Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Funções Exponenciais, Logarítmicas via Resolução de Problemas

Viviane Damasceno Pinto

Jataí
2017

Viviane Damasceno Pinto

Funções Exponenciais, Logarítmicas via Resolução de Problemas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Exatas / Coordenação de Matemática da Universidade Federal de Goiás - Regional Jataí, como parte dos requisitos para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Ricardo Moreira.

Jataí - GO
2017

Viviane Damasceno Pinto graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e atualmente é professora do Ensino Médio no Colégio Estadual Filhinho Portilho em Rio Verde - Goiás.

Dedicatória

Dedico essa dissertação aos meus pais Ronan Domingues Pinto e Yone Damasceno Pinto, pelo apoio incondicional, por nunca duvidarem que seria possível. Dedico também aos meus filhos Bruno e Henrique, pois por eles eu não desisti.

Agradecimentos

A DEUS que me capacitou para que eu chegasse até aqui e me tornasse mestra. Difícil encontrar palavras para agradecer quem me presenteou com a vida, minha gratidão eterna por me aceitar e amar como sou, por nunca me abandonar, por ser fiel e por tantas bênçãos derramadas sobre mim.

À Universidade Federal de Goiás e ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada pois, em parceria me proporcionaram a oportunidade de realizar um mestrado de excelência.

A todos os meus professores da UFG, em especial ao meu orientador Fernando Ricardo Moreira pela paciência, dedicação e confiança.

Aos meus colegas de curso pela amizade e parceria nos estudos.

Aos meus pais que sempre acreditaram em mim e nas horas mais difíceis não me deixaram desistir.

Aos meus filhos por toda a compreensão, amor e carinho.

Aos meus colegas de trabalho que me apoiaram e torceram por mim.

PINTO, V. D., **Funções Exponenciais, Logarítmicas via Resolução de Problemas**, 2017. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Goiás.

Resumo

A experiência mostra que exponenciais e logaritmos são dois temas vistos por nossos alunos como extremamente complexos. Por outro lado, o ensino e aprendizagem de tais conteúdos são de grande importância e significado, além de serem usados em diversas áreas do conhecimento como ferramenta para solução de problemas. Apresentamos uma proposta de ensino de funções Exponenciais com suas definições, teoremas e propriedades, mas com uma abordagem que visa a aplicabilidade dos conceitos adquiridos na resolução de problemas significativos, envolvendo diversas áreas do conhecimento. Acreditamos que a abordagem do tema com esse novo olhar, venha facilitar e enriquecer o ensino e aprendizagem, muitas vezes empobrecido, quando se dá somente através de conceituações, teoremas e propriedades operatórias. O método de Aprendizagem Baseada em Problemas orientou esse trabalho e foi usado para nortear a metodologia proposta de iniciar o conteúdo de funções exponenciais, partindo de problemas simples e significativos e, posteriormente, possibilitando ao professor trabalhar com as propriedades operatórias de exponenciais e logaritmos como ferramentas para resolução dos mesmos.

Palavras Chave: Funções Exponenciais e Logarítmicas, Resolução de Problemas, Estratégias de Ensino.

PINTO, V. D., **Exponential Functions, Logarithms via Problem Solving**, 2017. Ms.C. Thesis, Federal University of Goiás.

Abstract

Experience shows that exponentials and logarithms are two themes seen by our students as extremely complex. On the other hand, the teaching and learning of such contents are of great importance and significance, as well as being used in several areas of knowledge as a tool for solving problems. We present a proposal of teaching Exponential functions with their definitions, theorems and properties, but with an approach that aims at the applicability of the concepts acquired in solving significant problems, involving several areas of knowledge. We believe that approaching the theme with this new look will facilitate and enrich teaching and learning, often impoverished, when it occurs only through conceptualizations, theorems and operative properties. The Problem-Based Learning method guided this work and was used to guide the proposed methodology of starting the content of exponential functions, starting from simple and significant problems and, later, enabling the teacher to work with the operative properties of exponentials and logarithms as tools To resolve them.

Keywords: Exponential Functions and Logarithms, Problem Solving, Teaching Strategies.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Segundo Boyer e Merzbach (2012) considera-se como a matemática mais antiga aquela resultante dos primeiros esforços do homem para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número, mesmo que sem a intenção de enunciá-la a grande área do conhecimento que se tornou hoje. Mas o fato é que, a matemática surgiu da necessidade de se realizar trabalhos cotidianos, quanto mais o trabalho se intensificava maior era a transformação vivida pela matemática. Após estudos de grandes nomes da humanidade, a matemática foi formalizada de modo que todas as pessoas que estão inseridas na sociedade tivessem um contato real com ela, e pudessem aprender sobre a mesma nas escolas.

A matemática se tornou uma linguagem universal em seus mais diversos contextos. Sua aplicabilidade e importância é percebida por toda sociedade moderna, fazendo com que cada vez mais haja uma cobrança maior pelo seu aprendizado. Segundo os Parâmentros Curriculares Nacionais em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas do conhecimento requerem alguma competência em Matemática. A possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos se faz necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional (BRASIL, 2006).

Mesmo com os avanços nos métodos e técnicas de ensino, têm-se notado que o número de pessoas que possuem dificuldades em compreender os conteúdos matemáticos continua sendo muito grande. Percebe-se que, em geral, os alunos entendem melhor os conteúdos de matemática que estão relacionados ao seu cotidiano e se os mesmos abordam apenas as quatro operações básicas. As demais definições e formalizações de processos um pouco mais complexos não são compreedidos pela maioria dos alunos. Por outro lado, a matemática carrega há muito tempo o preconceito de que é uma matéria compreendida apenas por alunos que possuem alguma habilidade mental especial, que são considerados gênios.

O ensino nas escolas era integralmente tradicional, feito através de aulas expositivas, resolução de exercícios, questionários referentes ao tema estudado e provas objetivas e subjetivas (LIBANEO, 1992; FREIRE, 1996, 2011). Com o avanço e modernização social, o ensino não ficou atrás e se reformulou (e tem se reformulado), à passos lentos. Para corresponder às expectativas sobre as metodologias de ensino, em especial ao do ensino da matemática, professores devem estar em constante atualização e qualificação.

A parte da matemática que se preocupa com técnicas e metodologias de ensino em matemática é atualmente chamada de Educação Matemática. A educação matemática não é uma ciência exata, ela é empírica e multidisciplinar. Segundo Stephen S. Willoughby, falando sobre Perspectivas sobre Educação Matemática, acredita-se que tenha um papel importante na sociedade desde os tempos da pré-história e que hoje é ainda mais significativo, sendo que futuramente a promessa é de ser ainda mais que hoje (WILLOUGHBY, 2000).

Na contramão dos avanços nos métodos e técnicas de ensino em matemática, algumas das metodologias tradicionais permanecem inalteradas. Por exemplo, o modo como os autores de livros didáticos de matemática apresentam os exercícios não apresentam desafios aos alunos e possuem cárater meramente técnico. Uma alternativa para contornar este incoveniente e atrair a atenção dos alunos, consiste na apresentação do conteúdo em forma de problemas contextualizados, os quais devem ser introduzidos antes da formalização dos conceitos a serem aprendidos (ONUCHIC ; ALLEVATO, 2004).

O ensino da matemática é essencial para a formação do aluno como ser social, pois desenvolve habilidades cognitivas necessárias para a resolução de problemas dentro e fora do ambiente escolar, porém o déficit na aprendizagem dos conceitos matemáticos, suas interpretações e aplicações impossibilitam o êxito de tal tarefa. Em particular, o ensino das funções exponenciais e logarítmicas, tema principal desta dissertação, não acontece de maneira distinta, instalando-se o debate e reflexão afim de solucionar tal problema.

Com a crescente exigência do mercado de trabalho por profissionais críticos e criativos não se pode ser negligente quanto às dificuldades apresentadas na aprendizagem da matemática, para isso utilizamos um método de resolução de problemas que torna o aluno participante da construção do próprio conhecimento, analisando dados apresentados, levantando conhecimentos já adquiridos para utilizar como ferramenta no intuito de solucionar problemas propostos.

Uma justificativa pela escolha do conteúdo, abordado nesta dissertação, dá-se pela grande dificuldade no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas. É apresentada uma proposta de metodologia que pode ser facilmente aplicada, considerando os aspectos sociais das escolas públicas. Um outro ponto a se ressaltar quanto a escolha do tema é que o mesmo possui inúmeras aplicações em situações corriqueiras e, portanto, pode ser aplicado ao cotidiano da maior parte dos estudantes (THIENGO, 2013).

A seguir são apresentados os objetivos desta dissertação, tanto o geral quanto os específico. É apresentada também a estruturação do presente trabalho.

Objetivos

Geral

- Desenvolver uma pesquisa bibliográfica através do estudo dos conceitos e aplicações que envolvem a prática do ensino e aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas, bem como aprensentar alternativa ao ensino tradicional da matemática que consiste em utilizar uma estratégia metodológica baseada na aplicação de problemas.

Específicos

- Enunciar o contexto histórico utilizando a história da matemática para situar a criação das funções exponenciais;
- Conceituar funções exponenciais e logarítmicas através de demonstrações, teoremas, proposições, etc..;
- Discutir acerca da prática pedagógica utilizada no ensino da matemática;
- Utilizar a metodologia de resolução de problemas no auxílio da aplicação dos conceitos das funções exponenciais e logarítmicas;
- Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade;

- Estimular a criatividade do aluno no momento de resolução dos problemas;
- Incentivar a interação entre aluno-professor e aluno-aluno durante a resolução de problemas;

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma:

- O Capítulo 02 contém um referencial teórico contando com aspectos históricos, enunciação e demonstração de conceitos referente à funções exponenciais e logaritmos;
- O Capítulo 03 trata do estudo sobre a prática pedagógica do ensino da matemática através da resolução de problemas, a metodologia da aplicação de resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem e exercícios aplicados à outras áreas de conhecimentos utilizando funções exponenciais e logaritmos;
- O Capítulo 04 apresenta as considerações finais referentes ao presente trabalho.

Capítulo 2

Elementos da Teoria e História dos Logaritmos e Exponenciais

Neste capítulo apresentamos aspectos da história e da teoria dos logaritmos e das exponenciais, enfatizando que todo o conhecimento matemático que existe hoje, tem em suas origens, a busca, pelo ser humano, de respostas a problemas oriundos de suas práticas sociais, como a agricultura, comércio, construção civil, dentre outras. Essa busca derivou em novos saberes, que geraram novas perguntas, em um processo cíclico de produção de conhecimentos. Destacamos como principal referência o livro História da Matemática, cujo autor é Carl B. Boyer (BOYER, 2012).

2.1 Elementos da História e Teoria das Exponenciais

Nesta seção são apresentados de forma sucinta alguns elementos da história e teoria das exponenciais. A principal ênfase se dá na definição e caracterização das funções exponenciais. São apresentadas, de forma ordenada, as definições de potenciação que começam com os inteiros até chegar na potenciação por números reais. As funções exponenciais são definidas a partir da potenciação real e os principais resultados para caracterizá-las são apresentados.

2.1.1 Elementos da História das Exponenciais

As funções são resumidamente definidas como um modo de se associar a cada valor da variável independente x um único valor aplicado em determinada lei, a $f(x)$, e suas representações se dão de diversas formas, como por exemplo, diagrama de Venn, uma lei de formação ou um gráfico, o qual possui um grupo de coordenadas de modo que cada elemento represente um dos eixos do plano utiizado.

Tal termo foi proposto por Leibniz em 1694, para designar momentos relacionados à uma curva, fazendo com que os cálculos tenham uma ressignificação, pois cada ponto encontrado algebricamente possui correlação com o gráfico que o descreve, ou seja, durante o cálculo de determinado elemento de uma função é possível demonstrá-lo visualmente através da representação gráfica. A palavra função foi utilizada mais tarde por Euler utilizando termos antes desconhecidos como $f(x)$ (BOYER, 2012).

O domínio acerca de técnicas de cálculo que resultaram na formalização dos exponenciais remetem aos tempos babilônicos, ao utilizarem um sistema de base sexagesimal, o qual ainda hoje é utilizado na marcação de tempo e ângulos. Tais cálculos conhecidos dos babilônicos datam aproximadamente de quatro mil anos antes de cristo.

Outro grande contribuinte para a história dos exponenciais e logaritmos é Arquimedes em seu livro intitulado por *Psammites*, o qual é chamado de contador de areia, pois Arquimedes em sua tentativa de prever o tamanho do universo afirmava que trabalhava com grandezas superiores à dos grãos de areia presente no universo. Segundo Boyer (2012) as ideias de Arquimedes criaram o princípio do que viria a influenciar Napier na descoberta dos logaritmos.

Como um termo matemático, o conceito de função foi introduzido por Leibniz em 1694, para descrever quantidades relacionadas a uma curva; tais como a inclinação ou mesmo a posição de ponto específico da curva. Funções relacionadas à curvas são atualmente chamadas funções diferenciáveis e são ainda o tipo de funções mais citados por não-matemáticos. Para este tipo de funções, pode-se falar em limites e derivadas; ambos sendo medida da mudança nos valores de saída associados à variação dos valores de entrada, formando a base do cálculo infinitesimal (ÁVILA, 2004).

A palavra função foi posteriormente usada por Euler em meados do século XVIII para descrever uma expressão envolvendo vários argumentos; i.e., $y = f(x)$. Ampliando a definição de funções, os matemáticos foram capazes de estudar ***estranhos*** objetos matemáticos tais como funções que não são diferenciáveis em qualquer de seus pontos. Tais funções, inicialmente tidas como puramente imaginárias e chamadas genericamente de ***monstros***, foram já no final do século XX, identificadas como importantes para a construção de modelos físicos de fenômenos tais como o movimento Browniano (FRANÇA; GOMES, 2005).

Durante o Século XIX, os matemáticos começaram a formalizar todos os diferentes ramos da matemática. Weierstrass defendia que se construisse o cálculo infinitesimal sobre a Aritmética ao invés de sobre a Geometria, o que favorecia a definição de Euler em relação à de Leibniz (LEWIS, 2006). Mais para o final do século, os matemáticos começaram a tentar formalizar toda a Matemática usando Teoria dos Conjuntos, e eles conseguiram obter definições de todos os objetos matemáticos em termos do conceito de conjunto. Foi Dirichlet quem criou a definição formal de função moderna.

Conta a lenda que um rei solicitou aos seus súditos que lhe inventassem um novo jogo, a fim de diminuir o seu tédio. O melhor jogo teria direito a realizar qualquer desejo. Um dos seus súditos inventou, então, o jogo de xadrez. O Rei ficou maravilhado com o jogo e viu-se obrigado a cumprir a sua promessa. Chamou, então, o inventor do jogo e disse que ele poderia pedir o que desejasse. O astuto inventor pediu então que as 64 casas do tabuleiro do jogo de xadrez fossem preenchidas com moedas de ouro, seguindo a seguinte condição: na primeira casa seria colocada duas moedas e em cada casa seguinte seria colocado o dobro de moedas que havia na casa anterior. O Rei considerou o pedido fácil de ser atendido e ordenou que providenciassem o pagamento. Tal foi sua surpresa quando os tesoureiros do reino lhe apresentaram a suposta conta, pois apenas na última casa o total de moedas era de 2^{64}, o que corresponde a um númedo de 20 dígitos. Não se pode esquecer ainda que o valor entregue ao inventor seria a soma de todas as moedas contidas em todas as casas (LIMA, 2013; THIENGO, 2013). O rei estava falido! A lenda nos apresenta uma aplicação de funções exponenciais, especialmente da função $y = 2^x$, onde x representa o número da casa do tabuleiro de xadres. As funções exponenciais são aquelas que crescem ou decrescem muito rapidamente. Elas desempenham papéis fundamentais na Matemática e nas ciências envolvidas com ela, como: Física, Química, Engenharia, Astronomia, Economia, Biologia, Psicologia e outras.

2.1.2 Elementos da Teoria das Exponenciais

Nesta seção do trabalho referimo-nos à teoria das exponenciais e a definição da função exponencial. Tratou-se da importância do ensino da função exponencial e de como é possível identificar que um problema é modelado por uma função exponencial de acordo com sua caracterização matemática.

As funções exponeciais, assim como as quadráticas e afins, são os modelos matemáticos mais utilizados na resolução de problemas do cotidiano, como por exemplo, na matemática financeira, crescimento de populações, pH de substâncias entre outras. Juntamente com as funções logarítmicas, são utilizadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento ou decrescimento da variável independente é muito rápido em relação ao da variável dependente.

Para definir funções exponenciais é necessário apresentar algumas notações e definições, bem como resultados que auxiliaram no entendimento do conceito de funções exponenciais.

- **Potência de Expoente Inteiro**

Seja $a \neq 0$ um número real e n um número inteiro. Definimos a potência de base a e expoente n como sendo o número a^n tal que

$$a^n = \begin{cases} 1, se & n = 0 \\ a, se & n = 1 \\ a.a^{n-1}, se & n > 1 \\ \dfrac{1}{a^{-n}}, se & n < 0 \end{cases}$$

Propriedades das potências

Sejam $a, b \in \mathbb{R}^*$, sendo $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Então valem as seguintes propriedades:

1) $a^m.a^n = a^{m+n}$;

2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

3) $(a.b)^n = a^n.b^n$;

4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$;

5) $(a^m)^n = a^{m.n}$.

Proposição 2.1. *Se* $a > 1$ *então* $a^{n+1} > a^n$*,* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Se $a > 1$ então, multiplicando ambos os membros desta desigualdade por a^n, obteremos $a^{n+1} > a^n$. □

Como consequência da proposição 2.1 temos

$$a > 1 \Longrightarrow 1 < a < a^2 < ... < a^n < a^{n+1} < ...$$

Em particular $a^{-n} < 1 < a^n$, para $n \in \mathbb{N}$ e $a^k < a^m$ para $k, m \in \mathbb{Z}$ com $k < m$. De fato se $a^k < a^m$ e $k < m < 0$ então $-k > -m > 0 \Longrightarrow a^{-m} < a^{-k}$. Então:

$$\frac{1}{a^{-m}} > \frac{1}{a-k} \Longrightarrow a^m > a^k$$

Em outras palavras, se a base for um número real maior que 1, quanto maior o expoente maior será o número.

Proposição 2.2. *Se* $0 < a < 1$ *então* $a^{n+1} < a^n$*,* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Se $0 < a < 1$, então multiplicando ambos os membros desta desigualdade por a^n teremos $a^{n+1} < a^n$. □

Como consequência da proposição 2.2 temos

$$0 < a < 1 \Longrightarrow 1 > a > a^2 > ... > a^n > a^{n+1} > ...$$

Em particular $a^n < 1 < a^{-n}$, para $n \in \mathbb{N}$ e $a^k > a^m$ para $k, m \in \mathbb{Z}$ com $k < m$. Ou seja, se a base é um número compreendido entre 0 e 1, quanto maior for o expoente menor será o número.

Proposição 2.3. *Se $a > 1$, a sequência formada pelas potências $a^n, n \in \mathbb{N}$, é ilimitada superiormente, isto é, fixado um número real $c > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a^{n_0} > c$ (LIMA, 2009b).*

Demonstração. Escrevendo a expressão $a = 1+d$, com $d > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli, temos $a^n > 1 + nd$. Logo, dado $c > 0$ se tomarmos $n_0 > (c-1)/d$, teremos $1 + n_0 d > c$ e, com maior razão, $a^{n_0} > c$. □

Em outras palavras, cada base maior que 1 gera uma sequência, a partir do momento que se eleva a base às potências, ilimitada superiormente visto que quanto maior o expoente, maior será o seu valor numérico.

Proposição 2.4. *Se $0 < a < 1$, então as potências de a^n decrescem abaixo de qualquer cota positiva. Ou seja, fixado $c > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_0^n < c$.*

Demonstração. Escrevendo $b = 1/a$, teremos $b > 1$. Da proposição 2.3 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b^{n_0} > 1/c$, ou seja,

$$\frac{1}{a^{n_0}} > \frac{1}{c}, \text{ donde } a_0^n < c.$$

□

Esse resultado é uma consequência da proposição 2.2, visto que se a base é um número decimal entre 0 e 1, então quanto maior o expoente menor será seu valor numérico.

- **Potência de Expoente Racional**

Nesta seção definiremos potenciação para expoentes racionais, ou seja, quocientes de inteiros. Para isto precisaremos das seguintes definições:

Definição 2.5. *Dado um número real* $a > 0$ *e um número inteiro* $q > 0$ *o símbolo* $\sqrt[q]{a}$ *é a solução positiva da equação* $x^q = a$.

Definição 2.6. *Seja* $a \in \mathbb{R}^+$ *onde* $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ *e* $r = p/q \in \mathbb{Q}$ *com* $q > 0$ *define-se potência de base* a *e expoente* r *por:*

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Proposição 2.7. *Seja* $a \in \mathbb{R}$, *então* $a^r.a^s = a^{r+s}$ *sendo* $r, s \in \mathbb{Q}$.

Demonstração. Sejam $r = p/q$ e $s = u/v$ números racionais com $q > 0$ e $v > 0$. Por definição:

$$(a^r)^q = (\sqrt[q]{a^p})^q = a^p.$$

Analogamente, temos que $(a^s)^v = a^u$. Logo

$$(a^r.a^s)^{qv} = (a^r)^{qv}.(a^s)^{qv} = a^{rqv}.a^{sqv} = a^{pv}.a^{uq} = a^{pv+uq}.$$

Vemos que $a^r.a^s$ é o número cuja qv-ésima potência vale a^{pv+uq}. Isto quer dizer que:

$$a^r.a^s = a^{(pv+uq)/qv}$$

Como

$$\frac{pv + uq}{qv} = \frac{p}{q} + \frac{u}{v} = r + s,$$

Temos

$$a^r.a^s = a^{r+s}.$$

□

Proposição 2.8. *Se $a > 1$ e $r < s$ com $r, s \in \mathbb{Q}$, então $a^r < a^s$.*

Demonstração. Sejam $r = p/q$ e $s = m/n$ números racionais com $q > 0$ e $n > 0$. Temos que, $r < s$ se, e somente se, $pn < qm$. Por definição $(a^r)^{n.q} = a^{pn}$ e $(a^s)^{n.q} = a^{qm}$. Como $pn < qm$ e $pn, qm \in \mathbb{Z}$ temos que $a^{pn} < a^{qm}$, ou seja, $(a^r)^{n.q} < (a^s)^{n.q}$. Portanto, $a^r < a^s$. □

Proposição 2.9. *Se $0 < a < 1$ e $r < s$ com $r, s \in \mathbb{Q}$, então $a^r > a^s$.*

Demonstração. Sejam $r = \frac{p}{q}$ e $s = \frac{m}{n}$, números racionais com $q > 0$ e $n > 0$. Temos que, $r < s$ se, e somente se, $pn < qm$. Por definição $(a^r)^{n.q} = a^{pn}$ e $(a^s)^{n.q} = a^{qm}$.

Como $pn < qm$ e $pn, qm \in \mathbb{Z}$, temos que $a^{pn} > a^{qm}$, ou seja, $(a^r)^{n.q} > (a^s)^{n.q}$. Portanto, $a^r > a^s$. □

Teorema 2.10. *Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo não degenerado de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$ (LIMA, 2011).*

Demonstração. Para simplificar a demonstração suporemos que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $1 < \alpha < \beta$. Os demais casos podem ser tratados de modo análogo. Devemos achar $r \in \mathbb{Q}$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, isto é, $\alpha \leqslant a^r \leqslant \beta$. Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota pré-fixada, podemos obter números naturais M e n tais que

$$\alpha < \beta < \alpha^M \text{ e } 1 < \alpha < \left(1 + \tfrac{\beta-\alpha}{\alpha^M}\right)^n$$

Na última relação, decorrem sucessivamente

$$1 < \alpha^{1/n} < 1 + \tfrac{\beta-\alpha}{\alpha^M} \text{ e consequentemente } 0 < \alpha^M(\alpha^{1/n} - 1) < \beta - \alpha.$$

Logo, se $m \in \mathbb{N}$ é tal que $m/n \leqslant M$ então

$$0 < \alpha^{\frac{m}{n}}(\alpha^{1/n} - 1) < \beta - \alpha \Leftrightarrow \alpha^{\frac{m+1}{n}} - \alpha^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha.$$

Assim, as potências

$$\alpha^0 = 1, \alpha^{1/n}, \alpha^{2/n}, ..., \alpha^M.$$

são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que o comprimento $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, \alpha^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{m/n}$, está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$. □

• **Potência de Expoente Real**

Para definir potências com expoente sendo um número real, falta apenas definir potenciação com expoentes irracionais, pois a potenciação de inteiros e racionais foram descritas nas seções anteriores.

Existe uma única maneira de definir o valor de a^x quando x é irracional. Para fixar as ideias, suporemos $a > 1$. Sabemos que a potenciação com expoentes racionais é crescente, ou seja, se $r < s$ então $a^r < a^s$, com $r, s \in \mathbb{Q}$. É natural pensar que se $r < x < s$, com r, s racionais e x irracional, tenhamos

$$a^r < a^x < a^s.$$

Portanto, se x é irracional, a^x é o único número real cujas aproximações por falta são as potências a^r, com r racional menor do que x e cujas aproximações por excesso são as potências a^s, com s racional maior do que x.

Para todo x irracional, considere as sequências r_n e s_n, $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo: r_n é monótona crescente e s_n monótona descrescente, ambas convergentes para x. Assim, temos que:

$$r_n \leqslant x \leqslant s_m, \quad \text{e} \quad a^{r_n} \leqslant a^x \leqslant a^{s_m} \quad n, m \in \mathbb{N}$$

Temos ainda que:

$$[a^{r_1}, a^{s_1}] \supset [a^{r_2}, a^{s_2}] \supset \cdots \supset [a^{r_n}, a^{s_n}], \cdots$$

Pelo Princípio dos Intervalos Encaixados, existe um único $k \in \mathbb{R}$ que pertence a todos os intervalos $[a^{r_n}, a^{s_n}]$, com $n \in \mathbb{N}$. Definimos o valor a^x como sendo a intersecção destes intervalos, ou seja:

$$a^x = \cap_{i=1}^{\infty}[a^{r_i}, a^{s_i}]$$

- **Função Exponencial**

Nesta subseção do trabalho, referimo-nos à função exponencial. Lima (2009b) é a principal referência utilizada nesta seção.

Seja $a \neq 1$ um número real positivo. A função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ indicada por $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

1) $a^x.a^y = a^{x+y}$;

2) $a^1 = a$;

3) se $x < y$ e $a > 1$ então $a^x < a^y$ e se $x < y$ e $0 < a < 1$ então $a^y < a^x$.

É interessante observar que se uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem a propriedade 1) acima, isto é, $f(x+y) = f(x).f(y)$, então f não pode assumir o valor 0, a menos que seja identicamente nula. Com efeito, se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ então, para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0).f(x - x_0) = 0.f(x - x_0) = 0.$$

Logo f será identicamente nula. Mais ainda, se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem a propriedade 1) e não é identicamente nula então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right).f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Assim, diante das propriedades 1) e 2), tanto faz dizer que o contra-domínio de f é $\mathbb{R}$ como dizer que é $\mathbb{R}^+$. A vantagem de tomar $\mathbb{R}^+$ como contra-domínio é que se terá f sobrejetiva, como pode ser visto.

Se uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tem as propriedades 1) e 2) então, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$f(n) = f(1 + 1 + ... + 1) = f(1).f(1)._{...}.f(1) = a.a \cdots a = a^n.$$

Usando a propriedade 1), resulta daí que, para todo número racional $r = m/n$, com $n \in \mathbb{N}$, deve-se ter $f(r) = a^r = \sqrt[n]{a^m}$. Portanto $f(r) = a^r$ é a única função $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f(r+s) = f(r).f(s)$ para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$ e $f(1) = a$. A propriedade 3) diz que a função exponencial deve ser crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Desta forma compreende-se que a função exponencial ocorre quando temos uma variável no expoente e o número é determinado como base.

a seguir é apresentada a figura 2.1 com os gráficos das funções $f(x) = a^x,\ a > 1$ (azul) e $g(x) = a^x,\ 0 < a < 1$ (vermelho). Observando esses dois gráficos poderemos entabular algumas propriedades gerais importantes.

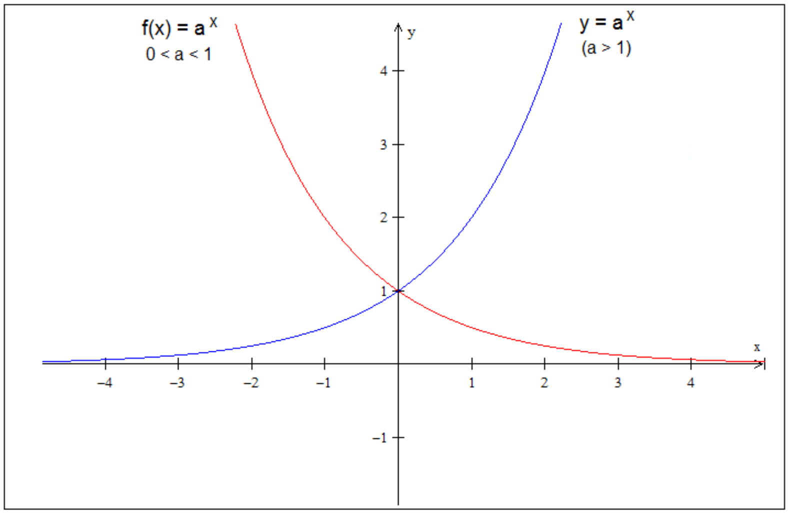


Figura 2.1: Funções Exponenciais com base maior que 1 e com base entre 0 e 1.
Fonte: Construída pelo autor.

Os gráficos estão passando pelo ponto $(0, 1)$. Para quaisquer valores de x os valores de $f(x)$ serão positivos. Denomina-se o eixo dos x como assíntotas horizontais.

Reta assíntota (ou assintótica) é uma reta tal que a distância de um ponto de uma curva a essa reta tende para zero quando o ponto se afasta ao infinito sobre a curva. A reta assintótica e a curva ficam arbitrariamente próximas conforme se afastam da origem do sistema de coordenadas.

O gráfico de f é nitidamente crescente, isso vai ocorrer toda vez que $a > 1$, já o gráfico de g tem o aspecto de uma função decrescente e isso vai ocorrer sempre que $0 < a < 1$. O domínio das duas funções é o conjunto dos números reais, porém a imagem será determinada por $]0, +\infty[$.

Observe a figura 2.2. Note as funções $y = 2^x, y = 3^x$ e $y = 4^x$ são todas crescentes, porém é fácil perceber, observando a figura, que quanto maior a base mais próxima a curva se encontra do eixo Oy, quando x se aproxima de zero.

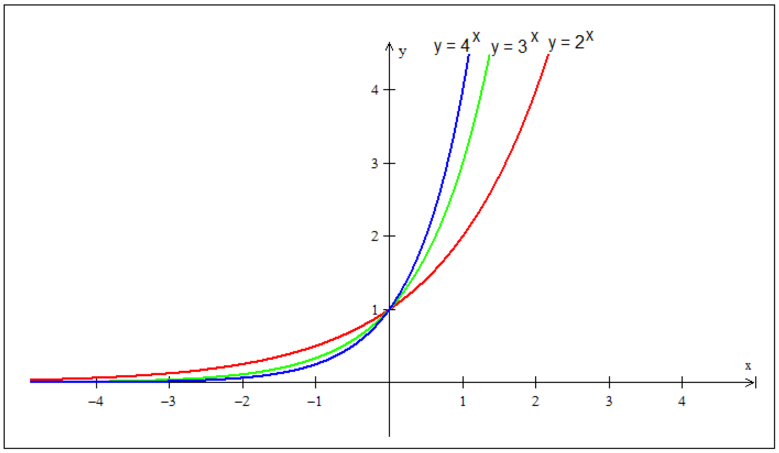


Figura 2.2: Funções Exponenciais 2^x, 3^x e 4^x.
Fonte: Construída pelo autor.

Quando a base pertence ao intervalo $(0, 1)$, ocorre que quanto menor a base mais próximo o gráfico estará do eixo Oy, quando x tende a zero. Este efeito pode ser observado na figura 2.3 a seguir.

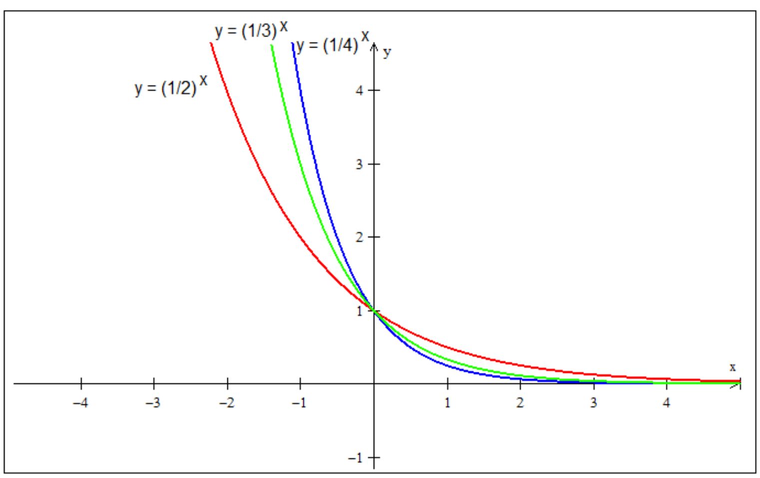


Figura 2.3: Funções Exponenciais $(1/2)^x$, $(1/3)^x$ e $(1/4)^x$.
Fonte: Construída pelo autor.

Observe nas figuras uma propriedade interessante. As funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = (1/a)^x = a^{-x}$ com $a > 1$ são simétricas em relação ao eixo Oy.

Se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ possui as propriedades 1), 2) e 3) acima estipuladas para ser uma função exponencial, então o valor $f(x)$ com x irracional é dado por $f(x) = \lim f(r_n)$, onde (r_n) é uma sequência (crescente ou decrescente) de números racionais tais que $\lim(r_n) = x$.

Na prática, escrevendo $f(x) = a^x$ (onde $a = f(1)$), tomamos a expressão decimal $x = a_0, a_1a_2...a_n...$ e temos $a^x = \lim a^{r_n}$, onde $r_n = a_0, a_1a_2...a_n..$.

Definindo a^x para todo $x \in \mathbb{R}$, não há maiores dificuldades para verificar que, de fato, são válidas as propriedades 1), 2) e 3) acima enunciadas. além disso, tem-se ainda que:

4) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente e limitada inferiormente.

Com efeito, todo intervalo em $\mathbb{R}^+$ contém valores $f(r) = a^r$ segundo a proposição "Fixando o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$". Mais precisamente, se $a > 1$ então a^x cresce sem limites quando $x > 0$ é muito grande e se $0 < a < 1$ então a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$ tem valor absoluto grande.

5) A função exponencial é contínua.

Isto significa que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseje, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0. Dito de outro modo, o limite de a^x quando x tende a x_0 é igual a a^{x_0}. Em símbolos, tem-se que

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

Esta é novamente uma consequência das propriedades básicas 1); 2) e 3) da função exponencial. Para prová-la, mostremos primeiro que é possível tornar a^h tão próximo de 1 quanto desejamos, desde que $|h|$ seja escolhido suficientemente pequeno.

Para fixar as ideias, suponhamos $a > 1$ e $h > 0$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, queremos mostrar qque, tomando h pequeno, teremos $a^h < 1+\varepsilon$. Ora, pela desigualdade de Bernoulli $(1+\varepsilon)^n > 1+n\varepsilon$. Portanto, se tomarmos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > (a+1)/\varepsilon$, teremos $n\varepsilon > a-1$, logo $a < 1+n\varepsilon$ e daí (por Bernoulli) $a < (1+\varepsilon)^n$ e finalmente $a^{1/n} < 1+\varepsilon$. Em suma: dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^{1/n} < 1+\varepsilon$. Se tomarmos h tal que $0 < h < 1/n$, termos $1 < a^h < a^{1/n} < 1+\varepsilon$. Assim faremos a^h tão próximo de 1 quanto desejarmos.

Escrevemos $\lim_{h\to 0} a^h = 1$ (1 é o limite de a^h quando h tende a zero).

Agora, fixando $x_0 \in \mathbb{R}$, pomos $h = x - x_0$ e temos $a^x - a^{x_0} = a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0}.(a^h - 1)$. Quando x se aproxima de x_0, h tende a 0, a^h tende a 1 e $a^h - 1$ tende a zero. Como a^{x_0} é fixo (não depende de h), temos $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$, o que caracteriza a continuidade da função exponencial.

6) A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$ é sobrejetiva.

Esta afirmação quer dizer que para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$. (Todo número real positivo é uma potência de a). Para prová-la, escolheremos para cada $x \in \mathbb{N}$, uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo $(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$, de modo que $|b - a^{r_n}| < \frac{1}{n}$. Para fixar as ideias, suponhamos $a > 1$. Escolhemos as potências a^{r_n} sucessivamente, tais que

$$a^{r_1} < a^{r_2} < ... < a^{r_n} < ... < b.$$

Certamente, podemos fixar $s \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a^s$. Então a função a^x nos assegura que

$r_1 < r_2 < ... < r_n < ... < s$.

Assim (r_n) é uma sequência crescente, limitada superiormente por s. A completeza de $\mathbb{R}$ garante então que r_n são valores aproximados por falta de um número real x, ou seja, $\lim_{x \to x_0} r_n = x$. A função exponencial sendo contínua, temos então $a^x = \lim_{x \to x_0} a^x = b$ como queríamos demonstrar.

Vemos, pois, que para cada número real positivo a, diferente de 1, a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade adicional de transformar somas em produtos, isto é, $f(x + y) = f(x).f(y)$.

A injetividade da função $x \mapsto a^x$ decorre da monotonicidade. Se $a > 1$, por exemplo, então $x > y \Rightarrow a^x > a^y$ e $x < y \Rightarrow a^x < a^y$, portanto $x \neq y \Rightarrow a^x \neq a^y$.

Tem-se ainda

$*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ se $a > 1$.

$*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ se $0 < a < 1$.

$*$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ se $a > 1$.

$*$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ se $0 < a < 1$.

• **Caracterização de uma Função Exponencial**

As funções exponenciais são, juntamente com as funções afins e as quadráticas, os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares. As funções afins ocorrem em praticamente todos os problemas durante os oito primeiros anos da escola e, com menos exclusividade, porém ainda com grande destaque, nos três anos finais. Por sua vez, as funções quadráticas e exponenciais aparecem nesses três últimos anos, embora tenham, principalmente as últimas, importância considerável na universidade, bem como nas aplicações de Matemática em atividades científicas ou profissionais.

Uma vez decidido que o modelo adequado para um determinado problema é a função afim, quadrática ou exponencial, a partir daí o tratamento matemático da questão não oferece maiores dificuldades. As dúvidas que possam surgir acontecem geralmente, antes, na escolha do instrumento matemático apropriado para o problema que se estuda. Para que essa escolha possa ser feita corretamente, é preciso saber quais são as propriedades características de cada tipo de função. Vejamos as propriedades que caracterizam as funções exponenciais.

Teorema 2.11. *(Caracterização da Função Exponencial) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:*

1) $f(nx) = f(x)^n$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$*;*

2) $f(x) = a^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*, onde* $a = f(1)$*;*

3) $f(x+y) = f(x).f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração. Provaremos que $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

1ª Mostraremos que $(1) \Rightarrow (2)$: A fim de mostrar que $(1) \Rightarrow (2)$ observaremos inicialmente que a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$) tem-se $f(rx) = f(x)^r$. Com efeito, como $nr = m$, podemos escrever

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mr) = f(x)^m$$

logo $f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r$.

2ª Mostraremos que $(2) \Rightarrow (3)$: Tem-se

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x a^y = f(x)f(y).$$

3ª Mostraremos que (3) $\Rightarrow$ (1):

$$f(nx) = f(\overbrace{x + ... + x}^{n \quad vezes}) = \overbrace{f(x).f(x)...f(x)}^{n \quad vezes} = f(x)^n$$

$\square$

Definição 2.12. *Uma função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é do tipo exponencial quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$ então g é crescente e $0 < a < 1$, então g é decrescente.*

Se a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é de tipo exponencial de base a, então quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, os quocientes

$$\frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h \text{ e } \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = a^h - 1.$$

Dependente apenas de h, mas não de x.

Teorema 2.13. *Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ um função crescente ou decrescente, tal que para $x, h \in \mathbb{R}$, o acréscimo relativo $[g(x+h) - g(x)]/g(x)$ dependa apenas de h, mas não de x. Então se $b = g(0)$ e $a = g(1)/g(0)$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. A hipótese equivale a supor que $\varphi(h) = g(x+h)/g(x)$ independente de x. Substituindo, se necessário, $g(x)$ por $f(x) = g(x)/b$, onde $b = g(0)$, f continua crescente ou decrescente, com $f(x+h)/f(x)$ independente de x e, agora com $f(0) = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação $\varphi(h) = f(x+h)/f(x)$ obteremos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Observa-se que a função crescente ou decrescente f cumpre $f(x+h) = f(x).f(h)$, ou seja que a $f(x+y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Pelo teorema anterior, $f(x) = a^x$, logo $g(x) = b.f(x) = b.a^x$. $\square$

O Teorema 2.13 acima nos orienta no sentido de entender quando é que um determinado fenômeno pode ser modelado por uma função exponencial. Sempre que uma variação do tipo $g(x+h) - g(x)$ for proporcional ao valor de $g(x)$, a função g pode ser escrita da forma $g(x) = ka^x$, onde $k \in \mathbb{R}^*$.

As propriedades que as funções exponenciais possuem e que foram anteriormente descritas servirão para o reconhecimento do comportamento exponencial em situações problemas que são discutidas no próximo capítulo deste trabalho.

2.2 Elementos da História e Teoria dos Logaritmos

Nesta seção são apresentados, de forma sucinta, aspectos da teoria e da história dos logaritmos. A principal referência bibliográfica utilizada foi o livro Números e Funções Reais do autor Elon Lages Lima (LIMA, 2009b).

2.2.1 Elementos da História dos Logaritmos

No fim do século XVI, tempo em que se desenvolvia a Astronomia e a Navegação, não havia um método em que as operações aritméticas eram realizadas com maior agilidade. Diante das dificuldades encontradas estudiosos da época foram em busca de soluções. Dentre esses estudiosos se destacava John Napier (1550-1617) teólogo e matemático escocês e também Jost Bürgi (1552-1632), que juntos publicaram as tabelas logarítmicas que foram consideradas uma das grandes descobertas científicas do século (figura 2.4). Dentre eles John Napier se tornou mais conhecido por exercer maior influência na época (BOYER, 2012; THIENGO, 2013).

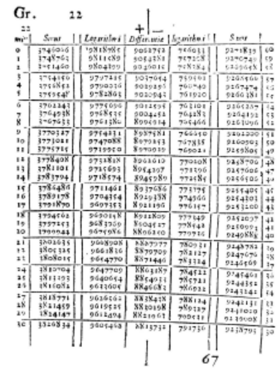
John Napier Jost Bürgi

Figura 2.4: Precursores dos Logaritmos.
Fonte: Extraído de THIENGO (2013).

John Napier nasceu e foi educado na Escócia e pertencia a uma família abastada com bastante prestígio. Demonstrou grande interesse por estudar teologia e aritmética, com o tempo voltou seus estudos para a literatura clássica e matemática. Realizou as primeiras tentativas com referência ao desenvolvimento da base dois para a contagem e estudou profundamente os princípios que fundamentam a notação dos números e a história da notação arábica descobrindo suas raízes na Índia. Por volta de 1590, utilizou seu sólido conhecimento das progressões aritméticas e geométricas para desenvolver do conceito de logaritmo.

John Napier teve também outras contribuições para a matemática, tais como as expressões exponenciais para funções trigonométricas e a introdução da notação decimal para frações, além de outras como a trigonometria esférica. No entanto, sua principal contribuição foi a criação dos logaritmos, que foi publicada no ano de 1614, tendo abrangido a descrição do método junto com o conjunto de tabelas e regras (figura 2.5).

Capa da publicação de Napier

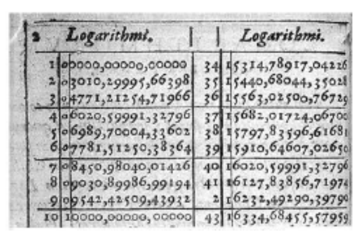


Exemplo de uma *Tábua Logarítmica* de Napier

Figura 2.5: Publicação e Tábua de logaritmos de Napier.
Fonte: Extraído de THIENGO (2013).

Após a publicação de sua primeira tábua de logaritmos, Napier, juntamente com o matemático inglês Henry Briggs (1561-1631), apresentou uma nova tábua, proporcionando uma melhor interpretação, contendo os chamados Logaritmos Decimais (figura 2.6). Essa tábua foi publicada por Brigs em *Logarithmorum Chilias Prima* em 1617 (BOYER, 2012).

Henry Briggs



2	Logarithmi.		Logarithmi.
1	00000,00000,00000	34	15314,78917,04226
2	03010,29995,66398	35	15440,68044,35028
3	04771,21254,71966	36	15563,02500,76729
4	06020,59991,32796	37	15682,01724,06700
5	06989,70004,33602	38	15797,83596,61681
6	07781,51250,38364	39	15910,64607,02650
7	08450,98040,01426	40	16020,59991,32796
8	09030,89986,99194	41	16127,83856,71974
9	09542,42509,43932	2	16232,49290,39790
10	10000,00000,00000	43	16334,68455,57959

Exemplo de uma *Tábua Logarítmica* de base decimal

Figura 2.6: Briggs e a Tábua de logaritmos na base decimal.
Fonte: Extraído de THIENGO (2013).

2.2.2 Elementos da Teoria dos Logaritmos

Geralmente, os logaritmos podem ser calculados usando a série de potências ou a média aritmética-geométrica, ou serem retirados de uma tabela de logaritmos pré-calculada, a qual oferece uma precisão definida.

Por se mostrar um método eficaz, as aplicações dos logaritmos se dão dentro e fora da matemática como em escalas logarítmicas, na psicologia humana, em probabilidade e estatística, na música, entre outras.

- **Definição de logaritmo de um número**

Considere a seguinte questão. A que número x se deve elevar o número 2 para se obter 8?

A resposta para esta questão pode ser obtida por através de uma simples conta, ou seja, $2^x = 8$ ou equivalentemente $2^x = 2^3$ e, portanto, a resposta é $x = 3$. Esse valor 3 denomina-se logaritmo do número 8 na base 2 e é representado por $\log_2 8 = 3$

Definição 2.14. *Seja $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $a \neq 1$. O logaritmo de um número real $b > 0$ na base a é o número x tal que*

$$a^x = b.$$

O número b é chamado de logaritmando, a é a base e x é o logaritmo.

A notação utilizada para representar o logaritmo de b na base a é dada por

$$\log_a(b) = x \Longleftrightarrow a^x = b.$$

Notações Particulares

* $*$ Se a base a for igual a 10, a mesma não aparece na notação: $\log_{10}(b) = \log(b)$;

* $*$ Se a base for o número e, a notação utilizada é a seguinte: $\log_e(b) = \ln(b)$.

Propriedades dos logaritmos

A seguir serão apresentadas, sem demonstração, algumas das principais propriedades dos logaritmos.

Sejam $a, d \in \mathbb{R}^+$ com $a, d \neq 1$, b, c reais positivos e k um número real qualquer. Então:

1) $\log_a a = 1$ e $\log_a 1 = 0$;

2) $\log_a (b.c) = \log_a (b) + \log_a (c)$;

3) $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a (b) - \log_a (c)$;

4) $\log_a (b^k) = k. \log_a (b)$;

5) $\log_a (b) = \dfrac{\log_d (b)}{\log_d (a)}$;

6) $\log_a (a^x) = x$ e $a^{\log_a x} = x$.

• **Função Logarítmica**

Vimos nas seções anteriores que a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$, é uma função bijetora, crescente se $a > 1$ e descrescente quando $0 < a < 1$. Vimos ainda que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se que:

$$f(x + y) = f(x).f(y).$$

Sendo a função exponencial f bijetora, temos que f possui inversa. Sendo assim, definimos a função logaritmo de base a como sendo a inversa da função exponancial de base a. Ou seja:

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

é a função que associa a cada número real x o número $\log_a(x)$. Segue então que:

$$y = \log_a(x) \Longleftrightarrow a^y = x.$$

Segue o gráfico da figura 2.7 da função exponencial de base a e de sua inversa, a função logorítmica de base a.

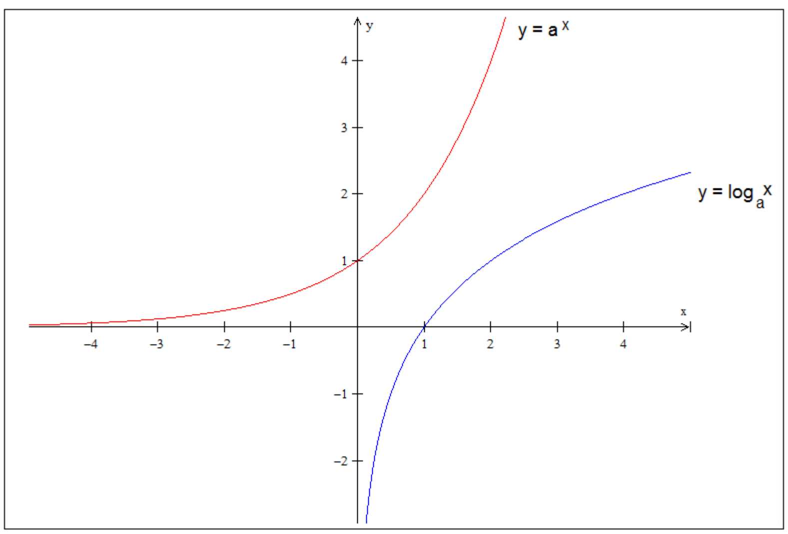


Figura 2.7: Gráfico: funções exponencial e logarítmica de base a.
Fonte: Construída pelo autor.

As seguintes proposições decorrem diretamente da definição de função logarítmica, e são utilizadas no próximo capítulo, ou seja, durante a resolução de problemas.

Proposição 2.15. *Sejam $a \in \mathbb{R}^+$ com $a \neq 1$ e x, y reais positivos. É válida a seguinte equação:*

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Demonstração. Utilizaremos um artíficio usando a definição. Considerando $\log_a(xy) = r$, $\log_a x = s$ e $\log_a y = t$, podemos reescrevê-los como

$$a^r = x.y,\ a^s = x \text{ e } a^t = y$$

Assim, $a^r = a^s.a^t$ e, portanto $a^r = a^{s+t}$. Então,

$$r = s + t \Longleftrightarrow \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

$\square$

Proposição 2.16. *Sejam $a \in \mathbb{R}^+$ com $a \neq 1$ e x real positivo. Para todo r, tem-se que*

$$\log_a(x^r) = r \log_a x$$

Demonstração. Considerando $log_a(x^r) = u$ e $log_a x = v$, teremos

$$a^u = x^r \text{ e } a^v = x$$

Pontanto, $a^u = (a^v)^r = a^{vr}$. Ou seja, $u = vr$. $\square$

- **Caracterização da Função Logarítmica**

Teorema 2.17. *Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função injetiva. Suponha que $f(x.y) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então, existe $a > 0$ com $a \neq 1$ tal que $f(x) = \log_a(x)$.*

Lima (2009b) apresenta a demonstração da proposição acima. A proposição anterior caracteriza como funções logaritmícas as funções injetoras que possuem a propriedade de transformarem produtos em somas.

2.3 Logaritmos Naturais e Exponencial de Base e

Nesta seção são apresentadas as definições e principais resultados referentes aos logaritmos e exponenciais de base e.

2.3.1 Logaritmos Naturais

O estudo feito para a exponencial de base e permite definir logaritmo natural e demonstrar as suas propriedades. Das propriedades da exponencial de base e decorrem como muita facilidade as propriedades dos logaritmos naturais.

Em termos simples, o logaritmo natural é uma função que é o expoente de uma potência e, e aparece frequentemente nos processos naturais (o que explica o nome ***logaritmo natural***). Esta função torna possível o estudo de fenômenos que evoluem de maneira exponencial. Definiremos o logaritmo natural de um número $x \in \mathbb{R}^+$, como a área da faixa H_1^x, caracterizada pela região definida pelos pontos de abcissa entre 1 e x e ordenadas entre 0 e $1/x$ (figura 2.8). Assim, escrevendo $\ln x$ para indicar o logaritmo natural de x, temos:

$$\ln x = \text{Área } (H_1^x) = - \text{ Área } (H_x^1).$$

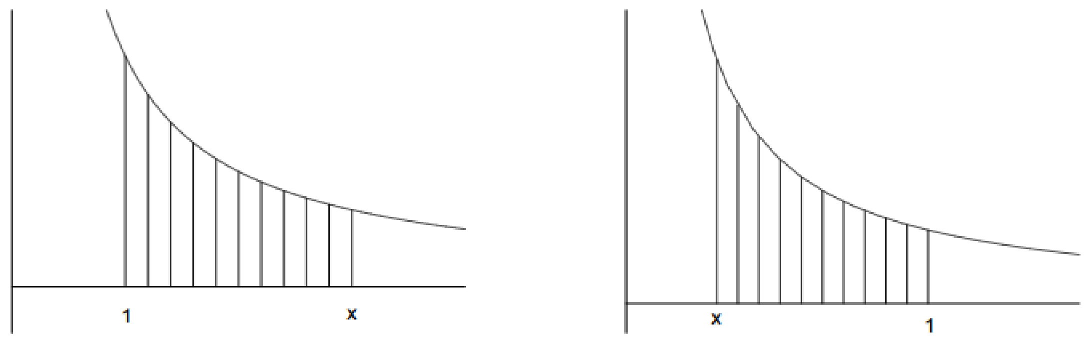


Figura 2.8: Logaritmo Natural como área da faixa.
Fonte: Construída pelo autor.

Lembremos da convenção de tomar Área $(H_1^x) < 0$ quando $0 < x < 1$. Em particular, quando $x = 1$ a área H_1^1 reduz-se a um segmento de reta, portanto tem área igual a zero. Podemos então escrever:

$$\ln 1 = 0;$$
$$\ln x > 0 \ \ se \ \ x > 1;$$
$$\ln x < 0 \ \ se \ \ 0 < x < 1.$$

Não está definido $\ln x$ quando $x < 0$. Fica portanto definida uma função real

$$\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

A cada $x \in \mathbb{R}^+$, a função ln faz corresponder seu logaritmo natural, $\ln x$, definido acima.

A seguir é apresentado um lema para auxiliar na demonstração de um teorema de caracterização para logaritmo natural.

Lema 2.18. *Sejam A_1 e A_2 as áreas dos trapezóides limitados pela hipérbole $y = 1/x$, o eixo x e as linhas $x = a_1$, $x = b_1$ e $x = a_2$, $x = b_2$, respectivamente. Nestas condições, se $b_1/a_1 = b_2/a_2$ emtão $A_1 = A_2$.*

Teorema 2.19. *A função* $\ln : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função logarítmica, ou seja, satisfaz o teorema 2.17 de caracterização das funções logaritmicas.*

Demonstração. Devemos mostrar que $\ln$ é injetiva e transforma um produto numa soma. Começaremos provando que:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

Observe graficamente que é válida a equação:

$$\text{Área}\ (H_1^{xy}) = \text{Área}\ (H_1^{x}) + \text{Área}\ H_x^{xy}.$$

Devido ao Lema 2.18 e $xy/x = y/1$, temos que:

$$\text{Área}\ (H_x^{xy}) = \text{Área}\ (H_1^{y})$$

Assim, segue que

$$\text{Área}\ (H_1^{xy}) = \text{Área}\ (H_1^{x}) + \text{Área}\ H_1^{y},$$

ou seja $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Provaremos que $\ln$ é uma função crescente, portanto injetora. Dados $x, y \in \mathbb{R}^{+}$, dizer que $x < y$ significa afirmar que existe um número $a > 1$ tal que $y = ax$. Segue-se que:

$$\ln y = \ln a + \ln x.$$

Como $a > 1$, temos $\ln a > 0$. Portanto $\ln y > \ln x$, provando que $\ln$ é uma função crescente.

$\square$

2.3.2 Função Exponencial de Base e

Um número racional é aquele que pode ser escrito como a fração a/b onde $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Um número é racional se, e somemte se, sua representação decimal é finita ou infinita periódica. Caso contrário, se a representação decimal for infinita não periódica, o número é chamado de irracional. O número e, chamado de número de Euler, é um número irracional e, assim como o π, é um número transcendente, ou seja, não é raíz de nenhum polinômio com coeficientes inteiros. Um valor aproximado dessa importante constante, com 12 algarismos decimais exatos, é $e = 2,718281828459$.

Definimos a função logarítmica como sendo a inversa de função exponencial. Com a notação usual, descrita em qualquer literatura da área, tomando $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln(x)$, temos que:

$$f(g(x)) = x = g(f(x)) \Longleftrightarrow e^{\ln(x)} = x = \ln(e^x).$$

Considere a sequência x_n definida por:

$$x_n = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n.$$

É possível mostrar que a sequência x_n acima é monótona crescente e limitada superiormente, para todo α. É possível mostrar ainda que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$$

Sendo assim, o número e é apresentado como o limite da expressão $(1 + \frac{1}{n})^n$ quando n tende ao infinito.

Noutras palavras, costuma-se introduzir e como o número real cujos valores aproximados por falta são os números racionais da forma $(1+\frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}$. Essas aproximações são tanto melhores quanto maior for o número n.

As funções do tipo exponencial que aparecem na literatura e nas aplicações, são escritas de forma geral por $f(x) = b\, e^{\alpha x}$, com a base e, porque esta expressão exibe de forma explícita o valor inicial $b = f(0)$ e também o coeficiente α, que está intimamente ligado à taxa de crescimento de f. A taxa de crescimento de uma função f no intervalo $[x, x+h]$ é, por definição

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

No caso particular onde $f(x) = b\, e^{\alpha x}$, temos

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b\, e^{\alpha x}\, \frac{e^{\alpha h} - 1}{h} = f(x) \frac{e^{\alpha h} - 1}{h}.$$

É possível mostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{h} = \alpha.$$

Um conceito muito importante em matemática é o de derivada. Ela é definida como sendo o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Nestes termos, temos a seguinte identidade

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \alpha f(x).$$

Temos então que a derivada da função exponencial $f(x) = b\, e^{\alpha x}$ é proporcional à própria função $f(x)$. No caso particular, quando $f(x) = b\, e^{x}$, temos que $f'(x) = f(x)$, onde f' é a derivada da função f.

Capítulo 3

O Ensino de Logaritmos e Exponenciais via Resolução de Problemas

A expressão resolução de problemas é usada em muitas disciplinas e áreas do conhecimento. Os psicólogos referem-se a um processo mental, os profissionais da ciência da computação a um processo computadorizado e os profissionais da educação ao ensino investigativo e contextualizado, favorecendo o processo de ensino aprendizagem.

Em se tratando especificamente do ensino de matemática, uma das principais referências sobre o tema é o livro intitulado ***A Arte de Resolver Problemas*** do autor George Polya (POLYA, 1975).

Em sua obra a Arte de resolver problemas, Polya diz que um dos mais importantes deveres do professor é o de auxiliar seus alunos e que isso exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes. Diz ainda que o professor deve se colocar no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido ao próprio estudante. Na estratégia de ensino por meio da Resolução de Problemas, o professor é um importante instrumento, sendo sua função interligar o educando ao conhecimento. Isso ocorre de diversos modos, através de exemplos com situações semelhantes, de perguntas que instiguem o educando e também através do uso de materiais concretos.

O papel da resolução de problemas no currículo escolar tem assumido diferentes propósitos ao longo do tempo. Diversos autores afirmam a importância do desenvolvimento de habilidades para a resolução de problemas, contrapondo o processo mecânico tradicional no ensino da matemática (POZO, 1998; SMOLE, 2001; MARINCEK, 2001).

A Aprendizagem Baseada em Problemas ou simplesmente ABP é uma metodologia que surgiu entre o final da década de 60 e início da década de 70 nas Faculdades de Medicina da Universidade de McMaster, sendo adotado por várias faculdades e considerado atualmente uma técnica moderna e eficaz no processo ensino-aprendizagem (PEIXOTO, 2006; SOUZA; DOURADO, 2015). O método rompe com o modelo tradicional de ensino, no qual o professor detém o saber e o transfere aos educandos conforme lhe foi transferido. Nesse modelo tradicionalista o educando era visto como uma caixa vazia a ser preenchida, conforme os conteúdos lhe fossem ministrados, porém a partir do ABP evidenciou-se que o papel do professor não seria de transferir conhecimento, mas de compartilhá-lo através das descobertas do próprio educando.

O método ABP propõe que o educando seja parte do processo de ensino aprendizagem. Nele, não é esperado um único modelo de solução para o problema e sim uma variedade de caminhos distintos para a resolução do mesmo problema, cada um de acordo com a visão e o conhecimento dos alunos. Neste contexto, a estratégia de ensino por resolução de problemas valoriza os conhecimentos prévios do aluno e o motiva a ser parte integrante do processo, tornando o ensino mais significativo.

Ao se procurar resposta a um questionamento inicial, o educando se dispõe à observar e entender do que se trata tal questão, a que área ela está ligada, quais as partes constituintes da questão, que elementos serão necessários buscar para respondê-la, fazendo com que em muitas vezes ao se resolver um problema matemático por exemplo, ele seja levado a pesquisar e conhecer outras áreas de conhecimento antes não exploradas.

Através de uma adaptação do Método ABP, neste capítulo, propomos uma estratégia de ensino de exponenciais e logaritmos. Isto é realizado através de uma série de problemas contextualizados que possuem algum significado aos alunos.

3.1 Metodologia

Primeiramente, o professor deve traçar os objetivos daquilo que será proposto ao educando. Para isso, é necessário considerar qual é o conteúdo em questão a ser trabalhado com a resolução de problemas, qual será o espaço delimitado para solucionar tal problema, quais serão as perguntas (serão abrangentes ou específicas?), deixar claro ao educando qual o objetivo final.

Feito isso, para se solucionar um problema deve-se dispor de materiais didáticos para que o aluno possa ter ferramentas para trabalhar com tal tema: livros, materiais concretos, tabelas, textos, etc., para então conduzi-lo a chegar em conclusões sobre o que fora proposto.

O diálogo e a socialização dos resultados obtidos por todos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem é uma etapa de grande importância. Neste momento, o professor recebe as considerações feitas pelos alunos, sintetiza tais informações e compartilha os resultados aos alunos, com o objetivo de conduzi-los à etapa final que é a formalização matemática do conteúdo abordado.

Sugerimos seguir a sequência, não necessariamente nesta ordem, das etapas dada abaixo (PEIXOTO, 2006):

1) **Criação de uma equipe (pode ser individual)** - dividir o trabalho de pesquisa em partes para que o mesmo seja mais eficaz, trabalhando também com a capacidade de se relacionar, de expressar o ponto de vista pessoal e aceitar o ponto de vista alheio;

2) **Apresentação do problema** - primeiro contato com o objeto de estudo, quais são as primeiras impressões e como foi aceito pelos educandos;

3) **Análise** - descobrir quais são os meandros que circundam o problema. Qual o tema, qual a causa do problema e quais as hipóteses presentes;

4) **Busca por informação** - realização da pesquisa observando se o conhecimento adquirido até o presente momento lhe é suficiente para solucionar o problema, caso não o seja definir quais serão os instrumentos de pesquisa utilizados;

5) **Socialização dos resultados** - reunir todas as equipes afim de que as mesmas dialoguem sobre os métodos utilizados, pesquisas feitas, curiosidades descobertas, dificuldades sentidas e conclusões expostas por cada equipe.

6) **Formalização do conteúdo proposto** - após reunir e sintetizar as informações repassadas pelos alunos, o professor deve compartilhar estas informações aos alunos já conduzindo-os à formalização matemática do conteúdo abordado.

O professor tem a liberdade de interferir no processo sempre que necessário. Sempre que possível, o professor deve trazer informações adicionais que instiguem a curiosidade e desenvolva nos alunos a capacidade de realizar questionamentos e argumentos. A etapa 6 só é realizada após o professor trabalhar diversos problemas relacionados ao tema, pois somente após tratar de todas as características importantes, que em um só problema não se faz possível, o professor terá o embasamento necessário para a formalização matemática do conteúdo proposto.

3.1.1 A Formulação do Problema

Os problemas escolhidos devem ter o claro objetivo de anteceder uma aula expositiva sobre o tema proposto, assim sendo deve-se levar em consideração o currículo referência, o conteúdo, as possíveis dificuldades que surgirão, os caminhos disponíveis para a resolução do problema e a construção do conhecimento do aluno gerido por ele mesmo.

Um bom problema deve ter as seguintes qualidades:

1) Ser simples e objetivo, evitar pistas falsas que desviem a atenção do grupo do tema principal. Não deve apresentar dados desnecessários. Um enunciado muito complexo propõe muitas 'situações problema' em seu interior, torna difícil a visualização da questão principal proposta e gera um número muito grande de objetivos de aprendizado, desmotivando o estudo;

2) Ser motivador e despertar o interesse do aluno pela sua discussão. Um bom problema deve propor situações sobre as quais o aluno já tenha algum conhecimento prévio. Os primeiros problemas de um módulo temático devem referir-se a situações que os alunos já tenham vivenciado na prática, em sua própria vida ou em módulos temáticos anteriores. Uma situação totalmente nova e desconhecida impede a discussão entre alunos já que nenhum deles poderá oferecer qualquer contribuição para

seu conhecimento.

3.2 Situações Problemas Aplicadas ao Ensino dos Logaritmos e Exponenciais

Nesta seção apresentamos situações problemas com o objetivo principal o estudo do tema funções exponenciais. Os logaritmos foram usados como ferramenta para resolução de tais problemas de acordo com a necessidade.

Como dito anteriormente ABP é um método de ensino que se baseia na utilização de problemas como ponto inicial para adquirir novos conhecimentos. Nesse processo, os alunos são desafiados a comprometer-se na busca pelo conhecimento, por meio de questionamentos e investigação, para dar respostas aos problemas identificados. A ideia não é aplicar o método ABP na íntegra, e sim adaptá-lo à realidade de uma aula comum para alunos do ensino médio.

A primeira etapa do método, que consiste na criação de uma equipe ou na decisão por uma investigação individual, será omitida na apresentação dos exemplos. Entende-se que essa escolha é exlusiva do professor e depende muito do grupo de alunos que se tem.

Todos os gráficos foram construídos utilizando os softwares Winplot® e Excel®.

Exemplo 3.1.

- **Apresentação do problema**

Em certa cultura, uma única bactéria se divide em duas bactérias a cada uma hora, ou seja o número de bactérias numa cultura, duplica a cada hora. Assim, considerando um número inicial de bactérias igual a 1.

$a)$ Qual seria o número de bactérias após 6 horas?

$b)$ Em quantas horas essa cultura terá 256 bactérias?

$c)$ Escreva y em função de x para modelar a situação desse problema.

$d)$ Quantas horas seriam necessárias nessa cultura, para que o número de bactérias seja igual a 2048 bactérias.

- **Análise**

Os alunos após analisarem os dados existentes na situação descrita, podem se organizar em duplas e o professor então assume seu papel como instrumento no processo ensino aprendizagem e apresenta sugestões, trazendo mais agilidade.

Para facilitar o entendimento dos alunos, o professor pode apresentar a figura 3.1 a seguir:

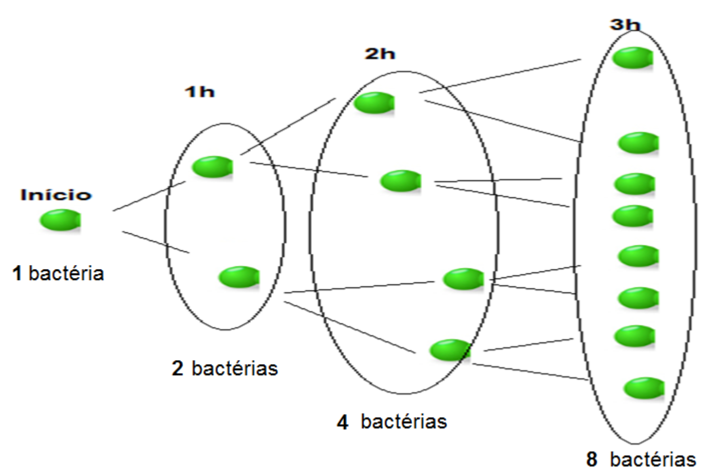


Figura 3.1: Esquema para representar o crescimento da população de bactérias.
Fonte: Construída pelo autor.

A proposta inicial do professor, para resolver as letras a) e b) do problema proposto, seria sugerir ao aluno que fizesse uma tabela contendo os dados do problema para as 8 primeiras horas, como mostra a tabela 3.1:

Tempo em horas	Número de bactérias	Ponto encontrado
0	$1 = 2^0$	$(0, 1)$
1	$2 = 2^1$	$(1, 2)$
2	$4 = 2^2$	$(2, 4)$
3	$8 = 2^3$	$(3, 8)$
4	$16 = 2^4$	$(4, 16)$
5	$32 = 2^5$	$(5, 32)$
6	$64 = 2^6$	$(6, 64)$
7	$128 = 2^7$	$(7, 128)$
8	$256 = 2^8$	$(8, 256)$

Tabela 3.1: Evolução do tamanho da população de bactérias.

O aluno seria então capaz tanto de responder que após 6 horas, o número de bactérias nessa cultura seria igual a 64 bactérias, quanto que o tempo para que o número de bactérias seja igual a 256 é de 8 horas.

- **Socialização de resultados**

O professor deverá solicitar os resultados e fazer as intervenções necessárias.

Para resolver a letra c) usaremos o conceito de função exponencial de base 2. O professor assumiria a função de explicar aos alunos a existência de tal função e ajudá-los e escrever a lei de formação da função. O professor deve estabelecer, juntamente com os alunos, que a relação entre a quantidade de bactérias y e o tempo é dada por $y = 2^{tempo}$. Assim, representado o tempo pela variável x, a função que modela o crescimento da população de bactérias é dada por $f(x) = 2^x$.

Para resolver a letra d) sugerimos primeiro que o aluno representasse a tabela construída por eles em um gráfico cartesiano, sem rigor para medidas, apenas como objetivo que fosse possível visualizar as coordenadas de cada ponto, que em x representam o tempo dado em horas e y o número de bactérias após o tempo percorrido nessa cultura.

Para maior agilidade o professor deverá disponibilizar papel quadriculado, lápis e régua, para que eles possam desenvolver a atividade com maior facilidade.

Caso seja possível, o professor poderá fazer o uso de algum programa computacional para gerar o gráfico cartesiano dos pontos.

- **Busca de informação**

Os alunos podem buscar informação com o professor, ou até em outro material, caso tenham dúvida sobre representação de pontos no plano cartesiano.

Provavelmente o aluno chegará ao resultado semelhante a esse esboçado pela figura 3.2.

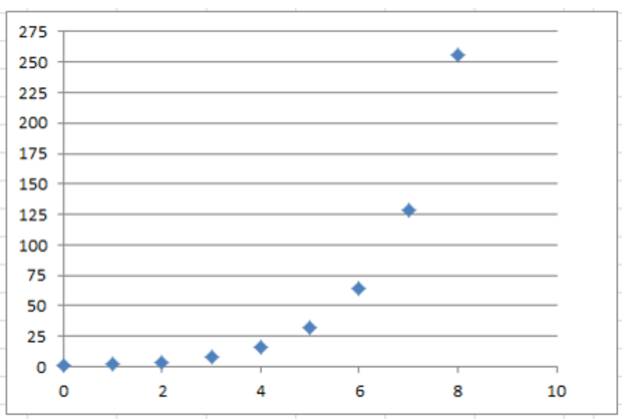


Figura 3.2: Gráfico da relação população de bactérias versus tempo.
Fonte: Construída pelo autor.

- **Socialização dos resultados**

Sendo assim, para que o aluno soubesse quantas horas seriam necessárias para um total de 2048 bactérias, usaríamos o item c), ou seja, a expressão matemática da função que modela o crescimento da população de bactérias. Assim, fazendo $y = 2048$, obtemos

$$y = 2048 \Leftrightarrow 2^x = 2048 \Leftrightarrow 2^x = 2^{11} \Leftrightarrow x = 11.$$

Assim, o tempo gasto para que o número de bactérias seja 2048 é de 11 horas.

- **Socialização dos resultados**

Novamente o professor deverá solicitar os resultados e fazer as intervenções necessárias.

Nesse caso de uma situação problema, onde se tem um crescimento populacional de uma simples cultura de bactéria, o professor fará o restante das intervenções:

Mostrando que se trata de uma função exponencial, crescente, pedindo aos alunos que façam um traço ligando tais pontos, semelhante à figura 3.3.

A partir desse ponto o professor está pronto para explicar todos os conceitos matemáticos, propriedades que envolvem as funções exponenciais.

Exemplo 3.2.

- **Apresentação do problema**

Usaremos as ciências da natureza com o objetivo principal de descrever e formalizar as funções exponenciais decrescentes.

Os átomos de um elemento químico radioativo possuem uma tendência natural a se desintegrar (emitindo partículas e se transformando em outros elementos). Desta forma,

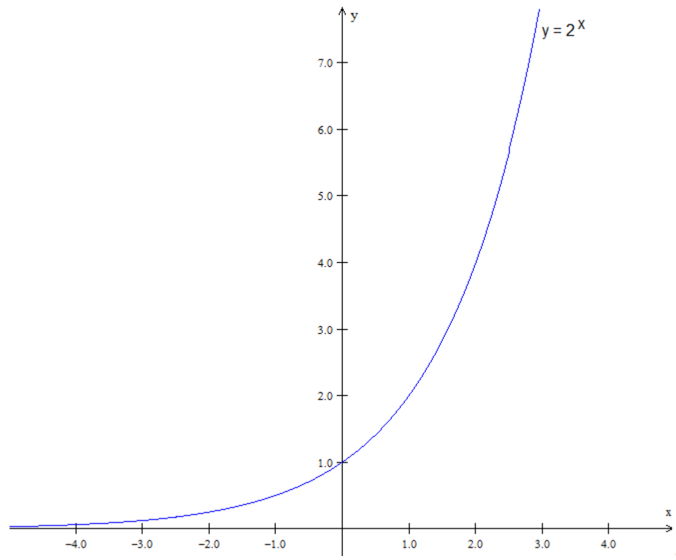


Figura 3.3: Gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$.
Fonte: Construída pelo autor.

com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui. Chamamos de meia-vida o tempo que o elemento radioativo leva para desintegrar metade de sua massa radioativa. O antibiótico Axetil cefuroxina apresenta meia-vida de três horas. Se uma pessoa tomou 50 mg desse medicamento, qual é a quantidade de antibiótico ainda presente no organismo após 12 horas de sua ingestão?

- **Análise**

Os alunos após analisarem os dados existentes na situação descrita, podem se organizar em duplas e o professor então assume seu papel como instrumento no processo ensino aprendizagem e apresenta sugestões, trazendo mais agilidade.

Como sugestão, o professor poderá pedir aos alunos para que eles preencham a tabela 3.2 a seguir com os dados do problema.

Tempo em horas - Intervalo	Quantidade de medicamento	Ponto encontrado
0 - 0	$50 = 50\left(\frac{1}{2}\right)^0$	$(0, 50)$
3 - 1	$25 = \frac{50}{2} = 50\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$(1, 25)$
6 - 2	$12.5 = \frac{50}{4} = 50\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$(2, 12.5)$
9 - 3	$6.25 = \frac{50}{8} = 50\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$(3, 6.25)$
12 - 4	$3.125 = \frac{50}{16} = 50\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$(4, 3.125)$
15 - 5	$1.5625 = \frac{50}{32} = 50\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$(5, 1.5625)$

Tabela 3.2: Evolução da quantidade da massa do medicamento.

O aluno seria então capaz de responder que após 12 horas, no quarto intervalo de tempo da ingestão do medicamento, o organismo apresentará 3,125 mg de antibiótico.

- **Socialização dos resultados**

O professor deverá solicitar os resultados e fazer as intervenções necessárias. A partir desse ponto, o professor então poderá modelar esse problema, juntamente com os alunos. Chamaremos de Q a quantidade de medicamento no organismo.

O professor deve, a partir da tabela construída, mostrar aos alunos que a relação existente entre a quantidade Q, de medicamento no organismo, e o tempo x de ingestão (aqui contado de 3 em 3 horas) é dada pela seguinte função exponencial:

$$Q(x) = 50\left(\frac{1}{2}\right)^x = 50\frac{1}{2^x} = 50.2^{-x}.$$

Mostrar o gráfico cartesiano dos pontos para o aluno também auxilia no entendimento, ou mesmo pedir que eles façam como no exemplo 3.1 para maior compreensão (figura 3.4).

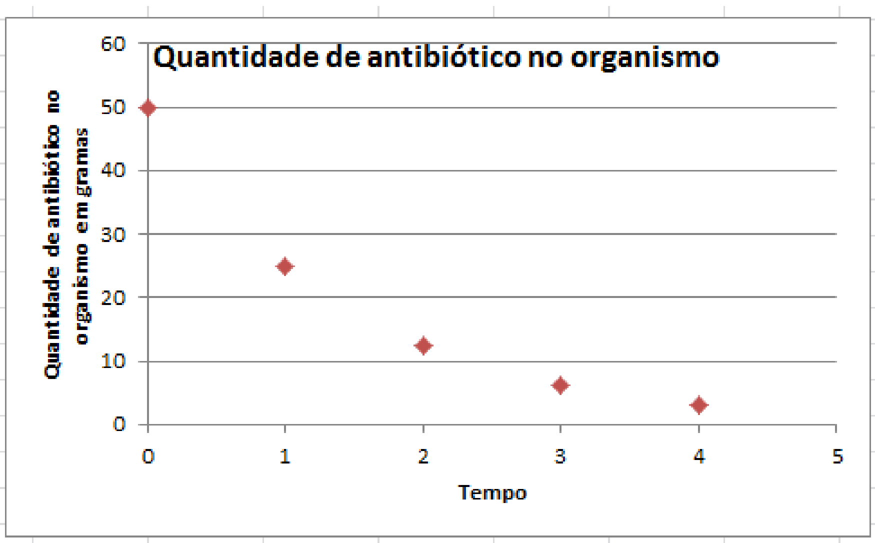


Figura 3.4: Gráfico da relação entre a quantidade de medicamento versus o tempo.
Fonte: Construída pelo autor.

O professor deve esclarecer que este é um exemplo de uma função exponencial descrescente e isto implica que o expoente é negativo ou, de forma equivalente, que a base está entre 0 e 1. Dessa forma o professor então poderá explicar os conceitos matemáticos que envolvem a função, suas propriedades e particularidades.

O gráfico da função, para x definido para todos os números reais, é dado por (figura 3.5):

Exemplo 3.3.

- **Apresentação do problema**

(ENEM-2016) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de

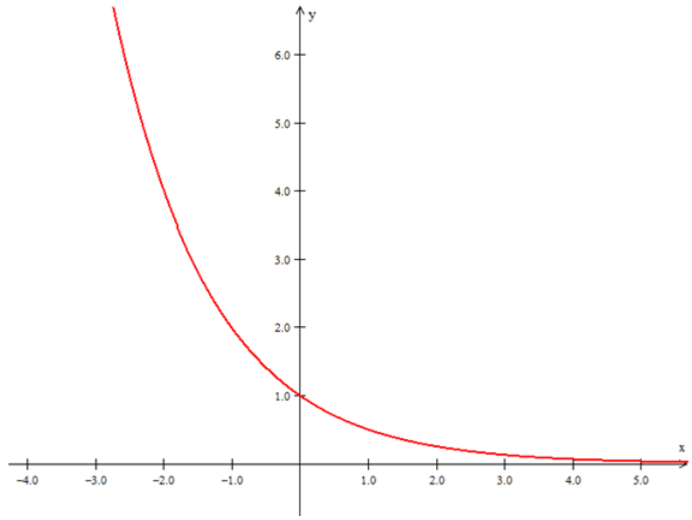


Figura 3.5: Gráfico da função $Q(x) = 50.2^{-x}$.
Fonte: Construída pelo autor.

uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40.2^{3t}$$

em que t é o tempo, em hora e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias. Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será?

$a)$ reduzida a um terço.

$b)$ reduzida a metade.

$c)$ reduzida a dois terços.

$d)$ duplicada.

$e)$ triplicada.

- **Análise**

A proposta inicial sugerida pelo professor é o preenchimento da tabela 3.3, permitindo aos alunos o uso de calculadora se achar necessário. A tabela só terá preenchida a primeira linha, e as demais serão preenchidas pelos alunos. O professor deverá intervir, auxiliando os alunos no uso da calculadora, pois essa é uma habilidade necessária para a resolução da atividade proposta e, com certeza, será útil para a vida acadêmica futura do aluno de ensino médio.

Tempo em minutos	Fração equivalente em horas	Valor da função
1	$\frac{1}{60}$	$p\left(\frac{1}{60}\right) = 40.2^{3\frac{1}{60}} \approx 41,41$
10	$\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$	$p\left(\frac{1}{6}\right) = 40.2^{3\frac{1}{6}} \approx 56,57$
15	$\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$	$p\left(\frac{1}{4}\right) = 40.2^{3\frac{1}{4}} \approx 66,27$
20	$\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$	$p\left(\frac{1}{3}\right) = 40.2^{3\frac{1}{3}} = 80$
30	$\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$	$p\left(\frac{1}{2}\right) = 40.2^{3\frac{1}{2}} \approx 113,14$
60	$\frac{60}{60} = 1$	$p(1) = 40.2^{3.1} = 320$

Tabela 3.3: Evolução da quantidade de bactérias relacionada à doença infectocontagiosa.

- **Socialização dos resultados**

Após a socialização com os alunos dos resultados encontrados, é importante o professor ressaltar que vários problemas envolvendo função exponencial já veem explicita a lei de formação dessa função. No caso particular dessa situação problema, fazer a equivalência de minutos em horas, usando frações, torna a resolução mais simples e eficaz, já que o exercício é de múltipla escolha. O simples preenchimento da tabela proposta é suficiente para que o aluno seja capaz de responder que passados vinte minutos a população de bactérias duplicou. Além disso, para se chegar ao resultado esperado não se faz necessário o uso da calculadora. Como 20 minutos equivale a um terço da hora, simplificando a fração, se resolve uma potência de expoente inteiro, e a resolução é simples e de fácil compreensão

Outro fato importante a se destacar, é que escolher questões do Exame Nacional do Ensino Médio para iniciar um trabalho, ainda que seja no primeiro ano do ensino médio, ressalta a importância de se estudar tal conteúdo. Sempre que for possível o professor deve usar questões do ENEM pois torna o trabalho ainda mais produtivo.

Exemplo 3.4.

- **Apresentação do problema**

Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza a metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão

$$M(t) = A.(2,7)^{kt}$$

,onde A é a massa inicial e k uma constante negativa. Considere $0,3$ como aproximação para $\log_{10}^{(} 2)$. Qual o tempo necessário, em anos, para uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

$a)$ 27 anos.

$b)$ 36 anos.

$c)$ 50 anos.

$d)$ 54 anos.

$e)$ 100 anos.

- **Análise**

A leitura, interpretação e coleta de dados desse problema, deve ser feita primeiramente pelos alunos. O fato ocorrido mencionado nessa questão, traz ao professor a oportunidade de discutir com seus alunos sobre um acontecimento histórico, que marcou o país nos anos 80 e foi considerado na época como o maior acidente radiológico do mundo. Essa questão proporciona um trabalho interdisciplinar muito rico, e explorar esse assunto cabe a intervenção do professor, que deverá disponibilizar material de leitura adequado aos alunos que sejam relacionados ao acidente ocorrido no mês de setembro de 1987.

- **Socialização dos resultados**

Momento de discussão entre os alunos e o professor sobre o acidente. Devem ser explorados o como, o onde e quando aconteceu, bem como as causas e consequências desse desastre. Nessa socialização, é importante falar sobre o elemento químico radioativo Césio-137.

O objetivo dessa discussão é despertar o interesse dos alunos sobre o tema e compreender a matemática como ciência relacionada com as diversas áreas do conhecimento.

- **Análise**

O professor deverá então intervir para que os alunos façam a análise correta da modelagem apresentada no problema

$$M(t) = A.(2,7)^{kt}$$

Discutir com os alunos sobre o significado do termo meia vida e questioná-los, qual é a meia vida do Césio-137? Do enunciado da questão, a meia vida do Césio-137 é 30 anos.

A resolução do problema poderá ser feita pelo professor com a participação dos alunos, ou ainda deixar que os alunos resolvam e posteriormente socializar a resolução fazendo a correção. Uma maneira de resolver essa situação problema, está descrita a seguir:

Substituindo t por 30 anos a massa se reduzirá pela metade, ou seja:

$$\frac{A}{2} = M(30) \iff \frac{A}{2} = A(2,7)^{30k} \iff \frac{1}{2} = (2,7)^{30k} \iff \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{30}} = (2,7)^{k}$$

Retornando ao enunciado do problema, o questionamento feito: Qual o tempo necessário, em anos, para uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial? Utilizando a expressão matemática da quantidade de massa do césio-137, é necessário resolver a seguinte equação $0.1A = M(t)$. Então,

$$0,1A = A(2,7)^{kt} \iff 0,1A = A((2,7)^{k})^{t} \iff 0,1A = A\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{30}}\right]^{t}$$

Aplicando o logaritmo na base 10 em ambos o lados da última equivalência acima, usando a hipótese do problema de que $\log_{10}(2) = 0.3$, obtemos $t = 100$ anos. Sendo assim, para que a massa do césio-137 se reduza a 10% de sua massa inicial é necessário um século!

Exemplo 3.5.

- **Apresentação do problema**

Um capital de R$ 50 000,00 é aplicado à taxa de juros compostos de 5% ao mês.

$a)$ Qual o montante dessa aplicação após 1 mês?

$b)$ Qual o montante dessa aplicação após 2 meses?

$c)$ Qual o montante dessa aplicação após 3 meses?

$d)$ Qual o montante dessa aplicação após 4 meses?

$e)$ Qual o montante dessa aplicação após 5 meses?

- **Análise**

A leitura e a interpretação da situação problema deve ser feita pelo aluno. O professor como mediador do processo irá sugerir o preenchimento dos dados da tabela abaixo permitindo aos alunos o uso de calculadora.

- **Socialização dos resultados**

O professor deve socializar os resultados com os alunos e fazer as intervenções necessárias. O aluno saberá responder aos itens da questão.

- **Busca por Informação**

Tempo em meses	Capital	Capital + Juros	Montante
0	50000	50000	50000
1	50000	50000 + 50000x0,05	52500
2	52500	52500 + 52500x0,05	55125
3	55125	55125 + 55125x0,05	57881,25
4	57881,25	57881,25 + 57881,25x0,05	60775,31
5	60775,31	60775,31 + 60775,31x0,05	63814,08

Tabela 3.4: Evolução do montante e capital em função do tempo.

O professor deverá sugerir aos alunos que pesquisem a fórmula usada para se calcular o montante em capitalização composta. Os livros e sites mostram a seguinte fórmula:

$$M = C(1+i)^t$$

onde M é o montante, C é o capital inicial, i é a taxa de juros (em forma decimal) e t é o tempo (deve estar na mesma unidade da taxa de juros).

- **Socialização dos resultados**

Cabe ao professor nesse momento adaptar a fórmula pesquisada pelos alunos para a situação problema descrita e escrevê-la na forma de uma função que depende exclusivamente do tempo. Sugerir então o preenchimento da tabela 3.5.

Tempo (t)	$(1,05)^t$	$M = 50000(1,05)^t$
0	$(1,05)^0$	50000
1	$(1,05)^1$	52500
2	$(1,05)^2$	55125
3	$(1,05)^3$	57881,25
4	$(1,05)^4$	60775,31
5	$(1,05)^5$	63814,08

Tabela 3.5: Evolução do montante em função do tempo usando a fórmula de juros compostos.

- **Socialização dos resultados**

Comparar os resultados encontrados nas duas tabelas. Discutir com os alunos o tema capitalização composta e crescimento exponencial.

Capítulo 4

Considerações Finais

No presente trabalho vimos que não se pode neglicenciar a prática pedagógica empregada no processo de ensino e aprendizagem da matemática, pois se trata indiscutivelmente de uma disciplina elementar ao aluno em todas as fases do ensino básico. A matemática trabalha com algoritmos baseados na lógica, construindo assim, base para que ao compreendê-los o aluno possa aquirir a capacidade de argumentação.

O rompimento com a prática tradicionalista de ensino, a qualificação dos profissionais da educação e a intervenção da família e comunidade no ambiente escolar são aspectos necessários para que tal trabalho se dê de maneira satisfatória.

O modo como se propõe o ensino da matemática se dá de duas formas que devem se complementar, inicialmente a resolução de problemas instigará o aluno a propor hipóteses chegando à uma conclusão, feito isso, é papel do professor enunciar os conceitos teóricos demonstrando a utilização dos algoritmos e, por fim, utilizar os exercícios de fixação que o livro didático propõe. Durante esse processo as oportunidades de se sanar uma dúvida crescem consideravelmente se comparado ao modo de ensino tradicional.

Além disso, a interdisciplinaridade com outras áreas do saber é cada vez mais cobrada em provas externas, a não aplicação de exercícios que possuem esse elo entre diversas áreas do saber faz com que o rendimento dos alunos em avaliações desse tipo seja extremamente baixa, levando a uma concorrência desleal entre ensino público e privado.

A utilização da resolução de problemas faz com que o aluno entenda o propósito do que se está ensinando, o que contribui para que o processo de ensino e aprendizagem não se torne maçante e cumpra o papel inicialmente proposto.

Referências Bibliográficas

ÁVILA, G.S.S. **Cálculo das Funções de uma Variável**. Editora LTC. São Paulo, 2004.

BOYER, C. B., MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. Tradução da 3º Edição Americana. Editora Edgard Blucher, São Paulo, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura (MEC), Secretaria de Educação do Ensino Médio. **PCNEM: Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2006.

FRANÇA, H.M., GOMES, G.G. **Einsten e a Dança dos Grãos de Pólem**. Revista USP. São Paulo, nº 66, 2005.

FREIRE, P. Pedagogia da Autonomia. **Saberes Necessários à Prática Educativa**. 27º Edição. São Paulo, Paz e Terra, 1996.

FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido**. 50º Edição. São Paulo, Paz e Terra, 2011.

IEZZI, G., DOLCE, O. MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar - Logaritmos**. 8º ed. São Paulo: Atual, 1993.

LEWIS, T. D. **The Arithmetization of Analysis: From Eudoxus to Dedekind**. Ed. Southern University. 2006.

LIBANEO, J.C. **Democratização da Escola Pública: a Pedagogia Crítico-Social dos Conteúdos**. São Paulo: Loyola, 1992.

LIMA, E. L. **Logaritmos**. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2009a.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Coleção PROFMAT SBM. Rio de Janeiro, 2009b.

LIMA. E. L. **Curso de Análise**. Volume 1. Edição nº 13, Projeto Euclides, Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2011.

LIMA, E. L. **Crescimento Exponencial ? O que é isso ?** Revista do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, 2013.

MARINCEK, V. **Aprender matemática resolvendo problemas**. Porto Alegre. Artmed, 2001.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (Org.). Educação matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 212-231.

PEIXOTO, J. P, TEIXEIRA, M., COELHO, D., MOREIRA, D., MOTA, P. S. **Estudos de Caso: O Método ABP Caso Home Concept**. Edição Casos do IESF, Espaço Atlântico, 2006.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas.** 2º Edição. Editora Interciência, Rio de Janeiro, 1975.

POZO, J. I. (org). **A solução de problemas: Aprender para resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre, Artmed, 1998.

SMOLE, K. T. **Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre, Artmed, 2001.

SOUZA, S.C., DOURADO, L. **Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas (ABP): Um método de aprendizagem inovador para o ensino educativo**. Holos, Ano

31, Vol. 15, 2015.

THIENGO, V. **Ensino de exponenciais e Logaritmos no Ensino Médio via Aplicações**. Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal Fluminense, 2013.

WILLOUGHBY, S. S. **Perspectives on mathematics education**. In: BURKE, M. J.; FRANCES, R. (Orgs.). *Learning mathematics for a new century*. Reston, VA: NCTM, 2000. p. 1-15.