Sociedade Brasileira de Matemática – SBM

Universidade Federal do Acre – UFAC

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Gilmerez Marinho da Silva

Matrizes, Sistemas Lineares e os modelos econômicos de Leontief

Rio Branco – AC

2017

Sociedade Brasileira de Matemática – SBM

Universidade Federal do Acre – UFAC

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Gilmerez Marinho da Silva

Matrizes, Sistemas Lineares e os modelos econômicos de Leontief

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Acre, como requisito para obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: prof. Dr. Sérgio Brazil Junior

Rio Branco – AC

2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAC

S586m Silva, Gilmerez Marinho da, 1978 -
Matrizes, Sistemas lineares e os modelos econômicos de Leontief / Gilmerez Marinho da Silva. – 2017.
77 f.; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Acre, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Rio Branco, 2017.
Inclui referências bibliográficas.
Orientador: Prof. Dr. Sérgio Brazil Junior.

1. Matrizes. 2. Modelos econômicos 3. Leontief, Wassily, 1909-1999. I. Título.

CDD: 510.7

Bibliotecária: Alanna Santos Figueiredo – CRB-11: 1003.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE – UFAC
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas - CCET
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Matrizes, Sistemas Lineares e os Modelos Econômicos de Leontief

Autor (a) : Gilmerez Marinho da Silva
Orientador (a): Prof. Dr. Sérgio Brazil Júnior

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Acre – PROFMAT/UFAC, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre.

Examinado (a) por:

Prof. Dr. Sérgio Brazil Júnior
(Orientador e Presidente da Banca – PROFMAT/UFAC)

Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos
(Membro Interno - PROFMAT/UFAC)

Prof. Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodríguez
(Membro Externo - UNIR)

Rio Branco, Acre
Agosto de 2017

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, pelo dom da vida e por ter me dado coragem para enfrentar e vencer rodos os desafios e obstáculos, em especial a minha mãe Luzia Barbosa Beles (*IN MEMORIAN*).

AGRADECIMENTOS

Mesmo sabendo que não irei conseguir retratar todo reconhecimento por todos que colaboraram em uma das mais relevantes partes do meu conhecimento, tentarei aqui agradecer todo apreço, amizade e atenção por eles dedicados.

À minha mãe, Luzia Barbosa Beles (IN MEMORIAN) pela dedicação para comigo, ensinando valores de honra e dignidade. Levo muito dela em mim.

À minha amiga Sandra Mariusa Polanco Ribeiro Pires, que me apoiou em um dos momentos mais difíceis por mim vivido com palavras de motivação e incentivo.

Ao amigo Glicério Castro Pires Neto, que de forma paciente e compreensiva me ajudou diretamente na conclusão deste trabalho.

Ao meu orientador, prof. Dr. Sérgio Brazil Júnior, que ao longo da elaboração deste trabalho sempre foi paciente e solícito me direcionando e dando sugestões significativas para a conclusão do mesmo.

Aos companheiros de mestrado, pela ajuda, parceria e troca de conhecimentos.

Aos professores do curso, pelo empenho, dedicação e contribuição na minha formação e à CAPES, pelo suporte financeiro.

Resumo

No presente trabalho procuramos apresentar a relevância da Álgebra Linear, mais especificamente da teoria das Matrizes e dos Sistemas lineares, na resolução de problemas relacionados à área da economia com enfoque nos modelos econômicos de Leontief. Para isso, fizemos uso do software MAXIMA que nos auxiliou nos eventuais resultados.

Palavras Chaves: Matrizes, sistemas lineares, modelos econômicos de Leontief, software máxima.

Abstract

In the present work we look for the relevance of Linear Algebra, more specifically the theory of Matrices and Linear Systems, in solving problems related to the area of the economy with the focus on the economic models of Leontief. For this, we made use of the software MAXIMA that helped us in the eventual results.

Key words: Matrices, linear systems, economic models of Leontief, software maxima.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

É bastante comum pessoas questionarem qual aplicação, no dia a dia, de determinados conceitos matemáticos. Isso sempre intrigou muitos dos que estudam matemática, desde as séries finais do ensino fundamental, passando pelo ensino médio, e até na graduação em matemática. Onde podemos usar certos conceitos matemáticos no cotidiano? Porque estudar “isso” se não tem aplicação? Basta estudar as quatro operações e está bom. Pois é isso que utilizamos no dia a dia. Esses são exemplos de perguntas e afirmações que ouvimos quase que diariamente. É claro que muitos conceitos matemáticos, principalmente aqueles relacionados à geometria, são empregados, e de certa forma, compreendidos no dia a dia: cálculo de área, volume, perímetro, etc., outros são bastante difíceis até para quem é da área, de exemplificar na prática. Muitas vezes pensamos que estudamos matemática só para o engrandecimento dela própria.

Para dar uma mostra da utilização de conceitos matemáticos, especificamente, matrizes e sistemas lineares, pesquisamos suas aplicações e verificamos que eles aparecem nas áreas da geografia, economia, biologia, da matemática (geometria: transformação no plano; teoria dos grafos; criptografia), etc.

Então, foi feita uma revisão bibliográfica aprofundada do conteúdo de Matrizes e Sistemas lineares e uma aplicação desses conceitos na economia. Isso nos levou aos modelos econômicos do russo Leontief, onde são definidas determinadas matrizes quadradas que, na prática, são de ordens relativamente grandes. Esse fato fez com que utilizássemos um software livre chamado MAXIMA que, dentre as várias funções que o mesmo possui, faz cálculos relacionados com matrizes e sistemas lineares mais robustos.

Portanto, o objetivo principal deste trabalho é mostrar as aplicações dos Sistemas Lineares e Matrizes nos modelos econômicos de Leontief.

O trabalho está dividido em três capítulos, além da introdução (capitulo 1) e das considerações finais (capítulo 5). No capítulo 2 apresentamos os conceitos e os resultados do conteúdo da Álgebra Linear: matrizes e sistemas lineares, que serão aplicados no capítulo 3.

No capítulo 3 serão descritos os modelos econômicos de Leontief e a aplicação dos conceitos de matrizes e sistemas lineares e será apresentado a matriz insumo-produto do Estado Acre com dados do ano de 2008.

No capítulo 4 apresentamos o software livre MAXIMA, bem como um breve tutorial de cálculo de operações com matrizes, matriz inversa e resolução de sistemas lineares, com uso deste software.

2. MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

2.1 Matrizes

Nesta seção, apresentaremos os conceitos básicos sobre matrizes. Esses conceitos aparecem naturalmente na resolução de muitos tipos de problemas e são essenciais para resolvê-los porque eles "ordenam, simplificam" e fornecem novos métodos de resolução.

Chamamos de *matriz* uma tabela de elementos dispostos em linha e colunas. Por exemplo, a tabela a seguir representa as notas de três alunos em um bimestre:

	Química	**Inglês**	**Matemática**	**Espanhol**
A	8	7	9	8
B	6	6	7	6
C	4	8	5	9

Ao abstrairmos os significados das linhas e colunas, temos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 8 \\ 6 & 6 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Observe que em um problema em que o número de variáveis é muito grande, essa disposição dos dados, em forma de matriz, torna-se absolutamente indispensável.

Os *elementos* de uma matriz, chamados também de "entradas" da matriz podem ser números (reais ou complexos), funções ou ainda outras matrizes.

Representaremos uma matriz de *m* linhas e *n* colunas por:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Usaremos sempre letras maiúsculas para denotarmos matrizes e quando quisermos especificar a ordem de uma matriz A (isto é, o número de linhas e colunas) escreveremos $\mathrm{A}_{m \times n}$.

Observe que neste trabalho as matrizes aparecerão sempre entre colchetes.

O elemento a_{ij} está localizado na i-ésima linha e na j-ésima coluna.

Por exemplo, na matriz:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

O elemento que está na primeira linha e terceira coluna é – 4, isto é, $a_{13} = -4$, ainda neste exemplo, temos $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = -3$ e $a_{23} = 2$.

Definição 1: Duas matrizes $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $\mathrm{B} = [b_{ij}]_{r\times s}$ são iguais, $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, se elas têm o mesmo número de linhas $(m = r)$ e colunas $(n = s)$, e se todos os seus elementos correspondentes são iguais ($a_{ij} = b_{ij}$).

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 3^2 & 1 & \log 1 \\ 2 & 2^2 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

A seguir apresentaremos alguns tipos de matrizes de acordo com suas especificidades.

2.1.1 Tipos especiais de matrizes

Ao trabalharmos com matrizes, observamos que existem algumas que, seja pela quantidade de linhas ou colunas, ou ainda, pela natureza de seus elementos, têm propriedades que as diferenciam de uma matriz qualquer e, por isso, recebem nomes especiais.

Consideremos uma matriz $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$:

2.1.1.1 **Matriz quadrada** é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas $m = n$.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3} \quad \text{e} \quad [8]_{1\times 1}$$

Nos casos de matrizes quadradas $\mathrm{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, costumamos dizer que A é uma matriz de ordem m.

Neste caso, a diagonal da matriz é constituída pelos elementos a_{ij}, onde, $i = j$.

2.1.1.2 **Matriz nula** é aquela em que a_{ij} = 0, para todo *i* e *j*.

Exemplos:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad \text{e} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 5}$$

2.1.1.3 **Matriz-coluna** é aquela que possui uma única coluna $n = 1$.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}_{3\times 1} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

Analogamente, temos:

2.1.1.4 **Matriz-linha** é aquela que possui uma única linha $m = 1$.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{1\times 3} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times 2}$$

2.1.1.5 **Matriz diagonal** é uma matriz quadrada $(m = n)$ onde $a_{\mathrm{ij}} = 0$, para $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na diagonal são todos nulos.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

Um exemplo importante de matriz diagonal, elemento importante na multiplicação de matrizes, vem a seguir.

2.1.1.6 **Matriz identidade** é uma matriz quadrada em que $a_{ij} = 1$, para $i = j$ e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.

Exemplos:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.1.7 **Matriz triangular superior** é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$, para $i > j$.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

2.1.1.8 **Matriz triangular Inferior** é uma matriz quadrada em que $a_{\text{ij}} = 0$, para $i < j$.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 8 & 5 \end{bmatrix}_{4\times4} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

2.1.1.9 **Matriz simétrica** é uma matriz quadrada, onde $a_{\text{ij}} = a_{\text{ji}}$.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times3} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & k \end{bmatrix}_{4\times4}$$

Observe que, no caso de uma matriz simétrica, a parte superior é uma “reflexão” da parte inferior, em relação a diagonal.

Até aqui, vimos alguns tipos especiais de matrizes, mas para algumas aplicações é desejável desenvolver uma “aritmética de matrizes”.

2.1.2 Operações com matrizes

Nas operações a seguir, vamos considerar as entradas das matrizes como sendo números reais ou complexos.

2.1.2.1 **Adição:** A soma de duas matrizes de mesma ordem, $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $\mathrm{B} = [b_{ij}]_{m \times n}$, é uma matriz $m \times n$, que denotaremos $\mathrm{A} + \mathrm{B}$, cujos elementos são as somas dos elementos correspondentes de A e B, isto é:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Observe que, pela forma com que foi definida, a adição de matrizes tem as mesmas propriedades que a adição de números reais ou complexos.

Propriedades: Dadas as matrizes A, B e C de mesma ordem $m \times n$, temos:

i) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (comutatividade).
ii) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (Associatividade).
iii) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$, onde, $\mathbf{0}$ representa a matriz nula de ordem $m \times n$.
iv) Para toda matriz $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$, existe $-\mathbf{A} = [-a_{ij}]_{m \times n}$, tal que, $\mathbf{A} = (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ **(Oposto).**

Poderá ser usada a notação $0_{m \times n}$ para a matriz nula, quando houver perigo de confusão com o número zero.

A operação que definiremos a seguir é a multiplicação de um número (real ou complexo) por uma matriz, também chamada multiplicação por escalar.

2.1.2.2 **Multiplicação por escalar:** Seja $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e k um número, então definimos uma nova matriz:

$$k.\mathrm{A} = [ka_{ij}]_{m \times n}$$

Exemplo:

$$-2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -20 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

A operação multiplicação por escalar goza das seguintes:

Propriedades: Dadas matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$ e números $k,\ k_1$ e k_2, temos:

i) $k(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$

ii) $(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{B}$

iii) $0\,.\,\mathbf{A} = \mathbf{0}$, isto é, se multiplicarmos o numero zero por qualquer matriz A, teremos a matriz nula.

iv) $k_1(k_2\mathbf{A}) = (k_1k_2)\mathbf{A}$

Às vezes é conveniente considerarmos as linhas de uma dada matriz como colunas de uma nova matriz.

2.1.2.3 Transposição: Dada uma matriz $\mathrm{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ podemos obter a matriz $\mathrm{A}^{\mathrm{t}} = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$, cujas linhas são colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$. A matriz A^{t} é denominada transposta de A.

Exemplos:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad \mathrm{A}^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

A matriz transposta goza das propriedades citadas logo abaixo.

Propriedades:

i) Uma matriz é simétrica se, e somente se, ela é igual a sua transposta, isto é, se, e somente se, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{t}}$.

ii) $[\mathbf{A}^{\mathbf{t}}]^{\mathrm{t}} = \mathbf{A}$, isto é, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma.

iii) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathbf{t}} = \mathbf{A}^{\mathbf{t}} + \mathbf{B}^{\mathbf{t}}$. Em palavras, a transposta de uma soma é igual a soma das transpostas.

iv) $(k\mathbf{A})^{\mathrm{t}} = k\mathbf{A}^{\mathbf{t}}$, onde k é qualquer escalar.

As propriedades citadas acima são de fácil verificação e podem ser vistas no livro de Iezzi (1977, v.4, p. 56).

Na sequência, apresentaremos a definição formal da multiplicação de matrizes bem como suas propriedades.

2.1.2.4 Multiplicação de matrizes

A seguir apresentaremos a multiplicação usual de matrizes. É claro que tal multiplicação não parece ser "natural" como foi a adição, não basta multiplicar os elementos correspondentes.

Sendo assim, sejam $\mathrm{A} = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ e $\mathrm{B} = [b_{rs}]_{n \times p}$. Definimos $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = [c_{uv}]_{m \times p}$

Onde

$$\mathbf{c_{uv}} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_{uk}\, b_{kv}} = \mathbf{a_{u1}\, b_{1v}} + \ldots + \mathbf{a_{un}\, b_{nv}}$$

Observações:

i) Só podemos efetuar a multiplicação de duas matrizes $\mathrm{A}_{\mathrm{m} \times \mathrm{n}}$ e $\mathrm{B}_{\mathrm{i} \times \mathrm{p}}$ se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda, isto é, $n = i$. Além disso, a matriz resultado $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$ será de ordem $m \times p$.

ii) O elemento c_{ij} (i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz-produto) é obtido, multiplicando os elementos da i-ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna da segunda matriz e somando-se os produtos.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times s} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2.1 + 2.0 & 2(-1) + 2.4 \\ 4.1 + 2.0 & 4(-1) + 2.4 \\ 5.1 + 3.0 & 5(-1) + 3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Não é possível efetuar esta multiplicação, porque o número de colunas da primeira é diferente do número de linhas da segunda.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 9 & 12 & -8 \\ 12 & 62 & -3 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

Desde que seja possível efetuar as operações, as propriedades apresentadas a seguir são válidas.

Propriedades:

i) Em geral $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (podendo mesmo um dos membros está definido e o outro não)

Exemplo:

Sejam $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Então $\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathrm{BA} = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

Note que, neste exemplo, $\mathrm{AB} = 0$, sem que $\mathrm{A} = 0$ ou $\mathrm{B} = 0$.

ii) $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$ (isto justifica o nome da matriz identidade)

iii) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ (distributividade à esquerda da multiplicação, em relação a soma)

iv) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC}$ (distributividade à esquerda da multiplicação em relação a soma)

v) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (associatividade)

vi) $(\mathbf{AB})^{\mathbf{t}} = \mathbf{B}^{\mathbf{t}}\mathbf{A}^{\mathbf{t}}$ (observe a ordem)

vii) $\mathbf{0}\,.\,\mathbf{A} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$

A seguir definiremos um conceito de extrema importância quando falamos de matrizes quadradas, o determinante.

2.2 Determinantes

O determinante é um número real que é invariante para cada matriz quadrada. A partir do conhecimento do determinante de uma matriz, podemos decidir muitas coisas sobre elas, como por exemplo, se esta é ou não inversível. Esse conceito também tem uma aplicação interessante (muito prática) na resolução de certos sistemas lineares. Nesta seção estudaremos como calcular os determinantes por meio de regras práticas, além de algumas de suas propriedades mais relevantes.

Para definirmos o determinante de uma matriz quadrada de ordem $n \times n$, $0 < n \in \mathbb{Z}$, precisaremos de alguns resultados preliminares sobre permutações.

Definição 2: Uma permutação dos inteiros do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ é um rearranjo desses inteiros em alguma ordem, sem omissões ou repetições.

Exemplos:

- Para $\{1, 2\}$, temos as seguintes permutações:
  $(1, 2)\ e\ (2, 1)$;
- Para $\{1, 2, 3\}$, temos as seguintes permutações:

  $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\ e\ (3, 2, 1)$;

- Para $\{1, 2, 3, 4\}$, temos as seguintes permutações

$(1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 2, 4), (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2), (2, 1, 3, 4), (2, 1, 4, 3),$

$(2, 3, 1, 4), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (2, 4, 3, 1), (3, 1, 2, 4), (3, 1, 4, 2), (3, 2, 1, 4), (3, 2, 4, 1),$

$(3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1), (4, 1, 2, 3), (4, 1, 3, 2), (4, 2, 1, 3), (4, 2, 3, 1), (4, 3, 1, 2) e\ (4, 3, 2, 1).$

Observamos que, em geral, existem $n!\ (n\ \text{fatorial})$ permutações distintas dos inteiros do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Denotaremos por $(\mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2, \mathrm{j}_3, \ldots, \mathrm{j}_n)$ uma permutação arbitrária dos inteiros do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Nesse caso, j_1 é o primeiro inteiro na permutação, j_2 é o segundo, e assim por diante.

Definição 3: Diremos que ocorre uma inversão numa permutação sempre que um inteiro maior precede um menor.

O número total de inversões que podem ocorrer numa permutação pode ser obtido da seguinte forma: encontre o número de inteiros que são menores que j_1 e que aparecem depois de j_1, na permutação; logo em seguida, encontre o número de inteiros menores que j_2, na permutação. Faça o mesmo para os inteiros $\mathrm{j}_3, \ldots, \mathrm{j}_{\mathrm{n}-1}$. O total de inversões é exatamente a soma desses números.

Exemplo: Considere a permutação $(6, 1, 3, 4, 5, 2)$. O número de inversões é: $5 + 0 + 1 + 1 + 1 = 8$.

Definição 4: Uma permutação é chamada par se o número total de inversões é um inteiro par e é chamada ímpar se o número total de inversões é ímpar.

Com relação às permutações dos inteiros 1, 2, 3 e 4, temos:

- Permutações pares:

$$(1,2,3,4),(1,3,4,2),(1,4,2,3),(2,1,4,3),(2,3,1,4),(2,4,3,1),$$

$$(3,1,2,4),(3,2,4,1),(3,4,1,2),(4,1,3,2),(4,2,1,3),(4,3,2,1).$$

- Permutações impares:

$$(1,2,4,3),(1,3,2,4),(1,4,3,2),(2,1,3,4),(2,3,4,1),(2,4,1,3),$$

$$(3,1,4,2),(3,2,1,4),(3,4,2,1),(4,1,2,3),(4,2,3,1),(4,3,1,2).$$

Definição 5: Se A é uma matriz de tamanho $n \times n$, dizemos que um produto de n entradas de A, tais que não há duas entradas de mesma linha ou de mesma coluna, é um produto elementar da matriz A.

Observamos que uma matriz A de ordem $n \times n$ tem $n!$ $(n \text{ fatorial})$ produtos elementares. Estes são os produtos da forma $a_{1_{j1}}, a_{2_{j2}}, \dots, a_{n_{jn}}$, onde $(\mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2, \dots, \mathrm{j}_\mathrm{n})$ é uma permutação dos inteiros do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.

Exemplo: Seja $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}_{4\times4}$. Os produtos elementares são:

$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$; $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$; $a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$; $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$; $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$; $a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$;

$a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$; $a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$; $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$; $a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$; $a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$; $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$;

$a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$; $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$; $a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$; $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$; $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$; $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$;

$a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$; $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$; $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$; $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$; $a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$ e $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

Definição 6: Dada uma matriz A, de ordem $n \times n$, um produto elementar $a_{1_{j1}}, a_{2_{j2}}, \dots, a_{n_{jn}}$, multiplicado por $+1$ ou -1, é chamado um produto elementar de A com sinal. Usamos o sinal " $+$ " se $(\mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2, \dots, \mathrm{j}_n)$ for uma permutação par e o sinal " $-$ " se $(\mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2, \dots, \mathrm{j}_n)$ for uma permutação ímpar.

Agora, estamos em condições de definir o determinante de uma matriz quadrada.

Definição 7: Seja A uma matriz, de ordem $n \times n$, definimos seu determinante, denotado por $\det(\mathrm{A})$ ou por $|\mathrm{A}|$, como sendo a soma de todos os seus produtos elementares com sinal de A, ou seja:

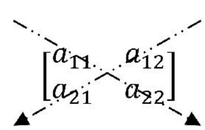
$$\det[a_{ij}] = \sum_{\mathrm{p}} (-1)^{\mathrm{j}} a_{1_{\mathrm{j}1}} a_{2_{\mathrm{j}2}} \dots a_{n_{jn}}$$

Onde $\mathrm{J} = \mathrm{J}(\mathrm{j}_1 \cdots, \mathrm{j}_\mathrm{n})$ é o número de inversões da permutação $(\mathrm{j}_1 \mathrm{j}_2 \cdots \mathrm{j}_n)$ e p indica que a soma é estendida a todas as $n!$ permutações de $(1\ 2\ \cdots n)$.

Exemplos:

1. Determinante de uma matriz de ordem 2×2. Seja $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Então temos que $\det(\mathrm{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
2. Determinante de uma matriz de ordem 3×3. Seja $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Então, vale que
$\det(\mathrm{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

Na prática, para memorizarmos a fórmula do exemplo 1, façamos o seguinte: "Realizamos o produto das entradas da flecha direcionada para a direita e subtraímos do produto das entradas da flecha direcionada para esquerda", conforme a figura abaixo:



E, para memorizarmos a fórmula do exemplo 2, realizamos o seguinte: "Acrescentamos à direita da matriz a primeira e a segunda coluna e, em seguida, realizamos a soma dos produtos das entradas das flechas direcionadas para a direita e subtraímos da soma dos produtos das entradas das flechas direcionadas para a esquerda"

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

3. Determinante de uma matriz de ordem 4×4. Seja $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{A}) = {} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \\ & + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ & + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ & - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} \\ & - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}. \end{aligned}$$

Note a dificuldade de se calcular o determinante de uma matriz de ordem 4×4, a partir da definição.

Mesmo utilizando um “esquema de flechas” como fizeram BRAZIL JUNIOR e SILVA (ELEMENTOS: Revista de ensino e pesquisa em classes operacionais e propriedades de estruturas algébricas, Rio Branco. 2014. p. 29-30), aceito para publicação na revista elementos, ainda assim os cálculos são enormes.

.

2.2.1 Expansão em cofatores

Note que, no exemplo anterior (determinante de uma matriz 4×4), o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem n, para um n “grande”, pela definição, se torna muito trabalhoso. Assim, apresentamos o método desenvolvido pelo matemático e astrônomo francês Pierre-Simon Laplace (1749-1827), que é utilizado para simplificar o cálculo de determinantes de matrizes “robustas”, decompondo-os em números menores. Esse método também é conhecido como teorema de Laplace.

Para aplicarmos o método desenvolvido por Laplace é necessário escolher uma fila (linha ou coluna da matriz), adicionando, desse modo, os produtos dos elementos desta fila aos cofatores correspondentes.

Vimos que:

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{23}a_{31}$$

Mas podemos escrever esta soma como:

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Ou ainda:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Observe que o determinante da matriz inicial de ordem 3×3 pode ser expresso em função dos determinantes das submatrizes de ordem 2×2, isto é,

$$\det(\mathrm{A}) = a_{11}|\mathrm{A}_{11}| - a_{12}|\mathrm{A}_{12}| + a_{13}|\mathrm{A}_{13}|$$

Onde A_{ij} é a submatriz obtida da matriz inicial, de onde a i-ésima linha e a j-ésima coluna foram retiradas. Além disso, se chamarmos:

$$\Delta_{ij} = (-1)^{\mathrm{i+j}}|\mathrm{A}_{ij}|$$

Obtemos a expressão

$$\det(\mathrm{A}) = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{12}\Delta_{13}$$

Assim, podemos expressar:

$$\det \mathrm{A}_{n \times n} = a_{i1}\Delta_{\mathrm{j}1} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{\mathrm{i+j}}\det\mathrm{A}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$$

O número Δ_{ij}, que é o determinante da submatriz A_{ij}, obtida de A retirando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna afetado pelo sinal $(-1)^{\mathrm{i+j}}$, é chamado de cofator ou complemento algébrico do elemento a_{ij}.

Exemplo:

$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\Delta_{11} + 2\Delta_{21} + (-2)\Delta_{31}$, onde

$\Delta_{11}= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, $\Delta_{21}= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1) = 1$,

$\Delta_{31}= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$

Portanto, $|A| = 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + (-2)(-1) = 5$.

A expansão em cofatores nos permite o cálculo de qualquer determinante, contudo, é possível simplificar esse cálculo com o emprego de certas propriedades.

Propriedades:

i) O determinante da matriz identidade é um $[\det(\mathrm{I_n}) = 1]$.

ii) Para qualquer matriz quadrada A, temos que $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}^t)$.

iii) Se uma fila (linha ou coluna) da matriz A é composta de zeros, então $\det(\mathrm{A}) = 0$.

iv) Dadas duas matrizes quadradas A e B de mesma ordem, o determinante do produto dessas matrizes é o produto dos determinantes dessas matrizes, isto é, $\det(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) = \det(\mathrm{A})\cdot\det(\mathrm{B})$.

Exemplo:

Considere as matrizes $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

Daí, $\det(\mathrm{A}) = -2, \det(\mathrm{B}) = 3$ e $\det(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) = -6$. Assim, $\det(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) = \det(\mathrm{A})\cdot\det(\mathrm{B})$ como garante a propriedade.

v) Se A é ortogonal, ou seja, $\mathrm{AA^t} = \mathrm{I_n}$, então, $\det(A) = \pm 1$.

vi) O determinante de uma matriz triangular (inferior ou superior) é igual ao produto dos elementos da diagonal principal, formada pelos elementos a_{ij} com $i = j$.

Demonstração:

Consideremos a matriz triangular onde $a_{ij} = 0$ para $i > j$ (o caso $a_{ij} = 0$ para $i < j$ é análogo).

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Aplicando sucessivamente a expansão em cofatores, através da 1ª linha, é imediato que:

$$\det(\mathrm{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

vii) Se B é uma matriz quadrada obtida de A por meio de troca de duas linhas (ou duas colunas) entre si, então $\det(\mathrm{B}) = -\det(\mathrm{A})$.

viii) O determinante de uma matriz que tem duas linhas (colunas) iguais é zero.

ix) Se B é a matriz quadrada que se obtém de A, multiplicando-se uma linha (ou coluna) por $k \in \mathbb{R}$, então $\det(\mathrm{B}) = k \cdot \det(\mathrm{A})$.

x) Se B é a matriz quadrada cuja i-ésima linha se obtém da soma da linha i (coluna j) da matriz A' com a linha i(coluna j) da matriz A'', sendo as restantes linhas (colunas) das matrizes A' , A'' e B iguais, então $\det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{A})' + \det(\mathrm{B})'$.

xi) Se B é a matriz quadrada que se obtém de A substituindo-se uma linha (ou coluna) pela que dela se obtém adicionando-lhe um múltiplo escalar de outra linha, então $\det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{A})$.

Observação: Em geral, para matrizes $\mathrm{A}\,\mathrm{e}\,\mathrm{B}$ de ordem $n \times n$, com entradas reais, temos:

• $\det(\mathrm{A} + \mathrm{B}) \neq \det(\mathrm{A}) + \det(\mathrm{B})$.

Exemplo:

Sejam $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ e $A + B = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, daí:

$\det(\mathrm{A}) = 5 + 6 = 11$, $\det(\mathrm{B}) = -24 + 48 = 24$, $\det(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = 18 - (-10) = 28$

Logo, $\det(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = 28 \neq 35 = \det(\mathrm{A}) + \det(\mathrm{B})$.

• $\det(k\mathrm{A}) \neq k \cdot \det(\mathrm{A})$; de fato, pela propriedade *ix)*, temos, $\det(k\mathrm{A}) = k^{\mathrm{n}} \det(\mathrm{A})$.

Um resultado importante que utilizaremos no capítulo 3 é o seguinte:

• Se A é uma matriz $n \times n$ cujas somas das entradas de cada coluna é zero, então, o determinante da matriz é zero.

Na próxima seção apresentaremos a definição de matriz adjunta, que é de fundamental importância na determinação da matriz inversa de uma matriz quadrada de ordem n (quando existir).

2.2.2 Matriz adjunta

Dada uma matriz A, lembramos que o cofator Δ_{ij} do elemento $\mathrm{a_{ij}}$ da matriz é $(-1)^{\mathrm{i+j}} \det \mathrm{A_{ij}}$, onde $\mathrm{A_{ij}}$ é a submatriz, obtida extraindo-se a i-ésima linha e j-ésima coluna de A. Com estes cofatores podemos formar uma nova matriz $\overline{\mathrm{A}}$, denominada $\mathrm{matriz\ dos\ cofatores}$ de A.

$$\overline{\mathrm{A}} = [\Delta_{\mathrm{ij}}]$$

Exemplo:

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, temos:

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19$, $\Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19$, $\Delta_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -19$,

$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -5$, $\Delta_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10$, $\Delta_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -11$,

$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4$, $\Delta_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -8$, $\Delta_{33} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 5$,

Então, $\overline{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

Seja $\mathrm{A} = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n. Define-se matriz adjunta de A, denotada por $\mathrm{adj\ A}$, como sendo a transposta da matriz dos cofatores de A, isto é,

$$\mathrm{adj\ A} = [\mathrm{cof(A)}]^{\mathrm{t}}$$

Daí, do exemplo anterior, temos:

$$\mathrm{adj\ A} = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Agora, apresentaremos um teorema que é válido para toda matriz quadrada A de ordem n.

Teorema 1: $\mathrm{A} \cdot \overline{\mathrm{A}}^t = \mathrm{A} \cdot (\mathrm{adj\ A}) = (\det \mathrm{A}) \cdot \mathrm{I_n}$

Vamos efetuar, do exemplo anterior, $\mathrm{A} \cdot (\mathrm{adj\ A})$:

$$\mathrm{A} \cdot (\mathrm{adj\ A}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & -19 \end{bmatrix} = -19 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= -19\mathrm{I}_3$$

Agora, falaremos sobre matriz inversa, com respeito à multiplicação de matrizes, definida em 2.1.2.4, e em quais condições uma matriz quadrada pode ser invertida, apresentando alguns métodos para obter sua inversa.

2.2.3 **Matriz inversa**

Definição 8: dada uma matriz quadrada A de ordem n, chamamos de inversa de A a uma matriz B tal que $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{B} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{I}_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Escrevemos A^{-1} para denotarmos a inversa de A.

Nesse caso, dizemos que a matriz A é inversível ou invertível com inversa A^{-1}.

A proposição a seguir mostra a unicidade da matriz inversa.

Proposição. Se uma matriz possui uma inversa, então essa inversa é única.

Demonstração: suponha que

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n.$$

$$\mathrm{AC} = \mathrm{CA} = \mathrm{I}_n.$$

Usando a equação $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$, e multiplicando ambos os lados desta equação à direita por C, temos:

$$(\mathrm{BA})\mathrm{C} = \mathrm{I}_n\mathrm{C} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{B}(\mathrm{AC}) = \mathrm{C} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{BI}_n = \mathrm{C} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{C}.$$

Se uma matriz quadrada é inversível então, o determinante da sua inversa é o inverso do seu determinante, ou seja, $\det(\mathrm{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathrm{A})}$.

Demonstração:

De fato, se existe a matriz A^{-1}, então;

$\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}^{-1}=\mathrm{I}_n \Longrightarrow \det(\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}^{-1})=\det(\mathrm{I}_n) \Longrightarrow \det(\mathrm{A})\cdot\det(\mathrm{A}^{-1})=1 \Longrightarrow \det(\mathrm{A})\neq 0$ e

$\det(\mathrm{A}^{-1})=\dfrac{1}{\det(\mathrm{A})}$.

Observações:

$i)$ Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, ambas inversíveis (isto é, existem A^{-1} e B^{-1}), então $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$ é inversível e $(\mathrm{AB})^{-1}=\mathrm{B}^{-1}\cdot\mathrm{A}^{-1}$.

De fato, basta observar que $(\mathrm{AB})(\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1})=\mathrm{A}(\mathrm{BB}^{-1})\mathrm{A}^{-1}=\mathrm{AIA}^{-1}=\mathrm{AA}^{-1}=\mathrm{I}_n$. Analogamente, temos $(\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1})(\mathrm{AB})=\mathrm{I}_n$.

$ii)$ Se A é uma matriz quadrada e existe uma matriz B, tal que $\mathrm{BA}=\mathrm{I}_n$, então A é inversível, ou seja, A^{-1} existe e, além disso, $\mathrm{B}=\mathrm{A}^{-1}$.

$iii)$ Nem toda matriz tem inversa. Se A não possui inversa, dizemos que A é não-inversível ou singular.

Observação: Uma condição necessária e suficiente para que A tenha uma inversa é que seja $\det(\mathrm{A})\neq 0$. Vejamos:

Do Teorema 1, temos, $\mathrm{A}\cdot \operatorname{adj}\mathrm{A}=\det(\mathrm{A})\cdot\mathrm{I}_n$.

Se $\det\mathrm{A}\neq 0$, $\mathrm{A}\cdot\frac{1}{\det(\mathrm{A})}\cdot\operatorname{adj}\mathrm{A}=\mathrm{I}_n$ e como a inversa é única, então $\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{\det(\mathrm{A})}\cdot\operatorname{adj}\mathrm{A}$.

De outro lado, se a matriz A é inversível, temos $\mathrm{AA}^{-1}=\mathrm{I}_n$ e daí $\det(\mathrm{AA}^{-1})=\det(\mathrm{I}_n)$, isto é, $\det(\mathrm{A})\cdot\det(\mathrm{A}^{-1})=1$ e daí, $\det(\mathrm{A})\neq 0$.

O teorema a seguir nos fornece um novo método de calcular a inversa de uma matriz quadrada de ordem n.

Teorema 2: uma matriz quadra A admite uma inversa se, e somente se $\det\mathrm{A}\neq 0$. Neste caso:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\operatorname{adj} A)$$

A próxima seção será iniciada com a definição de um tipo especial de matriz que pode ser usada para executar uma operação elementar sobre linhas por multiplicação matricial.

2.2.4 Matrizes elementares

O cálculo da inversa de uma matriz, usando determinante, envolve um número muito grande de operações. O processo prático de inversão que vamos apresentar, nesta seção, é baseado nas operações com linhas de uma matriz e, em termos de cálculo, é muito vantajoso.

2.2.5 Operações elementares

Definição 9: Uma matriz elementar é uma matriz obtida a partir da identidade, através de uma operação elementar com suas linhas (ou colunas).

Exemplo:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1 \qquad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E_1 é matriz elementar.

A seguir serão definidas as operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

Designam-se por operações elementares as seguintes operações que podem ser aplicadas às linhas ou às colunas de uma matriz:

- Multiplicar uma linha inteira por uma constante não nula.
- Trocar duas linhas entre si.
- Somar um múltiplo de uma linha a uma outra linha.

O relacionamento entre matrizes elementares e operações com linhas é dado pelo teorema abaixo.

Teorema 3: se A é uma matriz, a matriz B obtida de uma operação com linhas de A é a mesma que o produto da matriz elementar E, correspondente à operação com linhas, pela matriz A.

Uma consequência importante do teorema anterior é:

Corolário 1: Uma matriz elementar E_1 é inversível e sua inversa é a matriz elementar E_2, que corresponde à operação com linhas inversa da operação efetuada por E_1.

Definição 10: se uma matriz B pode ser obtida de uma matriz A por uma sequência finita de operações elementares sobre linhas, dizemos que A e B são matrizes equivalentes por linhas.

2.2.6 Método para inversão de matrizes

Nesta seção mostraremos um algoritmo para encontrarmos a inversa de uma matriz inversível, além de discutirmos algumas propriedades básicas de matrizes inversíveis.

Teorema 4: se A é uma matriz inversível, sua matriz linha reduzida à forma escada, R, é a identidade. Além disso, A é dada por um produto de matrizes elementares.

Suponhamos que, ao reduzir A à forma escada linha reduzida, a matriz identidade seja obtida como resultado. Neste caso, como a cada operação com linhas corresponde a uma multiplicação por uma matriz elementar, E_i, teremos então:

$$I_n = E_k \cdot E_{k-1} \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$$

$$= (E_k \cdot E_{k-1} \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot I_n) \cdot A$$

Ou seja

$$A^{-1} = I_n \cdot E_k \cdot E_{k-1} \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1.$$

Para encontrar a inversa de uma matriz inversível A, devemos encontrar uma sequência de operações elementares sobre linhas que reduz A à identidade e, depois, efetuar a mesma sequência de operações em I_n para obter A^{-1}.

$$(\mathrm{A} \vdots \mathrm{I}_n) \longrightarrow (\mathrm{I}_n \vdots \mathrm{A}^{-1})$$

Um método simples para executar esse procedimento é dado no próximo exemplo.

Seja,

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Coloquemos a matriz junto com a matriz identidade e apliquemos as operações sobre linhas para reduzir a matriz A (parte esquerda) à matriz I_n.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trocando a primeira e segunda linhas, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Somando a primeira linha, multiplicada por - 2, à segunda, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & \vdots & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Somando a primeira linha à quarta, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & \vdots & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Somando a segunda linha, multiplicada por -1, à terceira, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & \vdots & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \vdots & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a terceira linha por -1, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & \vdots & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Somando a terceira linha à primeira, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & \vdots & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & \vdots & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Somando a terceira linha, multiplicada por - 2, à segunda, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & \vdots & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & \vdots & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Somando a terceira linha à quarta, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & \vdots & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & \vdots & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a quarta linha por 2 e somando à primeira, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & \vdots & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a quarta linha por - 4 e somando à segunda, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -5 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, multiplicando a quarta linha por 3 e somando à terceira, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -5 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, obtemos a identidade à esquerda e a inversa de A à direita.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -5 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Na seção seguinte, veremos que, para resolver um sistema de equações lineares, podemos chegar à solução utilizando uma matriz, efetuando operações apropriadas na mesma.

2.3 Introdução aos sistemas de equações lineares

Os sistemas de equações algébricas lineares e suas soluções constituem um dos principais tópicos estudados em cursos conhecidos como “Introdução à Álgebra Linear”. Primeiramente iremos introduzir uma terminologia básica e discutir um método para resolver esses sistemas.

2.3.1 Equações Lineares

Qualquer linha reta no plano xy pode ser representada algebricamente por uma equação da forma

$$a_1x + a_2y = b$$

Onde $a_1, a_2 \text{ e } b$ são constantes reais e $a_1 \text{ e } a_2$ não são ambas nulas. Uma equação dessa forma é chamada de equação linear nas variáveis $x \text{ e } y$. Mas, geralmente, nós definimos uma equação linear nas n variáveis $x_1, x_2, . . ., x_n$ Como uma equação que pode ser expressa na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Onde $a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ e } b$ são constantes reais. As variáveis de uma equação linear são, muitas vezes, chamadas incógnitas.

Exemplo:

São lineares as equações:

$$x + 3y = 7, \quad y = \frac{1}{2}x + 3z + 1, \quad e \ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$$

Observe que uma equação linear não envolve quaisquer produtos ou raízes de variáveis. Todas as variáveis ocorrem somente na primeira potência e não aparecem como argumentos de funções trigonométricas, logarítmicas ou exponenciais.

Não são lineares as equações

$$x + 3\sqrt{y} = 5, \quad 3x + 2y - z + xz = 4 \quad e \quad y = \sin x$$

Uma solução de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ é uma sequência de n números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ tais que a equação é satisfeita quando substituímos $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$. O conjunto de todas as soluções de uma equação é chamado conjunto-solução ou, às vezes, solução geral da equação.

Exemplo:

Dadas as equações lineares (a) $4x - 2y = 1$ e (b) $x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 5$, vemos que uma solução para equação (a) é $x = 3$ e $y = \frac{11}{2}$.

Já para encontrar o conjunto-solução de (b) podemos atribuir valores arbitrários a quaisquer duas variáveis e resolver na terceira variável. Em particular, dando os valores arbitrários s e t para x_2 e x_3, respectivamente, e resolvendo em x_1, nós obtemos:

$$x_1 = 5 + 4s - 7t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = t$$

2.4 **Sistemas lineares**

Um conjunto finito de equações lineares nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é chamado um sistema de equações lineares ou um sistema linear. Uma sequência de números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ é chamada uma solução do sistema se $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$ é uma solução de cada equação do sistema. Por exemplo, o sistema:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4 \end{cases}$$

Tem solução $x_1 = 1,\ x_2 = 2 \text{ e } x_3 = -1$, pois esses valores satisfazem ambas equações. No entanto, $x_1 = 1, x_2 = 8,\ x_3 = 1$ não é uma solução do sistema, pois esses valores só satisfazem a primeira das duas equações do sistema.

Se um sistema linear S, tiver pelo menos uma solução diremos que ele é **possível** ou **compatível**; caso ele não tenha nenhuma solução, diremos que é **impossível** ou **incompatível**.

Considere um sistema arbitrário de duas equações lineares nas incógnitas $x \text{ e } y$:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 (a_1, b_1 \text{ não ambas nulas}) \\ a_2x + b_2y = c_2 (a_2, b_2 \text{ não ambas nulas}) \end{cases}$$

Essas equações descrevem duas retas, digamos, $\mathrm{l}_1 \text{ e } \mathrm{l}_2$. Como um ponto (x, y) está na reta se, e somente se, os números $x \text{ e } y$ satisfazem a equação da reta, as soluções do sistema de equações correspondem a pontos de interseção de $\mathrm{l}_1 \text{ e } \mathrm{l}_2$. Existem três possibilidades:

- As retas $\mathrm{l}_1 \text{ e } \mathrm{l}_2$ podem ser paralelas, caso em que não há interseção, consequentemente, não existe nenhuma solução do sistema.
- As retas $\mathrm{l}_1 \text{ e } \mathrm{l}_2$ podem cortar-se em um único ponto, caso em que o sistema tem exatamente uma solução.
- As retas $\mathrm{l}_1 \text{ e } \mathrm{l}_2$ podem coincidir, caso em que existe uma infinidade de soluções do sistema.

Embora, nós aqui, tenhamos considerado apenas duas equações em duas incógnitas, será mostrado que as mesmas três possibilidades valem para sistemas de equações lineares arbitrários.

Um sistema arbitrário de m equações lineares em n incógnitas pode ser escrito como:

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Onde $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as incógnitas e as letras a e b com subscritos denotam os a_{ij} são os coeficientes e os b_i são os termos independentes do sistema. Por exemplo, um sistema geral de três equações lineares em quatro incógnitas pode ser escrito como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \end{cases}$$

A necessidade de resolver equações matriciais do tipo $\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{B}$, em que A, X e B são matrizes, é comparável a de resolver equação do tipo $ax = b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Nesse caso, a variável x é obtida de forma elementar.

A seguir iremos usar matrizes para apresentar uma maneira organizada de resolver sistemas de equações, antes, porém vamos formalizar alguns conceitos.

2.4.1 Sistemas e matrizes

Podemos escrever o sistema (I) na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ou $\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{B}$, onde:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

É a matriz dos coeficientes,

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

A matriz das incógnitas e

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A matriz dos termos independentes.

2.4.2 **Matrizes aumentadas**

Se nós mantivermos guardados na memória a localização dos sinais de soma, das variáveis e das constantes, podemos abreviar a escrita de um sistema de m equações lineares em n incógnitas para:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Esta é a matriz aumentada do sistema. Por exemplo, a matriz aumentada do sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases},$$

que tem a forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \text{ é a matriz}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Partindo dessa matriz podemos obter, por meio de operações elementares (ver 2.2.6), a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Que é a matriz ampliada do sistema

$$\begin{cases} x_1 & & & = 3 \\ & x_2 & & = -2 \\ & & x_3 & = 2 \end{cases}$$

2.4.3 Resolução de sistemas lineares

Um método para resolver um sistema linear é obter a partir do sistema inicial, outro que tenha o mesmo conjunto solução, mas que seja muito mais fácil de resolver. O novo sistema é obtido após a aplicação de uma série de operações que simplificam as equações do sistema e que têm a propriedade especial de não alterar o conjunto solução. Estas operações são chamadas operações elementares e já foi abordado no item 2.2.6.

Os sistemas lineares obtidos por meio dessas operações elementares são denominados "sistemas lineares equivalentes".

1. Trocar duas linhas da matriz de posição $(\mathrm{L_i} \leftrightarrow \mathrm{L_j})$.

   Exemplo: $\mathrm{L_2} \rightarrow \mathrm{L_3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Substituir uma linha da matriz pela mesma linha multiplicada por um escalar $(\mathbf{k})$ diferente de 0 (zero). $(\mathrm{L_i} \rightarrow \mathrm{kL_j})$.

   Exemplo: $\mathrm{L_2} \rightarrow -3\mathrm{L_2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Substituir uma linha da matriz pela mesma linha somada a um múltiplo escalar de outra linha. $(\mathrm{L_i} \rightarrow \mathrm{L_i} + \mathrm{kL_j})$.

   Exemplo: $\mathrm{L_3} \rightarrow \mathrm{L_3} + 2\mathrm{L_1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Já comentamos que as operações com linhas de um sistema produzem outro sistema equivalente ao inicial. Em termos de matrizes podemos enunciar este resultado como:

Teorema 5: Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.

Na sequência, apresentaremos a Regra de Cramer, que é um dos métodos de resolver sistemas lineares quadrados, isto é, cujo número de variáveis é igual ao número de equações e que também possui grande importância.

2.4.3.1 Regra de Cramer

Nesta seção, mostraremos como expressar a solução única de um sistema de n equações com n incógnitas $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$, onde A é uma matriz inversível.

Suponhamos que desejássemos resolver o sistema linear de n equações e n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Podemos escrever este sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{B}$$

Suponhamos que $\det(\mathrm{A}) \neq 0$, então existe a inversa A^{-1} de A, logo

$$\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{AX}) = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$$

$$(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A})\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$$

$$\mathrm{I}_n\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$$

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$$

Ou seja

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Daí, usando o teorema 2, temos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})}(\mathrm{adj}\ \mathrm{A}) \cdot \mathrm{B}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})} \begin{bmatrix} b_1\Delta_{11} + b_2\Delta_{21} + \cdots + b_n\Delta_{n1} \\ b_1\Delta_{12} + b_2\Delta_{22} + \cdots + b_n\Delta_{n2} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ b_1\Delta_{1n} + b_2\Delta_{2n} + \cdots + b_n\Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

Então,

$$x_1 = \frac{b_1\Delta_{11} + \cdots + b_n\Delta_{n1}}{\det(\mathrm{A})}$$

Ou seja,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Fazendo deduções análogas, obtemos

$$\mathrm{x_i} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Na próxima seção será apresentado um algoritmo muito útil na resolução de sistemas lineares, o qual consiste em transformar um sistema “grande” em um sistema, equivalente, de mais fácil resolução.

2.4.3.2 Eliminação Gaussiana

O método de Gauss-Jordan é um método de escalonamento, que consiste em aplicar operações elementares à matriz aumentada de um sistema linear, até que ela esteja na forma escalonada reduzida. A vantagem desse processo é que, um sistema cuja matriz aumentada é uma matriz na forma escalonada reduzida têm solução imediata, enquanto que, para resolver um sistema que está apenas na forma escalonada ainda é necessário fazer uma série de substituições para obter a sua solução.

Uma matriz está na forma escalonada reduzida quando ela satisfaz as seguintes condições:

1. Se uma linha não consistir só de zeros, então o primeiro número não-nulo da linha é 1. Chamamos este número 1 de líder ou pivô.
2. Se existirem linhas constituídas somente de zeros, elas estão agrupadas juntas nas linhas inferiores da matriz.
3. Em quaisquer duas linhas sucessivas que não consistem só de zeros, o líder da linha inferior ocorre mais à direita que o líder da linha superior.
4. Cada coluna que contém um líder tem zeros nas demais entradas.

Dizemos que uma matriz que satisfaz as três primeiras propriedades está na forma escalonada por linhas, ou simplesmente, em forma escalonada.

Exemplo: Forma escalonada e escalonada reduzida por linhas.

As seguintes matrizes estão na forma escalonada reduzida por linhas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As seguintes matrizes estão na forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A solução de um sistema linear pode ser obtida pelo processo conhecido como eliminação, pelo qual aplicamos uma sequência de operações elementares na matriz aumentada, afim de obter uma correspondente a um sistema triangular superior.

2.4.3.3 Métodos de eliminação

Agora será apresentado um procedimento de eliminação, passo a passo, que pode ser usado para reduzir qualquer matriz à forma escalonada. O passo a passo será ilustrado na redução da matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Passo 1: Localize a coluna mais à esquerda que não seja constituída inteiramente de zeros.

Coluna não nula mais à esquerda

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Passo 2: Permute a primeira linha com uma outra linha, se necessário, para obter uma entrada não nula ao topo da coluna escontrada no passo 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} (L_1 \leftrightarrow L_2)$$

Passo 3: Se a entrada que, agora, está no topo da coluna encontrada no passo 1 é $\boldsymbol{a}$, multiplique a primeira linha inteira por $1/a$ para introduzir um líder.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} (L_1 \rightarrow \mathbf{\frac{1}{2}} L_1)$$

Passo 4: Some múltiplos convenientes da primeira linha às linhas inferiores para obter zeros em todas as entradas abaixo do líder.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -27 \end{bmatrix} (L_3 \rightarrow -2L_1 + L_3)$$

Passo 5: Agora "esqueça" a primeira linha da matriz e recomece aplicando o Passo 1 à submatriz resultante. Continue desta maneira até que toda matriz esteja em forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -27 \end{bmatrix}$$

Coluna não nula mais à esquerda da submatriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} (L_1 \rightarrow -\frac{1}{2} L_1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} (L_1 \rightarrow -5L_1 + L_2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} (L_1 \rightarrow 2L_1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora, a matriz toda está na forma escalonada. Para obter a forma escalonada reduzida por linhas precisamos de mais um passo.

Passo 6: Começando com a última linha não nula e trabalhando para cima, some múltiplos convenientes de cada linha à linhas superiores para introduzir zeros acima dos líderes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} (L_2 \rightarrow \frac{7}{2}L_3 + L_2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} (L_1 \rightarrow -6L_3 + L_1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} (L_1 \rightarrow 5L_2 + L_1)$$

A última matriz está na forma escalonada por linhas. Se nós usarmos somente os cinco primeiros passos, o procedimento acima, chamado eliminação gaussiana, produzirá uma forma escalonada. O procedimento até o sexto passo, que produz uma matriz na forma escalonada por linhas, é chamado eliminação de Gauus – Jordan.

2.4.3.4 Retro-substituição

Às vezes é preferrível resolver um sistema de equações lineares por eliminação gaussiana para levar a matriz aumentada à forma escalonada, sem continuar até chegar à forma escalonada reduzida por linhas. Quando isto é feito, o correspondente sistema de equações pode ser resolvido por uma técnica chamada retro-substituição.

Exemplo: Dada a forma escalonada da matriz aumentada, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver o sistema de equação correspondente

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad + 2x_5 \qquad = 0 \\ \qquad x_3 + 2x_4 \qquad + 3x_6 = 1 \\ \qquad\qquad x_6 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

nós procedemos da seguinte maneira:

Passo 1: Resolva as equações para as variáveis líderes.

$$x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_5$$
$$x_3 = 1 - 2x_4 - 3x_6$$
$$x_6 = \frac{1}{3}$$

Passo 2: Começando com a equação de baixo e trabalhando para cima, substitua sucessivamente cada equação em todas as equações acima dela.

Substituindo $x_6 = \frac{1}{3}$ na segunda equação dá

$$x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_5$$
$$x_3 = -2x_4$$
$$x_6 = \frac{1}{3}$$

Substituindo $x_3 = -2x_4$ na primeira equação, dá

$$x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$$
$$x_3 = -2x_4$$
$$x_6 = \frac{1}{3}$$

Passo 3: Atribua valores arbitrários às variáveis livres, se houver.

Atribuindo valores arbitrários r, s e t a x_2, x_4 e x_5, respectivamente, a solução geral é dada pelas fórmulas:

$x_1 = -3r - 4s - 2t,\ x_2 = r, x_3 = -2s, x_4 = s, x_5 = t, x_6 = \frac{1}{3}.$

Como a eliminação gaussiana evita o uso da retro-substituição, pode parecer que este método é o mais eficiente dos dois. É verdade apenas quando resolvemos manualmente sistemas pequenos, pois na redução de Gass-Jordan podemos escrever menos.

Dentre os sistemas de equações lineares, ocupam lugar de destaque os sistemas homogêneos, estes sistemas possuem peculiaridades não compartilhadas pelos sistemas mais gerais.

2.4.4 Sistemas lineares homogêneos

Um sistema de equações lineares é dito homogêneo se os termos constantes são todos iguais a zero, ou seja, o sistema tem a forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ddots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Cada sistema homogêneo de equações lineares é consistente, pois todos os sistemas homogêneos têm $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ como uma solução. Esta solução é chamada solução trivial ou solução nula; se há outras soluções, estas são chamadas de não-triviais.

Como um sistema linear homogêneo sempre tem a solução trivial, só existem duas possibilidades para suas soluções:

- O sistema tem somente a solução trivial.
- O sistema tem infinitas soluções, além da trivial.

Resumindo, nós temos o importante teorema a seguir:

Teorema 6: Um sistema homogêneo de equações lineares com mais incógnitas que equações tem infinitas soluções.

No capítulo seguinte apresentaremos uma aplicação da álgebra linear aos modelos econômicos de Leontief, para tanto, utilizamos alguns resultados que foram expostos em nossos capítulos preliminares deste trabalho.

3 MODELOS ECONÔMICOS DE LEONTIEF

Neste capítulo, discutiremos dois modelos lineares para sistemas econômicos e aplicaremos alguns resultados sobre matrizes com entradas não negativas, para determinar as estruturas de preços de equilíbrio e a produção necessária para satisfazer a demanda.

Wassily Wassilyovitch Leontief, economista russo, radicado nos Estados Unidos desde 1931, é considerado o "Apóstolo do Planejamento Econômico", pela criação da técnica de insumo-produto, na análise dos grandes agregados econômicos. Viveu entre 1905 e 1999, foi o responsável pelo desenvolvimento de teorias que revolucionaram a economia do século XX e que constituem um importante legado em pleno século XXI. Usando análise matemática e computação, Leontief estabeleceu, um "quadro econômico" dos Estados Unidos, onde a economia é descrita em termos de circulação, isto é, como um sistema integrado de fluxos e transferências de insumo e produtos de um setor para outro da produção industrial. Dessa forma, cada setor absorve insumos de outros setores, além de produzir bens e serviços que serão posteriormente utilizados por outros setores para serem processados ou para um consumo final.

Os resultados desse trabalho foram publicados pela primeira vez em 1941, no livro *"the Structure of the American 1919-29: an Empirical Apliccation of Equilibrium Analisys"*. Uma segunda edição do mesmo livro, em 1951, iria atualizar os dados até 1939, publicando o autor, a seguir, uma obra muito mais ampla sobre o mesmo assunto: *"Studies in the Structure of the American Economy: Theoretical and Empirical Explorations in Input-Output Analisys* (1953)".

Depois de estudar em Leningrado e Berlim, Leontief atuou como professor titular na Universidade de Harvard desde 1946, onde chegou a ocupar diversos cargos de assessoria no governo dos Estados Unidos e na ONU. É detentor do Prémio Nobel de Economia, em 1973, ao aplicar à economia contemporânea uma teoria onde a Álgebra Linear se encontra subjacente. Nos alicerces dessa teoria, composta por dois modelos económicos, encontramos princípios que nos são familiares, o cálculo matricial, como instrumento para resolver sistemas lineares. Os dois modelos que estabelecem a vigente teoria, o modelo fechado ou input-output e o modelo aberto, apesar de diferenciados, têm o mesmo objetivo, o equilíbrio econômico.

3.1 Modelo fechado [Input-output] de Leontief

A álgebra linear desempenhou um papel importante nos modelos econômicos de Leontief, que são os modelos fechado ou input-output e aberto. Primeiramente apresentaremos um exemplo simples, depois prosseguiremos para a teoria geral do modelo.

O modelo fechado (input-output) consiste em determinar os preços dos produtos produzidos e consumidos, por um certo grupo de empresas, de modo que o total dos gastos de cada empresa seja igual ao total recebido.

Exemplo: Um marceneiro, um encanador e um eletricista, pretendem fazer consertos em suas casas. Eles concordam em trabalhar durante 20 dias, conforme a tabela seguinte:

	Trabalho executado pelo		
	Marceneiro	Encanador	Eletricista
Dias de trabalho na casa do Marceneiro	4	2	12
Dias de trabalho na casa do Encanador	8	10	2
Dias de trabalho na casa do Eletricista	8	8	6

Cada um deve pagar a ele mesmo e aos outros, um salário diário e pelos serviços prestados em sua casa. Os salários diários normais são, R$ 200,00, mas eles combinam em acertar estes salários de modo que o total recebido por cada um seja igual ao total pago. Qual o salário de cada um?

Podemos colocar

$p_1 =$ Salário diário do marceneiro

$p_2 =$ Salário diário do encanador

$p_3 =$ Salário diário do eletricista

Para satisfazer a condição de equilíbrio, de tal modo que o total dos gastos seja igual ao total recebido para cada um dos proprietários pelo período de dez dias, temos:

$$\begin{aligned} 4p_1 + 2p_2 + 12p_3 &= 20p_1 \\ 8p_1 + 10p_2 + 2p_3 &= 20p_2 \\ 8p_1 + 8p_2 + 6p_3 &= 20p_3 \end{aligned}$$

Essas são as equações de equilíbrio para o marceneiro, o encanador e o eletricista, respectivamente. multiplicando por $\frac{1}{20}$ essas equações e reescrevendo-as na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

É possível reescrever essa equação como um sistema homogêneo

$$\begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,6 \\ -0,4 & 0,5 & -0,1 \\ -0,4 & -0,4 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução desse sistema homogêneo é:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 31 \\ 32 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Onde s é uma constante arbitrária. Essa constante pode ser escolhida convenientemente. Conforme se observa, as principais características do Modelo de input-output de Leontief são:

Na equação (1), a soma de cada coluna da matriz de coeficientes é 1, correspondendo ao fato de que o produto do trabalho de cada um dos proprietários está completamente distribuído entre eles, nas proporções dadas pelas entradas da coluna. O problema consiste em determinar preços para esses trabalhos de tal modo a colocar o sistema em equilíbrio, ou seja, de modo que o gasto total de cada proprietário seja igual ao total recebido em salário.

No modelo geral, temos um sistema econômico consistindo de um número finito de “indústrias,” que ordenamos pelos números 1, 2, 3, ... k. Ao longo de um período fixo de tempo, cada indústria produz um produto, que pode ser um bem ou um serviço. Um problema importante é encontrar os “preços” convenientes que devam ser cobrados por estes k produtos, de tal maneira que, para cada indústria, o total de gastos se iguala ao total recebido, daí temos:

$p_i =$ Preço cobrado pela i-ésima indústria pela sua produção total

$e_{ij} =$ Fração da produção total da j-ésima indústria que é comprada pela i-ésima indústria

Para $i, j = 1, 2, 3, \dots, k$. Por definição, nós temos:

$$(i)\ p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$(ii)\ e_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, k$$

$$(iii)\ e_{1j} + e_{2j} + \cdots + e_{kj} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

Com estas quantidades, nós formamos o vetor-preço

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix}$$

E a matriz de troca ou a matriz de input-output

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1k} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{k1} & e_{k2} & \cdots & e_{kk} \end{bmatrix}$$

Como no exemplo, para que os gastos das indústrias se igualem aos seus rendimentos, a seguinte equação matricial deve ser satisfeita:

$$\mathrm{Ep} = \mathrm{p}$$

$$\mathrm{p} - \mathrm{Ep} = 0$$

$$\mathrm{Ip} - \mathrm{Ep} = 0$$

$$(\mathrm{I} - \mathrm{E})\mathrm{p} = 0$$

Essa equação é um sistema linear homogêneo para o vetor preço p. Esse sistema tem uma solução não trivial, como podemos observar no seguinte resultado, o qual mostraremos para o caso de uma matriz de troca 3×3, tendo em vista que para o caso de uma matriz de troca $n \times n$, em que $n > 3$, a demonstração é análoga.

Teorema 8: Se E é uma matriz de troca, então a matriz $(\mathrm{I} - \mathrm{E})$ é não inversível, ou seja, $\det(\mathrm{I} - \mathrm{E}) = 0$.

Demonstração:

- Seja $\mathrm{E}_{\mathbf{2\,x\,2}}$ a matriz de troca

$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, com $a, b, c, d \geq o$, temos $\begin{cases} a + c = 1 \Leftrightarrow c = 1 - a \\ b + d = 1 \Leftrightarrow b = 1 - d \end{cases}$

Daí, temos:

$$\mathrm{I} - \mathrm{E} = \begin{bmatrix} 1 - a & -b \\ -c & 1 - d \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\det(\mathrm{I} - \mathrm{E}) = [(1 - \mathrm{a}) \cdot (1 - \mathrm{d})] - [(-\mathrm{c}) \cdot (-\mathrm{b})]$$

$$= [(1 - \mathrm{a}) \cdot (1 - \mathrm{d})] - [(\mathrm{a} + 1) \cdot (\mathrm{d} - 1)] = 0.$$

- Seja $\mathrm{E}_{3\times3}$ uma matriz de troca, temos:

$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, com $a, b, c, d, e, f, g, h, i \geq 0$, então, $\begin{cases} a + d + g = 1 \Leftrightarrow g + d = 1 - a \\ b + e + h = 1 \Leftrightarrow h + b = 1 - e \\ c + f + i = 1 \Leftrightarrow c + f = 1 - i \end{cases}$

Daí, temos:

$$\mathrm{I} - \mathrm{E} = \begin{bmatrix} 1 - a & -b & -c \\ -d & 1 - e & -f \\ -g & -h & 1 - i \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\det(\mathrm{I}-\mathrm{E}) = (1-a)[(1-e)(1-i)-fh] + b[-d(1-i)-fg] - c[dh+(1-e)g] =$$
$$= -c[g(h+b)+dh] + (g+d)[(f+c)(h+b)-fh] + b[-fg-d(f+c)] =$$
$$= -cgh - cgb - cdh + fgh + fgb + cgh + cgb - fgh + dfh + dfb +$$
$$+cdh + cdb - dfh - bfg - bdf - cdb = 0$$

- Seja $\mathrm{E}_{n\,x\,n}$ uma matriz de troca, temos:

$$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn} \end{bmatrix}, \text{ com } e_{in} \geq 0 \text{ e } e_{1j} + e_{2j} + \cdots + e_{nj} = 1, j = 1, 2, \cdots, n.$$

$$\mathrm{I}-\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 1-e_{11} & -e_{12} & \cdots & -e_{1n} \\ -e_{21} & 1-e_{22} & \cdots & -e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -e_{n1} & -e_{n2} & \cdots & 1-e_{nn} \end{bmatrix}$$

Temos:

$$(1-e_{11}) + (-e_{21}) + \cdots + (-e_{k1}) = 1 - (e_{11} + e_{21} + \cdots + e_{n1}) = 1 - 1 = 0$$

Na j-ésima coluna:

$$-e_{1j} + (-e_{2j}) + \cdots + (-e_{(j-1)j}) + 1 - e_{jj} + (-e_{(j+1)j}) + \cdots (-e_{nn}) =$$

$$= 1 - (e_{1j} + e_{2j} + \cdots + e_{(j-1)j} + e_{jj} + e_{(j+1)j} + \cdots + e_{nn} = 1 - 1 = 0$$

Agora, pelo fato de em $\mathrm{I}-\mathrm{E}$ termos sempre linhas proporcionais, $\det(\mathrm{I}-\mathrm{E}) = 0$, logo, $\mathrm{I}-\mathrm{E}$ é não invertível.

Na realidade, precisamos mais do que o sistema possuir soluções não triviais para p, precisamos que os p_i dos n produtos sejam números não negativos ($p \geq 0$). Isso é válido com o seguinte teorema:

Teorema 9: Se E é uma matriz de troca, então $\mathrm{E}p = p$ sempre tem uma solução não trivial p cujas entradas são não negativas.

Considere dois exemplos desse teorema:

Exemplo 1:

Seja $\mathrm{E} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Então, $(\mathrm{I}-\mathrm{E})\mathrm{p} = 0$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Que tem a solução geral

$p = s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; em que s é uma constante arbitrária. Para qualquer $s > 0$, temos uma solução não trivial $p \geq 0$.

Exemplo 2:

Seja $\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Então, $(\mathrm{I}-\mathrm{E})p = 0$ tem a solução geral

$$p = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Onde s e t são constantes arbitrárias independentes. Para quaisquer $s \geq 0$ e $t \geq 0$, não ambos nulos, nós temos soluções não-triviais $p \geq 0$.

O exemplo 1 indica que em algumas situações um dos preços precisa ser zero para a condição de equilíbrio ser satisfeita. O exemplo 2 indica que pode haver disponíveis várias estruturas de preço linearmente independentes. Nenhuma dessas situações descreve uma estrutura econômica realmente interdependente.

Observamos que neste modelo utilizam-se ferramentas práticas da álgebra linear, conceitos relacionados às matrizes e sistemas lineares de forma bem efetiva, mostrando uma aplicação bastante interessante.

Na seção seguinte será abordado o modelo aberto de Leontief, o qual tenta satisfazer uma demanda externa, utilizando, para isso, os mesmos conceitos do modelo anterior, além de invertibilidade de matrizes.

3.2 Modelo aberto [de produção] de Leontief

Ao contrário do modelo fechado, no qual os produtos de k indústrias são somente distribuídos entre as próprias indústrias, o modelo aberto tenta satisfazer uma demanda externa para os produtos. Neste modelo, como o próprio nome indica, ainda tem-se que satisfazer a demanda exterior ao sistema. No modelo anterior o objetivo era procurar preços que garantiam o equilíbrio, neste modelo o preço é fixado e o objetivo é determinar os níveis de produção necessários para satisfazer a demanda externa. Mais precisamente:

Definimos para um conjunto finito de indústrias $1, 2, \cdots, k$.

$x_i =$ Valor monetário total produzido pela i-ésima indústria

$$\text{Vetor produção: } \mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

$d_i =$ Valor monetário cuja produção é necessária para que a i-ésima indústria satisfaça a demanda externa

$$\text{Vetor demanda: } d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix}$$

$c_{ij} =$ Valor que a j-ésima indústria tem que pagar a i-ésima indústria para produzir uma unidade monetária

$$\text{Matriz de consumo: } \mathrm{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{bmatrix}$$

Pela natureza do modelo, temos

$$\mathrm{x} \geq 0, \mathrm{d} \geq 0 \; e \; C \geq 0$$

A partir da definição de c_{ij} e de x_j pode ser visto que a quantidade

$$c_{i1}\mathrm{x}_1 + c_{i2}\mathrm{x}_2 + \cdots + c_{ik}\mathrm{x}_k$$

é o valor total produzido pela i-ésima indústria que é necessário para todas as k indústrias produzirem um total especificado pelo vetor de produção x. Como esta quantidade é simplesmente a i-ésima entrada do vetor-coluna Cx, podemos dizer, além disso, que a i-ésima entrada do vetor coluna

$$\mathrm{x} - \mathrm{Cx}$$

é o valor do excesso de produção da i-ésima indústria que está disponível para satisfazer a demanda externa. Para que se verifique o equilíbrio económico, devemos ter:

$$\mathrm{x} - \mathrm{Cx} = \mathrm{d}$$

Isto é,

$$(\mathrm{I} - \mathrm{C})\mathrm{x} = \mathrm{d}$$

Assim, dados C e d, nosso objetivo é encontrar um vetor produção $\mathrm{x} \geq 0$ que satisfaz a equação acima.

Exemplo: Três engenheiros – um engenheiro civil (EC), um elétrico (EE) e um mecânico (EM) – tem cada um uma empresa de consultoria. A consultoria que prestam é de natureza multidisciplinar, de modo que cada um compra uma parte do serviço das outras duas firmas. Para cada R$ 1,00 de consultoria feita pelo EC, ele compra R$ 0,10 de serviços do EE e R$ 0,30 do EM. Para cada R$ 1,00 de consultoria feita pelo EE, ele compra R$ 0,20 de serviços do EC e R$ 0,40 de serviço do EM. Finalmente, para cada R$ 1,00 de consultoria feita pelo EM, ele compra R$ 0,30 de serviço do EC e R$ 0,40 de serviço do EE. Numa certa semana, o EC recebe pedidos de consultoria externa de R$ 500, o EE recebe pedidos de consultoria externa de R$ 700 e o EM recebe pedidos de consultoria externa de R$ 600. Qual é o valor da consultoria feita por cada engenheiro naquela semana?

Para o período de uma semana, sejam

$\mathrm{x}_1 =$ o valor da consultoria do EC;

$\mathrm{x}_2 =$o valor da consultoria do EE;

$\mathrm{x}_3 =$o valor da consultoria do EM.

A matriz de consumo do sistema é

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}20 & 0{,}30 \\ 0{,}10 & 0 & 0{,}40 \\ 0{,}30 & 0{,}40 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema linear $(\mathrm{I}-\mathrm{C})\mathrm{x} = \mathrm{d}$ é, então,

$$\begin{bmatrix} 1{,}00 & -0{,}20 & -0{,}30 \\ -0{,}10 & 1{,}00 & -0{,}40 \\ -0{,}30 & -0{,}40 & 1{,}00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 700 \\ 600 \end{bmatrix}$$

Como a matriz de coeficientes é inversível, a solução é dada por

$$\mathrm{x} = (\mathrm{I}-\mathrm{C})^{-1} d = \begin{bmatrix} 1{,}21 & 0{,}46 & 0{,}55 \\ 0{,}32 & 1{,}31 & 0{,}62 \\ 0{,}49 & 0{,}66 & 1{,}41 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 500 \\ 700 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1257 \\ 1449 \\ 1553 \end{bmatrix}$$

Portanto, naquela semana, o valor da consultoria do engenheiro civil deve ser R$ 1.257,00, a do engenheiro elétrico deve ser R$ 1.449,00 e a do engenheiro mecânico deve ser de R$ 1.553,00.

Reconsiderando a equação:

$$(\mathrm{I}-\mathrm{C})\mathrm{x} = \mathrm{d}$$

Se a matriz quadrada $(\mathrm{I}-\mathrm{C})$ for invertível, pode-se escrever

$$\mathrm{x} = (\mathrm{I}-\mathrm{C})^{-1}\mathrm{d}$$

Além disto, se a matriz $(\mathrm{I}-\mathrm{C})^{-1}$ tiver somente entradas não negativas, então a equação $\mathrm{x} = (\mathrm{I}-\mathrm{C})^{-1}\mathrm{d}$ terá uma única solução não negativa x, para qualquer $d \geq 0$. Essa é uma situação particularmente desejável, por significar que qualquer demanda externa pode ser satisfeita. A terminologia utilizada para descrever este caso é dada na definição seguinte.

Definição 11: Uma matriz de consumo C é produtiva se $(\mathrm{I}-\mathrm{C})^{-1}$ existe e $(\mathrm{I}-\mathrm{C})^{-1} \geq 0$.

Segundo o livro de Anton e Rorres (2001, p. 414), o teorema a seguir e seu corolário, mostram os critérios que garantem quando uma matriz de consumo é produtiva.

Teorema 10: Uma matriz de consumo C é produtiva se, e somente se, existir um vetor produção $\boldsymbol{x} \geq 0$ tal que $x > \mathrm{C}x$, ou seja, cada indústria produz mais do que consome.

Do teorema anterior, chegamos ao seguinte corolário.

Corolário 2: Uma matriz de consumo C é produtiva se a soma das entradas de cada linha **ou** coluna de C é estritamente menor do que 1.

Este corolário diz que se todas as somas das entradas de linhas de C são menores do que 1, então, ela satisfará a condição do teorema.

Por outro lado, uma matriz de consumo C é produtiva se cada soma das entradas das colunas de C é menor do que 1, pois é dita lucrativa se esta j-ésima soma de coluna é menor do que 1. Então, uma matriz de consumo é produtiva se todas as k indústrias do sistema econômico são lucrativas.

Nos exemplos a seguir, apresentaremos critérios simples, que garantem a produtividade de uma matriz de consumo, baseados no teorema 10 e corolário 2.

a) Seja a matriz de consumo do exemplo anterior,

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}20 & 0{,}30 \\ 0{,}10 & 0 & 0{,}40 \\ 0{,}30 & 0{,}40 & 0 \end{bmatrix}$$

A soma das entradas de cada coluna é menor que 1, portanto, as três consultorias são lucrativas. Desse modo, pelo Corolário 2 a matriz de consumo C é produtiva. Isso também pode ser concluído pelo fato de que $(\mathrm{I} - \mathrm{C})^{-1} \geq 0$ (definição 11).

b) $\begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}5 \end{bmatrix}$

Usando o corolário 2, podemos notar que todas as somas de linha são menores do que 1, logo, a matriz é produtiva.

c) $\begin{bmatrix} 0{,}60 & 0{,}40 & 0{,}15 \\ 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}20 & 0{,}15 \end{bmatrix}$

Usando o corolário 2, todas as somas de coluna são menores do que 1, logo, a matriz é produtiva.

d) $\begin{bmatrix} 0{,}60 & 0{,}40 & 0{,}25 \\ 0{,}15 & 0{,}35 & 0{,}10 \\ 0{,}25 & 0{,}35 & 0{,}10 \end{bmatrix}$

Usando o teorema 10, com x = $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} > Cx$=$\begin{bmatrix} 1{,}85 \\ 0{,}75 \\ 0{,}95 \end{bmatrix}$, logo, a matriz é produtiva.

Como podemos ver nos exemplos anteriores para definir a produtividade de uma matriz, ela não precisa necessariamente satisfazer aos dois critérios, o teorema e o corolário, ao mesmo tempo.

Observamos que neste modelo (aberto) usa-se com aplicação efetiva a inversibilidade de matriz. Os exemplos apresentados acima mostram matrizes de ordem “pequena” o que nos permite realizar cálculos manuais.

3.2.1 Matriz insumo-produto do estado do Acre

Abaixo está exibida a matriz insumo-produto do estado do Acre (ano 2008), gentilmente cedida pelo professor Dr. Rubicleis Gomes da Silva, feita em planilha EXCEL. A matriz é de ordem 26 e as atividades produtivas são as seguintes:

x_1 = Agricultura, silvicultura e exploração vegetal;

x_2 = Pecuária e pesca;

x_3 = Mineração;

x_4 = Alimentos, bebidas e fumo;

x_5 = Têxtil, vestuário e calçados;

x_6 = Madeira, papel e impressão;

x_7 = Refino de petróleo, coque e álcool

x_8 = Outros produtos químicos e farmacêuticos

x_9 = Artigos de borracha e plástico;

x_{10} = Cimento e outros produtos de minerais não-metálicos;

x_{11} = Metalurgia;

x_{12} = Máquinas e equipamentos;

x_{13} = Material elétrico e eletrônicos;

x_{14} = Material de transporte;

x_{15} = Indústrias diversas;

x_{16} = Eletricidade e gás, água, esgoto e limpeza urbana;

x_{17} = Construção;

x_{18} = Comércio;

x_{19} = Transporte, armazenagem e correio;

x_{20} = Serviços privados;

x_{21} = Intermediação financeira e seguros;

x_{22} = Serviços imobiliários e aluguel;

x_{23} = Serviços de alojamento e alimentação;

x_{24} = Educação mercantil e pública;

x_{25} = Saúde mercantil e pública;

x_{26} = Administração pública e seguridade social.

Tabela 1: matriz Insumo-produto do Acre

ATIVIDADES		AC																									AC		
		Agricult	Pecuári	Mineraç	Aliment	Têxtil, v	Madeira	Refino c	Outros	Artigos	Cimento	Metalur	Máquin	Materia	Materia	Indústri	Eletricid	Constru	Comérci	Transpo	Serviços	Interme	Serviços	Serviços	Educaçã	Saúde n	Adminis	D Final	PT
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	66	67
Agricultura, silvicultura, exploração	1	16	17	0	31	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	137	212
Pecuária e pesca	2	1	17	0	44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	103	167
Mineração	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	8
Alimentos, bebidas e fumo	4	0	0	0	16	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	0	0	3	1	1	2	194	221
Têxtil, vestuário e calçados	5	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	23
Madeira, papel e impressão	6	1	0	0	0	0	17	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	17	1	0	5	2	0	0	0	0	0	32	78
Refino de petróleo, coque e álcool	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Outros produtos químicos e farmac	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	4
Artigos de borracha e plástico	9	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	1	0	0	0	0	1	0	3	11
Cimento e outros produtos de mine	10	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	34	0	0	0	0	0	0	0	1	0	3	42
Metalurgia	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3
Máquinas e equipamentos	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Material elétrico e eletrônicos	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	5
Material de transporte	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Indústrias diversas	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	11
Eletricidade e gás, água, esgoto e	16	1	2	0	5	1	2	0	0	1	3	0	0	0	0	0	92	1	10	2	10	1	0	2	12	6	18	99	270
Construção	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16	0	0	3	1	9	0	20	5	28	528	610
Comércio	18	13	16	1	23	3	4	0	0	1	3	0	0	0	0	1	6	45	18	7	12	2	1	13	7	9	15	572	775
Transporte, armazenagem e correi	19	3	2	0	6	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3	5	14	7	9	2	0	1	2	3	6	137	204
Serviços privados	20	1	2	0	5	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	16	10	28	9	83	21	4	2	20	31	111	290	637
Intermediação financeira e seguros	21	2	1	0	4	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3	5	8	3	6	19	1	1	0	0	59	109	225
Serviços imobiliários e aluguel	22	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	6	1	4	0	0	1	1	1	9	366	391
Serviços de alojamento e alimenta	23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	4	7	149	164
Educação mercantil e pública	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	761	763
Saúde mercantil e pública	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	413	415
Administração pública e seguridad	26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	1	0	0	0	1	1	2	1.685	1.696

Tabela 2: matriz dos coeficientes técnicos (C) com os totais de cada coluna e cada linha

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	TOTAL
1	0,0737	0,1018	0,0007	0,1413	0,0040	0,0989	0,2678	0,0173	0,0118	0,0037	0,0002	0,0000	0,0000	0,0005	0,0039	0,0000	0,0002	0,0000	0,0000	0,0006	0,0000	0,0000	0,0084	0,0005	0,0002	0,0003	0,7358
2	0,0067	0,1014	0,0000	0,2003	0,0052	0,0025	0,0056	0,0019	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0016	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0000	0,0000	0,0043	0,0002	0,0001	0,0002	0,3314
3	0,0000	0,0013	0,0513	0,0002	0,0008	0,0000	0,4912	0,0231	0,0000	0,0298	0,0112	0,0016	0,0010	0,0016	0,0005	0,0000	0,0017	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,6156
4	0,0002	0,0029	0,0003	0,0740	0,0866	0,0002	0,0192	0,0314	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0002	0,0019	0,0000	0,0002	0,0007	0,0002	0,0025	0,0001	0,0000	0,0201	0,0010	0,0014	0,0011	0,2444
5	0,0000	0,0000	0,0003	0,0000	0,2244	0,0001	0,0012	0,0011	0,0013	0,0003	0,0015	0,0037	0,0001	0,0010	0,0017	0,0000	0,0001	0,0000	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,2374
6	0,0033	0,0000	0,0001	0,0007	0,0007	0,2227	0,0015	0,0090	0,0066	0,0191	0,0107	0,0022	0,0037	0,0026	0,0910	0,0004	0,0275	0,0007	0,0009	0,0081	0,0081	0,0002	0,0001	0,0001	0,0007	0,0002	0,4210
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0888	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0891
8	0,0000	0,0002	0,0071	0,0001	0,0004	0,0004	0,0381	0,0776	0,0003	0,0040	0,0036	0,0131	0,0008	0,0034	0,0002	0,0000	0,0003	0,0000	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0002	0,0000	0,1499
9	0,0001	0,0001	0,0295	0,0040	0,0067	0,0027	0,0066	0,0213	0,0600	0,0011	0,0476	0,0258	0,0206	0,0370	0,0304	0,0011	0,0008	0,0004	0,0092	0,0014	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0016	0,0000	0,3082
10	0,0004	0,0000	0,0033	0,0025	0,0045	0,0001	0,0015	0,0089	0,0006	0,0547	0,0072	0,0030	0,0121	0,0116	0,0217	0,0001	0,0556	0,0002	0,0000	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0024	0,0001	0,1912
11	0,0000	0,0000	0,0049	0,0013	0,0010	0,0002	0,0118	0,0082	0,0069	0,0006	0,1384	0,0854	0,0673	0,0260	0,0113	0,0000	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,3637
12	0,0000	0,0000	0,0003	0,0000	0,0001	0,0002	0,0100	0,0028	0,0003	0,0001	0,0014	0,0273	0,0021	0,0075	0,0002	0,0000	0,0001	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0525
13	0,0000	0,0000	0,0013	0,0002	0,0004	0,0000	0,0031	0,0023	0,0026	0,0002	0,0020	0,0432	0,1729	0,0112	0,0040	0,0013	0,0002	0,0000	0,0005	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,2462
14	0,0000	0,0000	0,0006	0,0000	0,0001	0,0000	0,0006	0,0006	0,0004	0,0003	0,0013	0,0184	0,0051	0,1607	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1890
15	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0015	0,0002	0,0000	0,0001	0,0009	0,0001	0,0021	0,0004	0,0006	0,0001	0,0147	0,0000	0,0001	0,0000	0,0003	0,0004	0,0014	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0232
16	0,0066	0,0100	0,0528	0,0218	0,0317	0,0202	0,0130	0,0300	0,0533	0,0686	0,0618	0,0182	0,0333	0,0219	0,0143	0,3423	0,0021	0,0128	0,0110	0,0165	0,0060	0,0009	0,0114	0,0155	0,0145	0,0107	0,9011
17	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0007	0,0008	0,0009	0,0008	0,0061	0,0032	0,0007	0,0008	0,0040	0,0009	0,0005	0,0002	0,0262	0,0006	0,0001	0,0046	0,0053	0,0237	0,0001	0,0256	0,0110	0,0167	0,1342
18	0,0633	0,0943	0,0773	0,1050	0,1484	0,0511	0,0183	0,1059	0,1183	0,0810	0,0856	0,0672	0,0848	0,0761	0,0676	0,0212	0,0733	0,0227	0,0363	0,0195	0,0093	0,0021	0,0813	0,0090	0,0220	0,0090	1,5498
19	0,0160	0,0105	0,0597	0,0275	0,0219	0,0166	0,0148	0,0287	0,0330	0,0154	0,0407	0,0234	0,0345	0,0197	0,0095	0,0120	0,0082	0,0182	0,0323	0,0136	0,0070	0,0009	0,0038	0,0029	0,0077	0,0035	0,4819
20	0,0050	0,0096	0,0510	0,0237	0,0245	0,0189	0,0213	0,0605	0,0473	0,0219	0,0368	0,0347	0,0731	0,0226	0,0089	0,0581	0,0168	0,0357	0,0430	0,1298	0,0947	0,0105	0,0109	0,0260	0,0744	0,0656	1,0254
21	0,0079	0,0071	0,0233	0,0164	0,0251	0,0160	0,0099	0,0361	0,0411	0,0159	0,0428	0,0439	0,0418	0,0258	0,0103	0,0119	0,0076	0,0110	0,0150	0,0099	0,0828	0,0033	0,0031	0,0004	0,0007	0,0350	0,5441
22	0,0004	0,0002	0,0043	0,0026	0,0026	0,0018	0,0023	0,0030	0,0045	0,0024	0,0051	0,0028	0,0026	0,0017	0,0020	0,0019	0,0012	0,0072	0,0025	0,0057	0,0018	0,0012	0,0031	0,0019	0,0027	0,0052	0,0726
23	0,0001	0,0001	0,0029	0,0005	0,0002	0,0011	0,0012	0,0005	0,0015	0,0017	0,0005	0,0001	0,0012	0,0004	0,0006	0,0002	0,0011	0,0008	0,0021	0,0022	0,0018	0,0002	0,0008	0,0007	0,0086	0,0040	0,0351
24	0,0000	0,0000	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0001	0,0002	0,0001	0,0002	0,0001	0,0001	0,0002	0,0001	0,0003	0,0001	0,0003	0,0007	0,0001	0,0001	0,0005	0,0011	0,0006	0,0060
25	0,0003	0,0004	0,0006	0,0006	0,0008	0,0003	0,0002	0,0006	0,0007	0,0005	0,0006	0,0004	0,0005	0,0004	0,0004	0,0002	0,0004	0,0005	0,0003	0,0004	0,0001	0,0001	0,0005	0,0001	0,0002	0,0003	0,0106
26	0,0007	0,0006	0,0027	0,0017	0,0017	0,0016	0,0010	0,0029	0,0028	0,0022	0,0028	0,0010	0,0020	0,0014	0,0008	0,0082	0,0007	0,0015	0,0015	0,0019	0,0019	0,0003	0,0006	0,0008	0,0022	0,0011	0,0466
TOTAL	0,18	0,34	0,37	0,63	0,59	0,46	1,03	0,47	0,40	0,33	0,50	0,42	0,56	0,43	0,30	0,46	0,22	0,11	0,16	0,22	0,22	0,04	0,15	0,09	0,15	0,15	

Tabela 3: matriz identidade (I):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tabela 4: matriz $(I - C)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	0,9263	-0,1018	-0,0007	-0,1413	-0,0040	-0,0989	-0,2678	-0,0173	-0,0118	-0,0037	-0,0002	0,0000	0,0000	-0,0005	-0,0039	0,0000	-0,0002	0,0000	0,0000	-0,0006	0,0000	0,0000	-0,0084	-0,0005	-0,0002	-0,0003
2	-0,0067	0,8986	0,0000	-0,2003	-0,0052	-0,0025	-0,0056	-0,0019	-0,0009	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0016	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0004	0,0000	0,0000	-0,0043	-0,0002	-0,0001	-0,0002
3	0,0000	-0,0013	0,9487	-0,0002	-0,0008	0,0000	-0,4912	-0,0231	0,0000	-0,0298	-0,0112	-0,0016	-0,0010	-0,0016	-0,0005	0,0000	-0,0017	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	-0,0002	-0,0029	-0,0003	0,9260	-0,0866	-0,0002	-0,0192	-0,0314	-0,0001	-0,0001	-0,0001	-0,0001	0,0000	-0,0002	-0,0019	0,0000	-0,0002	-0,0007	-0,0002	-0,0025	-0,0001	0,0000	-0,0201	-0,0010	-0,0014	-0,0011
5	0,0000	0,0000	-0,0003	0,0000	0,7756	-0,0001	-0,0012	-0,0011	-0,0013	-0,0003	-0,0015	-0,0037	-0,0001	-0,0010	-0,0017	0,0000	-0,0001	0,0000	-0,0002	-0,0001	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000
6	-0,0033	0,0000	-0,0001	-0,0007	-0,0007	0,7773	-0,0015	-0,0090	-0,0066	-0,0191	-0,0107	-0,0022	-0,0037	-0,0026	-0,0910	-0,0004	-0,0275	-0,0007	-0,0009	-0,0081	-0,0081	-0,0002	-0,0001	-0,0001	-0,0007	-0,0002
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,9112	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
8	0,0000	-0,0002	-0,0071	-0,0001	-0,0004	-0,0004	-0,0381	0,9224	-0,0003	-0,0040	-0,0036	-0,0131	-0,0008	-0,0034	-0,0002	0,0000	-0,0003	0,0000	-0,0001	-0,0001	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000	-0,0002	0,0000
9	-0,0001	-0,0001	-0,0295	-0,0040	-0,0067	-0,0027	-0,0066	-0,0213	0,9400	-0,0011	-0,0476	-0,0258	-0,0206	-0,0370	-0,0304	-0,0011	-0,0008	-0,0004	-0,0092	-0,0014	-0,0001	-0,0001	-0,0001	0,0000	-0,0016	0,0000
10	-0,0004	0,0000	-0,0033	-0,0025	-0,0045	-0,0001	-0,0015	-0,0089	-0,0006	0,9453	-0,0072	-0,0030	-0,0121	-0,0116	-0,0217	-0,0001	-0,0556	-0,0002	0,0000	-0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0024	-0,0001
11	0,0000	0,0000	-0,0049	-0,0013	-0,0010	-0,0002	-0,0118	-0,0082	-0,0069	-0,0006	0,8616	-0,0854	-0,0673	-0,0260	-0,0113	0,0000	-0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000
12	0,0000	0,0000	-0,0003	0,0000	-0,0001	-0,0002	-0,0100	-0,0028	-0,0003	-0,0001	-0,0014	0,9727	-0,0021	-0,0075	-0,0002	0,0000	-0,0001	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
13	0,0000	0,0000	-0,0013	-0,0002	-0,0004	0,0000	-0,0031	-0,0023	-0,0026	-0,0002	-0,0020	-0,0432	0,8271	-0,0112	-0,0040	-0,0013	-0,0002	0,0000	-0,0005	-0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000
14	0,0000	0,0000	-0,0006	0,0000	-0,0001	0,0000	-0,0006	-0,0006	-0,0004	-0,0003	-0,0013	-0,0184	-0,0051	0,8393	-0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
15	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0001	-0,0015	-0,0002	0,0000	-0,0001	-0,0009	-0,0001	-0,0021	-0,0004	-0,0006	-0,0001	0,9853	0,0000	-0,0001	0,0000	-0,0003	-0,0004	-0,0014	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0000
16	-0,0066	-0,0100	-0,0528	-0,0218	-0,0317	-0,0202	-0,0130	-0,0300	-0,0533	-0,0686	-0,0618	-0,0182	-0,0333	-0,0219	-0,0143	0,6577	-0,0021	-0,0128	-0,0110	-0,0165	-0,0060	-0,0009	-0,0114	-0,0155	-0,0145	-0,0107
17	0,0000	0,0000	-0,0002	-0,0007	-0,0007	-0,0008	-0,0009	-0,0008	-0,0061	-0,0032	-0,0007	-0,0008	-0,0040	-0,0009	-0,0005	-0,0002	0,9738	-0,0006	-0,0001	-0,0046	-0,0053	-0,0237	-0,0001	-0,0256	-0,0110	-0,0167
18	-0,0633	-0,0943	-0,0773	-0,1050	-0,1484	-0,0511	-0,0183	-0,1059	-0,1183	-0,0810	-0,0856	-0,0672	-0,0848	-0,0761	-0,0676	-0,0212	-0,0733	0,9773	-0,0363	-0,0195	-0,0093	-0,0021	-0,0813	-0,0090	-0,0220	-0,0090
19	-0,0160	-0,0105	-0,0597	-0,0275	-0,0219	-0,0166	-0,0148	-0,0287	-0,0330	-0,0154	-0,0407	-0,0234	-0,0345	-0,0197	-0,0095	-0,0120	-0,0082	-0,0182	0,9677	-0,0136	-0,0070	-0,0009	-0,0038	-0,0029	-0,0077	-0,0035
20	-0,0050	-0,0096	-0,0510	-0,0237	-0,0245	-0,0189	-0,0213	-0,0605	-0,0473	-0,0219	-0,0368	-0,0347	-0,0731	-0,0226	-0,0089	-0,0581	-0,0168	-0,0357	-0,0430	0,8702	-0,0947	-0,0105	-0,0109	-0,0260	-0,0744	-0,0656
21	-0,0079	-0,0071	-0,0233	-0,0164	-0,0251	-0,0160	-0,0099	-0,0361	-0,0411	-0,0159	-0,0428	-0,0439	-0,0418	-0,0258	-0,0103	-0,0119	-0,0076	-0,0110	-0,0150	-0,0099	0,9172	-0,0033	-0,0031	-0,0004	-0,0007	-0,0350
22	-0,0004	-0,0002	-0,0043	-0,0026	-0,0026	-0,0018	-0,0023	-0,0030	-0,0045	-0,0024	-0,0051	-0,0028	-0,0026	-0,0017	-0,0020	-0,0019	-0,0012	-0,0072	-0,0025	-0,0057	-0,0018	0,9988	-0,0031	-0,0019	-0,0027	-0,0052
23	-0,0001	-0,0001	-0,0029	-0,0005	-0,0002	-0,0011	-0,0012	-0,0005	-0,0015	-0,0017	-0,0005	-0,0001	-0,0012	-0,0004	-0,0006	-0,0002	-0,0011	-0,0008	-0,0021	-0,0022	-0,0018	-0,0002	0,9992	-0,0007	-0,0086	-0,0040
24	0,0000	0,0000	-0,0002	-0,0001	-0,0001	-0,0001	-0,0001	-0,0002	-0,0002	-0,0001	-0,0002	-0,0001	-0,0002	-0,0001	-0,0001	-0,0002	-0,0001	-0,0003	-0,0001	-0,0003	-0,0007	-0,0001	-0,0001	0,9995	-0,0011	-0,0006
25	-0,0003	-0,0004	-0,0006	-0,0006	-0,0008	-0,0003	-0,0002	-0,0006	-0,0007	-0,0005	-0,0006	-0,0004	-0,0005	-0,0004	-0,0004	-0,0002	-0,0004	-0,0005	-0,0003	-0,0004	-0,0001	-0,0001	-0,0005	-0,0001	0,9998	-0,0003
26	-0,0007	-0,0006	-0,0027	-0,0017	-0,0017	-0,0016	-0,0010	-0,0029	-0,0028	-0,0022	-0,0028	-0,0010	-0,0020	-0,0014	-0,0008	-0,0082	-0,0007	-0,0015	-0,0015	-0,0019	-0,0019	-0,0003	-0,0006	-0,0008	-0,0022	0,9989

Como o $det\ (I - C)\ \cong\ 0{,}08968\ >\ 0$, a matriz dos coeficientes é inversível.

Tabela 5: matriz $(I - C)^{-1}$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	1,0811	0,1232	0,0020	0,1920	0,0284	0,1382	0,3254	0,0293	0,0152	0,0074	0,0034	0,0020	0,0020	0,0024	0,0185	0,0004	0,0047	0,0004	0,0005	0,0028	0,0016	0,0002	0,0136	0,0010	0,0010	0,0009
2	0,0082	1,1146	0,0004	0,2424	0,0347	0,0048	0,0152	0,0109	0,0015	0,0004	0,0004	0,0005	0,0003	0,0004	0,0029	0,0001	0,0003	0,0002	0,0002	0,0013	0,0002	0,0000	0,0098	0,0005	0,0007	0,0006
3	0,0001	0,0015	1,0545	0,0007	0,0015	0,0001	0,5699	0,0270	0,0002	0,0334	0,0142	0,0037	0,0031	0,0031	0,0015	0,0000	0,0038	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4	0,0003	0,0037	0,0011	1,0810	0,1211	0,0005	0,0254	0,0374	0,0007	0,0006	0,0009	0,0015	0,0007	0,0009	0,0025	0,0004	0,0004	0,0009	0,0004	0,0032	0,0005	0,0001	0,0219	0,0012	0,0020	0,0015
5	0,0000	0,0000	0,0006	0,0001	1,2893	0,0002	0,0022	0,0017	0,0019	0,0005	0,0024	0,0052	0,0005	0,0018	0,0023	0,0001	0,0001	0,0000	0,0003	0,0002	0,0001	0,0000	0,0001	0,0000	0,0001	0,0000
6	0,0050	0,0011	0,0023	0,0031	0,0033	1,2881	0,0066	0,0154	0,0113	0,0272	0,0190	0,0071	0,0105	0,0069	0,1206	0,0023	0,0384	0,0016	0,0022	0,0126	0,0131	0,0014	0,0006	0,0016	0,0024	0,0022
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0974	0,0002	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
8	0,0000	0,0003	0,0081	0,0003	0,0006	0,0005	0,0500	1,0845	0,0005	0,0048	0,0047	0,0152	0,0017	0,0048	0,0004	0,0001	0,0006	0,0000	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0002	0,0000
9	0,0004	0,0005	0,0347	0,0053	0,0107	0,0042	0,0294	0,0271	1,0652	0,0030	0,0606	0,0369	0,0329	0,0503	0,0345	0,0022	0,0015	0,0007	0,0103	0,0021	0,0006	0,0002	0,0004	0,0002	0,0020	0,0003
10	0,0005	0,0002	0,0041	0,0032	0,0068	0,0004	0,0050	0,0109	0,0014	1,0583	0,0094	0,0055	0,0170	0,0155	0,0236	0,0004	0,0605	0,0003	0,0001	0,0013	0,0005	0,0015	0,0001	0,0016	0,0033	0,0012
11	0,0000	0,0000	0,0066	0,0017	0,0019	0,0004	0,0207	0,0114	0,0089	0,0011	1,1618	0,1074	0,0954	0,0387	0,0141	0,0002	0,0003	0,0001	0,0002	0,0002	0,0001	0,0000	0,0001	0,0000	0,0002	0,0000
12	0,0000	0,0000	0,0004	0,0000	0,0001	0,0002	0,0116	0,0032	0,0004	0,0001	0,0018	1,0285	0,0028	0,0094	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
13	0,0000	0,0001	0,0021	0,0005	0,0009	0,0002	0,0061	0,0036	0,0036	0,0006	0,0034	0,0546	1,2098	0,0171	0,0052	0,0025	0,0004	0,0001	0,0008	0,0008	0,0002	0,0000	0,0001	0,0001	0,0002	0,0001
14	0,0000	0,0000	0,0009	0,0001	0,0002	0,0000	0,0016	0,0009	0,0006	0,0005	0,0019	0,0231	0,0076	1,1919	0,0005	0,0001	0,0001	0,0000	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
15	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	0,0020	0,0003	0,0003	0,0003	0,0012	0,0002	0,0027	0,0009	0,0011	0,0003	1,0151	0,0001	0,0002	0,0000	0,0004	0,0004	0,0016	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001
16	0,0135	0,0219	0,0948	0,0479	0,0762	0,0449	0,0860	0,0651	0,0943	0,1185	0,1235	0,0523	0,0832	0,0555	0,0361	1,5253	0,0142	0,0219	0,0209	0,0310	0,0142	0,0022	0,0209	0,0252	0,0261	0,0195
17	0,0002	0,0003	0,0014	0,0015	0,0020	0,0016	0,0024	0,0022	0,0078	0,0041	0,0024	0,0024	0,0067	0,0023	0,0014	0,0013	1,0275	0,0012	0,0007	0,0058	0,0067	0,0244	0,0005	0,0265	0,0120	0,0179
18	0,0726	0,1180	0,0974	0,1574	0,2217	0,0810	0,1113	0,1393	0,1390	0,0987	0,1214	0,0999	0,1287	0,1116	0,0891	0,0373	0,0868	1,0261	0,0422	0,0271	0,0154	0,0047	0,0888	0,0132	0,0281	0,0142
19	0,0198	0,0173	0,0715	0,0414	0,0406	0,0275	0,0671	0,0428	0,0428	0,0240	0,0582	0,0382	0,0551	0,0332	0,0176	0,0217	0,0131	0,0204	1,0359	0,0179	0,0105	0,0016	0,0072	0,0044	0,0106	0,0059
20	0,0127	0,0220	0,0830	0,0490	0,0629	0,0402	0,0889	0,0997	0,0798	0,0462	0,0785	0,0713	0,1303	0,0533	0,0262	0,1085	0,0293	0,0465	0,0574	1,1559	0,1219	0,0135	0,0196	0,0333	0,0902	0,0827
21	0,0111	0,0121	0,0339	0,0272	0,0440	0,0265	0,0399	0,0515	0,0535	0,0240	0,0635	0,0636	0,0672	0,0429	0,0189	0,0225	0,0123	0,0136	0,0190	0,0142	1,0926	0,0041	0,0057	0,0017	0,0031	0,0400
22	0,0012	0,0014	0,0064	0,0047	0,0060	0,0035	0,0074	0,0057	0,0068	0,0041	0,0082	0,0053	0,0061	0,0041	0,0035	0,0041	0,0023	0,0078	0,0033	0,0070	0,0029	1,0014	0,0040	0,0023	0,0036	0,0059
23	0,0002	0,0003	0,0037	0,0010	0,0008	0,0017	0,0037	0,0013	0,0021	0,0022	0,0013	0,0008	0,0023	0,0010	0,0011	0,0007	0,0015	0,0010	0,0024	0,0027	0,0023	0,0003	1,0010	0,0009	0,0089	0,0043
24	0,0001	0,0001	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0004	0,0004	0,0004	0,0002	0,0004	0,0003	0,0004	0,0002	0,0002	0,0003	0,0001	0,0004	0,0002	0,0004	0,0008	0,0001	0,0002	1,0005	0,0012	0,0006
25	0,0004	0,0006	0,0008	0,0009	0,0013	0,0005	0,0009	0,0009	0,0010	0,0006	0,0010	0,0007	0,0009	0,0007	0,0006	0,0004	0,0005	0,0006	0,0003	0,0005	0,0002	0,0001	0,0006	0,0002	1,0003	0,0004
26	0,0010	0,0013	0,0043	0,0030	0,0038	0,0028	0,0044	0,0046	0,0044	0,0038	0,0052	0,0026	0,0043	0,0029	0,0017	0,0128	0,0013	0,0019	0,0019	0,0026	0,0025	0,0004	0,0010	0,0011	0,0027	1,0016

Como vimos na tabela anterior que todas as entradas de $(I - C)^{-1} \geq 0$ (não-negativas), podemos afirmar, com certeza, que a equação $(I - C)^{-1}\mathrm{d} = \mathrm{x}$ possui solução única e não-negativa, ou seja, $x \geq 0$, como podemos ver abaixo:

Tabela 6: equação $(I - C)^{-1}\mathrm{d} = \mathrm{x}$.

	$(I-C)^{-1}$																										d	X
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26		
1	1,0811	0,1232	0,0020	0,1920	0,0284	0,1382	0,3254	0,0293	0,0152	0,0074	0,0034	0,0020	0,0020	0,0024	0,0185	0,0004	0,0047	0,0004	0,0005	0,0028	0,0016	0,0002	0,0136	0,0010	0,0010	0,0009	137	212,39
2	0,0082	1,1146	0,0004	0,2424	0,0347	0,0048	0,0152	0,0109	0,0015	0,0004	0,0004	0,0005	0,0003	0,0004	0,0029	0,0001	0,0003	0,0002	0,0002	0,0013	0,0002	0,0000	0,0098	0,0005	0,0007	0,0006	103	167,15
3	0,0001	0,0015	1,0545	0,0007	0,0015	0,0001	0,5699	0,0270	0,0002	0,0334	0,0142	0,0037	0,0031	0,0031	0,0015	0,0000	0,0038	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	5	8,37
4	0,0003	0,0037	0,0011	1,0810	0,1211	0,0005	0,0254	0,0374	0,0007	0,0006	0,0009	0,0015	0,0007	0,0009	0,0025	0,0004	0,0004	0,0009	0,0004	0,0032	0,0005	0,0001	0,0219	0,0012	0,0020	0,0015	194	221,31
5	0,0000	0,0000	0,0006	0,0001	1,2893	0,0002	0,0022	0,0017	0,0019	0,0005	0,0024	0,0052	0,0005	0,0018	0,0023	0,0001	0,0001	0,0000	0,0003	0,0002	0,0001	0,0000	0,0001	0,0000	0,0001	0,0000	17	22,82
6	0,0050	0,0011	0,0023	0,0031	0,0033	1,2881	0,0066	0,0154	0,0113	0,0272	0,0190	0,0071	0,0105	0,0069	0,1206	0,0023	0,0384	0,0016	0,0022	0,0126	0,0131	0,0014	0,0006	0,0016	0,0024	0,0022	32	77,65
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0974	0,0002	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0	0,0117
8	0,0000	0,0003	0,0081	0,0003	0,0006	0,0005	0,0500	1,0845	0,0005	0,0048	0,0047	0,0152	0,0017	0,0048	0,0004	0,0001	0,0006	0,0000	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0002	0,0000	3	4,04
9	0,0004	0,0005	0,0347	0,0053	0,0107	0,0042	0,0294	0,0271	1,0652	0,0030	0,0606	0,0369	0,0329	0,0503	0,0345	0,0022	0,0015	0,0007	0,0103	0,0021	0,0006	0,0002	0,0004	0,0002	0,0020	0,0003	3	10,87
10	0,0005	0,0002	0,0041	0,0032	0,0068	0,0004	0,0050	0,0109	0,0014	1,0583	0,0094	0,0055	0,0170	0,0155	0,0236	0,0004	0,0605	0,0003	0,0001	0,0013	0,0005	0,0015	0,0001	0,0016	0,0033	0,0012	3	42,20
11	0,0000	0,0000	0,0066	0,0017	0,0019	0,0004	0,0207	0,0114	0,0089	0,0011	1,1618	0,1074	0,0954	0,0387	0,0141	0,0002	0,0003	0,0001	0,0002	0,0002	0,0001	0,0000	0,0001	0,0000	0,0002	0,0000	2	3,47
12	0,0000	0,0000	0,0004	0,0000	0,0001	0,0002	0,0116	0,0032	0,0004	0,0001	0,0018	1,0285	0,0028	0,0094	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1	1,20
13	0,0000	0,0001	0,0021	0,0005	0,0009	0,0002	0,0061	0,0036	0,0036	0,0006	0,0034	0,0546	1,2098	0,0171	0,0052	0,0025	0,0004	0,0001	0,0008	0,0008	0,0002	0,0000	0,0001	0,0001	0,0002	0,0001	3 =	4,88
14	0,0000	0,0000	0,0009	0,0001	0,0002	0,0000	0,0016	0,0009	0,0006	0,0005	0,0019	0,0231	0,0076	1,1919	0,0005	0,0001	0,0001	0,0000	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1	1,23
15	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	0,0020	0,0003	0,0003	0,0003	0,0012	0,0002	0,0027	0,0009	0,0011	0,0003	1,0151	0,0001	0,0002	0,0000	0,0004	0,0004	0,0016	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	10	10,67
16	0,0135	0,0219	0,0948	0,0479	0,0762	0,0449	0,0860	0,0651	0,0943	0,1185	0,1235	0,0523	0,0832	0,0555	0,0361	1,5253	0,0142	0,0219	0,0209	0,0310	0,0142	0,0022	0,0209	0,0252	0,0261	0,0195	99	270,17
17	0,0002	0,0003	0,0014	0,0015	0,0020	0,0016	0,0024	0,0022	0,0078	0,0041	0,0024	0,0024	0,0067	0,0023	0,0014	0,0013	1,0275	0,0012	0,0007	0,0058	0,0067	0,0244	0,0005	0,0265	0,0120	0,0179	528	610,25
18	0,0726	0,1180	0,0974	0,1574	0,2217	0,0810	0,1113	0,1393	0,1390	0,0987	0,1214	0,0999	0,1287	0,1116	0,0891	0,0373	0,0868	1,0261	0,0422	0,0271	0,0154	0,0047	0,0888	0,0132	0,0281	0,0142	572	775,01
19	0,0198	0,0173	0,0715	0,0414	0,0406	0,0275	0,0671	0,0428	0,0428	0,0240	0,0582	0,0382	0,0551	0,0332	0,0176	0,0217	0,0131	0,0204	1,0359	0,0179	0,0105	0,0016	0,0072	0,0044	0,0106	0,0059	137	203,50
20	0,0127	0,0220	0,0830	0,0490	0,0629	0,0402	0,0889	0,0997	0,0798	0,0462	0,0785	0,0713	0,1303	0,0533	0,0262	0,1085	0,0293	0,0465	0,0574	1,1559	0,1219	0,0135	0,0196	0,0333	0,0902	0,0827	290	636,60
21	0,0111	0,0121	0,0339	0,0272	0,0440	0,0265	0,0399	0,0515	0,0535	0,0240	0,0635	0,0636	0,0672	0,0429	0,0189	0,0225	0,0123	0,0136	0,0190	0,0142	1,0926	0,0041	0,0057	0,0017	0,0031	0,0400	109	224,95
22	0,0012	0,0014	0,0064	0,0047	0,0060	0,0035	0,0074	0,0057	0,0068	0,0041	0,0082	0,0053	0,0061	0,0041	0,0035	0,0041	0,0023	0,0078	0,0033	0,0070	0,0029	1,0014	0,0040	0,0023	0,0036	0,0059	366	390,93
23	0,0002	0,0003	0,0037	0,0010	0,0008	0,0017	0,0037	0,0013	0,0021	0,0022	0,0013	0,0008	0,0023	0,0010	0,0011	0,0007	0,0015	0,0010	0,0024	0,0027	0,0023	0,0003	1,0010	0,0009	0,0089	0,0043	149	164,39
24	0,0001	0,0001	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0004	0,0004	0,0004	0,0002	0,0004	0,0003	0,0004	0,0002	0,0002	0,0003	0,0001	0,0004	0,0002	0,0004	0,0008	0,0001	0,0002	1,0005	0,0012	0,0006	761	763,24
25	0,0004	0,0006	0,0008	0,0009	0,0013	0,0005	0,0009	0,0009	0,0010	0,0006	0,0010	0,0007	0,0009	0,0007	0,0006	0,0004	0,0005	0,0006	0,0003	0,0005	0,0002	0,0001	0,0006	0,0002	1,0003	0,0004	413	415,44
26	0,0010	0,0013	0,0043	0,0030	0,0038	0,0028	0,0044	0,0046	0,0044	0,0038	0,0052	0,0026	0,0043	0,0029	0,0017	0,0128	0,0013	0,0019	0,0019	0,0026	0,0025	0,0004	0,0010	0,0011	0,0027	1,0016	1.685	1695,69

Como podemos ver, abaixo, $x > Cx$, satisfazendo assim o teorema 10, portanto, a matriz é produtiva.

X		C.X
212,3863		74,9863
167,1458		64,4804
8,3689		3,2240
221,3073		27,7870
22,8167		5,4523
77,6481		45,5117
0,0117		0,0024
4,0424		1,0567
10,8734		7,5918
42,2041		39,2127
3,4706		1,7880
1,2010	>	0,2252
4,8846		2,0843
1,2333		0,4283
10,6700		1,0284
270,1698		170,7410
610,2474		82,7444
775,0133		202,5572
203,5000		66,5768
636,5977		346,7839
224,9543		116,4290
390,9306		24,7848
164,3863		15,0744
763,2436		2,6248
415,4378		2,2639
1695,6873		10,3517

Para matrizes de ordem “grande”, os cálculos são bastante “hostis”, tendo em vista isto, fizemos uso do software livre MAXIMA, o qual será apresentado no capítulo seguinte bem como um breve tutorial de seu uso, na resolução sistemas lineares e de cálculos com matrizes.

4 SOFTWARE MAXIMA

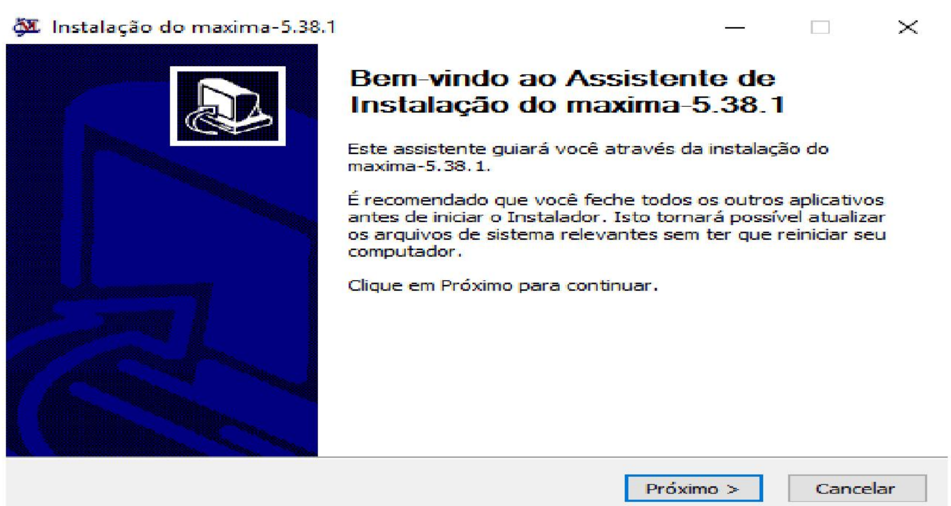
Neste capítulo será feito um breve tutorial com o objetivo de fornecer informações para que iniciantes possam aprender a manipular o software MAXIMA, na execução de cálculos envolvendo matrizes e resolução de sistemas lineares, que são os assuntos abordados no trabalho. Esse software tem grandes recursos e é capaz de realizar a maior parte dos cálculos matemáticos.

O MAXIMA é um sistema de computação algébrica baseado em uma versão de 1982 do Macsyma. Ele é escrito em Common Lisp e funciona em todas as plataformas POSIX, tais como Mac OS X, Unix, BSD, e GNU/Linux, bem como no Microsoft Windows. Trata-se de um software livre cuja licença é a GNU (General Public License).

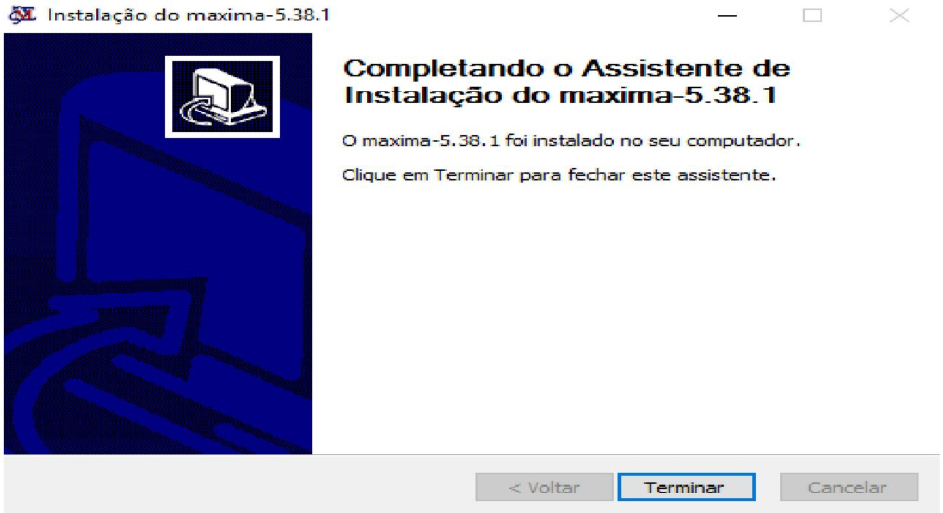
4.1 Download e instalação

A versão do MAXIMA utilizada neste tutorial é a versão 5.38.1 para Windows e seu download pode ser feito através do seguinte link: http://maxima.sourceforge.net/download.html

Após o download ter sido concluído dê um duplo clique no arquivo baixado, e você vai se deparar com uma tela do tipo:



Continue atendendo as recomendações do programa e não se esqueça de verificar o local de instalação. Ao finalizar a instalação a seguinte mensagem surgirá determinando que a instalação foi concluída com êxito:



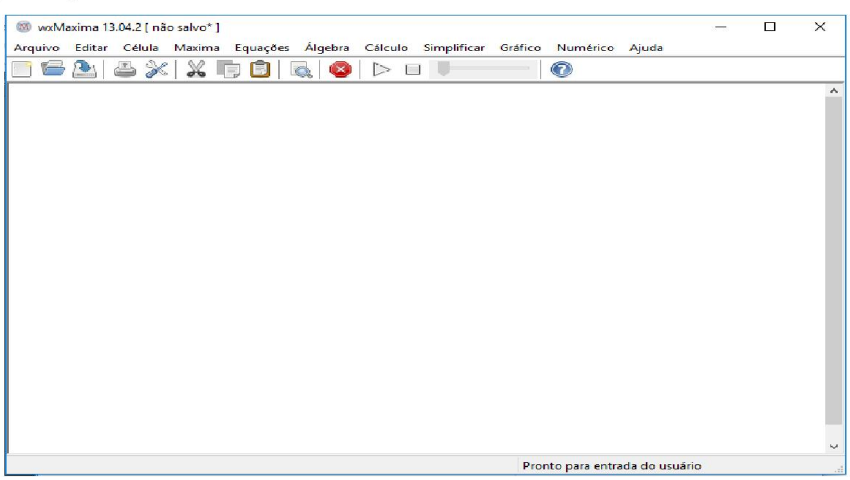
Clicando em terminar, o MAXIMA e um arquivo contendo informações sobre ele serão abertos. Após o término da instalação você poderá acessar o MAXIMA a qualquer hora a partir do menu Iniciar.

4.2 Iniciando o MAXIMA

Iniciando o trabalho com operações você sempre digitará a operação à frente do '(%ix)', esse 'i' no meio significa INPUT(representada sempre em azul no MAXIMA), portanto sempre será entrada de informações. Já a saída do programa será representada por '(%ox)', com 'o' sendo OUTPUT(representada sempre em preto no MAXIMA).

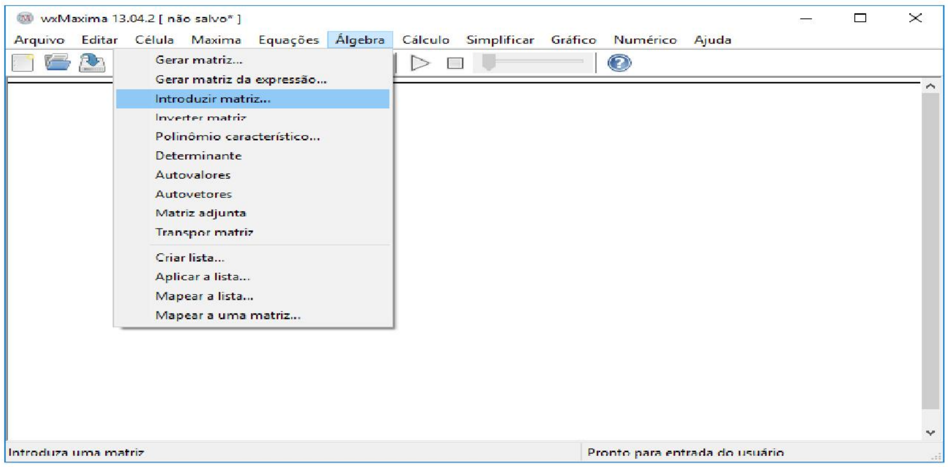
As operações básicas são representadas por: Adição (+), Subtração (-), Multiplicação (*), Divisão (/), Exponenciação(^).

Tela principal do MAXIMA:

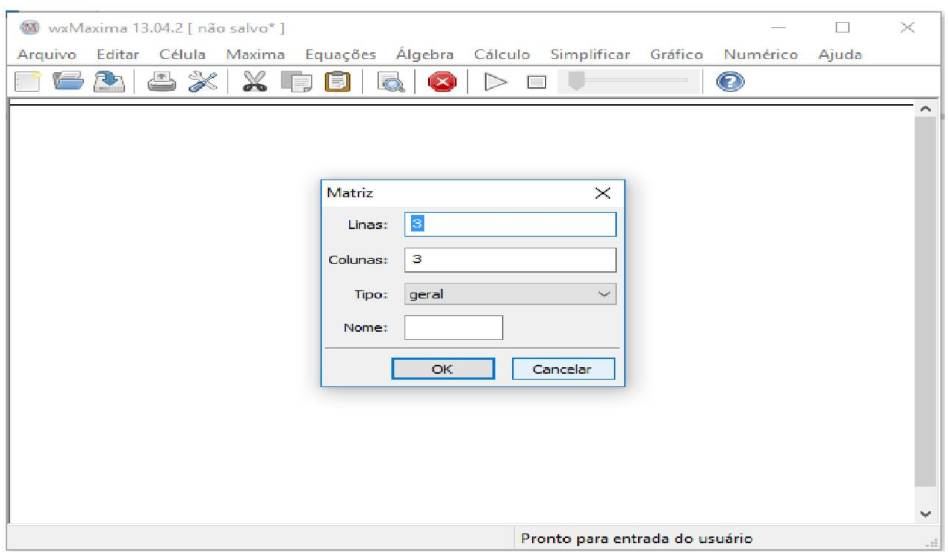


4.3 Utilizando o MAXIMA para criar matrizes

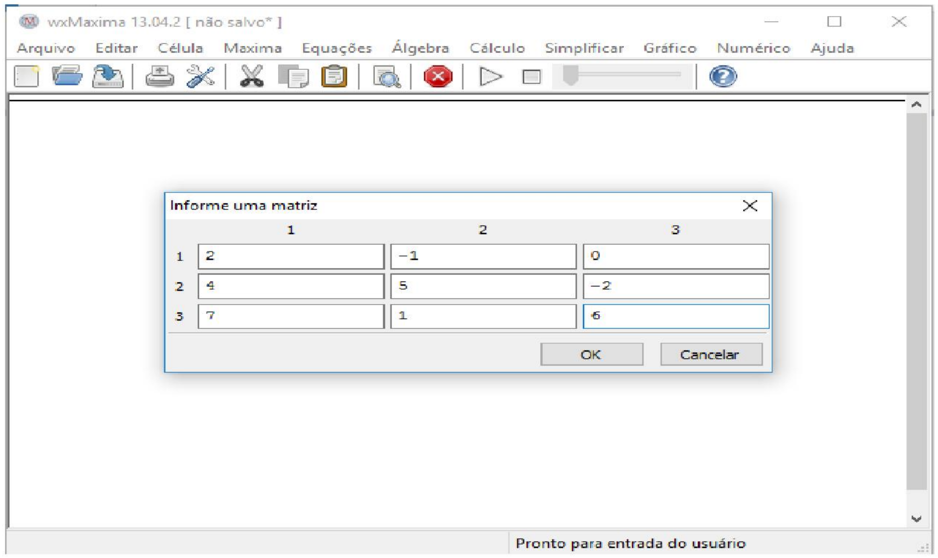
Passo 1: para criar uma matriz utilizando o aplicativo MAXIMA, clique na aba Álgebra e, em seguida, introduzir matriz e siga os passos das figuras abaixo.



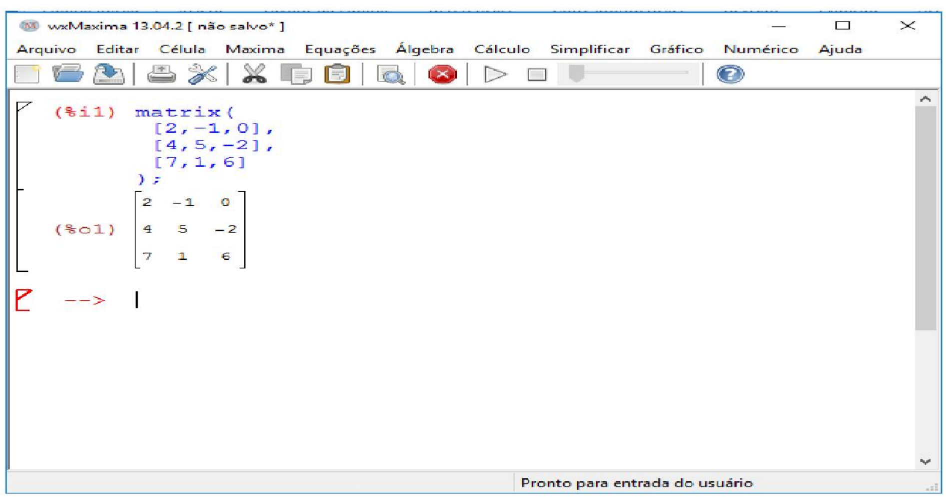
Passo 2: após o primeiro passo, aparecerá uma janela como a figura abaixo, na qual deve ser digitado a quantidade de linhas e colunas da matriz, tipo de matriz (geral, diagonal, simétrica ou antissimétrica) e o nome da matriz (indicar uma letra) e dado OK.



Passo 3: aparecerá a janela a seguir onde serão digitadas as entradas da matriz.



Passo 4: após clicar em OK a matriz será gerada.



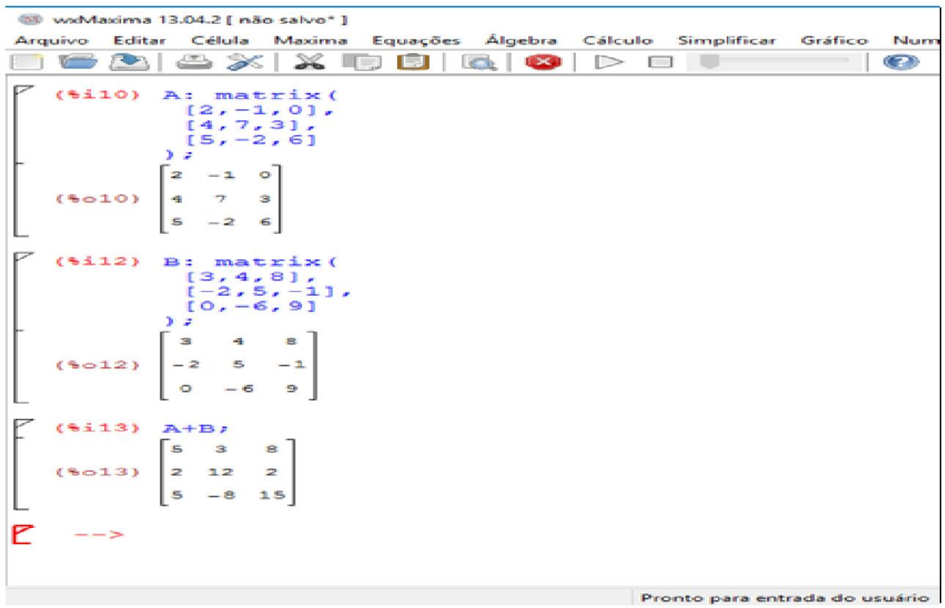
4.4 Operações básicas com matrizes

Através do MAXIMA é possível efetuar as operações básicas (adição, subtração, multiplicação, cálculo da inversa e exponenciação) com matrizes. Por exemplo, se A e B são duas matrizes de mesma ordem, A+B, é a soma das duas matrizes.

Exemplo: Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 3 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 9 \end{bmatrix}$. Calcule:

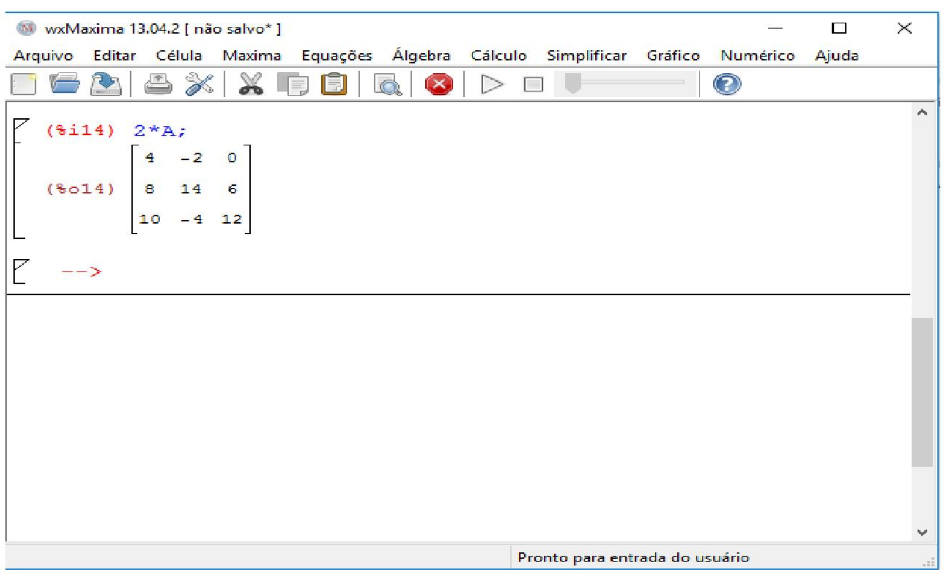
a) $A + B$:

Digite $A + B$ e em seguida pressione $(shift + enter)$;



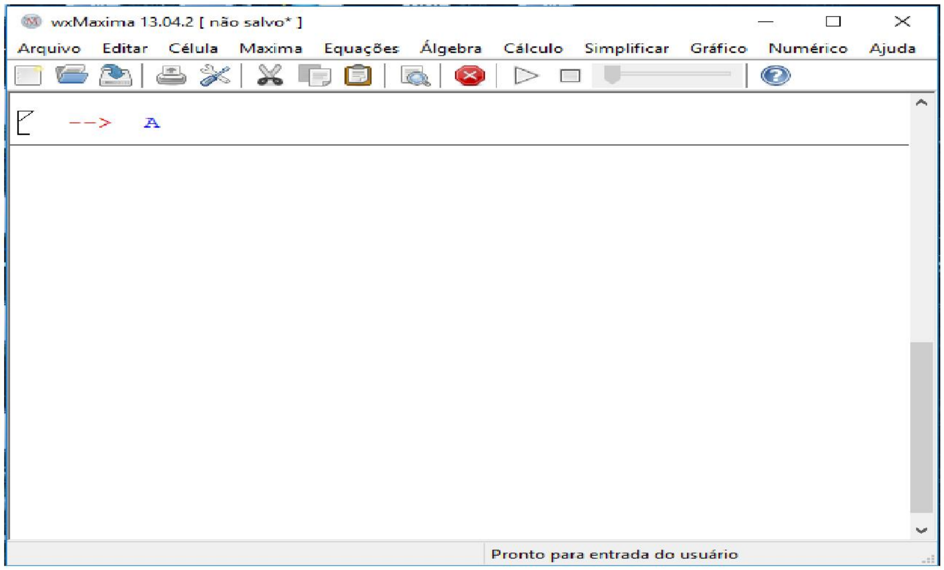
b) $2A$:

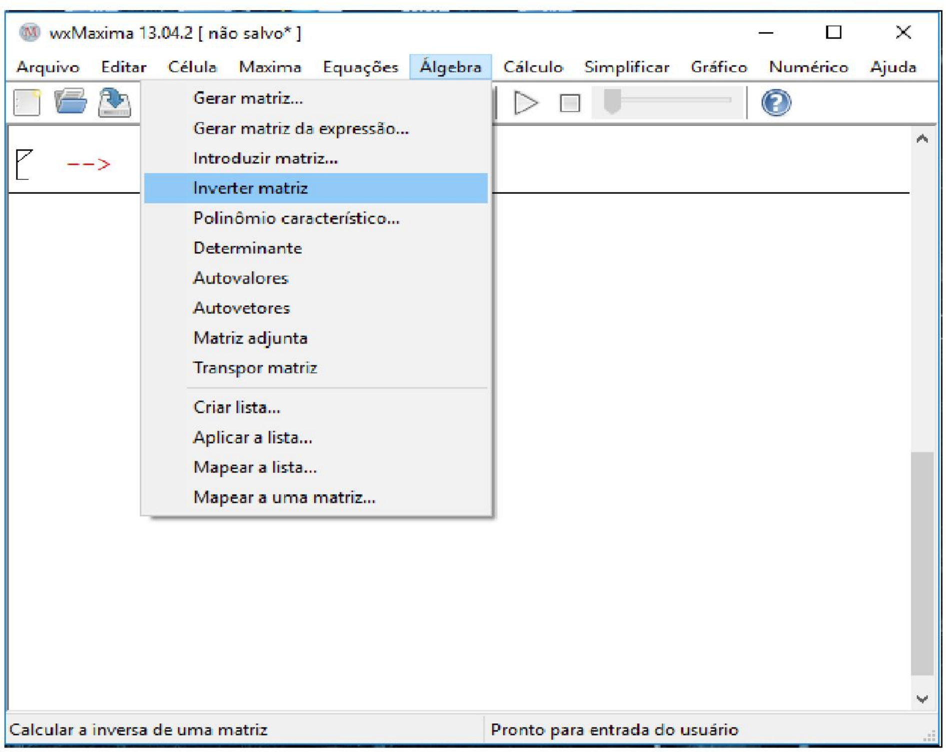
Digite $2 * A$ e em seguida pressione $(shift + enter)$;

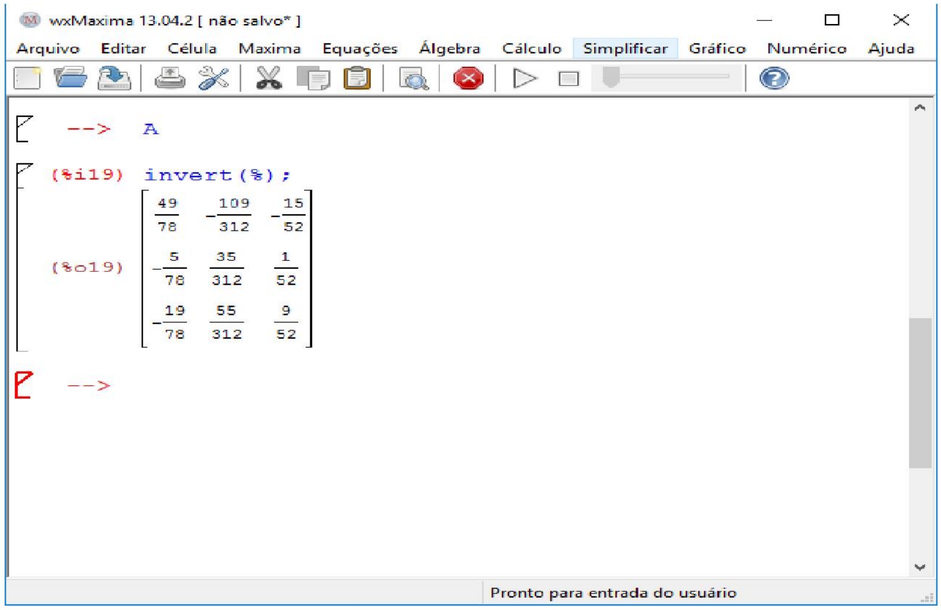


c) A^{-1}(inversa de A):

Digite A, em seguida vá à aba $\grave{A}lgebra\ e\ inverter\ matriz$, em seguida aparecerá, na tela, a matriz inversa de $A(A^{-1})$.







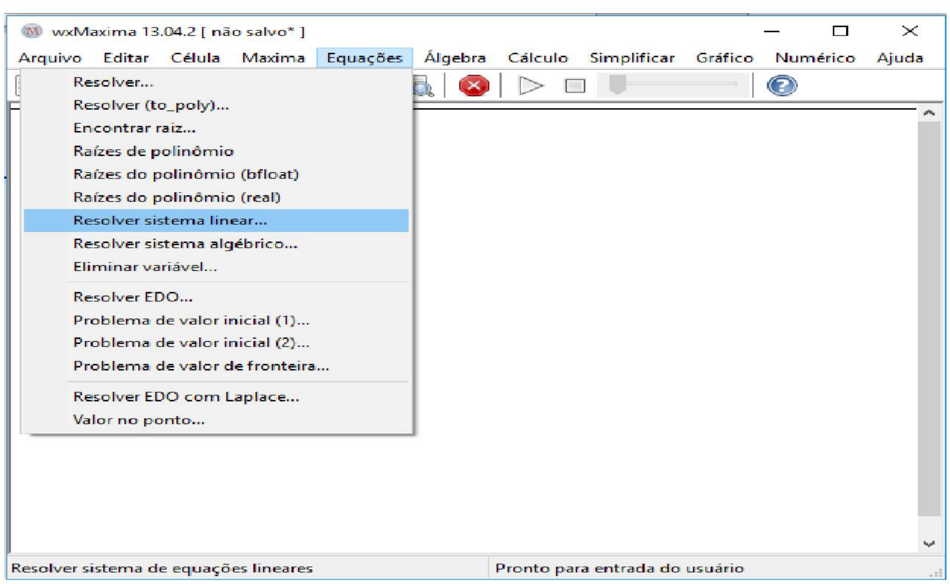
4.5 Resolução de sistemas lineares através do MAXIMA

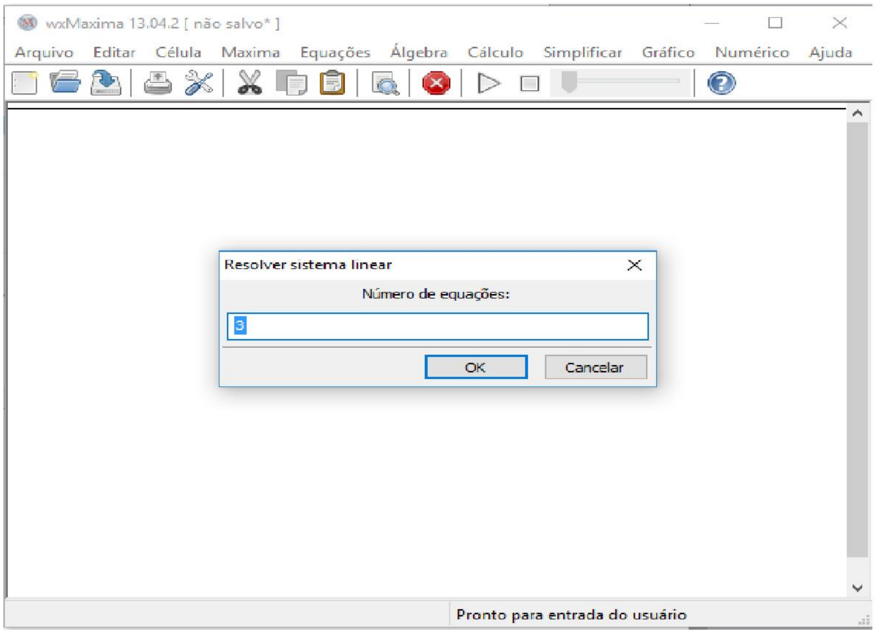
Exemplo: Determinar o conjunto solução do sistema de equações lineares a seguir:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 8 \\ 2x - 7y - z = -9 \\ x + 2y - z = -7 \end{cases}$$

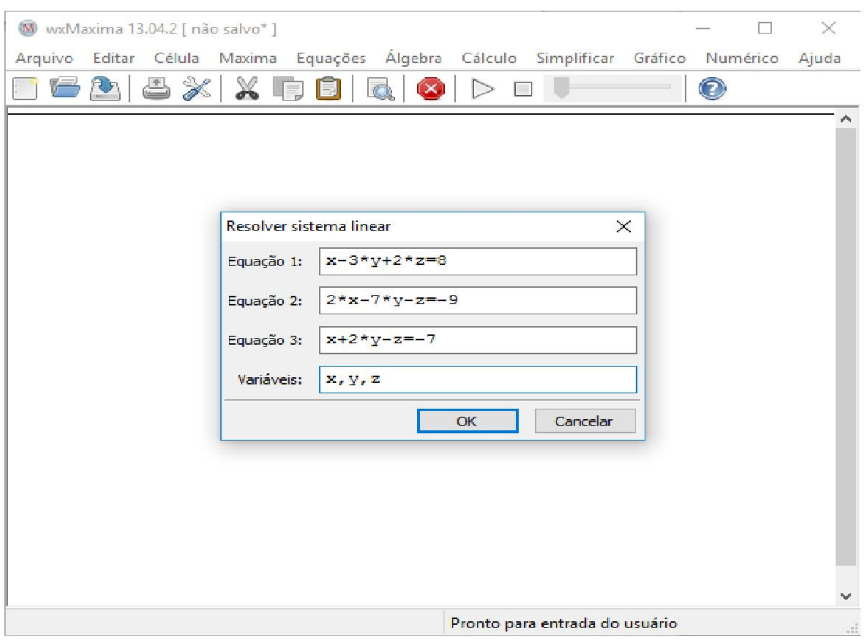
Resolução:

Passo 1: Escolha a aba $equações$ e em seguida $resolver\ sistema\ linear$, em seguida, escolha o número de equações e clique em ok.

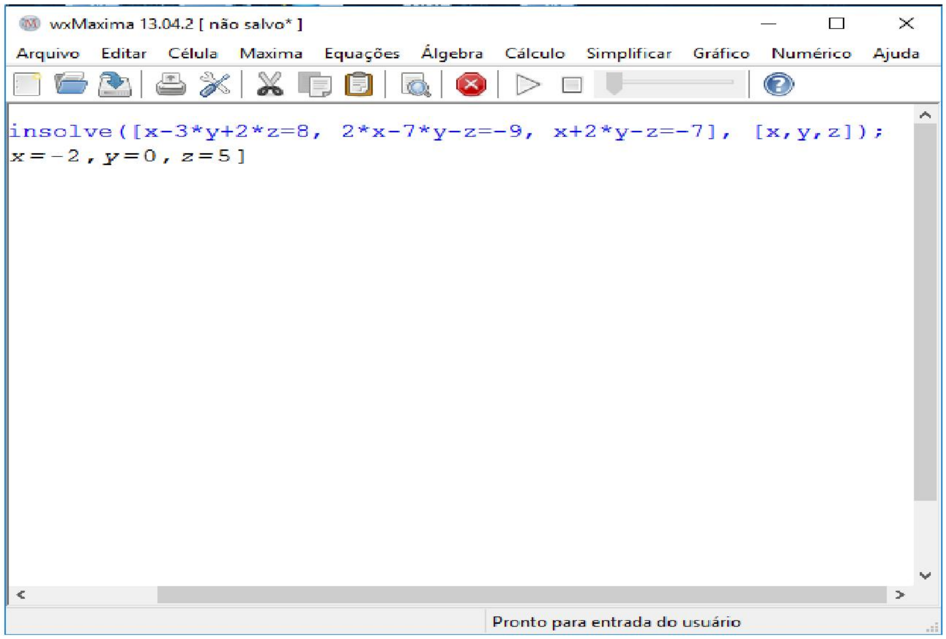




Passo 2: Na tela seguinte digite as equações $\begin{cases} x - 3y + 2z = 8 \\ 2x - 7y - z = -9 \\ x + 2y - z = -7 \end{cases}$ nos campos destinados, além das variáveis contidas nas equações e clique em $\boldsymbol{ok}$;



Passo 3: Na tela seguinte será apresentado os valores de x, y e z, respectivamente, que formam a única solução do sistema linear.



Como podemos ver, o uso do MAXIMA tem várias aplicações no dia a dia. Tal programa pode ser considerado como instrumento de excelente auxílio no processo de aprendizagem. Por isso, o domínio do uso de um software computacional, como o MAXIMA, é muito importante quando nos confrontamos com problemas que, resolvidos manualmente, não são de fácil resolução.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A álgebra linear tem um vasto campo de aplicabilidade e atualmente a contextualização da matemática vem sendo bastante enfocada, procurando com isso, proporcionar a todos a construção do seu respectivo intelecto. A matemática está cada vez mais latente em nossas vidas, por causa de sua presença em diversos ramos da ciência.

Esperamos com este trabalho ter, de uma forma bem clara, apresentado os temas da álgebra linear: matriz, determinante e sistemas lineares. O desenvolvimento do trabalho exposto permitiu um estudo bibliográfico aprofundado desses temas e verificar sua aplicação na economia, mais especificamente nos modelos econômicos de Leontief, que são utilizados para analisar a interdependência das atividades econômicas inter-relacionadas através de equações lineares.

As discussões apresentadas neste trabalho têm a intenção de mostrar a importância dos temas da álgebra linear e suas aplicações. A nossa expectativa é que elas sirvam para o aprendizado desses conhecimentos da matemática, já que é uma amostra efetiva de aplicação dos conteúdos abordados.

Desta forma, procuramos evidenciar apenas os cálculos algébricos do conteúdo abordado, sem entrar em detalhes sobre a questão econômica. E, para fazer os cálculos, foi utilizado um software livre, MAXIMA, que permitiu considerarmos matrizes quadradas de ordem grande e despertou o interesse para o uso, em sala de aula, de uma ferramenta computacional.

Por fim, o uso das tecnologias, quando acertadamente usadas pelo professor, podem propiciar ao aluno a construção e a procura pelo conhecimento, com mais clareza, transformando o estudo em um ato prazeroso e interativo.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

ELEMENTOS: Revista de ensino e pesquisa em classes operacionais e propriedades de estruturas algébricas. Rio Branco: Edufac, 2014.

IEZZI, Gelson.; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas**. 8. ed. São Paulo: Atual, 1977, vol. 4.

LEONTIEF, Wassily. **A economia do Insumo-Produto**. 3. Ed. São Paulo: Nova Cultural, 1988. (Coleção Os Economistas).