SARESP

O assunto cônicas é abordado na Matriz de Referência para Avaliação do SARESP (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) - Matemática da 3ª série do Ensino Médio. A Habilidade que trata sobre o assunto é a número 23 (H23) que está presente no Grupo I (Competências para observar), e faz parte do Objetos de Conhecimento (conteúdos) relativo ao Tema 2 - Espaço e Forma, como competência da Área 2: Compreender as propriedades dos objetos e a sua posição relativa e desenvolver o raciocínio espacial por meio de construções e de formas. (SÃO PAULO, 2009, p. 87).

H23 Identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida, com centro na origem.

Figura 3.13 - Habilidade 23 da Matriz de Referência de avaliação do SARESP

Fonte: São Paulo (2009, p. 84 e 87)

3.4 Cônicas nos PCNEM e nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM (Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias), o conteúdo cônicas, assim como os demais conteúdos de Matemática não é mencionado explicitamente, uma vez que o

mesmo trata-se de um documento mais geral, com “uma explicitação das habilidades básicas, das competências específicas, que se espera sejam desenvolvidas pelos alunos em Biologia, Física, Química e Matemática nesse nível escolar, em decorrência do aprendizado dessas disciplinas e das tecnologias a elas relacionadas.” (BRASIL, 1998, p. 4)

No entanto, neste documento encontramos, por exemplo, que:

As finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a: [...]

- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas; [...]*
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo; [...] (BRASIL, 1998, p. 42)*

Como foi observado anteriormente, cônicas é um conteúdo com aplicações no cotidiano e que é utilizado na interpretação da ciência, com conexões com diferentes áreas, como a física e astronomia, por exemplo.

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (SÃO PAULO, 2002), o conteúdo cônicas é referido quando está sendo abordado o assunto Tecnologia para a Matemática, particularmente, sobre o uso de programas de computador, em especial de programas para o aprendizado de Geometria, conhecidos como programas de geometria dinâmica (como o software GeoGebra, que foi utilizado nas atividades experimentais desenvolvidas com alunos do Ensino Médio e que estão detalhadas no capítulo seguinte):

Já se pensando na Tecnologia para a Matemática, há programas de computador (softwares) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, referidos a seguir como programas de expressão. Os programas de expressão apresentam recursos que provocam, de forma muito natural, o processo que caracteriza o “pensar matematicamente”, ou seja, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas. [...] Para o aprendizado da geometria, há programas que

*dispõem de régua e compasso virtuais e com menu de construção em linguagem clássica da geometria [...] Feita uma construção, pode-se aplicar movimento a seus elementos, sendo preservadas as relações geométricas impostas à figura - daí serem denominados programas de geometria dinâmica. [...] Para o estudo das funções, das equações e das desigualdades da geometria analítica (retas, círculos, **cônicas**, superfícies), tem-se uma grande variedade de programa de expressão. Em muitos desses programas, pode-se trabalhar tanto com coordenadas cartesianas como com coordenadas polares. Os recursos neles disponibilizados facilitam a exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea, e isso ajuda o aluno a entender o conceito de função, e o significado geométrico do conjunto-solução de uma equação - inequação. (SÃO PAULO, 2002, p. 88-89, grifo nosso)*

Capítulo 4

Cônicas: Atividades experimentais para o Ensino Médio

Neste capítulo apresentamos algumas propostas de atividades para o estudo de cônicas com alunos do Ensino Médio utilizando o software GeoGebra. Tais atividades foram aplicadas com todos os alunos da 3ª Série do Ensino Médio de uma Escola Estadual da cidade de Poloni, estado de São Paulo, com uma participação média de 18 alunos por encontro. Descrevemos como essas atividades foram desenvolvidas, bem como o resultado da aplicação para os alunos da escola mencionada. Tais atividades seguiram uma sequência didática elaborada anteriormente. Apresentamos também a opinião de alguns alunos com relação ao uso do software para o desenvolvimento das atividades sobre cônicas e o ensino de Matemática.

4.1 Sequências didáticas para o estudo das Cônicas

As atividades aplicadas contemplaram um estudo das cônicas Elipse, Hipérbole e Parábola e foram divididas em três partes. Para auxiliar a aplicação foram elaborados roteiros/sequências didáticas. Observa-se que, para facilitar o uso do software e considerando o curto tempo que tínhamos para a aplicação em sala, na sequência didática apresentada, em geral, as letras usadas para indicar os pontos (na tela do GeoGebra) seguiram a nomeação feita pelo próprio software (por exemplo, não se indicou os focos por F , como se faz usualmente). Descrevemos a seguir cada uma delas:

4.1.1 Atividade 1: Um estudo da Elipse utilizando o GeoGebra

Nome: Série

1. Inicie o software GeoGebra;
2. Digite na caixa de “Entrada” a equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. (A Elipse será indicada pelo GeoGebra, na Janela de Álgebra, pela letra c).
3. Na caixa de Entrada digite: Foco[c]. Quais pontos foram marcados na tela do GeoGebra? $A = \dots\dots\dots$ e $B = \dots\dots\dots$ (Esses pontos são os focos da Elipse).
4. Na caixa de Entrada digite: Vértice [c]. Quais pontos foram marcados?
 $C = \dots\dots\dots$, $D = \dots\dots\dots$ (vértices no eixo x), $E = \dots\dots\dots$, $F = \dots\dots\dots$ (no eixo y)
5. Na caixa de Entrada digite: Centro [c]. O ponto obtido foi $G = \dots\dots\dots$
6. Com a ferramenta “Ponto” marque um ponto H qualquer sobre a Elipse;
7. Com a ferramenta “Segmento” construa dois segmentos, o que liga H ao foco A e o que liga H ao foco B (isto é os segmentos HA e HB).
8. Obtenha as medidas dos segmentos HA e HB com a ferramenta “Distância, Comprimento e Perímetro”, calcule a soma e anote na tabela abaixo. Na tabela estamos indicando por HA a medida do segmento HA , sendo H ponto da Elipse. (Para obter a soma pode-se também abrir uma Planilha em “Exibir-Planilha” ou pelo atalho: “Ctrl+Shift+S”. Na planilha, em A1 digite: HA , em B1: HB e em C1: $HA+HB$.) Arraste o ponto H sobre a Elipse, observe os valores encontrados para as medidas dos segmentos e complete a tabela seguinte considerando alguns outros pontos H sobre a Elipse:

HA	HB	$HA+HB$

O que você observa?

9. A medida do segmento AB (distância dos focos) é: ... E de CD (vértices) é:
 10. Comparando $HA+HB$ e a medida do segmento CD , o que você conclui?
- Dê a propriedade que um ponto qualquer “ H ” dessa Elipse satisfaz (usando a linguagem de foco):

11. Destaque a *Elipse* com uma cor diferente de preto (para tanto clique com o botão direito do mouse sobre a *Elipse*, selecione “propriedades” na tela que aparece e em seguida escolha a cor na guia “cor”).

12. Usando a ferramenta “Controle Deslizante”, que se encontra na 11ª caixa de ferramentas do GeoGebra, crie um controle deslizante “b” (clique sobre a tela de exibição, digite b, na tela que aparece; também digite nessa tela 0 e 10 para dar o intervalo).

13. Digite na caixa de Entrada a equação, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

14. Clique sobre o controle deslizante e movimente lentamente b. O que acontece com as figuras apresentadas na tela do GeoGebra quando:

a) tomamos $b = 0$? ; **b)** b se aproxima de zero?

c) $b = 3$?; **d)** $b = 5$?; **e)** $b > 5$?

15. Construa outra *Elipse* digitando na caixa de Entrada a equação: $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$.

16. Quais são as coordenadas do centro dessa nova *Elipse*? O centro é o mesmo que o da *Elipse* inicial c ?

17. Destaque essa nova *Elipse* com outra cor.

18. Insira a “Malha” na tela do GeoGebra, caso a Malha não esteja aparecendo (para tanto clique com o botão direito do mouse e selecione “Malha” na tela que aparece).

19. Marque usando a ferramenta “Vetor”, que se encontra na 3ª caixa, o vetor (2, 3) clicando sobre os pontos (0, 0) e (2, 3), respectivamente.

20. Com a ferramenta “Translação por um vetor”, que se encontra na 9ª caixa, translate a *Elipse* c pelo vetor (2, 3) (clique na *Elipse* e em seguida no vetor). O que você observa?

21. Com a ferramenta “Rotação em torno de um ponto”, localizada também na caixa 9, rotacione a *Elipse* c através da origem do sistema cartesiano XY por um ângulo de 45°, 90° e 120°. (Clique na *Elipse*, no centro (0, 0) e digite, na tela que aparece, o ângulo de interesse). O que você observa?

22. Analise as equações das novas *Elipses* que são apresentadas na Janela de Álgebra. Aparecerá em alguma o termo xy? Escreva essas equações na tabela:

Rotação 45°	Rotação 90°	Rotação 120°

4.1.2 Atividade 2: Um estudo da Hipérbole com o GeoGebra

Nome: Série

1. Digite na caixa de “Entrada” a equação $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$. (A Hipérbole será indicada pelo GeoGebra, na Janela de Álgebra, pela letra c).

2. Na caixa de Entrada digite: Foco[c]. Quais pontos foram marcados na tela do GeoGebra? $A = \dots\dots\dots$ e $B = \dots\dots\dots$ (Esses pontos são os focos da Hipérbole).

3. Na caixa de Entrada digite: Vértice [c]. Quais pontos foram marcados? $C = \dots\dots\dots$ e $D = \dots\dots\dots$

4. Na caixa de Entrada digite: Centro [c]. O ponto obtido foi $E = \dots\dots\dots$

5. Com a ferramenta “Ponto” marque um ponto F qualquer sobre a Hipérbole;

6. Com a ferramenta “Segmento” construa dois segmentos, o que liga F ao foco A e o que liga F ao foco B (isto é os segmentos FA e FB).

7. Obtenha o comprimento dos segmentos FA e FB com a ferramenta “Distância, Comprimento e Perímetro”, calcule $|FA - FB|$ e anote na tabela abaixo. Estamos indicando por FA a medida do segmento FA , sendo F ponto qualquer da Hipérbole e A e B os focos. (Para obter $|FA - FB|$ pode-se abrir uma Planilha em “Exibir-Planilha” ou pelo atalho: “Ctrl+Shift+S”. Na planilha, em A1 digite: FA , em B1: FB e em C1: $abs(FA-FB)$). Arraste o ponto H sobre a Hipérbole, observe os valores encontrados para as medidas dos segmentos e complete a tabela considerando alguns outros pontos H sobre a Hipérbole.

FA	FB	$ FA - FB $

O que você observa?

8. A medida do segmento AB (distância dos focos) é E de CD (vértices) é

9. Comparando $|FA - FB|$ e a medida do segmento CD , o que você conclui?

Dê a propriedade que um ponto qualquer “ F ” dessa hipérbole satisfaz (usando a linguagem de foco):

- 10.** Destaque a Hipérbole com uma cor diferente de preto (para tanto clique com o botão direito do mouse sobre a Hipérbole, selecione propriedades na tela que aparece e a cor).
- 11.** Usando a ferramenta “Controle Deslizante” crie um controle deslizante “b” (digite b na tela que aparece; também digite nessa tela 0 e 50 para o intervalo de variação de b).
- 12.** Digite na caixa de Entrada a equação: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- 13.** Clique sobre o controle deslizante e movimente lentamente b. O que acontece com as figuras apresentadas na tela do GeoGebra quando: **a)** consideramos $b = 0$?; **b)** b se aproxima de zero?; **c)** $b = 3$?; **d)** b se aproxima de 50?
- 14.** Altere o intervalo do controle deslizante de “b” para $[0, 100]$ clicando com o botão direito do mouse sobre o controle e selecionando “ferramentas”. O que você observa ao movimentar agora b para próximo de 100? A Hipérbole poderá se transformar nas duas retas paralelas: $x = -5$ e $x = 5$? Por quê?
- 15.** Construa uma nova Hipérbole digitando na caixa de Entrada: $\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$;
- 16.** Quais são as coordenadas do centro dessa nova Hipérbole? O centro é o mesmo que o da Hipérbole inicial c?
- 17.** Destaque essa nova Hipérbole com outra cor.
- 18.** Insira a “Malha” na tela do GeoGebra caso a malha não esteja aparecendo (para tanto clique com o botão direito do mouse e selecione “Malha” na tela que aparece).
- 19.** Marque usando a ferramenta “Vetor” o vetor $(2, 1)$ (o vetor que tem início em $(0, 0)$ e termina em $(2, 1)$).
- 20.** Com a ferramenta “Translação por um vetor” translade a Hipérbole c pelo vetor $(2, 1)$ (clique na Hipérbole e em seguida no vetor). O que você observa?
- 21.** Com a ferramenta “Rotação em torno de um ponto”, rotacione a Hipérbole c através da origem do sistema cartesiano XY por um ângulo de 45° , 90° e 120° . (Clique na Hipérbole, no centro e digite na tela que aparece o ângulo de interesse). O que você observa?
- 22.** Analise as equações das novas Hipérboles que são apresentadas na Janela de Álgebra. Aparecerá em alguma o termo xy? Escreva essas equações na tabela:

Rotação 45°	Rotação 90°	Rotação 120°

4.1.3 Atividade 3: Um estudo da Parábola com o GeoGebra

Nome: Série

1. Digite na caixa de “Entrada” a equação $y^2 = 8x$. (A Parábola será indicada pelo GeoGebra, na Janela de Álgebra, pela letra c).
2. Marque o ponto $A = (2, 0)$ e em seguida digite na caixa de “Entrada” a equação da reta $x = -2$.
3. Marque um ponto B qualquer sobre a Parábola.
4. Construa o segmento AB com ajuda da ferramenta “Segmento”,
5. Construa a reta perpendicular a reta $x = -2$, passando por B . (Para isso, clique na ferramenta “Reta Perpendicular”). A equação dessa reta construída é:
6. Marque o ponto C , intersecção das retas perpendiculares.
7. Construa o segmento BC com ajuda da ferramenta “Segmento”.
8. Obtenha o comprimento dos segmentos AB e BC com a ferramenta “Distância, Comprimento e Perímetro” do GeoGebra e anote na tabela abaixo. Na tabela estamos indicando por AB a medida do segmento AB , sendo B ponto qualquer da parábola. (Pode-se abrir uma Planilha em “Exibir-Planilha” ou pelo atalho: “Ctrl+Shift+S” para dispor esses valores. Na planilha, em A1 digite: AB , em B1: BC). Mova o ponto B sobre a parábola, observe os valores encontrados para as medidas dos segmentos e complete a tabela considerando alguns outros pontos B sobre a parábola.

AB	BC

O que você observa?

9. Complete na tabela seguinte os elementos da parábola construída:

<i>Equação da parábola</i>	
<i>Foco</i>	
<i>Diretriz</i>	
<i>Valor da constante "p" = d(F,r)/2</i>	

10. Vamos agora construir, usando ferramenta do GeoGebra, uma parábola sendo dados um ponto e uma reta que não contém esse ponto. Para tanto inicialmente abra um arquivo "novo" no GeoGebra. Marque um ponto *A* qualquer sobre o plano e, a seguir, construa com a ajuda da ferramenta "Reta" do GeoGebra uma "reta *BC*" qualquer, que não contenha o ponto *A*.

11. Com a ferramenta "Parábola" clique sobre o ponto *A* e em seguida sobre a reta *BC*. O que aparece na tela do GeoGebra? O que significam/indicam o ponto *A* e a reta *BC* com relação a figura apresentada na tela?

12. Marque um ponto *D* qualquer sobre a parábola e depois construa uma reta perpendicular a reta *BC* passando por *D*. Marque *E*, o ponto de intersecção das duas retas perpendiculares.

13. Construa os segmentos *AD* e *DE* e meça-os, marcando os resultados em uma Planilha do GeoGebra ou na tabela abaixo.

<i>AD</i>	<i>DE</i>

O que você observa?

14. Identifique os elementos da parábola construída:

<i>Equação da parábola</i>	
<i>Foco</i>	
<i>Diretriz</i>	
<i>Valor da constante "p"</i>	

4.2 Aplicação das Atividades em Sala de Aula

Para o desenvolvimento de cada uma das atividades em sala utilizou-se duas aulas.

A primeira cônica trabalhada com os alunos no Laboratório de Informática da escola foi a Elipse, de acordo com a Atividade 1, descrita anteriormente. Num primeiro momento questionou-se os alunos sobre o uso do Laboratório de Informática e do software GeoGebra; os mesmos relataram que não tinham o hábito de frequentar o Laboratório de Informática nas aulas de Matemática e que a última vez que trabalharam com o GeoGebra foi quando estavam cursando o 9º Ano do Ensino Fundamental. Por esse motivo, foi necessário revisar as ferramentas do software com os alunos, de modo que o tempo utilizado para o desenvolvimento da Atividade 1 (sobre Elipse) com os alunos foi um pouco maior do que o usado para as outras duas.

Após esse trabalho inicial com as ferramentas básicas do GeoGebra, investigamos os conhecimentos prévios que os alunos tinham sobre Elipse: equação, elementos, esboço da curva etc. Nessa conversa constatamos que eles conheciam a elipse, já a tinham estudado no início do ano, mas os conceitos não estavam tão claros para eles naquele momento.

Assim, começamos a atividade construindo uma elipse no GeoGebra a partir de sua equação. Com o esboço da curva na tela do computador perguntamos quais seriam (onde estariam) os pontos que representavam alguns elementos como: centro, focos e vértices. Destes três, os focos foram os mais difíceis deles encontrarem. Os alunos conseguiram apontar a sua localização aproximada no plano, mas não se lembravam como determiná-los. A partir da equação, com o desenvolvimento da atividade, os elementos foram reconhecidos e o conceito de elipse como lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias aos focos é uma constante fixada ficou claro. Com o uso do software, os alunos também discutiram o conceito de excentricidade e trabalharam com a elipse transladada e rotacionada comparando suas equações com a da elipse inicialmente dada/traçada.

Notou-se que os alunos desenvolveram bem a atividade e compreenderam o que estavam fazendo, mas não tinham normalmente a linguagem necessária para expressar matematicamente os conceitos envolvidos. No Item 8, da Atividade 1 (em que se pedia, essencialmente, para completar a tabela com as medidas dos segmentos HA , HB e a soma

$HA+HB$, onde A e B indicam os focos, H um ponto da Elipse que era movimentado (sobre a elipse), usando a ferramenta do GeoGebra, o aluno L , por exemplo, visualizou que a soma $HA+HB$ era constante, mas não soube expressar isto de maneira clara, já o aluno M respondeu corretamente.

HA	HB	HA + HB
$a = 2.35$	$F = 7.65$	10
$a = 2.76$	$F = 7.24$	10
$a = 7.34$	$F = 2.66$	10
$a = 4.9$	$F = 5.1$	10

O que você observa?

Que todo resultado final a soma é sempre 10

Figura 4.1 - Resposta apresentada pelo aluno L relativa ao Item 8 da Atividade 1

HA	HB	HA + HB
7,61	2,39	10
3,31	6,69	10
6,25	3,75	10
1,43	8,57	10

O que você observa?

Quo mudar o ponto H em diferentes pontos na elipse, o valor de $HA+HB$ vai ser sempre 10

Figura 4.2 - Resposta apresentada pelo aluno M relativa ao Item 8 da Atividade 1

Já no Item 10 que solicitava a propriedade que um ponto qualquer “ H ” dessa Elipse satisfaz (usando a linguagem de foco), observou-se que os alunos apresentaram dificuldade em expressar corretamente a definição de elipse usando essa linguagem. Nas figuras seguintes tem-se duas das respostas apresentadas pelos alunos.

Que a soma de qualquer segmento entre H e outro foco, vai ter sempre o mesmo resultado.

Figura 4.3 - Resposta apresentada pelo aluno N relativa ao Item 10 da Atividade 1

Independente da localização do H sobre a elipse, a soma de HA e HB sempre será a mesma.

Figura 4.4 - Resposta apresentada pelo aluno O relativa ao Item 10 da Atividade 1

No Item 14 os alunos trabalharam com a excentricidade da elipse. Observaram o que acontece com as figuras apresentadas na tela do GeoGebra quando alteramos os valores de um dos eixos da elipse (no caso, utilizando-se o “controle deslizante” do GeoGebra,

solicitou-se que b fosse alterado e, deslizando-se lentamente b nesse controle, analisou-se as figuras apresentadas, de acordo com os valores que b assumia). Na figura seguinte apresenta-se a resposta do aluno P relativa a esse item.

- a) $b = 0$: a elipse "some".
 b) b se aproxima de zero: ela começa a aparecer perto da abscissa.
 c) $b = 3$: Ela se iguala a outra elipse C .
 d) $b = 5$: a elipse tornou-se um círculo.
 e) $b > 5$: a elipse expandiu o ponto Y e manteve o X .

Figura 4.5 - Resposta apresentada pelo aluno P relativa ao Item 14 da Atividade 1

Na Atividade 2, os alunos trabalharam com a Hipérbole. Nesse momento os alunos estavam com um domínio maior sobre o software e alguns já tinham estudado em casa sobre a Hipérbole. A atividade seguiu os mesmos moldes da anterior. Conversamos com os alunos de maneira investigativa sobre o que eles sabiam sobre essa curva. Novamente, a atividade levou-os a visualizar os conceitos de centro, focos, vértices e assíntotas da Hipérbole. Depois, foi trabalhada a Hipérbole rotacionada e transladada, comparando também suas equações com a da Hipérbole dada/construída inicialmente.

Nessa atividade, no Item 7, por exemplo, em que se pedia, para completar a tabela com as medidas dos segmentos FA , FB , e o valor $|FA - FB|$, sendo F ponto qualquer da Hipérbole e A e B os seus focos, observou-se que alguns tinham dificuldade em trabalhar com valor absoluto, como indicado na resposta do aluno Q

FA	FB	$ FA - FB $
3,58	13,58	-10
15,04	5,04	10

O que você observa?
 $|FA - FB|$ sempre vai ter resultado 10, se o ponto F estiver na direita o 10 vai ser positivo, se estiver do lado esquerdo do gráfico será negativo (-10).

Figura 4.6 - Resposta apresentada pelo aluno Q relativa ao Item 7 da Atividade 2

No Item 13, que pedia para usar o controle deslizante e analisar as figuras correspondentes mostradas na tela, a resposta do aluno R (para o caso $b=0$), diferentemente da apresentada pela maioria, que era que apenas a "figura sumiu" ou que não

existia nenhuma figura neste caso, foi mais completa, pois ele respondeu que (de acordo com a equação dada) a hipérbole (para $b=0$) não está definida porque não é possível dividir por zero.

a) $b=0$: Nunca, porque não se divide algo por 0.

Figura 4.7 - Resposta apresentada pelo aluno R relativa ao Item 13 da Atividade 2

Foi discutido com os alunos (Item 14) que uma hipérbole do tipo $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, mesmo para um valor de b muito grande, jamais será representada como duas retas paralelas. Para valores grandes de b as hipérbolas se aproximam das duas retas e, pela limitação do software, tem-se a impressão de uma representação equivocada da cônica.

Os alunos observaram também a presença do termo quadrático misto na equação das hipérbolas que não apresentavam seus eixos sobre os eixos coordenados x e y (Item 22), isto é, que somente as equações das hipérbolas que foram obtidas por rotação de 45° e 120° (da hipérbole inicial centrada) tinham o termo xy presente em suas equações (na obtida pela rotação de 90° não constava). Segue a resposta apresentada pelo aluno S nesse caso.

Rotação 45°	Rotação 90°	Rotação 120°
$-0,57x^2 + 2,42xy - 0,57y^2 - 0,03x + 0,03y = 16$	$-1,78x^2 + 0,64y^2 - 0,05x = 16$	$-1,17x^2 - 2,09xy + 0,04y^2 - 0,04x - 0,03y - 16$
Sim, na de 45° e 120° .		

Figura 4.8 - Resposta apresentada pelo aluno S relativa ao Item 22 da Atividade 2

Na Atividade 3, foi trabalhada a cônica Parábola com os alunos. Durante a atividade investigativa percebemos que eles conheciam essa curva como gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, que aprenderam na 1ª Série do Ensino Médio, mas não tinham os conceitos envolvidos bem definidos. A atividade foi desenvolvida ilustrando e destacando os conceitos como foco, diretriz, etc, com os alunos. De modo geral, essa terceira atividade foi a que os alunos tiveram menos dúvidas, conseguiram efetuar mais rapidamente as construções e responder as questões da sequência didática apresentada com maior autonomia, e o tempo necessário para realização/conclusão da atividade foi menor.

Nessa atividade, no Item 8, os alunos observaram que a distância de qualquer ponto da parábola até seu foco é igual a distância desse mesmo ponto até a reta diretriz da parábola. Na figura seguinte tem-se a resposta do aluno T para esse Item (em que B indica um ponto qualquer sobre a parábola, A o foco e C a projeção de B sobre a reta diretriz r , de modo que as distâncias $d(B, r) = d(B, C)$).

AB	BC
5.51	5.51
4.76	4.76
7.38	7.38
2.02	2.02

O que você observa?

Que independente de onde o ponto B se localiza, a distância entre AB, BC sempre será a mesma.

Figura 4.9 - Resposta apresentada pelo aluno T relativa ao Item 8 da Atividade 3

No Item 11, os alunos construíram, utilizando ferramenta do GeoGebra, uma parábola, sendo dados um ponto e uma reta que não continha o ponto (ou seja o foco e a reta diretriz) e identificaram esses elementos na figura, anotando suas observações.

Formou-se uma parábola. "A" é o foco e a reta BC é a diretriz

Figura 4.10 - Resposta apresentada pelo aluno U relativa ao Item 11 da Atividade 3

No Item 13, novamente, para a nova parábola obtida, os alunos observaram que a distância de qualquer ponto da parábola até seu foco é igual a distância desse mesmo ponto até a reta diretriz.

AD	DE
3,05	3,05
2	2
2,31	2,31
1,62	1,62
2,09	2,09

O que você observa?

A MEDIDA DE AD e DE É SEMPRE IGUAL

Figura 4.11 - Resposta apresentada pelo aluno V no Item 11 da Atividade 3

De fato, vimos que houve um desenvolvimento dos alunos com relação ao software e concluímos que a atividade contribuiu para o aprendizado deles sobre as cônicas trabalhadas. Ao final das atividades, mais a título de curiosidade, conversamos com os alunos sobre a existência das cônicas degeneradas.

No que segue apresenta-se algumas fotos relativas ao desenvolvimento das atividades no Laboratório de Informática da escola.



Figura 4.12 - Alunos desenvolvendo as atividades no Lab. de Informática (Fotos 1-2)

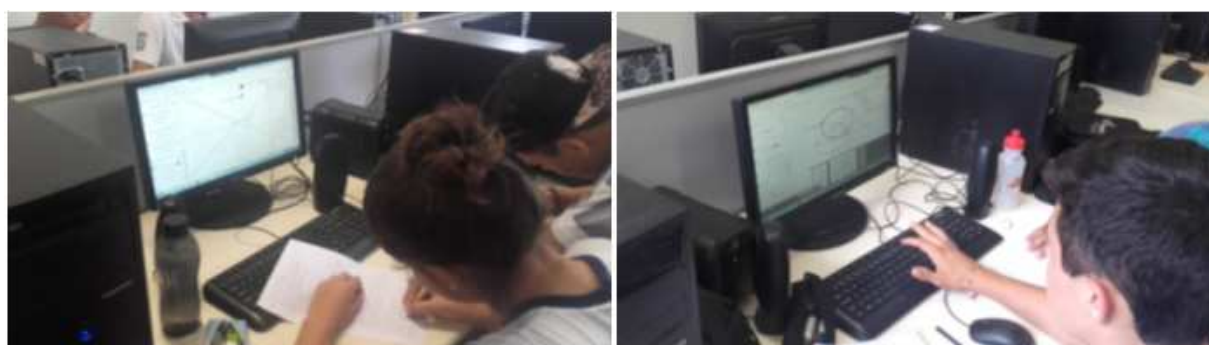


Figura 4.13 - Alunos desenvolvendo as atividades no Lab. de Informática (Fotos 3-4)

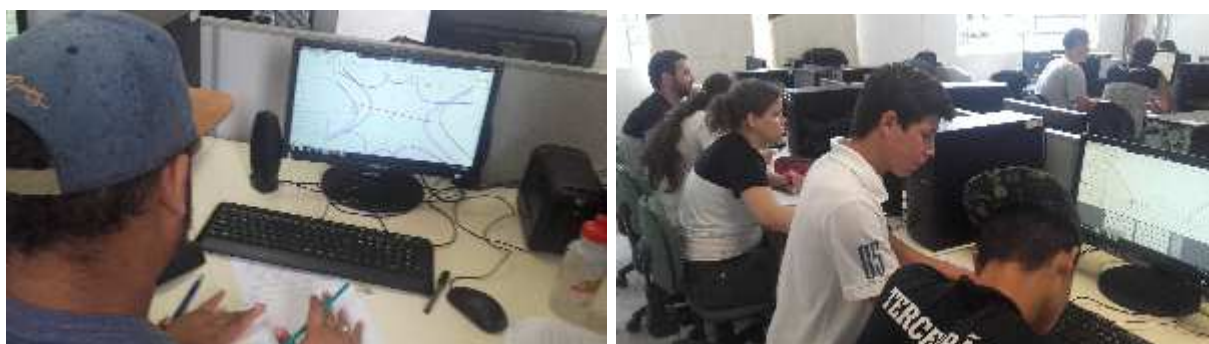


Figura 4.14 - Alunos desenvolvendo as atividades no Lab. de Informática (Fotos 5-6)



Figura 4.15 - Alunos desenvolvendo as atividades no Lab. de Informática (Fotos 7-8)

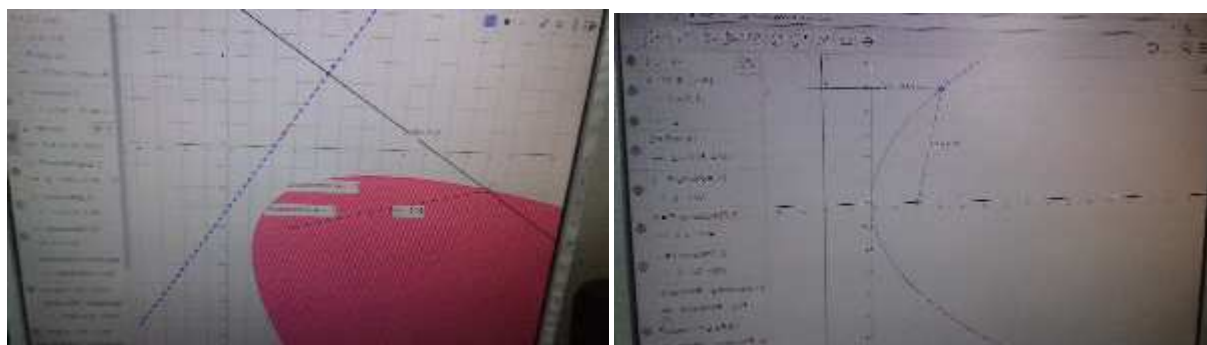


Figura 4.16 - Alunos desenvolvendo as atividades no Lab. de Informática (Fotos 9-10)

4.3 Questionário Online-sobre o desenvolvimento das atividades com o GeoGebra

Ao final do desenvolvimento das atividades, realizadas experimentalmente com os alunos no Laboratório de Informática usando o GeoGebra, foi aplicado um questionário de avaliação (online) sobre a forma em que o trabalho foi feito. Ocasão em que os alunos puderam apresentar suas impressões com relação ao trabalho realizado e o uso do software GeoGebra. O questionário foi respondido em duplas.

Nos quadros seguintes apresentamos as questões e sintetizamos as respostas dos alunos:

Questão 1: *Você acha que houve melhora no entendimento do conteúdo com a realização da atividade? Explique.*

“Sim, houve uma melhora pois, com a prática usando o aplicativo o entendimento é facilitado.”

“Sim, pois com ajuda do software tudo foi mais rápido.”

“Sim, pois as atividades realizadas no software são mais fáceis de ser entendidas.”

“Sim. Pois as atividades são mais fáceis de resolver.”

“Sim, as atividades são bastante complexas, porém, com a orientação da professora consegui desenvolvê-las bem.”

Questão 2: *Você acha que o conteúdo cônicas deveria ser trabalhado inicialmente em sala de aula e depois faria as atividades usando o GeoGebra ou deveria ser já introduzido com o auxílio do software? Por quê?*

“Depois, pois esclarece melhor o conteúdo.”

“Antes, para que o entendimento seja maior durante a prática.”

“Antes para já ter uma noção da matéria.”

“Depois, pois é mais rápido de fazer e também de entender a matéria.”

“Depois. Porque depois do software é mais rápido as atividades.”

“Depois, pois já se tem algumas noções básicas de informática.”

Questão 3: *Com que frequência você gostaria que fossem feitas aulas que contassem com o auxílio do GeoGebra?*

“Sempre que começar uma matéria nova.”

“Na maioria.”

“Frequentemente, uma vez por semana.”

“Frequentemente, para um melhor conhecimento.”

“Sempre, são gostosas depois que pegamos o jeito.”

“Com bastante frequência.”

Questão 4: *Quantas vezes você já assistiu uma aula de Matemática em que o professor utilizou um software computacional para facilitar no entendimento do aluno?*

“Nenhuma.”

“3 aulas.”

“5 aulas.”

“Umas 6 aulas.”

“Umas 10 aulas.”

“Algumas vezes.”

Questão 5: *Nas atividades foram trabalhadas cônicas rotacionadas e transladas e não somente as centradas na origem no sistema cartesiano. Você acha que houve um melhor entendimento desses casos com o uso do GeoGebra? Por quê?*

“Sim, pois o GeoGebra mostra os gráficos corretamente.”

“Sim, pois a exemplificação junto com a prática é mais efetiva.”

“Sim, porque ele tornou mais fácil o nosso aprendizado.”

“Claro, porque a aula facilitou o entendimento.”

“Sim. Com o uso do geogebra facilitou o entendimento.”

“Sim, deu para ter uma noção maior sobre cônicas.”

Questão 6: *O que você gostou mais no GeoGebra?*

“A prática para fazer as coisas.”

“A praticidade e facilidade com que se realiza as coisas.”

“A velocidade.”

“A rapidez de resolução.”

“A rapidez de resolver uma atividade.”

“As ferramentas são fáceis de manusear.”

“Que ele faz tudo para você.”

Questão 7: <i>O que você não gostou no GeoGebra?</i>
“Que para quem não conhece o básico, ele é meio complexo.”
“Às vezes não é possível acessar com uma conexão de internet fraca.”
“Ele podia ser mais fácil para utilizar.”
“Um pouco complicado.”
“Ele é um pouco complicado de localizar os pontos.”
“Nada.”

Questão 8: <i>Que outros conteúdos matemáticos você acha que poderiam ser tratados por meio do software GeoGebra?</i>
“Outros tipos de gráficos.”
“Geometria Analítica.”
“Gráficos.”
“Resolução de equações e outros.”
“Várias atividades, como equações, cálculos difíceis e muito mais.”
“Todos que envolvem gráficos.”
“Funções.”

Observamos que o auxílio do GeoGebra na execução das atividades rendeu bons frutos com relação à aprendizagem dos alunos. A grande maioria deles aprovou o uso do software nas aulas de Matemática relatando que os conteúdos ficaram mais simples de entender e os exercícios mais fáceis de resolver.

Considerações finais

O assunto Cônicas no Ensino Médio é um assunto complexo. Por esse motivo, muitos professores “pulam” esse conteúdo ou acabam passando somente alguns conceitos mais básicos, não tratando as cônicas como parte do Currículo de Matemática. Com as atividades desenvolvidas pode-se verificar que o ensino e a aprendizagem das cônicas é acessível a todos, pois com o uso de ferramentas adequadas (como o software GeoGebra) os conceitos ficaram mais fáceis de ser compreendidos. Não podemos deixar de considerar que nossos alunos pertencem a uma geração tecnológica e que as aulas também devem seguir o mesmo ritmo se quisermos conquistar os alunos. Assim, o uso do GeoGebra nas aulas de Matemática é um aliado dos professores no processo de ensino. Vale observar que a habilidade sobre cônicas cobrada no Currículo de Matemática, aborda somente as cônicas centradas na origem e não rotacionadas, enquanto as atividades da sequência didática apresentadas no Capítulo 4 tratavam, um pouco, de cônicas rotacionadas e transladas e esse tratamento não tornou mais difícil a execução das atividades e nem a compreensão dos alunos.

Este trabalho foi muito importante para minha formação docente de modo que pude aprofundar meus estudos com relação às cônicas e entender melhor os processos de reconhecimentos das mesmas. Espero que ele sirva como apoio para professores da Educação Básica, estudantes e outros interessados no assunto. Que as sequências didáticas possam ser utilizadas/adaptadas pelos professores do Ensino Médio para serem desenvolvidas com os seus alunos, no Laboratório de Informática da escola.

Referências

- [1] ÁVILA, G.; A Hipérbole e os telescópios. *Revista do Professor de Matemática*, nº 34, p. 22-27, São Paulo: SBM, 1997.
- [2] BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G.; Álgebra Linear. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1984.
- [3] BOULOS, P.; CAMARGO, I. de; Geometria Analítica um tratamento vetorial. 3a. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.
- [4] BOYER, B. C.; História da Matemática. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.
- [5] BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Secretaria de Educação. Brasília: MEC/SEE, 1998.
- [6] BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Orientações Curriculares Para o Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002. 144 p.
- [7] CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. Álgebra Linear e Aplicações. São Paulo: Atual, 1995.
- [8] EVES, H.; Introdução à História da Matemática. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
- [9] GIOVANNI, J. R.; BONJORNIO, J. R.; Matemática Completa. 2. ed. renov. São Paulo: FTD, 2005.

-
- [10] HEFEZ, A; FERNANDES, C. de S.; Introdução à Álgebra Linear. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- [11] IEZZI, G. Fundamentos de Matemática Elementar. v. 7, 5. ed. São Paulo: Atual, 2005.
- [12] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Caderno do Professor: Matemática, Ensino Médio, 3ª Série, v 1. São Paulo, SE, 2014.
- [13] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e sua Tecnologias - Ensino Fundamental - Ciclo II e Médio. São Paulo, SEE, 2011.
- [14] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. SARESP, 2008: Matrizes de Referência para a Avaliação: Matemática/ Secretaria da Educação. SEE, 2009.
- [15] SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; Matemática: Ensino Médio. v. 3, 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.