UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PROPOSTA DE ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO PARA O ESTUDO DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU UM E DOIS

VALDEMIR DOS SANTOS BATISTA

Cruz das Almas-Bahia Julho 2017

PROPOSTA DE ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO PARA O ESTUDO DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU UM E DOIS

VALDEMIR DOS SANTOS BATISTA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. MSc.Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento

Cruz das Almas-Bahia

Julho 2017

FICHA CATALOGRÁFICA

B333p BATISTA, Valdemir dos Santos

Proposta de abordagem no ensino médio para o estudo das funções polinomiais de grau um e dois/ Valdemir dos Santos Batista.__ Cruz das Almas, BA, 2017.

66 f.: il.

Orientador: Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

1. Matemática - Funções - Polinômios. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Ensino Médio - Análise. I. Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II. Título.

CDD: 510.07

Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas – UFRB.

PROPOSTA DE ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO PARA O ESTUDO DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU UM E DOIS

VALDEMIR DOS SANTOS BATISTA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 06 de Julho de 2017.

Banca examinadora:

Professor(a) MSc. Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento
UFRB (Orientador(a))

Katia Silene F Lima Rocha

Professor(a) Drª. Katia Silene Ferreira Lima Rocha
UFRB

Adriano P. Cattai

Professor(a) MSc. Adriano Pedreira Cattai
UNEB

À minha família.

Agradecimentos

À Deus por ser o criador de todo o universo e ter me dado a oportunidade de realizar mais um sonho profissional que era concluir o mestrado.

A toda minha família que contribuiu direta ou indiretamente para meu sucesso. Em especial, a minha querida mãe dona Margarida Maria dos Santos Batista, aos meus queridos irmãos Valmir, Valnice, Vilma, Vanilda e Valdir que apoiaram em todos os meus projetos de vida e por entenderem a minha ausência nas reuniões da família.

Aos meus queridos amigos-irmãos Irlene Santos, Daniela Santos Melo, Patrícia Cerqueira, Roquecy, Benício Fagundes, Bruno Silva, Cléber, Carlos Alison, Janio Paim, José Carlos Júnior, Agnaldo Lima, Geovane Silva, Adilza Barros, Paulo Barros, Ozana Sacramento, Núbia Sacramento, Graça Silva, Maria de Fátima Marinho e Jaira Caldas que foram essenciais para que eu conseguisse concluir esse mestrado. Através do incentivo, estudo e muita colaboração à eles um muito obrigado!

À Sociedade Brasileira da Matemática pela coordenação de um mestrado em rede nacional, possibilitando a socialização dos saberes de forma uniforme e a CAPES pelo incentivo financeiro fundamental ao custeio das despesas ao longo do curso.

À Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, em especial à todo o corpo docente do PROFMAT que possibilitou o aprimoramento e a valorização do conhecimento matemático inerentes à educação de qualidade. Ao coordenador do curso, professor Juarez Azevedo que muito colaborou nessa jornada.

Ao orientador professor Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento, da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, pelo profissionalismo, dedicação, pelas críticas construtivas, respeito e amizade. Muito obrigado!

"Sem a curiosidade que me move, que me inquieta,que me insere na busca, não aprendo nem ensino."

Paulo Freire

Resumo

Esta dissertação aborda uma proposta de ensino da função polinomial de grau um e dois destinado ao curso do primeiro ano do Ensino Médio. A teoria é desenvolvida a partir dos conceitos inicias da geometria analítica e são propostas atividades didáticas. Neste trabalho, não é considerada a ordem que os tópicos são apresentados nos livros didáticos e em sala de aula. Mas, tem o propósito de extinguir ou diminuir os questionamentos dos alunos a cerca destes conteúdos, desmistificando que a aprendizagem da Matemática não é acessível para poucos.

Palavras-chave: Matemática; Funções; Polinômios; Ensino Médio; Estudo e ensino; Análise.

Abstract

This dissertation approaches a proposal of teaching the polynomial function of degree one and two destined to the course of the first year of the High School. The theory is developed from the initial concepts of analytical geometry and didactic activities are proposed. In this work, the order that topics are presented in textbooks and in the classroom is not considered. But, it has the purpose of extinguishing or diminishing the students' questions about these contents, demystifying that the learning of Mathematics is not accessible for a few.

Keywords: Mathematic; Functions; Polynomial; High school; Study and teaching; Analisys.

Sumário

Lista de ilustrações

Introdução

Com o surgimento de novas tecnologias, cada vez mais desafios são feitos ao professor no ensino e aprendizagem da Matemática, como uma proposição motivadora.

Propomos, nesse trabalho, a abordagem de determinados conteúdos da Matemática, vistos no ensino médio, com o cuidado para que os discentes os entendam perfeitamente, motivando-os fazendo-os a interessarem mais pela Matemática. Neste trabalho, não será respeitada, necessariamente, a ordem estrutural de apresentação proposta neste nível de ensino.

Com o objetivo de provocar uma discussão, limita-se a proposta de estudar alguns tópicos do primeiro ano do ensino médio, explicando algumas definições, elementos e gráficos de funções polinomial de grau um e de grau dois que não são devidamente explorados em alguns livros didáticos.

Pessoas que não sabem a matemática básica podem passar por situações adversas como então ser enganadas facilmente ao receber o troco de um cobrador, após ter pago alguns bilhetes de acesso ao ônibus ou nas taxas de impostos aplicadas por instituições financeiras. Será difícil tomar uma decisão ao querer parcelar uma dívida comercial que entra juros e multas tendo que escolher qual a melhor opção de negócio nesta operação financeira. Estes são alguns exemplos entre vários em que a Matemática está presente como um auxílio na tomada de decisão e como uma ferramenta útil em diversas situações.

O trabalho está organizado em quatro capítulos: os conceitos iniciais, as funções polinomiais de grau um e dois, aplicações de sequencias didáticas e considerações finais.

No capítulo um, apresentaremos os conceitos básicos da geometria analítica e demonstrações relativas aos elementos que serão trabalhados para a função polinomial de grau um e de grau dois. Além desses conceitos, estaremos dando ênfase aos teoremas, corolários e proposições sobre limites e derivadas de funções de uma variável real no sentido de aprofundamento no estudo de funções.

Os estudos sobre limites e derivadas são direcionados para os professores do ensino superior como uma breve revisão de literatura e aprofundamento nos estudos sobre funções.

No capítulo dois, temos um estudo sobre às funções polinomiais de grau um e de grau dois com o uso de definições e demonstrações de teoremas.

No capítulo três, apresentamos algumas propostas de sequências didáticas relativas aos estudos realizados no capítulo dois sobre funções polinomiais de grau um e de grau dois com o objetivo de proporcionar ao aluno mais uma oportunidade para fixar os assuntos.

No capítulo quatro, traremos as conclusões e às considerações finais deste trabalho e propostas de ações futuras.

1

Embasamento Teórico

1.1 Conceitos iniciais

Traremos aqui alguns conceitos elementares da geometria analítica que tomaremos como base para desenvolvermos a teoria sobre as funções polinomiais de grau um e dois. Não partiremos de axiomas, mas de definições elementares para que os alunos tenham mais facilidade de entender outros conteúdos mais elaborados e estes conceitos mais elementares chamamos aqui de conceitos iniciais. Estudamos os trabalhos de alguns teóricos que em suas teses veem contribuir para a compreensão de como se dá a formação do conhecimento matemático no ensino médio.

Sobre o problema da formação inicial dos conceitos matemáticos devem serem considerados como objetivo principal do ensino e de aprendizagem:

> a) Contextualização: consideração no trabalho pedagógico com a matemática dos aportes socioculturais do alunado para se considerar na escola situações vivenciadas pelos alunos fora dela, o que se poderia denominar de matemática cultural, isto é, as diversas formas de matematização desenvolvidas pelos diversos grupos sociais, de modo a permitir à interação entre essas duas formas de pensamento matemático. b) Historização: mostrar aos alunos que a forma como as ideias matemáticas evoluem e se complementam formando um todo orgânico e flexível, é pressuposto básico para se compreender a matemática como um processo de construção. c) Enredamento: organização das ideias matemáticas em articulação com as diversas áreas do conhecimento posto que elas não surgem do nada, pelo contrário, muitas ideias matemáticas nem surgiram em contextos exclusivamente matemáticos (MIGUEL, 2011).

Concordo com (MIGUEL, 2011) no seu posicionamento quanto a explicação de que um assunto deve apresentar uma contextualização que pode ser apresentada através de uma situação problema e que por sua vez deve ser o mais próximo possível da realidade do aluno. A historização também é uma possibilidade para o professor de matemática iniciar o estudo e apresentar como se deu o interesse dos matemáticos por tal assunto na época. É importante também apresentar aos educandos as áreas do conhecimento que utilizam estes assuntos matemáticos, pois os alunos não terão a falsa ideia de que nunca aplicarão aqueles conhecimentos em outras disciplinas ou em algum problema que podem vir a existir na sua vida.

Dessa maneira, é importante que o professor apresente a contextualização, a parte histórica e sua aplicação, pois o que a matemática faz é escrever os diversos problemas em forma de códigos e o que se espera com relação aos conceitos matemáticos é que:

> "o aluno deve perceber a Matemática como um sistema de códigos e regras que a torna uma linguagem de comunicação com ideias que permitem modelar a realidade e interpretá-la" (BRASIL, 2017).

É esperado que o aluno consiga fazer a transposição do que é estudado em sala de aula para a sua vida fora do ambiente escolar. Porém, também deve ser dado ao aluno o caminho e deixá-lo pensar para que ele obtenha êxito em sua trajetória, passar a associar os conceitos estudados com as aplicações no seu dia a dia, passando assim a ganhar sentido o estudo da matemática na sala de aula. Kisomoto corobora com esta ideia no posicionamento:

> O mais importante no ensino de conceitos iniciais é ajudar o educando a passar progressivamente do pensamento concreto à utilização de modos de pensamento conceptualmente mais adequados. É ocioso, porém, tentar fazê-lo pela apresentação de explicações formais, baseadas numa lógica muito distante da maneira de pensar do educando e, para ela, estéril em suas implicações (KISHIMOTO, 1994).

De acordo com Kisomoto, podemos perceber que o uso dos conhecimentos elementares mais comuns ao dia a dia dos alunos, possibilitará a formação dos conhecimentos sobre funções polinomiais de grau um e de grau dois. O aluno poderá construir conhecimentos mais elaborados, mostrando a aprendizagem adquirida. Uma das maneiras de perceber que o aluno sedimentou a aprendizagem é através da percepção de que a solução de um determinado problema pode ser resolvido através da aplicação do conhecimento matemático recentemente adquirido.

As noções primitivas da Geometria são o modo como compreendemos os elementos matemáticos que servem de embasamento para a construção dos conhecimentos geométricos. Esses elementos são o ponto, a reta, o plano e o espaço. Não cabe a este trabalho explicar cada um desses elementos.

Um ponto P é representado como um par ordenado (x, y) onde $x, y \in \mathbb{R}$.

O plano cartesiano é um sistema de referências criado pelo filósofo e matemático francês, René Descartes com o intuito de determinar a localização de um ponto no plano $\mathbb{R}^2$ e é constituído por duas retas de números reais perpendiculares Ox (eixo da abscissas) e Oy (eixo das ordenadas) que se cruzam num ponto O (origem).

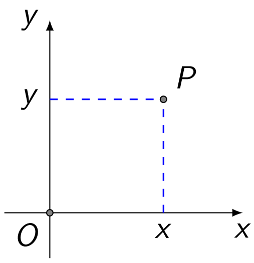


Figura 1 – Representação do ponto P no plano cartesiano

O sistema de eixos cartesianos divide o plano em quatro regiões denominadas quadrantes, da seguinte forma:

1º quadrante: conjunto dos pontos (x, y) tais que $x > 0$ e $y > 0$;

2º quadrante: conjunto dos pontos (x, y) tais que $x < 0$ e $y > 0$;

3º quadrante: conjunto dos pontos (x, y) tais que $x < 0$ e $y < 0$;

4º quadrante: conjunto dos pontos (x, y) tais que $x > 0$ e $y < 0$;

A parte ou porção da reta limitada por dois pontos é chamado de segmento de reta e a distância entre dois pontos do plano é o comprimento do segmento de reta que une esses pontos. Se os pontos são coincidentes, claramente, a distancia entre eles é zero.

Considere dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ do plano cartesiano e seja $C(x_B, y_A)$ (ver Figura 2). Observe que o triângulo ABC é retângulo em C. Pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$d(A, B) = |AB| = \sqrt{(|AC|^2 + |BC|^2)} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, \quad (1)$$

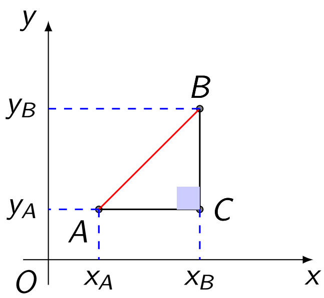


Figura 2 – Distância entre dois pontos no plano cartesiano

a fórmula para obter a distância entre os pontos A e B.

Assim, quando $A \neq B$, a distância entre os pontos A e B é um número real positivo e não nulo e, quando $A = B$, é igual a zero.

Considere, agora, uma reta r, dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ de r. Seja θ (inclinação da reta) o ângulo formado por r e o eixo das abscissas Ox.

Seja $C(x_B, y_A)$. Dessa forma, o triângulo com vértices em A, B e C é retângulo (ver Figura 3) em C. Além disso, temos que:

$$\tan(\theta) = \frac{|BC|}{|CA|} = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)}. \tag{2}$$

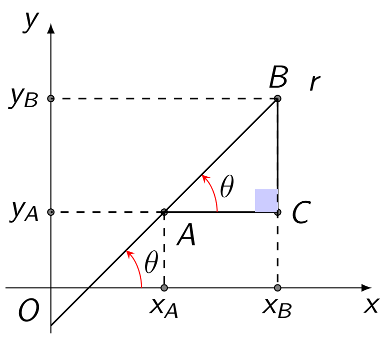


Figura 3 – Inclinação da reta

Fazendo $\tan(\theta) = m$ e $y_A - mx_A = n$, podemos reescrever (2) como

$$y = mx + n, \tag{3}$$

a equação reduzida da reta. O coeficiente m de x e o termo independente n são denominados, respectivamente, os coeficientes angular e linear da reta.

A reta que passa pela origem e tem inclinação igual a $45°$ possui equação $y = x$ ($\tan(45°) = 1$ e $n = 0$) e, por dividir os quadrantes ímpares ao meio, é chamada de primeira bissetriz (ver Figura 4). Já a reta que passa pela origem e possui inclinação igual a $135°$ possui equação $y = -x$ ($\tan(135°) = -1$ e $n = 0$) e, por dividir os quadrantes pares ao meio, é chamada de segunda bissetriz (ver Figura 5).

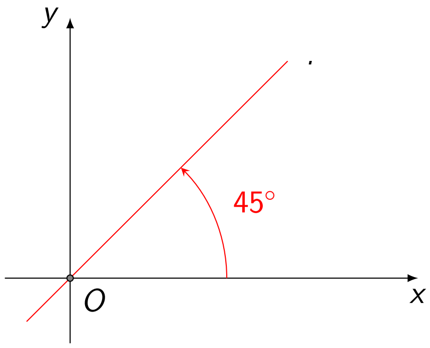


Figura 4 – Reta de equação $y = x$.

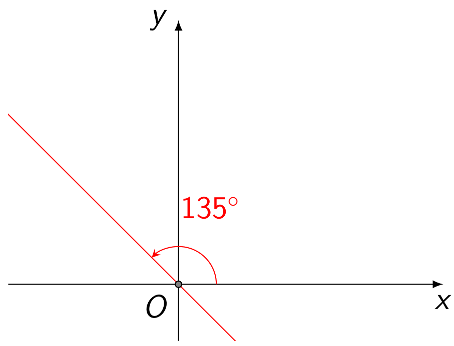


Figura 5 – Reta de equação $y = -x$.

Quando uma reta possui inclinação zero ($m = \tan(0°) = 0$) e tem coeficiente linear diferente de zero ($n \neq 0$), seu gráfico é o de uma reta paralela ao eixo das abscissas (ver Figura 6) e uma equação sua é $y = n$.

Quando a reta r é paralela ao eixo Oy, ou seja, tiver uma inclinação igual a $90°$ o seu coeficiente angular não existe, uma vez que $\tan(\theta)$ não está defina para $\theta = 90°$ (ver Figura 7). Essas retas possuem equação $x = x_0$, em que x_0 é o ponto de interseção da reta com o eixo x.

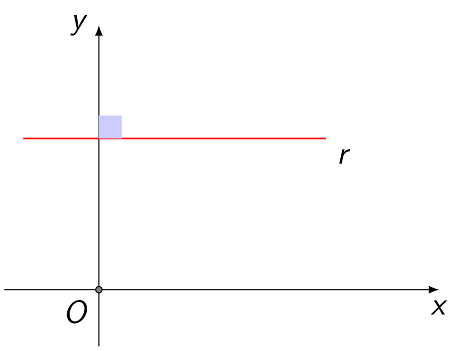


Figura 6 – Reta com inclinação nula

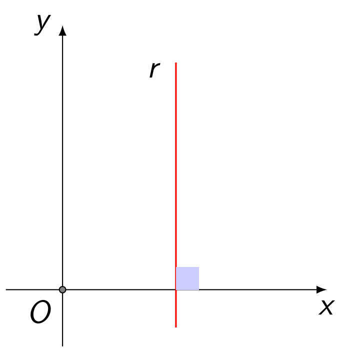


Figura 7 – Reta com inclinação de $90°$

1.2 Um breve estudo das funções reais de uma variável

Nesta seção, abordaremos alguns assuntos, vistos na teoria do cálculo diferencial para as funções reais de uma variável real e que estão relacionados com as discussões feitas nesta proposta para o estudo das funções polinomiais de grau um e dois no ensino médio.

Definição 1. A relação que para cada elemento x de um conjunto A associa a apenas um elemento y do conjunto B chamamos de função. Simbolicamente, temos:

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & y = f(x). \end{array}$$

O conjunto A é denominado domínio ($\mathrm{Dom}(f)$) e B, o contradomínio ($\mathrm{CD}(f)$) da função f. Cada elemento y de B que possui correspondente em A é chamado de imagem de x pela função f. O conjunto formado por todas as imagens é denominado imagem da função f ($\mathrm{Im}(f)$).

Definição 2. O gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ do plano cartesiano.

O esboço do gráfico de funções ajuda a compreender e simplificar diversos problemas e, geralmente, se necessita dos seguintes elementos: (a) As interseções com os eixos coordenados (coordenadas destes pontos) (b) Os intervalos monótonos; (c) as coordenadas dos extremantes (caso existam); (d) a determinação dos intervalos de concavidades positiva e negativa; (e) as coordenadas dos pontos de inflexão (caso existam).

Obtém-se os pontos de interseção (caso existam) do gráfico de uma função f com: o eixo das ordenadas (Oy) ao substituirmos x por 0 na expressão $y = f(x)$, ou seja, os pontos $(0, f(0))$; o eixo das abscissas (Ox) ao encontramos a solução da equação $f(x) = 0$, ou seja, os pontos $(x, 0)$. Os itens supre citados serão tratados de forma conveniente. Por hora, trataremos de uma outra propriedade das funções que ajuda no esboço do seu gráfico: a sua classificação quanto a paridade.

Definição 3. Dizemos que f é uma função real par se $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Em outras palavras, f é par se os elementos simétricos do domínio possuem imagens iguais.

A função $f(x) = x^2 - 1$ é um exemplo de função par. De fato,

$$f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x).$$

De acordo com a Definição 3, o gráfico de uma função par possui simetria em relação ao eixo Oy (Ver Figura 8).

Definição 4. Dizemos que f é uma função real ímpar se $f(-x) = -f(x), \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Em outras palavras, f é ímpar se os elementos simétricos do domínio possuem imagens simétricas.

A função $f(x) = x^3$ é ímpar, pois:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

De acordo com a Definição 4, o gráfico de uma função ímpar possui simetria em relação a origem (Ver Figura 9).

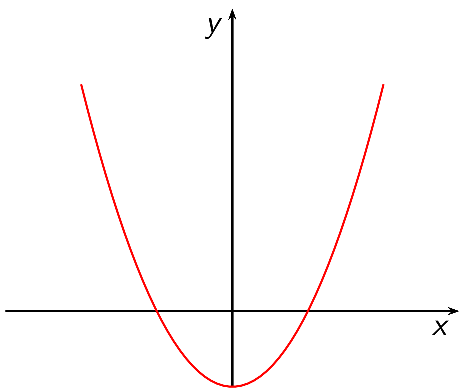


Figura 8 – Gráfico de uma função par

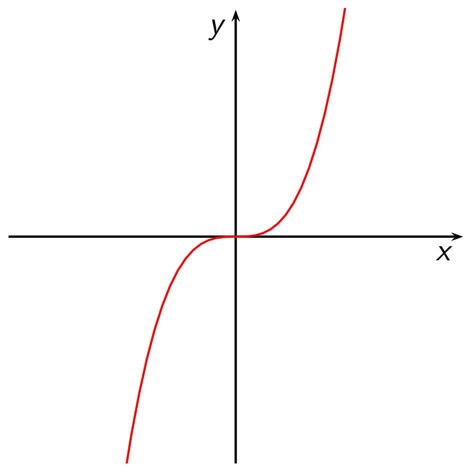


Figura 9 – Gráfico de uma função ímpar

Se uma função não satisfaz as definições 3 e 4, dizemos que ela não é par e nem ímpar.

Uma função não necessariamente par ou ímpar pode ser decomposta como uma adição de uma função par e outra ímpar. De fato, seja f uma função, então

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(x)+f(x)}{2} \\ &= \frac{f(x)+f(-x)-f(-x)+f(x)}{2} \\ &= \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{aligned}$$

Chamando

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2} = g(x) \text{ e } \frac{f(x)-f(-x)}{2} = h(x),$$

temos que, se $g(x)$ é par, $h(x)$ é ímpar e vice-versa. Observe que se $f(x)$ é uma função par, $g(x) = f(x)$ e $h(x) = 0$ e que se $f(x)$ é uma função ímpar, teremos $g(x) = 0$ e $h(x) = f(x)$. Além disso, a paridade das funções é um conceito relacionado à simetria dos seus gráficos e o seu conhecimento facilita o seu esboço.

Definição 5. Consideremos um intervalo I, tal que $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é:

- crescente em I se $\forall\ x_1 < x_2 \in I$, então $f(x_1) < f(x_2)$;
- decrescente em I se $\forall\ x_1 < x_2 \in I$, então $f(x_1) > f(x_2)$;
- não-decrescente em I se $x_1, x_2 \in I,\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$;
- não-crescente em I se $\forall x_1, x_2 \in I,\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$.

Definição 6. Dizemos que uma função $f(x)$ é monótona, se a mesma preserva à relação de ordem no seu domínio, ou seja, se ela é crescente em todo o seu domínio ou então, decrescente em todo o seu domínio.

A função $f(x) = 2x + 3$ é crescente. De fato, dados $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f)$, com $x_1 < x_2$, temos que $2x_1 < 2x_2$ e, por sua vez, $2x_1 + 3 < 2x_2 + 3$.

Definição 7. Dizemos que um ponto $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ é um ponto de máximo local ou relativo, se pontos x, próximos de x_0, possuem imagens menores que $f(x_0)$. É de máximo global ou absoluto, se $f(x) < f(x_0), \forall\ x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{x_0\}$.

Definição 8. Dizemos que um ponto $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ é um ponto de mínimo local ou relativo, se pontos x, próximos de x_0, possuem imagens maiores que $f(x_0)$. É de mínimo global ou absoluto, se $f(x) > f(x_0), \forall\ x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{x_0\}$.

Se $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ é um ponto de máximo ou mínimo local (global) dizemos que ele é uma ponto extremante local (global).

Definição 9. Considere $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Seja $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a reta tangente ao gráfico de f em um ponto $P(x_0, f(x_0))$. Claramente, tem-se que $f(x_0) = g(x_0)$. Dizemos que o gráfico de f possui:

1. concavidade positiva em I (concavidade voltada para cima), se $\forall x_0 \in I$, tivermos
$$f(x) > g(x), \forall\ x \in I \setminus \{x_0\};$$
2. concavidade negativa em I (concavidade voltada para baixo), se $\forall x_0 \in I$, tivermos
$$f(x) < g(x), \forall\ x \in I \setminus \{x_0\}.$$

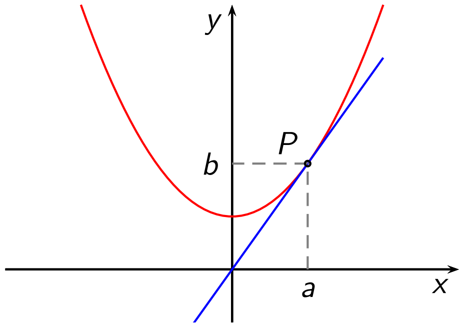


Figura 10 – Concavidade positiva em $\mathbb{R}$

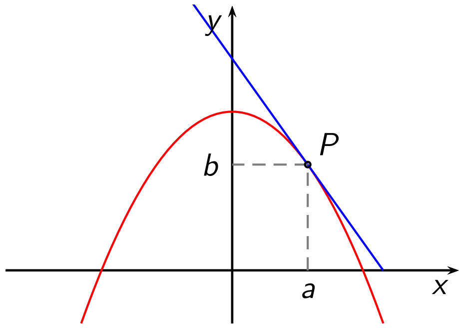


Figura 11 – Concavidade negativa em $\mathbb{R}$

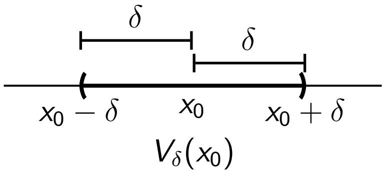
Em outras palavras, dizemos que f é côncava positiva (negativa) em I, se na vizinhança de qualquer ponto tivermos que sua imagem é maior (menor) do que a imagem pela reta tangente ao gráfico de f neste ponto.

O limite de uma função real de uma variável real é utilizado para observar o comportamento da imagem dessa função definida na vizinhança de um ponto (não necessariamente do domínio da função). A partir desse conceito, é possível definir a derivada de uma função real e a integral definida, outros dois conceitos cruciais no estudo do cálculo diferencial e integral.

Definição 10. Seja x_0 um número real. Chama-se *vizinhança numérica* de x_0, ou simplesmente *vizinhança* de x_0, a todo intervalo aberto V_{x_0} que contém $\{x_0\}$. Se x_0 é o centro da vizinhança, então diz-se que a vizinhança de x_0 é *simétrica*.

A distância δ de x_0 a qualquer um dos extremos da vizinhança simétrica é chamada de *raio da vizinhança*.

Denotaremos por $V(x_0;\delta)$ ou $V_\delta(x_0)$ uma vizinhança simétrica de centro em x_0 e de raio δ. Assim, $V_\delta(x_0) =]x_0-\delta, x_0+\delta[$.



Assim, para determinar o conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ que estão próximos de 2, com distância inferior a $0,1$, escrevemos:

$$|x-2| < 0,1 \Rightarrow -0,1 < x-2 < 0,1 \Rightarrow 1,9 < x < 2,1.$$

Logo,

$$V_{0,1}(2) =]1,9;2,1[.$$

Definição 11. Diz-se que $x_0 \in \mathbb{R}$ é um *ponto de acumulação* do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando toda vizinhança V_{x_0} de x_0 contém algum ponto de X diferente do próprio x_0, isto é, $V \cap (X \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$. O conjunto de todos os pontos de acumulação do conjunto X é denotado por X'.

Vistas as definições de vizinhança de um ponto e ponto de acumulação, podemos definir o limite de uma função real de uma variável real em um ponto não necessariamente do domínio desta função.

Definição 12. Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in X'$ um ponto de acumulação do conjunto X. Diz-se que o número real L é o *limite* de $f(x)$ quando x tende para x_0, escreve-se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \tag{4}$$

quando para todo $\varepsilon > 0$, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.

A unicidade do limite é verificada através do resultado:

Teorema 1. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X'$. Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = M$, então $L = M$.

Demonstração. Suponhamos que $L \neq M$, digamos que $L < M$. Dado $\varepsilon > 0$, existem δ_1, $\delta_2 > 0$, tais que

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \\ 0 < |x - a| < \delta_2 &\Rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{gathered} M - \varepsilon < f(x) < M + \varepsilon \\ L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon. \end{gathered}$$

Tomando, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que se $0 < |x - a| < \delta$, então

$$\begin{aligned} f(x) &< L + \varepsilon \\ f(x) &< M - \varepsilon. \end{aligned}$$

Se escolhermos $\varepsilon = \dfrac{M - L}{2}$, teremos:

$$\begin{aligned} f(x) < L + \varepsilon &= L + \frac{M - L}{2} = \frac{L + M}{2} \\ f(x) > M - \varepsilon &= M - \frac{M - L}{2} = \frac{L + M}{2} \end{aligned}$$

Assim,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{M + L}{2} < f(x) < \frac{L + M}{2}.$$

Absurdo! Logo, $L = M$ e quando o limite de uma função existe, é único. $\square$

A existência do limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ e, consequentemente, sua unicidade nada diz a respeito do valor $f(x_0)$. Neste é apenas descrito o comportamento dos valores de $f(x)$ para os valores de x próximos de x_0, com $x \neq x_0$. Assim, podemos ter $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Para melhor poder trabalhar essa relação, vamos definir a continuidade de uma função em um ponto do seu domínio. Entretanto, será necessário definir o limite lateral de uma função real de variável real.

Definição 13. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Diz-se que o número real x_0 é um ponto de acumulação à direita (esquerda) para X e escreve-se $x_0 \in X'_+$ ($a \in X'_-$), quando toda vizinhança de x_0 contém algum ponto $x \in X$, com $x > x_0$ ($x < x_0$).

Definição 14. Seja f uma função definida em um intervalo aberto I. Dizemos que um número L é o limite à direita da função f, quando x tende para $a \in I$ e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $a < x < a + \delta$.

Se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

dizemos que $f(x)$ tende a L quando x tende para a pela direita. Usamos a notação $x \to a^+$ para indicar que os valores de x são maiores do que a.

De maneira análoga definimos, limite à esquerda.

Definição 15. Seja f uma função definida em um intervalo aberto I. Dizemos que um número L é o limite à esquerda da função f, quando x tende para $a \in I$, e escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L,$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $a - \delta < x < a$.

Neste caso, $x \to a^-$ indica que os valores de x considerados são menores do que a.

Suponha que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$. Então, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, $\exists\ \delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, sempre que $a < x < a + \delta_1$ e, $\exists\ \delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, sempre que $a - \delta_2 < x < a$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, $a - \delta_2 \leq a - \delta$ e $a + \delta \leq a + \delta_1$ e, portanto, se $x \neq a$ e $a - \delta < x < a + \delta$, temos que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

De forma equivalente, $|f(x) - L| < \varepsilon$, sempre que $0 < |x - a| < \delta$ e, desta forma, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

O que acabamos de mostrar pode ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema 2. Se f é definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no ponto a, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.

Equivalentemente, se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$, então

$$\nexists \lim_{x \to a} f(x).$$

Definição 16. Uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diz-se contínua no ponto $x_0 \in I$ se para todo $\varepsilon > 0$, pode-se obter um $\delta > 0$, tal que $x \in I$ e $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Definição 17. Se uma função é contínua em todos os pontos de seu domínio, dizemos que ela é contínua.

A negação da Definição 17 pode ser dada como segue:

Definição 18. Se f não é contínua em um ponto x_0 do seu domínio, então ela é descontínua, isto é, uma função f é descontínua se

$$\exists\, \varepsilon > 0, \forall\, \delta > 0, \exists\, x_0 \in \mathrm{Dom}(f); |x - x_0| < \delta \text{ e } |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon.$$

Uma função f real de variável real possui quatro tipos de descontinuidade e, para um melhor entendimento, apresentaremos alguns exemplos com as respectivas construções gráficas.

1. **removível** em x_0: se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ e $f(x_0) \neq L$.

   A função real $f(x) = \dfrac{\mathrm{sen}(x)}{x}$, se $x \neq 0$, e $f(x) = 0$, se $x = 0$, definida em $[-1, 1]$ possui descontinuidade removível em $x = 0$.

2. **de salto** em x_0: se $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

   A função real $f(x) = 1$, se $x \neq 0$, e $f(x) = 0$, se $x > 0$, definida em $[-1, 1]$ possui descontinuidade de salto em $x = 0$.

3. **essencial de primeira ordem** em x_0: se $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ não existem.

   A função real $f(x) = 1$, se $x \in \mathbb{Q}$, e $f(x) = 0$, se $x \notin \mathbb{Q}$, definida em $[0, 1]$ tem todos os pontos descontínuos essenciais de primeira ordem.

4. **essencial de segunda ordem** em x_0: se $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ não existe (ou exclusivo).

   A função real $f(x) = x$, se $x \leq 0$, e $f(x) = x^{-1}$, se $x > 0$, definida em $[-1, 1]$ possui descontinuidade essencial de segunda ordem em $x = 0$.

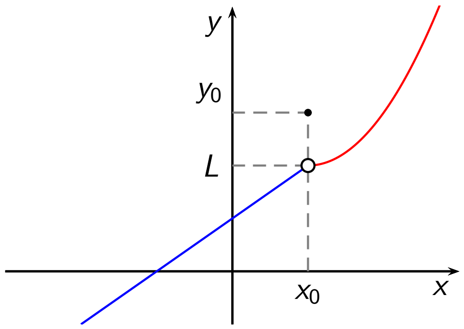


Figura 12 – Descontinuidade removível

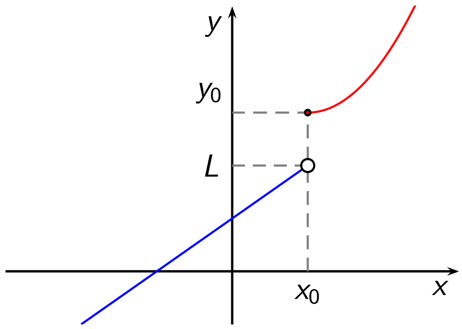


Figura 13 – Descontinuidade de salto

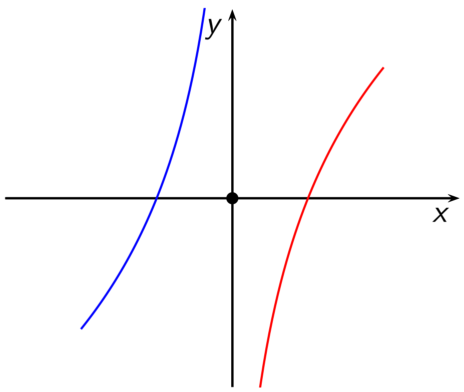


Figura 14 – Descontinuidade essencial de 1ª ordem

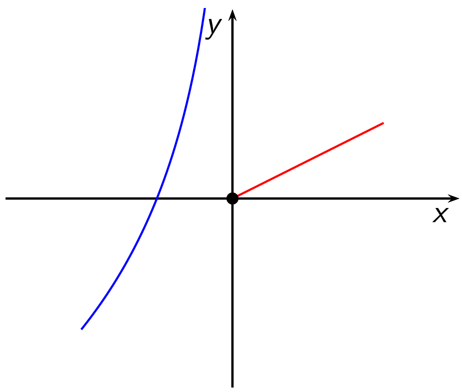


Figura 15 – Descontinuidade essencial de 2ª ordem

Assim, podemos dizer que f é uma função descontínua em $x_0 \in \text{Dom}(f)$, se x_0 é removível, de salto, essencial de primeira ordem ou de segunda ordem.

O limite de uma função real é utilizado em outro conceito bastante importante: o de derivada no ponto.

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in]a, b[$. Seja $Q(x_0, y_0)$ um ponto fixo e $P(x, y)$ um ponto arbitrário do gráfico de f. O coeficiente angular da reta s que passa por P e Q é:

$$\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Se fizermos P se aproximar de Q, temos que a reta secante s tem inclinação se aproximando da inclinação da reta tangente t, em $Q(x_0, y_0)$, ou seja,

$$m \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Aproximando indefinidamente P de Q, temos:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e, caso este limite exista, dizemos que f é derivável em x_0, o chamamos de *derivada da função f em x_0* e o representamos $f'(x_0)$, $Df(x_0)$, $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ ou $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$.

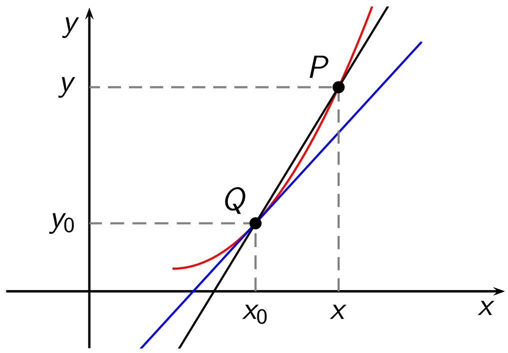


Figura 16 – Representação geométrica da derivada

Quando a derivada existe em todos os pontos $]a, b[$, dizemos que a função f é derivável no conjunto $]a, b[$. Assim, a função derivada de f é:

$$\begin{aligned} f' :]a, b[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

Ao trabalharmos com a classe de funções deriváveis, podemos, através de algumas definições, proposições e teoremas, obter critérios para determinar os intervalos monótonos da função, os extremantes, os intervalos onde a função é côncava positiva ou negativa e suas inflexões.

A Proposição 1 permite encontrar o conjunto dos possíveis pontos extremos de uma função derivável.

Proposição 1. Seja f uma função definida em (a, b) e $c \in (a, b)$ um extremante. Se $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.

Demonstração. Suponha que f tem um ponto de máximo relativo em c e que $f'(c)$ existe. Então,

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Como f tem um ponto de máximo relativo em c, pela Definição 7, se x estiver suficientemente próximo de c, temos que $f(c) \geq f(x)$ ou $f(x) - f(c) \leq 0$.

Se $x \to c^+$, temos $x - c > 0$. Portanto, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ e, então,

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \tag{5}$$

Se $x \to c^-$, temos $x - c < 0$. Portanto, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ e, então,

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \tag{6}$$

Por (5) e (6), temos que $f'(c) = 0$.

Se f tem um ponto de mínimo relativo em c, a demonstração é análoga. □

Note que a interpretação geométrica desta proposição pode ser analisada da seguinte forma: Se f tem um extremo relativo em c e se $f'(c)$ existe, então o gráfico de $y = f(x)$ tem uma reta tangente horizontal no ponto onde $x = c$.

De acordo com a Proposição 1, podemos concluir que quando $f'(c)$ existe, a condição $f'(c) = 0$ é necessária, mas não é suficiente para a existência de um extremo relativo em c (ver Figura 17). Isto é, se $f'(c) = 0$, a função f pode ter ou não um extremo relativo no ponto c.

Da mesma forma (veja Figura 18 e Figura 19), quando $f'(c)$ não existe, $f(x)$ pode ter ou não um extremo relativo em c.

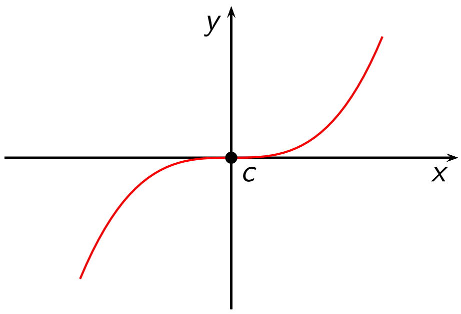


Figura 17 – Ponto crítico não extremante

O ponto $c \in \text{Dom}(f)$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe, é chamado ponto crítico de f.

Uma função, definida num dado intervalo, pode admitir diversos pontos extremos relativos. O maior valor da função num intervalo é chamado máximo absoluto da função, nesse intervalo. Analogamente, o menor valor é chamado mínimo absoluto.

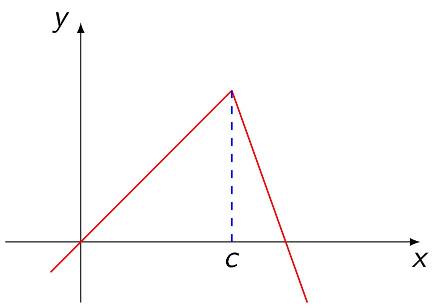


Figura 18 – $f'(c)$ não existe e com extremo relativo em c

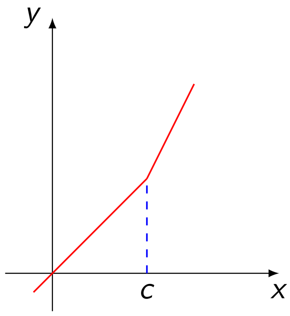


Figura 19 – $f'(c)$ não existe e sem extremo relativo em c

Definição 19. Dizemos que $f(c)$ é o máximo absoluto da função f, se $c \in \text{Dom}(f)$ e $f(c) \geq f(x)$, para todos os valores de x no domínio de f.

Definição 20. Dizemos que $f(c)$ é o mínimo absoluto da função f, se $c \in \text{Dom}(f)$ e $f(c) \leq f(x)$, para todos os valores de x no domínio de f.

O Teorema de Rolle afirma que uma função apresenta extremantes se é derivável em um intervalo tal que suas imagens nos extremos deste, apresenta valores iguais.

Teorema 3. Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração.

1. Seja $f(x) = 0$, para todo x, $a \leq x \leq b$. Então $f'(x) = 0$ para todo x, $a < x < b$. Portanto, qualquer número entre a e b pode ser tomado para c;

2. Seja $f(x) \neq 0$, para algum x, $a < x < b$. Como f é contínua em $[a, b]$, pela definição (19) e (20), f atinge seu valor máximo e seu mínimo em $[a, b]$. Sendo $f(x) \neq 0$, para algum $x \in (a, b)$, um dos extremos de f será diferente de zero. Como $f(a) = f(b)$, esse extremo será atingido em um ponto $c \in (a, b)$.

   Como f é derivável em $c \in (a, b)$ usando a 1, concluímos que $f'(c) = 0$.

□

O teorema do a seguir é conhecido como o teorema do valor médio.

Teorema 4. Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que a reta tangente ao gráfico de f em $(c, f(c))$ é paralela à reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, isto é,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. Seja s a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Dessa forma,

$$y - f(a) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a),$$

ou seja,

$$s(x) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a) + f(a).$$

Seja g a função $g(x) = f(x) - s(x)$. Assim,

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right].$$

Quando $x = a$, temos:

$$g(a) = f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) + f(a)\right] = 0.$$

Quando $x = b$,

$$g(b) = f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) + f(a)\right] = 0.$$

Como g é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, pelo Teorema de Rolle, existe um número c no intervalo $]a, b[$, tal que: $g'(c) = 0$.

Mas $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Então

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e, portanto,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

O Teorema do Valor Médio garante que dada uma função f derivável em (a, b) e sendo dados dois pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ de modo que a reta tangente ao gráfico de f em $(c, f(c))$ é paralela à reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Entretanto, o Teorema do Valor Médio não garante a unicidade do ponto c.

O teorema a seguir é utilizado para determinar os intervalos onde uma função derivável é crescente ou decrescente.

Proposição 2. Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b).

1. Se $f'(x) > 0$, para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$;
2. Se $f'(x) < 0$, para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$.

Demonstração. Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer em $[a, b]$ tais que $x_1 < x_2$. Então, f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em (x_1, x_2).

Pelo teorema do valor médio, segue que $\exists c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{7}$$

1 º. Por hipótese, $f'(x) > 0$, para todo $x \in (a, b)$. Então $f'(c) > 0$. Como $x_1 < x_2$, $x_2 - x_1 > 0$.

Analisando a igualdade (7), concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$. Logo, f é crescente em $[a, b]$.

2 º. Neste caso, $f'(x) < 0$, para todo $x \in (a, b)$. Temos, então $f'(c) < 0$ e $x_2 - x_1 > 0$.

Analisando a igualdade (7), concluímos que $f(x_2) - f(x_1) < 0$ e, dessa forma, $f(x_2) < f(x_1)$. Logo, f é decrescente em $[a, b]$. □

Dessa forma, com o estudo do sinal da função derivada de uma função derivável, temos, nos intervalos onde ela é crescente, que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função neste intervalo é positivo. Caso contrário, o coeficiente angular é negativo.

A teoria que envolve os extremos de uma função pode ser aplicado em resolução de problemas como por exemplo, se tem um certo comprimento de arame e deseja cercar um jardim retangular de forma que a sua área seja a maior possível ou quando temos que fabricar uma lata cilíndrica para conter um certo volume de uma substância, é necessário saber qual o raio da base dessa lata de modo a minimizar a área da superfície dessa lata ou ainda quando ao lançar obliquamente um objeto, com uma certa velocidade, e desejamos saber a altura máxima atingida por este objeto.

O critério a seguir é utilizado para determinar os extremos de uma função derivável.

Teorema 5. Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ que possui derivada em todo o ponto do intervalo (a, b), exceto possivelmente num ponto $c \in (a, b)$. Então:

1. Se $f'(x) > 0$, para todo $x < c$, e $f'(x) < 0$, para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em c;
2. Se $f'(x) < 0$, para todo $x < c$, e $f'(x) > 0$, para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c.

Demonstração. Pela Proposição 2, se $f'(x) > 0$, para todo $x < c$, e $f'(x) < 0$, para todo $x > c$, concluímos que f é crescente em $[a, c]$ e decrescente em $[c, b]$. Portanto, $f(x) < f(c)$, para todo $x \neq c$, em (a, b). Assim, f tem um máximo relativo em c.

A demonstração é análoga para o item (b). □

Se uma função possui derivada de segunda ordem, temos mais um critério para determinação de extremos.

Teorema 6. Sejam f uma função duas vezes derivável num intervalo (a, b) e $c \in (a, b)$ um ponto crítico de f. Então,

1. Se $f''(c) < 0$, f tem um valor máximo relativo em c;
2. Se $f''(c) > 0$, f tem um valor mínimo relativo em c.

Demonstração. Se $f''(c)$ existe e $f''(c) < 0$, então,

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0.$$

Portanto, existe um intervalo aberto I, que contém c, tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0, \forall\, x \in I. \tag{8}$$

Seja A o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x < c$. Assim, c é um extremo direito do intervalo aberto A.

Seja B o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x > c$. então, c é um extremo esquerdo do intervalo aberto B.

Se $x \in A$, temos $x - c < 0$. De (8), resulta que $f'(x) > f'(c)$.

Se $x \in B$, temos $x - c > 0$. De (8), resulta que $f'(x) < f'(c)$.

Como $f'(c) = 0$, concluímos que se $x \in A$, $f'(x) > 0$ e se $x \in B$, $f'(x) < 0$.

Pelo critério da primeira derivada, f tem um máximo relativo em c.

A prova do item (b) é análoga. □

Observe que o critério estabelecido no Teorema 6, não menciona a existência de um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f''(c) = 0$. Esses pontos são críticos para a função derivada f'. Mas o que eles representam para a função f? Antes de respondermos essa pergunta, veremos um critério para a determinação da concavidade do gráfico de uma função duas vezes derivável em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Vimos que o sinal da derivada de f é utilizado para determinar os intervalos onde uma função f é crescente ou decrescente. Analogamente, caso f' seja derivável, podemos usar o sinal da segunda derivada de f para determinar onde f' é crescente ou decrescente.

Dessa forma, para funções duas vezes derivável, temos como determinar, utilizando o critério a seguir, os intervalos onde uma função duas vezes derivável é côncava positiva ou negativa.

Teorema 7. Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável em I. Então,

1. Se $f''(x) > 0$ em I, então f é côncava positiva;
2. Se $f''(x) < 0$ em I, então f é côncava negativa.

Demonstração.

1. Como $f''(x) = [f'(x)]'$, se $f''(x) > 0$, para todo $x \in (a, b)$, pela Proposição 2, $f'(x)$ é crescente no intervalo (a, b). Logo, f é côncava positiva em (a, b).
2. Análoga.

□

Após este breve estudo de limites e derivadas de funções reais de uma variável real, reunimos condições de determinar algumas de suas características que serão essenciais à proposta aqui realizada como intervalos monótonos, os pontos extremantes, intervalos de concavidade positiva e negativa.

2

Propostas para o ensino das funções polinomiais de grau um e dois

Neste capítulo, apresentaremos uma proposta de ensino para as funções polinomiais de grau um e dois para a série inicial do ensino médio.

2.1 O estudo da função polinomial de grau um

Nesta seção, trataremos dos conteúdos que envolvem o estudo da função polinomial de grau um, como sua definição, o seu gráfico e esboço onde mostraremos as interseções com os eixos cartesianos e sua inclinação com o eixo das abscissas, fundamentais para a compreensão de outros assuntos como, por exemplo, a definição de concavidade do gráfico de uma função real em um intervalo e, assim, entender o significado dos coeficientes angular e linear.

Inicialmente, propomos que para definir uma função polinomial de grau um, seja partindo da definição de uma função polinomial de grau n, como apresentada a seguir:

Definição 21. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é polinomial de grau n se

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \ \ a_n \neq 0,$$

em que os coeficientes da variável independente a_i, $1 \leq i \leq n$, e o termo independente a_0 são números reais.

A Definição 21 generaliza as definições das funções polinomiais de grau um e dois e fazem com que o estudante entenda melhor as definições de funções polinomiais de grau um e dois, visto que ela é composta pela soma de monômios de graus menores ou iguais a n.

Sendo assim, o professor pode apresentar a seguinte definição:

Definição 22. Uma função polinomial de grau um é qualquer função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por uma lei da forma $f(x) = a_1x + a_0$, em que $a_1 \neq 0$ e a_0 são números reais. Se $a_0 \neq 0$, dizemos que a função é afim; Se $a_0 = 0$, é linear.

Depois de apresentar a Definição 22, o professor deve solicitar do estudante a realização de uma tarefa onde se apresente diversas expressões de funções polinomiais para que eles a reconheçam. Ainda aqui, deve-se satisfazer a curiosidade do estudante quanto à classificação em afim ou linear argumentando que em breve essas classificações serão úteis em algumas propriedades, mas que será abordada no tempo certo.

Nos livros Ciência e Aplicação (IEZZI, 2013) e Matemática (PAIVA, 2013) são dados alguns exemplos de funções polinomiais de grau um, chamando a atenção dos valores dos coeficiente angular e do linear. Já (SOUZA, 2013), a medida que é dado um exemplo de função polinomial de grau um, ele vai classificando a função em: Afim ou Linear.

Em seguida, deve-se trabalhar com o gráfico da função polinomial de grau um.

É visto que, alguns autores em seus livros destinados para o 1° ano do ensino médio na construção do gráfico da função polinomial de grau um, parte da afirmação que o gráfico desta função é uma reta, obtido a partir de dois pontos distintos pertencentes ao $\mathrm{Dom}(f)$ e traçando-se uma reta que passa por eles. Enquanto, outros autores chamam a atenção de que uma das maneiras de construir o gráfico de uma função polinomial de grau um é atribuindo valores à variável independente x, obtendo valores de y e, consequentemente, os pares ordenados (x, y) e representando-os em um plano cartesiano.

Em vista do que é escrito por alguns autores em seus livros, existe a possibilidade da dúvida de que o gráfico de uma função polinomial é realmente uma reta. Pela Geometria Plana, temos que por dois pontos passa apenas uma reta, mas se tivermos três pontos ou mais de um gráfico?

Basta tomarmos três pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ pois dois podem ficar fixos e o terceiro variar no gráfico desta função dada por $f(x) = a_1x + a_0$. Sabemos que dois a dois pertencem a uma mesma reta, vamos mostrar que A, B e C pertencem a mesma reta. De fato, como A, B e C são pontos do gráfico da função, suas coordenadas satisfazem a lei $y = a_1x + a_0$, com $a_1 \neq 0$ e a_0 reais, temos:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1x_1 + a_0 && (9)\\ y_2 &= a_1x_2 + a_0 && (10)\\ y_3 &= a_1x_3 + a_0. && (11) \end{aligned}$$

Das equações (9) e (10), temos:

$$y_2 - y_1 = a_1(x_2 - x_1).$$

Das equações (10) e (11), temos:

$$y_3 - y_2 = a_1(x_3 - x_2).$$

Segue que,

$$\frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1}. \tag{12}$$

Supondo que A, B e C não pertençam a mesma reta e traçando quatro retas paralelas, duas ao eixo Ox, uma passando por A e a outra por B e outras duas retas paralelas ao eixo Oy uma passando por B e a outra por C, teremos duas interseções, fazendo aparecer os pontos D, E, os triângulos ABD e BCE retângulos em D e E, respectivamente, como mostra a Figura 20.

Uma vez que os triângulos ABD e BCE são retângulos e, de acordo com (12), temos:

$$\frac{EC}{DB} = \frac{BE}{AD}.$$

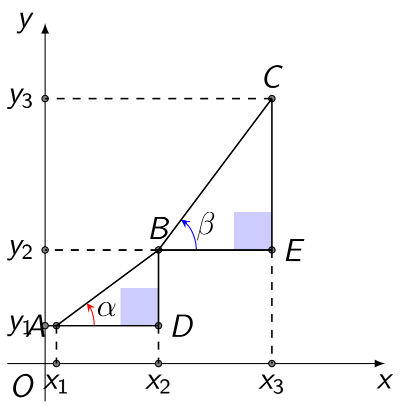


Figura 20 – Representação geométrica

Portanto, os triângulos ABD e BCE são semelhantes pelo caso LAL e, consequentemente, os ângulos correspondentes α e β são congruentes, concluindo que

$\alpha = \beta$, uma contradição pois, a suposição inicial nos dá que $\alpha \neq \beta$. Logo, A, B e C pertencem a mesma reta e temos que o gráfico de uma função polinomial de grau um é uma reta.

Vimos que o gráfico de toda função polinomial de grau um é uma reta. Mas, será que a recíproca também é verdadeira?

Sabemos que a função linear e da função afim são exemplos de funções polinomiais de grau um e a representação de cada uma delas é uma reta. Já a função constante também tem sua representação como sendo uma reta e esta função não é uma função polinomial de grau um e sim de grau zero. Logo, podemos afirmar que a recíproca da pergunta feita não é verdadeira.

Um outro fato muito importante para a compreensão de diversos assuntos em outros da matemática é a inclinação do gráfico de uma função polinomial de grau um, ou seja, a inclinação da reta.

Considere a função $f(x) = mx + n$ e tome dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pertencentes ao gráfico de f. Dessa forma,

$$y_B = mx_B + n \tag{13}$$
$$y_A = mx_A + n \tag{14}$$

De (13) e (14), temos:

$$y_B - y_A = mx_B + n - (mx_A + n) = m(x_B - x_A).$$

Portanto,

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \tag{15}$$

Por outro lado, o $\mathsf{graf}(f)$ é uma reta e, sem perda de generalidade, consideremos a Figura 21:

Levando em consideração a definição da tangente de um ângulo e a equação (15), temos:

$$\tan(\theta) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m.$$

O que acabamos de mostrar foi a relação existente entre o coeficiente m da função afim e a inclinação θ. Devido a este fato, chamamos m de coeficiente angular da reta.

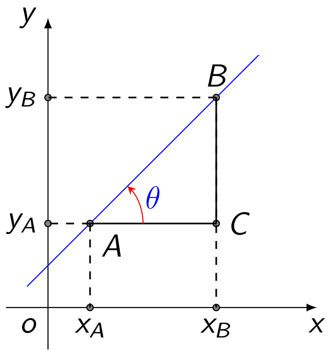


Figura 21 – Relação entre o coeficiente m da equação da reta e a sua inclinação.

É verificada a ausência de dois tratamentos importantes. O primeiro é: quando $m = \tan(\theta) = 0$ e, consequentemente, a função não é mais de grau um. Alguns professores e a maioria dos livros, não falam que, apesar de termos uma reta, esta não é a representação gráfica de uma função polinomial de grau um. A segunda é: Quando $\theta = 90°$ e, neste caso, não existe um valor para m, ou seja, não existe função apesar de existir a representação gráfica de uma reta.

Em suma, o ângulo θ é a inclinação que a reta faz com o eixo Ox e a tangente do ângulo θ é o valor do coeficiente angular m. Note que, só é possível encontrar o coeficiente angular de uma reta, quando a mesma não for vertical, ou seja, o valor de θ não ser igual a $90°$.

O professor deve, em seguida, fazer uma análise da variação dos coeficientes angular e linear na expressão de uma função polinomial de grau um, usando a sua representação gráfica no plano Oxy.

Vamos analisar o coeficiente m, a partir de alguns exemplos.

Considere as funções:

- $f_1(x) = x$
- $g_1(x) = 2x$
- $h_1(x) = 3x$
- $r_1(x) = 4x$

e esboce os seus gráficos, como na Figura 22:

Podemos observar, através da Figura 22, que:

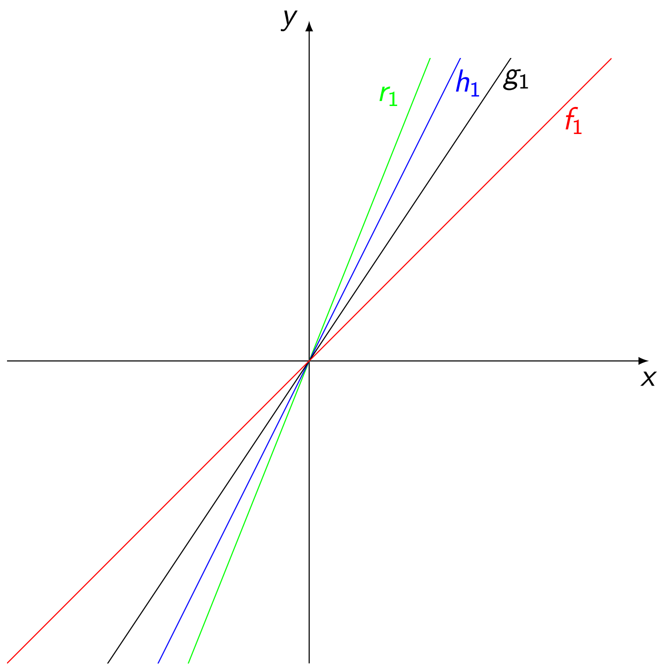


Figura 22 – Gráficos das funções f_1, g_1, h_1 e r_1 e suas inclinações para coeficientes angulares positivos

- o aumento do coeficiente angular m, pode-se observar que a reta tem sua inclinação também aumentando e existe uma tendência deste se aproximar de $90°$;
- estas funções são crescentes;
- os gráficos das funções passam pela origem $(0,0)$.

Considere agora as funções polinomiais com os valores de m simétricos aos colocados na análise anterior. Assim, teremos:

- $f_2(x) = -x$
- $g_2(x) = -2x$
- $h_2(x) = -3x$
- $r_2(x) = -4x$

e esboce os seus gráficos como na Figura 23:

Podemos observar, através da Figura 23, que:

- com a diminuição dos valores de m, a inclinação da reta diminui;

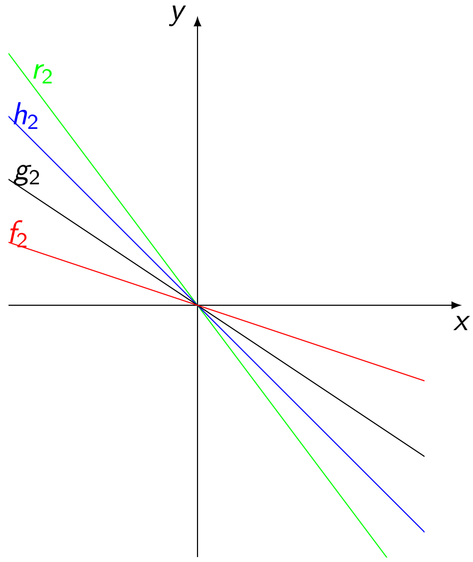


Figura 23 – Gráficos das funções f_2, g_2, h_2 e r_2 e suas inclinações para coeficientes angulares negativos

- estas representam funções decrescentes;
- os gráficos destas funções passam pale origem $(0, 0)$.

Podemos também notar que os gráficos das funções $f_1(x) = x$, $g_1(x) = 2x$, $h_1(x) = 3x$ e $r_1(x) = 4x$ são simétricos, respectivamente, aos das funções $f_2(x) = -x$, $g_2(x) = -2x$, $h_2(x) = -3x$ e $r_2(x) = -4x$ em relação ao eixo Oy e que as funções que têm seus coeficientes angulares simétricos.

Para verificar esta propriedade de simetria existente entre os gráficos por exemplo de $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = -x$, vamos traçar uma reta paralela ao eixo Ox.

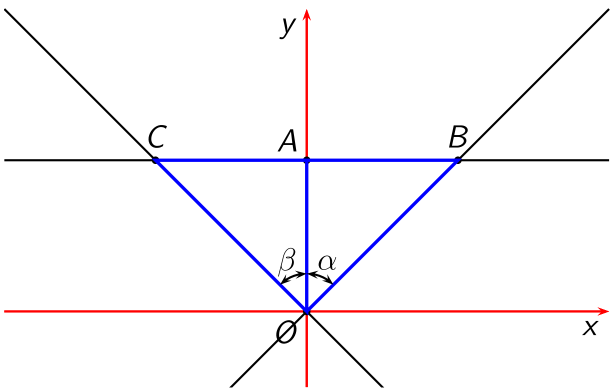


Figura 24 – Triângulos semelhantes

Temos, de acordo com a Figura 24, que os triângulos OAB e OAC são retângulos, possuem OA como lado comum e dois ângulos α e β correspondentes. Logo, pelo caso ALA, os triângulos são congruentes. Consequentemente, temos que os pontos de interseção entre a reta paralela ao eixo Ox (B e C) são simétricos em relação ao eixo Oy.

Dessa forma, o estudante pode visualizar que o coeficiente angular m é o responsável pela inclinação da reta e, consequentemente, classificar se a função polinomial de grau um é crescente ou decrescente.

Vamos, agora, analisar funções polinomiais de grau um variando apenas o valor do coeficiente linear. Considere as funções:

- $f(x) = x + 1$
- $g(x) = x + 3$
- $h(x) = x - 1$
- $r(x) = x - 3$

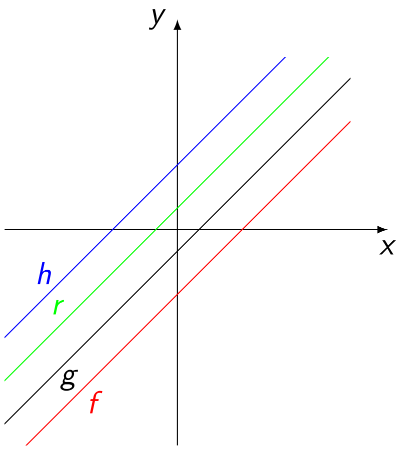


Figura 25 – Gráfico de funções afins para alguns valores de n

Observamos que os gráficos dessas funções polinomiais de grau um $f(x) = mx + n$ não se interceptam, que as interseções com o eixo Oy são em $(0, n)$ e que as interseções com o eixo Ox são feitas em $\left(-\frac{n}{m}, 0\right)$ (ver Figura 25).

As abordagens até aqui são essenciais no estudo da função polinomial de grau um e geralmente são feitas de forma superficial. Os outros assuntos para estas funções, como a resolução de problemas são bem tratados e não carece de uma outra proposta, ou seja, devem continuar a serem abordados como já o são.

2.2 O estudo da função polinomial de grau dois

Quando começamos a ensinar os assuntos referentes ao estudo da função polinomial de grau dois, primeiramente é definida como sendo aquela que tem como lei a expressão $f(x) = ax^2+bx+c$, $a \neq 0$. Em seguida, é apresentado, de forma intuitiva o seu gráfico e os demais assuntos com uma abordagem de pura apresentação e memorização, como por exemplo, as coordenadas do vértice e a concavidade .

A abordagem que propomos aqui será dividida em:

- ❑ Definição da função polinomial de grau dois;
- ❑ Um breve estudo da parábola;
- ❑ Mostrar que o gráfico da função polinomial de grau dois é uma parábola e ao mesmo tempo obter as coordenadas do seu vértice;
- ❑ Mostrar que o sinal da concavidade está relacionado com o coeficiente do termo de grau dois.

2.2.1 A função polinomial de grau dois

Já definimos uma função polinomial de grau n e a proposta aqui é a de revisar essa definição e restringi-la para a de grau dois.

Definição 23. Uma função polinomial de grau dois é aquela que pode ser escrita como $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Até aqui, o objetivo do professor será o de que o estudante entenda a definição e deverá realizar tarefas onde isso fique bem compreendido.

Em seguida, a proposta é a de se fazer um breve estudo da parábola com o objetivo de associar o gráfico da função polinomial de grau dois a uma parábola.

2.2.2 Breve estudo da parábola

O estudo da parábola teve início com o astrônomo e geômetra da Academia de Platão, nascido em Alopeconnesus, na Ásia Menor, Menaechmus, discípulo de Aristóteles ($384 \; 322$ a.C.), que deu início ao estudo das secções planas de um cone circular, por volta de 350 a.C. Ao estudar o problema de Delos, que se baseava na duplicação do cubo que tinha como objetivo construir com régua e compasso a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo cuja aresta dada a, Menaechmus, observou que sua solução seria encontrada através de curvas denominadas cônicas, pois eram obtidas a partir de cortes (seções) em superfícies cônicas, dependendo dos diferentes ângulos formados entre a geratriz e o eixo do cone.

Um século após o estudo de Menaechmus sobre a solução da duplicação do cubo, o geômetra Apolônio foi o primeiro a provar que à parábola podia ser obtida através de um único cone, não necessariamente reto, apenas variando a inclinação do plano de secção. A nomenclatura hoje usada para a parábola foi introduzida por Apolônio, utilizando palavras já usadas pelos matemáticos pitagóricos. Por exemplo, ele designou parábola para a cônica obtida pela secção paralela à geratriz da superfície cônica. Apolônio nasceu em Perga, na Panfília da Ásia Menor e viveu em Alexandria nos fins do século III a.C. Foi astrônomo e um grande matemático. Ficou conhecido como "O Grande Geômetra", por aprofundar os estudos das cônicas. "O Grande Geômetra" redigiu um tratado denominado *As Cônicas*, foi considerada sua obra-prima, que era constituída por oito livros, sendo que o último se perdeu. Dos sete que restaram, os quatro primeiros existem em grego, e os demais possuem tradução em árabe. Toda obra (As Cônicas) de Apolônio foi traduzida para o latim por Edmund Halley, em 1710.

As razões que levaram Apolônio a estudar e escrever sobre as cônicas encontram-se no prefácio geral da obra, onde ele diz que:

> ... levei a cabo a investigação deste assunto a pedido de Neucrates o geômetra, quando ele veio a Alexandria e ficou comigo, e, quando tinha trabalhado os oito livros, dei-lhos de imediato, apressadamente, porque ele estava de partida; não foi possível portanto revê-los. Escrevi tudo conforme me ia ocorrendo, adiando a revisão até ao fim (CASTILHO; Sá, 2007).

Foi Apolônio quem, pela primeira vez, expôs muitas propriedades sobre as cônicas, entre elas, a igualdade e a semelhança de cônicas.

O italiano Galileu (1564-1642) começou o estudo da parábola na época do Renascimento sendo o primeiro a combinar à observação experimental com a descrição dos fenômenos com várias formulações matemáticas. Enquanto que Galileu contribuiu significativamente para o conhecimento do movimento e, dentre elas destacam-se as diversas considerações sobre o movimento uniforme, movimento dos projéteis, movimento do pêndulo simples. Desenvolveu uma série de estudos sobre a queda livre dos corpos. Assim, estabeleceu as equações do movimento uniformemente acelerado, embora o tenha feito para o caso específico da queda livre. Compreendeu ainda que a trajetória dos projéteis, na ausência da resistência do ar, é uma parábola. Por que parábola?

O termo parábola para a cônica foi utilizado por Apolônio de Perga e, provavelmente, são oriundos de terminologias pitagóricas relacionadas com áreas (SILVA, 1985).

Segundo (CASTILHO; Sá, 2007), a palavra parábola vem do grego $\pi\alpha\rho\alpha\beta\theta\lambda\eta$ e significa igualdade, comparação.

Definição 24. Sejam ℓ uma reta e F um ponto do plano não pertencente a ℓ. A **parábola** P de foco F e diretriz ℓ é o conjunto dos pontos do plano cuja distância a F é igual à sua distância a ℓ:

$$d(P,F) = d(P,\ell) \Leftrightarrow P \in \text{ parábola.} \tag{16}$$

Segue da definição que, dado um ponto fixo F e uma reta ℓ, um ponto P do plano está equidistante destes se, e somente se, pertence a uma parábola, ou seja,

São elementos da parábola ou estão presentes na sua definição os seguintes elementos:

- O foco F: ponto fixo;
- A diretriz ℓ: reta fixa;
- O eixo focal EF: reta que passa pelo foco F e é perpendicular a diretriz ℓ;
- O vértice V: é o ponto de intersecção da parábola com seu eixo focal. Situado entre a diretriz e o foco exatamente no meio.

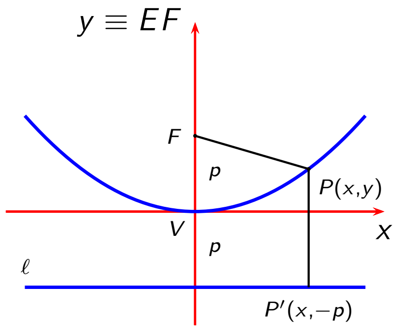


Figura 26 – Elementos da parábola

Mostraremos agora que uma parábola é simétrica em relação ao eixo focal.

> a simetria consiste na união e conformidade das partes de um trabalho, em relação à sua totalidade, e na beleza de cada uma das partes que compõem o trabalho. A simetria deriva do conceito grego de analogia, que é a relação entre todas as partes de uma estrutura com a estrutura inteira (WALD, 1984).

Consideremos um ponto P pertencente a parábola e P' um ponto simétrico de P em relação ao eixo focal. Seja PP' um segmento perpendicular ao eixo focal r, interceptando-o num ponto Q que, por sua vez, é o ponto médio do segmento PP'. Como os triângulos PQF e $P'QF$ são congruentes pelo caso LAL, podemos afirmar que $d(P, F) = d(P', F)$. Com a existência da congruência entre os triângulos PQF e $P'QF$, temos que $d(P', r) = d((P, r)$ e $d(P, F) = d(P, \ell)$. Assim, temos que $d(P, F) = d(P', F)$ e, portanto, P' pertence a parábola conforme a figura (27).

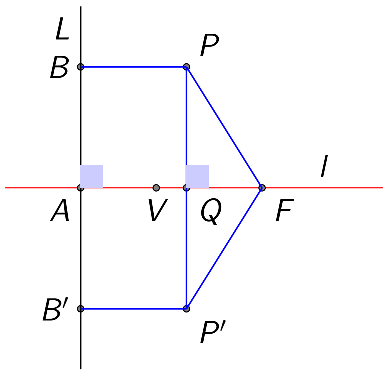


Figura 27 – Simetria da parábola

Com esse resultado podemos afirmar que todo ponto P' não pertencente ao eixo focal e pertencente a parábola, tem um ponto simétrico em relação ao eixo focal que também pertence a parábola, ou seja, toda parábola é simétrica em relação ao seu eixo focal r.

Estabeleceremos, agora, as equações padrão da parábola com o vértice na origem e eixo focal sobre um dos eixos coordenados.

Dizemos que uma equação é *padrão*, também denominada *canônica*, quando a utilizamos para descrever um conjunto de curvas com alguma característica em comum. A parábola possui quatro tipos de equações padrão, onde a determinação de somente uma delas será demonstrada, pois as outras são obtidas de forma semelhante.

Sejam $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola de vértice V na origem dos eixos coordenados e de foco $F(0, p)$. Observe que qualquer ponto da diretriz ℓ é dado por $P'(x, -p)$. Ver a figura 26, temos por definição de parábola que

$$d(P, F) = d(P, \ell),$$

temos que:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(p+y)^2}.$$

Desenvolvendo a igualdade acima obtemos:

$$x^2 = 4py,$$

a equação reduzida da Parábola para este caso.

De forma análoga, podemos obter as equações reduzidas das parábolas com vértice em $(0, 0)$ para os demais casos, onde os focos estão sobre os semi-eixos ainda não analisados. Portanto,

$$\boxed{x^2 = \pm 4py} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{y^2 = \pm 4px}. \tag{17}$$

Da análise das equações em 17, tendo em vista ser x^2 (y^2) sempre positivo ou nulo e que $p > 0$, podemos concluir que: se a parábola tem concavidade voltada para cima (direita), o sinal no 2° membro é positivo, caso contrário, tem concavidade voltada para baixo (esquerda), se o sinal no 2° membro é negativo.

A tabela a seguir apresenta um resumo das principais características da parábola quando o eixo de simetria é paralelo a um dos eixos coordenados que segundo (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013) é:

Podemos estabelecer as equações padrão da parábola com o vértice fora da origem e eixo de simetria paralelos a um dos eixos coordenados.

Para obtermos a forma canônica da parábola cujas coordenadas do vértice V não coincidem, necessariamente, com as da origem e a reta focal paralela ao eixo Oy, iremos levar em consideração o sistema de eixos ortogonais $\overline{Oxy}$, com origem $\overline{O} = V(x_0, y_0)$ e os eixos $\overline{Ox}$ e $\overline{Oy}$ que têm a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos Ox e Oy, respectivamente. Assim, temos que a equação parábola no sistema $\overline{Oxy}$ é:

$$\overline{x}^2 = 4p\overline{y}, \tag{18}$$

em que $\overline{F}(0, p)$, $\overline{V}(0, 0)$, a diretriz é $\overline{\ell} : \overline{y} = -p$ e a reta focal $\overline{l} : \overline{x} = 0$.

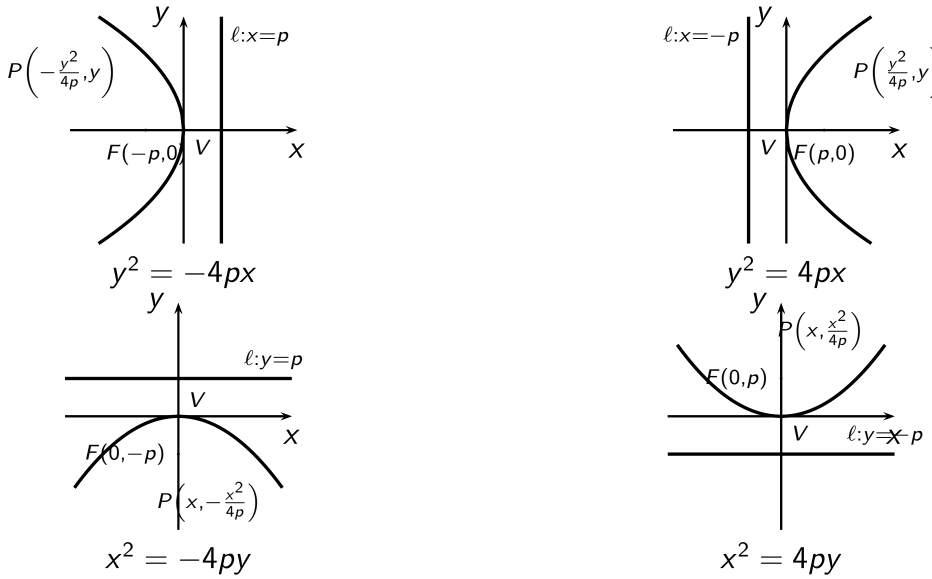


Figura 28 – Equações padrão da parábola

Uma vez que $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$, chegamos a equação da parábola no sistema Oxy:

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).$$

Ao desenvolvê-la, temos que:

$$y = \frac{x^2}{4p} - \frac{2x_0}{4p}x + \frac{x_0^2 + 4py_0}{4p}.$$

Fazendo $\dfrac{1}{4p} = a$, $\dfrac{-2x_0}{4p} = b$ e $\dfrac{x_0^2 + 4py_0}{4p} = c$, obtemos:

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{19}$$

que é a lei da função polinomial de grau dois.

Dos fatos observados (ver Figura (18) e Figura (19)), podemos concluir que uma parábola de vértice em (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas, possui uma equação que é a de uma função $y = f(x)$ polinomial de grau dois.

Podemos obter, de forma análoga, as equações reduzidas das parábolas com vértice não coincidente com a origem do sistema Oxy para os demais casos, onde os focos estão sobre os semi-eixos ainda não analisados.

2.3 O gráfico da função polinomial de grau dois

Mostraremos, agora, que se f é uma função polinomial de grau dois, então o seu gráfico é uma parábola.

Sabemos que o gráfico de uma função polinomial de grau dois f é o conjunto

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y); y = f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0\}$$

Mas

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}, \end{aligned}$$

a forma canônica da função polinomial de grau dois.

Se fizermos $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_0 = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$, temos que:

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2, \tag{20}$$

a equação canônica da parábola cujo vértice está em (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo Oy.

O que acabamos de mostrar pode ser formalizado com o seguinte resultado:

Teorema 8. Se a função é polinomial de grau dois $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, então seu gráfico é uma parábola e as coordenadas do vértice é

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}\right).$$

Após a apresentação do Teorema 8, o professor terá como objetivo fazer com que os estudantes, apesar de saberem que o gráfico da função polinomial de grau dois é uma parábola e também poder determinar as coordenadas do seu vértice, ainda faltam alguns elementos teóricos para se esboçar com maior precisão este gráfico. O mais elementar dentre esses, nesse momento, é obter os pontos de interseção com os eixos coordenados. Com o eixo y, tem-se o ponto $(0, f(0))$ e, com o eixo x, as raízes, caso existam. Além disso, deverá trabalhar com as coordenadas do vértice como proposto nas subseções a seguir, visto que ele é o ponto onde se observa comportamentos como, o extremo do intervalo no domínio da função onde seu comportamento monótono é modificado, onde existe um extremante para a função e a consequente abordagem em problemas de otimização.

2.3.1 Interseção com os eixos coordenados

É estudado no 9º ano do ensino fundamental II e no 1^0 ano do ensino médio que podemos esboçar uma parábola no plano Oxy e para tal, é exigido que se determine, dentre alguns pontos, as interseções com os eixos coordenados ou zeros da função, caso existam.

A equação (22) (fórmula de Bhaskara) permite obter, caso existam, as interseções com o eixo Ox e, sendo assim, possuem ordenada zero ($y = 0$). Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned} \tag{21}$$

A igualdade em (21) é satisfeita quando:

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \text{ ou } x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Denominando $b^2 - 4ac = \Delta$, teremos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \tag{22}$$

a **fórmula de Bhaskara** para obter os zeros de uma função polinomial de grau dois.

Através das equações em (22) podemos fazer a seguinte análise:

- ❏ Se $\Delta < 0$, temos que $\sqrt{\Delta}$ não existe em $\mathbb{R}$ e a função polinomial de grau dois não possui zeros reais e o seu gráfico não intersepta o eixo das abscissas;

- Se $\Delta = 0$, temos $x = \dfrac{-b}{2a}$ e a função polinomial de grau dois possui apenas um zero real (zero real duplo) e o seu gráfico, apenas uma interseção com o eixo Ox.
- Se $\Delta > 0$, temos que a função polinomial de grau dois possui dois zeros reais distintos e o seu gráfico, duas interseções com o eixo Ox

O professor deverá trabalhar aqui com a resolução de problemas que envolvem a obtenção dos zeros de funções polinomiais de grau dois como: a determinação do tempo gasto por um projétil ao ser lançado verticalmente para baixo de uma certa altura para atingir o solo; ao querer saber o número de produtos fabricados para se ter lucro quando a função lucro. Outros problemas envolvem simplificações de expressões e, além desses, o esboço do seu gráfico é importante se obter as interseções com eixos coordenados. Assim, veremos que a forma fatorada de uma expressão do polinômio de grau dois de uma variável real é providencial.

Consideremos $y = f(x)$, com $f(x) = ax^2 + bx + c$. Suponha que α seja uma das raízes de f. Logo, temos que $f(\alpha) = a(\alpha)^2 + b\alpha + c = 0$. Assim, podemos escrever $f(x) = f(x) - f(\alpha)$. Então, teremos:

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(\alpha) &= a(x^2 - \alpha^2) + b(x - \alpha) + c - c \\
&= a(x + \alpha)(x - \alpha) + b(x - \alpha) \\
&= a(x - \alpha)\left(x + \alpha + \frac{b}{a}\right)
\end{aligned}
$$

Fazendo, $-\beta = \alpha + \dfrac{b}{a}$, temos que:

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

A forma que está escrita $f(x)$ é conhecida como a **forma fatorada da função polinomial de grau dois**.

A vantagem de se ter uma função polinomial de grau dois escrita desta maneira é a de determinar, sem muito esforço cálculo, os zeros da função. Note que, se $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$, a mesma só se anulará quando $x - \alpha = 0$ ou $x - \beta = 0$, ou seja, $x = \alpha$ ou $x = \beta$.

A interseção da parábola com o eixo das ordenadas é, claramente, o ponto $(0, f(0))$, em que f é uma função polinomial de grau dois e o professor deverá mostrar esse fato. Assim, em $y = ax^2 + bx + c$, substituindo x por zero, teremos $y = c$, ou seja, a interseção da parábola com o eixo Oy se dá no ponto de coordenadas $(0, c)$.

2.3.2 O eixo de simetria

Iremos relacionar os coeficientes das variáveis independentes da função polinomial de grau dois com a equação da reta que é o eixo de simetria da parábola.

Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. A equação do eixo de simetria ao gráfico de f é dada por $x = -\dfrac{b}{2a}$, uma vez que esta é paralela ao eixo y. Então, temos dois casos a considerar:

- ❏ Se os sinais de a e de b são iguais: teremos $x_v < 0$ (ver Figura 29):
- ❏ Se os sinais de a e de b são diferentes: teremos $x_v > 0$ (ver Figura 30):

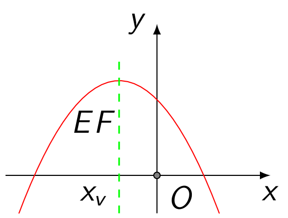


Figura 29 – Relações entre os coeficientes da função polinomial de grau dois

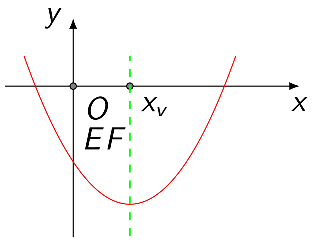


Figura 30 – Relações entre os coeficientes da função polinomial de grau dois

2.3.3 Concavidade do gráfico da função polinomial de grau dois

Nos livros (IEZZI, 2013), (SOUZA, 2013) e (PAIVA, 2013), o estudo sobre a concavidade do gráfico da função polinomial de grau dois é feito de forma intuitiva. Iremos relacionar o coeficiente da variável de grau dois da função com a concavidade positiva ou negativa, usando a definição desta.

Vimos que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, b, c são números reais, é a equação de uma parábola e pode ser escrita como

$$(f(x) - y_V) = a(x - x_V)^2,$$

em que $V(x_V, y_V)$ são as coordenadas do vértice.

Seja $g(x) = mx + n$, com $m, n \in \mathbb{R}$, a equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $P(x_P, y_P)$. Assim, $f(x_P) = g(x_P) = y_P$ e suponha que o gráfico de f tenha concavidade positiva. Assim, qualquer que seja o ponto (x_0, y_0) diferente do ponto de tangência P da reta g ao gráfico de f, teremos, por definição, que $f(x_0) > g(x_0)$.

Assim, tomemos $P = V$. Segue que $f(x_V) = g(x_V) = y_V$.

Seja $x_0 \neq x_V$. Assim, na parábola temos que:

$$a(x_0 - x_V)^2 = f(x_0) - y_V = f(x_0) - g(x_V),$$

ou seja,

$$a = \frac{f(x_0) - g(x_V)}{(x_0 - x_V)^2}.$$

Como o denominador dessa fração é sempre positivo, temos $a > 0$.

A prova de que se a concavidade da parábola for negativa, $a < 0$ é análoga.

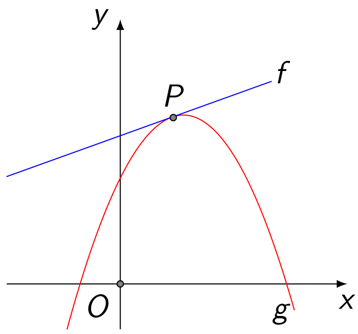


Figura 31 – Representação da concavidade da função polinomial de grau dois voltada para baixo

2.3.4 Intervalos monótonos da função polinomial de grau dois

Considere a função polinomial de grau dois e de equação $f(x) - y_V = a(x - x_V)$, com $a > 0$ e (x_V, y_V) as coordenadas do vértice V da parábola.

Seja $x_2 < x_1 < x_V$. Então, $x_2 - x_1 < 0$ e como $x_V - x_1 < 0$ e $x_V - x_1 < 0$, temos que $x_1 + x_2 - 2x_V < 0$.

Além disso,

$$f(x_1) - y_V = a(x_1 - x_V) \text{ e } f(x_2) - y_V = a(x_2 - x_V).$$

Segue que,

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2x_V) > 0,$$

ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$.

Portanto, f é decrescente para os valores de x menores que x_V.

Pode-se demonstrar, da mesma forma, que para valores de x maiores que x_V a função f é crescente.

Para $a < 0$, a dedução é análoga.

O estudante, visto a definição, deixa de trabalhar com a concavidade do gráfico da função de forma intuitiva ou visual e, dedutivamente, relaciona que o coeficiente a é o responsável pelo sinal da concavidade.

3

Aplicação das Sequências Didáticas

A turma do primeiro ano do ensino médio, a qual foram aplicadas a sequência didática é a do Colégio Estadual Cosme de Farias, situado na rua Wenceslau Galo, 1152, no bairro de Cosme de Farias, na cidade de Salvador-BA. Sua localização pode ser vista através da Figura 32 e sua fachada, pela Figura 33.

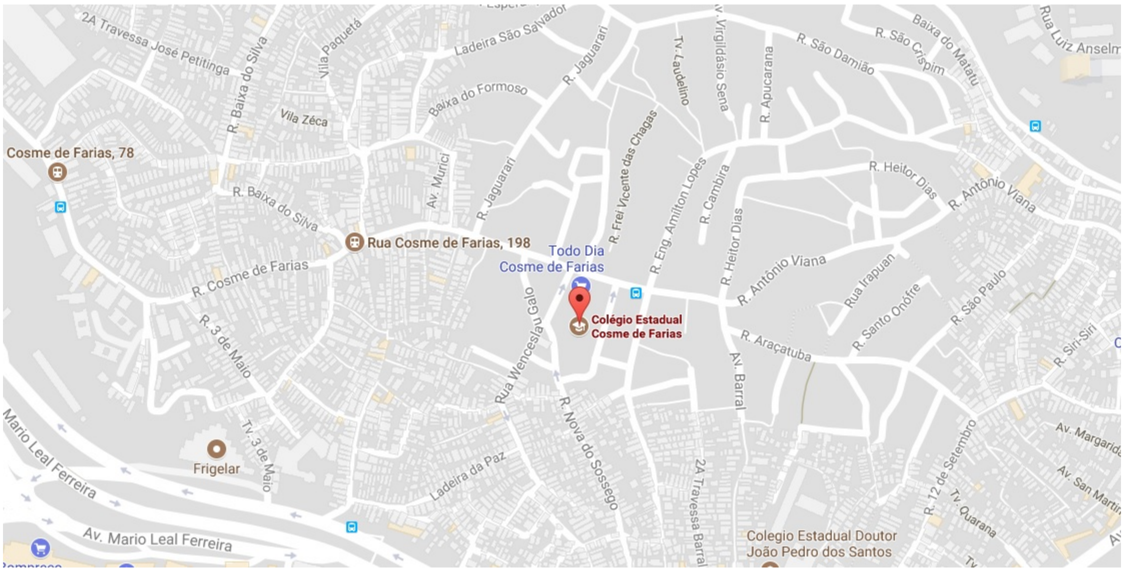


Figura 32 – Fonte: Google Maps

Esta unidade escolar possui turmas do 6° ano do ensino fundamental *I* até o 3° ano do ensino fundamental *II*. Composta por 13 salas de aula, 1 laboratório de informática, 1 laboratório de psicopedagogia,1 sala de professores, 1 secretaria escolar, cantina, pátio e uma sala da direção escolar distribuídos em um prédio de dois pavimentos.

A sala de aula onde esta sequência didática onde foi aplicada as atividades possui $40m^2$, dois janelões, 40 pares de mesa e cadeira, um quadro branco e uma tv de 40 polegadas e a turma correspondente é do primeiro ano *B*.

Figura 33 – Muro e fachada

3.1 Sequências didáticas

3.1.1 Sequência didática sobre função polinomial de grau um

O conteúdo abordado nesta sequência didática é função polinomial de grau um, com o objetivo geral de permitir que o aluno traduza e generalize padrões aritméticos, estabeleça relações entre grandezas variáveis, compreenda e utilize diversos significados do uso das funções para resolver problemas que envolvam a função de polinomial de grau um com objetivos específicos de identificar os coeficientes da função e realizar cálculos envolvendo as diferentes funções polinomiais de grau um. O material utilizado será folha de papel de ofício, caneta, lápis, borracha, marcador de quadro branco e quadro branco. O tempo utilizado para aplicação desta atividade foi de 100 minutos com o total 2 aulas.

A sequência didática sobre a função polinomial de grau um foi aplicada com cada aluno sentado em sua respectiva cadeira.

Os objetos utilizados foram papel de ofício, lápis, caneta azul ou preta, borracha, marcador de quadro branco, quadro branco e apagador.

QUESTÕES

1) Um segurança trabalha na empresa A e recebe um salário mensal de 1.000

reais quando não faz hora extra no mês. Para aumentar sua renda, ele faz hora extra quando um de seus colegas de trabalho atrasa ou falta o serviço. Sendo que a hora extra dele vale 100 reais.

a) Preencha a tabela 1, indicando a renda do segurança em função da quantidade de horas extras no mês que o segurança fez e o salário (fixo) que ele recebe na empresa A.

x (Horas extras)	0	1	2	3	4	8	9	11
y (Salário Total)								
Pontos	A	B	C	D	E	F	G	H

Tabela 1 – Relação entre quantidade de horas extras trabalhadas e o salário total

b) Levando em consideração que a representação gráfica de um ponto P a partir deste problema no plano é: P (H. extras, salário total). Localize os pontos A, B, C, D, E, F, G e H no plano cartesiano na figura 34.

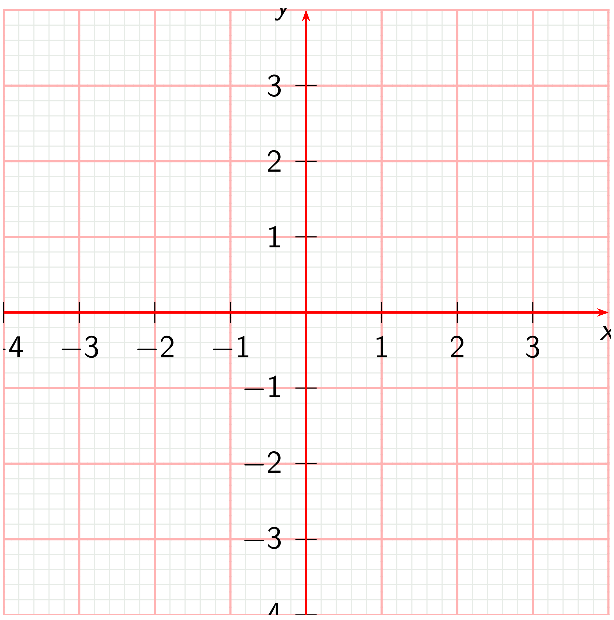


Figura 34 – Plano cartesiano

c) Sabendo se que o salário mensal do segurança pode ser representado por $y = mx + n$, uma função polinomial de grau um. Qual o valor de m e n?

Resposta:

d) Expresse o salário mensal total (y) deste segurança em função do número de horas extra trabalhadas (x) e de seu salário parcial.

Resposta:

2) Um outro segurança trabalha na empresa B, tem seu salário de 1.200 e quando um de seus colegas atrasa ou falta recebe 80 reais por hora extra trabalhada.

a) Preencha a Tabela ??, indicando a renda do segurança em função da quantidade de horas extras no mês que o segurança trabalhou e o salário (fixo) que ele recebe na empresa B.

x (Horas extras)	0	1	2	3	4	8	9	11
y (Salário Total)								
Pontos	A	B	C	D	E	F	G	H

Tabela 2 – Relação entre quantidade de horas extras trabalhadas e o salário total

b) Da mesma forma que foi feita a representação gráfica dos pontos do item anterior, localize os pontos A, B, C, D, E, F, G e H no plano cartesiano na figura 34.

c) Sabendo se que o salário mensal do segurança que trabalha na empresa B pode ser representado por $y = mx + n$, uma função polinomial de grau um. Qual o valor de m e n?

Resposta:

d) Expresse o salário mensal total y do segurança que trabalha na empresa B em função do número de horas extra trabalhadas x e de seu salário parcial.

Resposta:

3) Levando em consideração as questões 1 e 2, responda:

a) Para uma mesma quantidade de horas extras trabalhadas pelos seguranças das empresas A e B, qual o segurança tem o maior salário total no final do mês?

Resposta:

b) Em quantas horas trabalhadas pelos seguranças ambos terão no final do mês o mesmo salário?

Resposta:

c) A partir de quantas horas é vantajoso um segurança trabalhar na empresa A?

Resposta:

d) Até quantas horas é vantajoso um segurança trabalhar na empresa B?

Resposta:

e) Cite uma maneira de se chegar a quantidade de horas trabalhadas por ambos os seguranças para terem o mesmo salário no final do mês, sabendo-se as leis que representam os salários totais destes seguranças.

Resposta:

Análise da aplicação da sequência didática da função polinomial de grau um

Após a aplicação da atividade apresentada acima,foi analisada a questão $1a$ e observou que os 32 alunos responderam de forma satisfatória, onde teriam que preencher à tabela com o salário do segurança da empresa A. Na questão $1b$, 28 alunos representaram de forma compreensível à representação dos pontos corretamente A, B, C, D, E, F, G e H no plano cartesiano. Enquanto, os 04 restantes preferiram deixar à questão em branco. Na questão $1c$, 25 alunos conseguiram determinar os valores dos coeficientes m e n da função polinomial de grau um a função e os 07 restantes erraram pelo menos um dos coeficientes m ou n. Na questão $1d$, 25 alunos conseguiram montar a função polinomial de grau um e os 07 restantes erraram, pois coincidentemente foram os mesmos que erram o item $1c$. Percebemos, que as duas ultimas questões ($1c$ e $1d$) são dependentes.

Na questão $2a$ todos alunos responderam corretamente, pois é uma questão idêntica a questão $1a$. Enquanto, às questões $2b$, $2c$ os 32 alunos conseguiram responder corretamente as perguntas.

Foi visto que às respostas das questões $3a$ até a $3e$ dependiam das questões anteriores. Na questão $3a$, 21 alunos responderam satisfatoriamente, pois deviam ter analisado as duas tabelas preenchidas por eles e levarem em consideração as vantagens e desvantagens de se trabalhar na empresa A e na empresa B. Enquanto, os demais devem ter levado em consideração apenas o maior salário fixo dos seguranças das respectivas empresas. Na questão $3b$, $3c$ e $3e$ os 32 alunos responderam corretamente estas três questões. Na questão $3e$, 18 alunos reponderam corretamente a pergunta e 14 simplesmente erraram ou deixaram em branco.

Conclusões da sequencia didática sobre funções polinomiais de grau um

Como à sequencia didática envolvendo os conhecimentos sobre à função polinomial de grau um foi elaborada com os objetivos de que o alunos traduza e generalize padrões aritméticos, estabeleça relações entre grandezas variáveis, compreenda e utilize diversos significados do uso das funções para resolver problemas que envolvam a função de polinomial de grau um com objetivos específicos de identificar os coeficientes da função e realizar cálculos envolvendo as diferentes funções polinomiais de grau um e foi visto através da apresentação da quantidade de acertos que na maioria das questões os alunos conseguiram responder satisfatoriamente pode se concluir que esta sequencia didática contemplou positivamente aos conhecimentos adquiridos pelos educandos para o assunto abordado e os alunos apresentaram um bom desempenho nesta atividade.

3.1.2 Sequência didática sobre função polinomial de grau dois

Ao construir à sequencia didática sobre a função polinomial de grau dois, teve como objetivo geral resolver um problema de área envolvendo a respectiva função e com objetivo específico determinar os coeficientes, analisar o intervalo de crescimento/decrescimento, forma fatorada, o ponto de máximo e de mínimo e o esboço da função polinomial de grau dois. Para a aplicação da sequencia didática à sala foi arrumada com cada aluno sentado e em sua cadeira e foram usados folhas de papel de ofício, lápis preto, caneta preta borracha, marcador de quadro branco.

QUESTÕES

1) Sabendo se que um retângulo possui suas dimensões como mostra a figura 35, abaixo:

Levando em consideração a Figura 35, responda:

a) Qual a fórmula que representa a área deste retângulo?

Resposta:

b) Sendo $S(x)$ a função que representa a área deste retângulo. Qual a forma fatorada de $S(x)$?

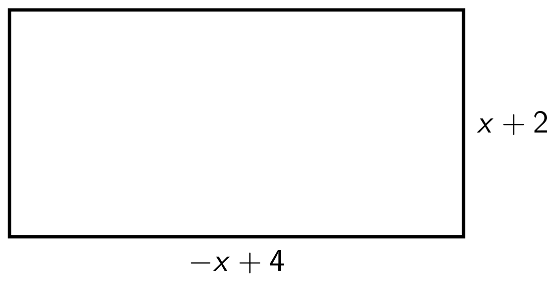


Figura 35 – Retângulo

Resposta:

c) Quais os valores das interseções com o eixo Ox do gráfico de $S(x)$?

Resposta:

d) Usando os valores de x, calcule os valores de $S(x)$ e preencha a Tabela 3.

Resposta:

x	$-2,0$	$-1,5$	$-1,0$	$-0,5$	$1,0$	$1,5$	$2,0$	$3,0$	$4,0$
$s(x)$									

Tabela 3 – Renda do segurança em função da quantidade de horas extras

e) Pode existir medida de área para o retângulo se atribuirmos valores para x entre -2 e -1?

Resposta:

f) Qual o intervalo que a área do retângulo é crescente?

Resposta:

g) Qual o intervalo que a área do retângulo é decrescente?

Resposta:

h) Quais são os valores dos coeficientes de $S(X) = ax^2 + bx + c$?

Resposta:

i) A concavidade do gráfico de $S(x)$ é positiva? ou negativa?

Resposta:

j) Quais as coordenadas (x_V, y_V) do vértice do gráfico da função $S(x)$?

Resposta:

k) Use o plano cartesiano da Figura 34 para esboçar o gráfico de $S(x)$.

Análise da aplicação da sequência didática sobre a função polinomial de grau dois

Com a correção da sequencia didática aplicada aos 32 alunos, analisamos que todos conhecem a fórmula que representa a área do retângulo, pois responderam corretamente a questão $1a$.

Na questão $1b$, que pediu a função $S(x)$ que representa a área do retângulo, 30 responderam corretamente, ou seja, conseguiram associar a área do retângulo com a função polinomial de grau dois na forma fatorada e 2 alunos não responderam esta questão.

Na $1c$, todos responderam corretamente. Porém, 3 alunos desenvolveram a fórmula da área de forma desnecessária e respondendo indiretamente a questão $1h$, encontrando os coeficientes da função polinomial e depois aplicando a fórmula de Bhaskara para encontrar as interseções do gráfico de $S(x)$ com o eixo Ox.

Na $1d$, 10 alunos não erraram os valores de $S(x)$ e 22 alunos erraram pelo menos um dos itens, mas o raciocínio dos mesmos para chegar à solução estavam corretos. Isso mostra que estes possuem pouca habilidade em realizar operações básicas com números inteiros.

A $1e$, todos erraram, enquanto as questões $1f$ e $1g$, 31 responderam corretamente e um deixou em branco.

Na $1h$, 29 alunos acertaram e pelo menos 3 erram pelo menos um dos coeficientes de $S(x)$.

Na $1i$, 28 alunos acetaram e 4 erraram.

Na questão $1j$, 30 responderam corretamente as coordenadas do vértice de

$S(x)$ e 2 erraram pelo menos um das coordenadas.

Na questão $1k$, todos marcaram pelo menos 3 pontos da parábola corretamente no plano cartesiano e considerei a questão como correta.

Conclusões da sequencia didática sobre funções polinomiais de grau dois

Após análise dos resultados, verificamos que a aplicação da sequência didática foi satisfatória, apesar da questão $1e$ ter uma taxa de insucesso expressiva. Nesta, pode-se perceber que o estudante não associou o esboço do gráfico a uma maneira de responder a questão (neste esboço, perceberiam que a os valores positivos de $S(x)$ se davam para valores entre os zeros desta função).

4

Considerações finais

A proposta aqui realizada trouxe vários conceitos, geralmente não abordados naquele momento do ensino (como, por exemplo, o conceito de concavidade e um pequeno estudo da parábola) e alguns vistos anteriormente (como, por exemplo, o intervalo onde as funções são monótonas), com o objetivo de tornar o assunto mais significativo dando uma visão menos intuitiva e não meramente feita através da memorização de fórmulas e de conteúdos. Outrossim, dar ao professor, uma melhor alternativa didática na apresentação dos assuntos referentes às funções polinomiais de grau um e dois.

Visto a sequência apresentada no Capítulo 2, os estudantes tem acesso a argumentos dos porquês dos assuntos apresentados, tornando-os mais atrativos, pois são melhor entendidos. As atividades desenvolvidas no Capítulo 3, foram pensadas de modo a trazer uma resposta ao professor sobre a absorção dos conteúdos que envolvem as funções polinomiais de grau um e dois, da maneira como os apresentados no Capítulo 2.

Foi possível constatar, que apesar das dificuldades em relação aos conteúdos trabalhados, a grande maioria dos estudantes apresentaram, durante o seu desenvolvimento, erros ou pouca habilidade na parte das operações básicas, como a multiplicação e a divisão envolvendo números inteiros, o que atesta a fragilidade na formação matemática inicial e, visto a necessidade de realização de atividades, como um pequeno workshop, com o objetivo de sanar essas deficiências.

Do ponto de vista capacitacional, foi fundamental a minha experiência neste curso de mestrado. Espero que o número de vagas seja ampliado para mais professores da rede pública de ensino que queiram se especializar e que essas sejam também remuneradas pois, no meu caso, sem ela, seria muito difícil vir a cursar o PROFMAT. Além disso, que seja estendido para as outras áreas do conhecimento e se tenha um curso de Doutorado Profissionalizante em Matemática.

Pretendo continuar com o estudo da forma de como os conteúdos que envolvem a matemática no segundo grau são vistos, apresentar propostas para o seu aprendizado e desenvolver atividades cuja aplicação traga mais envolvimento do estudante e passem a gostar mais da matemática. Além disso, escrever um ou mais artigos para que sirvam como base de um anteprojeto para um possível doutorado em Educação Matemática.

Referências

BRASIL. **Ensino Médio Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias**. [S.l.], 2017. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>.

CASTILHO, K. L.; Sá, L. S. Parábola. **iff**, 2007.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria analítica**. [S.l.: s.n.], 2013.

IEZZI, G. **Matemática ciência e aplicação**. São Paulo, SP, Brasil: Editora Saraiva, 2013.

KISHIMOTO. O jogo e a educação infantil. **Perspectiva**, v. 12, n. 22, p. 105–128, 1994.

MIGUEL, J. C. O ensino de matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico-metodológicas. **Núcleos de Ensino-PROGRAD-UNESP**, v. 1, p. 375–394, 2011.

PAIVA, M. **Matemática Paiva**. São Paulo, SP, Brasil: Editora Moderna, 2013.

SILVA, G. S. Por que elipse, parábola e hipérbole. **Revista do Professor de Matemática**, v. 1, p. 43–44, 1985.

SOUZA, J. **Novo Olhar Matemática**. São Paulo, SP, Brasil: Editora FTD, 2013.

WALD, R. M. General relativity, chicago, usa: Univ. **Pr. 491p**, 1984.

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas / Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Rua Rui Barbosa, 710, Centro, Campus Universitário de Cruz das Almas, Cruz das Almas-BA
CEP: 44380-000
Telefone: (75) 3621-4314
<http://www.ufrb.edu.br/profmat/>