



Universidade Federal de Goiás  
Instituto de Matemática e Estatística  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



## A Hipérbole e suas Aplicações

Diego Maradona Félix da Silva

Goiânia

2013

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

- 1. Identificação do material bibliográfico:** **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**
- 2. Identificação do Trabalho**

Autor (a):		Diego Maradona Félix da Silva			
E-mail:		diego.maradona11@hotmail.com			
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não					
Vínculo empregatício do autor		Secretaria da Educação do Estado de Goiás			
Agência de fomento:		Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla:	CAPES	
País:	Brasil	UF:	GO	CNPJ:	00889834/0001-08
Título:		A Hipérbole e suas Aplicações			
Palavras-chave:		Geometria Analítica; Cônicas; Parábola; Hipérbole; Coordenadas polares.			
Título em outra língua:		The Hyperbole and its Applications			
Palavras-chave em outra língua:		Analytical Geometry; Conics; Parable; Hyperbole; Polar coordinates.			
Área de concentração:		Matemática do Ensino Básico.			
Data defesa: (dd/mm/aaaa)		15/03/2013			
Programa de Pós-Graduação:		Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT			
Orientador (a):		Prof. Dr. Durval José Tonon			
E-mail:		ditonon@gmail.com			
Co-orientador(a):*					
E-mail:					

\*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento  SIM  NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Diego Maradona Félix da Silva.  
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 26 / 03 / 2013

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Diego Maradona Félix da Silva

## A Hipérbole e suas Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon.

Goiânia

2013

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
GPT/BC/UFG**

S586h Silva, Diego Maradona Félix da.  
A hipérbole e suas aplicações [manuscrito] / Diego Maradona Félix da Silva. - 2013.  
105 f. : figs, tabs.

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,  
Instituto de Matemática e Estatística, 2013.  
Bibliografia.  
Inclui lista de figuras.

1. Geometria analítica. 2. Cônicas. 3. Parábola. 4.  
Hipérbole. I. Título.

CDU: 514.133



**Diego Maradona Félix da Silva**

**A Hipérbole e suas Aplicações**

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 15 de março de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



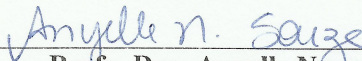
---

**Prof. Dr. Durval José Tonon**  
Instituto de Matemática e Estatística-UFG  
Presidente da Banca



---

**Profa. Dra. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues**  
Membro/UnB



---

**Profa. Dra. Anyelle Nogueira de Souza**  
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Diego Maradona Félix da Silva** graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás em 2005. Kursou à distância, pela Universidade Gama Filho o curso de Pós-Graduação "Lato Sensu" em Docência Superior no período de Janeiro de 2007 a Janeiro de 2008. Atualmente é professor da Secretaria Estadual de Educação em Goiânia, Colégio UNUS e Faculdade Sulamérica.

Dedico este Trabalho à minha mãe Ivone Breviglieri Félix da Silva que sozinha conseguiu me guiar pelo caminho certo através do trabalho, honestidade, perseverança, determinação e principalmente superação além do apoio e cuidados comigo.

# Agradecimentos

Agradeço...

À DEUS, por me dar força e saúde para enfrentar os desafios que procuramos e colocar pessoas certas em momentos certos em minha vida;

Aos meus amigos e familiares, principalmente à minha mãe Ivone Breviglieri Félix da Silva por todo apoio, incentivo, dedicação e cuidados comigo;

À minha noiva Nayara Lemes, sempre me incentivando e mostrando que eu posso ser mais do que imagino;

À minha sobrinha Eduarda de 8 meses que é fonte de energia, ânimo e inspiração;

Aos meus amigos do PROFMAT que me apoiaram, em especial ao Dilermano Arruda, Marcos Antônio e suas respectivas esposas Juliana e Poliana, simplesmente pela hospitalidade e paciência. Vale ressaltar também principalmente nesta reta final as contribuições de César Pereira e Hugo César Peixoto.

Aos meus coordenadores das escolas em que trabalho, que em nenhum momento sequer mediram esforços a se prontificar a me ajudar, são eles: Yara Medeiros, Frederico Moreira, Márcia, Elenice, Vilma, Sandra Carrijo e Eduvirges;

Ao professor Dr. Durval José Tonon, pela orientação;

À CAPES, pelo incentivo financeiro.



## Resumo

*A Hipérbole e suas Aplicações* inicia-se com um breve contexto histórico sobre o qual se originou o estudo das cônicas e propõe uma abordagem diferenciada para o estudo de cônicas no Ensino Médio devido a grande quantidade de aplicações importantes das propriedades das cônicas no cotidiano.

O primeiro capítulo do trabalho trata-se dos conceitos preliminares para um bom estudo da hipérbole. Logo em seguida apresentamos o conceito de hipérbole, seus principais elementos, rotação de eixos e propriedades da hipérbole. Dentre essas propriedades, o principal objeto de estudo será a propriedade refletora da hipérbole, pois é esta que tem aplicações nos mais variados ramos da ciência tal como Astronomia, nos telescópios e na navegação. Algumas aplicações serão citadas brevemente e outras abordadas com mais detalhes.

Finalizando, apresentaremos um novo sistema de coordenadas também muito utilizado: o sistema de Coordenadas Polares e adotando esse novo sistema, deduzir as equações da elipse, parábola e hipérbole.

**Palavras-chave:** Geometria Analítica; Cônicas; Parábola; Hipérbole; Coordenadas polares.

## Abstract

*The Hyperbole and its Applications* begins with a brief historical background on the origins of the conic sections analysis, followed by a proposition of a new approach to the conic sections studies in High School, due to the large amount of important applications these studies have in everyday life.

The first chapter of the research presents the primary concepts necessary to a good hyperbole study understanding. After presenting this concepts the research focuses in the evidence of the hyperbole concept, its most important elements, the rotary axis and the hyperbole properties. Among these properties, the main object of this study is the reflective hyperbole property, since it can be applied to many fields of study such as Astronomy, in the Telescopes and even Navigations. Some other properties are briefly mentioned during this work and others have a more detailed approach.

Finally, a largely used new coordinates system is presented - the Polar Coordinate System. The research purpose is to infer, by the use of this new system, the equations of the ellipse, parable and hyperbole.

**Keywords:** Analytical Geometry; Conics; Parable; Hyperbole; Polar coordinates.

## Lista de Figuras

1	Terceira proporcional . . . . .	16
2	Parábola de Menaecmus . . . . .	17
3	Secções cônicas. . . . .	20
4	Hipérbole com dois ramos. . . . .	20
5	Ponto representado no plano . . . . .	22
6	Distância entre dois pontos . . . . .	23
7	Mediana $\overline{AM}$ . . . . .	23
8	Mudança de coordenadas: Translação. . . . .	24
9	Reta $\overline{AB}$ . . . . .	25
10	Circunferência . . . . .	26
11	Mediatriz . . . . .	27
12	Esboço da região dada no Exemplo 2.3 . . . . .	28
13	Construção de uma hipérbole. . . . .	30
14	Lugar geométrico da hipérbole. . . . .	30
15	Elementos da hipérbole . . . . .	31
16	Lugar geométrico dos elementos da hipérbole. . . . .	31
17	Assíntotas de uma hipérbole. . . . .	32
18	Hipérbole $\mathcal{H}$ . . . . .	33
19	Retângulo referência da hipérbole. . . . .	35
20	Hipérbole com o triângulo retângulo (relação notável). . . . .	35
21	Hipérbole tendendo à duas retas paralelas perpendiculares ao eixo real. . . . .	36
22	Hipérbole tendendo à duas semirretas opostas. . . . .	36
23	Simetria em relação à reta focal. . . . .	37
24	Simetria em relação à reta não focal. . . . .	38
25	Simetria em relação à origem. . . . .	38
26	Hipérbole com eixo real igual a $2a$ . . . . .	39
27	Exemplo 3.1. . . . .	39
28	Hipérbole com eixo focal paralelo ao eixo $x$ . . . . .	41
29	Exemplo 3.2. . . . .	42
30	Hipérbole e suas assíntotas. . . . .	45

31	Solução gráfica do Exemplo 3.5. . . . .	46
32	Rotação de Eixos. . . . .	47
33	Propriedade refletora . . . . .	49
34	Telescópio Refletor. . . . .	52
35	Telescópio com espelho plano. . . . .	53
36	Telescópio com espelho hiperbólico. . . . .	53
37	Tipos de trajetória dos cometas. Imagem obtida em [9] . . . . .	54
38	Traçado da hipérbole. . . . .	55
39	Hipérbole de posição. . . . .	57
40	Hipérbole de posição. . . . .	58
41	Torre de refrigeração. . . . .	60
42	Estrutura em forma de hiperbolóide. Figura retirada de [15]. . . . .	60
43	Kobe port tower. Figura retirada de [13]. . . . .	60
44	Planetário de Saint Louis. Figura retirada de [14]. . . . .	61
45	Estrutura em forma de hiperbolóide. . . . .	61
46	Catedral de Brasília. . . . .	61
47	Gráfico da função demanda. . . . .	62
48	Hipérbole representando gráfico pressão x volume. . . . .	63
49	Avião supersônico. . . . .	64
50	Cone de Mach. . . . .	65
51	Cone de Mach. Imagem retirada de [16]. . . . .	65
52	Limiar de audibilidade. . . . .	66
53	Bilhar hiperbólico. Imagem obtida em [8] . . . . .	66
54	Bilhar hiperbólico. Imagem obtida em [8] . . . . .	66
55	Hiperbolóide com macarrão. . . . .	66
56	Demonstração do Teorema 5.1. . . . .	68
57	Ponto $P$ em coordenadas polares. . . . .	69
58	Círculo em coordenadas polares. . . . .	70
59	Reta passando pelo pólo. . . . .	70
60	Sistema polar associado ao sistema cartesiano. . . . .	71
61	Elipse. . . . .	72



62	Hipérbole. . . . .	73
63	Parábola. . . . .	74

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>7</b>
<b>Abstract</b>	<b>8</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>11</b>
<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>1 Notas históricas</b>	<b>15</b>
1.1 A origem das cônicas . . . . .	15
1.2 As cônicas de Apolônio de Perga . . . . .	19
<b>2 Noções Básicas para o Estudo das Cônicas</b>	<b>22</b>
2.1 Coordenadas no plano . . . . .	22
2.2 Ponto em $\mathbb{R}^2$ e distância entre dois pontos . . . . .	22
2.3 Translação . . . . .	24
2.4 Lugares geométricos em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	25
<b>3 A Hipérbole</b>	<b>29</b>
3.1 Como construir uma hipérbole! . . . . .	29
3.2 Definição de Hipérbole . . . . .	30
3.3 Elementos da Hipérbole . . . . .	30
3.3.1 Assíntotas de uma hipérbole . . . . .	32
3.4 Propriedades da Hipérbole . . . . .	32
3.5 Simetria de uma Hipérbole . . . . .	37
3.6 Equação da Hipérbole . . . . .	38
3.7 Equação Reduzida da Hipérbole . . . . .	40
3.7.1 Hipérbole com eixo focal paralelo ao eixo $x$ . . . . .	40
3.8 As equações das assíntotas de uma hipérbole . . . . .	44
3.9 Hipérbole Equilátera . . . . .	46
3.10 Rotação de Eixos . . . . .	46
3.11 Propriedade Refletora da Hipérbole . . . . .	49

<b>4</b>	<b>Aplicações da Hipérbole</b>	<b>52</b>
4.1	Aplicação na Astronomia . . . . .	52
4.1.1	Telescópios Refletores . . . . .	52
4.1.2	A órbita dos cometas . . . . .	54
4.2	Aplicação na Navegação . . . . .	54
4.3	Aplicação na Engenharia Civil . . . . .	59
4.4	Aplicação na Administração e na Economia . . . . .	61
4.5	Aplicações na Física e Química . . . . .	62
4.6	Curiosidades . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Cônicas e coordenadas polares</b>	<b>67</b>
5.1	Definição geral de uma cônica . . . . .	67
5.2	Coordenadas polares . . . . .	68
5.3	Equação polar das cônicas . . . . .	71
5.3.1	Elipse . . . . .	71
5.3.2	Hipérbole . . . . .	72
5.3.3	Parábola . . . . .	74
5.4	Classificação das Cônicas . . . . .	75
	<b>Conclusão</b>	<b>77</b>
	<b>Referências</b>	<b>78</b>

## Introdução

Ao estudarmos a disciplina *MA23* (Geometria Analítica) nos deparamos com várias situações (problemas matemáticos) que sem o uso de ferramentas da Geometria Analítica apresentariam certa dificuldade para serem solucionadas e que resolvidas analiticamente se tornam muito fáceis. Um exemplo que ilustra bem isto é a demonstração de que a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo tem comprimento igual à metade do comprimento da hipotenusa. A demonstração será feita na Subseção 2.2. Diante destas situações e, levando em conta que a Geometria Analítica é um conteúdo também desenvolvido no Ensino Médio, decidimos então escrever nosso Trabalho de Conclusão de Curso abordando alguns tópicos muito relevantes apresentados em *MA23* que gostaríamos de repassar aos nossos alunos da educação básica de forma concreta e aplicada.

Nosso trabalho trata apenas o estudo analítico da Geometria Plana com foco nas cônicas, suas propriedades e aplicações. Ao definirmos cada cônica, iremos abordá-la apenas nos casos em que ocupam posição específica em relação aos eixos coordenados conforme é tratado no Ensino Médio, no entanto, nos capítulos finais apresentaremos a definição geral de cônicas em coordenadas polares e critérios para classificá-las a partir da equação geral do 2º grau em  $\mathbb{R}^2$ ,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$



# 1 Notas históricas

## 1.1 A origem das cônicas

A civilização grega trouxe várias contribuições para o avanço da Matemática. Uma destas, foi o desenvolvimento do pensamento abstrato, ao contrário de civilizações anteriores como os egípcios e babilônicos que praticaram uma matemática utilitária. Platão, por exemplo, distinguia claramente uma matemática a ser utilizada pelos comerciantes e outra pelos intelectuais, aqueles que iriam governar, conforme é apresentado em [11]. Esta abordagem filosófica da matemática levou o mundo grego a atacar problemas de matemática pura, sem uma aplicação imediata. Dentre estes podemos destacar os clássicos problemas da quadratura do círculo, o problema de Delos ou duplicação do cubo e a trissecção do ângulo. O primeiro provavelmente proposto por Anaxágoras, que de acordo com [2], viveu durante o quinto século antes de Cristo. Ele foi preso por afirmar que o Sol não era uma divindade mas uma grande pedra encandeceste, e no período em que esteve preso se dedicou a resolver o problema da quadratura do círculo. O qual fascinou os matemáticos por mais de 2000 anos. As tentativas de resolver este problema foi de fundamental importância, pois estimularam a pesquisa matemática de épocas posteriores e por não estarem ligados a nenhum problema prático, tornaram-se assim uma das sementes da matemática pura.

Neste momento é importante lembrar que resolver um problema para os gregos significava resolvê-lo através de construções com régua e compasso. Portanto encontrar a medida do lado de um quadrado que tivesse a mesma área de um círculo dado (quadratura do círculo) significava encontrar este através de construção com régua e compasso. Para melhor entendimento tomemos um retângulo de lados 12 cm e 3 cm, qual o lado do quadrado que possui a mesma área deste retângulo (quadratura do retângulo)?

Uma possível solução para este problema no período grego consistia em encontrar um segmento de medida  $x$  tal que

$$\frac{12}{x} = \frac{x}{3}.$$

O que facilmente poderia ser feito através da seguinte construção:

- a) Trace uma reta  $r$ ;
- b) Sobre  $r$  marque o segmento  $\overline{AB}$  de medida 12 cm e o segmento  $\overline{BC}$  de medida 3 cm;
- c) Trace a mediatriz do segmento  $\overline{AC}$ , determinando o ponto médio  $M$  deste segmento;
- d)  $M$  é o centro da circunferência cujo diâmetro é  $\overline{AC}$ ;
- e) Trace a circunferência de diâmetro  $\overline{AC}$ ;
- f) Trace a perpendicular a  $r$  passando por  $B$ , intersectando a circunferência em  $D$ ;
- g) Pelas relações métricas no triângulo retângulo, segue que  $BD = x$ . Veja Figura 1.

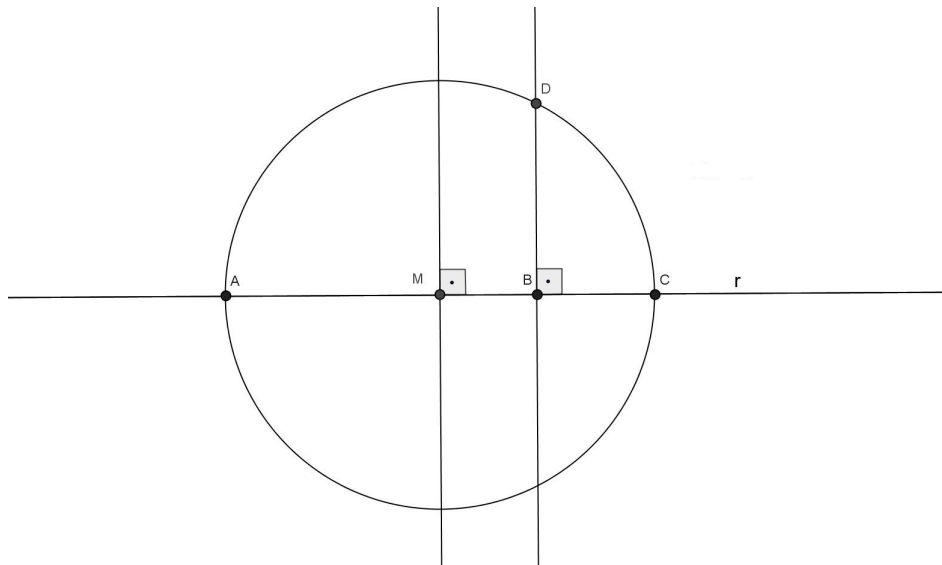


Figura 1: Terceira proporcional

Este tipo de solução inspirou os matemáticos da época a tentarem generalizar este procedimento, ou seja, dados os segmentos de medidas  $a$  e  $b$  encontrar dois segmentos de medidas  $x$  e  $y$  tais que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}. \quad (1)$$

Em [2] encontramos referências a Hipócrates de Chios, que viveu em Atenas por volta de 430 a.C., ele percebeu que este último problema continha a solução do problema da duplicação do cubo, pois se tomarmos  $b = 2a$  na equação (2) e eliminarmos  $y$  teremos  $x^3 = 2a^3$ . Veja que no processo de eliminação de  $y$  temos as seguintes equações:  $x^2 = ay$ ,  $y^2 = xb$  e  $xy = 2a^2$  que, em notação moderna, as duas primeiras representam parábolas e a terceira uma hipérbole.

Neste contexto os matemáticos gregos começaram a procurar curvas que satisfizessem (2). É importante ressaltar que para os gregos encontrar uma curva significava exprimi-la através de propriedades cinemáticas, como a trissetriz de Hípias citada em [2] ou como secção de um sólido. Na busca por tais curvas, o discípulo de Eudoxo, Menaecmus (380 a 320 a.C.), sabendo que uma curva que satisfizesse (2) resolveria o problema da duplicação do cubo e usando a perspectiva de determinação de curvas adotado pelos gregos, observou que havia uma família de curvas adequadas às soluções do problema seccionando um cone circular reto por um plano perpendicular à sua geratriz. E nos casos em que o ângulo do vértice do cone fosse agudo, obtuso ou reto geraria curvas diferentes, respectivamente, elipse, hipérbole e parábola. No caso do ângulo do vértice ser reto a curva obtida, em notação atual, seria da forma  $y^2 = lx$ , onde  $l$  é dito o *latus rectum* da curva e depende da distância em que o plano se encontra do vértice do cone. Vejamos isto:

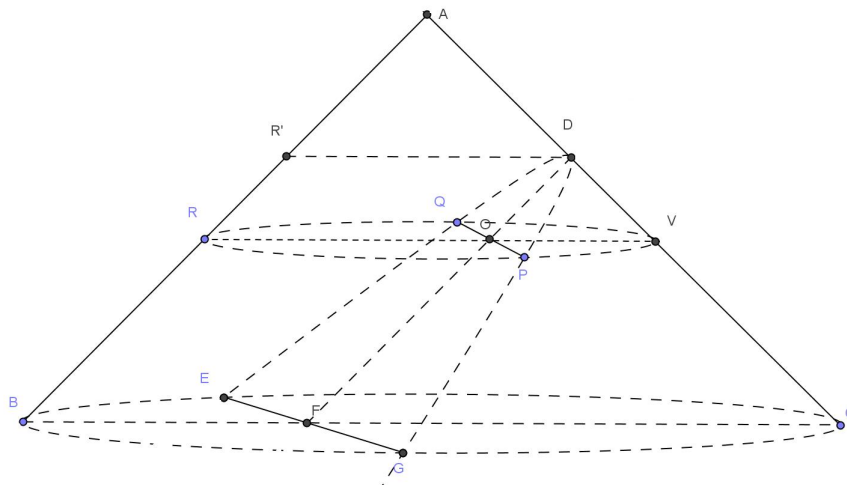


Figura 2: Parábola de Menaecmus

Seja  $ABC$  um cone cujo ângulo do vértice mede  $90^\circ$ , conforme a Figura 2. Neste caso a secção determinada pelo plano perpendicular à geratriz do cone é a curva  $EDG$ . Seja  $P$  um ponto pertencente a esta curva. Seccionando o cone por um plano paralelo à base que contém  $P$ , iremos determinar um círculo  $PVR$ , onde  $R$  e  $V$  são as intersecções das geratrizes do cone e o círculo. Sendo  $Q$  o outro ponto da curva que intersecta o círculo temos que

a')  $\overline{PQ} \perp \overline{RV}$ , pois  $\overline{RV}$  é um diâmetro que secciona  $\overline{PQ}$  em seu ponto médio  $O$ ;

b')  $(OP)^2 = OR.OV$ ;

c') Os triângulos  $\triangle ODV$  e  $\triangle BCA$  são semelhantes, pois  $\overline{OD} \perp \overline{AC}$  e  $\overline{OV}$  é paralelo a  $\overline{BC}$ . Daí,

$$\frac{OV}{OD} = \frac{BC}{AB};$$

d') Passando uma paralela a  $\overline{BC}$  por  $D$ , a intersecção desta com a geratriz perpendicular a  $\overline{AC}$ , denominamos  $R'$ . Logo, os triângulos  $\triangle R'DA$  e  $\triangle ABC$  são semelhantes. Daí,

$$\frac{R'D}{AR'} = \frac{BC}{AB};$$

e') Tomando  $OP = y$  e  $OD = x$ , observe que equivale a tomar o plano cartesiano com origem em  $D$ , e os eixos  $OX$  e  $OY$  contendo  $\overline{OD}$  e  $\overline{AC}$  respectivamente. Daí, dos itens b'), c') e d') temos  $y^2 = OR.OV$ . Como  $R'DOR$  é um paralelogramo,  $R'D = OR$ . Logo,

$$y^2 = AR' \cdot \frac{BC}{AB} \cdot OD \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{AR' \cdot BC^2}{AB^2} x.$$

Como  $AR'$ ,  $BC$  e  $AB$  são os mesmos para todo  $P$ , tomemos  $l = \frac{AR' \cdot BC^2}{AB^2}$ .

Sendo assim,

$$y^2 = lx$$

como queríamos mostrar. Para os casos em que o ângulo do vértice é agudo ou obtuso os cálculos são análogos.

Após estas conclusões, para Menaecmus determinar as curvas que são soluções de (2) basta determinar uma parábola de *latus rectum*  $a$  e outra de *latus rectum*  $2a$ .

E assim, através destes problemas e da busca por soluções dos mesmos, são introduzidas em matemática as curvas que mais tarde ficaram conhecidas por parábola, hipérbole e elipse. Após os trabalhos de Menaecmus vários matemáticos gregos produziram trabalhos explorando estas curvas e suas propriedades, entre eles, Euclides e Arquimedes. Todavia, a obra grega sobre cônicas que se destacou foi aquela produzida por Apolônio de Perga.

## 1.2 As cônicas de Apolônio de Perga

De acordo com [2], Apolônio nasceu em Perga na Panfília, possivelmente entre os anos de 262 a 192 a.C.. Este parece ter sido educado em Alexandria e passado algum tempo lecionando na universidade local. Juntamente com Euclides e Arquimedes, Apolônio está contado entre os três maiores matemáticos do período grego e isto se deve em grande parte por sua obra produzida sobre as cônicas. A obra de Apolônio sobre as secções cônicas foi escrita em oito livros, sendo que os quatro primeiros tratam de problemas elementares que possivelmente já haviam sido abordados por outros matemáticos anteriores a este. Os quatro últimos trazem uma abordagem diferente das demais obras existentes, bem como novos resultados. Conforme [2] e [8], os méritos da obra de Apolônio em relação às demais são os seguintes:

- Ele mostrou que a elipse, hipérbole e a parábola podem ser obtidas de um mesmo cone, bastando variar a inclinação do plano de secção, conforme a Figura 3 obtida em [12]. Para definir as três curvas Apolônio tomou uma secção meridiana  $VAB$  do cone, onde  $\overline{AB}$  é o diâmetro da base do cone e  $V$  é o vértice do mesmo. As cônicas foram então definidas como intersecções deste cone com determinados planos que cortam o segmento  $\overline{AB}$  ou seu prolongamento. Para isto, define-se:
  - $r$  a reta que contém a intersecção do plano que secciona o cone e o triângulo  $\triangle VAB$ .

Daí,

- \* Se  $r$  for paralela ao lado  $\overline{AV}$  ou ao lado  $\overline{BV}$  do triângulo  $\triangle VAB$  obtém-se uma parábola;
- \* Se  $r$  intersectar os dois lados  $\overline{AV}$  e  $\overline{BV}$  do triângulo  $\triangle VAB$  obtém-se uma elipse (note que o círculo é um caso particular de elipse);
- \* Se  $r$  intersectar um dos lados, respectivamente,  $\overline{AV}$  (ou  $\overline{BV}$ ) do triângulo  $\triangle VAB$  e o prolongamento do outro lado no sentido, respectivamente, de  $B$  para  $V$  (ou de  $A$  para  $V$ ), obtém-se uma hipérbole.

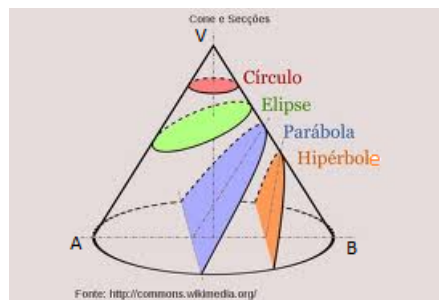


Figura 3: Secções cônicas.

- O cone para obtenção das cônicas não precisa ser reto. E este fato não altera as propriedades das curvas;
- Substituiu o cone de uma só folha pelo cone de duas folhas. Assim, passando a hipérbole a ter dois ramos; Veja a Figura 4 obtida em [12].

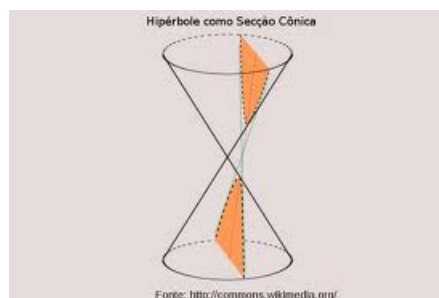


Figura 4: Hipérbole com dois ramos.

- Atribuiu os nomes atuais a estas curvas, provavelmente adotados de usos anteriores pelos pitagóricos na solução de equações quadráticas por aplicação de

áreas;

- Retirou estas curvas do cone e as trouxe para o plano. Desta forma, deduziu a relação básica entre o que chamaríamos hoje de coordenadas de um ponto da curva. A partir das equações das curvas deduziu diversas propriedades sem fazer referência ao cone. O processo de obtenção das equações das curvas apresentado por Apolônio segue caminhos muito semelhantes aos utilizados por Menaecmus;
- Apolônio definiu reta tangente e normal a cada ponto das cônicas. No texto original estas definições são feitas a partir das Proposições 8, 13 e 27 de seu livro V e das Proposições 33 e 34 de seu livro I.

A obra de Apolônio de Perga sobre secções cônicas foi tão completa que até os dias atuais os avanços feitos na teoria introdutória sobre este tema apenas sofreram atualização de notação depois do advento da Geometria Analítica. Sendo assim, nas próximas Seções iremos desenvolver a teoria sobre as cônicas a partir das notações modernas, porém muito próximo do que foi feito por este grande geômetra.

## 2 Noções Básicas para o Estudo das Cônicas

### 2.1 Coordenadas no plano

Para o estudo das cônicas, suas propriedades, aplicações e equações é necessário adotar um sistema de coordenadas no plano. Neste trabalho adotaremos o sistema de coordenadas cartesianas, de acordo com a abordagem deste assunto no Ensino Médio, porém, utilizaremos também ao final deste trabalho o sistema de coordenadas polares.

### 2.2 Ponto em $\mathbb{R}^2$ e distância entre dois pontos

Um ponto no plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$  é denotado por um par ordenado  $(x, y)$  sendo  $x$  a abscissa e  $y$  a ordenada. Desta forma, há uma correspondência biunívoca entre o plano e  $\mathbb{R}^2$  que associa cada ponto do plano a um par ordenado  $(x, y)$  em  $\mathbb{R}^2$ . Veja Figura 5.

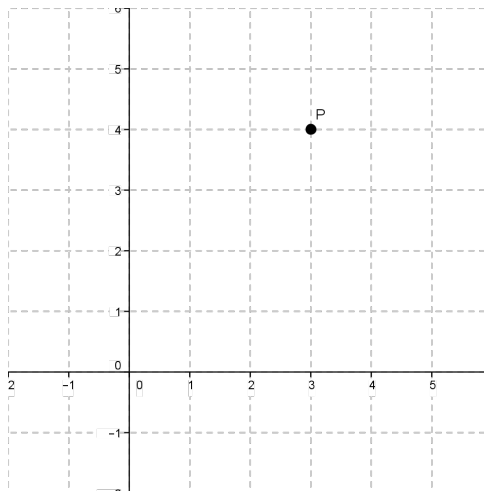


Figura 5: Ponto representado no plano

Sendo assim, podemos obter uma fórmula para calcular a distância entre dois pontos no plano utilizando suas coordenadas cartesianas. Sejam  $A(x_A, y_A)$  e  $B(x_B, y_B)$  dois pontos distintos representados no plano cartesiano abaixo. Veja Figura 6.

Daí, pelo Teorema de Pitágoras, temos  $d(A, B)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ . Assim, temos:



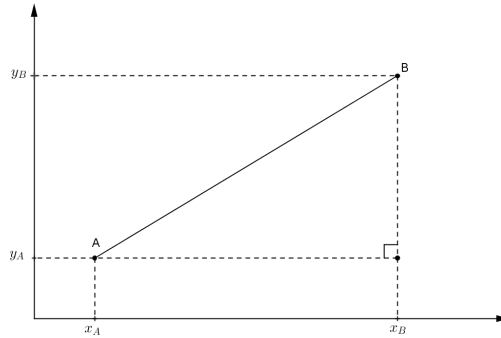


Figura 6: Distância entre dois pontos

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

**Exemplo 2.1.** *Seja  $\triangle ABC$  um triângulo retângulo de hipotenusa  $\overline{BC}$ . Calculando distâncias em coordenadas mostre que o comprimento da mediana relativa ao lado  $\overline{BC}$  é a metade do comprimento do lado  $\overline{BC}$ .*

*Solução.* Considerando a Figura 7, temos:  $A(0, 0)$ ,  $B(0, y)$  e  $C(x, 0)$ .

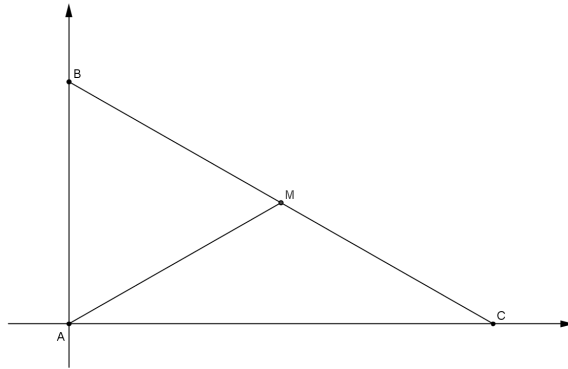


Figura 7: Mediana  $\overline{AM}$ .

$M$  é ponto médio de  $\overline{BC}$ , então:  $M = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$ .

Calculando a distância de  $B$  a  $C$  temos:

$$d(B, C) = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2}$$

Calculando a distância de  $A$  a  $M$  temos:

$$d(A, M) = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \quad (3)$$

De (2) e (3) temos:

$$d(A, M) = \frac{d(B, C)}{2}$$

### 2.3 Translação

No sistema de coordenadas cartesianas  $OXY$  tome o ponto  $A(m, n)$ . Em seguida, construa um novo sistema de coordenadas  $AX'Y'$  com origem em  $A$  de acordo com a Figura 8.

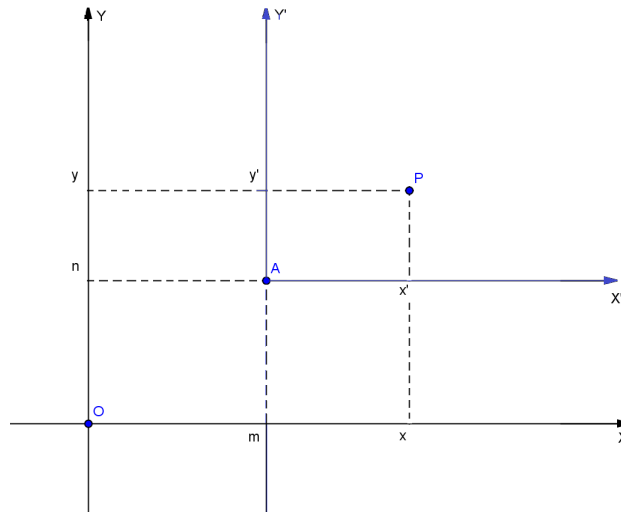


Figura 8: Mudança de coordenadas: Translação.

Note que um ponto  $P(x, y)$  nesse novo sistema tem coordenadas  $(x', y')$  tais que  $x = x' + m$  e  $y = y' + n$ , ou seja,

$$\begin{cases} x' = x - m \\ y' = y - n \end{cases}.$$

Esse processo de mudança de coordenadas chama-se translação conforme é apresentado em [4] e é de grande utilidade no estudo das hipérbolas (cônicas em geral) no sentido de tornar a equação destas mais simples e evidenciando seus elementos.

## 2.4 Lugares geométricos em $\mathbb{R}^2$

A partir desse processo de mapeamento do plano em coordenadas cartesianas, torna-se possível obter expressões (equações ou inequações) que representam lugares geométricos em  $\mathbb{R}^2$ . Veja a seguir os lugares geométricos mais comuns e suas expressões:

- Reta  $\overline{AB}$

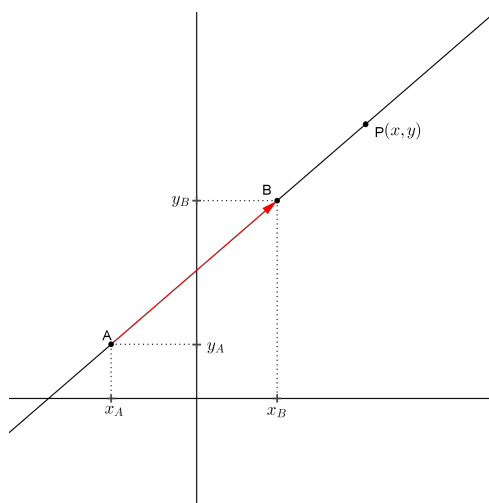


Figura 9: Reta  $\overline{AB}$

Sejam  $P(x, y) \in \overline{AB}$  e  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$  o vetor direção. Veja Figura 9. Como  $P = A + t\overrightarrow{AB}$ ;  $t \in \mathbb{R}^2$ , temos que  $x = x_A + t(x_B - x_A)$  e  $y = y_A + t(y_B - y_A)$ .

A expressão acima torna-se muito interessante, pois para valores distintos de  $t$  ela representa lugares geométricos distintos em  $\mathbb{R}^2$ .

- para  $t = 0$ , temos o ponto  $A$ ;
- para  $t = 1$ , temos o ponto  $B$ ;
- para  $t \in [0, 1]$ , temos o segmento de reta  $\overline{AB}$ ;
- para  $t \geq 0$ , temos a semirreta com origem em  $A$  contendo o ponto  $B$ ;
- para  $t = \frac{1}{2}$ , temos o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ .

- Circunferência de centro  $C = (x_C, y_C)$  e raio  $r$ . Veja Figura 10.

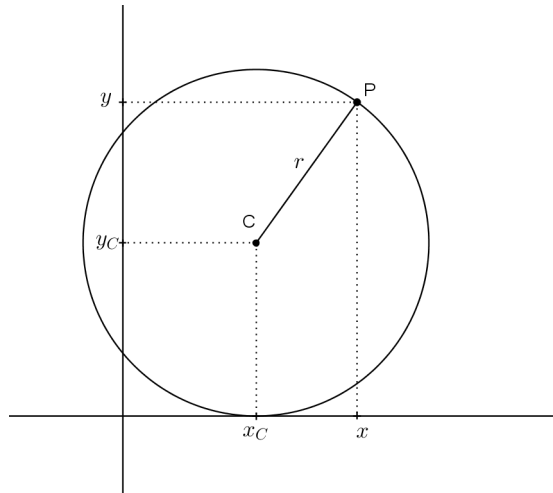


Figura 10: Circunferência

Seja  $P(x, y) \in C$ . Como  $d(P, A) = r$ , temos que  $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$  é a equação da circunferência  $C$ . Note que  $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 < r^2$  é a região interior a  $C$  e  $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 > r^2$  é a região exterior a  $C$ .

**Observação 2.1.** Um conjunto vazio também é interpretado como um lugar geométrico e uma expressão que o representa pode ser  $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = k$ , para qualquer  $k$  real negativo, pois não existem pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}$  que satisfaçam esta equação.

Além dos lugares geométricos já citados, existem vários outros e obter a expressão que representa cada um deles é um dos principais objetos de estudo da Geometria Analítica.

**Exemplo 2.2.** Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de  $A(1, 2)$  e  $B(3, 5)$ . Determine a expressão que representa este lugar geométrico.

*Solução.* O lugar geométrico procurado é a reta  $m$  mediatriz do segmento  $AB$ . Veja Figura 11.

Se  $P(x, y) \in m$ , então  $d(P, A) = d(P, B)$ . Daí,  $d(P, A)^2 = d(P, B)^2$ . Assim,

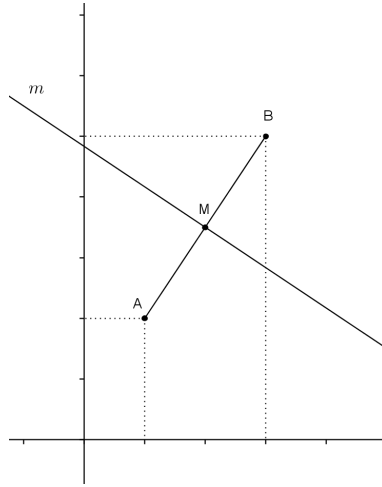


Figura 11: Mediatriz

$$\begin{aligned}
 (x - 1)^2 + (y - 2)^2 &= (x - 3)^2 + (y - 5)^2 \Rightarrow \\
 x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 &= x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 \Rightarrow \\
 4x + 6y - 29 &= 0
 \end{aligned}$$

Portanto a expressão que representa o lugar geométrico é a equação cartesiana da reta  $m$ .

$$4x + 6y - 29 = 0.$$

**Exemplo 2.3.** *Faça o esboço da região do plano representada pelo sistema de inequações*

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 9 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} .$$

*Solução.* A primeira inequação é a região formada pela circunferência de centro  $(1, 2)$  e raio  $r = 3$  com o seu interior, enquanto a segunda inequação é a região formada pela circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio  $r = 2$  com a região exterior a ele. A região procurada é a intersecção destas duas regiões, conforme Figura 12.

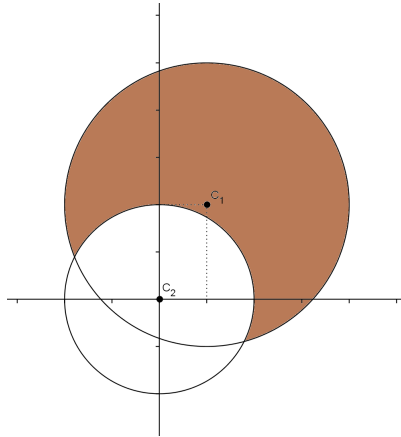


Figura 12: Esboço da região dada no Exemplo 2.3

## 3 A Hipérbole

### 3.1 Como construir uma hipérbole!

Para um melhor entendimento da definição de hipérbole, vamos aprender passo a passo como desenhá-la com um fio inextensível e uma haste.

- Marque dois pontos distintos no plano;
- Tome uma haste rígida de comprimento maior que a distância entre os pontos marcados;
- Tome um fio inextensível de forma que o comprimento seja menor que o comprimento da haste. É necessário que a diferença entre esses comprimentos seja menor que a distância entre os pontos fixados;
- Prenda uma das extremidades do fio numa extremidade da haste;
- Fixe a extremidade livre da haste em um dos pontos de forma que a mesma possa girar em torno desse ponto;
- Fixe a extremidade livre do fio no outro ponto marcado;
- Com a ponta do lápis aproxime o fio na lateral da haste conforme a figura;
- Mantendo o fio sempre junto da haste rotacione-o no plano no sentido horário até que o fio fique totalmente estendido;
- Rotacione a haste no plano no sentido contrário ao escolhido no item anterior até que o fio fique novamente estendido;
- Execute novamente o processo fixando a extremidade da haste no outro ponto marcado. Veja Figura 13.

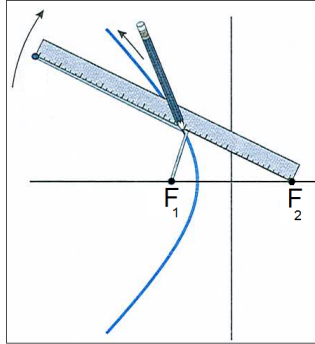


Figura 13: Construção de uma hipérbole.

### 3.2 Definição de Hipérbole

Uma hipérbole é o conjunto de todos os pontos  $P(x, y)$  no plano tais que o valor absoluto da diferença das distâncias de  $P$  a dois pontos fixos, chamados focos, é constante e igual a  $2a$ , onde  $a$  é um número real positivo fixado.

Matematicamente obtemos:  $\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{R}^2; |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a\}$ . Veja Figura 14.

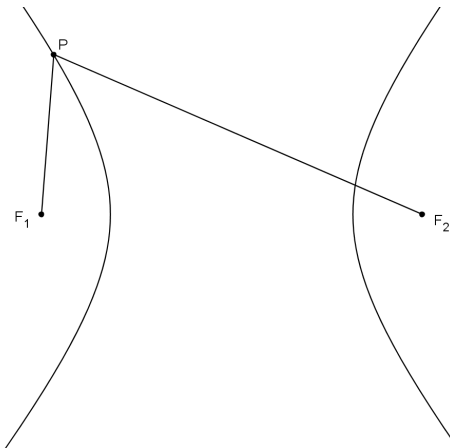


Figura 14: Lugar geométrico da hipérbole.

### 3.3 Elementos da Hipérbole

A seguir descreveremos os elementos da hipérbole. Veja Figura 15.

- Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são os focos da hipérbole.



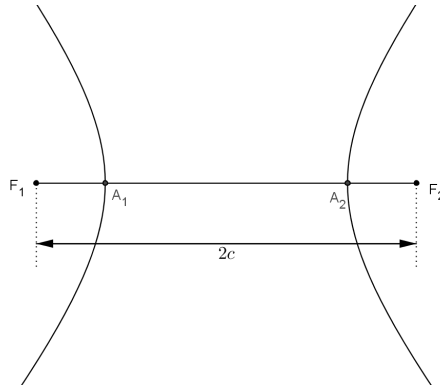


Figura 15: Elementos da hipérbole

- A distância entre  $F_1$  e  $F_2$  é a distância focal,  $|\overline{F_1F_2}| = 2c$  e  $c > 0$ . O número  $c$  é a semi-distância focal.
- $A_1$  e  $A_2$  são os vértices da hipérbole. O conjunto  $\{A_1, A_2\}$  é a intersecção da hipérbole com o segmento  $\overline{F_1F_2}$ .
- O segmento  $\overline{A_1A_2}$  é o eixo real da hipérbole.
- O ponto  $C$ , médio do eixo real é o centro da hipérbole. Cada um dos segmentos  $\overline{A_1C}$  ou  $\overline{A_2C}$  é chamado de semi-eixo real.

A Figura 16 descreve geometricamente os elementos da hipérbole.

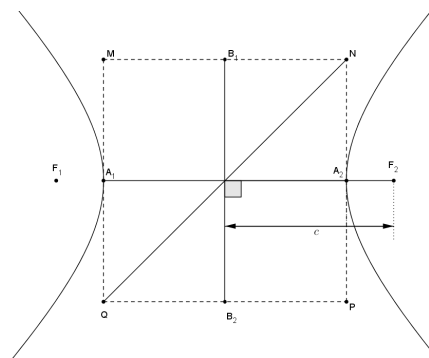


Figura 16: Lugar geométrico dos elementos da hipérbole.

- O retângulo de referência da hipérbole é o retângulo  $MNPQ$  de centro  $C$ , com  $\overline{MQ}$  e  $\overline{NP}$  perpendiculares ao eixo real em  $A_1$  e  $A_2$ , respectivamente, e

$CN = CQ = C$  (o retângulo  $MNPQ$  pode ser inscrito em uma circunferência com  $F_1$  e  $F_2$  pertencentes à circunferência e diametralmente opostos).

- O segmento  $\overline{B_1B_2}$  perpendicular a  $\overline{A_1A_2}$  em  $C$ , com  $B_1 \in \overline{MN}$  e  $B_2 \in \overline{PQ}$ , é o eixo imaginário da hipérbole. Os segmentos  $\overline{B_1C}$  e  $\overline{B_2C}$  são chamados de semi-eixos imaginários.

Dizemos que uma hipérbole é equilátera, se o comprimento do eixo focal for igual ao comprimento do eixo não focal, isto é,  $a = b$ . O retângulo referência de uma hipérbole equilátera é um quadrado e as assíntotas se intersectam respectivamente.

Duas hipérboles são conjugadas se o eixo focal de cada uma é o eixo não focal da outra e possuem o mesmo retângulo referência, o mesmo centro, as mesmas assíntotas e os focos estão a uma mesma distância do centro.

### 3.3.1 Assíntotas de uma hipérbole

As retas  $\overline{MP}$  e  $\overline{NQ}$  que contêm as diagonais do retângulo referência  $MNPQ$  são denominadas assíntotas da hipérbole, veja Figura 17. A hipérbole aproxima-se indefinidamente de cada assíntota sem jamais tocá-la. Nos próximos tópicos, veremos maiores detalhes sobre as assíntotas.

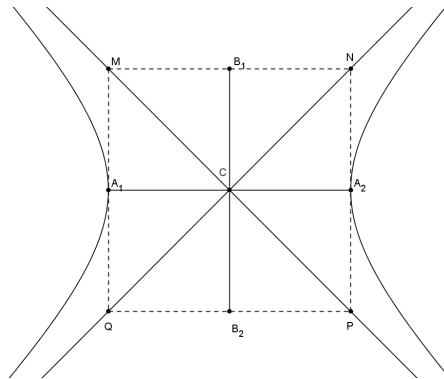


Figura 17: Assíntotas de uma hipérbole.

## 3.4 Propriedades da Hipérbole

Considere a hipérbole  $\mathcal{H}$  da Figura 18.

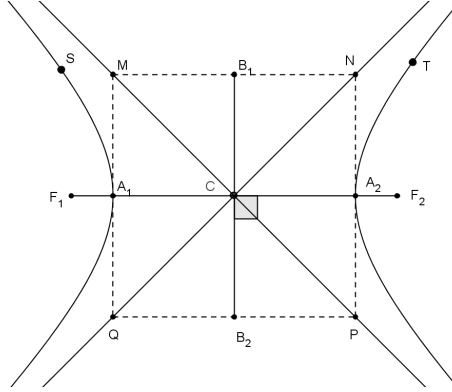


Figura 18: Hipérbole  $\mathcal{H}$

Segundo [10], temos cinco propriedades da hipérbole:

- **Propriedade 1 - P1**

**P1:** A medida do eixo real  $\overline{A_1A_2}$  é  $2a$ .

*Demonstração.* Seja  $A_1 \in \mathcal{H}$ . Sem perda de generalidade, suponha  $\overline{A_1F_2} > \overline{A_1F_1}$ . Desta maneira, temos:

$$\overline{A_1F_2} - \overline{A_1F_1} = 2a \Rightarrow \overline{A_1A_2} + \overline{A_2F_2} - \overline{A_1F_1} = 2a \quad (4)$$

Seja  $A_2 \in \mathcal{H}$ . Como supomos  $\overline{A_1F_2} > \overline{A_1F_1}$ , temos  $\overline{A_2F_1} > \overline{A_2F_2}$ . Assim, temos:

$$\overline{A_2F_1} - \overline{A_2F_2} = 2a \Rightarrow \overline{A_2A_1} + \overline{A_1F_1} - \overline{A_2F_2} = 2a \quad (5)$$

Subtraindo a equação (4) e (5), temos:

$$2\overline{A_2F_2} - 2\overline{A_1F_1} = 0 \Rightarrow \overline{A_1F_1} = \overline{A_2F_2} \quad (6)$$

Substituindo a equação (6) em (4) temos:

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2F_2} - \overline{A_2F_2} = 2a \Rightarrow \overline{A_1A_2} = 2a.$$

□

- **Propriedade 2 - P2**

**P2:** O centro  $C$  é o ponto médio de  $\overline{F_1F_2}$ .

*Demonstração.* Por definição,  $C$  é o ponto médio de  $\overline{A_1A_2}$ , daí:

$$\overline{A_1C} = \overline{A_2C} \Rightarrow \overline{F_1C} - \overline{A_1F_1} = \overline{F_2C} - \overline{A_2F_2} \Rightarrow \overline{F_1C} + \overline{A_2F_2} = \overline{F_2C} + \overline{A_1F_1} \quad (7)$$

Pela propriedade P1, temos que:

$$A_2F_2 = A_1F_1 \quad (8)$$

Substituindo a equação (8) em (7), temos:

$$F_1C + A_1F_1 = F_2C + A_1F_1 \Rightarrow F_1C = F_2C.$$

Logo,  $C$  é o ponto médio de  $\overline{F_1F_2}$ . □

- **Propriedade 3 - P3**

**P3:**  $C$  é ponto médio de  $B_1B_2$ .

*Demonstração.* O retângulo referência  $MNPQ$  da hipérbole representada na Figura 19 pode ser dividido em quatro retângulos iguais  $A_1MB_1C$ ,  $A_2NB_1C$ ,  $A_2PB_2C$  e  $A_1QB_2C$ , logo todos têm diagonais de mesma medida  $c$ . Daí, o quadrilátero  $A_1B_1A_2B_2$  é um losângo. Como as diagonais do losângo se cruzam perpendicularmente em seus respectivos pontos médios, temos que  $C$  é o ponto médio de  $\overline{B_1B_2}$ . □

- **Propriedade 4 - P4**

**P4:** Se a medida do eixo imaginário é  $2b$ , então:  $c^2 = a^2 + b^2$ .

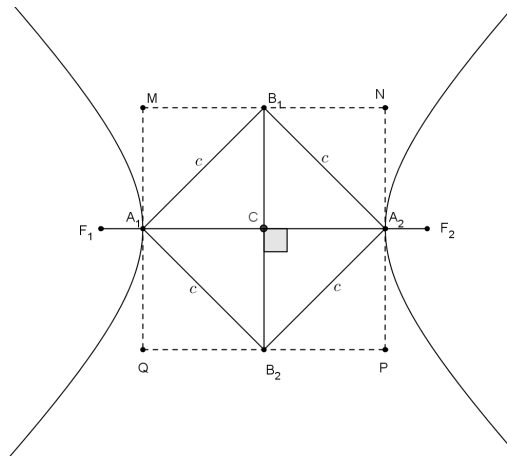


Figura 19: Retângulo referência da hipérbole.

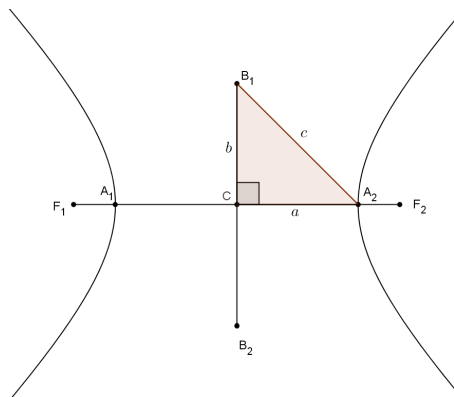


Figura 20: Hipérbole com o triângulo retângulo (relação notável).

*Demonstração.* Basta aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo  $A_2CB_1$  na Figura 20 e temos:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

□

• **Propriedade 5 - P5**

**P5:** O número  $e = \frac{c}{a}$ , denominado excentricidade da hipérbole, é tal que  $e > 1$ .

*Demonstração.* De acordo com a Figura 20 é fácil ver que  $\cos \theta = \frac{a}{c}$ , com  $\theta = \widehat{B_1A_2C}$ .

Como  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ , temos que:

$$\cos \theta = \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{1}{\cos \theta} = \frac{c}{a} \Rightarrow \sec \theta = \frac{c}{a} = e.$$

A secante de um ângulo agudo é sempre um valor positivo, portanto  $e > 1$ .  $\square$

Quanto mais próximo de 1 for a excentricidade mais a hipérbole se aproxima de duas retas paralelas (perpendiculares ao eixo real). E, se a excentricidade for cada vez maior, tendendo ao infinito, a hipérbole se aproxima de duas semirretas opostas (com origem em  $A_1$  e  $A_2$ ). Veja as Figuras 21 e 22.

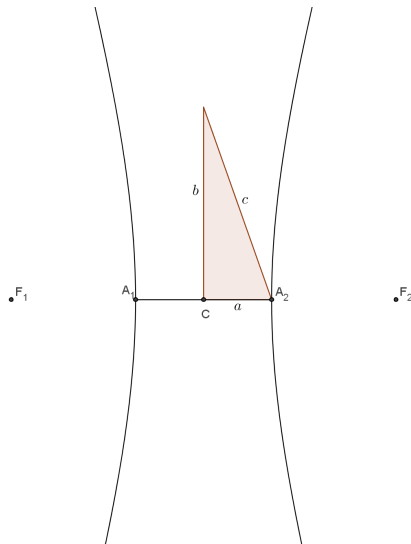


Figura 21: Hipérbole tendendo à duas retas paralelas perpendiculares ao eixo real.

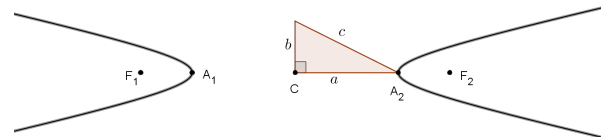


Figura 22: Hipérbole tendendo à duas semirretas opostas.

Podemos exprimir a excentricidade da hipérbole em função dos semi-eixos  $a$  e  $b$ :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

Veremos também a propriedade refletora da hipérbole na Seção 3.11. Esta é uma das principais propriedades que permite a aplicação da hipérbole na astronomia, telescópios, navegação e outros ramos das ciências aplicadas.

### 3.5 Simetria de uma Hipérbole

Uma hipérbole é simétrica em relação à reta focal, à reta não focal e ao centro. A seguir descreveremos cada uma dessas simetrias.

- Simetria de uma hipérbole em relação à reta focal.

Observe a Figura 23: Se  $P \in \mathcal{H}$  e  $P'$  é o simétrico de  $P$  em relação à reta focal, então:  $\triangle F_1PQ \equiv \triangle F_1P'Q$  e  $\triangle F_2PQ \equiv \triangle F_2P'Q$ , daí temos que:

$|\overline{F_2P}| = |\overline{F_2P'}|$  e  $|\overline{F_1P}| = |\overline{F_1P'}|$ . Logo,

$$|d(P', F_1) - d(P', F_2)| = |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \Rightarrow P' \in \mathcal{H}.$$

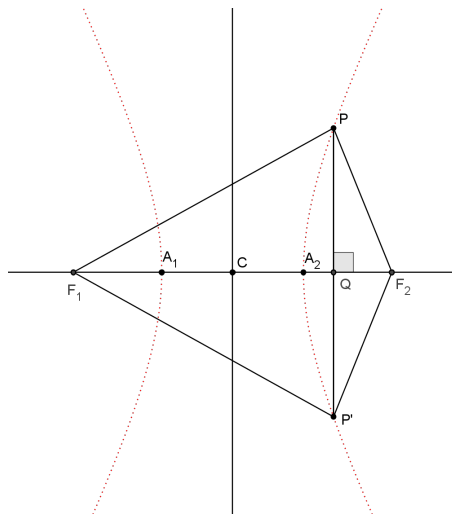


Figura 23: Simetria em relação à reta focal.

- Simetria de uma hipérbole  $\mathcal{H}$  em relação à reta não focal.

Observe a Figura 24: Se  $P \in \mathcal{H}$  e  $P'$  é o simétrico de  $P$  em relação à reta não focal, então:  $\triangle PQF_2 \equiv \triangle P'QF_1$  e  $\triangle PQF_1 \equiv \triangle P'QF_2$ , daí temos que:

$|\overline{PF_2}| = |\overline{P'F_1}|$  e  $|\overline{PF_1}| = |\overline{P'F_2}|$ . Logo,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |d(P', F_2) - d(P', F_1)| = 2a \Rightarrow P' \in \mathcal{H}.$$

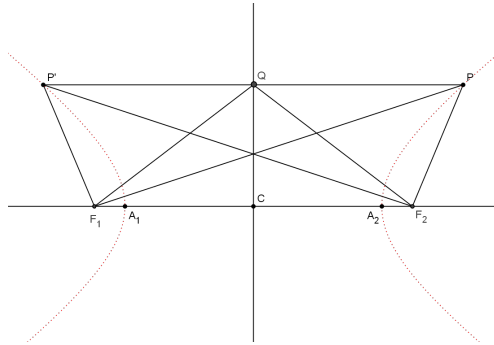


Figura 24: Simetria em relação à reta não focal.

- Simetria de uma hipérbole  $\mathcal{H}$  em relação ao centro.

Observe a Figura 25: Se  $P \in \mathcal{H}$  e  $P'$  é o simétrico de  $P$  em relação ao centro  $C$ , então:  $\triangle F_1CP \equiv \triangle F_2CP'$  e  $\triangle PCF_2 \equiv \triangle P'CF_1$ , daí temos que:

$$|\overline{F_2P}| = |\overline{F_1P'}| \text{ e } |\overline{F_1P}| = |\overline{F_2P'}|. \text{ Logo,}$$

$$|d(P', F_2) - d(P', F_1)| = |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \Rightarrow P' \in \mathcal{H}.$$

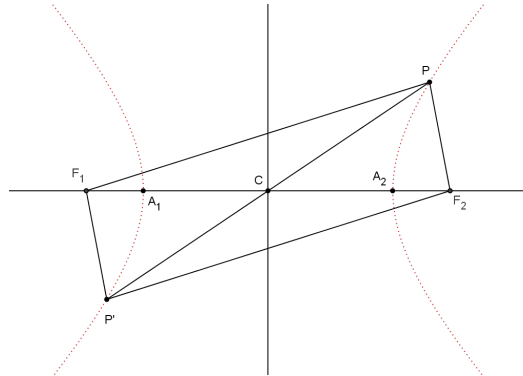


Figura 25: Simetria em relação à origem.

### 3.6 Equação da Hipérbole

Sejam  $F_1(x_1, y_1)$  e  $F_2(x_2, y_2)$  os focos da hipérbole  $\mathcal{H}$  e  $2a$  a medida de seu eixo real conforme Figura 26.

Considere um ponto genérico  $P(x, y) \in \mathcal{H}$ . Pela definição, temos que:



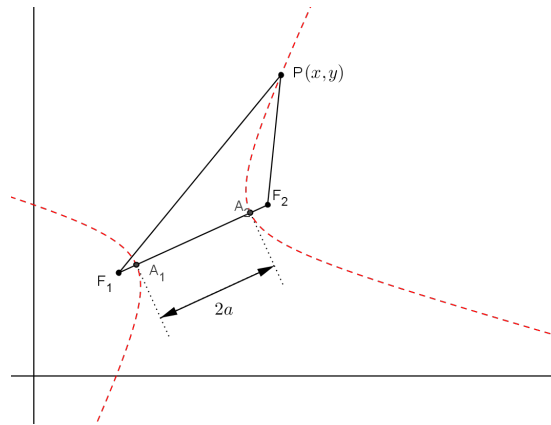


Figura 26: Hipérbole com eixo real igual a  $2a$ .

$|PF_1 - PF_2| = 2a$  então  $|\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} - \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}| = 2a$  é uma equação da hipérbole.

**Exemplo 3.1.** *Obtenha uma equação da hipérbole de focos  $F_1(0, 4)$  e  $F_2(0, -4)$ , cujo eixo real mede 2 unidades.*

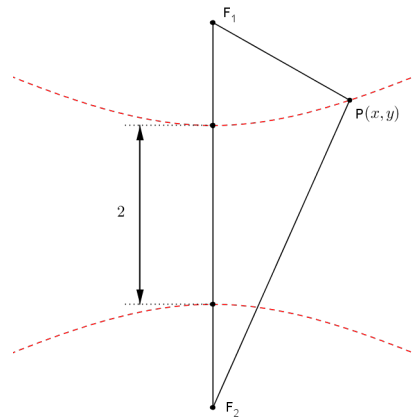


Figura 27: Exemplo 3.1.

*Solução.* De acordo com a Figura 27 e usando a definição de hipérbole, temos que:

$$\begin{aligned}
|\overline{PF_2} - \overline{PF_1}| &= 2 \Rightarrow \\
|\sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y+4)^2}| &= 2 \Rightarrow \\
\sqrt{x^2 + (y-4)^2} - \sqrt{x^2 + (y+4)^2} &= \pm 2 \Rightarrow \\
\sqrt{x^2 + (y-4)^2} &= \sqrt{x^2 + (y+4)^2} \pm 2
\end{aligned}$$

Elevando ao quadrado os dois membros da equação, temos:

$$\begin{aligned}
x^2 + (y-4)^2 &= x^2 + (y+4)^2 \pm 4\sqrt{x^2 + (y+4)^2} + 4 \Rightarrow \\
y^2 - 8y + 16 &= y^2 + 8y + 16 + 4 \pm 4\sqrt{x^2 + (y+4)^2} \Rightarrow \\
\pm 4\sqrt{x^2 + (y+4)^2} &= 4 + 16y \Rightarrow \\
\pm \sqrt{x^2 + (y+4)^2} &= 1 + 4y
\end{aligned}$$

Elevando novamente ao quadrado os dois membros da equação, temos:

$$\begin{aligned}
x^2 + (y+4)^2 &= 1 + 8y + 16y^2 \Rightarrow \\
x^2 + y^2 + 8y + 16 &= 1 + 8y + 16y^2
\end{aligned}$$

De onde concluímos que:

$$15y^2 - x^2 - 15 = 0.$$

## 3.7 Equação Reduzida da Hipérbole

### 3.7.1 Hipérbole com eixo focal paralelo ao eixo $x$

Seja a hipérbole com centro  $C(x_0, y_0)$  da Figura 28.

Considerando um ponto genérico  $P(x, y)$ , e aplicando a definição, temos

$|PF_1 - PF_2| = 2a$ . Isto é:

$$\begin{aligned}
|\sqrt{[x - (x_0 - c)]^2 + (y - y_0)^2} - \sqrt{[x - (x_0 + c)]^2 + (y - y_0)^2}| &= 2a \Rightarrow \\
\sqrt{[x - (x_0 - c)]^2 + (y - y_0)^2} - \sqrt{[x - (x_0 + c)]^2 + (y - y_0)^2} &= \pm 2a \Rightarrow \\
\sqrt{(x - x_0 + c)^2 + (y - y_0)^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x_0 - c)^2 + (y - y_0)^2}.
\end{aligned}$$

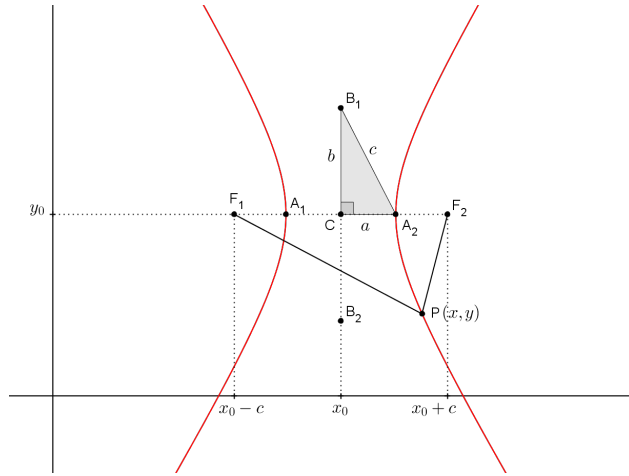


Figura 28: Hipérbole com eixo focal paralelo ao eixo  $x$ .

Fazendo a mudança de variável:  $x - x_0 = t$  e  $y - y_0 = u$ . Temos:

$$\sqrt{(t+c)^2 + u^2} = \pm 2a + \sqrt{(t-c)^2 + u^2}.$$

Elevando os dois membros ao quadrado:

$$\begin{aligned} (t+c)^2 + u^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(t-c)^2 + u^2} + (t-c)^2 + u^2 \Rightarrow \\ t^2 + 2tc + c^2 + u^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(t-c)^2 + u^2} + t^2 - 2tc + c^2 + u^2 \Rightarrow \\ \pm 4a\sqrt{(t-c)^2 + u^2} &= 4a^2 - 4tc \Rightarrow \\ \pm a\sqrt{(t-c)^2 + u^2} &= a^2 - tc \end{aligned}$$

Elevando os dois membros ao quadrado novamente segue:

$$\begin{aligned} a^2[(t-c)^2 + u^2] &= a^4 - 2a^2tc + t^2c^2 \Rightarrow \\ a^2(t^2 - 2tc + c^2 + u^2) &= a^4 - 2a^2tc + t^2c^2 \Rightarrow \\ a^2t^2 - 2a^2tc + a^2c^2 + a^2u^2 &= a^4 - 2a^2tc + t^2c^2 \Rightarrow \\ a^2t^2 - t^2c^2 + a^2u^2 &= a^4 - a^2c^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$t^2(a^2 - c^2) + a^2u^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (9)$$

Pela propriedade **P4**, temos:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow -b^2 = a^2 - c^2 \quad (10)$$

Substituindo (10) em (9), temos  $-t^2b^2 + a^2u^2 = -a^2b^2$ . Dividindo os dois membros por  $(-a^2b^2)$ , segue que  $\frac{t^2}{a^2} - \frac{u^2}{b^2} = 1$ . Agora, basta substituir  $x - x_0 = t$  e  $y - y_0 = u$  e obtemos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Se a hipérbole estiver centrada na origem do plano cartesiano, basta fazer  $x_0 = y_0 = 0$ , daí temos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A demonstração da equação da hipérbole com o eixo focal paralelo ao eixo  $y$  é análoga.

**Exemplo 3.2.** *Determine a equação da hipérbole da Figura 29 abaixo (exemplo retirado de [7]).*

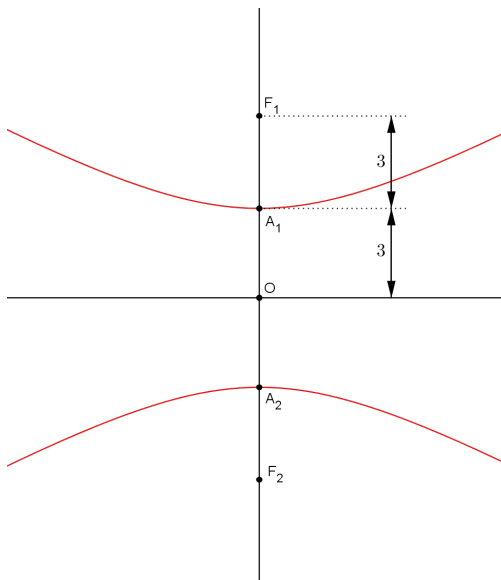


Figura 29: Exemplo 3.2.

*Solução.* Como a hipérbole está centrada na origem do plano cartesiano e tem eixo focal contido no eixo  $y$ , sabemos que sua equação é do tipo  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ . Da Figura 29 temos:  $2a = 6$  e  $2c = 12$ . Logo  $a = 3$  e  $c = 6$ .

Aplicando a propriedade **P4**, temos:  $c^2 = a^2 + b^2$ . Assim,  $b = 3\sqrt{3}$ . Portanto, sua equação é:

$$\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{(3\sqrt{3})^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$$

**Exemplo 3.3.** Determinar a equação reduzida da hipérbole cujos focos são  $F_1(2, 4)$  e  $F_2(2, -4)$  e o eixo imaginário é  $2b = 4$ .

*Solução.* Sabemos que  $2c = d(F_1F_2) = \sqrt{(2-2)^2 + (4+4)^2} = \sqrt{0+8^2}$ , portanto  $c = 4$ .

Se  $2b = 4$ , temos que  $b = 2$ .

Pela propriedade **P4**, temos:  $c^2 = a^2 + b^2$  de onde obtemos  $a = 2\sqrt{3}$ .

Como o eixo focal é paralelo ao eixo  $y$  e o centro da hipérbole não está na origem, sua equação é do tipo:  $\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$ .

O centro  $C(x_0, y_0)$  da hipérbole é o ponto médio entre  $F_1$  e  $F_2$ , então obtemos  $x_0 = \frac{2+2}{2} = 2$ ,  $y_0 = \frac{4-4}{2} = 0$  e  $C = (2, 0)$ .

Portanto, sua equação é:

$$\frac{y^2}{12} - \frac{(x - 2)^2}{4} = 1.$$

**Exemplo 3.4.** Determinar a distância focal e a excentricidade da hipérbole cuja equação é:

$$4x^2 - 25y^2 - 32x - 100y - 136 = 0.$$

*Solução.* Primeiramente, encontraremos a equação reduzida da hipérbole completando quadrados. Assim,

$$\begin{aligned}
4x^2 - 32x + 64 - (25y^2 + 100y + 100) &= 136 + 64 - 100 \Rightarrow \\
(2x - 8)^2 - (5y + 10)^2 &= 100 \Rightarrow \\
\frac{(2x - 8)^2}{100} - \frac{(5y + 10)^2}{100} &= 1 \Rightarrow \\
\left(\frac{2x - 8}{10}\right)^2 - \left(\frac{5y + 10}{10}\right)^2 &= 1 \Rightarrow \\
\left(\frac{x - 4}{5}\right)^2 - \left(\frac{y + 2}{2}\right)^2 &= 1 \Rightarrow \\
\frac{(x - 4)^2}{25} - \frac{(y - 2)^2}{4} &= 1.
\end{aligned}$$

Daí, segue que  $a = 5$  e  $b = 2$ . Pela propriedade **P4**, temos  $c^2 = a^2 + b^2$  de onde obtemos  $c = \sqrt{29}$ .

Portanto a distância focal é igual  $2c$  é  $2c = 2\sqrt{29} = d(F_1, F_2)$  e a excentricidade é igual a  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{29}}{5}$ .

### 3.8 As equações das assíntotas de uma hipérbole

Considere a hipérbole  $\mathcal{H} : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$  cujo gráfico está representado na Figura 30.

As assíntotas dessa hipérbole são as retas  $\overline{MP}$  e  $\overline{NQ}$ , que contém as diagonais do retângulo referência  $MNPQ$ .

- Equação da reta  $\overline{MP}$ :

A reta passa por  $C(x_0, y_0)$  e  $m = \tan(N\hat{C}A_2) = \frac{b}{a}$ , portanto  $y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$ .

- Equação da reta  $\overline{NQ}$ :

A reta passa por  $C(x_0, y_0)$  e  $m = \tan(M\hat{C}A_1) = -\frac{b}{a}$ , portanto

$$y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0).$$

Analogamente, as assíntotas de uma hipérbole com eixo focal paralelo ao eixo  $y$  são representadas pelas equações:

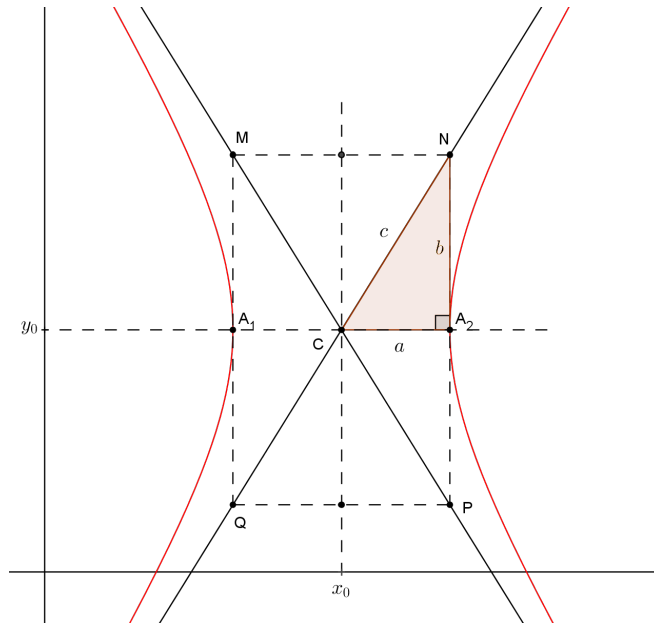


Figura 30: Hipérbole e suas assíntotas.

$$y - y_0 = -\frac{a}{b}(x - x_0) \quad \text{e} \quad y - y_0 = \frac{a}{b}(x - x_0).$$

**Exemplo 3.5.** Determine as equações das assíntotas da hipérbole de equação  $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$  e esboce o gráfico.

*Solução.* Temos uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo  $x$  e centro em  $C = (2, -3)$ . Obtemos  $a^2 = 16$ ,  $b^2 = 9$  e  $c^2 = a^2 + b^2$ . Logo,  $a = 4$ ,  $b = 3$  e  $c = 5$ .

Temos:

$$r_1: \quad y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \Rightarrow y + 3 = \frac{3}{4}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{3x}{4} - \frac{9}{2}$$

$$r_2: \quad y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0) \Rightarrow y + 3 = -\frac{3}{4}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{3x}{4} - \frac{3}{2}$$

**Exemplo 3.6.** As equações das assíntotas de uma hipérbole são  $y = 2x$  e  $y = -2x$ . Se a hipérbole tem vértices  $A_1(3, 0)$  e  $A_2(-3, 0)$ , determine a equação da hipérbole.

*Solução:* Temos que  $2a = 6$ , logo  $a = 3$ . As assíntotas contêm os pontos de abscissa 3 e  $-3$ , daí concluí-se que os vértices do retângulo referência são  $M(3, 6)$ ,  $N(3, -6)$ ,  $P(-3, -6)$  e  $Q(-3, 6)$  e  $2b = 12$ , logo  $b = 6$ . Como a hipérbole tem eixo focal contido no eixo  $x$  e centro na origem do plano, temos:

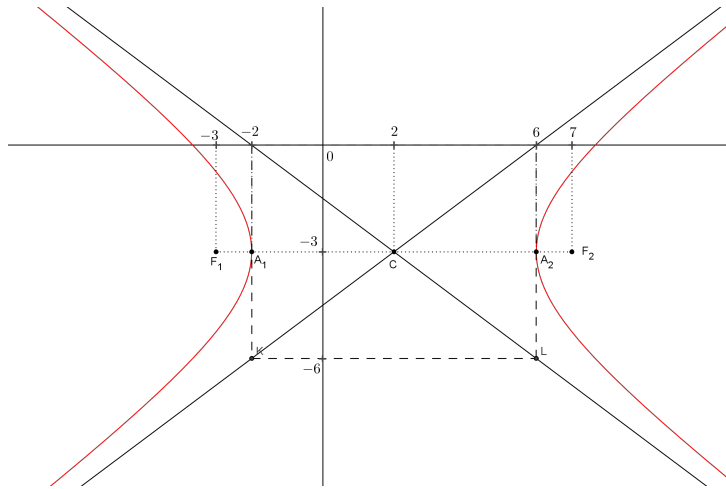


Figura 31: Solução gráfica do Exemplo 3.5.

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

### 3.9 Hipérbole Equilátera

Quando  $b = a$ , o retângulo referência da hipérbole se transforma em um quadrado. Nesse caso, as assíntotas tornam-se perpendiculares e a hipérbole é denominada hipérbole equilátera. A equação dessa hipérbole é:

- $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$ , se o eixo focal for paralelo ao eixo  $x$ .
- $\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1$ , se o eixo focal for paralelo ao eixo  $y$ .

Uma das hipérboles mais famosas é a que descreve a relação entre a pressão e o volume de um gás perfeito a temperatura constante, conhecida como *Lei de Boyle*. Mais detalhes na Subseção 4.5.

### 3.10 Rotação de Eixos

Sejam  $Ox$  e  $Oy$  os eixos primitivos do Sistema Cartesiano de Eixos Coordenados com origem  $O(0,0)$ . Sejam  $O\bar{x}$  e  $O\bar{y}$  os novos eixos coordenados depois que o sistema primitivo foi rotacionado de um ângulo  $\theta$  em torno da origem  $O(0,0)$ . Logo,  $\theta$  é o



ângulo formado entre os eixos  $Ox$  e  $O\bar{x}$ . Seja  $P(x, y)$  um ponto qualquer do sistema primitivo. Portanto, o mesmo ponto  $P$  terá coordenadas  $P(\bar{x}, \bar{y})$  em relação ao novo sistema e as equações da transformação é dada por:

$$\begin{cases} x = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta \\ y = \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta \end{cases} \quad (11)$$

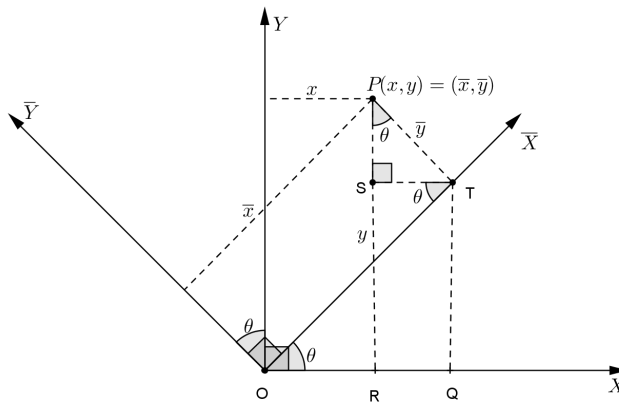


Figura 32: Rotação de Eixos.

*Demonstração.* Da Figura 32, temos  $\overline{OR} = x$ ,  $\overline{OT} = \bar{x}$ ,  $\overline{PR} = y$  e  $\overline{PT} = \bar{y}$ . Considerando o triângulo  $\triangle OQT$ , obtemos  $\sin \theta = \frac{\overline{QT}}{\bar{x}}$  e  $\cos \theta = \frac{\overline{OQ}}{\bar{x}}$ . Do  $\triangle PST$ , obtemos  $\sin \theta = \frac{\overline{ST}}{\bar{y}}$  e  $\cos \theta = \frac{\overline{SP}}{\bar{y}}$ .

Assim,

$$x = \overline{OR} = \overline{OQ} - \overline{RQ} = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta \quad e \quad y = \overline{PR} = \overline{RS} + \overline{SP} = \overline{QT} + \overline{SP} = \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta.$$

□

**Exemplo 3.7.** *Rotacione os eixos  $x$  e  $y$  de  $45^\circ$  e obtenha a nova equação da hipérbole cuja expressão é  $x^2 + xy + y^2 = 1$ .*

*Solução.* Do enunciado temos que  $\theta = 45^\circ$ . Substituindo em (11), obtemos

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y} \end{cases}$$

Substituindo na equação da hipérbole, temos:

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 1 \Rightarrow \\ \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y}) \right]^2 + \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y}) \right] \cdot \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y}) \right] + \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y}) \right]^2 &= 1 \Rightarrow \\ \frac{1}{2}(\bar{x}^2 - 2\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2) + \frac{1}{2}(\bar{x}^2 - \bar{y}^2) + \frac{1}{2}(\bar{x}^2 + 2\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2) &= 1 \Rightarrow \\ \frac{1}{2}(\bar{x}^2 - 2\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 + \bar{x}^2 - \bar{y}^2 + \bar{x}^2 + 2\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2) = 1 \Rightarrow \frac{3\bar{x}^2}{2} + \frac{\bar{y}}{2} &= 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{2}{3}} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

**Exemplo 3.8.** *Mostre que a equação  $xy - 1 = 0$  é uma hipérbole.*

*Solução.* Devemos rotacionar o sistema de maneira a eliminar o termo  $xy$ , para isso basta substituir na equação dada as equações da transformação dadas na equação (11).

$$\begin{aligned} xy - 1 = 0 &\Rightarrow xy = 1 \Rightarrow \\ (\bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta)(\bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta) &= 1 \Rightarrow \\ \bar{x}^2 \sin \theta \cos \theta + \bar{x}\bar{y} \cos^2 \theta - \bar{x}\bar{y} \sin^2 \theta - \bar{y}^2 \sin \theta \cos \theta &= 1 \Rightarrow \\ (\bar{x}^2 - \bar{y}^2)(\sin \theta \cos \theta) + \bar{x}\bar{y}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) &= 1. \end{aligned}$$

Para eliminar  $xy$ , fazamos  $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 0$ , então  $\sin^2 \theta = \cos^2 \theta$ . Daí, temos que  $\sin \theta = \cos \theta$  ou  $\sin \theta = -\cos \theta$ .

Qualquer uma das igualdades resolve o problema, tome  $\sin \theta = \cos \theta$ , logo  $\theta = 45^\circ$ . Voltando a equação, temos:  $(\bar{x}^2 - \bar{y}^2) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1$ . Portanto, a equação representa uma hipérbole de equação reduzida igual a  $\frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{\bar{y}^2}{2} = 1$ .

### 3.11 Propriedade Refletora da Hipérbole

**Proposição 3.1.** *Todo raio de luz emitido na direção de um dos focos, reflete no ramo mais próximo e o raio refletido passa pelo outro foco.*

*Demonstração.* Considere uma hipérbole cuja equação é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (12)$$

de eixo real  $x$  e centro na origem, sabemos que seus focos são  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$  pois  $c^2 = a^2 + b^2$ .

Agora considere um raio de luz emitido na direção do foco  $F_1$ . Seja  $P(x, y)$  um ponto qualquer da hipérbole tal que esse raio de luz o intercepte. Provaremos que o raio refletido passa pelo foco  $F_2$ . Para isso usaremos a Geometria Analítica, o Cálculo Diferencial e a Física.

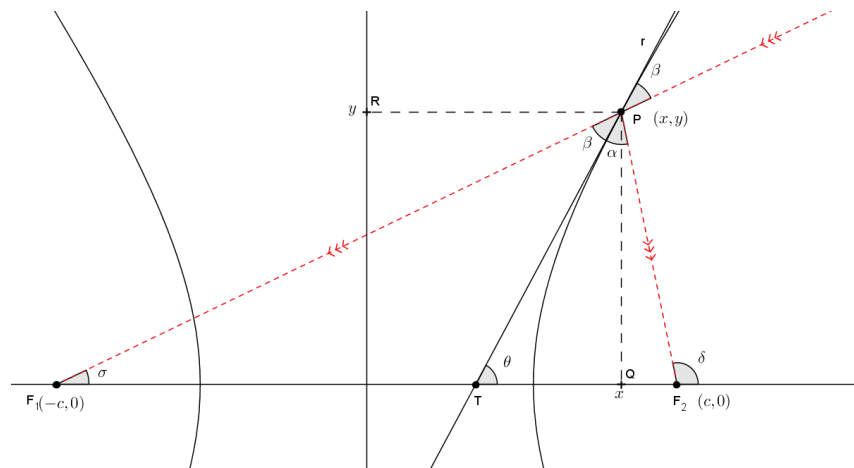


Figura 33: Propriedade refletora

Considerando a Figura 33, sejam  $r$  a reta tangente que passa pelo ponto  $P(x, y)$ ,  $\alpha$  o ângulo formado pelo raio refletido e a reta  $r$  e  $\beta$  o ângulo formado pelo raio incidente com esta mesma reta.

Assim, fica provado a propriedade refletora da hipérbole se  $\alpha = \beta$  ( Lei da reflexão da luz, mais precisamente a 2ª lei que diz que o ângulo de reflexão é sempre igual ao ângulo de incidência).

Derivando a expressão dada em (12) implicitamente temos:

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2yy'}{b_2} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{a^2} = \frac{2yy'}{b_2} \Rightarrow y' = \frac{b_2x}{a_2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$$

Como  $m = \tan \theta = \frac{dy}{dx}$  segue que  $\tan \theta = \frac{b_2x}{a^2y}$ .

Do  $\triangle PF_1Q$ , temos :  $\tan \sigma = \frac{y}{x+c}$ . Do  $\triangle PF_2Q$ , temos:

$\tan \delta = -\tan(\pi - \delta) = -\frac{y}{c-x} = \frac{y}{x-c}$ . Do  $\triangle PF_2T$ , temos que  $\delta = \alpha + \theta$ , então:

$$\begin{aligned} \tan \alpha = \tan(\delta - \theta) &= \frac{\tan \delta - \tan \theta}{1 + \tan \delta \cdot \tan \theta} = \frac{\frac{y}{x-c} - \frac{b^2x}{a^2y}}{1 + \frac{y}{x-c} \cdot \frac{b^2x}{a^2y}} = \\ &= \frac{\frac{a^2y^2 - b^2x^2 + b^2cx}{(x-c) \cdot a^2y}}{\frac{a^2xy - a^2cy + b^2xy}{(x-c) \cdot a^2y}} = \frac{a^2y^2 - b^2x^2 + b^2cx}{xy(a^2 + b^2) - a^2cy}. \end{aligned}$$

Como o ponto  $P(x, y)$  pertence a hipérbole, temos  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ . Usando está relação e a propriedade **P4**, temos:

$$\tan \alpha = \frac{-a^2b^2 + b^2cx}{xy(a^2 + b^2) - a^2cy} = \frac{-a^2b^2 + b^2cx}{c^2xy - a^2cy} = \frac{b^2(cx - a^2)}{cy(cx - a^2)} \Rightarrow$$

$$\tan \alpha = \frac{b^2}{cy} \tag{13}$$

Do  $\triangle PF_1T$ , temos que  $\theta = \sigma + \beta$ , então:

$$\begin{aligned} \tan \beta = \tan(\theta - \sigma) &= \frac{\tan \theta - \tan \sigma}{1 + \tan \theta \cdot \tan \sigma} = \frac{\frac{b^2x}{a^2y} - \frac{y}{x+c}}{1 + \frac{b^2x}{a^2y} \cdot \frac{y}{x+c}} = \\ &= \frac{\frac{b^2x^2 + b^2cx - a^2y^2}{(x+c) \cdot a^2y}}{\frac{a^2xy + a^2cy + b^2xy}{(x+c) \cdot a^2y}} = \frac{b^2x^2 + b^2cx - a^2y^2}{xy(a^2 + b^2) + a^2cy}. \end{aligned}$$

Como o ponto  $P(x, y)$  pertence a hipérbole, temos  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ . Usando esta relação e a propriedade **P4**, temos:

$$\begin{aligned}\tan \beta &= \frac{a^2b^2 + b^2cx}{xy(a^2 + b^2) + a^2cy} = \frac{a^2b^2 + b^2cx}{c^2xy + a^2cy} = \frac{b^2(cx + a^2)}{cy(cx + a^2)} \Rightarrow \\ \tan \beta &= \frac{b^2}{cy}\end{aligned}\tag{14}$$

De (13) e (14), segue que  $\tan \alpha = \tan \beta$ , como estamos trabalhando no 1º quadrante segue que  $\alpha = \beta$ .

□

## 4 Aplicações da Hipérbole

### 4.1 Aplicação na Astronomia

#### 4.1.1 Telescópios Refletores

Segundo [6], em 1609, Galileu Galilei (1564-1642) construiu um telescópio para observação astronômica, ele foi o primeiro cientista a realizar tal fato. Os primeiros telescópios, inclusive o de Galileu, eram construídos com lentes e funcionavam com base na refração da luz. Eram chamados telescópios refratores. As lentes utilizadas na construção tinham vários inconvenientes, como as deformações das imagens que elas produzem e a decomposição da luz branca em várias cores produzindo um efeito nas imagens chamado aberração cromática.

Nos telescópios refletores esses inconvenientes não existem. O telescópio refletor é constituído de um espelho parabólico no fundo de um tubo onde cada feixe de luz paralelo que se reflete no espelho vai formar a imagem no foco  $F$ . Como o foco  $F$  está localizado no interior dos telescópios, na prática é impossível para o observador ver essa imagem. Veja a Figura 34.

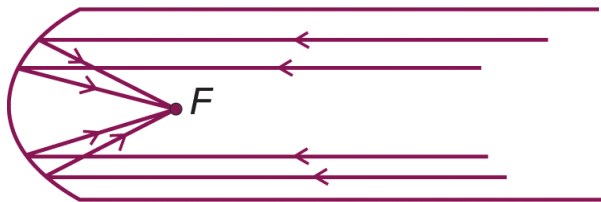


Figura 34: Telescópio Refletor.

A solução para esse problema foi dada por Isaac Newton posicionando um espelho plano entre a superfície parabólica côncava e o foco, de tal forma que os raios fossem direcionados para fora da parte interna do espelho. Por outro lado, a invenção de Newton gerou problema similar, pois, para que a convergência do foco alternativo ficasse fora do cilindro telescópico a dimensão deste espelho deveria ser bem considerável, bloqueando grande parte dos raios incidentes prejudicando a formação da imagem. Veja Figura 35.

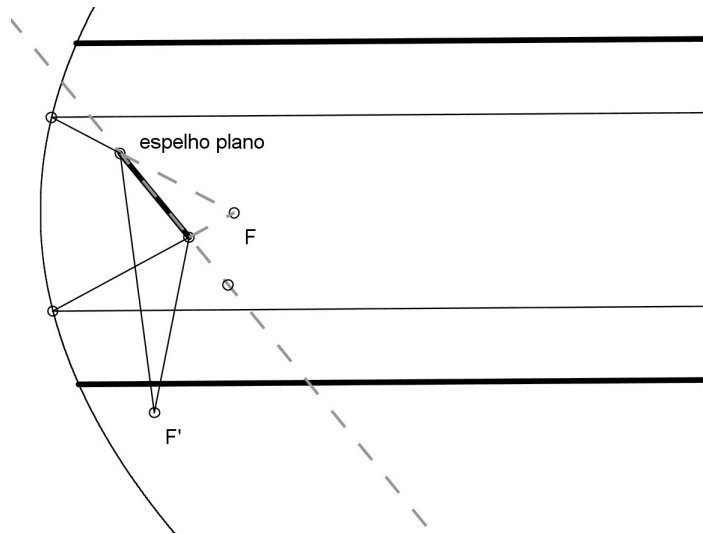


Figura 35: Telescópio com espelho plano.

Em 1672 o astrônomo francês Cassegrais propôs a utilização de um espelho hiperbólico. Um dos focos da hipérbole coincide com o foco  $F_2$  da parábola. Agora os raios que iriam formar a imagem no foco  $F_2$  são refletidos pelo espelho e formarão essa imagem no foco  $F_1$  da hipérbole. As propriedades da hipérbole permitem grande flexibilidade na montagem do refletor hiperbólico  $E$ , adequando-a as exigências das observações. Veja a Figura 36.

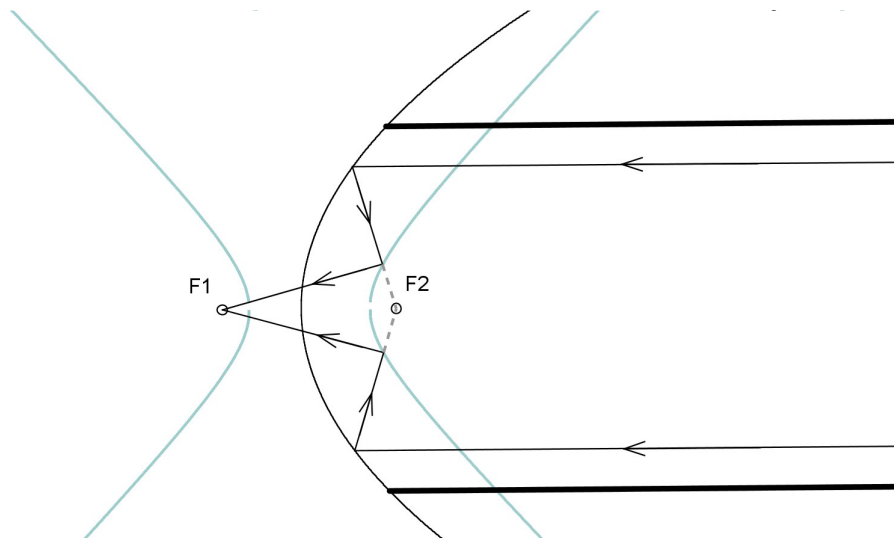


Figura 36: Telescópio com espelho hiperbólico.

### 4.1.2 A órbita dos cometas

Os cometas podem descrever três tipos de órbitas sendo elas elíptica, parabólica ou hiperbólica. Os cometas cujas órbitas são elípticas se caracterizam por serem periódicos e mover-se ao redor do Sol que ocupa um dos focos da trajetória elíptica.

Como os cometas têm massa muito pequena, a influência gravitacional sobre os planetas é quase nula. Mas devido as perturbações gravitacionais do Sol e de alguns planetas muito grandes como Júpiter e Saturno, a órbita de alguns cometas pode se alterar.

Os cometas cujas órbitas são hiperbólicas ou parabólicas não são periódicos pois sua órbita não é fechada. Dessa maneira aparecem uma única vez surgindo das profundezas do espaço e afastando da mesma maneira desaparecendo para sempre. Outro fator que interfere nas órbitas dos cometas é a velocidade que determina uma órbita elíptica, parabólica ou hiperbólica lembrando que o Sol coincide com o foco da cônica formada pela trajetória do planeta. A velocidade é o fator determinante para o tipo de trajetória de cada cometa.

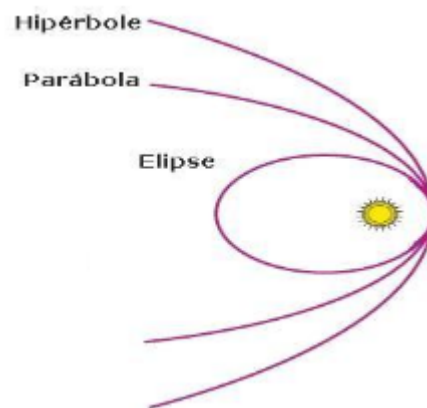


Figura 37: Tipos de trajetória dos cometas. Imagem obtida em [9]

## 4.2 Aplicação na Navegação

Segundo [1], a navegação hiperbólica utiliza o método de medida da diferença de distâncias a determinados pontos (estações do sistema) para obtenção das linhas de



posição (LDP) que definem a posição do navio. Os sistemas eletrônicos de posicionamento baseados em terra (land based positioning systems) que estudaremos a seguir utilizam o método hiperbólico para determinação das LDP, por diferença de fase, como o sistema *Decca*, ou por diferença de tempo, como o *LORAN*.

O modo mais prático de construção geométrica de uma hipérbole consiste em, plotados os focos, traçar, em escala, circunferências com centros nos focos, cujos raios aumentem gradualmente, em uma proporção constante, veja Figura 38. As circunferências, então, indicam as distâncias aos focos. Para o traçado da hipérbole, escolhem-se os pontos de interseção de duas circunferências cuja diferença dos raios seja o valor da constante desejado.

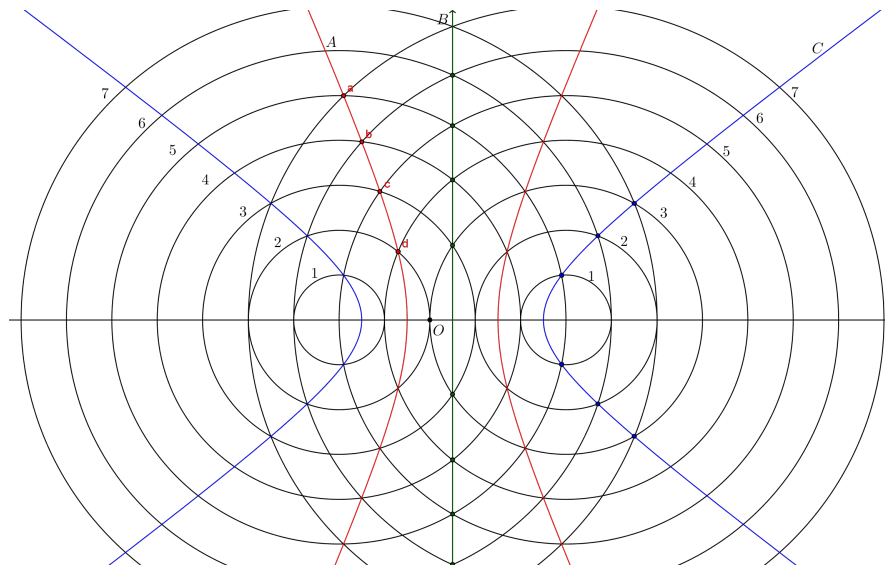


Figura 38: Traçado da hipérbole.

Para o traçado do ramo da hipérbole  $A$  da Figura 38, escolhemos uma diferença constante de distâncias aos focos igual a 2 unidades. Assim, no ponto  $a$ , a distância ao foco  $F$  é igual a 7 unidades e a distância ao foco  $F'$  igual a 5, sendo, portanto, a diferença das distâncias igual a 2; no ponto  $b$ , a distância a  $F$  é de 6 unidades e a distância a  $F'$  é de 4 unidades, o que significa uma diferença de distâncias também igual a 2; o mesmo ocorre nos pontos  $c$ ,  $d$  e nos demais pontos da hipérbole  $A$ ; em todos eles, a diferença das distâncias aos focos é de 2 unidades.

A hipérbole  $C$ , também traçada na Figura 38, corresponde a uma diferença

de distâncias constante, igual a 4 unidades. Analisando essa Figura, conclui-se que, quando a diferença constante das distâncias é pequena, a hipérbole se localiza próximo à mediatriz e é bastante aberta; ao contrário, quando a diferença constante das distâncias cresce, os ramos da hipérbole se aproximam dos focos e a curvatura aumenta (como mostrado na hipérbole  $C$  da Figura 38); a mediatriz corresponde a uma diferença de distâncias constante igual a zero. A compreensão do traçado e das propriedades de uma hipérbole auxiliam o entendimento dos princípios em que se baseia a navegação hiperbólica.

Um sistema hiperbólico de navegação pode usar a medida do intervalo de tempo de recepção de sinais ou a comparação da fase de sinais de onda contínua transmitidos pelas estações de terra. Os sistemas para navegação marítima que será abordado empregam ambos os métodos: o *LORAN* utiliza a medida do intervalo de tempo; o sistema *Decca* se baseia na medida da diferença de fase para determinação das LDP.

Para entendermos o princípio de funcionamento da navegação hiperbólica faz-se necessário a definição de **Hipérbole de Posição** que é o lugar geométrico das posições do observador onde o intervalo de tempo entre a recepção de sinais de rádio transmitidos simultaneamente por duas estações fixas é constante.

O princípio básico de funcionamento é bastante simples, o qual passamos a descrever. Estações de rádio situadas simultaneamente em posições  $F_1$  e  $F_2$  emitem sinais que são recebidos pelo navegante situado numa posição  $P$ . O navegante mede o intervalo  $\Delta t = t_2 - t_1$  entre o instante  $t_2$ , tempo quando ele recebe o sinal enviado por  $F_2$ , e o instante  $t_1$ , tempo quando ele recebe o sinal de  $F_1$ . Se  $T_1$  é o intervalo de tempo que leva o sinal emitido por  $F_1$  para alcançar a posição do navegante, e  $T_2$  é o intervalo de tempo que leva o sinal emitido por  $F_2$  para alcançar a posição do navegante, então a diferença entre a distância da posição do navegante a  $F_1$  e a distância da posição do navegante a  $F_2$  é  $PF_2 - PF_1 = K$  sendo  $K$  uma constante.

Embora o navegante não possa medir  $T_1$  e  $T_2$  diretamente sem saber quando os sinais foram enviados, ele pode medir com precisão a diferença entre os instantes que os sinais foram recebidos, que é o bastante para determinar que o navio está em algum ponto  $P$  da hipérbole cuja equação é  $PF_2 - PF_1 = K$ .

Veremos um exemplo na prática. Na Figura 39, na hipérbole  $\mathcal{M}$ , considerem-

se os pontos  $a$  e  $b$ . O sinal de rádio, para se propagar do transmissor  $A$  ao ponto  $a$ , gasta  $600ms$ (microsegundos); por outro lado, o sinal de rádio gasta  $900ms$  para se propagar do transmissor  $B$  ao mesmo ponto  $a$ . Assim, se os dois sinais fossem emitidos simultaneamente, um receptor no ponto  $a$  receberia o sinal do transmissor  $A$   $300ms$  antes de receber o sinal do transmissor  $B$ .

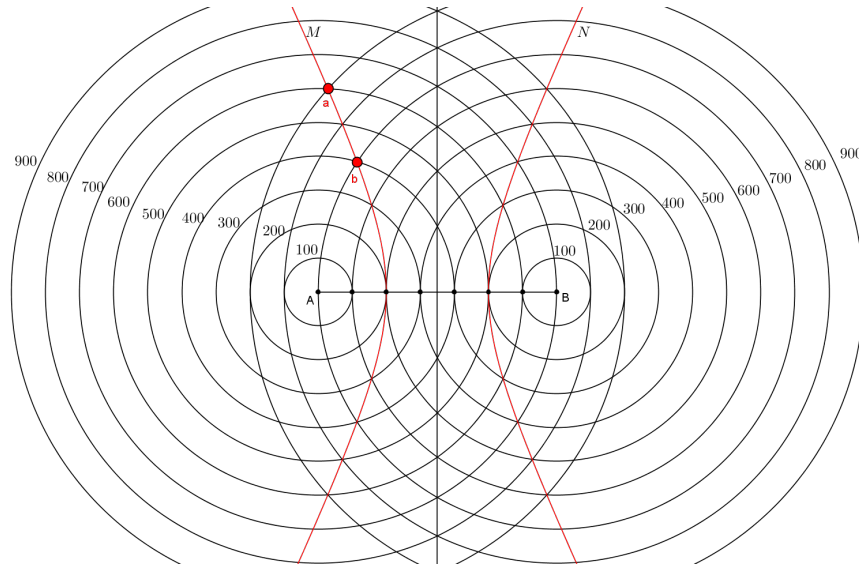


Figura 39: Hipérbole de posição.

No ponto  $b$  da hipérbole  $\mathcal{M}$  na Figura 39, o sinal gastaria  $400ms$  para sair do transmissor  $A$  e chegar ao receptor no ponto  $b$ . Gastaria  $700ms$  para ir de  $B$  ao receptor no ponto  $b$ , isso nos dá uma diferença de tempo de  $300ms$ .

Dessa forma obteremos diferenças de tempo constantes para todos os pontos da hipérbole  $\mathcal{M}$ . Assim, se a bordo existir um radioreceptor capaz de medir o intervalo de tempo entre a recepção dos sinais emitidos simultaneamente por  $A$  e  $B$ , poderemos determinar a **hipérbole de posição** do navio. Mas ainda de acordo com a Figura 39, temos a hipérbole  $\mathcal{N}$  que também é formada pelos pontos cuja diferença de tempo é de  $300ms$  e dessa forma teríamos uma ambiguidade no sistema em relação aos pontos simétricos da **hipérbole de posição**.

Para eliminar essas ambiguidades, a maioria dos sistemas hiperbólicos de navegação usam o processo de escalonamento das emissões.

Agrupando as transmissões em redes de três ou quatro estações. Em uma

rede, uma estação transmite primeiro e as demais só emitem os respectivos sinais ao receberem a onda de rádio emitida pela primeira estação. Vejamos um exemplo:

Na Figura 40, as circunferências de distância/tempo traçadas estão espaçadas de  $100ms$ . Verifica-se, portanto, que as estações representadas estão espaçadas de  $400ms$ , ou seja, o sinal de rádio transmitido por elas gasta  $400ms$  para se propagar até a outra. Inicialmente, uma das estações, denominada de **Mestra (M)**, emite seu sinal. Só quando ele for recebido na outra estação, que se denomina **Escrava, Remota ou Secundária (S)**, é que esta emitirá o respectivo sinal. Então, no exemplo da Figura 3.7, a estação **S** só transmitirá o seu sinal  $400ms$  depois da emissão do sinal da estação **M**, isto é, haverá um atraso de  $400ms$  na transmissão da estação **S**. Logo, para um ponto **d**, no ramo hiperbólico **D**, tem-se que o sinal de **M** gasta  $300ms$  para alcançar **d** e o sinal de **S** gasta  $600ms$  para alcançar **d**. Portanto, o atraso na transmissão do sinal de **S** é de  $400ms$  e a diferença de tempo dos sinais recebidos por **g** de **M** e **S** respectivamente é de  $100ms$ .

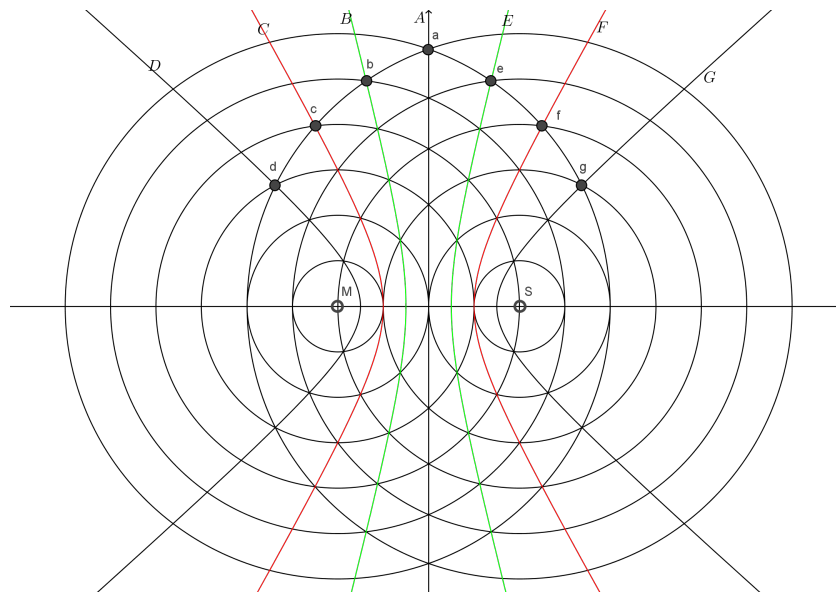


Figura 40: Hipérbole de posição.

Desta maneira, elimina-se as ambiguidades, pois pontos simétricos têm diferença de tempo de resposta distintos. Seguindo esse raciocínio, podemos montar a seguinte tabela de diferenças de tempo:

Hipérbole de Posição	Diferença de Tempo
<i>D</i>	700ms
<i>C</i>	600ms
<i>B</i>	500ms
<i>A</i>	400ms
<i>E</i>	300ms
<i>F</i>	200ms
<i>G</i>	100ms

### 4.3 Aplicação na Engenharia Civil

De maneira geral as cônicas são utilizadas na Engenharia e Arquitetura em pórticos, pontes, cúpulas, torres, arcos entre outros devido às suas propriedades físicas e estéticas.

Particularmente, para as aplicações da hipérbole é necessário conhecermos o hiperbolóide de revolução. A hipérbole, ao girar em torno de um dos eixos de simetria, gera uma superfície denominada "hiperbolóide de revolução". Nestas superfícies, as seções perpendiculares ao eixo de rotação são circunferências e as seções paralelas ao eixo são hipérbolas.

O hiperbolóide de uma folha é uma superfície duplamente regrada, ou seja, para cada um dos seus pontos existem duas retas distintas que se intersectam na superfície, ela pode ser construída por vigas de aço retas, permitindo assim uma minimização dos ventos transversais, mantendo a integridade estrutural com uma utilização mínima de materiais de construção. Pode ser utilizado nas torres de refrigeração das usinas nucleares e em edifícios que utilizam esta superfície como um elemento de arquitetura. Observe as imagens de algumas estruturas com superfícies hiperbólicas nas Figuras 41, 42 e 43.

Particularmente podemos citar também a construção do Planetário de Saint Louis (*Saint Louis Science Center*). Essa é uma das construções mais marcantes de



Figura 41: Torre de refrigeração.



Figura 42: Estrutura em forma de hiperbolóide. Figura retirada de [15].

Saint Louis. Veja Figura 44.

Outras estruturas em forma de hiperbolóide de uma folha. A Figura 45 foi a primeira estrutura em forma de hiperbolóide do mundo, construída em Nizhny Novgorod, então Império Russo, em 1896. Já a Figura 46 é a catedral de Brasília.

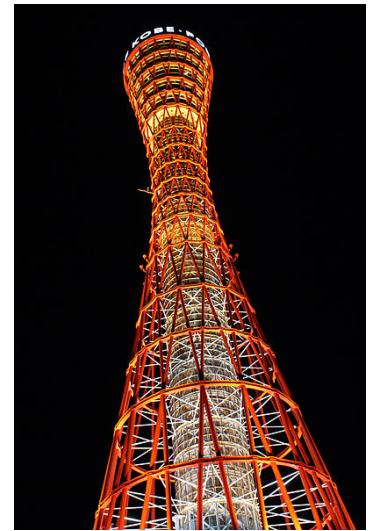


Figura 43: Kobe port tower. Figura retirada de [13].



Figura 44: Planetário de Saint Louis. Figura retirada de [14].



Figura 45: Estrutura em forma de hiperbolóide.

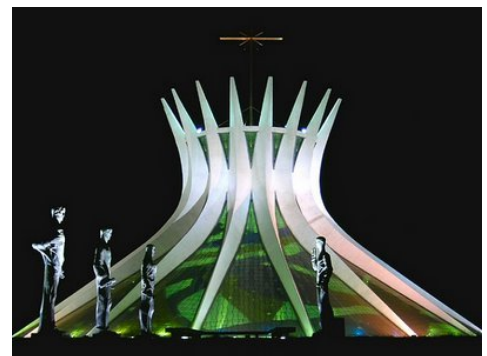


Figura 46: Catedral de Brasília.

#### 4.4 Aplicação na Administração e na Economia

As curvas de demanda e oferta frequentemente são representadas por curvas lineares porém, numa análise mais ampla, as equações quadráticas também são bastante utilizadas. Parábolas e hipérbolas que possuem partes de seus gráficos localizados no primeiro quadrante são utilizadas para representar essas curvas de demanda e oferta.

Exemplo de curva hiperbólica representando uma função de demanda onde o eixo

$x$  representa a quantidade de mercadoria e o eixo  $y$  representa o valor em reais dessa mercadoria está ilustrado na Figura 47. Lembrando que devemos considerar apenas a parte do gráfico contida no primeiro quadrante.

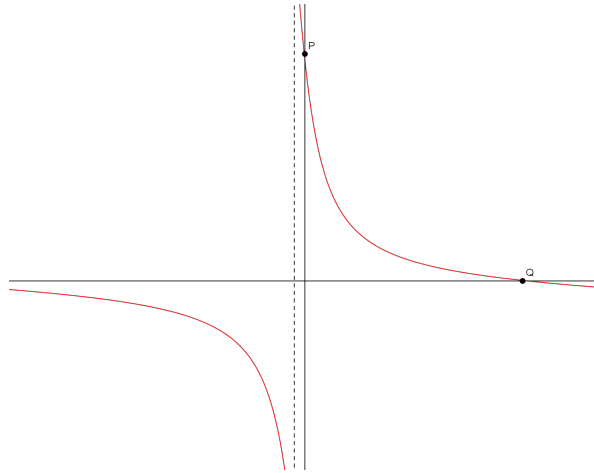


Figura 47: Gráfico da função demanda.

## 4.5 Aplicações na Física e Química

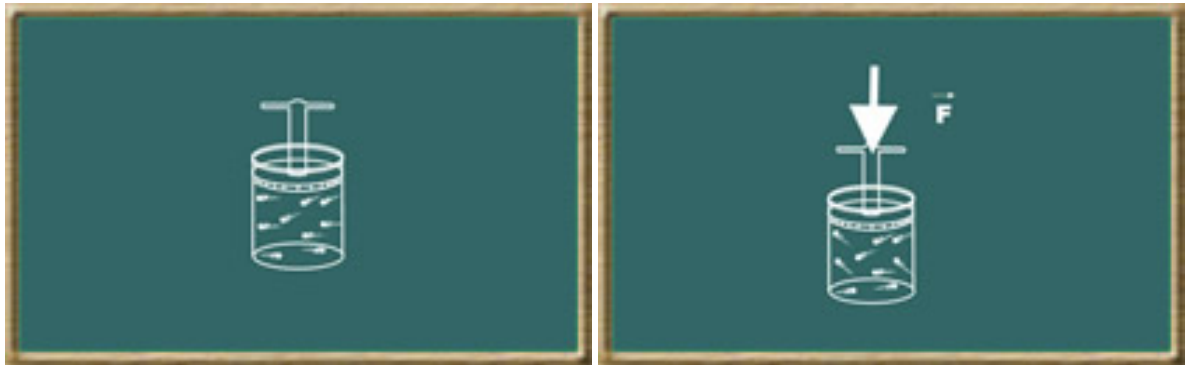
Um exemplo prático na Física é a Lei de Boyle. Essa lei foi formulada pelo químico irlandês *Robert Boyle* (1627-1691) e descreve o comportamento do gás ideal quando se mantém sua temperatura constante (transformação isotérmica). O volume ocupado por uma certa massa de gás, é inversamente proporcional à pressão aplicada. Seja  $V$  o volume de um gás submetido a uma pressão  $P$ , a uma temperatura constante. A lei de Boyle estabelece que  $P.V = constante(K)$ .

Vejam os:

- Considere um recipiente com tampa móvel que contém certa quantidade de gás.
- Aplica-se lentamente uma força sobre essa tampa, pois desse modo não alteraremos a temperatura do gás.

Observaremos um aumento de pressão junto com uma diminuição do volume do gás, ou seja, quando a temperatura do gás é mantida constante, pressão e volume são





grandezas inversamente proporcionais. Essa é a lei de Boyle, que pode ser expressa matematicamente da seguinte forma:

$$P = \frac{K}{V} \implies P.V = K$$

Onde  $K$  é uma constante que depende da temperatura, da massa e da natureza do gás. Já vimos no **Exemplo 2.8** que a equação do tipo  $xy = 1$  é uma hipérbole equilátera e por analogia é fácil ver que o gráfico da expressão  $P.V = K$  também representa uma hipérbole equilátera.

A transformação descrita será representada em um diagrama de pressão por volume conforme Figura 48.

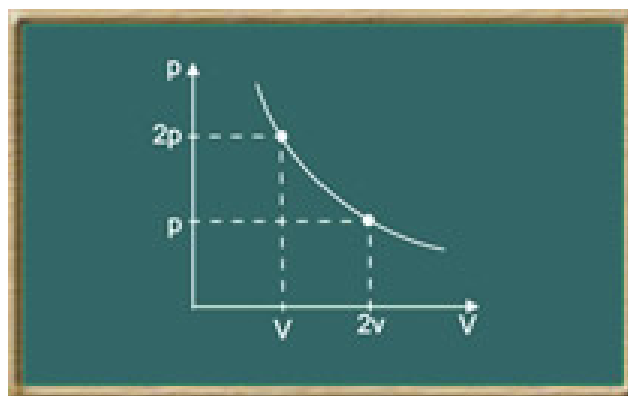


Figura 48: Hipérbole representando gráfico pressão x volume.

## 4.6 Curiosidades

Além das aplicações na engenharia, arquitetura, navegação e outros. Vejamos algumas outras aplicações um tanto quanto curiosas e interessantes.

Segundo [3] mostraremos uma ocorrência de modelagem de um sistema físico onde as hipérbolas ocorrem de maneira natural: a propagação das ondas de choque de aviões supersônicos. Considere um avião em voo com uma velocidade constante  $v$ , maior que a velocidade de propagação do som no ar  $v_s$ . Essa situação está ilustrada na Figura 49.

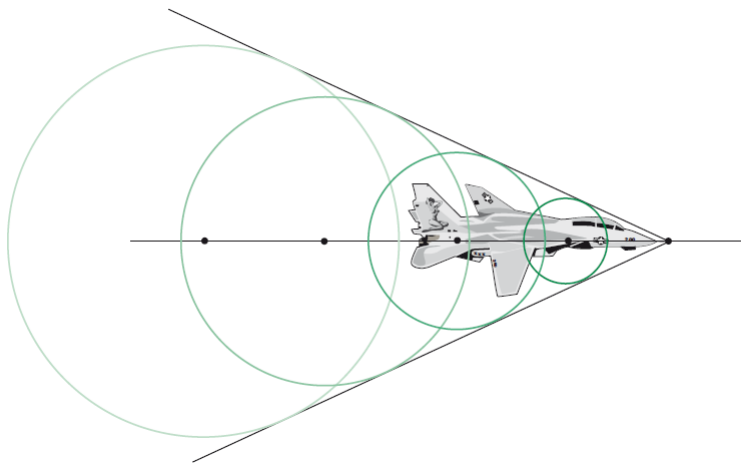


Figura 49: Avião supersônico.

Vamos pensar num corpo pequeno, como o nariz de um avião, que se move, no referencial considerado, na horizontal, em linha reta, com velocidade  $v$  supersônica, isto é, a velocidade do avião é maior que a velocidade do som  $v_a > v_s$ .

No instante  $t$ , o corpo está no ponto  $C$ . Ao passar pelo ponto  $A$ , no instante  $t_1$ , o corpo produziu um pulso esférico que vem se propagando com a velocidade do som. Esse pulso esférico, no instante  $t$ , tem raio  $\overline{RA}$ . Ao passar pelo ponto  $B$ , no instante também anterior  $t_2$ , o corpo produziu um pulso esférico que também vem se propagando com a velocidade do som. Esse outro pulso esférico, no instante  $t$ , tem um raio  $\overline{RB}$ . Em outras palavras, ao passar por qualquer ponto, o corpo produz pulsos esféricos. No instante  $t$  considerado, a superfície envolvente desses pulsos, ou seja, a onda de choque, é uma superfície cônica, chamada de cone de *Mach*. O eixo do cone

de *Mach* é a trajetória do corpo e o vértice é o ponto *C*, onde o corpo se encontra no instante *t*. Veja Figura 50.

Na Figura 51 é possível observar o cone de *Mach* como acontece na realidade.

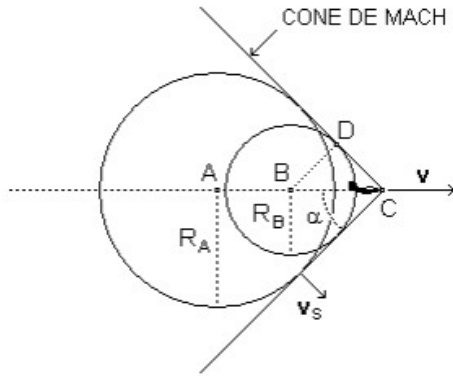


Figura 50: Cone de Mach.



Figura 51: Cone de Mach. Imagem retirada de [16].

O ângulo de abertura do cone de *Mach* pode ser calculado usando a seguinte relação, tirada do triângulo retângulo *BCD*:

$$\sin \alpha = \frac{v_s(t - t_2)}{v(t - t_1)} = \frac{v_s}{v}$$

A superfície do cone de Mach é denominada onda de choque e seu impacto pode ser altamente destrutivo. A onda de choque quando atinge o solo, produz uma curva limite entre a região onde o som da aeronave não é ouvido e a região onde o som é percebido. Essa curva limite é denominada limiar de audibilidade. Como a trajetória da aeronave é uma linha reta paralela ao plano do solo, então a curva do limiar da audibilidade será uma hipérbole, pois o plano de secção do cone é paralelo ao eixo de simetria. Essa situação é ilustrada na Figura 52.

Outra curiosidade das aplicações das hipérbole está no entretenimento. O bilhar hiperbólico tem uma tabela na forma de um ramo de hipérbole com o outro ramo desta curva desenhado conforme figura. O foco correspondente à hipérbole-tabela está desenhado na parte superior e no foco correspondente ao ramo desenhado há um buraco. Uma bola atirada em direção ao foco desenhado deverá cair no buraco. Veja as Figuras 53 e 54.

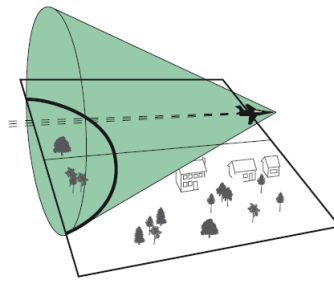


Figura 52: Limiar de audibilidade.

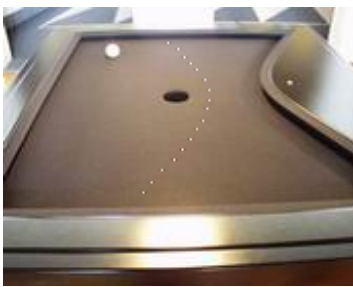


Figura 53: Bilhar hiperbólico. Imagem obtida em [8]



Figura 54: Bilhar hiperbólico. Imagem obtida em [8]

Uma forma bem interessante e didática de se construir um hiperbolóide de uma folha é com o uso de macarrão. Veja a Figura 55.



Figura 55: Hiperbolóide com macarrão.

## 5 Cônicas e coordenadas polares

Nesta Seção apresentaremos a definição geral das cônicas e suas equações em coordenadas polares.

### 5.1 Definição geral de uma cônica

O Teorema 5.1, obtido em [5], apresenta uma definição geral que engloba os três tipos de cônicas em termos de um foco e da diretriz correspondente a esse foco.

**Teorema 5.1.** *Sejam  $F$  um ponto do plano,  $d$  uma reta do plano tal que  $F \notin d$  e  $e$  um número real positivo. Então, o conjunto  $\mathcal{C} = \{P; d(P, F) = e \cdot d(P, d)\}$  é uma elipse se  $e < 1$ , uma parábola se  $e = 1$  ou uma hipérbole se  $e > 1$ , de foco no ponto  $F$  e excentricidade  $e$ .*

*Demonstração.* Se  $e = 1$ , então  $\mathcal{C} = \{P; d(P, F) = d(P, d)\}$  é uma parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$ , de acordo com a definição de parábola.

Agora tome  $0 < e \neq 1$  e no sistema de eixos ortogonais  $OXY$  considere  $F(0, 0)$  e  $d: x = m$ , com  $m > 0$ . Veja Figura 56.

Daí,  $P(x, y) \in \mathcal{C}$ , então:

$$\begin{aligned}d(P, F) &= e \cdot d(P, d) \Leftrightarrow \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= e \cdot |x - m| \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 &= e^2(x - m)^2 \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 &= e^2x^2 - 2me^2x + m^2e^2 \Leftrightarrow \\ (1 - e^2) \left( x^2 + \frac{2me^2}{1 - e^2}x \right) + y^2 &= m^2e^2 \Leftrightarrow \\ (1 - e^2) \left( x + \frac{me^2}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 &= m^2e^2 + \frac{m^2e^4}{1 - e^2} \Leftrightarrow \\ (1 - e^2) \left( x + \frac{me^2}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 &= \frac{m^2e^2}{1 - e^2} \tag{15}\end{aligned}$$

Utilizando uma translação horizontal e fazendo  $a = 1 - e^2$  e  $k = \frac{m^2e^2}{1 - e^2}$  a equação (15) é equivalente a

$$ax'^2 + y'^2 = k. \tag{16}$$

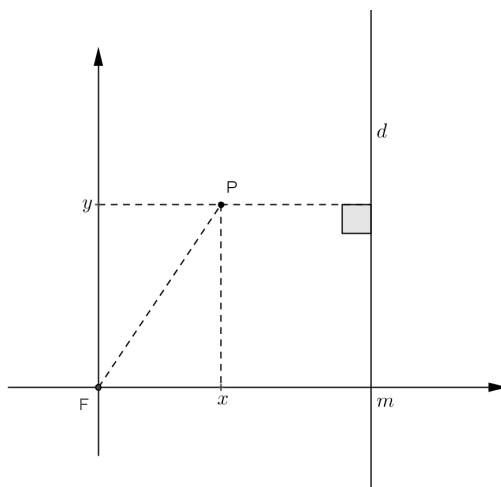


Figura 56: Demonstração do Teorema 5.1.

Logo, se  $e > 1$  temos  $a < 0$  e  $k < 0$ , segue então que a equação (16) é uma hipérbole e se  $e < 1$ , temos  $a > 0$  e  $k > 0$  e a equação (16) é uma elipse.

□

## 5.2 Coordenadas polares

A ideia fundamental da geometria analítica plana consiste como visto até agora, em substituir cada ponto do plano por um par de números reais, que são as suas coordenadas. O sistema cartesiano, adotado até este momento, é o mais importante e o mais simples dos sistemas de coordenadas, mas não é o único. Depois do sistema cartesiano, o mais útil é o sistema de coordenadas polares.

**Definição 5.1.** *Um sistema de coordenadas polares  $O\rho\theta$  no plano consiste de um ponto  $O$ , denominado pólo ou origem, de uma semirreta  $\overrightarrow{OA}$ , com origem em  $O$ , denominada eixo polar, e de uma unidade de comprimento utilizada para medir a distância de  $O$  a um ponto qualquer do plano. Dado um ponto  $P$  do plano, suas coordenadas nesse sistema são  $\rho$  e  $\theta$ , onde  $\rho$  é a distância de  $P$  a  $O$  e  $\theta$  é a medida do ângulo do eixo polar para a semirreta  $\overrightarrow{OP}$ . Escreve-se  $P(\rho, \theta)$ . Veja a Figura 57.*

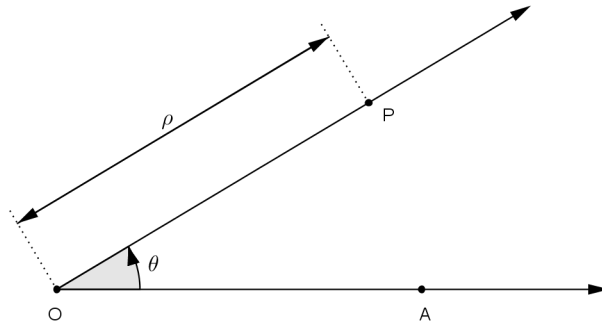


Figura 57: Ponto  $P$  em coordenadas polares.

Convencionam-se que a medida do ângulo tomada de  $\overrightarrow{OA}$  para  $\overrightarrow{OP}$  no sentido anti-horário é positiva, e negativa no sentido horário.

Se a primeira coordenada polar de um ponto é zero, então esse ponto é o pólo. O ângulo do pólo não está definido. Convencionamos que  $(0, \theta)$  são as coordenadas polares do pólo, para todo ângulo  $\theta$ . Percebe-se aqui que não há uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e sua representação em coordenadas polares, pois o par  $(\rho, \theta)$  determina, de maneira única, um ponto no plano. No entanto, um ponto do plano pode ser representado por várias coordenadas polares distintas. Note que as medidas de  $\theta$  e  $\theta + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , estão associadas ao mesmo ângulo e, portanto,  $(\rho, \theta)$  e  $(\rho, \theta + 2k\pi)$  representam o mesmo ponto do plano. Todavia, se o ponto  $P$  não for a origem e se restringirmos  $\theta$  ao intervalo  $[0, 2\pi)$ , existirá apenas um par de coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  para  $P$ .

A limitação dos valores do argumento  $\theta$  ao intervalo  $[0, 2\pi)$  pode ser inconveniente em muitos problemas. Existem também questões que em seu estudo pode ser útil considerar valores negativos para o raio vetor  $\rho$ . Neste caso, a convenção que se faz é identificar o ponto  $(-\rho, \theta)$  com o ponto  $(\rho, \theta + \pi)$ .

**Exemplo 5.1.** O conjunto  $\mathcal{C}$  dos pontos  $P(\rho, \theta)$  que satisfazem a equação  $\rho = 3$  é o conjunto dos pontos cuja distância ao pólo  $O$  é igual a 3, isto é,  $\mathcal{C} = \{(\rho, \theta); \rho = 3 \text{ e } \theta \in \mathbb{R}\}$  é o círculo de centro  $O$  e raio 3, conforme a Figura 58.

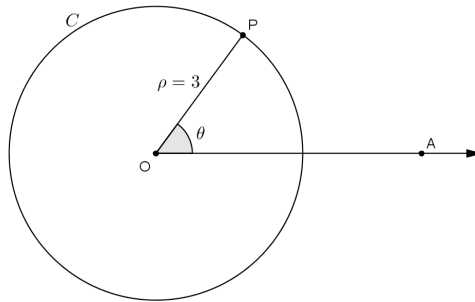


Figura 58: Círculo em coordenadas polares.

**Exemplo 5.2.** Seja  $r$  o conjunto dos pontos  $P(\rho, \theta)$  do plano que satisfazem a equação polar  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , ou seja,  $r = \left\{ (\rho, \theta); \rho \in \mathbb{R} \text{ e } \theta = \frac{\pi}{4} \right\}$ .

Então,  $r$  é a reta que passa pelo pólo  $O$  e tem inclinação  $\theta = \frac{\pi}{4}$  em relação ao eixo polar. Veja a Figura 59.

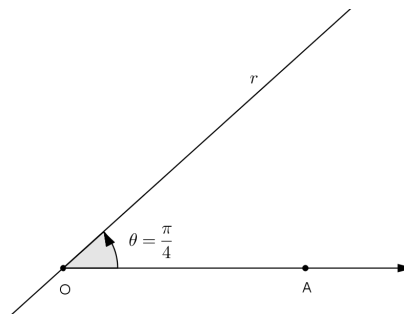


Figura 59: Reta passando pelo pólo.

A Definição 5.2 estabelece as relações entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas.

**Definição 5.2.** O sistema polar associado a um sistema cartesiano  $OXY$  é o sistema cujo pólo é a origem  $O$  do sistema cartesiano, e cujo eixo polar é a semirreta positiva do eixo  $OX$ .

Seja  $P(x, y)$  um ponto qualquer do plano, referido ao sistema cartesiano. Sejam  $(\rho, \theta)$  as coordenadas de  $P$  no sistema polar associado (veja a Figura 60). Estamos supondo  $\rho > 0$ .

$$\text{Daí, } x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta \quad \text{e} \quad \rho^2 = x^2 + y^2.$$



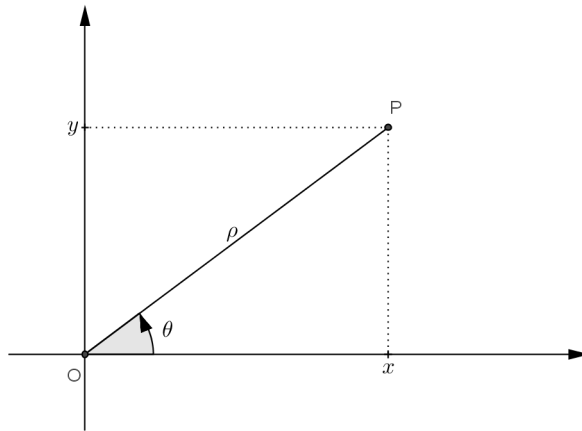


Figura 60: Sistema polar associado ao sistema cartesiano.

### 5.3 Equação polar das cônicas

Vamos deduzir a equação de cada cônica em coordenadas polares.

#### 5.3.1 Elipse

Considere uma elipse de eixo maior horizontal  $A_1A_2 = 2a$ , eixo menor  $B_1B_2 = 2b$ , distância focal  $F_1F_2 = 2c$  e centro  $C(m, n)$  como na Figura 61.

Seja  $P(\rho, \theta)$  um ponto qualquer da elipse, na qual fazemos coincidir o pólo  $O$  com o foco  $F_1$  e o eixo polar com o eixo maior da elipse.

Aplicando a Lei dos cossenos no triângulo  $\triangle F_1F_2P$  temos

$$\delta^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho \cos \theta. \quad (17)$$

Da definição de elipse

$$F_1P + F_2P = 2a \Rightarrow \delta + \rho = 2a \Rightarrow \delta = 2a - \rho.$$

Substituindo  $\delta$  na expressão (17) temos que

$$(2a - \rho)^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho \cos \theta \Rightarrow 4a^2 - 4a\rho + \rho^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho \cos \theta.$$

Da relação notável da elipse segue que

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = b^2.$$

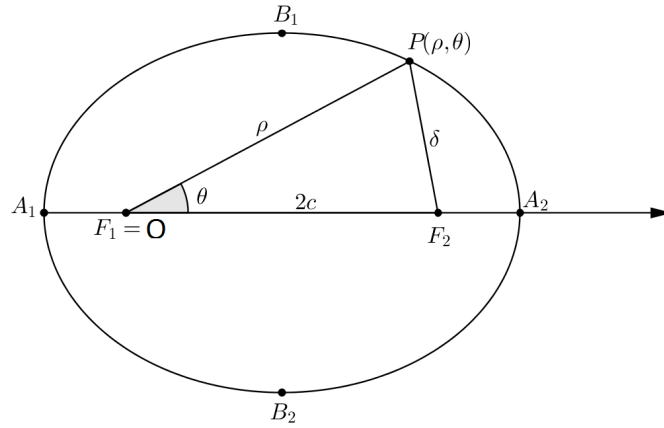


Figura 61: Elipse.

Sendo assim,

$$a^2 - c^2 = \rho(a - c \cos \theta) \Rightarrow b^2 = \rho(a - c \cos \theta) \Rightarrow \rho = \frac{b^2}{a - c \cos \theta}.$$

Logo, a equação polar da elipse é

$$\rho = \frac{b^2}{a - c \cos \theta}. \quad (18)$$

Na equação polar da elipse (18), dividindo o numerador e o denominador do segundo membro da expressão pela constante  $a$ , vem que  $\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{a}{a} - \frac{c}{a} \cos \theta}$ . Fazendo  $p = \frac{b^2}{a}$ , chamado de parâmetro da elipse e  $e = \frac{c}{a}$  é a excentricidade. Assim, a equação polar da elipse é mais comumente dada por

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}.$$

### 5.3.2 Hipérbole

Considere uma hipérbole de eixo focal horizontal  $A_1A_2 = 2a$ , eixo não focal  $B_1B_2 = 2b$ , distância focal  $F_1F_2 = 2c$  e centro  $C(m, n)$ . Façamos coincidir o pólo  $O$  com o foco  $F_2$  e o eixo polar com o prolongamento do eixo real da hipérbole à direita de  $O$ . Seja  $P(\rho, \theta)$  um ponto qualquer da hipérbole conforme a Figura 62.

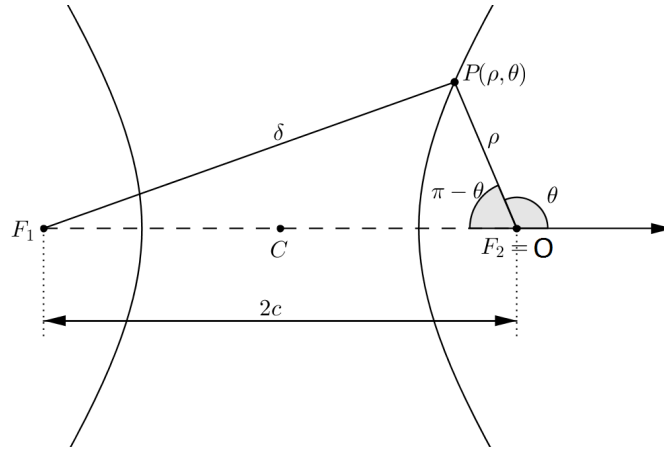


Figura 62: Hipérbole.

Aplicando a Lei dos cossenos no triângulo  $\triangle F_1F_2P$  temos

$$\delta^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho \cos(\pi - \theta). \quad (19)$$

Da definição de hipérbole

$$|F_1P - F_2P| = 2a \Rightarrow \delta - \rho = 2a \Rightarrow \delta = 2a + \rho.$$

Substituindo  $\delta$  na expressão (19), segue que

$$(2a + \rho)^2 = \rho^2 + 4c^2 + 4c\rho \cos \theta \Rightarrow 4a^2 + 4a\rho + \rho^2 = \rho^2 + 4c^2 + 4c\rho \cos \theta \Rightarrow a^2 - c^2 = \rho(-a + c \cos \theta).$$

Da relação notável da hipérbole, temos

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = -b^2 \Rightarrow \rho(-a + c \cos \theta) = -b^2.$$

Sendo assim, a equação polar da hipérbole é

$$\rho = \frac{b^2}{a - c \cos \theta}. \quad (20)$$

Na equação polar da hipérbole (20), dividindo o numerador e o denominador do segundo membro da expressão pela constante  $a$ , temos  $\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{a}{a} - \frac{c}{a} \cos \theta}$ . Fazendo

$p = \frac{b^2}{a}$ , chamado de parâmetro da hipérbole e  $e = \frac{c}{a}$  é a excentricidade. Deste modo, a equação polar da hipérbole é mais comumente dada por

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}.$$

### 5.3.3 Parábola

Considere uma parábola de eixo de simetria horizontal com vértice  $V$ , foco  $F$  e  $RF = p$ . Seja  $P(\rho, \theta)$  um ponto qualquer da parábola. Fazemos coincidir o pólo  $O$  com o foco  $F$  e o eixo polar com o eixo de simetria da parábola de acordo com a Figura 63.

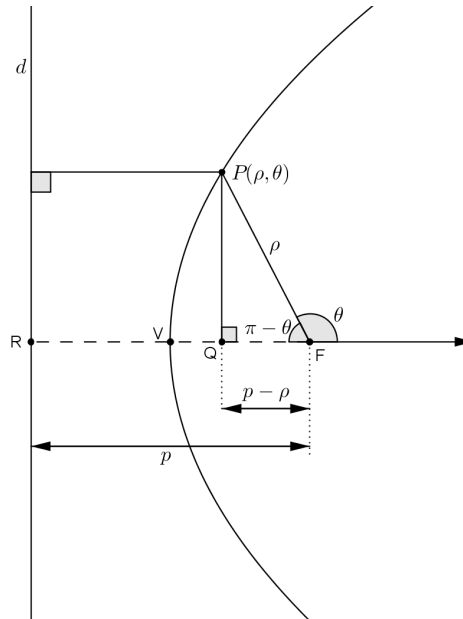


Figura 63: Parábola.

No triângulo  $\triangle PQF$  temos que

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = \frac{p - \rho}{\rho}.$$

Daí,  $\rho = \frac{p}{1 - \cos \theta}$ , onde  $p$  é o parâmetro da parábola. Portanto, a equação polar da parábola é

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \theta}.$$

**Observação 5.1.** Note que a elipse, a hipérbole e a parábola têm as equações polares semelhantes a menos da excentricidade  $e = \frac{c}{a}$  que para a elipse ( $0 < e < 1$ ), para a hipérbole ( $e > 1$ ) e para a parábola ( $e = 1$ ). Outro fato importante é que, apesar de

adotarmos os mesmos símbolos  $A_1A_2 = 2a$ ,  $B_1B_2 = 2b$  e  $F_1F_2 = 2c$  para a elipse e para a hipérbole, eles têm significados geométricos diferentes na definição de cada cônica, mesmo porque a relação notável da elipse é  $a^2 = b^2 + c^2$  e da hipérbole é  $c^2 = a^2 + b^2$ . Assim, o parâmetro  $p = \frac{b^2}{a}$  adotado na equação polar da elipse e da hipérbole é diferente e não tem nada em comum com o parâmetro  $p$  da definição de parábola.

**Exemplo 5.3.** Determine a equação polar da hipérbole de equação  $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ .

*Solução.* Sabemos que a equação polar da hipérbole é do tipo  $\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$ , onde  $e = \frac{c}{a}$  e  $p = \frac{b^2}{a}$ .

Passando a equação da hipérbole para a forma reduzida:

$$9x^2 - 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Daí, temos  $a^2 = 16$  e  $b^2 = 9$ , ou seja,  $a = 4$  e  $b = 3$ . Substituindo os valores de  $a$  e  $b$  na relação notável da hipérbole:  $c^2 = a^2 + b^2$ , segue que  $c = 5$ . Então,  $p = \frac{9}{4}$ ,  $e = \frac{5}{4}$  e  $\rho = \frac{9}{4(1 - \frac{5}{4} \cos \theta)}$ . Logo, a equação polar da hipérbole é

$$\rho = \frac{9}{4 - 5 \cos \theta}.$$

## 5.4 Classificação das Cônicas

Ao longo do trabalho estudamos as cônicas, cujos eixos eram de posição horizontal (paralelo ao eixo coordenado  $Ox$ ) ou vertical (paralelo ao eixo coordenado  $Oy$ ) e, conseqüentemente, suas equações eram características dessas situações. No entanto, a expressão geral de uma cônica, cujos eixos podem estar em qualquer posição em relação aos eixos coordenados é dada por:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Como a equação geral das cônicas apresenta uma expressão semelhante para todas, uma forma de identificar a cônica através da sua equação geral é utilizar a seguinte classificação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } B^2 - 4AC < 0 \Rightarrow \text{elipse} \\ \text{se } B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow \text{parábola} \\ \text{se } B^2 - 4AC > 0 \Rightarrow \text{hipérbole} \end{array} \right.$$

## Conclusão

Assim como o PROFMAT tem como meta a capacitação e qualificação dos professores no ensino da matemática, este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de mostrar ao professor e alunos um pouco mais além dos conceitos iniciais dos três tipos de cônicas, mostrar uma motivação para o estudo das cônicas tendo em vista que este conteúdo é pouco explorado no ensino médio.

Acessível tanto a nível médio quanto a nível superior, mas principalmente com foco no ensino médio 'A Hipérbole e suas Aplicações' mostra ao professor algumas aplicações, curiosidades e sugestões de material concreto para dar suporte às aulas a fim de torná-las no mínimo mais interessante, pois o aluno conhecerá algumas utilidades do objeto que está sendo estudado tendo em vista que esse conteúdo é pouco explorado no ensino médio e em muitos casos nem mesmo o próprio professor tem conhecimento.

Por fim, parte do trabalho aborda paralelamente os conceitos de rotação de eixos, cônicas em coordenadas polares e sua classificação para um estudo com mais detalhes.

## Referências

- [1] A. P. Miguens, *Navegação: A Ciência e a Arte vol. 3*. In: Navegação Eletrônica e em Condições Especiais, Brasília, 2000. Cap.36. p. 1309-1338.
- [2] C. B. Boyer. *História da Matemática*. São Paulo, Editora Edgard Blucher, 2003.
- [3] E. Batista; I. Mozolevski, *Métodos de Física-Matemática* Universidade Federal de Santa Catarina, 2010.
- [4] E. D. Judice, *Elementos de Geometria Analítica 1*, 3ª edição, Universidade de Minas Gerais, 1983.
- [5] E. L. Lima. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, 2ª edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2010.
- [6] G. Ávila, *Revista do Professor de Matemática nº 34*, SBM, 1997.
- [7] G. Iezzi, *Fundamentos de Matemática Elementar 7: Geometria Analítica*, 5ª edição, Atual Editora, 2005.
- [8] J. F. Lopes. *Cônicas e Aplicações* [Dissertação]. Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Universidade Estadual de São Paulo, 2011.
- [9] M. G. Játiva, *Las órbitas de los cometas*, Disponível em < [http : //www.astroguia.org/iniciacion/cursomariogaitanojativa/capitulo34.php](http://www.astroguia.org/iniciacion/cursomariogaitanojativa/capitulo34.php) >. Acesso em: 16/02/2013.
- [10] M. Paiva, *Matemática 3*, 1º edição, Editora Moderna, 2002.
- [11] U. D'Ambrosio. *Educação Matemática: da Teoria à Prática*. Campinas, Editora Papirus, 1996.
- [12] <http://www.google.com.br>. Acessado em 16 de fevereiro de 2013.
- [13] Disponível em: < [http : //en.wikipedia.org/wiki/KobePortTower](http://en.wikipedia.org/wiki/KobePortTower) >. Acesso em: 16/02/2013.



- [14] Disponível em: < *http : //en.wikipedia.org/wiki/SaintLouisScienceCenter* >.  
Acesso em: 16/02/2013.
- [15] Disponível em: < *http : //pt.wikipedia.org/wiki/Estruturahiperboloides* >.  
Acesso em: 16/02/2013.
- [16] *Barreira do som* Disponível em < *http : //www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/barreira - do - som/barreira - do - som.php* >. Acesso em: 16/02/2013.