



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS



PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS EM SUBCONJUTOS DE \mathbb{Z} :
UMA VISÃO ERGÓDICA

CARLOS ALISON DE SOUZA AZEVEDO

Cruz das Almas-Bahia

Junho de 2017

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS EM SUBCONJUTOS DE \mathbb{Z} : UMA VISÃO ERGÓDICA

CARLOS ALISON DE SOUZA AZEVEDO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Profa. Dra. Katia Silene F. Lima Rocha

Cruz das Almas-Bahia

Junho 2017

Azevedo, Carlos Alison de Souza.

Progressões Aritméticas em Subconjuntos de \mathbb{Z} : Uma Visão Ergódica / Carlos Alison de Souza Azevedo. – Cruz das Almas, 2017.

79 f. : il.

Orientadora: Profa. Dra. Kátia Silene Ferreira Lima Rocha.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2017.

Referências bibliográficas.

1. Progressões Aritméticas. 2. Medida. 3. Teoria Ergódica. 4. Sistemas Dinâmicos. 5. Números Primos.

I. Rocha, Katia Silene F. Lima . II. Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, CETEC. III. Título.

CDU : número

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS EM SUBCONJUTOS DE \mathbb{Z} : UMA VISÃO ERGÓDICA

CARLOS ALISON DE SOUZA AZEVEDO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em .. de Junho de 2017.

Banca examinadora:

Profa. Dra. Katia Silene F. Lima Rocha (Orientadora)
UFRB

Profa. Dra. Ana Carla Percotini da Paixão
UEFS

Prof. MSc. Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento
UFRB

Este trabalho é dedicado aos meus pais Ana e Hilário e aos meus irmãos Jaqueline e Everton.

Agradecimentos

Expresso minha gratidão às seguintes pessoas e instituições:

À coordenação e aos professores de pós-graduação do PROFMAT-UFRB, pela preocupação em solucionar questões acadêmicas nas quais eu estava diretamente envolvido;

À minha orientador Kátia Silene Ferreira Lima Rocha, pela confiança e incentivo;

A banca examinadora, pelas valorosas contribuições;

Aos meus amigos do PROFMAT-UFRB, pelo apoio acadêmico. E aos meus amigos de fora, pela compreensão, os quais não citarei nomes para não cometer injustiças;

Aos meus pais Ana e Hilário e irmãos Jaqueline e Everton, pela paciência, incentivo à persistência e pela oportunidade que me deram de estudar.

“Sucesso e genialidade, são 10 por cento de inspiração e 90 por cento de transpiração”

(Albert Einstein)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar duas demonstrações do teorema de Van der Waerden: uma via combinatória e outra via Sistemas Dinâmicos, além da demonstração do teorema de Szemerédi, via Teoria ergódica, explicitando a existência de Progressões Aritméticas em Subconjuntos quaisquer de \mathbb{Z} , bem como, discorrer sobre alguns problemas matemáticos históricos que levaram a necessidade desses referidos teoremas, além de discorrer a respeito da possibilidade de Progressões Aritméticas para um conjunto especial, o dos Números Primos. Para tanto, nos valem da pesquisa bibliográfica.

Palavras-chave: Progressão Aritmética, Sistema Dinâmico, Teoria Ergódica, Teorema de Van der Waerden, Teorema de Szemerédi, Números Primos.

Abstract

This work aims to present two demonstrations of Van der Waerden's theorem: a combinatorial path and another via Dynamical Systems, in addition to the demonstration of Szemerédi's theorem, via ergodic theory, explaining the existence of Arithmetic Progressions in any subsets of \mathbb{Z} , as well as to discuss some historical mathematical problems that led to the necessity of these mentioned theorems, as well as to discuss the possibility of Arithmetic Progressions for a special set, the Prime Numbers. For this we use bibliographical research.

Keywords: Arithmetic Progression, Dynamic System, Ergodic Theory, Van der Waerden's Theorem, Szemerédi's Theorem, Primal Numbers.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	8
1.1 Topologias	8
1.1.1 Topologias	8
1.1.2 Linguagem Básica de Topologia	10
1.1.3 Continuidade	11
1.1.4 Espaços Compactos	12
1.1.5 Produto Finito de Espaços	13
1.1.6 Espaços Métricos	14
1.2 Teoria da Medida	15
1.2.1 Espaços Mensuráveis	15
1.2.2 Espaços de Medida	19
1.2.3 Medida Produto	23
1.2.4 Medidas Positivas	24
1.2.5 Medidas Regulares	25
1.2.6 Funções Mensuráveis	26
1.3 Sistemas Dinâmicos	29
1.3.1 Sistemas Dinâmicos Discretos	29
1.3.2 Dinâmica no Espaço de Sequências	32
1.3.3 A dinâmica do Shift	34
1.4 Medidas Invariantes e Recorrência	34
1.5 Existência de Medidas Invariantes	39
1.5.1 Topologia Fraca*	39
2 O Teorema de Van der Waerden	44
2.1 Prova Combinatória	46
2.2 Prova por Sistemas Dinâmicos	53

3	O Teorema de Szemerédi	59
3.1	Prova Ergódica	61
3.2	Números Primos: procurando a “fórmula mágica”	62
4	Proposta de Atividade para o Ensino Médio	65
4.1	Antes da Execução da Atividade	66
4.2	A Execução da Atividade	68
	Conclusão	75
	Referências	77

Lista de Figuras

1	Soma dos número de 1 a 100	2
2.1	Bartel Leerndert Van der Waerden (1903-1996)	44
2.2	Ventilador Policromático com $d = l - 1$ pás.	47
2.3	Ventilador: $P.A_1, P.A_2, P.A_3$ e $P.A_4$	48
2.4	Blocos de [325]	50
2.5	Caso 1 de coloração para os blocos B_i e $B_i + d$	50
2.6	Caso 2 de coloração para os blocos $B_i, B_i + d$ e $B_i + 2d$	50
3.1	Endre Szemerédi (1940)	59

Introdução

Desde as primeiras séries do ensino fundamental, verificamos muitos alunos ressaltando a ideia de que a Matemática é uma disciplina complicada e sem aplicabilidade cotidiana; além disso, inúmeros professores focam no contexto de que a Matemática é difícil de ser ensinada de modo que a sua compreensão seja facilitada, do ponto de vista dos alunos. Devido isto, notamos que a Matemática está impregnada de crenças e mitos que foram sendo construídos num processo de relações, por meio das representações que se tem a respeito dela. As abordagens de muitos conteúdos feitas em sala de aula, por muitas vezes não são contextualizados reforçando esta imagem da disciplina.

No Sistema Educacional Brasileiro, o ensino das progressões aritméticas é simplesmente apresentado aos alunos como apenas mais um conteúdo da grade curricular, embora sua abordagem necessite de uma construção em conjunto (professor x aluno), e não apresente-se desvinculado de outras teorias matemáticas. Além disso, verifica-se a falta de uma correção e/ou investigação histórica, apontando os reais motivos que fizeram muitos matemáticos recorrerem ao estudo nessa área; a carência na apresentação dos avanços que vêm ocorrendo nos últimos tempos, junto ao estudo das progressões aritméticas; e apresentação de conceitos sem qualquer ligação com a realidade dos mesmos.

Vejamos alguns exemplos históricos nos quais são possíveis verificar a aplicação das progressões aritméticas:

1. As progressões foram estudadas desde povos muito antigos como os babilônicos. Inicialmente, procurou-se estabelecer padrões como o da enchente do Rio Nilo, onde os egípcios de 5000 anos atrás tiveram que observar os períodos em que ocorria a enchente do rio, pois para poderem plantar na época certa e assim garantir seus alimentos, os egípcios precisavam saber quando haveria inundações. Havia, portanto, necessidade de se conhecer o padrão desse acontecimento. Eles observaram que o rio subia logo depois que a estrela Sírius se levantava a leste, um pouco antes do Sol. Notando que isso acontecia a cada 365 dias, os egípcios criaram um calendário solar composto de doze meses, de 30 dias cada mês e mais cinco dias de festas, dedicados aos deuses Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nephthys.
2. Na Mesopotâmia surgiram várias tabletas babilônicas muito interessantes, mas ne-

nhuma delas foi tão extraordinária quanto a tableta Plimpton 322 (1900 a 1600 a.C.). Numa dessas tabletas, a progressão geométrica $1, 2, 2^2, \dots, 2^9$ é somada de forma que a série de quadrados $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2$ é achada.

3. O papiro Rhind (ou Ahmes) data aproximadamente de 1650 a. C. e nada mais é do que um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo.

O seguinte problema envolvendo a teoria de progressões se encontra no papiro Rhind:

“Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em Progressão Aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores”.

4. Presume-se que se deve a Pitágoras (585 a.C. - 500 a.C.) e aos sábios gregos que viveram depois dele, a criação da Aritmética, pois os pitagóricos conheciam as progressões aritméticas, as geométricas, as harmônicas e musicais, as proporções, os quadrados de uma soma ou de uma diferença. Ele associou o número à música e à mística, derivando-se dessa associação pitagórica os termos “média harmônica” e “progressão harmônica”. Como consequência de várias observações, concluíram que a relação entre a altura dos sons e a largura da corda da lira seria responsável pela existência da harmonia musical. Observaram, também, que os intervalos musicais se colocam de modo que admite expressão através de progressões aritméticas.
5. Gauss deu sinais de ser um gênio antes dos três anos de idade. Nesta idade aprendeu a ler e a fazer cálculos aritméticos mentalmente. Aos dez anos de idade, durante uma aula de matemática seu professor pediu para que todos os alunos obtivessem a soma dos números de 1 a 100. Em poucos minutos Gauss apresentou o resultado correto. Até então, ninguém era capaz desse feito. Ele se baseou no fato de que a soma dos números em posições opostas é sempre constante, ver Figura 1. Então ele multiplicou a constante (101) pelo número de termos (comprimento da P.A.) e dividiu pela metade, chegando a fórmula da soma da progressão aritmética.

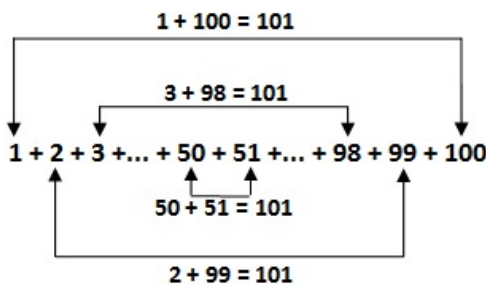


Figura 1: Soma dos número de 1 a 100

No decorrer das aulas, são incomuns indagações que levem o professor a pensar sobre o surgimento do estudo das progressões aritméticas, suas propriedades e os estudiosos responsáveis pelo desenvolvimento das teorias que as envolvem. Usualmente, estudar progressões limita-se ao cálculo de termos, número de termos e interpolações, excluindo a grande importância que seu estudo tem na História da Matemática.

Uma abordagem sólida dos conteúdos matemáticos, na educação básica, é fundamental, justo que há a grande necessidade em nortear os alunos, objetivando a compreensão de questionamentos adequados, levando-os a novas descobertas ou até mesmo à ampliação de raciocínios notáveis, o que segundo PCN [11] (Parâmetros Curriculares Nacionais), é um dos principais papéis do ensino de matemática na educação básica. O que de fato ocorre, na maioria das vezes, é que grande parte dos alunos reproduzem algoritmos sem saber interpretar cada etapa de suas ações e seus resultados. Há a necessidade, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, de um enfoque matemático que priorize a formulação de conceitos e não a memorização metódica de algoritmos. Com uma falta de organização de conceitos, o sujeito apresentará dificuldades durante sua vida escolar, principalmente quando diante de situações que exijam tomadas de decisões e estabelecer estratégias para resolução de problemas. As dificuldades provavelmente estarão presentes inclusive, em níveis de ensino mais elevados. Ideias mal idealizadas, primeiramente, se constituirão em impedimentos para uma compreensão de futuros conceitos. Portanto, cabe ao professor de matemática atentar-se às importantes teorias e as novas indagações que vêm surgindo ao longo do tempo.

Entende-se que o enfoque de conceitos mais bem elaborados e aprofundados sobre aritmética dos números, permitirá o desenvolvimento de habilidades e competências que servirão de base para potencializar toda a aprendizagem matemática, proporcionando ao aluno a elevação de sua habilidade de argumentar, de conjecturar, de generalizar e de investigar.

Desde Pitágoras e Euclides, muitos questionamentos na Matemática surgiram graças ao estudo dos números e, nos dias atuais, inúmeras indagações ainda não foram respondidas (conjecturas).

Verificamos que as progressões aritméticas estão diretamente relacionadas com características aditivas: Progressão Aritmética (P.A.) é definida como a sequência (a_n) , por exemplo, com a e $r \in \mathbb{R}$, tal que: $a_1 = a$ e $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$; e que ela dá origem a um dado conjunto numérico com características particulares. Notamos que o conceito de Progressão Aritmética está ligado ao conceito de conjunto, no entanto, esta relação é desprezada na sua abordagem. Cientes desta correlação (Progressão Aritméticas x Conjunto), se tomarmos um subconjunto qualquer de \mathbb{Z} , será possível obter uma progressão aritmética composta apenas por elementos deste conjunto?

Vários matemáticos fizeram essa pergunta, e algumas respostas foram obtidas; dentre as quais, uma das impressionantes se referem ao conjunto dos números primos. É claro que a definição dos números primos está diretamente ligada a características de multiplicação, o que permite extrair diversas propriedades multiplicativas elementares. Essa caracterização é notória na própria definição de números primos:

Um número inteiro n , maior do que um, cujos únicos divisores positivos são o próprio n e um é chamado de número primo. Se o número inteiro n maior do que um não é primo, diremos que ele é composto.

Como exemplo, verificamos que o produto entre números primos não resulta em um número primo. Ou a inexistência de progressões geométricas de comprimento (quantidade de termos da progressão) maior ou igual a 3 composta somente por primos.

É importante observar que quando nos referimos às características aditivas, nos deparamos com algumas surpresas. Vejamos um caso simples, mas curioso: a soma de dois números primos nem sempre é primo, por exemplo $2 + 3 = 5$ é primo, no entanto, no caso $3 + 5 = 8$, não é primo. Um fato interessante, é que o postulado de Bertrand diz que para todo natural n existe um primo entre n e $2n$, e devido à estas indagações, as seguintes perguntas merecem pelo menos um pouco de atenção:

É possível obter progressões aritméticas de comprimento maior ou igual a 3 formada somente por números de um conjunto qualquer? Caso positivo, quando isto é possível?

e

Existem progressões aritméticas de comprimento maior ou igual a 3 formadas somente por primos? E quantas existem uma vez que o comprimento for fixado?

No decorrer do desenvolvimento deste trabalho, verificaremos como a primeira pergunta impulsionou o desenvolvimento do estudo de Progressões Aritméticas (P.A.s) em subconjuntos dos inteiros e, como Ben Green e Terence Tao responderam ao segundo questionamento.

Embora os números primos fossem conhecidos, o que matematicamente interessava, de fato, eram os números perfeitos e os números amigáveis. Um número n é dito perfeito se a soma de seus divisores é igual a $2n$, e dois números se dizem amigáveis se o primeiro é a soma dos divisores próprios do segundo e vice-versa.

Apesar do avanço no estudo das progressões aritméticas e dos números primos, ainda existem problemas clássicos os envolvendo, tais como:

1. A conjectura dos primos gêmeos

Observando o exemplo inicial da introdução, verificamos que nem sempre a soma de dois primos resulta em um número primo. Supondo que fixando um primo p e somando à ele o número 2, resulte em um primo, existiriam infinitos primos (p) com essa propriedade? Determinamos, então a definição para primos gêmeos: se p e $p + 2$ são primos, então eles são gêmeos. Exemplos de primos gêmeos são: (3 e 5), (5 e 7), (11 e 13), (17 e 19), (29 e 31), (41 e 43). Um famoso problema da teoria dos números é a conjectura dos primos gêmeos:

Existem infinitos primos gêmeos?

O matemático norueguês Viggo Brun mostra que se existirem infinitos primos gêmeos, eles se tornam muito escassos quando olhamos para números muito grandes, o que torna a conjectura mais difícil. De fato o teorema de Brun diz que a série dos inversos dos pares de primos gêmeos ímpares converge (para um número conhecido como a constante de Brun):

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19}\right) + \dots < +\infty$$

2. A conjectura de Goldbach

A Conjectura de Goldbach estabelece que: “*Todo inteiro par $n \geq 2$ pode ser escrito como soma de dois primos*”. Ela também é conhecida como a Conjectura de Goldbach “forte”. Goldbach assumia que 1 era primo, o que não é mais usado.

Apesar da facilidade de seu enunciado, essa conjectura continua sendo um dos grandes desafios da teoria dos números. Apesar de serem apresentados diversos resultados à seu respeito, nenhuma prova parece se estender a uma demonstração da conjectura.

Goldbach ainda perguntava se todo número ímpar poderia ser escrito como a soma de três primos; que é conhecida como conjectura “fraca” de Goldbach:

Todo número ímpar $n > 5$ pode ser escrito como soma de 3 primos?

Em 2015, Harald Helfgott, matemático peruano, respondeu esta conjectura.

3. Primeiros Resultados sobre Progressões Aritméticas e Números Primos

Um dos resultados mais clássicos neste assunto é o teorema de Dirichlet que diz:

Se a e b são primos entre si então a progressão aritmética $a + nb$ contém infinitos primos.

Este resultado foi provado utilizando conceitos de L-séries e não afirma que a Progressão Aritmética é formada inteiramente de primos. No entanto, uma pergunta natural é se existe uma Progressão Aritmética de tamanho infinito formada somente de primos. A resposta é negativa segundo o teorema de Lagrange-Waring:

Considere uma progressão aritmética formada somente de primos, de comprimento k e de razão d . Então necessariamente d é divisível por todos os primos menores que k . Em particular, não existem progressões aritméticas de comprimento infinito formadas somente de primos.

Muitos professores da educação básica de ensino, por vezes, imaginam ter completa ciência sobre toda teoria que envolve as progressões aritméticas e os números primos, não hesitando em repetir suas definições e listando sequências numéricas, dentre elas os primos, exemplificando os próprios números primos, como números que não seguem o princípio das progressões aritméticas. No entanto, é suficiente questionar outros pontos, por exemplo: O conjunto dos números primos pode ser determinado por uma ou mais progressões aritméticas? -, que tais confianças vão desaparecendo. Por muitas vezes, tais conhecimentos a respeito desses números são deixados de lado pelo fato de o professor não identificar-se com a teoria estudada na graduação - por serem consideradas complexas e/ou sem utilidades.

Este trabalho tem como objetivo disponibilizar ao professor da Educação Básica, informações valiosas a respeito das Progressões Aritméticas em subconjuntos de \mathbb{Z} e sua relação com números primos. As demonstrações que envolvem os números primos e suas aplicabilidades, por vezes, são vistas como complicadas, induzindo o professor a deixar seu entendimento em segundo plano. Na tentativa de instigar o professor ao interesse por este estudo, adotaremos aqui uma abordagem diferenciada daquela vista nos cursos de graduação em Matemática tradicionais. Adotaremos o estudo via Sistemas Dinâmicos e Teoria Ergódica que, por sua vez, vem trazendo uma forma alternativa e, para alguns estudiosos, da compreensão da Teoria dos Números, tornando sua abordagem mais “prazerosa” e acessível.

Este trabalho está dividido em 5 capítulos subdivididos em seções. O primeiro deles faz uma abordagem preliminar de teorias matemáticas, como definições, proposições e teoremas demonstrados, algoritmos e outros resultados, que ajudarão no estudo. No segundo capítulo, apresentamos o Teorema de Van der Waerden e duas demonstrações; a primeira, por meio de Combinatória e a segunda por Sistemas Dinâmicos. No terceiro, aborda-se o Teorema de Szemerédi por um novo conceito - Teoria Ergódica -, apresentando algumas concepções matemáticas, segundo esta teoria, além de uma rápida explanação a respeito da co-relação entre este teorema e o conjunto dos números primos. O

quarto capítulo, está reservado à uma sugestão de atividade sobre progressões aritméticas e números primos. Por fim, no quinto capítulo, apresentaremos algumas propostas de trabalhos futuros para que possamos aprofundar conteúdos deste trabalho, principalmente do segundo e terceiro capítulos. Espera-se despertar no leitor a curiosidade pelo tema para uma reflexão e disseminação das ideias centrais nesse texto.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo, apresentaremos algumas noções e resultados básicos de Topologia, Teoria da Medida, Sistemas Dinâmicos e Teoria Ergódica que serão úteis para o desenvolvimento e entendimento deste trabalho. A intenção aqui é trazer ao leitor uma fonte de referência simplificada para uma leitura satisfatória dos capítulos seguintes. Não abordaremos toda a teoria sobre os conteúdos em destaque, justo que o capítulo será dedicado à abordagem de conceitos fundamentais ao desenvolvimento, no entanto, serão apresentados tópicos necessários à fundamentação e compreensão do propósito estabelecido. Dessa forma, omitiremos algumas provas de teoremas. Se o leitor possui conhecimento básico das Teorias mencionadas, pode passar à leitura do capítulo seguinte. Para o desenvolvimento deste capítulo, tomamos como bases bibliográficas [6], [7] e [9]. Algumas demonstrações dos conteúdos topológico podem ser estudadas em [28] e para um aprofundamento dos conhecimentos preliminares sobre Teoria da Medida, indicamos a leitura de [26].

1.1 Topologias

1.1.1 Topologias

Munir um conjunto X de uma topologia, equivale a muní-lo de uma “estrutura de abertos”. Essa estrutura deve satisfazer algumas condições que, por exemplo, possibilita a noção de “proximidade” e, principalmente, possibilita definir “continuidade” de funções. Segue a definição clara.

Definição 1.1.1. (*Topologia*) *Uma topologia em um conjunto X é uma família τ de subconjuntos de X tal que:*

- \emptyset e $X \in \tau$
- A união dos conjuntos de qualquer subfamília de τ pertence a τ .
- A interseção dos conjuntos de toda subfamília finita de τ pertence a τ .

Definição 1.1.2. Um espaço topológico é um par (X, τ) de um conjunto e uma topologia específica nesse conjunto. Um subconjunto U de X é aberto, se $U \in \tau$.

Quando nos referimos ao espaço topológico (X, τ) , dizemos que X está munido da topologia τ .

Exemplo 1.1.1. (Topologia trivial e a topologia discreta) Seja X é um conjunto qualquer. Uma topologia trivial em X é a topologia que consiste apenas dos conjuntos \emptyset e X . Ou seja, quando $\tau = \{X, \emptyset\}$. Essa topologia também é chamada de topologia caótica.

Outro exemplo é a topologia discreta em um conjunto X , onde se tomam todas as partes de X como conjuntos abertos.

Exemplo 1.1.2. Seja X um conjunto. Consegue-se definir uma topologia τ em X consistindo de todos os subconjuntos U , tal que $X - U$ é finito ou é o X todo.

Também é uma topologia em X a coleção de todos $U \subset X$, tal que $X - U$ é enumerável ou é o X todo.

Definição 1.1.3. (Vizinhança) Seja (X, τ) um espaço topológico. Um conjunto $V \subset X$ é uma vizinhança de um ponto $x \in X$, se V contém algum aberto que contenha x .

Lema 1.1.1. Seja X um espaço topológico. $A \subset X$ é aberto, se e somente se A é vizinhança de cada um de seus pontos.

Veremos agora que, dada uma topologia τ num conjunto X , podemos gerá-la a partir de certos abertos dessa topologia, no sentido que será esclarecido no lema 1.1.2. O fato desses abertos “gerarem” a topologia faz com que a família desses abertos receba o nome de “base da topologia”. Reduzir uma topologia à sua base nos será importante, pois nos facilitará verificar propriedades da topologia, como, por exemplo, a continuidade de uma função.

Definição 1.1.4. (Base) Seja (X, τ) um espaço topológico. A base da topologia τ é uma família B de abertos, chamados elementos básicos, tal que, $\emptyset \in B$ e, para cada $x \in X$ e cada vizinhança V de x , existe um aberto $\beta \in B$ tal que $x \in \beta \subset V$.

Lema 1.1.2. Sejam (X, τ) um espaço topológico e B uma base para a topologia τ . Tem-se que τ é a família das uniões dos elementos de B .

Exemplo 1.1.3. Para todo conjunto X , uma base para a topologia discreta é a família de todos os conjuntos unitários pertencentes à topologia τ . E a única base possível para a topologia trivial é a família que possui X e \emptyset somente.

Lema 1.1.3. Seja X um conjunto. Para que B seja uma base para alguma topologia em X é necessário e suficiente que B seja uma família de subconjuntos de X , tal que

- $\forall x \in X, \exists \beta_x \in B : x \in \beta_x$;
- $\forall \beta_1, \beta_2 \in B$, se $x \in \beta_1 \cap \beta_2$, então $\exists \beta_3 \in B : x \in \beta_3 \subset \beta_1 \cap \beta_2$;
- $\emptyset \in B$.

Exemplo 1.1.4. Para todo conjunto X , uma base para a topologia discreta é dada pela família de todos os conjuntos unitários.

Definição 1.1.5. (Subbase) Seja F uma família qualquer de subconjuntos de X . Existe uma menor topologia τ que contém F . Basta tomar a família B de todas as interseções finitas de F . B é a base da menor topologia que contém F . F diz-se subbase da topologia τ gerada por B .

Exemplo 1.1.5. (Topologia produto) Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dois espaços topológicos. Então a família $B = \{U \times V : U \text{ aberto em } X \text{ e } V \text{ é aberto em } Y\}$ é a base para a topologia produto de $U \times V$.

1.1.2 Linguagem Básica de Topologia

Segue alguns conceitos e terminologias básicas de topologia geral.

Definição 1.1.6. (Ponto isolado) Seja X um espaço topológico. $x \in X$ é um ponto isolado em X , se $\{x\}$ é um aberto em X .

Exemplo 1.1.6. Todos os pontos de um espaço discreto são isolados. Ou, com a topologia usual, o conjunto

$$\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$

é tal que 0 é o único ponto não isolado.

Definição 1.1.7. (Conjunto fechado) Um subconjunto A de um espaço topológico X é fechado, se $A^c = X - A$ é aberto.

Exemplo 1.1.7. O intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é um conjunto fechado em \mathbb{R} , quando munido da topologia usual. Basta ver que $[a, b]$ é o complemento da união dos abertos $(-\infty; a) \cup (b; +\infty)$. Mas o conjunto \mathbb{Q} não é fechado, nem aberto, em \mathbb{R} .

Lema 1.1.4. *Seja X um espaço topológico, sobre os conjuntos fechados de X pode-se afirmar que:*

- *A união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado;*
- *A interseção dos elementos de qualquer família de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

Definição 1.1.8. (*Interior de um conjunto*) *O interior de um subconjunto A de um espaço topológico (X, τ) é a união de todos os conjuntos abertos contidos em A .*

O interior de um conjunto A é denotado por $\text{int}(A)$ ou por A° . Em particular, $\text{int}(A)$ é aberto em X .

Definição 1.1.9. (*Fecho e densidade*) *O fecho de um conjunto $A \subset X$ é a interseção de todos os conjuntos fechados que contém A . O fecho de A é denotado por \bar{A} .*

*Os pontos do fecho de um conjunto A são ditos valores de aderência de A . O conjunto $A \subset X$ diz-se **denso** em B , se $\bar{A} = B$.*

Exemplo 1.1.8. *O conjunto \mathbb{Q} dos racionais é denso em \mathbb{R} . Mas \mathbb{Z} não é denso em \mathbb{R} .*

Os interiores de \mathbb{Q} e de \mathbb{Z} são vazios.

Proposição 1.1.1. (*Abertos e Fechados: caracterização*) *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Segue que são verdadeiras as afirmações:*

- *$A \subset X$ é aberto, se e somente se $A = A^\circ$.*
- *$A \subset X$ é fechado, se e somente se $A = \bar{A}$.*

Definição 1.1.10. (*Ponto de acumulação*) *Se $A \subset X$, diz-se que x é ponto de acumulação de A , se toda vizinhança U de x tem interseção com A que contenha um elemento diferente do x . O conjunto dos pontos de acumulação de A é chamado conjunto derivado de A .*

Lema 1.1.5. *Seja K o conjunto derivado de um subconjunto A de um espaço topológico (X, τ) . Segue que $(\bar{A} - A) \subset K$.*

1.1.3 Continuidade

Entre dois grupos, é definido um tipo de aplicação elementar que, de certa forma, preserva a estrutura de grupo: o homomorfismo. Entre dois espaços vetoriais, são definidas as transformações lineares.

Essas aplicações são os morfismos entre cada tipo de objetos. No caso da topologia, entre espaços topológicos, os morfismos são as aplicações contínuas. Segue a definição mais direta de aplicação contínua, partindo da definição de topologia adotada.

Definição 1.1.11. (Aplicação contínua) *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $T : X \rightarrow Y$ é contínua, se, $\forall U \subset Y$ aberto, $T^{-1}(U)$ também for aberto em X , ou seja, $T : X \rightarrow Y$ é contínua se valer:*

$$U \subset Y \text{ aberto} \Rightarrow T^{-1}(U) \text{ aberto em } X$$

Exemplo 1.1.9. *Seja (X, τ) é um espaço topológico. A aplicação identidade $id : X \rightarrow X$ do espaço topológico (X, τ) no próprio (X, τ) é contínua.*

Basta ver que $T^{-1}(A) = A$, donde segue que, se A é aberto, então $T^{-1}(A) = A$ é aberto.

Definição 1.1.12. (Homeomorfismo) *Sejam X e Y espaços topológicos e $T : X \rightarrow Y$ uma bijeção tal que ambas funções T e T^{-1} são contínuas. T é chamada de homeomorfismo, e X e Y são espaços topológicos homeomorfos. Ou, equivalentemente, $T : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo, se:*

$$U \text{ é aberto em } X \Rightarrow T(U) \text{ é aberto em } Y$$

1.1.4 Espaços Compactos

Uma das propriedades topológicas que é mais fortemente utilizadas em Dinâmica Topológica é a compacidade. O conceito de compacidade é, realmente, bem frutífero. A condição de compacidade diz que, de certa forma, o espaço topológico possui “poucos abertos”.

Definição 1.1.13. (Espaço compacto) *Uma família v de subconjuntos de um espaço topológico X cobre X , se a união de todos os elementos da família contém X . Essa família é chamada de uma cobertura aberta de X , quando seus elementos são todos conjuntos abertos.*

O espaço X é compacto, se toda cobertura aberta de X contiver uma subfamília finita que cobre X , ou seja, se toda cobertura aberta de X contiver uma subcobertura finita. Um subconjunto $K \subset X$ é compacto, se o subespaço K é compacto.

Um conjunto X é perfeito, se ele é compacto e não contém nenhum ponto isolado.

Teorema 1.1.1. *Seja $T : X \rightarrow Y$ contínua. Se X é compacto, então $T(X)$ é compacto. Consequentemente, se K e M são homeomorfos, K é compacto se, e somente se, M é compacto. Ou seja, compacidade é uma propriedade topológica.*

Exemplo 1.1.10. *A reta \mathbb{R} não é compacta. Basta ver que a cobertura aberta $\{(n, n+5) : n \in \mathbb{Z}\}$ não possui subcobertura finita. Como vimos no Teorema 1.1.1, compacidade é um invariante topológico, donde segue que os intervalos abertos não são compactos, pois esses são homeomorfos a \mathbb{R} .*

Um dos importantes meios de “obter-se espaços de outros espaços topológicos” é com os conceitos de topologia produto. Pretendemos definir uma topologia para um espaço topológico que seja o produto cartesiano de outros espaços topológicos.

1.1.5 Produto Finito de Espaços

Definição 1.1.14. *Seja $\{X_i\}_{i \in L}$ uma família finita de espaços topológicos, onde $L = \{1, 2, \dots, n\}$. A família*

$$B = \left\{ \prod_{i \in L} U_i : U_i \text{ é subconjunto aberto de } X_i \right\}$$

é uma base da topologia $\prod_{i \in L} X_i$. Essa topologia é denominada topologia produto $\prod_{i \in L} X_i$ e, quando não mencionado o contrário, o produto finito de espaços topológicos sempre é munido dessa topologia.

O espaço topológico $\prod_{i \in L} X_i$ munido da topologia produto é denominado *espaço produto*. As aplicações projeção $\pi_i : X \rightarrow X_i$, $\pi_i(x) = x_i$, desempenham papel principal quando falamos em topologia produto.

Proposição 1.1.2. *As projeções no espaço produto $\prod_{j \in L} X_j$ em qualquer um dos espaços X_i são aplicações contínuas. Ou seja, as projeções*

$$\begin{aligned} \pi_i : \prod_{j \in L} X_j &\rightarrow X_i \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_i \end{aligned}$$

são contínuas.

Teorema 1.1.2. *Sejam $\{X_i\}_{i \in L}$ uma família de espaços topológicos e Y um espaço topológico. Uma função*

$$T : Y \rightarrow \prod_{i \in L} X_i$$

é contínua se, e somente se, cada projeção $\pi \circ T (j \in L)$ é contínua; onde $\pi_j \prod_{i \in L} X_i \rightarrow X_j$ é a função projeção da j -ésima coordenada.

Teorema 1.1.3. (Teorema de Tychonoff) *Seja $\{K_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma família de espaços compactos. Segue que $\prod_{\lambda \in L} K_\lambda$ é compacto.*

Demonstração: *A demonstração completa deste Teorema encontra-se em [28].*

■

1.1.6 Espaços Métricos

Definição 1.1.15. *Uma métrica num conjunto X é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, x) = 0$;
- $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$;
- $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

*A última condição é chamada **desigualdade triangular**. A função d é chamada de “métrica” ou “função distância” em X , e o par (X, d) é um espaço métrico.*

É bem fácil encontrar exemplos de espaços métricos. \mathbb{R} é um espaço métrico, quando munido da métrica usual ($d(x, y) = |x - y|$). De forma mais geral, um espaço vetorial normado E é um espaço métrico, com sua métrica usual ($d(x, y) = \|x - y\|$).

Definição 1.1.16. (Espaço topológico metrizável) *Um espaço topológico (X, τ) é metrizável, se podemos definir uma métrica d em X que induza a topologia τ . Um espaço métrico pode ser considerado um par (X, d) , onde X é um espaço topológico metrizável e d é uma métrica que induza a topologia de X .*

Definição 1.1.17. (Conjunto limitado) *Seja M um espaço métrico. $A \subset M$ é um conjunto limitado, se o conjunto $\{d(x, y) : x, y \in A\}$ é limitado. Define-se, também, o diâmetro de A . Com efeito, se A é limitado, o diâmetro de A é dado por $\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.*

Definição 1.1.18. *Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $T : M \rightarrow N$ diz-se uniformemente contínua, quando para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(T(x), T(y)) < \varepsilon.$$

É evidente que toda aplicação uniformemente contínua é contínua.

Exemplo 1.1.11. *Sejam X, Y espaços métricos. Uma aplicação $T : X \rightarrow Y$ chama-se aplicação de Lipschitz, se existe $\lambda > 0$ tal que, para todo $x, y \in X$,*

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

Segue que toda aplicação de Lipschitz é uniformemente contínua. Afinal, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2\lambda}$.

Como é de Lipschitz, temos que

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &\leq \lambda d(x, y) \\ \frac{1}{\lambda} \cdot d(T(x), T(y)) &\leq d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2\lambda} = \delta \\ d(T(x), T(y)) &\leq d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

segue que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(T(x); T(y)) < \varepsilon.$$

1.2 Teoria da Medida

1.2.1 Espaços Mensuráveis

Uma noção básica na Teoria da Medida são as noções de álgebra e σ -álgebra de subconjuntos. Iniciamos por introduzi-las e estudar algumas de suas propriedades. Em seguida, definimos espaços mensuráveis e apresentamos uma técnica de construção de σ -álgebras. Dado um subconjunto $A \subset X$ denotaremos por A^c o complementar $X \setminus A$ do conjunto A em relação a X .

Definição 1.2.1. *Dado um conjunto X , formamos um conjunto \mathcal{S} de subconjuntos de X , designado classe de subconjuntos de X .*

$$\mathcal{S} = \{A; A \subseteq X\}$$

O estudo das classes de subconjuntos surge como necessidade de dotar coleções de subconjuntos com uma certa estrutura, que permita tornar a classe fechada relativamente a operações sobre conjuntos, tornando-se, assim, possível dotá-los de uma medida, em particular, a medida de probabilidade, que será definida posteriormente.

Exemplo 1.2.1. *A classe $\mathcal{P}(X)$ que contém todos os subconjuntos de X designa-se por vezes “classe das partes de X ”. Se X finito, $|X| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(X)| = 2^n$. Por exemplo:*

$$X = \{a, b, c\}; \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} = X\}$$

Por vezes, uma classe \mathcal{S} apresenta características próprias, nos permitindo extrair propriedades importantes e classificá-las de acordo suas particularidades.

Definição 1.2.2. *Uma classe \mathcal{S} de subconjuntos de X é chamada de **semi-anel** se:*

- (i) $\emptyset \in \mathcal{S}$;
- (ii) $\forall A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$;

(iii) $\forall A, B \in \mathcal{S}, B \subset A \Rightarrow A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n E_i$, onde os E_i são conjuntos disjuntos de \mathcal{S} .

Exemplo 1.2.2. Seja $\mathcal{S} = \{[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)\}$ (intervalos limitados de \mathbb{R}), onde $a \leq b$ são números reais. Quando $a = b$, temos o conjunto unitários $\{a\}$ e o conjunto \emptyset . A coleção de todos os intervalos limitados da reta é o exemplo básico de semi-anel.

Exemplo 1.2.3. Seja $X = \mathbb{R}^n$; temos que a classe $\mathcal{S} = I^n$ de intervalos finitos semiabertos de \mathbb{R}^n do tipo $\{(x_1, \dots, x_n) : a_i < x_i \leq b_i\}$ é um semi-anel.

Definição 1.2.3. Uma classe \mathcal{S} de subconjuntos de X é chamada de **anel** se:

$$(i) \forall A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S};$$

$$(ii) \forall A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \Delta B^1 \in \mathcal{S}.$$

Como $\emptyset = A \Delta A$, $A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$, e $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$ vemos que um anel é uma classe de conjuntos fechado sob as operações de união, intersecção e diferença e $\emptyset \in \mathcal{S}$. Assim, um anel é um semi-anel.

Exemplo 1.2.4. $\mathcal{S} = \{\emptyset, X\}$, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$, são exemplos de anéis.

Exemplo 1.2.5. Seja $\mathcal{S} = \{[a, b],]a, b[, [a, a] = \{a\}, [b, b] = \{b\}, \emptyset\}$, com $a < b$. \mathcal{S} não é um anel, pois a classe de intervalos semi-abertos em \mathbb{R} não é um anel, pois não é fechado sob diferença simétrica.

Definição 1.2.4. Qualquer classe \mathcal{S} de subconjuntos de X que é um anel e contém X é chamado uma **álgebra**. Assim, uma álgebra é uma classe de subconjuntos de X que satisfaz:

$$(i) X \in \mathcal{S};$$

$$(ii) A \in \mathcal{S} \Rightarrow A^c \in \mathcal{S};$$

$$(iii) A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{S}.$$

Definição 1.2.5. Qualquer classe \mathcal{S} de subconjuntos de X que é um álgebra e é fechada sob uniões enumeráveis é chamado uma **σ -álgebra**. Assim, uma σ -álgebra é uma classe de subconjuntos de X que satisfaz:

$$(i) X \in \mathcal{S};$$

$$(ii) A \in \mathcal{S} \Rightarrow A^c \in \mathcal{S};$$

¹ $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ é a diferença simétrica.

$$(iii) A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}.$$

Exemplo 1.2.6. *Exemplos (ou não) de σ -álgebra:*

- (a) *A coleção de todos os subconjuntos de X , $\mathcal{P}(X)$;*
- (b) *$\mathcal{S} = \{\emptyset, X\}$, a σ -álgebra trivial;*
- (c) *A coleção \mathcal{S} de todos os subconjuntos finitos de X não é uma σ -álgebra (nem mesmo uma álgebra) se X é infinito;*
- (d) *A coleção \mathcal{S} de todos os subconjuntos de X finitos ou com complementares finitos não é uma σ -álgebra (mas é uma álgebra) se X é infinito;*
- (e) *A coleção \mathcal{S} de todos os subconjuntos enumeráveis de X não é uma σ -álgebra (nem mesmo uma álgebra) se X é não enumerável;*
- (f) *A coleção \mathcal{S} de todos os subconjuntos de X enumeráveis ou com complementares enumeráveis é uma σ -álgebra.*

Definição 1.2.6. *Um espaço mensurável é uma dupla $(X; \mathcal{S})$ onde X é um conjunto e \mathcal{S} é uma σ -álgebra de subconjuntos de X . Os elementos de \mathcal{S} são chamados conjuntos mensuráveis (dizemos que um conjunto A é \mathcal{S} -mensurável se $A \in \mathcal{S}$).*

Note que dadas duas σ -álgebras distintas (\mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2), de X , por exemplo, temos que pelo menos $\{X, \emptyset\} \subset \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$, o que torna esta intersecção uma σ -álgebra. Este caso particular, nos reporta à seguinte proposição.

Proposição 1.2.1. *Seja X um conjunto. Então a intersecção de σ -álgebras de subconjuntos de X é uma σ -álgebra de subconjuntos de X .*

Dado um conjunto qualquer \mathcal{F} de subconjuntos de X , podemos aplicar a Proposição 1.2.1 à família de todas as σ -álgebras que contêm \mathcal{F} . Note que esta família é não vazia, uma vez que contém a σ -álgebra $2^X = \mathcal{P}(X)$, pelo menos. De acordo com a proposição anterior, a intersecção de todas estas σ -álgebras é também uma σ -álgebra, e é claro que contém \mathcal{F} . Além disso, do modo como é construída, ela está contida em todas as σ -álgebras que contêm \mathcal{F} . Portanto é a menor σ -álgebra que contem \mathcal{F} . Isto conduz ao seguinte corolário:

Corolário 1.2.1. *Seja X um conjunto e seja \mathcal{F} uma família de subconjuntos de X . Então existe uma σ -álgebra mínima que contém \mathcal{F} , a saber, a intersecção de todas as σ -álgebras que contém \mathcal{F} .*

Observação 1.2.1. *Esta σ -álgebra mínima é chamada a σ -álgebra gerada por \mathcal{F} e denotada por $\sigma(\mathcal{F})$.*

Um exemplo de σ -álgebra gerada, que nos será muito importante, é o da σ -álgebra dos borelianos de um espaço topológico, ou σ -álgebra de Borel.

Definição 1.2.7. *A σ -álgebra de Borel em \mathbb{R}^n é a σ -álgebra gerada pela coleção de abertos de \mathbb{R}^n e denotada por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Os **borelianos** são os conjuntos pertencentes à σ -álgebra de Borel.*

Exemplo 1.2.7. *Vejamos alguns exemplos:*

- a) *Se X é um espaço topológico, os abertos de X são borelianos, e os fechados também o são, uma vez que são complementares de conjuntos abertos.*
- b) *No caso em que o espaço topológico X é separado², os conjuntos contáveis são borelianos, uma vez que são uniões de famílias contáveis de conjuntos com um único elemento, que são fechados; em consequência, também os complementares de conjuntos contáveis são borelianos.*
- c) *Em \mathbb{R} , todos os intervalos são borelianos, uma vez que são conjuntos abertos ou conjuntos fechados ou interseções de um aberto com um fechado; por exemplo, $]a, b]$ é a intersecção do conjunto aberto $]a, +\infty[$ com o conjunto fechado $] - \infty, b]$.*

Proposição 1.2.2. *A σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de Borel em \mathbb{R} é gerada pelas seguintes coleções de subconjuntos:*

- (a) *a coleção de conjuntos fechados de \mathbb{R} ;*
- (b) *a coleção de todos os intervalos de \mathbb{R} da forma $(-\infty, b]$;*
- (c) *a coleção de todos os intervalos de \mathbb{R} da forma $(a, b]$.*

Demonstração: Sejam \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_2 e \mathcal{B}_3 as σ -álgebras geradas pelas coleções de conjuntos descritas nos itens (a), (b) e (c). Vamos mostrar que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supset \mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \supset \mathcal{B}_3$, e então que $\mathcal{B}_3 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Como $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ inclui a família de conjuntos abertos da reta e é fechada para complementação, também inclui os conjuntos fechados da reta; assim inclui a σ -álgebra gerada pelos conjuntos fechados, a saber, \mathcal{B}_1 . Os conjuntos da forma $(-\infty, b]$ são fechados e portanto $\mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2$. Como $(a, b] = (-\infty, b] \cap (-\infty, a]^c$, cada conjunto da forma $(a, b]$ pertence à \mathcal{B}_2 ; assim $\mathcal{B}_2 \supset \mathcal{B}_3$. Finalmente, note que todo intervalo aberto da reta é a união de uma sequência de intervalos da forma $(a, b]$ e que cada conjunto aberto da reta é a união de intervalos abertos. Assim, cada subconjunto aberto da reta pertence a \mathcal{B}_3 . ■

²Ser separável significa possuir um subconjunto enumerável denso em X .

Proposição 1.2.3. *A σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ de Borel é gerada por cada uma das seguintes coleções de conjuntos:*

- (a) *a coleção de conjuntos fechados de \mathbb{R}^d ;*
- (b) *a coleção de retângulos semi-abertos de \mathbb{R}^d da forma $\{(x_1, \dots, x_d); x_i \leq b\}$ para algum índice i e algum $b \in \mathbb{R}$;*
- (c) *a coleção de retângulos de \mathbb{R}^d da forma $\{(x_1, \dots, x_d); a < x_i \leq b\}$;*

1.2.2 Espaços de Medida

Vamos introduzir o conceito de medida, analisando algumas das suas propriedades fundamentais. Na sequência, apresentamos alguns resultados sobre construção de medidas e para o propósito desse texto, apresentamos a medida de Lebesgue em espaços euclidianos e analisaremos a medida produto em espaço de sequências.

Note que quando trabalhamos com os intervalos limitados da reta, podemos facilmente definir seu **comprimento**. Seja $S \in \mathcal{S}$, o comprimento de S é $\lambda(S) = b - a$. Quando $a = b$ temos os intervalos de comprimento zero, que são $\{a\}$ e \emptyset . Esta função $\lambda : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$ é o exemplo básico de medida.

Definição 1.2.8. *Chamamos de **medida** no espaço mensurável (X, \mathcal{S}) a qualquer função $\mu; \mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$, definida em uma σ -álgebra \mathcal{S} , tal que:*

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (ii) μ seja *finitamente aditiva*, isto é, se $S_1, \dots, S_m \in \mathcal{S}$ são conjuntos disjuntos e $\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^m S_i$ então $\mu(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^m \mu(S_i)$.

Neste trabalho, recorreremos às medidas $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$. No entanto, em outros estudos é possível trabalhar com **medidas vetoriais**, $\mu : \mathcal{S} \rightarrow V$, onde V um espaço vetorial ou **medidas complexas** $\mu : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$.

Para dar continuidade a este estudo, de agora em diante, \mathcal{S} denotará sempre um σ -álgebra e μ uma medida definida em \mathcal{S} .

Definição 1.2.9. *Dizemos que μ é σ -aditiva se, $S_1, S_2, \dots \in \mathcal{S}$ são conjuntos disjuntos e $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in \mathcal{S}$ então $\mu(S) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(S_i)$.*

Proposição 1.2.4. *Sejam X_1 e X_2 conjuntos quaisquer e \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 duas σ -álgebras em X_1 e X_2 , respectivamente. Então:*

$$\mathcal{C} = \{S \times T; S \in \mathcal{S}_1, T \in \mathcal{S}_2\}$$

é uma σ -álgebra em $X_1 \times X_2$ (chamada σ -álgebra produto).

Definição 1.2.10. *Uma medida μ é chamada uma **probabilidade** em uma σ -álgebra \mathcal{S} , se para $S \in \mathcal{S}$ tem-se $\mu(S) = 1$.*

O conceito de probabilidade foi introduzido por Pascal e Fermat no final do século XVI, entretanto toda a teoria de probabilidade até 1933 se baseava totalmente na ideia de frequência relativa. Em 1933, Kolmogorov revolucionou a teoria de probabilidade iniciando a versão axiomática de probabilidade baseando-se na definição acima de que a probabilidade é uma medida σ aditiva com medida total igual a 1.

Exemplo 1.2.8. *Uma medida de Dirac é uma medida δ_x em um conjunto X , com qualquer σ -álgebra de subconjuntos de X , definida para um dado $x \in X$ e qualquer conjunto (mensurável) $\mathcal{S} \subseteq X$ por*

$$\delta_x(\mathcal{S}) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathcal{S}; \\ 1, & x \in \mathcal{S}. \end{cases}$$

Esta medida δ_x é usualmente designada medida de Dirac no ponto x .

Teorema 1.2.1. (Extensão): *Seja \mathcal{S}_0 uma álgebra de subconjuntos de X e seja $\mu_0 : \mathcal{S}_0 \rightarrow [0; +\infty]$ uma função σ -aditiva com $\mu_0(\emptyset) = 0$ e $\mu_0(X) < 1$. Então existe uma única medida definida na σ -álgebra \mathcal{S} gerada por \mathcal{S}_0 que é uma extensão de μ_0 , isto é, para todo elemento $S \in \mathcal{S}_0$ temos que $\mu_0(S) = \mu(S)$.*

Definição 1.2.11. (Medida de Lebesgue): *A medida de Lebesgue é uma generalização do conceito de comprimento na reta, área no plano e volume no espaço. A medida está definida para uma ampla família de subconjuntos de \mathbb{R}^n ; σ -álgebras que contém abertos e fechados.*

Consideremos $M = [0, 1]$ e seja \mathcal{B}_0 a família de todos os subconjuntos da forma $B = I_1 \cup \dots \cup I_N$ onde I_1, \dots, I_N são intervalos disjuntos dois-a-dois. \mathcal{B}_0 é uma álgebra de subconjuntos de M . Além disso, há uma função $m_0 : \mathcal{B}_0 \rightarrow [0, 1]$ definida nesta álgebra por

$$m_0(I_1 \cup \dots \cup I_N) = |I_1| + \dots + |I_N|,$$

onde $|I_j|$ representa o comprimento de cada intervalo I_j . Temos que $m_0(M) = 1$.

A σ -álgebra \mathcal{B} gerada por \mathcal{B}_0 coincide com a σ -álgebra de Borel de M , já que todo aberto pode ser escrito como união enumerável de intervalos abertos disjuntos dois-a-dois. Então, pelo Teorema 1.2.1, existe uma única probabilidade m definida em \mathcal{B} que é uma extensão de m_0 . Chamamos m de **medida de Lebesgue em** $[0, 1]$.

Exemplo 1.2.9. (Medida de volume no círculo): *Chamamos círculo ao conjunto S^1 dos números complexos com módulo igual a 1. Considere a aplicação sobrejetora $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^1$ definida por $\gamma(t) = e^{2\pi it}$. Chamamos medida de Lebesgue no círculo à*

medida ν definida por $\nu(B) = 2\pi m(\gamma^{-1}(B))$. Assim, por exemplo, a medida de Lebesgue de um arco de círculo coincide com o seu comprimento.

Definição 1.2.12. (Medida Exterior de Lebesgue) Dado um intervalo aberto $I = (a; b) \subset \mathbb{R}$ defina $|I| = b - a$ e $|\emptyset| = 0$. Definimos a medida exterior de Lebesgue de $A \subset \mathbb{R}$ por:

$$\theta^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |I_j| \right\}$$

$\langle I_j \rangle_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de intervalos abertos tais que

$$A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$$

Exemplo 1.2.10. Considere uma enumeração $\{r_1, r_2, \dots\}$ do conjunto \mathbb{Q} dos números racionais. Defina μ por:

$$\mu(A) = \sum_{r_i \in A} \frac{1}{2^i}$$

Observe que a medida de qualquer aberto da reta é positiva pois, necessariamente, A contém algum r_i . Apesar disso, a medida de \mathbb{Q} é

$$\mu(\mathbb{Q}) = \sum_{r_i \in \mathbb{Q}} \frac{1}{2^i} = 1$$

Em particular, μ não é absolutamente contínua³ com respeito à medida de Lebesgue.

Este exemplo nos motiva a introduzir a definição de **Suporte de uma Medida**.

Definição 1.2.13. Seja X um espaço topológico e seja μ uma medida na σ -álgebra de Borel de X . O suporte (μ) da medida μ é o conjunto formado pelos pontos $x \in X$ tais que $\mu(V) > 0$ para qualquer vizinhança V de x .

Segue imediatamente da definição que o suporte de uma medida é um conjunto fechado. No Exemplo 1.2.10, o suporte da medida μ é toda a reta, apesar de que $\mu(\mathbb{Q}) = 1$. Se o espaço X é separável, então o suporte de qualquer medida é não-vazio

Proposição 1.2.5. Seja X um espaço topológico separável e μ uma medida (não-nula) em X . Então, o suporte $\text{supp}(\mu)$ é não-vazio.

³Dizemos que ν é absolutamente contínua com respeito a μ se $\mu(E) = 0$ implica $\nu(E) = 0$, qualquer que seja E o conjunto mensurável e denotamos por $\nu \ll \mu$.

Demonstração: Mostraremos este fato por contradição

Suponha que $\text{supp}(\mu)$ é vazio, então para cada ponto $x \in X$ podemos encontrar uma vizinhança aberta V , que denotaremos V_x , tal que $\mu(V_x) = 0$. Como X é separável, a sua topologia admite uma base enumerável de abertos $\{A_j : j = 1, 2, \dots\}$. Então, para cada x , podemos escolher $i(x) \in \mathbb{N}$, tal que $x \in A_{i(x)} \subset V_x$. Então,

$$X = \bigcup_{x \in X} V_x = \bigcup_{x \in X} A_{i(x)}$$

$$\mu(X) = \mu\left(\bigcup_{x \in X} A_{i(x)}\right).$$

Por indução, temos que

Se $X = A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)$ (disjuntos).

Logo,

$$\mu(X) = \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

Suponha que

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}) \leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_{m-1})$$

Mostraremos que

$$X = A_1 \cup \dots \cup A_m \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_m)$$

Note que

$$X = A_1 \cup \dots \cup A_m = (A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}) \cup (A_m \cap (A_1 \cup \dots \cup A_{m-1})^c)$$

$$\mu(X) = \mu((A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}) \cup (A_m \cap (A_1 \cup \dots \cup A_{m-1})^c)) =$$

$$= \mu(A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}) + \mu(A_m \cap (A_1 \cup \dots \cup A_{m-1})^c) \leq$$

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}) + \mu(A_m)$$

Por hipótese de indução, temos

$$\mu(X) \leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_{m-1}) + \mu(A_m)$$

e portanto

$$\mu(X) = \mu\left(\bigcup_{x \in X} A_{i(x)}\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_x) = 0$$

Isto é uma contradição e, portanto, $\text{supp}(\mu)$ não pode ser vazio. ■

1.2.3 Medida Produto

Dados dois espaços de medida $(X_1; \mathcal{A}_1; \mu_1)$ e $(X_2; \mathcal{A}_2; \mu_2)$, é possível tornar o produto cartesiano $X_1 \times X_2$ um espaço de medida, da seguinte forma.

Consideramos em $X_1 \times X_2$ a σ -álgebra gerada pela família de todos os produtos da forma $A_1 \times A_2$ com $A_1 \in \mathcal{A}_1$ e $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Ela é chamada σ -álgebra produto e representada por $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Em seguida, definimos

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2),$$

para $A_1 \in \mathcal{A}_1$ e $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Usando o teorema 1.2.1, obtém-se que existe uma única medida $\mu_1 \times \mu_2$ definida na σ -álgebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ que estende a igualdade anterior. Ela é chamada **Medida Produto**.

Esta construção se generaliza sem dificuldade ao produto de uma família finita qualquer de espaços de medida X_1, X_2, \dots, X_n . Para os nossos propósitos é útil ir mais longe e definir também o produto de uma família infinita enumerável de espaços de medida.

Consideremos espaços de medida $(X_i; \mathcal{B}_i; \mu_i)$, com $i \in \mathcal{I}$, onde o conjunto de índices tanto pode ser $\mathcal{I} = \mathbb{N}$ como $\mathcal{I} = \mathbb{Z}$. Consideremos o produto cartesiano

$$\Sigma = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i = \{(x_i)_{i \in \mathcal{I}} : x_i \in X_i\}.$$

Chamamos cilindros de Σ os subconjuntos da forma

$$[m, A_m, \dots, A_n] = \{(x_i)_{i \in \mathcal{I}} : x_i \in A_i\}, \text{ para } m \leq i \leq n$$

onde $m \in \mathcal{I}$, $n \in \mathbb{N}$ e $A_i \in \mathcal{B}_i$ para $m \leq i \leq n$. Por definição, a σ -álgebra produto em Σ é a σ -álgebra \mathcal{B} gerada pela família de todos os cilindros. A família \mathcal{B}_0 das uniões finitas de cilindros disjuntos dois-a-dois é uma álgebra (que gera \mathcal{B}). Definimos a medida produto μ em Σ . Consideramos a aplicação μ definida na família dos cilindros por

$$\mu([m, A_m, \dots, A_n]) = \prod_{i=m}^n \mu_i(A_i).$$

Em seguida estendemos μ à álgebra \mathcal{B}_0 , estipulando que a medida de qualquer união finita de cilindros disjuntos dois-a-dois é igual à soma das medidas dos cilindros. Esta extensão está bem definida e é σ -aditiva. Finalmente, recorrendo ao Teorema 1.2.1, estendemos μ para uma medida em $(\Sigma; \mathcal{B})$. O espaço de medida $(\Sigma, \mathcal{B}, \mu)$ construído desta forma é denominado produto dos espaços $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, $i \in \mathcal{I}$.

Exemplo 1.2.11. *Um caso particular importante da construção anterior ocorre quando os espaços $(X_i, \mathcal{B}_i; \mu_i)$ são todos iguais a um dado (X, \mathcal{C}, ν) . Estes sistemas modelam sequências de experimentos aleatórios idênticos em que o resultado de cada experimento*

é independente dos demais. Supõe-se que cada experimento toma valores no conjunto X , com distribuição de probabilidade igual a ν . Neste caso a medida μ fica dada por

$$\mu([m, A_m, \dots, A_n]) = \prod_{i=m}^n \nu(A_i),$$

e ela é chamada medida de Bernoulli definida por ν .

Exemplo 1.2.12. Seja $X = \{1, \dots, d\}$ um conjunto finito, munido da σ -álgebra 2^X , esta construção fica um pouco mais simples. Por exemplo, basta considerar apenas cilindros elementares

$$[m, a_m, \dots, a_n] = \{(x_i)_{i \in \mathcal{I}} \in X : x_m = a_m, \dots, x_n = a_n\}$$

onde cada A_j consiste de um único ponto a_j . De fato, todo cilindro é uma união finita de cilindros elementares dois-a-dois.

1.2.4 Medidas Positivas

Um semi-anel é uma coleção de conjuntos na qual é fácil se definir uma medida, entretanto, ela não é rica o suficiente para os propósitos necessários.

Proposição 1.2.6. Seja \mathcal{S} um semi-anel e seja $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ a coleção das uniões finitas disjuntas de elementos de \mathcal{S} , então se a medida μ em \mathcal{S} é σ -aditiva, sua extensão à $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ também é σ -aditiva.

Seja $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ uma medida σ -aditiva. Se $B \subset A$ estão em $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ então $\mu(B) \leq \mu(A)$, pois $A = B \cup (A \setminus B)$ (disjuntos), logo $\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B)$.

Proposição 1.2.7. Se os A_j estão em $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ então

$$\mu \left(\bigcup_{j=1}^m A_j \right) \leq \sum_{j=1}^m \mu(A_j).$$

Demonstração: Por indução, temos que

se $X = A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)$ (disjuntos).

Logo,

$$\mu(X) = \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

Suponha que

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}) \leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_{m-1})$$

Mostraremos que

$$X = A_1 \cup \dots \cup A_m \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_m)$$

Note que

$$\begin{aligned} X &= A_1 \cup \dots \cup A_m = (A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}) \cup (A_m \cap (A_1 \cup \dots \cup A_{m-1})^c) \\ \mu(X) &= \mu((A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}) \cup (A_m \cap (A_1 \cup \dots \cup A_{m-1})^c)) = \\ &= \mu(A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}) + \mu(A_m \cap (A_1 \cup \dots \cup A_{m-1})^c) \leq \\ &\quad \mu(A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}) + \mu(A_m) \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, temos

$$\mu(X) \leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_{m-1}) + \mu(A_m),$$

ou seja,

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^m A_j\right) \leq \sum_{j=1}^m \mu(A_j).$$

■

1.2.5 Medidas Regulares

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$, ou mais geralmente, X um espaço topológico.

Definição 1.2.14. *Seja $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$ medida finitamente aditiva. Dizemos que μ é regular quando, para todo $S \in \mathcal{S}$ e todo $\varepsilon > 0$, existem K compacto e G aberto pertencentes a \mathcal{S} , $K \subset S \subset G$, tais que: $\mu(S) - \varepsilon < \mu(K)$ e $\mu(S) + \varepsilon > \mu(G)$.*

Teorema 1.2.2. *Toda medida $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$ finitamente aditiva regular é σ -aditiva.*

Demonstração: Seja $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ disjunta, $S_n \in \mathcal{S}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um compacto $K \subset S$, $K \in \mathcal{S}$, tal que

$$\mu(S) - \varepsilon < \mu(K).$$

Também existem abertos $G_n \supset S_n$, $G_n \in \mathcal{S}$ tais que

$$\mu(S_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} > \mu(G_n).$$

Temos que $K \subset S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Logo, existe algum m tal que $K \subset \bigcup_{n=1}^m G_n$. Segue que,

$$\mu(K) \leq \sum_{n=1}^m \mu(G_n)$$

pela proposição 1.2.7,

$$\mu(S) - \varepsilon < \sum_{n=1}^m \mu(S_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n) + \varepsilon,$$

fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, provamos

$$\mu(S) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n).$$

Por outro lado, temos que $S \supset S_1 \cup \dots \cup S_n$. Segue que, $\mu(S) \geq \mu(S_1) + \dots + \mu(S_n)$ e fazendo $n \rightarrow \infty$ provamos

$$\mu(S) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n).$$

■

1.2.6 Funções Mensuráveis

Funções mensuráveis têm um papel em Teoria da Medida semelhante ao das funções contínuas em Topologia. De fato, assim como continuidade corresponde à ideia de que a família dos subconjuntos abertos é preservada, mensurabilidade corresponde à ideia de preservação da família dos conjuntos mensuráveis.

Para formalizarmos esta noção, consideremos um espaço mensurável qualquer (X, \mathcal{S}) . Denotaremos por $[-\infty, +\infty]$ o conjunto $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Definição 1.2.15. *Uma função $T : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ é mensurável se $T^{-1}((c, +\infty])$ pertence a \mathcal{S} para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 1.2.13. *A função característica ou indicadora de um conjunto $E \subset X$ é*

$$\mathbf{I}_E : X \rightarrow \{0, 1\}$$

definida por:

$$\mathbf{I}_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0, & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

Definição 1.2.16. *Seja \mathcal{S} uma σ -álgebra de subconjuntos de X . As funções \mathcal{S} -simples são as funções $T : X \rightarrow \mathbb{R}$ que são da forma:*

$$T = \sum_{j=1}^m r_j \mathbf{I}_{S_j}$$

onde os $S_j \in \mathcal{S}$ são disjuntos, $r_j \in \mathbb{R}$.

Observação 1.2.2. *A representação de uma função simples não-nula T é única se os r_j 's são não nulos únicos e se os S_j 's são disjuntos.*

Trataremos aqui, a noção de integral de uma função em relação a uma medida. Esta noção nos permite, por exemplo, definir a Integral de Lebesgue, que generaliza a noção de integral de Riemann, normalmente apresentada nos cursos de Cálculo ou num primeiro curso de Análise. A motivação para fazermos esta generalização é que a integral de Riemann não está definida para muitas funções úteis, por exemplo, para funções características de conjuntos mensuráveis em geral.

Definição 1.2.17. *Definimos a **integral** da função simples T relativamente à uma medida $\mu : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ por:*

$$\int Td\mu = \sum_{j=1}^m r_j \mu(S_j).$$

A dificuldade desta definição é que uma função simples T possui mais de uma representante e precisamos garantir que o valor do segundo membro desta igualdade independe do representante que escolhemos para T . O próximo Lema garante isso.

Lema 1.2.1. *Seja (X, \mathcal{S}, μ) um espaço de medida. Se*

$$\sum_{i=0}^m a_i I_{E_i} = \sum_{j=0}^n b_j I_{F_j},$$

onde todos os E_i e F_j são mensuráveis e $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, então

$$\sum_{i=0}^m a_i \mu(E_i) = \sum_{j=0}^n b_j \mu(F_j).$$

Vamos definir a integral de funções não-negativas usando funções simples.

Definição 1.2.18. (Integral de funções não-negativas): *Seja $(X; \mathcal{S}; \mu)$ um espaço de medida e $T \geq 0$ uma função \mathcal{S} -mensurável. Definimos a integral da função não-negativa T com relação a medida μ por*

$$\int Td\mu = \sup \left\{ \int gd\mu : g \text{ é uma função simples e } 0 \leq g \leq T \right\}.$$

É comum integrarmos uma função em um subconjunto de um espaço de medida; por exemplo integrar $\int_a^b f(x)dx$, com $a < b$ em \mathbb{R} .

Definição 1.2.19. (Integração em Subconjuntos): *Seja $(X; \mathcal{S}; \mu)$ um espaço de medida, $E \in \mathcal{S}$ e $T \geq 0$ uma função \mathcal{S} -mensurável. Definimos*

$$\int_E Td\mu = \int \tilde{T}d\mu, \text{ onde } \tilde{T}(x) = \begin{cases} T(x), & \text{se } x \in E, \\ 0, & \text{se } x \in X \setminus E. \end{cases}$$

Exemplo 1.2.14.

$$\int_E 1d\mu = \mu(E)$$

Definição 1.2.20. Definimos a parte positiva T^+ e a parte negativa T^- de uma função T por

$$T^+(x) = \max(0, T(x)), T^-(x) = \max(0, -T(x)).$$

Assim, $T = T^+ - T^-$ com $T^+, T^- \geq 0$.

Definição 1.2.21. (Integral): Seja (X, \mathcal{S}, μ) um espaço de medida e $T : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{S} -mensurável. Definimos a integral da função T com relação a medida μ por

$$\int Td\mu = \int T^+d\mu - \int T^-d\mu$$

Se $E \in \mathcal{S}$, definimos

$$\int_E Td\mu = \int_E T^+d\mu - \int_E T^-d\mu$$

Observação 1.2.3. Se as integrais dos componentes positivo (T^+) e negativo (T^-) de T são ∞ , então a definição acima não faz sentido ($\infty - \infty$). Neste caso dizemos que T não é integrável. Se somente uma das duas integrais é ∞ , dizemos que a integral é $+\infty$ ou $-\infty$.

Definição 1.2.22. Dizemos que uma função é integrável se for mensurável e sua integral for um número real. Denotamos o conjunto das funções integráveis por $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ ou, simplesmente, por $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Dada uma função mensurável $T : X \rightarrow \mathbb{R}$ e um conjunto mensurável $E \in \mathcal{S}$ definimos a integral de T sobre E por

$$\int_E Td\mu = \int TI_E d\mu$$

onde I_E é a função característica do conjunto E .

Concluimos esta seção observando que a noção de integral pode ser estendida a uma classe ainda mais ampla de funções, não necessariamente mensuráveis mas que coincidem com alguma função mensurável num subconjunto com medida total do domínio. Para explicar isto precisamos da seguinte noção, que será utilizada frequentemente ao longo do texto:

Definição 1.2.23. Dizemos que uma propriedade é válida em μ -quase todo ponto (μ -qtp) se é válida em todo o X exceto, possivelmente, num conjunto de medida nula.

Exemplo 1.2.15. Dizemos que uma seqüência de funções $(T_n)_n$ converge para uma função em μ -quase todo ponto se existe um conjunto mensurável N com $\mu(N) = 0$, tal que $T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$ para todo $x \in X \setminus N$. Analogamente, dizemos que duas funções T e G são iguais em μ -quase todo ponto se existe um conjunto mensurável N com $\mu(N) = 0$, tal que $T(x) = G(x)$ para todo $x \in X \setminus N$.

Neste caso, supondo que as funções sejam integráveis, as suas integrais coincidem

$$\int T d\mu = \int G d\mu \text{ se } T = G \text{ em } \mu\text{-quase todo ponto.}$$

Esta observação permite definir integral para qualquer função T , possivelmente não mensurável, que é igual em μ -quase todo ponto a uma função mensurável G basta tomar $\int T d\mu = \int G d\mu$.

1.3 Sistemas Dinâmicos

O estudo de Sistemas Dinâmicos visa determinar e estudar leis que relacionem o estado atual e futuro de fenômenos de natureza biológica, física ou econômica, dentre outros. Temos um modelo matemático que reproduz o comportamento do sistema, tendo como objetivo principal a descrição de seu comportamento futuro a partir de um dado estado inicial e a determinação de suas possíveis trajetórias.

Nesta seção abordamos diversos conceitos e definições básicas que serão usados no texto. Ainda que a teoria dos Sistemas Dinâmicos possa ser feita em situações onde o tempo é uma variável real, nas linhas que seguiremos nos restringiremos ao caso de uma evolução discreta, ou seja, onde o tempo está em \mathbb{Z} (ou em um subconjunto de \mathbb{Z}). A construção desta seção estão baseadas na seguintes bibliografias: [2], [3], [9], [20] e [21].

1.3.1 Sistemas Dinâmicos Discretos

Um Sistema Dinâmico é uma função T definida em um certo conjunto X , ou seja,

$$T : X \rightarrow X$$

Denotaremos nesse texto um Sistema Dinâmico por: (X, T) .

A dinâmica (a passagem do tempo) é vista como sendo a iteração dessa função. Desta forma, se começamos com um ponto $x \in X$ (que corresponde ao instante zero) depois ele estará em $T(x)$ (instante 1), depois em $T(T(x))$ (instante 2) e assim sucessivamente. Para evitarmos escrever expressões como

$$T(T(T(T(x)))) \tag{1.1}$$

usaremos a seguinte convenção:

$$T^0(x) := x, T^1(x) := T(x), \dots, T^n(x) := T(T^{n-1}(x)), \text{ para } n \geq 1.$$

Desta maneira a expressão (1.1) pode ser reescrita simplesmente como $T^5(x)$ significando que T foi iterada 5 vezes. Nessa nova notação, pretende-se estudar a evolução no tempo de um ponto x , ou seja; $x, T(x), T^2(x), T^3(x), \dots$. Este conjunto é conhecido como órbita do ponto

$$\mathcal{O}(x) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^n(x)$$

Um dos objetivos da teoria é verificar se essa órbita tem algum limite. Em outras palavras, determinar se existem pontos para quais a órbita se aproxima infinitas vezes no futuro.

A estrutura do conjunto X (e a natureza da função T) variam bastante. O estudo da chamada dinâmica diferenciável, por exemplo, na qual $X = M$, onde M é uma variedade diferenciável e T é um difeomorfismo; nesse caso a existência de uma estrutura geométrica ajuda bastante a compreender melhor a evolução do sistema.

A compreensão do problema pode ser simplificada, se tomarmos X como um conjunto enumerável e finito. Nesse trabalho, pretendemos seguir exatamente esse caminho. Adotaremos uma dinâmica contínua em um espaço métrico, e recorreremos à um exemplo bastante clássico, mas riquíssimo, que é conhecido como **shift**.

Um dos objetivos em nosso estudo é entender o comportamento de um dado ponto x do sistema. Em outras palavras, verificar em qual momento este ponto volta ao seu estado inicial, ou para quais pontos sua órbita se aproxima. Para tanto, é importante darmos a seguintes definição:

Definição 1.3.1. Dizemos que x é um **Ponto Periódico** de período p , se p é o menor inteiro tal que $T^p(x) = x$. Quando $p = 1$, ou seja, temos que $T(x) = x$ então dizemos simplesmente que x é um ponto fixo para T . Quando x é periódico então sua órbita $x, T(x), T^2(x), \dots, T^{p-1}(x)$ é um conjunto finito, conhecido como órbita periódica.

Observação 1.3.1. Note que se y é um ponto periódico de período $p > 1$, então podemos definir uma função $G : X \rightarrow X$ como sendo $G = T^p$. Desta forma é fácil ver que

$$G(y) = T^p(y) = y,$$

ou seja, y é um ponto fixo de G e, se x é um ponto fixo de T , então também é fácil ver que

$$G(x) = T \circ T \circ \dots \circ T(x) = x$$

ou seja, x também é ponto fixo de G . Porém, se temos um ponto z que é fixo para G a única coisa que podemos afirmar é que ele é um ponto periódico de T .

Teorema 1.3.1. *Uma transformação $f : X \rightarrow X$ tem órbita densa se e somente se não tem nenhuma órbita periódica.*

Dada uma órbita $\mathcal{O}(x)$, podemos procurar os seus pontos de acumulação, ou seja, os pontos em torno dos quais a órbita irá passar uma infinidade de vezes. Este conjunto é conhecido como o ω -**limite** de x e denotado por $\omega(x)$. De forma mais técnica, dizemos que $z \in \omega(x)$ se existe uma sequência infinita e crescente de números naturais n_1, n_2, \dots tal que

$$d(T^{n_i}(x), z) \rightarrow 0; i \geq 1.$$

Podemos também falar no ω -limite de um conjunto:

$$\omega(Y) := \{\omega(x), \text{ para todo } x \in Y\}$$

Se a função T tem uma inversa (para isso é necessário e suficiente que T seja uma bijeção) então podemos também falar na órbita de um ponto para o passado e, procurar saber quais são os pontos de acumulação de uma órbita quando o tempo caminha no sentido contrário ao usual. Isso é o que se chama de α -**limite** de um ponto, denotado por $\alpha(x)$, e sua definição técnica é a seguinte: dizemos que $y \in X$ está em $\alpha(x)$ se existe uma sequência infinita e decrescente (ou seja, que vai para menos infinito) de números inteiros negativos m_1, m_2, \dots tal que

$$d(T^{m_i}(x), y) \rightarrow 0, i \geq 1.$$

Analogamente, podemos falar no α -limite de um conjunto:

$$\alpha(Y) := \{\alpha(x), \text{ para todo } x \in Y\}$$

De forma clara, estamos tentando compreender o conjunto de pontos que retornam para ele mesmo. Podemos, portanto, entendê-lo como um conjunto que atrai tais pontos e dizemos que um conjunto $A \subset X$ é um **Atrator** para um ponto x , se $T(A) = A$, ou seja, é um conjunto invariante para T e a órbita de x se aproxima de pontos de A ; mais precisamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n(x), A) = 0,$$

onde $d(p, A) = \inf_{a \in A} \{d(p, a)\}$. Note que uma vez que a órbita de x entra no conjunto A ela não pode mais sair. O conjunto de pontos cujas órbitas se aproximam de A é chamado de bacia de atração de A :

$$B(A) = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n(x), A) = 0\}$$

Quando $B(A) = X$, ou seja, todos os pontos têm sua órbita futura atraída para A então dizemos que A é um atrator global.

Observação 1.3.2. *Essa não é a definição mais geral de atrator, mas é razoavelmente simples e é adequada para os propósitos desse texto.*

Definição 1.3.2. *Seja (X, T) um sistema dinâmico. $M \subset X$ é minimal se é um subconjunto não-vazio, T -invariante, fechado e que não contenha partes próprias não-vazias fechadas que sejam T -invariantes. Ou seja, $M \subset X$ é minimal, se*

- M é fechado e T -invariante,
- $F \subset M$, $F \neq \emptyset$, F fechado e T -invariante $\Rightarrow F = M$.

Por sua vez, um sistema dinâmico (X, T) é denominado minimal se X é o minimal desse sistema dinâmico.

1.3.2 Dinâmica no Espaço de Sequências

Discorreremos, nesta seção, a respeito de um Sistema Dinâmico sobre um conjunto importante para nosso estudo, o **Espaço de Sequências**.

O objeto básico é o espaço

$$\{0, 1\}^{\mathbb{Z}} = \{(\dots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \dots), x_i \in \{0, 1\}\}$$

formado por seqüências de 0's e 1's que são infinitas. Um elemento típico é

$$\dots, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \dots$$

onde as reticências substituem uma infinidade de elementos que, obviamente, não podemos escrever.

Para simplificar a notação, convencionaremos o seguinte: o símbolo $0^{+\infty}$ corresponde a um bloco infinito (para a direita) de símbolos 0 ou seja,

$$0^{+\infty} = 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots$$

(e, nesse caso, as reticências substituem a infinidade de zeros que não escreveremos). De forma similar, definimos $1^{+\infty}$; podemos também indicar a repetição de um bloco de símbolos por meio dessa notação. Por exemplo,

$$(0110)^{+\infty} = \dots, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, \dots$$

$$001(1011)^{+\infty} = \dots, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, \dots$$

Para podermos falar em proximidade e em limites precisamos introduzir uma maneira de medir distâncias no espaço das seqüências $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, ou seja, precisamos definir

uma métrica. Há mais de uma maneira de fazer isso, mas seguiremos de perto apenas uma dessas alternativas.

Primeiro, dadas duas seqüências $(x_n) = (\dots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ e $(y_n) = (\dots, y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y_3, \dots)$ então definimos

$$N(x, y) = \min_{k \geq 0} \{|k|, x_k \neq y_k\}$$

Note que $N(x, y) = N(y, x)$ e que $N(x, x) = +\infty$. Aliás, esta última afirmação pode ser reescrita de maneira ainda mais forte, pois de fato se $N(x, y) = +\infty$ então necessariamente as duas seqüências coincidem termo a termo, ou seja, temos $x = y$. Logo $N(x, y) = +\infty \Leftrightarrow x = y$.

Agora vamos considerar um número real entre 0 e 1, por exemplo, $\frac{1}{2}$. Definimos então a distância entre duas seqüências $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ como sendo

$$d(x, y) = \frac{1}{1 + N(x, y)}$$

Em palavras, podemos dizer que essa noção de distância significa o seguinte: duas seqüências x e y estão próximas se coincidem no início, isto é, $x_0 = y_0, x_1 = y_1, x_2 = y_2$, até um certo $x_k = y_k$ e depois diferem.

Exemplo 1.3.1. *Considere as seqüências:*

$$(x_n) = \{1, 3, 5, 7, 4, 2, \dots\} \text{ e } (y_n) = \{1, 3, 5, 7, 3, 2, \dots\}.$$

Observe que em x_5 e y_5 , as seqüências se diferem, logo, $N(x, y) = \min_{k \geq 0} \{x_k \neq y_k\} = 5$.

Suponhamos que uma infinidade de seqüências coincidam até um dado $k - 1$, e vamos introduzir uma classe especial de conjuntos que tem um papel importante no estudo do espaço de seqüências.

Definimos o espaço de palavras de comprimento n , W_n como sendo o conjunto

$$W_n = \{(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) : x_i \in \{0, 1\}\}$$

Dada uma palavra $w \in W_n$ definimos o cilindro $[w]$ como sendo o conjunto

$$[w] = [w_0, w_1, \dots, w_{n-1}] = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} : x_0 = w_0, \dots, x_{n-1} = w_{n-1}\}$$

ou seja, este é o conjunto de seqüências de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ que coincidem com w em seus n primeiros símbolos.

Da definição de distância vemos então que se $a, b \in [w]$, então

$$d(a, b) \leq \frac{1}{1 + \min_{k \geq 0} \{|k|, x_k \neq y_k\}},$$

pois a e b certamente tem os n primeiros símbolos iguais.

1.3.3 A dinâmica do Shift

Vamos agora introduzir um Sistema Dinâmico $T : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ da seguinte forma:

$$T(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}} \quad (1.2)$$

ou seja, deslocamos as as coordenadas para a esquerda; por essa razão esta transformação é conhecida como “shift”, deslocamento em inglês.

Uma primeira observação importante é a seguinte:

Teorema 1.3.2. *A transformação $T : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, definida em (1.2), é uma função contínua.*

Demonstração: Queremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $d(T(x), T(y)) \leq \varepsilon$, se $d(x, y) \leq \delta$.

Primeiramente, consideremos $\varepsilon = \left(\frac{1}{2}\right)^N$. Então $d(T(x), T(y)) \leq \varepsilon$ é o mesmo que dizer que

$$d((\dots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \dots), (\dots, y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y_3, \dots)) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

o que significa que $x_i = y_i$, para todo i entre 1 e N . Agora, tome $\delta = \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^N \varepsilon$.

Então se $d(x, y) \leq \delta = \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$, temos que $x_i = y_i$, para todo i entre 0 e N .

Dessa forma, se $d(x, y) \leq \delta$, temos que $d(T(x), T(y)) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^N = \varepsilon$, como desejado.

No caso de um $\Delta > 0$ qualquer, basta tomar N_0 suficientemente grande, de forma que $\left(\frac{1}{2}\right)^{N_0} \leq \varepsilon$, pois assim

$$d(T(x), T(y)) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{N_0} \leq \varepsilon.$$

Então, podemos proceder como antes e encontrar o valor de $\delta = \left(\frac{1}{2}\right)^{N_0+1}$, mostrando assim que o shift efetivamente é uma função contínua. ■

1.4 Medidas Invariantes e Recorrência

A Teoria Ergódica estuda o comportamento de Sistemas Dinâmicos relativamente a medidas que permanecem invariantes sob a ação da dinâmica. Mais precisamente, busca-se descrever as propriedades que são válidas para quase toda a trajetória do sistema,

relativamente à medida invariante. Começaremos, nesta seção, por definir noções de medida invariante.

Uma pergunta natural é se existem sempre medidas invariantes para alguma transformação T dada. A resposta é positiva, sempre que o espaço X é compacto e a transformação é contínua, como veremos a diante.

Definição 1.4.1. *Seja (X, \mathcal{S}, μ) um espaço de medida e seja $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável. Dizemos que a medida μ é invariante por T se*

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)), \text{ para todo conjunto mensurável } A \subset X.$$

Nesse caso, também, dizemos que T preserva μ . Note que, pela definição, faz sentido, uma vez que a pré-imagem de um conjunto mensurável por uma transformação mensurável ainda é um conjunto mensurável, ou equivalentemente, que a probabilidade de um ponto estar num dado conjunto é igual à probabilidade de que a sua imagem esteja nesse conjunto.

É possível estender esta definição a outros tipos de sistemas dinâmicos além das transformações. Estamos interessados em fluxos, ou seja, famílias de transformações $T_t : X \rightarrow X$, onde $t \in \mathbb{R}$, satisfazendo as seguintes condições:

$$T^0 = id \text{ e } T^{s+t} = T^s \circ T^t, \text{ para todo } s, t \in \mathbb{R}.$$

Isto também implica que toda transformação T^t é invertível e sua inversa é T^{-t} .

Proposição 1.4.1. *Sejam $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável e μ uma medida em X . Então T preserva μ se, e somente se,*

$$\int \phi d\mu = \int \phi \circ T d\mu$$

para toda função μ -integrável ⁴ $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Um resultado importante neste estudo é o Teorema de Recorrência de Poincaré. O mesmo está formulado em duas versões: a primeira, no contexto de espaços de medida (finita) e, a segunda versão, supõe que o ambiente é um espaço topológico com certas propriedades adicionais. Também mostraremos uma terceira versão do teorema de recorrência, devida a Birkhoff, cuja formulação é puramente topológica.

A primeira versão afirma que, dada qualquer medida invariante finita, quase todo ponto de qualquer conjunto mensurável A regressa a A , um número infinito de vezes.

⁴A função T é integrável com relação a uma medida μ

Teorema 1.4.1. (Recorrência de Poincaré - Mensurável). *Seja $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável e seja μ uma medida finita invariante por T . Seja $A \subset M$ qualquer conjunto mensurável com $\mu(A) > 0$. Então, para μ -quase todo ponto $x \in A$ existem infinitos valores de n para os quais $T^n(x)$ também está em A , ou seja, para μ -qtp x em A , temos que existe um $n(x) \geq 1$ tal que $T^{n(x)}(x) \in A$. Portanto existe um N tal que:*

$$\mu(A \cap T^{-N}(A)) > 0.$$

Demonstração: Representemos por A_0 o conjunto dos pontos $x \in A$ que nunca regressam a A . Inicialmente, vamos provar que A_0 tem medida nula. Para isso, começamos por observar que as suas pré-imagens $T^{-n}(A_0)$ são disjuntas duas-a-duas. De fato, suponhamos que existem $m > n \geq 1$ tais que $T^{-m}(A_0)$ intersecta $T^{-n}(A_0)$. Seja x um ponto na intersecção e seja $y = T^n(x)$. Então $y \in A_0$ e $T^{m-n}(y) = T^m(x) \in A_0$, que está contido em A . Isto quer dizer que y volta pelo menos uma vez a A , o que contradiz a definição de A_0 . Esta contradição, prova que as pré-imagens são disjuntas duas-a-duas, como afirmamos.

Observando que $\mu(T^{-n}(A_0)) = \mu(A_0)$ para todo $n \geq 1$, porque μ é invariante, concluímos que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A_0)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T^{-n}(A_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_0)$$

Como supomos que a medida é finita, a expressão do lado esquerdo é finita. Por outro lado, à direita temos uma soma de infinitos termos, todos iguais. O único jeito desta soma ser finita é que as parcelas sejam nulas. Portanto, devemos ter $\mu(A_0) = 0$, tal como foi afirmado.

Agora, denotemos por F o conjunto dos pontos $x \in A$ que regressam a E apenas um número finito de vezes. Como consequência direta da definição, temos que todo ponto $x \in F$ tem algum iterado $T^k(x)$ em A_0 . Ou seja,

$$F \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(A_0)$$

Como $\mu(A_0) = 0$ e μ é invariante, temos:

$$\mu(F) \leq \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(A_0)\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(T^{-k}(A_0)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_0) = 0$$

Portanto, $\mu(F) = 0$, como queríamos provar. ■

Em particular, vemos que, por menor que seja um conjunto contendo um ponto x , se ele tem medida positiva então existem muitas órbitas que começam dentro desse conjunto e voltam infinitas vezes para este conjunto.

Agora, suponhamos que X é um espaço topológico, munido da sua σ -álgebra de Borel \mathcal{B} . Dizemos que um ponto $x \in X$ é recorrente para uma transformação $T : X \rightarrow X$ se existe uma sequência $n_j \rightarrow \infty$ em \mathbb{N} tal que $f^{n_j}(x) \rightarrow x$.

No próximo teorema, supomos que o espaço topológico X admite uma base enumerável de abertos, ou seja, existe uma família enumerável $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ de abertos tal que todo aberto de X pode ser escrito como união de elementos U_k dessa família. Esta hipótese é satisfeita na maioria dos exemplos interessantes.

Teorema 1.4.2. (Recorrência de Poincaré - Topológico). *Suponhamos que X admite uma base enumerável de abertos. Seja $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável e seja μ uma medida finita em X invariante por T . Então, μ -quase todo ponto $x \in X$ é recorrente para T , isto é, para quase todo ponto x existe uma sequência $n_k \rightarrow \infty$ de naturais tais que $d(T^{n_k}(x), x) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.*

Demonstração: Para cada k representamos por \tilde{U}_k o conjunto dos pontos $x \in U_k$ que nunca regressam a U_k . De acordo com o Teorema 1.4.1, todo \tilde{U}_k tem medida nula. Consequentemente, a união enumerável

$$\tilde{U} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \tilde{U}_k$$

tem medida nula. Portanto, para demonstrar o teorema será suficiente que mostremos que todo ponto x que não está em \tilde{U} é recorrente. Seja $x \in M \setminus \tilde{U}$ e seja U uma vizinhança qualquer de x . Por definição, existe algum elemento U_k da base de abertos tal que $x \in U_k$ e $U_k \subset U$. Como x não está em \tilde{U} , também temos que $x \notin \tilde{U}_k$. Em outras palavras, existe algum $n \geq 1$, tal que $T^n(x)$ está em U_k . Em particular, $T^n(x)$ também está em U . Como a vizinhança U é arbitrária, isto prova que x é um ponto recorrente. ■

Uma outra versão para o Teorema 1.4.1 é o que segue, totalmente topológico, enunciado por Birkhoff.

Teorema 1.4.3. (Recorrência de Birkhoff). *Se $T : X \rightarrow X$ é uma transformação contínua num espaço métrico compacto X , então existe algum ponto $x \in X$ que é recorrente para T .*

Demonstração: Considere a família \mathcal{I} de todos os conjuntos fechados não-vazios $M \subset X$ que são invariantes, no sentido de que $T(M) \subset M$. Esta família é não-vazia, uma vez que $X \in \mathcal{I}$. Afirmamos que um elemento $M \in \mathcal{I}$ é minimal para a relação de inclusão se, e somente se, a órbita de todo ponto $x \in M$ é densa em M . De fato, é claro que se M é fechado invariante então M contém o fecho da órbita de qualquer dos seus pontos. Logo, para ser minimal M precisa coincidir com qualquer desses fechos. Reciprocamente, pela mesma razão, se M coincide com o fecho da órbita de qualquer dos seus pontos então ele coincide com qualquer subconjunto fechado invariante, ou seja, M

é minimal. Isto prova a nossa afirmação. Em particular, qualquer ponto x num conjunto minimal é recorrente. Logo, para provar o teorema basta mostrar que existe algum conjunto minimal.

Afirmamos que todo conjunto totalmente ordenado $M_\alpha \subset \mathcal{I}$ admite algum mino-
rante. De fato, considere $M = \bigcap_{\alpha} M_\alpha$. Observe que M é não-vazio, uma vez que os M_α
são compactos e constituem uma família totalmente ordenada. É claro que M é fechado
e invariante por T e também que ele é um minorante para o conjunto M_α . Isto prova a
nossa afirmação. Agora podemos aplicar o Lema de Zorn⁵ para concluir que \mathcal{I} realmente
contém elementos minimais. ■

Até o presente momento, estamos trabalhando com uma única transformação
agindo no sistema. Suponha, agora, que outras transformações atuem sobre um mesmo
sistema concomitantemente. Para tanto, tomemos as seguintes definições:

Definição 1.4.2. *Seja X espaço métrico e sejam $T_1, T_2, \dots, T_m : X \rightarrow X$. Diz-se que T_i
e T_j são transformações que comutam entre si se $T_i \circ T_j = T_j \circ T_i, \forall i, j \in \{1, \dots, m\}$.*

Exemplo 1.4.1. *Sejam as funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln(x)$. Note que f e g comutam
entre si, já que $f \circ g = f(g(x)) = e^{\ln(x)} = x = x \ln(e) = \ln(e^x) = g(f(x)) = g \circ f$.*

Definição 1.4.3. *Um ponto $x \in X$ diz-se recorrente múltiplo para T_1, T_2, \dots, T_m se existe
uma sucessão de números naturais $n_k \rightarrow +\infty$ com $T_1^{n_k}, \rightarrow x, T_3^{n_k}, \rightarrow x, \dots, T_m^{n_k}, \rightarrow x$,
quando $k \rightarrow +\infty$.*

Munido dessas definições, podemos enunciar o Teorema 1.4.4.

Teorema 1.4.4. (Teorema de Recorrência Múltipla de Birkhoff). *Seja X um
espaço métrico compacto e sejam $T_1, T_2, \dots, T_m : X \rightarrow X$ transformações contínuas que
comutam entre si. Então X tem um ponto recorrente múltiplo.*

Demonstração: A demonstração deste teorema pode ser estudada em [6]. ■

Observação 1.4.1. *É possível tomar as interação $\{T^0(x), T(x), \dots, T^k(x)\}$ como trans-
formações distintas que comutam entre si.*

Teorema 1.4.5. (Recorrência Múltipla Topológica - Furstenberg e Weiss).
*Seja $T : X \rightarrow X$ contínua e X um espaço métrico compacto. Para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$
existe $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(T^{in}(x), x) < \varepsilon$ para todo $i = 1, \dots, k$. Mais ainda, dado
 $Z \subset X$ denso, podemos escolher $x \in Z$.*

Demonstração: A demonstração deste teorema pode ser estudada em [3]. ■

⁵(Lema de Zorn) Seja M um conjunto parcialmente ordenado não-vazio tal que cada cadeia em M
é limitada superiormente. Então M possui pelo menos um elemento maximal.

1.5 Existência de Medidas Invariantes

Aqui, recorreremos ao seguinte resultado, que garante a existência de medidas invariantes para uma classe muito ampla de transformações:

Teorema 1.5.1. (*Existência de Medidas Invariantes*). *Seja $T : X \rightarrow X$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto. Então existe pelo menos uma medida de probabilidade em X que é invariante por T .*

Um ponto principal é considerar uma certa topologia no conjunto $\mathcal{M}_1(X)$ das medidas de probabilidade em X , que chamamos de topologia fraca*. A ideia é que duas medidas são consideradas próximas se as integrais que elas dão a funções contínuas limitadas estão próximas.

1.5.1 Topologia Fraca*

A partir deste ponto, X sempre será um espaço métrico. O nosso objetivo é definir a topologia fraca* no conjunto $\mathcal{M}_1(X)$ das medidas borelianas de probabilidade em X e discutir as suas propriedades principais.

Representamos por $B(x, \delta)$ a bola de centro $x \in X$ e raio $\delta > 0$, e como de costume $d(\cdot, \cdot)$ a função distância em X . Dado $B \subset X$, denotamos $d(x, B) = \inf\{d(x, y) : y \in B\}$ e chamamos δ -vizinhança de B ao conjunto B^δ dos pontos $x \in X$ tais que $d(x, B) < \delta$.

Definição 1.5.1. *Dada uma medida $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$, um conjunto finito $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ de funções contínuas limitadas $\phi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ e um número $\varepsilon > 0$, definimos*

$$V(\mu, \Phi, \varepsilon) = \left\{ \nu \in \mathcal{M}_1(X) : \left| \int \phi_i d\nu - \int \phi_i d\mu \right| < \varepsilon, \forall i. \right\}$$

A interseção de dois quaisquer conjuntos desta forma contém algum conjunto desta forma. Isto assegura que a família $\{V(\mu, \Phi, \varepsilon) : \Phi, \varepsilon\}$ pode ser tomada como base de vizinhanças de cada $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$.

A topologia fraca* é a topologia definida por estas bases de vizinhanças. Em outras palavras, os abertos da topologia fraca* são os conjuntos $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1(X)$ tais que para todo elemento $\mu \in \mathcal{A}$ existe algum $V(\mu, \Phi, \varepsilon)$ contido em \mathcal{A} .

Teorema 1.5.2. *O espaço $\mathcal{M}_1(X)$ munido da topologia fraca* é compacto.*

Lema 1.5.1. *Uma sequência $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para uma medida $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$ na topologia fraca* se, e somente se,*

$$\int \phi d\mu_n \rightarrow \int \phi d\mu \text{ para toda função contínua limitada } \phi : X \rightarrow \mathbb{R}.$$

Demonstração: (\Leftarrow) Considere qualquer função contínua limitada ϕ e forme o conjunto $\Phi = \{\phi\}$. Como $(\mu_n)_n \rightarrow \mu$, temos que dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma ordem \bar{n} tal que $\mu_n \in V(\mu, \Phi, \varepsilon)$ para todo $n \geq \bar{n}$. Mas isto significa, precisamente, que

$$\left| \int d\mu_n - \int \phi d\mu < \varepsilon \right| \text{ para todo } n \geq \bar{n}.$$

Em outras palavras, a sequência $\left(\int \phi d\mu_n \right)_n$ converge para $\int \phi d\mu$.

(\Rightarrow) A recíproca afirma que se $\left(\int \phi d\mu_n \right)_n$ converge para $\int \phi d\mu$, para toda função contínua limitada ϕ então, dados quaisquer Φ e ε existe uma ordem a partir da qual $\mu_n \in V(\mu, \Phi, \varepsilon)$. Para verificar esse fato, escrevemos $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$. A hipótese garante que para cada i existe \bar{n}_i tal que

$$\left| \int d\mu_n - \int \phi d\mu < \varepsilon \right| \text{ para todo } n \geq \bar{n}.$$

Tomando $\bar{n} = \max\{\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_N\}$, temos $\mu_n \in V(\mu, \Phi, \varepsilon)$ para todo $n \geq \bar{n}$. ■

Teorema 1.5.3. (Banach-Alaoglu). A bola unitária fechada de X^* é compacta para a topologia fraca*.

Portanto, o espaço de probabilidades em X é compacto com respeito a convergência fraca.

Definição 1.5.2. Dizemos que uma sequência de medidas μ_k em X converge fracamente para μ se para toda função contínua $T : X \rightarrow \mathbb{R}$ vale:

$$\int_X T d\mu_k \rightarrow \int_X T d\mu.$$

Teorema 1.5.4. (Teorema Ergódico de Birkhoff). Seja $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável e μ uma probabilidade invariante por T . Dado qualquer conjunto mensurável $A \subset X$, o tempo médio visita

$$\tau(A, x) = \lim_k \frac{1}{k} \#\{j = 0, 1, 2, \dots, k-1, T^j \in A\}$$

existe em μ -quase todo ponto $x \in X$.

As vezes a estatística das órbitas é estudada do ponto de vista de um observável, isto é, uma função $T : X \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável. Mede-se então a média temporal

$$\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} f \circ T^j(x)$$

e pergunta-se se ela converge, e se o resultado da convergência é sempre o mesmo.

A frequência de visitação a um conjunto mensurável é um caso particular dessa média temporal, bastando tomar f como sendo a função característica I_A , pois

$$\frac{1}{k} \#\{0 \leq j \leq k; T^j(x) \in A\} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} I_A(T^j(x)).$$

No caso da função característica, perguntamos se a média temporal converge para $\mu(A) = \int_X I_A d\mu$

Começemos por introduzir uma notação útil. Dado $T : X \rightarrow X$ e qualquer medida η em X denota-se por $T^* \eta$ e chama-se iterado (ou imagem) de η por T a medida definida por $T^* \eta(A) = \eta(T^{-1}(A))$, para cada conjunto mensurável $A \subset X$. Note que η é invariante por T se, e somente se, $T^* \eta = \eta$.

Exemplo 1.5.1. Orbitas periódicas: Suponha que X é um espaço topológico e p um ponto tal que $T^k(p) = p$ e $T^j(p) \neq p, \forall j = 1, \dots, k-1$. Seja δ_x a medida de Dirac associada a um ponto x . Então a medida

$$\mu = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \delta_{T^j(x)}$$

é invariante por T .

Retornemos para a questão da existência de medidas invariantes. Seja η uma probabilidade qualquer. A ação dos iterados de T na medida η será dada pelo *push-forward*⁶. A propriedade de uma medida η ser invariante pode ser traduzida na equação $((T^*)^n \eta)(A) = \eta(A)$.

Consideremos a seguinte sequência de probabilidades:

$$\mu = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (T^j)^* \eta$$

Em suma, estamos tomando médias temporais das medidas obtidas por push-forward. Por compacidade, existe uma subsequência μ_k que converge fracamente para alguma probabilidade μ . Afirmamos que μ é invariante. De fato,

⁶push-forward: $((T^n)^* \eta)(A) := \eta(T^{-n}(A))$ para todo conjunto mensurável A

$$\begin{aligned}
T^* \mu &= T^*(\lim \mu_{n_k}) \\
&= \lim T^*(\mu_{n_k}) \\
&= \lim \left(T^* \left(\frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} (T^j)^*(\eta) \right) \right) \\
&= \lim \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} (T^{j+1})^*(\eta) \\
&= \lim \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} (T^j)^*(\eta) \\
&= \lim \frac{1}{n_k} \left(\left(\sum_{j=0}^{n_k-1} (T^j)^*(\eta) \right) - (T^0)^*(\eta) + (T^{n_k})^*(\eta) \right) \\
&= \lim \frac{1}{n_k} \left(\left(\sum_{j=0}^{n_k-1} (T^j)^*(\eta) \right) - \eta + (T^{n_k})^*(\eta) \right) \\
&= \lim \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} (T^j)^*(\eta) - \lim \frac{1}{n_k} \eta + \lim \frac{1}{n_k} (T^{n_k})^*(\eta) \quad (\text{i}) \\
&= \lim \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} (T^j)^*(\eta) - 0 + 0 \quad (\text{ii}) \\
&= \lim \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} (T^j)^*(\eta) \\
&= \lim \mu_{n_k} \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

Observação 1.5.1. A passagem (i) \rightarrow (ii) se justifica por:

$$\frac{1}{n_k} \int_X f d\mu \rightarrow 0 \text{ e } \frac{1}{n_k} \int_X f d((T^{n_k})^* \mu) = \frac{1}{n_k} \int_X f \circ T^{n_k} d\mu \rightarrow 0.$$

Uma pergunta natural a respeito do Teorema de Poincaré é se dado o conjunto A com medida positiva existe uma certa estrutura no conjunto de iterados que retornam à A , mais precisamente, sabemos que o conjunto é infinito, mas será que existe uma estrutura aritmética neste conjunto? Esta pergunta foi resolvida por Furstenberg e sua resposta é conhecida como o Teorema de Recorrência Múltipla Ergódica de Furstenberg.

Teorema 1.5.5. (Recorrência Múltipla Ergódica de Furstenberg). *Seja $T : X \rightarrow X$ μ -invariante, $k \geq 3$ e $\mu(A) > 0$, então existe N tal que:*

$$\mu(A \cap T^{-N}(A) \cap \dots \cap T^{-(k-1)N}(A)) > 0$$

Este teorema, cuja demonstração encontra-se em [6], é o coração da prova do teorema de Szemerédi através de métodos da Teoria Ergódica.

Para conclusão deste capítulo, faremos um breve comentário sobre uma das definições importantes para o desenvolvimento de nosso estudo: a Densidade de um conjunto.

O conjunto dos números pares possuem progressões aritméticas de comprimento arbitrário (com razão 2, por exemplo). Observe que num intervalo $[1, N] := \{n \in \mathbb{Z}; 1 \leq n \leq N\}$ essencialmente os pares ocupam metade deste conjunto. Da mesma maneira, os números ímpares também tem essa propriedade e possuem progressões aritméticas de comprimento arbitrário. Mais geralmente, escolhido um número k qualquer, observamos que para o conjunto de múltiplos de k , este conjunto essencialmente ocupa $\frac{1}{k}$ de $[1, N]$ e possui progressões aritméticas de comprimento arbitrário.

Com base nisto, podemos tentar dizer que um conjunto é “gordo” se ele ocupa uma fração positiva do intervalo $[1, N]$. Por outro lado, como queremos progressões de comprimento grande, iremos pedir que essa fração seja vista assintoticamente.

Definição 1.5.3. *Seja $A \subset \mathbb{Z}$ a densidade de A é:*

$$d(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|[1, N] \cap A|}{N}.$$

Aqui, dado $B \subset \mathbb{Z}$, denotamos por $|B|$ a cardinalidade de B .

Em termos simples, a Teoria Ergódica estuda iterações de uma transformação $T : X \rightarrow X$, onde X é um espaço de medida, do ponto de vista de uma medida μ invariante pela transformação T .

A medida invariante nos dá informação estatística importantes sobre a estrutura de órbitas da transformação T , isto é, dos conjuntos $T^n(x)_{n=0}^{\infty}$, para quase todo $x \in X$ com respeito a medida μ .

Diante de todas as definições apresentadas, podemos iniciar os processos demonstrativos dos Teoremas propostos neste trabalho.

Capítulo 2

O Teorema de Van der Waerden

Buscando por resposta a respeito de Progressões Aritméticas em subconjuntos de \mathbb{Z} , Bartel Leerdert van der Waerden (1903-1996), recorreu à sua experiência em Combinatória, obtendo o conhecido **Teorema de Van der Waerden**. Neste capítulo, demonstraremos o Teorema de Van Der Waerden por dois métodos: pela prova Combinatória, e por Sistemas Dinâmicos.

Van der Waerden (1903-1996), foi um matemático holandês responsável em impulsionar o desenvolvimento da Álgebra Moderna do século XX. Em seus trabalhos há uma grande influência na base dos estudos de Álgebra, desenvolvidos por Emmy Noether (1882-1935) e Emil Artin (1898-1962). Van der Waerden não simplesmente transcreveu as notas de aulas de Emmy Noether e de Artin, mas simplificou seu material, poliu as demonstrações e fez valorosas generalizações, veja [12].



Figura 2.1: Bartel Leerdert Van der Waerden (1903-1996)

O Teorema 2.1.1, demonstrado no início do século XX, é um dos mais impressionantes resultados na Teoria dos Números e seu conceito fundamental menciona colorações quaisquer do conjunto dos números inteiros. Segundo o teorema é possível (sempre) obter uma progressão aritmética monocromática ¹ de comprimento arbitrariamente grande. O Teorema 2.1.1 basicamente, responde o Teorema Finito de Ramsey, ver [15]: independente de como seja feita a coloração de algum objeto combinatório, um subconjunto monocromático ordenado sempre existirá. Em outras palavras, é impossível obter completa desordem, e que diretamente conecta-se com a Conjectura 2.0.1, creditado à Baudet e Schur em [13].

Conjectura 2.0.1. (*Baudet-Schur*). *Para qualquer partição dos números naturais em dois conjuntos, um dos conjuntos vai ter progressões aritméticas arbitrariamente longas.*

Van der Waerden provou esta conjectura, no entanto, de forma mais geral, já que \mathbb{Z} pode ser dividido de infinitas formas, ao invés de duas. O teorema de Van der Waerden teve grande relevância para a evolução de muitas áreas da Matemática, a exemplo: Combinatória Extremal, Combinatória Aditiva e a Teoria Ergódica. Foi de extrema importância para muitos avanços nos estudos de progressões aritméticas em subconjuntos dos números inteiros.

Um extenso campo da Matemática foi criado ao longo do tempo, que significativamente fizeram uma valiosa junção entre Teoria dos Números e os vários outros ramos da Matemática. Esta ligação, permitiu a construção de novos aparatos matemáticos, grandemente relevantes nas demonstrações das várias conjecturas na Teoria dos Números, veja [14].

Este teorema foi demonstrado seguindo dois ramos: Dinâmica Topológica e Combinatória, chamando a atenção de vários matemáticos. A declaração do teorema é simples, no entanto, é preciso uma compreensão e estudo mais a fundo para sua demonstração, o que exige conhecimentos não triviais, mas que apresentarão significantes informações, já que este teorema normalmente não faz parte dos currículos dos cursos de graduação em Matemática.

Exemplo 2.0.2. *Imagine que dispomos de duas cores, vermelho(1) e verde(2) por exemplo, e, com essas cores façamos uma coloração dos números inteiros de maneira que todos os inteiros sejam pintados com vermelho ou verde. Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, usando as cores vermelho e verde, uma forma de colorir para esse conjunto seria: cor vermelho = $\{2, 5, 7, 8, 9\}$, em outra notação: $\{2_1, 5_1, 7_1, 8_1, 9_1\}$; cor verde = $\{1, 3, 4, 6\}$, ou = $\{1_2, 3_2, 4_2, 6_2\}$, note que no conjunto cor vermelha existe um sequência de três números que são igualmente espaçados, isto é, formam uma progressão aritmética, são eles: 5, 7, 9.*

¹Composta somente de uma cor.

Agora, uma outra maneira de colorir o conjunto A com as mesmas cores: cor vermelho = $\{3, 5, 8, 9\}$; cor verde = $\{1, 2, 4, 6, 7\}$, e observe que de mesmo modo, temos uma progressão aritmética com três termos, 2, 4, 6, dessa vez no conjunto cor verde.

O Teorema de Van der Waerden é uma generalização ampla do exemplo anterior.

2.1 Prova Combinatória

Nesta seção, apresentamos a prova do teorema de Van der Waerden através do método de colorir em Combinatória (campo de estudo de Van der Waerden).

Definição 2.1.1. *Uma coloração de um conjunto A não vazio, com l cores, $l \in \mathbb{N}$ é uma maneira de particionarmos o conjunto A em l subconjuntos disjuntos, de forma que cada um deles é colorido com uma das l cores.*

Esta definição pode ser entendida como uma aplicação $c : A \rightarrow \{1, 2, \dots, l\}$. Dessa forma, cada maneira j de colorir consiste em uma aplicação $c_j : A \rightarrow \{1, 2, \dots, l\}$ diferente. Podemos enxergar também c como uma família de colorações c_j , com $j \in \mathbb{N}$.

Para simplificação de entendimento, vamos considerar as seguintes notações: $[l] = \{1, 2, \dots, l\}$ (refere-se números de cores); e $|A| = n$ (a cardinalidade do conjunto A , ou seja, n é o número de elementos).

Seja uma coloração $c : A \rightarrow [l]$. Dizemos que um dado $a \in A$ está pintado com a cor $i \in [l]$ se $c(a) = i$. Note que uma coloração não impede que elementos pintados de cores distintos estejam em um mesmo subconjunto de A . Para evitar tal situação, será necessário tomarmos a seguinte definição:

Definição 2.1.2. *Um conjunto $X \subset A$ é chamado de monocromático quando seus elementos são pintados por uma mesma cor através de uma dada coloração, caso contrário diremos que o conjunto é policromático.*

Exemplo 2.1.1. *Considere $c : [8] \rightarrow [3]$ uma coloração, e sejam os subconjuntos de $[8]$: $C_1 = \{1_1, 3_1, 6_1\}$; $C_2 = \{2_2, 4_2\}$; $C_3 = \{5_3, 7_2, 8_2\}$. Note que conforme a definição dada, C_1 e C_2 são conjuntos monocromáticos e C_3 é um conjunto policromático, pela coloração c .*

Definição 2.1.3. *Uma progressão aritmética (finita) de comprimento² k , razão r e centro³ a é um conjunto da forma:*

$$\{a, a + r, a + 2r, a + 3r, \dots, a + (k - 1)r\}$$

²O comprimento de uma progressão aritmética é o seu número de termos.

³O centro será o termo que gera os demais termos das P.A's

Para melhor entendimento, uma progressão aritmética $\{a, a+r, a+2r, a+3r, \dots, a+(k-1)r\}$ será denotada por $[a+kr]$.

Diante das definições até aqui explanadas, recorreremos ao entendimento de um conceito pouco abordado em Matemática: a ideia de ventilador. Para tanto, será precisa uma definição compatível com o fato da existência de diversas progressões aritméticas pertencentes à um mesmo conjunto.

Definição 2.1.4. *Dada uma coloração $c : A \rightarrow [l]$. Um ventilador com centro em a , grau d , raio k é uma d -upla de progressões aritméticas $([a+kr_1], [a+kr_2], \dots, [a+kr_d])$, em que $r_i > 0, i = 1, \dots, d, k \geq 1, d \geq 0$ e $a \in A$. Cada entrada da d -upla é chamada de pá do ventilador, dessa forma o raio k é o comprimento da pá e o grau d é o número de pás que o ventilador tem. Se as progressões que formam a pá do ventilador, bem como o seu centro, forem monocromáticos de cores diferentes, dizemos que o ventilador é policromático.*

O esquema geométrico que segue, “justifica” o nome ventilador, que surge naturalmente a partir dessa definição.

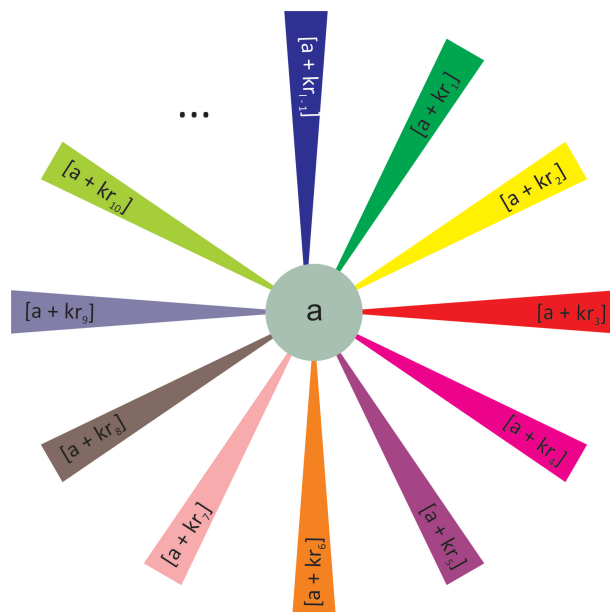


Figura 2.2: Ventilador Policromático com $d = l - 1$ pás.

Observação 2.1.1. *Um fato importante é que se temos l cores, um ventilador policromático terá grau no máximo $l - 1$. Este fato decorre da própria definição de ventilador policromático, pois se $c : A \rightarrow [l]$ é uma coloração com c_1, \dots, c_l cores distintas, para que o ventilador seja policromático devemos ter:*

$$c(a) = c_1, c(a + kr_1) = c_2, \dots, c(a + kr_d) = c_l,$$

ou seja, d é no máximo igual a $l - 1$.

Exemplo 2.1.2. *Sejam as cores: azul, preto, vermelho, amarelo, verde. Tome agora as progressões aritméticas: $P.A._1 = \{3, 6, 9, 12, 15\}$; $P.A._2 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$; $P.A._3 = \{4, 6, 8, 10, 12\}$; $P.A._4 = \{5, 9, 13, 17, 21\}$, imaginemos que $P.A._1$ é pintada por azul, $P.A._2$ pintada por preto, $P.A._3$ é pintada por vermelho e $P.A._4$ é pintada por amarelo. Para que o ventilador seja policromático é necessário que seu centro seja pintado de verde, observe que o centro do ventilador ($P.A._1, P.A._2, P.A._3, P.A._4$) é 2.*

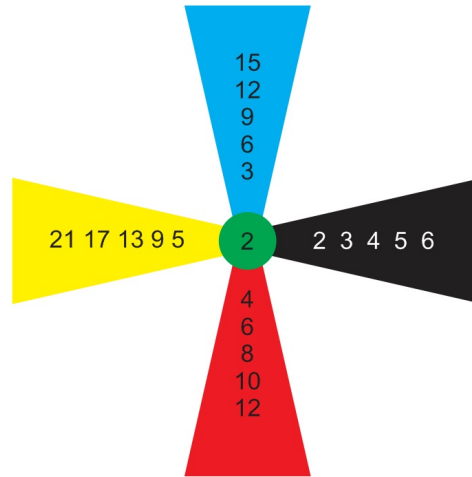


Figura 2.3: Ventilador: $P.A._1, P.A._2, P.A._3$ e $P.A._4$

Note que neste exemplo é possível decompor cada número de cada progressão como 2 mais algum número:

$$P.A._1 = \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{2 + 1, 2 + 4, 2 + 7, 2 + 10, 2 + 13\}$$

$$P.A._2 = \{2, 3, 4, 5, 6\} = \{2 + 0, 2 + 1, 2 + 2, 2 + 3, 2 + 4\}$$

$$P.A._3 = \{4, 6, 8, 10, 12\} = \{2 + 2, 2 + 4, 2 + 6, 2 + 8, 2 + 10\}$$

$$P.A._4 = \{5, 9, 13, 17, 21\} = \{2 + 3, 2 + 7, 2 + 11, 2 + 15, 2 + 19\}$$

Portanto, o ventilador ($P.A._1, P.A._2, P.A._3, P.A._4$) tem centro 2, grau 4 e raio 5. Além disso, verificamos que 5 cores foram necessárias para construir um ventilador de grau 4, o que corrobora a observação anterior.

Vejamos aqui mais algumas ferramentas que nos ajudarão na prova combinatória para o teorema de Van der Waerden.

Chamamos partição do conjunto dos números inteiros a qualquer família finita de conjuntos $C_1, \dots, C_k \subset \mathbb{Z}$ disjuntos dois-a-dois e cuja união é todo o \mathbb{Z} .

Teorema 2.1.1. (Van der Waerden) *Se $\mathbb{Z} = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_l$ é uma partição finita ($c : \mathbb{Z} \rightarrow [l]$ uma coloração dos inteiros), então, para algum $j \in \{1, 2, \dots, l\}$, C_j contém uma progressão aritmética finita de tamanho arbitrário. Ou seja, toda coloração finita de \mathbb{Z} contém uma P.A. de tamanho arbitrário finito monocromática.*

Para simplificação do desenvolvimento do texto, introduziremos algumas notações.

Definição 2.1.5. *Definimos então, $W(l, k) = n$ (número de Van der Waerden), em que n é o menor número natural para o qual toda coloração $c : [n] \rightarrow [l]$ possui pelo menos uma progressão aritmética monocromática de comprimento k , onde k é a quantidade de elementos da progressão aritmética monocromática e l é a quantidade de cores a ser colorido os elementos.*

Exemplo 2.1.3. *Vejamos alguns exemplos para W .*

- $W(l, 1) = l$, P.A. com 1 elemento e l cores;
- $W(1, k) = 1$, P.A. com k elementos e 1 cor;
- $W(2, k) = k + 1$, P.A. com k elementos e 2 cores.

Definição 2.1.6. *Definimos como bloco à um dado conjunto $B = \{b, b + 1, \dots, b + j\}$, com $j \in \mathbb{N}$, de números consecutivos. Uma translação d do bloco B como um conjunto da forma $B + d = \{b + d; b \in B\}$, em que $d \in \mathbb{N}$.*

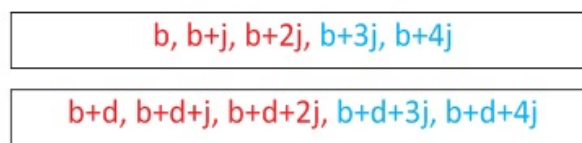
Dada uma coloração $c : [n] \rightarrow [l]$, se $B \subset [n]$ é um bloco de comprimento j , então podemos considerar todos os elementos de B pintados através da coloração c , de modo que tenhamos uma j -uplas de cores formando o conjunto $\{c(b) : b \in B\}$ que chamaremos de coloração induzida de B pela coloração c e denotaremos por $c(B)$. Observe que temos, no caso da coloração $c : [n] \rightarrow [l]$, n_j maneiras de colorir o bloco B .

Exemplo 2.1.4. *Vejamos um caso simples, no entanto, não trivial. Considere $l = 2$ e $k = 3$, e vamos analisá-lo, isto é, vamos mostrar que $c : [325] \rightarrow [2]$, possui uma progressão aritmética de comprimento 3. Para tanto dividimos $[325]$ em blocos de comprimento 5, temos então 65 blocos, B_1, \dots, B_{65} , note que cada bloco pode ser colorido de $2^5 = 32$ maneiras, portanto nos primeiros 33 blocos há, pelo menos, dois com a mesma coloração (princípio da casa dos pombos de Dirichlet), digamos B_i e $B_i + d$.*

Como só dispomos de duas cores nos primeiros 3 elementos de B_i dois deles, digamos b e $b + j$, são necessariamente de mesma cor, por exemplo vermelho. Note que, sendo os blocos B_i e $B_i + d$ pintados no mesmo padrão, então o conjunto $\{b, b + j, b + d, b + d + j\}$ tem todos os seus elementos pintados de vermelho. Note ainda que, pelo fato dos blocos possuírem comprimento 5, $\{b, b + j, b + 2j\} \subset B_i$ e $\{b + d, b + d + j, b + d + 2j\} \subset B_i + d$.

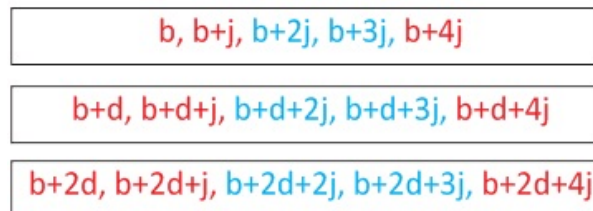
B_1	B_2	B_i	\dots	B_{32}
B_{33}	B_{34}	B_i+d	\dots	B_{64}
		B_i+2d		

Figura 2.4: Blocos de [325]

Figura 2.5: Caso 1 de coloração para os blocos B_i e $B_i + d$

Observe que, se $b + 2j$ ou $b + d + 2j$ forem pintados de vermelho então o resultado está provado.

Para melhor entendimento do desenvolvimento deste caso, considere a Figura 2.6.

Figura 2.6: Caso 2 de coloração para os blocos B_i , $B_i + d$ e $B_i + 2d$

Suponha então que $b + 2j$ e $b + d + 2j$ são pintados pela outra cor, digamos azul, então se $b + 2d + 2j$ é azul temos a progressão aritmética monocromática $\{b + 2j, b + d + 2j, b + 2d + 2j\}$ finalmente se $b + 2d + 2j$ é vermelho então temos a progressão aritmética (P.A.) monocromática $\{b, b + d + j, b + 2d + 2j\}$ isso completa a construção da prova e o fim de nossa análise para este caso particular.

Para a prova do caso geral, seguiremos a mesma linha de raciocínio. Note que no caso anterior, foi fundamental garantir a existência de duas P.A.'s centradas em $b + 2d + 2j$, com os dois primeiros elementos de mesma cor, mas que pertencem a blocos diferentes. Por esse motivo é necessário definir um ventilador matemático, pois ele cumpre o papel dessa passagem.

A demonstração do teorema baseia-se nos lemas que seguem (2.1.1 e 2.1.2):

Lema 2.1.1. *Tomemos as $(k - 1)$ translações do bloco $A : \{A + r, \dots, A + (k - 1)r\}$. Suponha que no bloco A existe um ventilador $([a + kr_1], \dots, [a + kr_{d-1}])$, de grau $d - 1$ e raio k então se todos os blocos da translação são identicamente coloridos, o conjunto, $A \cup (A + r) \cup \dots \cup (A + (k - 1)r)$ possui ou um ventilador policromático de grau d e raio k ou uma P.A. monocromática de tamanho k .*

Demonstração: Suponha que alguma pá do ventilador contido em A tenha a mesma cor do centro, então o resultado está provado, ou seja temos uma progressão aritmética de comprimento k monocromática, já que o ventilador em A tem grau $d - 1$ e raio k e $A \subset A \cup (A + r) \cup \dots \cup (A + (k - 1)r)$.

Agora, suponha que a cor do centro seja diferente da cores das pás, como em A temos um ventilador de grau $d - 1$ e raio k , afirmamos que no conjunto:

$$A \cup (A + r) \cup \dots \cup (A + (k - 1)r)$$

existe o ventilador:

$$([a + k(r_1 + r)], \dots, [a + k(r_{d-1} + r)])$$

Para tal, em cada P.A. $[a + k(r_i + r)]$, tome:

$$a \in A, (a + r_i + r) \in (A + r), (a + 2(r_i + r)) \in (A + 2r), \dots, (a + (k - 1)(r_i + r)) \in (A + (k - 1)r)$$

em que $i = 1, \dots, d - 1$.

Observe o seguinte esquema:

$$\begin{array}{ll} \text{Em } A : & (\underline{a}, a + r_i, a + 2r_i, \dots, a + (k - 1)r_i) \\ \text{Em } A + r : & (a + r, \underline{a + r_i + r}, a + 2r_i + r, \dots, a + (k - 1)r_i + r) \\ \text{Em } A + 2r : & (a + 2r, a + r_i + 2r, \underline{a + 2r_i + 2r}, \dots, a + (k - 1)r_i + 2r) \\ & \vdots \\ \text{Em } A + (k - 1)r : & (a + (k - 1)r, a + r_i(k - 1)r, a + 2r_i(k - 1)r, \dots, \underline{a + (k - 1)r_i + (k - 1)r}) \end{array}$$

Obtemos assim, a P.A.:

$$a, a + (r_i + r), a + 2(r_i + r), \dots, a + (k - 1)(r_i + r) = [a + k(r_i + r)], i = 0, 1, 2, \dots, d - 1$$

Isso pode ser feito devido o ventilador $([a + kr_1], \dots, [a + kr_{d-1}])$ existente em A e a própria definição de translação de um bloco.

Note que se acrescentarmos uma pá ao ventilador obtido, de grau $d - 1$, o lema é demonstrado. Para isto, tome $a \in A, (a + r) \in (A + r), (a + 2r) \in (A + 2r), \dots, (a + (k - 1)r) \in (A + (k - 1)r)$ temos, então, a P.A. $[a + kr]$ e, portanto, o ventilador policromático:

$$([a + kr], [a + k(r_1 + r)], \dots, [a + k(r_{d-1} + r)])$$

tem grau d e raio k e o resultado está provado. ■

Lema 2.1.2. *Fixado $k \in \mathbb{N}$, dado $m \in \mathbb{N}$, suponha que $W(l, k - 1)$ exista. Para cada $d \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $c : [n] \rightarrow [l]$ possui ou uma P.A. monocromática de comprimento k ou um ventilador de grau d e raio k .*

Demonstração: Já que os fatores d e n apresentados no lema são elementos de \mathbb{N} , uma ferramenta eficaz para sua demonstração é o Princípio da Indução Finita, a qual recorreremos.

Inicialmente, suponhamos $d = 0$. O resultado é trivial, afinal, como d determina a quantidade de pás do ventilador, neste caso não teríamos pás, o que não nos é interessante.

Agora, vamos supor que o lema é válido para $d - 1$ e provaremos a validade para d .

Vamos considerar $n = W(l, k)$, o número para o qual $c : [n] \rightarrow [l]$ possui ou uma P.A. de comprimento k ou um ventilador de grau $d - 1$ e raio k . Suponha que $n = 0$. Este caso não deve ocorrer, pois assim não teríamos o que provar.

Dispomos de l cores e por isso, cada bloco pode ser colorido de $l^n = l_1$ maneiras. Obtemos, portanto, $p = W(l_1, k - 1)$ e considere p blocos consecutivos de comprimento n cada.

Observe que $W(l_1, k - 1)$ é o menor número para o qual se tem uma Progressão Aritmética monocromática de comprimento $k - 1$ (número de Van der Waerden), quando colorimos com l^n cores os blocos, ou seja, existe $c : [l_1] \rightarrow [k - 1]$ (uma P.A. monocromática de tamanho $k - 1$, formada por blocos igualmente coloridos).

Esta P.A., pode ser entendida na seguinte configuração:

$$\mathbf{B} + \mathbf{r}, \dots, \mathbf{B} + (\mathbf{k} - \mathbf{1})\mathbf{r}.$$

Note que ela coincide com as $(k - 1)$ translações de B .

Um ponto importante é observar que, $|B| = n$, logo, por hipótese de indução, existe, em B , um ventilador policromático de grau $d - 1$ e raio k . Pelo lema 2.1.1, visto anteriormente, o conjunto $B \cup B + r \cup \dots \cup B + (k - 1)r$, possui ou um ventilador policromático de grau d e raio k ou P.A. monocromática de tamanho k . ■

Diante de todas as definições, será possível provar o teorema de Van der Waerden.

Demonstração: (do teorema de Van der Waerden)

Para provarmos o teorema, novamente recorreremos à Indução Finita, no entanto, dessa vez sobre k .

Vamos iniciar tomando $k = 1$, e assim teremos $W(l, 1) \geq 1$, portanto, o resultado é trivial, ou seja, existe pelo menos uma P.A. de comprimento 1 monocromática.

Vamos supor que exista $W(l, k - 1)$, e pelo lema 2.1.2, para cada $d \in \mathbb{N}$ existe ou uma P.A. monocromática de tamanho k ou um ventilador policromático de grau d e raio k . No primeiro caso não temos nada a fazer, no segundo caso basta tomar $d = l$, então necessariamente uma das pás do ventilador terá a mesma coloração do seu centro, formando um P.A. de comprimento k monocromática, isso decorre da observação feita quando definimos ventilador. ■

2.2 Prova por Sistemas Dinâmicos

Vamos considerar, como definido, uma partição do conjunto dos números inteiros a qualquer família finita de conjuntos $C_1, \dots, C_k \subset \mathbb{Z}$ disjuntos dois-a-dois e cuja união é todo o \mathbb{Z} .

Lembre que uma progressão aritmética (finita) é uma sequência da forma

$$m + n, m + 2n, \dots, m + kn, \text{ com } m \in \mathbb{Z} \text{ e } n, k \geq 1$$

O número q é chamado comprimento da progressão.

O resulta do teorema que segue, foi obtido, originalmente, pelo matemático holandês Bartel van der Waerden nos anos 20 do século passado:

Teorema 2.2.1. (Van der Waerden) *Se $\mathbb{Z} = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_l$ é uma partição finita ($c : \mathbb{Z} \rightarrow [l]$ uma coloração dos inteiros), então, para algum $j \in \{1, 2, \dots, l\}$, C_j contém uma progressão aritmética finita de tamanho arbitrário. Ou seja, toda coloração finita de \mathbb{Z} contém uma P.A. de tamanho arbitrário finito monocromática.*

Como vimos, para a primeira demonstração deste teorema recorreremos à noções de combinatória com grande complexidade. Apesar da existência da resolução deste problema, Furstenberg percebeu que o mesmo pode também ser deduzido a partir de conceitos de Sistemas Dinâmicos.

A ideia central é induzir a conclusão à uma afirmação sobre o deslocamento à esquerda

$$T : \Omega \rightarrow \Omega, \\ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$$

no espaço $\Omega = \{1, 2, \dots, l\}^{\mathbb{Z}}$ das sequências bilaterais com valores no conjunto $\{1, 2, \dots, l\}$.

Observe que toda partição $\{C_1, \dots, C_l\}$ de \mathbb{Z} em l subconjuntos determina um elemento $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (\dots, x_{-j}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_j, \dots)$ de Ω , definido por $x_n = i \Leftrightarrow n \in C_i$. Reciprocamente, todo $x \in \Omega$ define uma partição de \mathbb{Z} em subconjuntos

$$C_i = \{n \in \mathbb{Z} : x_n = i\}, i = 1, \dots, l.$$

Nosso objetivo é mostrar que para todo $x \in \Omega$ e todo $k \geq 1$, existem $m \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 1$ tais que

$$x_{m+n} = \cdots = x_{m+kn}.$$

Pelo que foi observado, isto significa que para toda partição $\{C_1, \dots, C_l\}$ e todo $k \geq 1$ existe $i \in \{1, \dots, l\}$ tal que C_i contém alguma progressão aritmética de comprimento k . Note que a família dos C_i é finita, e devido isto, podemos concluir que algum C_j contém progressões aritméticas de comprimento arbitrariamente grande. Vale observar que uma progressão aritmética de comprimento k contém também progressões aritméticas de comprimentos menores que k . Assim, é claro que C_j contém progressões aritméticas de vários comprimentos, como é afirmado no teorema.

Denotaremos um alfabeto de $l \in \mathbb{N}$ letras, como um conjunto de cardinalidade l . Seja Λ um alfabeto de l letras munido da topologia discreta⁴. Como Λ é compacto⁵, segue, pelo teorema de Tychonoff, que $\Omega = \Lambda^{\mathbb{Z}}$, munido da topologia produto, é um compacto.

Um ponto $x \in \Omega$ pode ser escrito como uma função

$$\begin{aligned} x : \mathbb{Z} &\rightarrow \Omega \\ i &\mapsto x_i \end{aligned}$$

Para cada “coordenada” $j \in \mathbb{Z}$, tem-se a aplicação projeção $\pi_j : \Lambda^{\mathbb{Z}} \rightarrow \Lambda$, onde $\pi_j(x) = x_j$. A topologia produto torna todas essas aplicações contínuas, além disso ela é menor topologia que satisfaz isso.

Lema 2.2.1. *Seja $\Omega = \Lambda^{\mathbb{Z}}$. Se $x \neq y$ em Ω , define-se*

$$d(x, y) = \frac{1}{1 + \min\{|k| : x_k \neq y_k\}},$$

e $d(x, x) = 0$. Isso é uma métrica que induz a topologia produto em Ω

Demonstração: *Mostraremos agora que d , definida no Lema 2.2.1, é uma métrica, e para isso devemos mostrar que:*

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Isso está bem definido em 2.2.1.
- $d(x, y) = d(y, x)$. Isto é trivial, pois o k é o mesmo valor em ambos os casos.
- $d(x, y) \geq d(x, z) + d(z, y)$.

Vamos supor que α é o menor número tal que $x_\alpha \neq y_\alpha$, assim temos

$$d(x, y) = \frac{1}{1 + \alpha} > 0$$

⁴Um espaço topológico diz-se discreto se todos os conjuntos são abertos.

⁵Qualquer fechado e limitado de um espaço euclidiano é compacto. É o caso de Λ .

Sem perda de generalidade vamos supor que β é o menor número tal que $y_\beta \neq z_\beta$, assim temos

$$d(y, z) = \frac{1}{1 + \beta} > 0$$

1. Se $\beta < \alpha$ temos que $d(x, z) = d(z, y)$ e isso ocorre pelo fato de que valores menores que α , x e y possuem a mesma coloração. Assim temos que

$$d(x, z) = d(z, y) = \frac{1}{1 + \beta} > \frac{1}{1 + \alpha}$$

Portanto

$$d(x, y) < d(x, z) + d(z, y)$$

2. Se $\beta > \alpha$ neste caso temos que $d(z, y) = d(x, y)$ e isso ocorre pelo fato de que em α , z e x possuem a mesma coloração e portanto diferente de y . Assim temos que

$$d(z, y) = d(x, y) = \frac{1}{1 + \alpha} > \frac{1}{1 + \beta}$$

Portanto

$$d(x, y) < d(z, y) + d(x, z)$$

3. Se $\beta = \alpha$ temos que $d(x, y) = d(x, z)$ e como $d(z, y) > 0$, temos que

$$d(x, y) < d(x, z) + d(z, y).$$

4. O caso da igualdade, só ocorrerá quando $x = y = z$, $x = z$ ou $z = y$.

Mostremos agora, que d induz a topologia produto em Ω .

Seja ρ_i a métrica zero-um em Λ_i , ou seja, $\rho_i(x; x) = 0$ e $\rho_i(x; y) = 1$, se $x \neq y$.

Com efeito, supõe-se $T : M \rightarrow \Omega$ contínua. Dada uma projeção $\pi_i : \Omega \rightarrow \Lambda_i$ qualquer, tem-se que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} d(x; y) < \delta &\Rightarrow d(T(x); T(y)) < \frac{1}{2|i|} \\ &\Rightarrow \frac{1}{1 + \min\{|k| : T(x)_k \neq T(y)_k\}} < \frac{1}{2|i|} \\ &\Rightarrow 1 + \min\{|k| : f(x)_k \neq f(y)_k\} > 2|i| \\ &\Rightarrow \min\{|k| : T(x)_k \neq T(y)_k\} > 2|i| - 1 \end{aligned}$$

Como $|i| \geq 1 \Rightarrow 2|i| \geq 1 + |i| \Rightarrow 2|i| - 1 > |i|$, então

$$\Rightarrow \min\{|k| : T(x)_k \neq T(y)_k\} > |i|$$

Como $k, i \in \mathbb{Z}$, então k não será mínimo, e dessa forma, $\rho_i(T(x)_i, T(y)_i) = 0 < \varepsilon$.
Portanto, “ d ” induz continuidade de T , logo $T \circ \pi_i$ é contínua, o que caracteriza uma Topologia Produto.

Reciprocamente, se $(\pi \circ T)$ é contínua para todo $i \in \mathbb{Z}$, segue que, dado $\varepsilon = \frac{1}{n_0} > 0$, existem $\delta_0, \delta_1, \delta_{-1}, \dots, \delta_{n_0}, \delta_{-n_0} > 0$ tais que

$$\begin{aligned} d(x; y) < \delta_0 &\Rightarrow \pi_0(T(x)) = \pi_0(T(y)) \\ d(x; y) < \delta_1 &\Rightarrow \pi_1(T(x)) = \pi_1(T(y)) \\ d(x; y) < \delta_{-1} &\Rightarrow \pi_{-1}(T(x)) = \pi_{-1}(T(y)) \\ &\vdots \\ d(x; y) < \delta_{n_0} &\Rightarrow \pi_{n_0}(T(x)) = \pi_{n_0}(T(y)) \\ d(x; y) < \delta_{-n_0} &\Rightarrow \pi_{-n_0}(T(x)) = \pi_{-n_0}(T(y)) \end{aligned}$$

Logo $d(x; y) < \min\{\delta_{-n_0}, \delta_{n_0}, \delta_{-n_0+1}, \delta_{n_0-1}, \dots, \delta_0\}$ implica

$$d(T(x); T(y)) < \frac{1}{1 + |n_0|} < \frac{1}{n_0} = \varepsilon$$

Isso completa a prova da recíproca. ■

Note que, com a métrica definida no lema 2.2.1, $d(x; y) \leq 1, \forall x, y \in \Omega$.

De fato,

Se $k \rightarrow \pm\infty$;

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} d(x, y) = \lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 + \min\{|k| : x_k \neq y_k\}} = 0$$

Se $k \rightarrow 0$;

$$\lim_{k \rightarrow 0} d(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \min\{|k| : x_k \neq y_k\}} = 1$$

Definição 2.2.1. Seja $T : \Omega \rightarrow \Omega$, $Tx = y$, onde $y_k = x_{k+1}$. A aplicação T é chamada de função-deslocamento no alfabeto Λ , ou “shift” no conjunto Λ . Chamamos o sistema dinâmico $(\Omega; T)$ de deslocamento (de dois lados) em k símbolos.

T é um homeomorfismo. De fato, dado $i \in \mathbb{Z}$, tem-se que $\pi_i \circ T = \pi_{i+1}$ é, evidentemente, contínua. Portanto, fica provado que T é contínua. Analogamente, dado $i \in \mathbb{Z}$, temos que $\pi_i \circ T^{-1} = \pi_{i-1}$ é contínua. Portanto, T é homeomorfismo.

Para provar o teorema de Van der Waerden, o primeiro passo é fazer uma “tradução” desses problemas de coloração para o contexto de Sistemas Dinâmicos. O Lema 2.2.2 é responsável por essa tradução, e o principal resultado utilizado nesta subseção é o Teorema 1.4.5.

Lema 2.2.2. (Furstenberg) Dado um sistema dinâmico $(X; T)$ qualquer, onde X é um espaço métrico compacto e $T : X \rightarrow X$ uma transformação contínua. Para todo $x \in X$, todo $\varepsilon > 0$ e todo $k \in \mathbb{N}$, existem $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que

$$\{T^m x, T^{m+n} x, \dots, T^{m+nk} x\}$$

tem diâmetro menor que ε .

Demonstração: Toma-se um sistema dinâmico $(X; T)$ qualquer. Dados $k \in \mathbb{N}$, $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, toma-se $Y = \overline{\mathbb{Z}.x}$. Por Y ser o fecho de um T -invariante, segue que Y é invariante.

Define-se $T_i := T^i$. Logo, $\{T_1, \dots, T_k\}$ é uma família de homeomorfismos comutativos agindo em Y . Logo, pelo Teorema 1.4.5, segue que existem $y \in Y$ e $n_j \rightarrow \infty$ tais que

$$T_1^{n_j} y \rightarrow y, \dots, T_k^{n_j} y \rightarrow y.$$

Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T_1^n y \rightarrow y, \dots, T_k^n y \rightarrow y \in B\left(y; \frac{\varepsilon}{8}\right)$.

Pela continuidade uniforme de $T_1^n, T_2^n, \dots, T_k^n$, segue que existe $\delta > 0$ tal que

$$d(a, b) < \delta \Rightarrow \min\{d(T_1^n a, T_1^n b), \dots, d(T_k^n a, T_k^n b)\} < \frac{\varepsilon}{8}, \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

Como $y \in Y = \overline{\mathbb{Z}.x}$, segue que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $d(T^m x, y) < \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{8}\}$.

Logo

$$d(T^m x, y), d(T_1^n y, T_1^n(T^m x)), \dots, d(T_k^n y, T_k^n(T^m x)) < \frac{\varepsilon}{8}$$

Mas isso quer dizer que

$$d(y, T^m x), d(T^n y, T^{m+n} x), d(T^{2n} y, T^{m+2n} x), \dots, d(T^{kn} y, T^{m+kn} x) < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Tem-se que, para qualquer $q \in \{0, 1, \dots, k\}$, vale, pela Desigualdade Triangular,

$$d(y, T^{m+nq} x) \leq d(T^{m+nq} x, T^{nq} y) + d(T^{nq} y, y) < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Portanto $T^m x, \dots, T^{m+nk} x \in B\left[y, \frac{\varepsilon}{4}\right]$. Ou seja, o diâmetro do conjunto

$$\{T^m x, \dots, T^{m+nk} x\}$$

é menor que ε . ■

Segue, abaixo, o enunciado e a demonstração do teorema de **Van de Waerden**.

Teorema 2.2.2. (Van der Waerden) Se $\mathbb{Z} = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_l$ é uma partição finita ($c : \mathbb{Z} \rightarrow [l]$ uma coloração dos inteiros), então, para algum $j \in \{1, 2, \dots, l\}$, C_j contém uma progressão aritmética finita de tamanho arbitrário. Ou seja, toda coloração finita de \mathbb{Z} contém uma P.A. de tamanho arbitrário finito monocromática.

Demonstração: Dado o conjunto (de cores) $\Lambda = \{1, 2, \dots, l\}$, munido da topologia discreta e uma coloração

$$\mathbb{Z} = C_1 \cup \dots \cup C_l$$

de l cores, define-se o sistema dinâmico $(\Omega; T)$ de deslocamento de Bernoulli (shift), onde $\Omega = \Lambda^{\mathbb{Z}} = \{1, \dots, l\}^{\mathbb{Z}}$. Mune-se Ω da métrica d definida no Lema 2.2.1. Note que essa métrica tem a propriedade de

$$d(x, y) < 1 \Leftrightarrow x_0 = y_0.$$

Toma-se o ponto $x \in \Omega$ tal que $x_t = j$, se $t \in C_j$. Pelo Lema 2.2.2, dado um tamanho $k \in \mathbb{N}$, existem $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $\{T^m x, T^{m+n} x, \dots, T^{m+nk} x\}$ tem diâmetro menor que 1. Pela métrica, segue que

$$(T^m x)_0 = \dots = (T^{m+nk} x)_0,$$

onde $(T^m x)_0 = x_m$, $(T^{m+n} x)_0 = x_{m+n}$, \dots , $(T^{m+nk} x)_0 = x_{m+nk}$.

Ou seja, $x_m = \dots = x_{m+nk}$. Isso quer dizer que

$$\{m, \dots, m + nk\} \subset C_j,$$

onde $j := x_m \in \{1, \dots, l\}$. ■

Capítulo 3

O Teorema de Szemerédi

Nesta seção daremos uma prova do teorema de Szemerédi baseada em elementos de Teoria Ergódica e no Teorema 1.5.5.

Endre Szemerédi é um matemático húngaro que trabalha na área de Combinatória Extrema. É uma área de demonstrações elementares e complicadas, que não se apoiam em resultados sofisticados, ou seja, bastante coisa é demonstrada baseada no rigor matemático e todas as provas acabam saindo bem elaboradas.

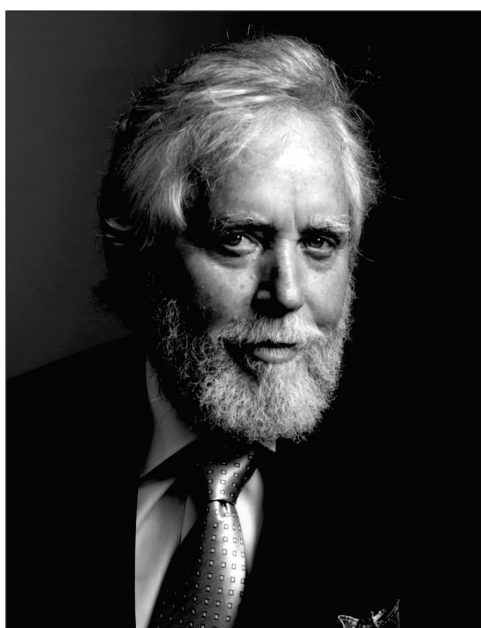


Figura 3.1: Endre Szemerédi (1940)

Caracterizar a área é mais fácil com exemplos, e o melhor deles é o próprio Teorema de Szemerédi, cujo tipo de pergunta que ele se dispõe a responder é: dados todos os números de 1 a 10.000, quantos números podem-se escolher antes de, com eles, poder formar uma progressão aritmética de tamanho k ?

Essa pergunta não apresenta uma resposta muito fácil, pois uma escolha qualquer

pode atrapalhar a escolha de outras. Para entender a pergunta com mais cuidado, é mais fácil pensar em um jogo. Tomando os números de 1 a 100, por exemplo, e escolhendo números. O desafio é: quantos conseguem-se escolher antes de, com os que já foram escolhidos, formar uma P.A. de três elementos? Suponhamos que a escolha feita tenha sido o 1 e o 2, e dessa forma, já não pode escolher o três. Caso a escolha seja o 4 e o 6, não pode-se escolher o 8, e assim por diante. Esse tipo de problema, da classe de Combinatória Extrema, é tratado pelo Teorema de Szemerédi.

Ele não conta quantas exatamente podem-se formar, ele vai além. Se o objetivo é não formar Progressões Aritméticas de tamanho k (no exemplo do jogo $k=3$), e deve tomar números de 1 a n (que no exemplo foi 10.000, depois 100), eis o que o Teorema de Szemerédi vai explicar: dado o jogo descrito acima, querendo evitarem-se Progressões Aritméticas de tamanho k , sempre pode-se escolher um n suficientemente grande para que não possa escolher mais que 1%, ou 0,1 % dos números disponíveis, ou 0,001%, pode-se, aumentando o n , estabelecer uma porcentagem tão pequena quanto se queira dos números disponíveis para escolha.

Observa-se, portanto, que quanto maior for o intervalo de números possíveis, maior é o número de razões possíveis para a P.A., mas esse resultado não é intuitivo. É possível tomar um n tão grande a ponto de deixar uma fração de 10^{-23} desses números possível de ser escolhida.

Vejamos como o Teorema de Szemerédi, enunciado a seguir, foi respondido segundo a Teoria Ergódica.

Teorema 3.0.3. (Szemerédi). *Se A é um subconjunto de \mathbb{Z} com densidade superior positiva, então ele contém progressões aritméticas de comprimento arbitrário.*

Observe que o Teorema de Van der Waerden é uma consequência do Teorema de Szemerédi.

As primeiras demonstrações destes resultados foram de natureza combinatória. Furstenberg observou que eles podem também ser deduzidos de ideias da Teoria Ergódica. Mostramos no capítulo anterior como obter o Teorema de Van der Waerden a partir do Teorema de Recorrência Múltipla de Birkhoff (Teorema 1.4.4); argumentos análogos dão o Teorema de Szemerédi a partir do Teorema de Recorrência Múltipla de Poincaré (Teorema 1.5.5).

Os estudos de Szemerédi continuam compondo uma área de pesquisa muito ativa. Em particular, outras demonstrações do Teorema 3.0.3 vêm sendo dadas por diversos autores. Recentemente, a teoria culminou no seguinte resultado espetacular do matemático inglês Ben Green e do matemático australiano Terence Tao: existem Progressões Aritméticas arbitrariamente longas formadas por números primos, que comentaremos, sem muita profundidade, ainda neste capítulo.

3.1 Prova Ergódica

Uma vez com o Teorema de Recorrência Múltipla, podemos dar uma prova do Teorema de Szemerédi usando conceitos de Teoria Ergódica e a definição de shift.

Demonstração: Sejam $\Omega = \{0; 1\}^{\mathbb{Z}}$, um espaço compacto e o deslocamento (shift) $T : \Omega \rightarrow \Omega$, $T(x) = y$, onde $y_k = x_{k+1}$.

Considere $A \subset \mathbb{Z}$ um conjunto de densidade positiva, ou seja,

$$d(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|[1, k] \cap A|}{k} > 0.$$

Associamos $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = I_A(n)$, onde $I_A(n) = \begin{cases} 0, & n \notin A; \\ 1, & n \in A. \end{cases}$, é a função característica de A , ou seja, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Omega$, tal que

$$x_n = 1 \Leftrightarrow n \in A$$

Defina $Y \subset \Omega$, tal que $Y = \{(y_n); y_0 = 1\}$. Note que Y é um aberto e também um fechado, uma vez que tanto ele quanto o seu complementar são cilindros de Ω . Note também que, para qualquer $j \in \mathbb{Z}$,

$$T^j(x) \in A \Leftrightarrow x_j = 1 \Leftrightarrow j \in A.$$

Considere a sequência μ_k de probabilidades definidas em Ω por:

$$\mu_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \delta_{T^j(x)}.$$

Como vimos anteriormente, como o conjunto $\mathcal{M}_1(\Omega)$ das probabilidades em Ω é compacto (Teorema 1.5.2), a menos de passar a uma subsequência, podemos supor que ela converge na topologia fraca* para alguma probabilidade μ de Ω , ou seja, $\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k$, que é uma medida invariante para T , pois para toda função contínua $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, vale

$$\begin{aligned} \int (\phi \circ T) d\mu_j &= \frac{1}{k} \sum_{i \in [1, k]} \phi(T^i(x)) + \frac{1}{k} [\phi(T^k(x)) - \phi(T^1(x))] = \\ &= \int \phi d\mu_j + \frac{1}{k} [\phi(T^k) - \phi(T^1(x))] \end{aligned}$$

e, passando ao limite quando $j \rightarrow \infty$, resulta que $\int (\phi \circ T) d\mu = \int \phi d\mu$.

Além disso, μ_k coincide com a média de visitas das interações $T^j(x)$ ao conjunto A , ou seja, $\mu_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \delta_{T^j(x)} = \frac{|A \cap [1, k]|}{k}$

Temos:

$$\begin{aligned}
\mu(Y) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(Y) = \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \delta_{T^j(x)} = \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|[1, k] \cap A|}{k} > 0, \text{ por hipótese.}
\end{aligned}$$

Logo, pelo teorema de Furstenberg, segue que existe um N tal que

$$\mu(Y \cap T^{-N}(Y) \cap T^{-2N}(Y) \dots \cap T^{-(k-1)N}(Y)) > 0$$

Em particular existem $T^m(z) \in \mu(Y \cap T^{-N}(Y) \cap T^{-2N}(Y) \dots \cap T^{-(k-1)N}(Y))$. Isto é:

$$\begin{aligned}
T^m(z) \in Y &\Leftrightarrow z_m = 1 \Leftrightarrow m \in A; \\
T^{m+N}(z) \in Y &\Leftrightarrow z_{m+N} = 1 \Leftrightarrow m + N \in A; \\
T^{m+2N}(z) \in Y &\Leftrightarrow z_{m+2N} = 1 \Leftrightarrow m + 2n \in A; \\
&\vdots \\
T^{m+(k-1)N}(z) \in Y &\Leftrightarrow z_{m+(k-1)N} = 1 \Leftrightarrow m + (k-1)N \in A;
\end{aligned}$$

Isto é, existe m tal que

$$m, m + N, \dots, m + (k-1)N \in A.$$

Isto prova o Teorema de Szemerédi. ■

3.2 Números Primos: procurando a “fórmula mágica”

A busca por respostas referentes aos números primos, trouxe à tona inúmeras indagações, como por exemplo: Quantos números primos menores que um número dado existem? Esta pergunta vem perseguindo os matemáticos desde quando Euclides provou que existem infinitos números primos. A distribuição dos primos ao longo dos inteiros pode parecer completamente irregular, por não apresentarem uma certa lógica, ou expressão matemática com a qual possamos determiná-los.

Um dos problemas mais importante no estudo da Teoria dos Números é determinar uma boa aproximação para a função $\pi(x)$ (quantidade de números primos menores ou iguais à x). Um dos primeiro matemáticos a ter algum sucesso nesse sentido foi Karl Friedrich Gauss, que conseguiu estimar

$$\pi(x) \cong \int_2^x \frac{1}{\ln(t)} dt$$

Mais à frente, o matemático Legendre (1.752 - 1.833) determinou

$$\pi(x) \cong \frac{x}{\ln(x) - 1,08366}$$

Gauss, no entanto, apresentava algo mais que Legendre, pois mostrava o que seria equivalente ao Teorema do Número Primo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \cdot \ln(x)}{x} = 1$$

Riemann enunciou esse teorema, sem ser completamente provado. Somente em 1896 ele foi provado, sem influência de Reimenn, por Hadamard e Vallé-Poussin.

Alguns registros históricos evidenciam que a procura de padrões aditivos nos números primos tem sido um assunto recorrente na história da Matemática. Uma conjectura clássica que muito estimulou a curiosidade dos matemáticos, provavelmente devido à sua simplicidade de apresentação e dificuldade de demonstração, afirma que no conjunto dos números primos existem progressões aritméticas de comprimento arbitrariamente longo.

Considere-se alguns exemplos de progressões aritméticas de primos (conforme [22], atualizado):

- 2
- 2, 3
- 3, 5, 7
- 5, 11, 17, 23
- 5, 11, 17, 23, 29
- 7, 37, 67, 97, 127, 157
- 7, 157, 307, 457, 607, 757
- ...
- $5749146449311 + 26004868890n$, $n = 0, \dots, 20$, e também,
 $11410337850553 + 4609098694200n$, $n = 0, \dots, 21$ (Moran, Pritchard e Thyssen ([23]), em 1995)
- $56211383760397 + 44546738095860n$, $n = 0, \dots, 22$ (Frind, Underwood e Jobling ([24]), em 2004)

- $515486946529943 + 136831 \times 223092870n$, $n = 0, \dots, 23$, e também,
 $6171054912832631 + 366384 \times 223092870n$, $n = 0, \dots, 24$ (Chermoni e Wroblewski ([25]), em 2008)

O conjunto dos números primos não tem densidade positiva (tem densidade nula) e, portanto, o Teorema de Green-Tao não é consequência do Teorema 3.0.3. No entanto, este último tem um papel importante na sua demonstração. Por outro lado, o Teorema de Green-Tao é um caso particular de outra conjectura devida a Erdős:

Conjectura 3.2.1. (Erdős e Turan) *Se $A \subset \mathbb{N}$ é tal que a soma dos inversos diverge, ou seja, tal que*

$$\sum_{n \in S} \frac{1}{n} = \infty,$$

então A contém progressões aritméticas de qualquer comprimento. Esta afirmação mais geral permanece em aberto.

Apesar da não compatibilidade do Teorema de Szemerédi com o conjunto dos números Primos, Van der Corput usou técnicas de análise de Fourier para provar:

Teorema 3.2.1. (Van der Corput) *Os primos contém infinitas 3-P.A (P.A's de comprimento 3).*

Finalmente, usando um argumento baseado na Teoria Ergódica, temos o teorema de Green-Tao.

Em 1737, Euler mostrou que, sendo P o conjunto dos números primos,

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p} = +\infty$$

Assim, a conjectura 3.2.1 é uma forma forte de generalização do Teorema de Green-Tao.

Teorema 3.2.2. (Teorema de Green-Tao (2004)): *O conjunto dos números primos contém infinitas progressões aritméticas de comprimento k , para qualquer $k \geq 1$ inteiro;*

O estudo deste teorema ficará para uma outra oportunidade, visto que seu desenvolvimento requer o estudo mais aprofundado de outros pontos da Teoria Ergódica.

A prova deste teorema consiste em dois passos, basicamente:

- generaliza-se o teorema de Szemerédi para o contexto de medidas pseudo-aleatórias obtendo-se assim o teorema de Green-Tao-Szemerédi;
- prova-se a existência de medidas pseudo-aleatórias nos primos.

Uma vez que estes dois fatos já estejam provados, o teorema de Green e Tao segue diretamente.

Capítulo 4

Proposta de Atividade para o Ensino Médio

Na atualidade, são notórias as grandes mudanças que vêm ocorrendo na humanidade. O surgimento de novas tecnologias e descobertas científicas ocorrem com tamanha velocidade, e isto tem provocado expressivas alterações no modo de vida da sociedade. Nesse contexto, é preciso que a educação acompanhe estas transformações de modo que seja possível chamar a atenção dos alunos, instigando-os pela curiosidade e a busca constante pelo saber. Vale salientar que não deve-se desprezar suas raízes, o educador deve trabalhar o presente, pensando no futuro, no entanto não desprezando ferramentas tradicionais.

São comuns dificuldades no processo de ensino-aprendizagem, principalmente de conceitos em que o aluno não consegue compreender a maneira em que ele ocorre. Nesse sentido, cabe ao professor recorrer à estratégias, na tentativa de sanar essas dificuldades, possibilitando ao aluno o entendimento abstrato, e perceber sua ligação com o real, facilitando a aprendizagem.

Quando tratamos das ciências exatas, verificamos um grande número de alunos que apresentam indagações quanto à prestabilidade de conceitos ensinados no currículo que compõe a base de sua trajetória estudantil, em especial no ensino de matemática.

Embora seja notável a grande evolução que vem ocorrendo no estudo da Matemática, ainda são comuns as singulares aulas expositivas de matemática, nos mais diversos níveis de educação, nas quais o conteúdo, julgado importante pelo professor, é passado à lousa, e o aluno, mecanicamente copia para o seu caderno, seguida de algumas poucas resoluções de exercícios de aplicação (que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor). Esse procedimento de “ensino” evidencia a ideia de que o processo de aprendizagem de matemática pode ser reduzido ao simples ato de transmissão de conhecimento. Além disso, o aluno passa

a entender que a resolução de problemas deve seguir um padrão pré-determinado pelo professor.

A comunidade de Educação Matemática internacionalmente vem clamando por renovações na atual concepção do que é a matemática escolar e de como essa matemática pode ser abordada.

Beatriz S. D'Ambrosio¹

Em geral, os professores transmitem a ideia de que os conhecimentos matemáticos compõe uma estrutura acabada e polida, não sendo dada ao aluno a oportunidade ou a obrigação de elaborar algo novo, ou até mesmo a possibilidade de recorrer a soluções alternativas. As aulas de Matemática, assim, são vistas pelo aluno como desinteressantes e seu papel reduz-se a repetição dos processos apresentados.

Desta forma, o resultado desta prática é a existência significativa de alunos sem motivação a aprender, e a disciplina matemática é estigmatizada como desinteressante, complexa e sem qualquer relação com o cotidiano.

Percebemos, ainda atualmente, que a Matemática caminha lado-a-lado com estigma de “bicho de sete cabeças”, e que a mesma é acessível, exclusivamente, a um grupo específico: “os gênios”.

É necessário que exista uma boa interação entre professores e alunos na escola, e para isto, é preciso fundamentar-se em novas estruturas sociais, já que o ensino da Matemática necessita da transferência de ideias entre os elementos que compõem a sala de aula, ou dividir tarefas do dia a dia, mas também vencer divergências e afrontar obstáculos existentes nessa relação. Fazem-se necessários, neste sentido, adotar novas técnicas de ensino e de recursos para o favorecimento de uma aprendizagem mais expressiva.

Por este motivo, surge o presente quarto capítulo, cuja intenção é a apresentação de sugestões de atividades matemáticas que abordem as Progressões Aritméticas para o ensino médio.

4.1 Antes da Execução da Atividade

Antes de iniciar as definições formais e cálculos envolvendo Progressões Aritmética, iremos expor uma situação cotidiana com o objetivo de instigar o aluno ao estudo e a desmistificação da não aplicabilidade da Matemática no dia a dia.

¹D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19

Situação 1: (Progressões Aritméticas no Cotidiano) Pensando em comprar uma TV, uma pessoa resolve economizar R\$ 40,00 de seu salário todo mês, guardando o dinheiro em casa. O saldo ao final de cada mês é anotado em um caderno segundo o quadro abaixo.

Mês	Valor (em reais) guardado em cada mês
1º mês	40,00
2º mês	40,00
3º mês	40,00
⋮	⋮

Passo 1: Questione seus alunos:

1. Qual o comportamento observado no saldo, à medida que os meses vão avançando?

Resposta esperada: De acordo com o quadro, a cada mês que passa o saldo do dinheiro guardado está aumentando.

2. Como saber o saldo ao final de cada mês?

Resposta esperada: Somando o saldo do mês anterior com os R\$ 40,00 que foi guardado no mês seguinte.

3. Como escrever os dados da tabela de modo a representar uma sequência, em que possa saber o saldo ao final de cada mês?

Resposta esperada: Utilizando as escritas das sequências apresentadas em aulas anteriores, espera-se: (R\$ 40,00; R\$ 80,00; R\$ 120,00; ...), ou simplesmente, (40; 80;120; ...).

Passo 2: Com a sequência obtida na situação do exemplo, escreva os termos da sequência na forma:

$$\{a_1 = 40, a_2 = 80, a_3 = 120, \dots\}$$

Agora, questione-os:

1. Como saber o saldo ao final do 12º mês?

Resposta esperada: Será possível que alguns alunos tentem fazer os cálculos até encontrar o valor no 12º mês, contudo a ideia é apenas analisar como o cálculo deverá ser feito e não o resultado em si. Assim, uma possível resposta seria somar o saldo do 11º mês com os R\$ 40,00 que entraria no 12º mês.

2. Observando os valores presentes na sequência podemos afirmar que ela está crescendo, decrescendo ou permanecendo constante?

Resposta esperada: Os valores estão crescendo.

3. Qual é o padrão que está sendo seguido nesta sequência, ou seja, como os valores estão se modificando?

Resposta esperada: O padrão da sequência é aumentar de 40 em 40.

4. Se os valores estão aumentando de 40 em 40 reais, então se você souber que ao final do 15º mês o saldo será de R\$ 600,00, é possível calcular qual o saldo do mês anterior, ou seja, do 14º mês?

COMENTÁRIO: Este é um dos questionamentos mais importantes até o momento, pois será possível verificar se o aluno compreendeu os questionamentos anteriores, ou seja, se ele conseguiu entender que a sequência possui valores crescentes e que estes valores crescem de 40 em 40 reais. Assim, ele conseguirá encontrar o valor do 14º mês que será de R\$ 560,00, realizando a operação de subtração entre o valor do 15º mês e os 40 reais que entraram neste mesmo mês.

Resposta esperada: $R\$ 600,00 - R\$ 40,00 = R\$ 540,00$

4.2 A Execução da Atividade

Passado pelo processo de questionamentos, iniciaremos a parte de formalização do conteúdo de progressões aritméticas. É importante fazer um “link” entre o conteúdo e a situação anterior. Mostre aos alunos que a sequência obtida no exemplo anterior é um caso de progressões aritméticas, visto que mesma apresenta todas as características necessárias para assim ser classificada.

Passo 3: Questione

1. Mas, quais são essas características?

Apresente estas características ao aluno:

- Ser uma sequência limitada.
- Apresentar um padrão numérico que é seguido ao longo de toda a sequência. No caso do exemplo anterior, o padrão é aumentar de 40 em 40.
- O padrão a ser seguido poderá ser obtido calculando a diferença entre um termo (a partir do 2º termo disposto na sequência) e seu sucessor.

Defina Progressões Aritméticas (ou P.A.) “É uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é obtido adicionando-se uma constante r ao termo anterior.”

Passo 4: Continue fazendo comentários, a respeito da constante r (razão) citada na definição. No exemplo da compra da TV a razão é o valor R\$ 40,00. Foi constatado que os valores da sequência estavam crescendo, pois a cada novo termo aumentava-se 40 reais, que representava também a razão (r) da P.A. É possível, portanto, concluir que a P.A. é CRESCENTE, e essa conclusão é comprovada também pelo valor da razão. Em outras palavras:

- Se $r > 0$, então a P.A será CRESCENTE.

É importante informar aos alunos que não existe apenas essa classificação entre as P.A.s, podendo também serem DECRESCENTE ou ainda CONSTANTE. Sugerimos que sejam apresentadas e analisadas as duas situações a seguir para se verificar quando a P.A. é decrescente e quando ela é constante:

Situação 2: Ao comprarmos um determinado produto a prazo, normalmente, temos que pagar parcelas mensais durante certo tempo. O que ocorre nesse tipo de situação é que a cada parcela paga o valor da nossa dívida vai diminuindo. Consideremos então a compra de uma máquina de lavar que custa R\$ 950,00 na venda a prazo, parcelada em 10 vezes. Assim, serão dez parcelas de R\$ 95,00 cada.?

Induza a construção da sequência que representa a situação da dívida com a loja a cada mês, durante os dez meses. A sequência esperada é:

$$(950, 855, 760, 665, 570, 475, 380, 285, 190, 95, 0)$$

Nesta sequência, o valor de R\$ 950,00 representa o termo a_0 que significa o mês em que se realizou a compra. Sendo assim, após um mês será paga a primeira parcela da compra, logo a dívida irá diminuir para R\$ 855,00, e este será o termo a_1 . Neste caso, os valores da sequência estão diminuindo. Apesar de sabermos que o valor da parcela é de R\$ 95,00, podemos calcular a razão da progressão conforme é afirmado na definição, ou seja, fazendo a diferença entre um termo (a partir do 2º termo) e seu antecessor. Temos então o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} r &= 855 - 950 \\ r &= -95 \end{aligned}$$

É importante mostrar ao estudante a atenção que se deve ter com os sinais, que, na verdade, resulta da operação entre os valores. Ao analisar apenas a razão da progressão, é justamente o sinal negativo que nos dirá que a P.A. é decrescente, informando aos alunos que a seguinte afirmação é verdadeira:

- Se $r < 0$, então a P.A será DECRESCENTE.

Situação 3: Uma pessoa durante um tratamento de saúde necessita ingerir dois comprimidos de medicamento ao dia. O tratamento sugerido tem duração de 20 dias.?

Sugira que a construção da sequência que representa a quantidade de comprimidos consumidos a cada dia durante o tratamento é:

$$(2; 2)$$

Leve os alunos a perceberem que os valores da progressão permanecem CONSTANTES, o que conseqüentemente classifica esta sequência como uma P.A. constante. Contudo, há outra forma de comprovar a classificação dessa progressão: calculando a razão, temos:

$$r = 2 - 2$$

$$r = 0$$

Informe aos alunos que sempre que se tratar de uma P.A. constante, o valor da razão será igual a zero. Em outras palavras temos:

- Se $r = 0$, então a P.A. é CONSTANTE.

Concluimos, com exemplos, as classificações de progressões aritméticas que podem existir.

Passo 5: Após a análise desses exemplos, questione aos estudantes:

1. O que é necessário conhecer para determinar os termos de uma P.A?

Resposta esperada: É preciso conhecer a razão que determina a sequência e, ao menos, um de seus termos seguido da posição que esse termo assume.

COMENTÁRIO: Instigue-os a chegarem a esta conclusão, para que, em seguida, seja apresentada uma generalização de como se obter um termo qualquer da progressão, ou seja, o n -ésimo termo que mencionamos nas aulas anteriores. Para dar continuidade à atividade, será necessário uma breve explicação a respeito de sequência de números em progressão aritmética, explicitando que as mesmas possuem características aditivas; apresentando diversos exemplos de tais sequências, tais como a sequência dos números inteiros pares,

$$(\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots),$$

a sequência dos números naturais ímpares,

$$(1, 3, 5, 7, 9, \dots),$$

a sequência dos múltiplos positivos de 4,

$$(4, 8, 12, 16, 20, \dots),$$

e assim por diante, ressaltando qual é a razão, primeiro termo e em alguns casos o comprimento em cada progressão, além de comentar o fato de que uma progressão aritmética pode ser finita ou infinita, e que elas dão origem a conjuntos com característica específicas. Vale ressaltar na explanação, a demonstração da fórmula da soma dos n primeiros termos de progressão aritméticas específicas e, solicitar que tentem demonstrar o caso geral (ao invés de passar a fórmula pronta). Como o raciocínio nos dois casos é análogo, eles não devem encontrar dificuldades para fazer isso.

A partir deste ponto, serão necessárias a resolução de alguns exercícios envolvendo progressões aritméticas. Temos algumas sugestões bastante abrangentes, que abordam desde a aplicação de fórmulas já discutidas ou a demonstração delas até uma elaborada discussão sobre uma recente descoberta acerca de uma propriedade das progressões aritméticas que certamente vai instigar seus alunos em seus estudos.

Exercício 1: Na História “Alice no País das Maravilhas”, Alice toma uma poção mágica que a faz diminuir 30cm a cada gole da poção. Se, ao invés de 30cm, como é contado na história, a Alice diminuísse 20cm a cada vez que bebesse da poção mágica, quantos goles desta poção ela precisaria tomar para que pudesse atravessar uma porta de 45cm, tendo ela 1,60m de altura?

Solução: Se a cada gole da poção que Alice beber ela diminuir 20cm, então, após n goles, ela terá diminuído $20n$ cm. Como sua estatura inicial é de 1,60m, ou ainda, de 160 cm, sua estatura final será então uma função de n , a saber: $(160 - 20n)$ cm. Vemos daí que a sucessão de alturas atingidas pela Alice após tomar da referida poção compõem a seguinte progressão aritmética $(160\text{cm}, 140\text{cm}, 120\text{cm}, 100\text{cm}, \dots)$, de primeiro termo 160cm e razão -20cm. Para que Alice consiga atravessar a porta, sua altura não deve ultrapassá-la. Assim, após n goles, sua estatura deve ser tal que $160 - 20n \leq 45$. Descobrimos daí que $n \geq 5,75$, ou seja, a Alice deve tomar 6 goles da poção mágica por ela encontrada para conseguir atravessar a porta do enunciado desta questão.

Exercício 2. Ainda supondo que a altura da porta que Alice quer atravessar seja de 45cm e que a Alice tenha 1,60m de altura, quanto ela teria de diminuir a cada gole tomado da poção mágica para que ela alcançasse exatamente a altura da porta em cinco goles?

Solução: A diferença entre as alturas da Alice e da porta é de 115cm. Para que 115cm sejam subtraídos da altura de Alice em exatamente cinco goles, sendo que em cada gole ela diminui uma mesma quantidade, é necessário que cada gole da poção mágica a faça perder $\frac{115}{5}$ cm, ou seja 23cm. Neste caso, teríamos uma progressão aritmética (160cm, 137cm, 114cm, 91cm, ...), de primeiro termo 160cm e razão -23cm.

Agora, vamos sugerir alguns exercícios mais sofisticados sobre progressão aritmética.

Exercício 3. Quantos são os múltiplos de 3 e 5 com quatro algarismos?

Solução: Todo múltiplo de 3 e 5 também é um múltiplo de 15 e vice-versa. Assim, o menor múltiplo de 3 e 5 que pode ser escrito com quatro algarismos é o primeiro número a partir de 1000 cuja divisão por 15 não deixe resto não nulo pela divisão euclidiana, ou seja 1005. Pelo mesmo raciocínio, 9990 é o maior número de quatro algarismos divisível por 3 e por 5 simultaneamente. Como estamos interessados em contar quantos são os múltiplos de 3 e 5 neste intervalo, estamos trabalhando com a progressão aritmética (1005, 1020, 1035, 1050, ..., 9975, 9990), em que o primeiro termo $a_1 = 1005$, o último termo $a_n = 9990$ e a razão $r = 15$. De acordo com a expressão para o termo geral de uma progressão aritmética, $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos que $9990 = 1005 + (n - 1) \cdot 15$, ou seja, $n = 600$. Portanto, são 600 os múltiplos de 3 e 5 escritos com quatro algarismos.

Exercício 4. Qual é a soma dos múltiplos positivos de 16 escritos com três algarismos?

Solução: Os números positivos que podem ser escritos com três algarismos estão compreendidos entre 100 e 999. Por inspeção, podemos ver que 112 e 992 são, respectivamente, o primeiro e o último múltiplo de 16 neste intervalo. Assim, estamos trabalhando com a progressão aritmética (112, 128, 144, 160, ..., 976, 992). Com esta informação, podemos encontrar o número de múltiplos de 16 aí compreendidos através da expressão para o termo geral da sequência de uma progressão aritmética, a saber: $n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1 = \frac{992 - 112}{16} + 1 = 56$. Agora temos condições de somar todos esses termos, aplicando uma das fórmulas para a soma de termos consecutivos de uma progressão aritmética: $S_{56} = \frac{(a_1 + a_{56}) \cdot n}{2} = \frac{(112 + 992) \cdot 56}{2} = 30912$.

Exercício 5. Um número primo positivo p ou, simplesmente, primo positivo, é um número natural, maior do que 1, cujos únicos divisores são 1 e p . Os dez menores primos positivos são 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Passo 6: Questione aos alunos

1. Quantos números primos existem entre 1 e 30?

Resposta esperada: Existem 10 números primos.

2. E entre 1 e 1 milhão?

Resposta esperada: Seria quase impossível contar todos.

3. Existe um padrão para essa sequência de números?

Resposta esperada: Não existe.

4. É possível subdividir essa sequência de modo a obter pelo menos uma progressão aritmética? Caso sim, exemplifique.

Resposta esperada: Sim, na sequência (3, 5, 7)

5. É possível obter uma progressão aritmética composta por TODOS os números primos?

Resposta esperada: Não.

Questionamentos acerca das propriedades dos números primos despertam a curiosidade do homem desde o nascimento da matemática e muitas delas ainda não têm solução. Foi somente em 2004 que, por exemplo, uma destas propriedades foi demonstrada como verdadeira:

Teorema (Green-Tao): Para todo número natural k , existe uma progressão aritmética de k termos, todos primos positivos.

Para alguns poucos casos, não é difícil encontrar uma tal progressão, como, por exemplo,

$$\begin{aligned} &(2), \\ &(2, 3), \\ &(3, 5, 7), \\ &(5, 11, 17, 23), \\ &(5, 11, 17, 23, 29), \\ &(7, 37, 67, 97, 127, 157), \\ &(7, 157, 307, 457, 607, 757), \end{aligned}$$

mas exemplos maiores já são bastante mais complexos. É curioso notar que o teorema de Green e Tao apenas garante a existência de tais progressões, não exibindo, realmente, método algum para construí-las. No entanto, alguns termos gerais para Progressões Aritméticas formadas por primos foram encontradas, dentre elas:

1. $5749146449311 + 26004868890n$, $n = 0, \dots, 20$, e também,
 $11410337850553 + 4609098694200n$, $n = 0, \dots, 21$ (Moran, Pritchard e Thyssen, em 1995);

2. $56211383760397 + 44546738095860n$, $n = 0, \dots, 22$ (Frind, Underwood e Jobling, em 2004);
3. $515486946529943 + 136831x223092870n$, $n = 0, \dots, 23$, e também,
 $6171054912832631 + 366384x223092870n$, $n = 0, \dots, 24$ (Chermoni e Wroblewski, em 2008);
4. $43142746595714191 + 23681770 \times 223092870n$, $n = 0, \dots, 25$ (Perichon, em 2010);

Para verificar se os números obtidos nessas fórmulas são realmente primos, sugerimos a utilização de uma calculadora de números primos, disponível em:

<http://pt.calcuworld.com/calculadoras-matematicas/calculadora-de-numeros-primos>

A mesma verifica se um número é primo ou não, no entanto, pode apresentar falhas, afinal, calcular números primos é algo um pouco mais complexo.

Este problema deve ser explicado aos alunos, solicitando a eles que procurem algumas das progressões aritméticas que acabamos de listar. Então, comente o resultado encontrado por Green e Tao, ressaltando sua contemporaneidade. Aproveite e deixe claro que a Matemática é uma ciência em contínuo desenvolvimento e que mesmo alguns problemas de fácil entendimento ainda não puderam ser demonstrados. Pode ser que alguns deles se encorajem nesta direção.

Conclusão

O foco principal nesse trabalho foi apresentar aplicações dos conceitos de Sistemas Dinâmicos e Teoria Ergódica. Abordamos, portanto, conceitos de Progressões Aritméticas e algumas ideias básicas de Teoria da Medida.

De fato, foi possível constatar que a existência de Progressões Aritméticas em subconjuntos de \mathbb{Z} constitui um tema muito interessante para investigações futuras e podemos considerá-las como uma fonte muito rica em informações que faz conexões com muitas áreas da Matemática.

Do ponto de vista teórico-metodológico, foi possível efetuar um breve estudo do comportamento de pontos de um conjunto segundo a ação de uma transformação T , abordando as definições e as propriedades a ela inerentes. Mesmo considerando apenas a parte introdutória dos conteúdos, mostramos a rica estrutura aritmética pertencentes a estas Teorias.

Foi enriquecedor também, neste trabalho, buscar, a partir da teoria desenvolvida, aplicações para o Ensino Médio. Assim, desenvolvemos atividades com os conceitos abordadas em conexão com conteúdos do Ensino Médio

Eventualmente, o desenvolvimento na íntegra de Sistemas Dinâmicos e Teoria Ergódica é algo que requer um tratamento muito mais aprofundado do que foi dado neste trabalho, inclusive um estudo mais amplo da Teoria da Medida e de Existência de Medidas Invariantes.

Trabalhos Futuros

Como mencionado anteriormente, as Teorias aqui abordadas requerem um pouco mais de estudo. Diante disto, é possível elaborar algumas outras propostas no que se refere aos conceitos explanados.

- É possível, a partir do segundo capítulo deste trabalho, elaborar um mini-curso explanando ideias sobre Sistemas Dinâmicos;
- Pode-se desenvolver atividades mais aprofundadas baseadas nos contextos apresentados no capítulo III, porém direcionadas ao Ensino Superior, apresentando novos

conceitos como, por exemplo, Medidas Pseudo-aleatórias;

- Realizar um estudo mais aprofundado de Sistemas Dinâmicos e Teoria Ergódica;
- Desenvolver a prova do Teorema de Green-Tao, mostrando a existência de Progressões Aritméticas formada somente de números Primos.

Referências

- [1] CARVALHO, Fernando Ramires. NÚMEROS PRIMOS E O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA NO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL.
- [2] ARBIETO, Alexander; MATHEUS, Carlos; MOREIRA, Carlos Gustavo. Aspectos Ergódicos da Teoria dos Números. IMPA, 2007.
- [3] LUCATELLI, F. Dinâmica Topológica e aplicações à Teoria dos Números
- [4] NUNES, Fernando Lucatelli. Demonstração Dinâmica do Teorema de Van Der Waerden, 2010.
- [5] MONTEIRO, Luiz Henrique Alves. Sistemas dinâmicos. Editora Livraria da Física, 2006.
- [6] OLIVEIRA, Krerley; VIANA, Marcelo. Fundamentos da teoria ergódica. Endereço eletrônico <http://www.impa.br/viana/out/fte.pdf>, 2014.
- [7] CABRAL, Marco AP. Introdução a Teoria da Medida e Integral de Lebesgue. Rio de Janeiro, 2013.
- [8] RESENDE, Marilene Ribeiro et al. Re-significando a disciplina teoria dos números na formação do professor de matemática na licenciatura. 2007.
- [9] OLIVEIRA, Krerley, and Marcelo Viana. "Teoria Ergódica: Um Curso Introductório." IMPA 103 (2010): 104.
- [10] DE MELO, Rafael Pereira. Números Primos: história, tópicos, criptografia e o ensino da Matemática. 2014.
- [11] NACIONAIS, Parâmetros Curriculares. ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, p. 538-545, 1999.
- [12] SILVEIRA, J. F. P. B. Van der Waerden. Disponível: <http://www.mat.ufrgs.br/portosil/vanderw.html>. Acesso em: 22 de março de 2017.

- [13] PEIXE, Telmo; BUESCU, Jorge. Recorrências, progressões aritméticas e teoria ergódica: teoremas de van der Waerden e de Green-Tao.
- [14] DINIZ, D. A. O Teorema de Van der Waerden. Disponível em: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAgfWIAB/teorema-van-der-waerden>. Acesso em: 21 de novembro de 2016.
- [15] REIS, WILSON. O Teorema de Paris-Harrington / Wilson Reis de Souza Neto; orientador: Nicolau C. Saldanha. - Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2007.
- [16] CIOLETTI, Leandro. O Teorema de Van der Waerden, 2012.
- [17] VILLATE, Jaime. Introdução aos sistemas dinâmicos: uma abordagem prática com máxima. 2005.
- [18] PALIS, Jacob; DE MELO, Welington. Introdução aos sistemas dinâmicos. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1978.
- [19] BARAVIERA, A. T.; BRANCO, Flávia M. Sistemas Dinâmicos: uma primeira visão. 2012.
- [20] LIMA, Elon Lages. Elementos de topologia geral. Ao Livro Técnico, 1970.
- [21] BATISTA, Tatiane Cardoso. Densidade do conjunto das dinâmicas simbólicas com todas as medidas ergódicas suportadas em órbitas periódicas. 2013. Tese de Doutorado. Universidade de Sao Paulo.
- [22] TAO, T. Long arithmetic progressions in the primes. In: ANNUAL MEETING OF THE AUSTRALIAN MATHEMATICAL SOCIETY, 50. Sydney: AustMS, 2006.
- [23] PRITCHARD, P.; MORAN, A.; THYSSEN, A. Twenty-two primes in arithmetic progression. Mathematics of Computation, v. 64, p. 1337-1339, 1995.
- [24] FRIND, M.; JOBLING, P.; UNDERWOOD, P. 23 primes in arithmetic progression. Disponível em <http://primes.plentyoffish.com>
- [25] PRIMES in Arithmetic Progression Records. Disponível em <http://users.cybercity.dk/dsl522332/math/aprecords.htm>
- [26] Castro Junior, Augusto Armando de. "Curso de teoria da medida." Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro (2004).

- [27] DRUCK, Suely. O drama do ensino da Matemática. Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/folha/sinapse/ult1063u343.shtml>. Acesso em: 2017.
- [28] Lucatelli Nunes, F. Elementos de Topologia para Sistemas Dinâmicos.

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas / Colegiado do Programa de Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional

Rua Rui Barbosa, 710, Centro, Campus Universitário de Cruz das Almas, Cruz das
Almas - BA
CEP: 44380-000
Telefone: (75) 3621-2350
<<http://www.ufrb.edu.br/profmat/>>