



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



O USO DO *software* GEOGEBRA PARA VISUALIZAR O
COMPORTAMENTO DO GRÁFICO DE FUNÇÕES SENO E
COSSENO QUANTO AOS MOVIMENTOS DE TRANSLAÇÃO,
REFLEXÃO E DEFORMAÇÃO

PATRÍCIA RODRIGUES DE OLIVEIRA CERQUEIRA

Cruz das Almas-Bahia Julho 2017

O USO DO *software* GEOGEBRA PARA VISUALIZAR O
COMPORTAMENTO DO GRÁFICO DE FUNÇÕES SENO E
COSSENO QUANTO AOS MOVIMENTOS DE TRANSLAÇÃO,
REFLEXÃO E DEFORMAÇÃO

PATRÍCIA RODRIGUES DE OLIVEIRA CERQUEIRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Colegiado do Programa de Mestrado Pro-
fissional em Matemática em Rede Nacional
da Universidade Federal do Recôncavo da
Bahia como requisito parcial para obtenção
do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. MSc. Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento

Cruz das Almas-Bahia

Julho 2017

FICHA CATALOGRÁFICA

C416u	<p>CERQUEIRA, Patrícia Rodrigues de Oliveira O uso do <i>software</i> GeoGebra para visualizar o comportamento do gráfico de funções seno e cosseno quanto aos movimentos de translação, reflexão e deformação/ Patrícia Rodrigues de Oliveira Cerqueira. __ Cruz das Almas, BA, 2017. 74 f.: il.</p> <p>Orientador: Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento.</p> <p>Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.</p> <p>1. Matemática Trigonometria. 2. Matemática Estudo e ensino. 3. Ensino auxiliado por computador Análise. I. Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II. Título.</p> <p>CDD: 510.7</p>
-------	--

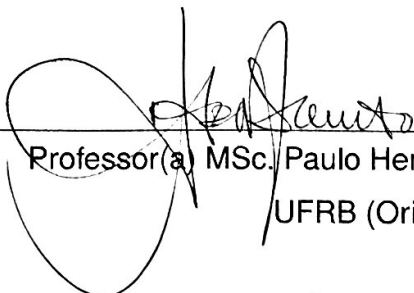
Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas – UFRB.

O USO DO *software* GEOGEBRA PARA VISUALIZAR O COMPORTAMENTO
DO GRÁFICO DE FUNÇÕES SENO E COSSENO QUANTO AOS
MOVIMENTOS DE TRANSLAÇÃO, REFLEXÃO E DEFORMAÇÃO

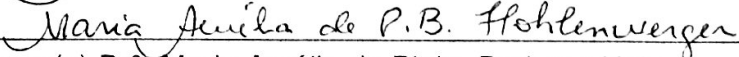
PATRÍCIA RODRIGUES DE OLIVEIRA CERQUEIRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Colegiado Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional da Universidade Fe-
deral do Recôncavo da Bahia como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre em Matemática,
aprovada em 06 de Julho de 2017.

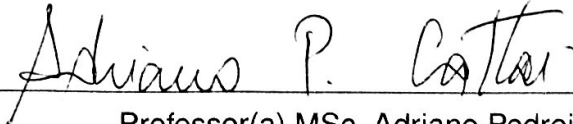
Banca examinadora:



Professor(a) MSc. Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento
UFRB (Orientador(a))



Professor(a) Dr^a. Maria Amélia de Pinho Barbosa Hohlenwerger
UFRB



Professor(a) MSc. Adriano Pedreira Cattai
UNEB

A meu marido Robson, a
meu pai (in memoriam), a
minha mãe, a meus filhos,
meus irmãos e a minha tia
Lícia.

Agradecimentos

À Deus, por ter me dado a oportunidade de realizar mais um sonho profissional que era concluir o mestrado.

Ao meu marido, que além de dar todo o apoio e colaboração se fez presente em todo o curso. Abriu mão de suas atividades laborais em Salvador, para me acompanhar até Cruz das Almas, semanalmente, de 2015 a 2017.

À toda minha família, que contribuiu direta ou indiretamente para meu sucesso. Em especial, aos meus filhos, Ricardo, Gisele e Érick, que apoiaram e entenderam a minha ausência no lar.

A meus amigos-irmãos, Benício, Bruno, Cléber, Carlos Alison, Janio, José Carlos Jr. e Valdemir, que me incentivaram para estudar.

À Sociedade Brasileira da Matemática (SBM), pela coordenação de um mestrado em rede nacional possibilitando a socialização dos saberes de forma uniforme e a CAPES pelo incentivo financeiro fundamental ao custeio das despesas ao longo do curso.

À Universidade Federal do Recôncavo da Bahia-UFRB, em especial todo o corpo docente do PROFMAT que possibilitou o aprimoramento e valorização do conhecimento matemático a todos os professores que buscam ofertar uma educação de qualidade aos seus discentes. Ao coordenador do curso, Professor Juarez dos Santos Azevedo que muito colaborou nessa jornada. Ao orientador Professor Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento, pela dedicação, orientação metodológica, críticas construtivas e pela ajuda na condução da escolha do tema em estudo que serviu de ponto de partida para uma reflexão a cerca do modo como se ensina e aprende funções trigonométricas no ensino médio e o quanto é importante e urgente a capacitação do professor durante o exercício da função da docência. Muito obrigada!

“Educação gera conhecimento, conhecimento gera sabedoria,
e, só um povo sábio pode mudar seu destino.”

Samuel Lima

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de ensino que possibilite uma melhor abordagem para análise gráfica do comportamento dos elementos das Funções seno e cosseno usando o *software* GeoGebra. Para isso, é apresentada uma sequência didática no intuito de auxiliar o professor na abordagem do estudo dos movimentos de translação, reflexão e deformação das funções seno e cosseno com os alunos. O GeoGebra é utilizado como ferramenta pedagógica e como elemento motivador no estudo destas funções e sem dúvida alguma, esse *software* permite a visualização dinâmica dos gráficos dessas funções mediante a manipulação do chamado controle deslizante para variar os parâmetros que modificam o domínio, conjunto imagem, período e amplitude das funções seno e cosseno.

Palavras-chave: Funções; Função seno e cosseno; Gráficos; GeoGebra.

Abstract

The present work aims to present a teaching proposal that allows a better approach for graphical analysis of the behavior of sine and cosine functions using GeoGebra software. For this, a didactic sequence is presented in order to assist the teacher in the approach to the study of the trigonometric functions with the students. GeoGebra is used as a pedagogical tool and as a motivating element in the study of these functions and undoubtedly, this software allows the dynamic visualization of the graphs of these functions by manipulating the so-called slider to vary the parameters that modify the domain, set image, period and amplitude of sine and cosine functions.

Keywords: Functions; Sine and cosine functions; Graphics; GeoGebra.

Sumário

Sumário	9	
Lista de ilustrações	10	
1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Justificativa à proposta	12
1.2	Conceitos Iniciais	14
2	O TEOREMA ESPECTRAL	22
2.1	Espaços Vetoriais	22
2.2	Transformações Lineares	25
2.2.1	Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear	26
2.2.2	Rotação	33
3	FERRAMENTAS DO GEOGEBRA UTILIZADAS	47
4	SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM O GEOGEBRA	51
4.1	Planejamento, execução e resultados	52
Considerações finais	70	
REFERÊNCIAS	73	

Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico de uma função par	15
Figura 2 – Gráfico de uma função ímpar	16
Figura 3 – Translação “para cima” e “para baixo”.	16
Figura 4 – Translação “para a esquerda” e “para a direita” da função $y = x $	17
Figura 5 – Reflexão em relação ao eixo Ox	17
Figura 6 – Reflexão em relação ao eixo Oy	18
Figura 7 – Gráfico da função $g(x) = f(x) $	19
Figura 8 – Deformação vertical	19
Figura 9 – Deformação Horizontal	20
Figura 10 – função seno	20
Figura 11 – função cosseno	21
Figura 12 – Reflexão em torno do eixo Ox	29
Figura 13 – Reflexão em torno do eixo Oy	29
Figura 14 – Reflexão em torno da origem	30
Figura 15 – Reflexão em relação à origem	31
Figura 16 – Projeção ortogonal sobre o eixo Ox	31
Figura 17 – Projeção Ortogonal sobre o eixo Oy	32
Figura 18 – Cisalhamento Horizontal	33
Figura 19 – Cisalhamento Vertical	34
Figura 20 – Rotação	34
Figura 21 – Rotação de Eixos	35
Figura 22 – O par $(2, 3)$ em \mathbb{R}^2	37
Figura 23 – Teorema de Pitágoras em sua forma vetorial	39
Figura 24 – Projeção ortogonal	40
Figura 25 – Fonte: www.geogebra.org -Acesso em 30/04/2017	48
Figura 26 – Tela inicial do GeoGebra	48
Figura 27 – Exibição da malha quadriculada	48
Figura 28 – Mudança de unidade dos eixos	49

Figura 29 – Mudança de unidade do eixo horizontal para radianos	49
Figura 30 – Tela do GeoGebra formatada	49
Figura 31 – Caixa de entrada das funções	50
Figura 32 – Tela formatada	50
Figura 33 – Controle deslizante	50
Figura 34 – Escola Estadual Mario Costa Neto	51
Figura 35 – Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$	54
Figura 36 – criar controles deslizantes	54
Figura 37 – Gráfico da senoíde	55
Figura 38 – Gráfico da função $f(x) = 2 + \text{sen}(x)$	55
Figura 39 – Gráfico da função $f(x) = -2 + \text{sen}(x)$	55
Figura 40 – Gráfico da função $f(x) = 4 \text{sen}(x)$	57
Figura 41 – Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{2} \text{sen}(x)$	57
Figura 42 – Gráfico da função $f(x) = -4 \text{sen}(x)$	57
Figura 43 – Gráfico da função $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$	58
Figura 44 – Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(4x)$	59
Figura 45 – Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(-x)$	59
Figura 46 – Gráfico da função $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	60
Figura 47 – Gráfico da função $f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$	61
Figura 48 – Gráfico da função $g(x) = \text{cos}(x)$	62
Figura 49 – Controles deslizantes	62
Figura 50 – Controles deslizantes iguais a 1	62
Figura 51 – Gráfico da função $g(x) = 2 + \text{cos}(x)$	63
Figura 52 – Gráfico da função $g(x) = -2 + \text{cos}(x)$	63
Figura 53 – Gráfico da função $g(x) = 3 \text{cos}(x)$	64
Figura 54 – Gráfico da função $g(x) = \frac{1}{2} \text{cos}(x)$	65
Figura 55 – Gráfico da função $g(x) = -3 \text{cos}(x)$	65
Figura 56 – Gráfico da função $g(x) = \text{cos}\left(\frac{x}{2}\right)$	66
Figura 57 – Gráfico da função $g(x) = \text{cos}(3x)$	66
Figura 58 – Gráfico da função $g(x) = \text{cos}(-x)$	67
Figura 59 – Gráfico da função $g(x) = \text{cos}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	68
Figura 60 – Gráfico da função $g(x) = \text{cos}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$	68
Figura 61 – Gráfico da função $F(t)$ com o ponto A	69

Introdução

1.1 Justificativa à proposta

As novas tecnologias vêm se firmando em um movimento acelerado na vida das pessoas, principalmente na dos jovens, trazendo grandes alterações no ambiente escolar.

O professor pode buscar conhecimento sobre essa nova inovação pedagógica para utilizá-la a favor da prática no ensino da matemática pois, muitas vezes, o aluno tem acesso às tecnologias, entretanto não possui habilidades para usar softwares como o GeoGebra, que podem ajudá-lo na aprendizagem de conteúdos matemáticos.

O professor de matemática precisa atrair seu aluno no propósito de fazê-lo ler e entender a matemática. O processo do ensino-aprendizagem deve ocorrer de forma que as primeiras noções básicas, como por exemplo, de função, devem acontecer de forma a dar sentido à prática cotidiana desse aluno.

Conforme (ROSA, 2000), o movimento de mudança implica radicalidade, isto é, implica em ir fundo em busca das raízes e requer uma ruptura interna, uma ruptura do hábito e da rotina. Essa mudança que a autora se refere é algo muito difícil, pois tende a tirar o professor da zona de conforto, na qual se encontra ao trabalhar com os conteúdos de forma tradicional.

Segundo (VALENTE, 1993), os computadores estão propiciando uma verdadeira revolução no processo de ensino-aprendizagem. O uso de um recurso tecnológico em sala de aula permite colocar o aluno como sujeito ativo e o professor como agente mediador do conhecimento.

Para (LUCENA, 1992), o software Educacional é todo programa que pode ser

usado para algum objetivo educacional, pedagogicamente deferido, por professores e alunos, qualquer que seja a natureza ou finalidade para o qual tenha sido criado.

Atualmente, temos acesso a alguns softwares gratuitos, possibilitando o uso dos mesmos sem dificuldades.

O estudo da ferramenta a ser utilizada é de grande importância, pois vem a ser a parte essencial para se chegar aos objetivos estipulados, sendo utilizado pelo educador para levantar as possibilidades de uso, e ver em que conteúdo poderá ser melhor proveitoso.

Os professores necessitam, portanto, conhecer as tecnologias disponíveis e estudar possibilidades de uso dessa ferramenta como mais ressaltar que não se trata de Comunicação Oral tornar a aprendizagem mais fácil aligeirando o ensino. Ao contrário, a aprendizagem deve ser favorecida com situações que a tornem mais significativa e que os alunos possam interagir entre si e com a máquina, construindo conhecimentos, vivenciando situações que, muitas vezes, não tinham recurso didático para o processo de aprendizagem. É importante um sentido, ou tinham outro sentido, no ambiente papel e lápis (BITTAR, 2010).

Em (TECNOLÓGICA, 1999), um problema matemático é “uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la”.

Dentre esses softwares utilizados no ensino da matemática, o GeoGebra é o software que será usado neste trabalho por ser um software livre, gratuito, dinâmico e de fácil manipulação. Através do GeoGebra, o aluno a partir de uma sequência didática poderá investigar o comportamento gráfico dos elementos das funções: domínio, imagem, amplitude e período.

A proposta deste trabalho é exatamente usar o GeoGebra como ferramenta pedagógica para envolver o aluno a visualizar, conjecturar, abstrair e generalizar a partir da interpretação do comportamento gráfico de funções trigonométricas e sair um pouco do uso tradicional do lápis, papel e régua.

Este trabalho apresenta o estudo dos movimentos das funções $f(x) = a + b \sin(cx + d)$ e $g(x) = a + b \cos(cx + d)$, quanto a translação, reflexão e deformação do gráfico. Não foi utilizado o processo com matriz de transformação. Entretanto, no capítulo 1, é feito um aprofundamento dos conteúdos de Álgebra Linear, visando

trabalhar nos capítulos posteriores como um dos objetivos do meu trabalho e estudo até o Teorema Espectral.

1.2 Conceitos Iniciais

Abordaremos, a seguir conceitos básicos de função real e definições das funções seno e cosseno e seus gráficos.

Definição 1. Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma relação f de A em B é uma função se, e somente se, para todo x de A existir uma correspondência única com um y de B , tal que $(x; y) \in f$.

Notação: $f = \{(x; y), x \in A; y \in B \text{ e } y = f(x)\}$.

Ao conjunto A chamamos de domínio de f e denotamos por $D(f)$. Ao conjunto B chamamos de contradomínio de f e denotamos por $CD(f)$. Se x é um elemento de A , então o único y de B associado a x denomina-se imagem de x pela função f e será indicado com a notação $f(x)$. Ao conjunto de todos os elementos de B que são imagem de algum elemento de A , chamamos de conjunto imagem de f e denotamos por $Im(f)$.

Definição 2. Chama-se função real de uma variável real ou simplesmente função real as funções cujos elementos do domínio e do contradomínio são números reais.

Definição 3. O gráfico de uma função $f : X \rightarrow Y$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $X \times Y$ formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$ tal que $x \in X$. Assim, $G(f) = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\}$.

Uma função $f : X \rightarrow Y$ associa, a cada ponto x do domínio X , um ponto y do contradomínio Y . Desta forma, um subconjunto $G \subset X \times Y$ é o gráfico de uma função $f : X \rightarrow Y$ se, e somente se, cumpre as seguintes condições:

G1) $\forall x \in X, \exists (x, y) \in G$ cuja primeira coordenada é x ;

G2) se (x, y) e (x, z) são elementos de G com a mesma primeira coordenada, então $y = z$.

Definição 4. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica se, e somente se, existir $p \neq 0$ tal que, para todo $x \in D(f)$, $x + p$ é elemento de $D(f)$ e $f(x + kp) = f(x)$, para $k \in \mathbb{Z}^*$. O menor p positivo que satisfaz a condição denomina-se período de f .

Definição 5. Função par é toda relação onde o elemento simétrico do domínio possuem mesma imagem, ou seja, uma função é par se $f(x) = f(-x)$, para todo x do Domínio f .

Da definição, podemos observar que uma função par possui gráfico simétrico em relação ao eixo das ordenadas. Com estudo do comportamento da função e conhecendo o que acontece para $x > 0$ pode-se, utilizando os argumentos de simetria, inferir o que acontece em todo domínio da função. Logo, o domínio da função par também é simétrico. Por exemplo, o gráfico da Figura 1 é o de uma função par.

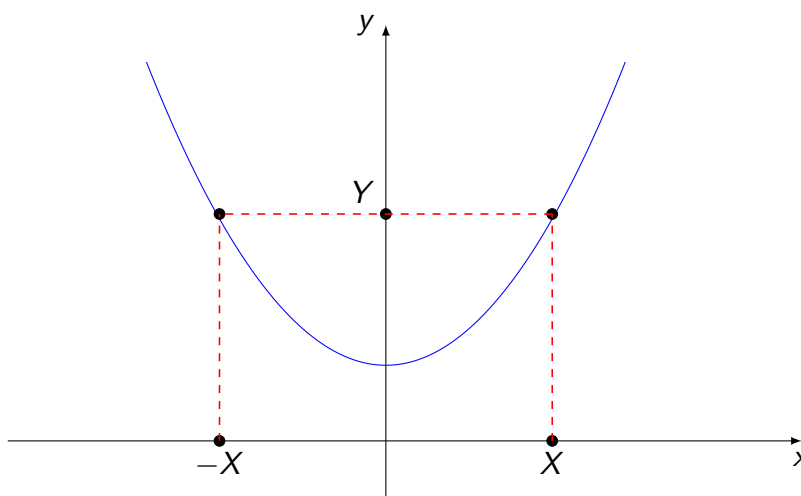


Figura 1 – Gráfico de uma função par

Definição 6. Função ímpar é uma relação onde os elementos simétricos do domínio possuem imagens simétricas no conjunto de chegada, ou seja, uma função é ímpar se $f(-x) = -f(x)$, para todo x do Domínio f .

Da definição, podemos observar que uma função ímpar possui domínio e gráfico simétrico em relação à origem. Por exemplo, o gráfico da Figura 2 é o de uma função ímpar.

Definição 7. Seja $y = f(x)$ uma função real e seja $k \neq 0$ um número real. A transformação $(x; f(x)) \rightarrow (x; f(x)+k)$ desloca verticalmente o gráfico da função f , obtendo-se o gráfico da função $g(x) = f(x) + k$ e denominaremos translação vertical.

A translação vertical apresenta o seguinte comportamento, se observarmos o sinal de k : se k for positivo, a translação vertical será “para cima”. Se k for negativo, a translação será “para baixo”.

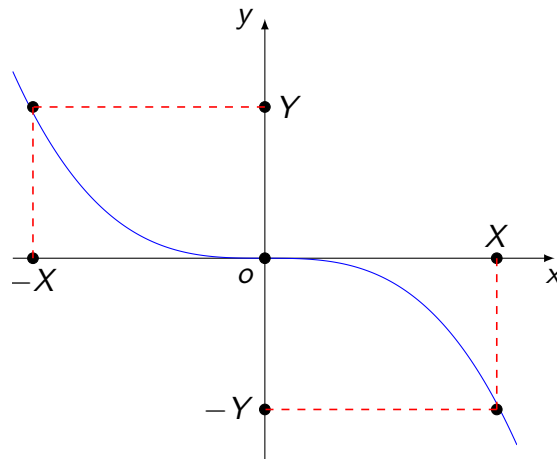


Figura 2 – Gráfico de uma função ímpar

No gráfico da figura 3, seja $f(x) = |x|$ e $g(x) = f(x) + k$, para $k = 1$ e para $k = -1$. Observe, em vermelho e em azul, o resultado da translação “para cima” e “para baixo”, respectivamente.

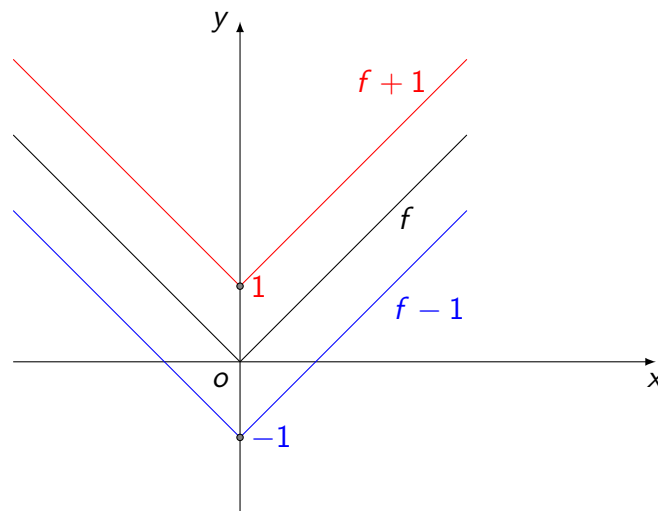


Figura 3 – Translação “para cima” e “para baixo”.

Definição 8. Seja $y = f(x)$ uma função real e seja $k \neq 0$ um número real. A translação horizontal $(x; y) \rightarrow (x + k; y)$ transforma o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no gráfico da função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x + k)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto é, um ponto qualquer $(x; f(x))$ do gráfico de f é transformado por essa translação no ponto $(x + k; f(x))$.

A translação horizontal apresenta o seguinte comportamento se observamos o sinal de k : Se k for positivo, a translação vertical será “para a esquerda” e se k for negativo, será “para a direita”.

No gráfico da figura 4, seja $f(x) = |x|$ e $g(x) = f(x + k)$, para $k = 1$ e para $k = -1$. Observe, em vermelho e em azul, o resultado da translação para a esquerda e para a direita, respectivamente.

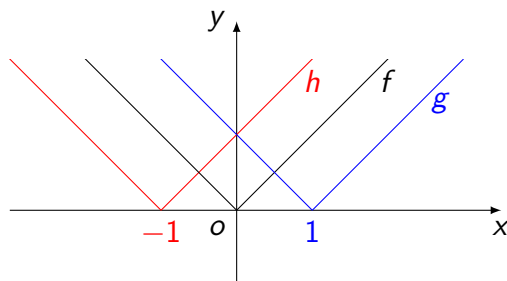


Figura 4 – Translação “para a esquerda” e “para a direita” da função $y = |x|$

Definição 9. Reflexão é uma transformação geométrica do ponto, da reta, do plano ou do espaço que “espelha” todos os pontos em relação ao centro de simetria, ao eixo de simetria ou ao espaço. Transformando-o, respectivamente, em um outro ponto, reta ou plano em relação ao eixo de simetria usado.

Seja f uma função real. Na reflexão, os pontos do gráfico de f que estiverem abaixo do eixo Ox , são refletidos para cima e os que estiverem acima do eixo Ox são refletidos para baixo. Nesse caso, o eixo Ox , eixo das abscissas, é o eixo de simetria.

Seja a função $y = f(x)$. A reflexão em relação ao eixo Ox , $(x; y) \rightarrow (x; -y)$, transforma o gráfico definido pela função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no gráfico da função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

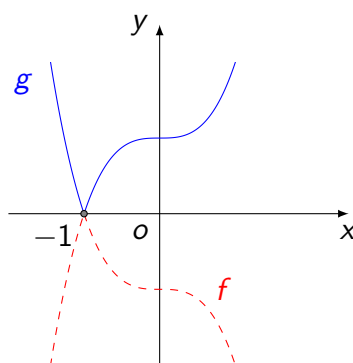


Figura 5 – Reflexão em relação ao eixo Ox

Note que, a figura 5 apresenta, em vermelho, o resultado da reflexão em relação ao eixo Ox .

Na reflexão, os pontos do gráfico de f que estiverem à direita do eixo Oy , são refletidos para esquerda e os que estiverem à esquerda do eixo Oy são refletidos para à direita. Nesse caso, o eixo Oy , eixo das ordenadas, é o eixo de simetria.

Definição 10. Considere a função $y = f(x)$. A reflexão em relação ao eixo Oy , $(x; y) \rightarrow (-x; y)$, transforma o gráfico da função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, no gráfico da função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

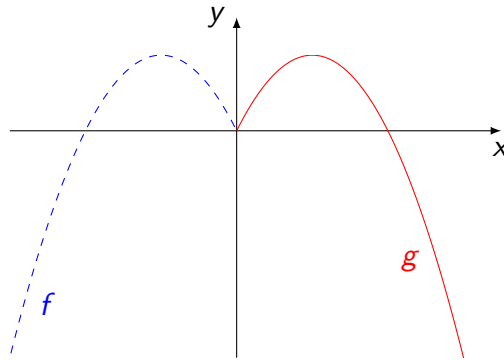


Figura 6 – Reflexão em relação ao eixo Oy

Note que, a figura 6 apresenta, em azul, o resultado da reflexão em relação ao eixo Oy .

Definição 11. Módulo ou valor absoluto de um número real x é indicado por $|x|$ e definido por:

- $|x| = x$; se $x \geq 0$; ou seja, o módulo de um número real não negativo é o próprio número;
- $|x| = -x$; se $x < 0$; ou seja, o módulo de um número real negativo é igual ao oposto desse número.

Chama-se função modular a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = |x|$.

Considere f e g duas funções reais tais que $g(x) = |f(x)|$. Observa-se que o gráfico da função g é resultante da reflexão, em relação ao eixo das abscissas, da imagem da parte negativa do gráfico de f . A Figura 7 ilustra esse fato.

Definição 12. Seja a função real $y = f(x)$. A deformação vertical $(x; y) \rightarrow (x; ky)$ transforma o gráfico definido pela função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no gráfico da função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = kf(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

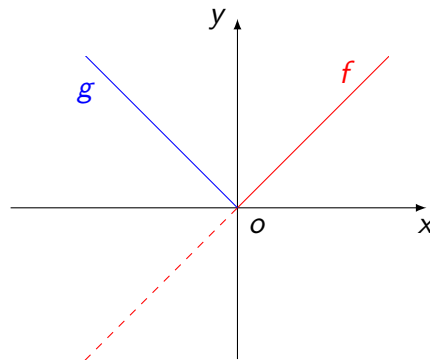


Figura 7 – Gráfico da função $g(x) = |f(x)|$

Essa deformação vertical depende do valor de k , isto é se $k > 1$ a deformação vertical aumenta sua amplitude e se $0 < k < 1$, a deformação vertical diminui sua amplitude. Se $k < 0$, além dessa deformação, o gráfico reflete em relação ao eixo Ox .

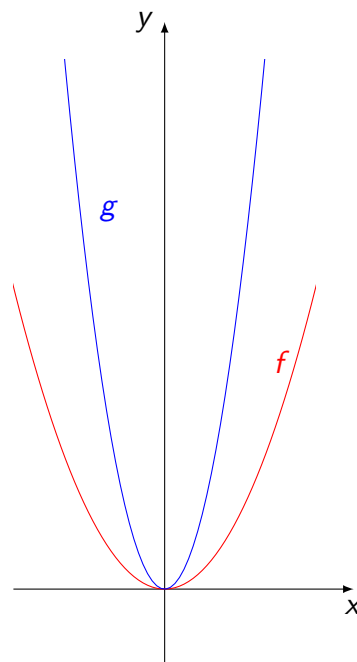


Figura 8 – Deformação vertical

Considere f e g duas funções reais e $K > 0$ tais que, $g(x) = kf(x)$. Note que, o gráfico da função g é resultante da deformação vertical da função f para $k = 4$. A Figura 8 ilustra esse fato.

Definição 13. Seja a função $y = f(x)$. A deformação horizontal $(x; y) \rightarrow (k \cdot x; k)$ transforma o gráfico definido pela função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no gráfico da função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f\left(\frac{x}{k}\right)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

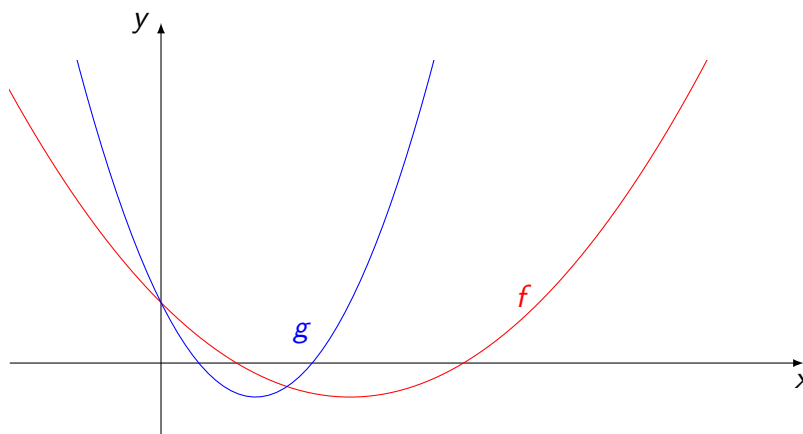


Figura 9 – Deformação Horizontal

A deformação horizontal depende do valor de k , isto é se $k > 1$ a deformação horizontal diminui sua amplitude e se $0 < k < 1$, a deformação horizontal aumenta sua amplitude.

Considere f e g duas funções reais. Note que, o gráfico da função g , em azul, é resultante da deformação horizontal da função f , em vermelho para $k > 1$. A Figura 9 ilustra esse fato.

A seguir, apresentaremos as definições e gráficos da função seno e da cosseno, por serem as funções trabalhadas nas atividades propostas aos alunos da escola Estadual Mario Costa Neto.

A função seno é uma função real de variável real. Da definição, podemos observar que a cada valor $x \in \mathbb{R}$, temos um valor $y \in [-1, 1]$, ou seja, a imagem da função seno é o intervalo $[-1; 1]$ e, dessa forma, apresenta valor 1 como máximo e -1 como valor mínimo. A função seno tem período 2π e é uma função ímpar, uma vez que $\sin(x) = -\sin(-x)$. Na Figura 10, apresentamos o gráfico da função $f(x) = \sin(x)$, $x \in [-2\pi, 3\pi]$, onde é possível observar várias dessas afirmações.

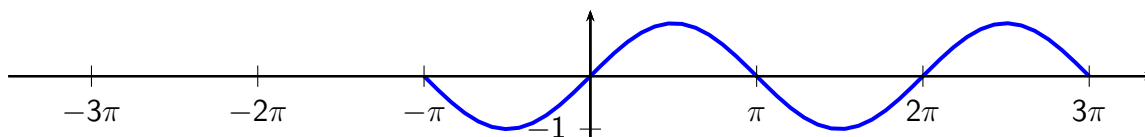


Figura 10 – função seno

A função cosseno é uma função real de variável real. Da definição, podemos observar que a cada valor $x \in \mathbb{R}$, temos um valor $y \in [-1, 1]$, ou seja, a imagem da função cosseno é o intervalo $[-1; 1]$ e, dessa forma, apresenta valor 1 como máximo e

-1 como valor mínimo. A função cosseno tem período 2π e é uma função par, uma vez que $\cos(x) = \cos(-x)$. Na Figura 11, apresentamos o gráfico da função $f(x) = \cos(x)$, $x \in [-\pi, 3\pi]$, onde é possível observar várias dessas afirmações.

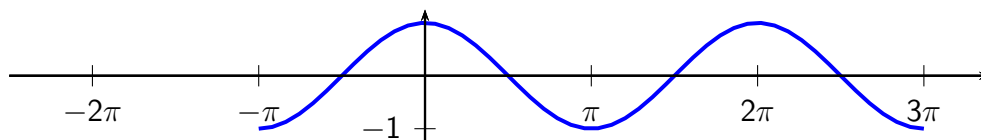


Figura 11 – função cosseno

Podemos observar através dos gráficos das figuras 10 e 11 que ao transladar a função seno no valor de $\frac{\pi}{2}$ para esquerda, obtemos a equivalência com o gráfico da função cosseno. Assim, podemos observar através dos gráficos das figuras 10 e 11 que ao transladar $\frac{\pi}{2}$ para esquerda $\frac{\pi}{2}$ para esquerda, observamos a equivalência com o gráfico da função cosseno. Logo, a função $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$.

Assim, podemos verificar a propriedade de que o seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complemento.

Esse trabalho está dividido em Introdução: que tem como escopo a apresentação do tema escolhido para ser desenvolvido, a justificativa da proposta de trabalho a ser realizado, apresentação do formato do trabalho, os objetivos a serem alcançados, os conceitos básicos de uma função real e as definições das funções seno e cosseno e seus gráficos e os assuntos a serem abordados nos demais capítulos. O Capítulo 1, apresenta um aprofundamento nos conteúdos de Álgebra Linear até o estudo do Teorema Espectral. No Capítulo 2, são apresentadas algumas ferramentas do software GeoGebra, usadas nas construções da proposta do trabalho. No Capítulo 3, seguem as atividades com os resultados da sequência didática proposta com uso do GeoGebra e, em seguida, as considerações finais, onde o trabalho é concluído e é feita uma reflexão da importância do estudo dos movimentos gráficos das funções seno e cosseno com o uso do software GeoGebra, além de recomendações para o desenvolvimento de futuras pesquisas.

O Teorema Espectral

Este capítulo tem como objetivo apresentar um embasamento teórico sobre espaços vetoriais e transformações lineares e conceitos básicos fundamentais de Álgebra linear, direcionando estudo para operações lineares do plano \mathbb{R}^2 , com uso de matrizes de transformações e o estudo do Teorema Espectral.

Com intuito de corroborar no estudo dos resultados envolvidos em álgebra linear, é fundamental recapitular algumas definições preliminares. Apresenta também, as transformações lineares e um exemplo de cada uma através de gráficos.

2.1 Espaços Vetoriais

Definição 14. Um conjunto K munido das operações de adição (+) e multiplicação (\times) é chamado de corpo.

Axiomas relativos à adição:

A1. associatividade: $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in K$;

A2. comutatividade: $a + b = b + a, \forall a, b \in K$;

A3. existência de elemento neutro: existe $0 \in K$ tal que $a + 0 = a$, qualquer $a \in K$;

A4. existência de elemento simétrico: para todo $a \in K$, existe $(-a) \in K$ tal que $a + (-a) = 0$;

Axiomas relativos à multiplicação:

M1. associatividade: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, quaisquer $a, b, c \in K$;

M2. comutatividade: $a \times b = b \times a$, quaisquer $a, b \in K$;

M3. existência do elemento neutro: existe $1 \in K \setminus \{0\}$ tal que $a \times 1 = a$, qualquer $a \in K$;

M4. existência de inverso: para todo $a \in K \setminus \{0\}$, existe $a^{-1} \in K$ tal que $a \times a^{-1} = 1$;

M5. distributividade com relação adição: para quaisquer $a, b, c \in K$ vale $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

Exemplo 1. São corpos os conjuntos \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} , com as suas respectivas adições e multiplicações. Sendo, conjunto dos números racionais, conjunto dos números reais e conjunto dos números complexos, respectivamente.

Definição 15. Um conjunto não vazio V é um espaço vetorial sobre um corpo K , se estiverem definidas as seguintes operações:

(a) Adição de vetores: a cada par u, v de vetores de V , corresponde um vetor $u + v \in V$, chamado de vetor soma de u e de v , de modo que:

AV1. Propriedade associativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$, $\forall u, v, w \in V$;

AV2. Propriedade comutativa: $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$;

AV3. Vetor nulo: existe $0 \in V$ tal que $v + 0 = v$, $\forall v \in V$;

AV4. Simétrico ou oposto: para todo $v \in V$, existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$;

(b) Multiplicação de um escalar por um vetor: a cada elemento $a \in K$ e a cada elemento $v \in V$ está associado um elemento $av \in V$, tal que:

ME1. $a(u + v) = au + av$, para todos $a \in K$ e $u, v \in V$;

ME2. $(a_1 + a_2)v = a_1v + a_2v$, para todos $a_1, a_2 \in K$ e $v \in V$;

ME3. $(a_1a_2)v = a_1(a_2v)$, para todos $a_1, a_2 \in K$ e $v \in V$;

ME4 $1v = v$, para todo $v \in V$.

Os elementos de V são chamados de vetores e os elementos de K de escalares.

Exemplo 2. O conjunto das funções de um conjunto não vazio A em \mathbb{R} forma um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , onde a soma é a soma usual de funções com valores reais $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e a multiplicação de uma função f por um escalar $a \in \mathbb{R}$ é definida como sendo $(af)(x) = af(x)$, para todo $x \in A$.

Definição 16. Sejam V um espaço vetorial e $\emptyset \neq W \subset V$. Dizemos que W é um subespaço vetorial de V ou, simplesmente, um subespaço de V , se:

1. $u, v \in W$, então $u + v \in W$ e;
2. $a \in K$ e $u \in W$, então $au \in W$.

Exemplo 3. Seja V um espaço vetorial. Então o subespaço constituído apenas do vetor nulo e o próprio espaço V são subespaços de V .

Definição 17. Seja V um espaço vetorial e sejam v_1, v_2, \dots, v_r vetores de V . Diremos que um vetor v de V é uma combinação linear de v_1, v_2, \dots, v_r se existirem números reais a_1, a_2, \dots, a_r tais que $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r$.

O subespaço $G(v_1, v_2, \dots, v_r)$ é chamado o subespaço gerado por v_1, v_2, \dots, v_r .

Exemplo 4. O subespaço gerado pelo vetor $v = (1, 1, 2)$ em \mathbb{R}^3 é o conjunto $W = \{a(1, 1, 2); a \in \mathbb{R}\}$, já que uma combinação linear de v é um múltiplo escalar de v .

Vimos que um conjunto finito de vetores α gera um dado espaço vetorial V se cada vetor em V pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de α . Em geral, pode haver mais de uma maneira de expressar um vetor em V como uma combinação linear de vetores de um conjunto gerador.

A seguir, veremos condições sob as quais cada vetor de V pode ser escrito de uma única maneira como combinação Linear dos elementos de um conjunto gerador.

Definição 18. Sejam v_1, v_2, \dots, v_r vetores em um espaço vetorial V . Dizemos que os vetores v_1, v_2, \dots, v_r são linearmente independentes, ou simplesmente independentes, se a equação $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r = 0$ é satisfeita somente quando $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$. Caso exista algum $a_i \neq 0$, dizemos que os vetores v_1, v_2, \dots, v_r são linearmente dependentes, ou simplesmente dependentes.

Exemplo 5. Os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ são independentes, pois a equação $a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = 0$, equivalente à equação $a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$, é satisfeita somente se $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

No intuito de esclarecer a estrutura dos espaços vetoriais e ao mesmo tempo simplificar as demonstrações de vários resultados sobre eles. Introduziremos a seguir, os conceitos de base e dimensão.

Definição 19. Seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um conjunto ordenado de vetores de um espaço vetorial não nulo V . Dizemos que \mathcal{B} é uma base de V se as seguintes condições são verificadas:

- \mathcal{B} é linearmente independente e;
- $V = [\mathcal{B}]$.

Exemplo 6. O conjunto e_1, e_2 é uma base de $V = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, conhecida como base canônica de \mathbb{R}^2 .

A seguir, iremos enunciar o conceito do número de vetores das bases de um espaço vetorial finitamente gerado.

Definição 20. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Denomina-se dimensão de V , (notação: $\dim(V)$) o número de vetores de uma qualquer de suas bases. Diz-se também, neste caso, que V é um espaço de dimensão finita. Convencionamos que se V é o espaço vetorial nulo, então $\dim(V) = 0$.

Exemplo 7. O conjunto \mathbb{R}^3 munido das operações usuais de adição e multiplicação por escalar é um espaço vetorial de dimensão 3.

2.2 Transformações Lineares

Nesta seção, o estudo será voltado para transformações lineares, funções cujos domínios e contradomínios são espaços vetoriais e que, além disso, preservam as operações de adição de vetores e de multiplicação de um vetor por um escalar e, por isso, interessam a álgebra Linear e ao meu estudo. Pois subsidiará meu objeto de estudo, sobre análise gráfica dos movimentos.

Definição 21. Sejam U e V espaços vetoriais sobre K . Uma aplicação $F : U \rightarrow V$ é chamada **transformação linear** de U em V se, e somente se,

- (a) $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2), \forall u_1, u_2 \in U$;
- (b) $F(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot F(u), \forall \alpha \in K \text{ e } u \in U$.

Exemplo 8. A função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $F(x) = 5x$, é uma transformação linear. De fato, se $x_1, x_2, \alpha \in \mathbb{R}$, temos que $F(x_1 + \alpha x_2) = 5(x_1 + \alpha x_2) = 5x_1 + \alpha 5x_2 = F(x_1) + \alpha F(x_2)$. Portanto, F é uma transformação linear de \mathbb{R} em \mathbb{R} .

2.2.1 Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Um resultado importante da Álgebra Linear, envolve dois subespaços de uma transformação Linear, a saber: o núcleo e a imagem de uma transformação Linear.

Definição 22. Se $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear, o núcleo de T , denotado por $\text{Ker}(T)$ é o conjunto de vetores de V que são levados por T no vetor nulo de W , ou seja,

$$\text{Ker}(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}.$$

Observe que $\text{Ker}(T)$ é um subconjunto não vazio de V , já que $T(0) = 0$. Mais ainda, $\text{Ker}(T)$ é um subespaço de V . De fato, se $v_1, v_2 \in \text{Ker}(T)$ e se $a \in \mathbb{R}$, então $v_1 + av_2 \in \text{Ker}(T)$, pois $T(v_1 + av_2) = T(v_1) + aT(v_2) = 0 + a0 = 0$.

Exemplo 9. Para obtermos o núcleo da aplicação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow x+y$, façamos $\text{Ker}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x+y = 0\}$, isto é, $\text{Ker}(T)$ é a reta $y = -x$. Podemos dizer ainda que $\text{Ker}(T) = \mathbb{R}$, pois dado $w \in \mathbb{R} = T(w, 0)$.

Definição 23. Seja $T : V \rightarrow W$ uma aplicação linear. A imagem de T é o conjunto dos vetores $w \in W$ tais que existe um vetor $v \in V$, que satisfaz $T(v) = w$, ou seja,

$$\text{Im}(T) = \{w \in W; T(v) = w; v \in V\}.$$

Veremos a seguir, que se V e W são espaços vetoriais de dimensão finita, com bases fixadas, então uma transformação linear $F : V \rightarrow W$ pode ser representada por uma matriz e, para ilustrar o uso de matriz de transformação, será apresentado um exemplo após a definição.

De um modo geral, para $F : V \rightarrow W$ linear, $\dim(V) = n$ e $\dim(W) = m$, $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ são bases de V e W , respectivamente, teremos que $[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ é uma matriz de ordem $m \cdot n$, onde cada coluna é formada pelas componentes das imagens dos vetores de \mathcal{A} em relação à base \mathcal{B} :

$$[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Logo,

$$[F(v)]_{\mathcal{B}} = [F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} [v]_{\mathcal{A}}.$$

Exemplo 10. Sejam $F : V \rightarrow W$ uma transformação linear, \mathcal{A} uma base de V e \mathcal{B} uma base de W . Sem prejuízo da generalização, consideremos o caso em que $\dim(V) = 2$ e $\dim(W) = 3$.

Sejam $\mathcal{A} = \{v_1, v_2\}$ e $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de V e W , respectivamente. Um vetor $v \in V$ pode ser expresso pela combinação linear dos vetores de sua base \mathcal{A} . Logo:

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2$$

ou

$$v = (x_1, x_2),$$

e a imagem $F(v)$ como combinação linear de sua base \mathcal{B} :

$$F(v) = y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3$$

ou

$$F(v) = (y_1, y_2, y_3).$$

Por outro lado, usando a linearidade de F , temos:

$$F(v) = F(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 F(v_1) + x_2 F(v_2).$$

Sendo $F(v_1)$ e $F(v_2)$ vetores de W , eles são combinações lineares dos vetores de \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} F(v_1) &= a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + a_{31} w_3, \\ F(v_2) &= a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + a_{32} w_3 \end{aligned}$$

Quando a transformação linear for de um espaço vetorial V nele mesmo, ela será chamada de operador em V .

Na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ou, simbolicamente:

$$[F(v)]_B = [F]_B^A [v]_A.$$

A matriz $[F]_B^A$ é denominada a matriz de F em relação às bases \mathcal{A} e \mathcal{B} , ou matriz de uma transformação linear.

A seguir um exemplo para determinar $[F]_B^A$ a partir da transformação linear F .

Exemplo 11. Sejam $\mathcal{A} = \{(1, 1), (0, 2)\}$ e $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 2, 0)\}$, bases de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , respectivamente. Calculemos $[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$, onde $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por $F(x, y) = (2x, x - y, 2y)$.

Como F é uma transformação linear de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3 , $[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ é uma matriz 3×2 , digamos:

$$[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Pelo que vimos, a_{11} , a_{21} e a_{31} são as coordenadas de $F(1, 1)$ na base \mathcal{B} e a_{12} , a_{22} e a_{32} são as coordenadas de $F(0, 2)$ na base \mathcal{B} , ou seja,

$$\begin{aligned} F(1, 1) &= (2, 0, 2) = a_{11}(1, 0, 1) + a_{21}(0, 1, 0) + a_{31}(1, 2, 0) \\ F(0, 2) &= (0, -2, 4) = a_{12}(1, 0, 1) + a_{22}(0, 1, 0) + a_{32}(1, 2, 0). \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} a_{11} + a_{31} = 2 \\ a_{21} + 2a_{31} = 0 \\ a_{11} = 2 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} a_{12} + a_{32} = 0 \\ a_{22} + 2a_{32} = -2 \\ a_{12} = 4 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas lineares acima, obtemos:

$$a_{11} = 2, a_{21} = 0, a_{31} = 0, a_{12} = 4, a_{22} = -6 \text{ e } a_{32} = -4.$$

Portanto,

$$[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -6 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Dentre os operadores lineares mais importantes em \mathbb{R}^2 estão os que produzem reflexões, projeções, rotações e homotetias. Como meu trabalho será no plano, irei iniciar o estudo de alguns operadores e, serão apresentados gráficos para ilustrar as referidas transformações. Já foi definido no início desse trabalho, o conceito de: reflexão, deformação e translação. Mas, nas seções seguintes serão novamente abordados, só que com uso de Matriz de Transformação.

Definição 24. A reflexão em torno do eixo Ox é dada pelo operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(x, y) = (x, -y)$.

Na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

O resultado dessa transformação linear pode ser vista na Figura 12.

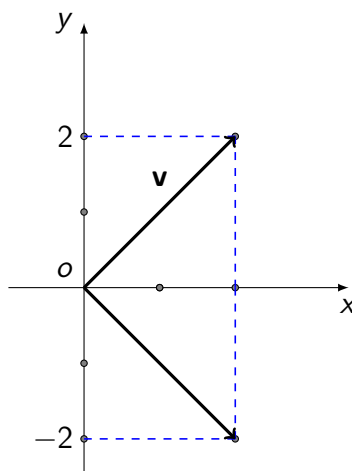


Figura 12 – Reflexão em torno do eixo Ox

Se escrevermos $w = T(v) = (w_1, w_2)$, obtemos as equações: $w_1 = 1x + 0y$, $w_2 = -y = 0x - 1y$.

Assim, se \mathcal{B} denota a base canônica de \mathbb{R}^2 , segue que

$$[T]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} [v]_{\mathcal{B}}$$

Em geral, os operadores lineares de \mathbb{R}^2 que levam cada vetor em seu simétrico em relação a alguma reta ou plano são chamados de reflexões.

Definição 25. A reflexão em torno do eixo Oy é dada pelo operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (-x, y)$. Na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

O resultado dessa transformação linear pode ser vista na figura 13.

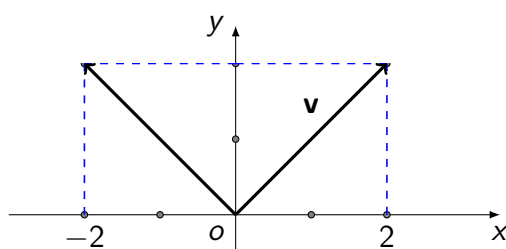


Figura 13 – Reflexão em torno do eixo Oy

Se escrevermos $w = T(v) = (w_1, w_2)$, obtemos as equações: $w_1 = -x = -1x + 0y$, $w_2 = y = 0x + 1y$.

Assim, se \mathcal{B} denota a base canônica de \mathbb{R}^2 , segue que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [v]_{\mathcal{B}}.$$

Definição 26. O operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (-x, -y)$, é chamado de reflexão com relação à origem. Escrevendo na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

o resultado dessa transformação linear pode ser vista na Figura 14.

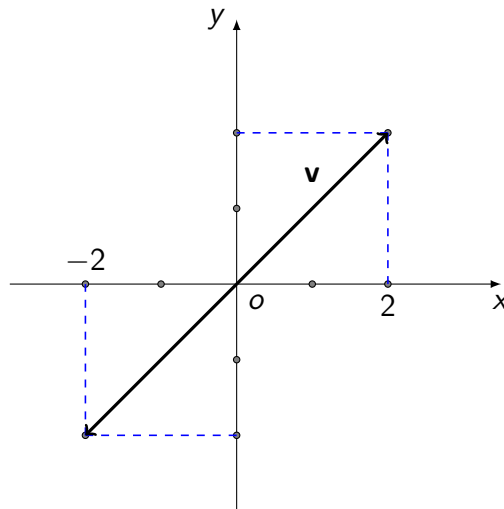


Figura 14 – Reflexão em torno da origem

Exemplo 12. A reflexão da parábola em relação à origem, cuja diretriz é $r : y + \frac{1}{4} = 0$ e cujo foco é $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$, pode ser vista no gráfico da Figura 15. Note que a equação dessa parábola é $y = x^2$. A reflexão com relação à origem, segundo o operador linear $T(x; y) = (-x; -y)$ escrito em forma de matriz e aplicada no ponto $(x; x^2)$ fica:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -x^2 \end{bmatrix}$$

Esta última igualdade mostra que a curva obtida depois de aplicar a transformação linear continua sendo uma parábola, cuja equação é $y = -x^2$.

Definição 27. O operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x; y) = (x; 0)$ é chamado de projeção ortogonal sobre o eixo $0x$.

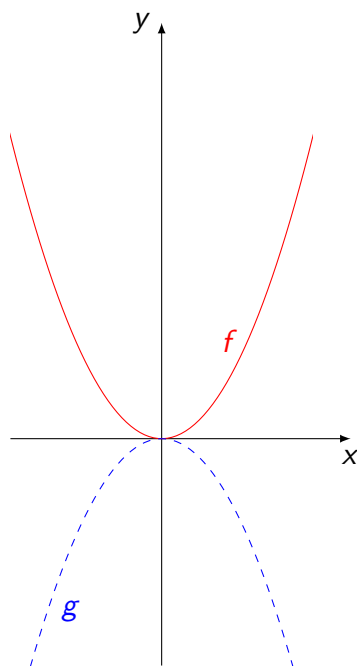


Figura 15 – Reflexão em relação à origem

Escrevendo na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

O resultado dessa transformação linear pode ser vista na Figura 16.

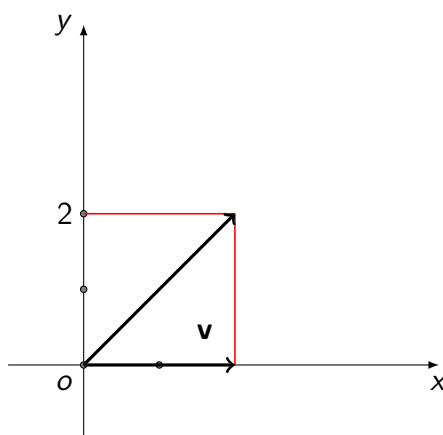


Figura 16 – Projeção ortogonal sobre o eixo Ox

Definição 28. O operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x; y) = (0; y)$ é chamado de projeção ortogonal sobre o eixo $0y$.

Escrevendo na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

O resultado dessa transformação linear pode ser visto na Figura 17.

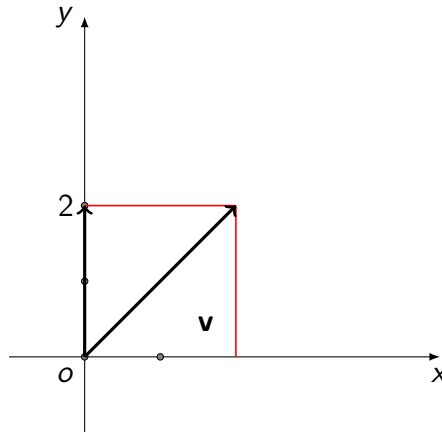


Figura 17 – Projeção Ortogonal sobre o eixo Oy

Definição 29. A translação no plano é a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + a, y + b)$.

Observação: A translação não é uma transformação linear. De fato, sendo $u, v \in \mathbb{R}^2$, em que $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$, temos $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} T(u + v) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + x_2 + a, y_1 + y_2 + b) \\ &= (x_1 + a, y_1 + b) + (x_2, y_2) \\ &= T(u) + (x_2, y_2) \neq T(u) + T(v). \end{aligned}$$

O cisalhamento é uma transformação geométrica que desloca horizontalmente ou verticalmente pontos de um plano, de modo que as figuras geométricas são deformadas. Nessa transformação, os ângulos não são preservados, mas a área sim. Assim, para que isso ocorra, uma coordenada deve influenciar a outra.

Definição 30. O operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + \alpha y, y)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ é chamado de Cisalhamento Horizontal.

Exemplo 13. Seja $T(x, y) = (x + 2y, y)$. Escrevendo na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x + 2y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Essa transformação do plano no plano no exemplo acima é uma transformação linear. Toda transformação linear possui uma matriz associada que chamaremos de matriz de transformação.

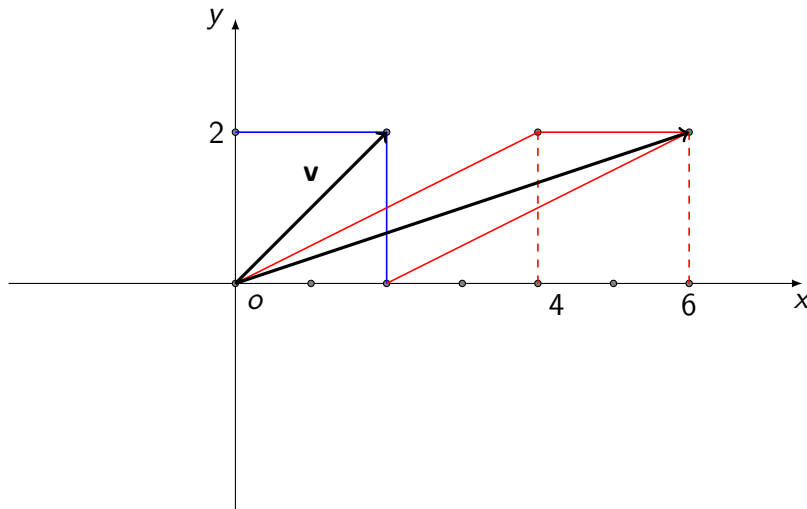


Figura 18 – Cisalhamento Horizontal

O gráfico da Figura 18 ilustra o cisalhamento horizontal. Nesta transformação é preservada a coordenada y e são deslocados os pontos na direção horizontal.

Definição 31. O operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x, y + \alpha x)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ é chamado de Cisalhamento vertical.

Exemplo 14. Seja $T(x, y) = (x, y + 2x)$. Escrevendo na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y + 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Note que, o resultado dessa transformação linear pode ser verificado na figura 19 onde ilustra o cisalhamento vertical. Nesta transformação é preservada a coordenada x e move os pontos na direção vertical.

2.2.2 Rotação

Definição 32. Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que gira cada vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ de um ângulo fixado θ . T é chamado de rotação por θ em \mathbb{R}^2 .

Exemplo 15. No gráfico da figura 20, inicialmente denotamos que r é o comprimento do segmento OP , ou seja, $r = OP = OP'$, θ o ângulo entre v e o eixo Ox positivo no sentido anti-horário e $\alpha + \theta$ o ângulo entre OP' e o eixo Ox positivo no sentido anti-horário. Segue das relações trigonométricas no triângulo retângulo OPX temos que, $X = r \cos(\theta)$ e $Y = r \sin(\theta)$. Da mesma forma considerando o triângulo $OP'w_1$, temos que $w_1 = r \cos(\alpha + \theta)$ e $w_2 = r \sin(\alpha + \theta)$. Expandindo estas últimas relações e substituindo as primeiras e aplicando identidades trigonométricas temos:

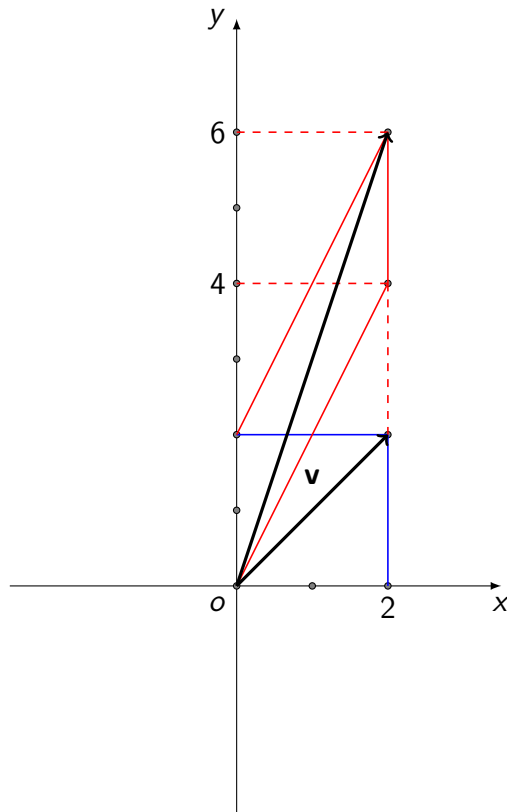


Figura 19 – Cisalhamento Vertical

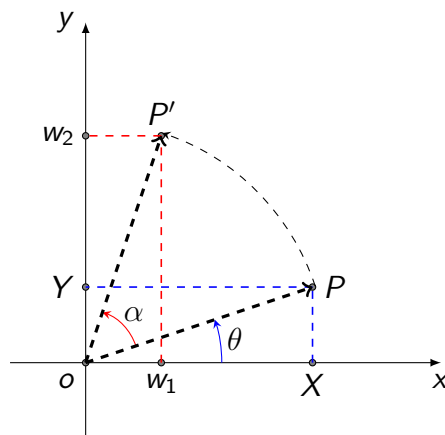


Figura 20 – Rotação

$$\begin{cases} w_1 = X \cos(\theta) - Y \operatorname{sen}(\theta) \\ w_2 = X \operatorname{sen}(\theta) + Y \cos(\theta). \end{cases}$$

Assim, se \mathcal{B} denota a base canônica de \mathbb{R}^2 , obtemos a matriz de rotação associada a transformação

$$[F(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot [v]_{\mathcal{B}}.$$

Rotação de Eixos

Rotacionar um eixo consiste em girarmos o eixo tomando como base para esse deslocamento radial um ponto fixo. O sentido anti-horário da rotação é convencionalizado como o positivo.

Ao se rotacionar os eixos coordenados xOy , fixando-se a origem O , estamos criando um novo sistema de coordenadas $x'Oy'$, com origem em O , conforme é ilustrado na figura 21.

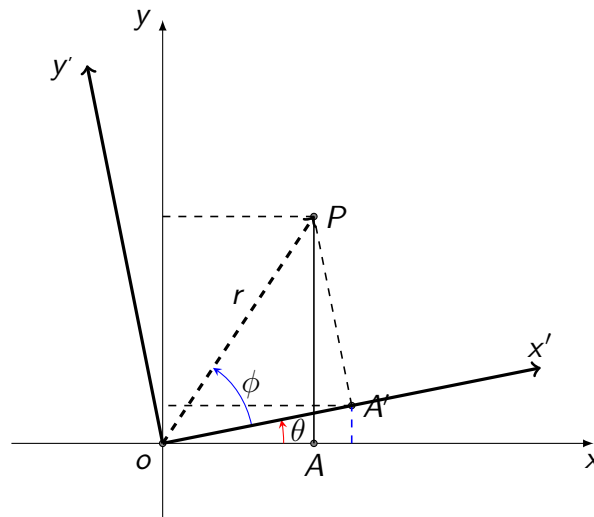


Figura 21 – Rotação de Eixos

A fim de simplificar uma equação por rotação de eixos contaremos com o seguinte resultado:

Teorema 1. Se girarmos os eixos coordenados de um ângulo θ , fixando-se a origem O , e se as coordenadas de qualquer ponto P do plano antes e depois da rotação de eixos são (x, y) e (x', y') , respectivamente, então as equações de rotação são dadas por:

$$\begin{cases} x = x' \cos(\theta) - y' \text{sen}(\theta) \\ y = x' \text{sen}(\theta) + y' \cos(\theta). \end{cases} \quad (1)$$

Na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Consideremos o plano Oxy e seja θ o ângulo de rotação o qual é obtido um novo sistema $O'x'y'$ tal que os eixos $O'x'$ e $O'y'$ tenham a mesma unidade de medida de Ox e Oy . Seja P um ponto qualquer do plano tal que suas coordenadas em relação ao sistema Oxy são x e y e, em relação ao sistema $O'x'y'$ são x' e y' . Desta forma, e de acordo com a figura, temos:

$$\begin{cases} x' = \overline{OA'} = r \cos \phi \\ y' = \overline{A'P} = r \sin \phi \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{e } \begin{cases} x = \overline{OA} = r \cos(\theta + \phi) \\ = r \cos(\theta) \cos \phi - r \sin(\theta) \sin \phi \\ y = \overline{AP} = r \sin(\theta + \phi) \\ = r \sin(\theta) \cos \phi + r \cos(\theta) \sin \phi \end{cases} \quad (3)$$

Portanto, substituindo-se (2) em (3), temos:

$$\begin{cases} x = x' \cos(\theta) - y' \sin(\theta) \\ y = x' \sin(\theta) + y' \cos(\theta). \end{cases}$$

No estudo de espaços vetoriais de dimensão finita é necessário conhecer as relações entre as coordenadas de um vetor em diferentes bases. Base é a generalização para espaços vetoriais arbitrários da noção de sistemas de coordenadas em \mathbb{R}^2 , mudar de base é análogo a mudar de eixos coordenados em \mathbb{R}^2 .

Definição 33. A matriz $[I_v]_\theta^\alpha$ é chamada matriz mudança de base de α para θ , pois, pela igualdade da expressão: $[T(v)]_\theta = [T]_\theta^\alpha \cdot [v]_\alpha$, permite obter as coordenadas de um vetor v em V em relação à base θ uma vez conhecidas suas coordenadas na base α .

Exemplo 16. Considerando a base canônica α de \mathbb{R}^2 e a outra base $\theta = \{(1, 1), (1, 2)\}$, temos que:

$$[I_{\mathbb{R}^2}]_\theta^\alpha = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix},$$

em que a_1, a_2, b_1, b_2 são números reais satisfazendo o sistema de equações

$$\begin{cases} (1, 0) = a_1(1, 1) + a_2(1, 2) \\ (0, 1) = b_1(1, 1) + b_2(1, 2). \end{cases}$$

Resolvendo as equações acima, obtemos $a_1 = 2, a_2 = -1, b_1 = -1$ e $b_2 = 1$. Portanto,

$$[I_{\mathbb{R}^2}]_\theta^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Seja agora $v = (x, y)$ em \mathbb{R}^2 . Se $[v]_\theta = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, então:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

o que garante que $x' = 2x - y$ e $y' = -x + y$ são as coordenadas de v na base θ , ou seja, $(x, y) = (2x - y)(1, 1) + (-x + y)(1, 2)$.

Assim, denotando $A = (1, 2)$, $P = (2, 3)$ e $C = (1, 1)$, a Figura 22 ilustra a determinação do par $(2, 3)$ representado em \mathbb{R}^2 .

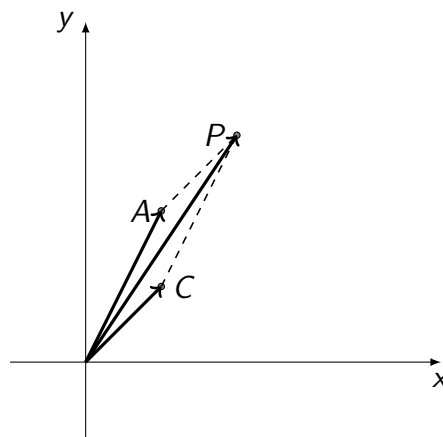


Figura 22 – O par $(2, 3)$ em \mathbb{R}^2

A seguir iremos introduzir a noção de produto interno em espaços vetoriais. Isso permitirá enriquecer a estrutura de um espaço vetorial e abordar vários conceitos de caráter geométrico.

Definição 34. Seja V um espaço vetorial. Um produto interno é uma função $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par de vetores $u, v \in V$ um número real, denotado por $\langle u, v \rangle$, chamado de produto interno de u por v , de modo que sejam válidas as seguintes propriedades, para quaisquer u, v e w de V e $k \in \mathbb{R}$:

- P1. $\langle v, v \rangle \geq 0$;
- P2. $\langle v, v \rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0$;
- P3. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;
- P4. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;
- P5. $\langle ku, v \rangle = k \langle u, v \rangle$.

Como observações importantes podemos enumerar:

1. O produto interno de um vetor qualquer pelo vetor nulo é zero. De fato, temos que $\langle 0, v \rangle = \langle 0 + 0, v \rangle = \langle 0, v \rangle + \langle 0, v \rangle$, segue-se que $\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0$, para todo $v \in V$.
2. Resulta da positividade que se $\langle u, v \rangle = 0$, para todo $v \in V$, então $u = 0$. Com efeito, se $u \neq 0$ teríamos $\langle u, v \rangle \neq 0$ pelo menos quando $v = u$.
3. Uma consequência da observação anterior, temos que se $u, w \in V$ são vetores tais que $\langle u, v \rangle = \langle w, v \rangle$ para todo $v \in V$, logo $u - w = 0$ e $u = w$.
4. O número não negativo $|u| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ chama-se a norma ou o comprimento do vetor u . Com esta notação, tem-se $|u|^2 = \langle u, u \rangle$ e a igualdade $\langle u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$, lê-se: $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u, v \rangle$.
5. Quando $|u| = 1$ diz-se que $u \in V$ é um vetor unitário. todo vetor $u \neq 0$ se escreve como $u = |u| \cdot w$, onde w é um vetor unitário. Basta $w = |u|^{-1} \cdot u$.

Exemplo 17. Consideremos \mathbb{R}^2 como modelo aritmético do plano euclidiano, no qual se introduziu um sistema de coordenadas cartesianas. Dados $u = (\alpha_1, \alpha_2)$ e $v = (\beta_1, \beta_2)$, os números $|u| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ e $|v| = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}$ medem realmente os comprimentos das flechas que representam esses vetores. Suponhamos $u \neq 0$, $v \neq 0$ e chamemos de θ o ângulo formado por essas flechas. Afirmamos que o produto interno $\langle u, v \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$ acima definido é igual a $|u||v| \cos(\theta)$. Isto será provado em três passos:

1. se os vetores u e v são perpendiculares, então $\langle u, v \rangle = 0 = |u||v| \cos(90^\circ)$. Com efeito, por um lado, $|u + v|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u, v \rangle$ e, por outro lado, pelo Teorema de Pitágoras, ilustrado na 23, $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2$. Logo, $\langle u, v \rangle = 0$.
2. Se $|u| = |v| = 1$, então $\langle u, v \rangle = \cos(\theta)$. Com efeito, tomando o vetor unitário u^* perpendicular a u temos, pela definição de seno e cosseno, $v = \cos(\theta) \cdot u + \sin(\theta) \cdot u^*$. Tomando o produto interno de ambos os membros desta igualdade por u , vem $\langle u, v \rangle = \cos(\theta) \cdot \langle u, u \rangle + \sin(\theta) \cdot \langle u, u^* \rangle$. Como $\langle u, u \rangle = 1$ e $\langle u, u^* \rangle = 0$, pelo primeiro passo, temos $\langle u, v \rangle = \cos(\theta)$.
3. Caso geral: pomos $u = |u| \cdot u'$ e $v = |v| \cdot v'$, onde u' e v' são vetores unitários na mesma direção e sentido de u e v , respectivamente. Então $\langle u, v \rangle = |u||v| \langle u', v' \rangle = |u||v| \cos(\theta)$. Vemos, em particular, que os vetores u, v formam um ângulo agudo quando $\langle u, v \rangle > 0$, um ângulo obtuso quando $\langle u, v \rangle < 0$ e um ângulo reto quando $\langle u, v \rangle = 0$.

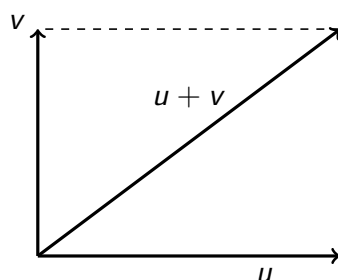


Figura 23 – Teorema de Pitágoras em sua forma vetorial

Definição 35. Seja V um espaço com produto interno. Dois vetores $u, v \in V$ chamam-se ortogonais (ou perpendiculares) quando $\langle u, v \rangle = 0$. Escreve-se, então $u \perp v$. Em particular, θ é ortogonal a qualquer vetor de V .

Definição 36. Um conjunto $X \subset V$ diz-se ortogonal quando todos os vetores de X são ortogonais dois a dois. Se, além disso, todos os vetores de X são unitários, então X chama-se um conjunto ortonormal. Portanto, o conjunto $X \subset V$ é ortonormal se, e somente se, dados $u, v \in X$ tem-se $\langle u, v \rangle = 0$ se $u \neq v$ e $\langle u, v \rangle = 1$ se $v = u$. Uma base ortonormal é uma base de V que é um conjunto ortonormal.

Teorema 2. Num espaço vetorial V com produto interno, todo conjunto ortonormal X de vetores não nulo é L.I..

Demonstração. Sejam $v_1, \dots, v_n \in X$. Temos $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ se $i \neq j$. Se $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ é uma combinação linear nula desses vetores então, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, tomamos o produto interno de ambos os membros desta igualdade por v_i e temos $\alpha_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_n, v_i \rangle = 0$.

Logo $\alpha_i \langle v_i, v_i \rangle = \alpha_i |v_i|^2 = 0$, pois todos os produtos internos $\langle v_j, v_i \rangle$, com $j \neq i$, são nulos em virtude da ortogonalidade de X . Além disso, como os vetores pertencentes ao conjunto X são todos não nulos, resulta de $\alpha_i |v_i|^2 = 0$ que $\alpha_i = 0$. Assim, os coeficientes da combinação linear $\sum \alpha_i v_i = 0$ são todos iguais a zero e os vetores do conjunto X são, portanto, linearmente independentes. \square

Exemplo 18. A base canônica $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ é ortonormal: tem-se $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\langle e_i, e_j \rangle = 1$ se $i = j$. No plano \mathbb{R}^2 os vetores $u = (1, 1)$ e $v = (-1, 1)$ são

ortonormais. Pondo

$$u' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$v' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

o conjunto $\{u', v'\} \subset \mathbb{R}^2$ é uma base ortonormal.

Definição 37. Num espaço vetorial V com produto interno, seja u um vetor unitário. Dado qualquer $v \in V$, o vetor $\langle u, v \rangle \cdot u$ chama-se a projeção ortogonal de v sobre o eixo que contém u .

A justificativa para esta denominação está no fato de que, escrevendo $w = v - \langle u, v \rangle u$, tem-se $v = \langle u, v \rangle u + w$, onde w é perpendicular a u . Com efeito, tomando o produto interno de u por ambos os membros da igualdade $w = v - \langle u, v \rangle u$, tem-se $\langle u, w \rangle = \langle u, v \rangle - \langle u, v \rangle \langle u, u \rangle = \langle u, v \rangle - \langle u, v \rangle = 0$, pois $\langle u, u \rangle = 1$.

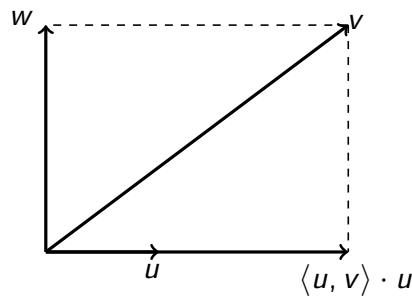


Figura 24 – Projeção ortogonal

Quando se tem apenas $u \neq 0$, o eixo que contém u é o mesmo que contém o vetor unitário $u' = \frac{u}{|u|} = (|u|^{-1} \cdot u)$. A projeção ortogonal de v sobre este eixo é, portanto, igual a $\langle u', v \rangle u'$, ou seja, $\frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} \cdot u$.

Usaremos a notação

$$\text{proj}_u(v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} \cdot u$$

para indicar a projeção ortogonal de v sobre o eixo que contém o vetor não-nulo u .

Se $z = \text{proj}_u(v)$, tem-se $v = z + w$, com $w \perp z$. Pelo Teorema de Pitágoras, $|v|^2 = |z|^2 + |w|^2$. Em particular, vemos que $|z| \leq |v|$, isto é, o comprimento da projeção $\text{proj}_u(v)$ é menor do que ou igual ao comprimento v .

Ora, a norma de vetor

$$\text{proj}_u(v) = \frac{|\langle u, v \rangle|}{|u|}.$$

Segue-se então que, para quaisquer $u, v \in V$, tem-se

$$\frac{|\langle u, v \rangle|}{|u|} \leq |v|,$$

ou seja

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u| \cdot |v| \text{ (desigualdade de Schwarz)}. \quad (4)$$

A rigor, o argumento acima prova a desigualdade de Schwarz apenas no caso em $u \neq 0$, mas ela é óbvia no caso em que u, v é múltiplo um do outro (formam um conjunto L.D. de vetores). Isto resulta do raciocínio acima pois, pelo Teorema de Pitágoras $|v|^2 = |z|^2 + |w|^2$, quer dizer $|v| = |z|$ significa que $w = 0$, isto é, que v é múltiplo do u .

A seguir, vamos fazer um breve estudo sobre subespaços invariantes, operadores auto-adjuntos e um caso particular do Teorema Espectral para operadores auto-adjunto de \mathbb{R}^2 .

As definições 38 e 39 são necessárias para o entendimento dos resultados seguintes, como o do Teorema 3.

Definição 38. A transposta de uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}(m \times n)$ é a matriz $A^t = [a_{ji}] \in \mathcal{M}(n \times m)$ que tem como linhas as colunas de A e como colunas as linhas de A , na mesma ordem.

Definição 39. A adjunta de uma transformação linear $T : V \rightarrow F$ é uma transformação linear $T^* : F \rightarrow V$ tal que, para $b \in V$ e $w \in F$ quaisquer se tenha: $\langle T(b), w \rangle = \langle b, T^*(w) \rangle$.

Teorema 3. Sejam $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ e $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_m\} \subset F$ bases ortonormais. Se $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}(m \times n)$ é a matriz da transformação linear $T : V \rightarrow F$ nas bases \mathcal{U} e \mathcal{B} , então a matriz da adjunta $T : F \rightarrow V$ nas referidas bases é a transposta $A^t = [a_{ji}] \in \mathcal{M}(n \times m)$ de A .

Demonstração. Por definição de uma transformação linear, temos

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} b_i, j = \{1, \dots, n\}$$

e

$$T^*(b_i) = \sum_{r=1}^n c_{ri} u_r,$$

onde $C = [c_{ri}] \in \mathcal{M}(n \times m)$ é a matriz de T^* nas bases \mathcal{B} e \mathcal{U} a serem determinadas.

Como ambas as bases são ortonormais, temos, para cada $i = 1, \dots, m$ e cada $j = 1, \dots, n$: $c_{ji} = \langle u_j, T^*(b_i) \rangle = \langle T(u_j), b_i \rangle = a_{ij}$. Portanto, $C = A^t$. \square

É apresentada a seguir, uma lista de propriedades operacionais da adjunta de uma transformação linear, as quais se traduzem em propriedades de transposta de matriz. A validade dessas propriedades decorre da observação de que duas transformações lineares $T, R : V \rightarrow F$ são iguais quando se tem $\langle T(u), b \rangle = \langle R(u), b \rangle$ para quaisquer $u \in V$ e $b \in F$.

1. $I^* = I$
2. $(T + R)^* = T^* + R^*$
3. $(\alpha T)^* = \alpha t^*$
4. $(RT)^* = T^*R^*$
5. $T^{**} = T$
6. $I_n^t = I_n$
7. $(A + B)^t = A^t + B^t$
8. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
9. $(BA)^t = A^t B^t$
10. $(A^t)^t = A$

onde a A e B são as matrizes associadas às transformações lineares T e R , respectivamente.

Um subespaço vetorial $F \subset V$ é invariante pelo operador linear $T : V \rightarrow V$ quando $T(F) \subset F$, isto é, quando a imagem de $T(b)$ de qualquer vetor $b \in F$ é ainda um vetor de F .

Exemplo 19. No cisalhamento horizontal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + \alpha y, y)$, temos que se $\alpha \neq 0$, os únicos subespaços invariantes por T são $\{0\}$, \mathbb{R}^2 e o eixo das abscissas. Com efeito, qualquer outro subespaço de \mathbb{R}^2 é uma reta r , formada pelos múltiplos $kv = (ka, kb)$ de um vetor $v = (a, b)$, com $b \neq 0$. Se $k \neq 0$ tem-se $kv \in r$, mas $T(kv) = (ka + \alpha kb, kb) = kv + (\alpha kb, 0) \notin r$. Logo, r não é invariante por T .

Teorema 4. A autovalores diferentes do mesmo operador correspondem autovetores linearmente independentes.

Demonstração. Dado o operador linear $T : V \rightarrow V$, sejam v_1, \dots, v_m vetores não-nulos em V tais que $T(v_1) = \lambda_1 v_1, \dots, T(v_m) = \lambda_m v_m$, onde os números reais $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ são dois a dois diferentes. Provaremos, por indução que esses são **L.I.** A afirmação é óbvia quando $m = 1$. Suponha-a verdadeira para $m - 1$ vetores, concluiremos daí sua validade para m . Dada a combinação linear nula:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0. \quad (5)$$

Aplicamos o operador T a ambos os membros desta igualdade, levando em conta que $T(v_i) = \lambda_i v_i$. Resulta então que

$$\lambda_1 \alpha_1 v_1 + \dots + \lambda_m \alpha_m v_m = 0. \quad (6)$$

Multiplicamos a igualdade (5) por λ_m e subtraindo de (6) vem:

$$(\lambda_1 \lambda_2) \alpha_1 v_1 + \dots + (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \alpha_{m-1} v_{m-1} = 0.$$

Pela hipótese de indução, os vetores v_1, \dots, v_{m-1} são **L.I.** Logo,

$$(\lambda_1 \lambda_2) \alpha_1 = \dots = (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \alpha_{m-1} = 0.$$

Como os autovetores são todos diferentes, as $m - 1$ diferenças nos parênteses acima são diferentes de zero. Logo,

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{m-1} = 0.$$

Isto reduz a igualdade (5) a $\alpha_m v_m = 0$. Como $v_m \neq 0$, segue-se que $\alpha_m = 0$. Assim, a igualdade (5) só pode ocorrer quando todos os coeficientes α_i são nulos. \square

Corolário 1. Sejam $\dim V = n$. Se um operador linear $t : V \rightarrow V$ possui n autovalores diferentes então existe uma base $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ em relação à qual a matriz de T é diagonal (isto é, tem a forma $[a_{ij}]$ com $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$). Com efeito, se $T(v_1) = \lambda_1 v_1, \dots, T(v_n) = \lambda_n v_n$ com os v_i não nulos e os λ_i dois a dois distintos então $\{v_1, \dots, v_n\}$ é, em virtude do Teorema, uma base de V . A matriz de T nesta base é

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

na qual os termos que não aparecem são iguais a zero. A igualdade $T(v) = \lambda v$ equivale a $(T - \lambda I)v = 0$, logo é um autovetor do operador $T : V \rightarrow V$ se, e somente se, o operador $T - \lambda I : V \rightarrow V$ não possui inversa, ou seja, se o determinante da sua matriz associada for igual a zero.

Exemplo 20. Um caso particular importante ocorre quando $\dim V = 2$. Se $\{u, v\} \subset V$ é uma base então os vetores $\alpha u + \beta v$ e $\gamma u + \delta v$ formam um conjunto **L.D.** se, e somente se, $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$.

Dados o operador $T : V \rightarrow V$ e a base $\{u, v\} \subset V$, sejam $T(u) = au + cv$ e $T(v) = bu + dv$. Noutras palavras, a matriz do operador T na base u, v é

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Então $(T - \lambda I)(u) = (a - \lambda)u + cv$ e $(T - \lambda I)(v) = bu + (d - \lambda)v$. A fim de que $T - \lambda I$ não possua inversa é necessário e suficiente que $\det(A - \lambda I) = 0$, ou seja, $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$, ou ainda, que λ seja raiz do polinômio:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc,$$

chamado polinômio característico do operador T .

Assim, o número real λ é um autovalor do operador $T : V \rightarrow V$ onde $\dim(V) = 2$ se, e somente se, é uma raiz do polinômio característico do operador T , o qual, por definição é $p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc$. Observe que essa definição se justifica pela teoria das matrizes onde raiz desse polinômio representa o valor para o qual o operador não é invertível. Os coeficientes de $p(\lambda)$ são tirados da matriz A em relação a uma base qualquer de V .

Teorema 5. $T : V \rightarrow V$ é auto-adjunto se, e somente se, sua matriz $A = [a_{ij}]$ relativamente a uma base ortonormal $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ é uma matriz simétrica.

Demonstração. Sabemos que $\langle u_i, T(u_j) \rangle$ é igual a i -ésima coordenada do vetor $T(u_j)$ na base \mathcal{U} , que por sua vez é igual ao i -ésimo elemento da j -ésima coluna de $A = [a_{ij}]$. Portanto, a matriz A é simétrica se, e somente se, $\langle u_i, T(u_j) \rangle = \langle T(u_i), u_j \rangle$ para quaisquer $i, j = 1, \dots, n$. Devido à linearidade de T e à bilinearidade do produto interno, isto equivale a dizer que $\langle u, T(v) \rangle = \langle T(u), v \rangle$ para quaisquer $u, v \in V$, ou seja, que T é auto-adjunta. \square

Teorema 6. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ são autovalores dois a dois diferentes do operador auto-adjunto $T : E \rightarrow E$, os autovetores correspondentes v_1, \dots, v_m são dois a dois ortogonais.

Demonstração. Para $i \neq j$ quaisquer, temos:

$$\begin{aligned} (\lambda_i - \lambda_j) \langle v_i - v_j, v_j \rangle &= \langle \lambda_i v_i, v_j \rangle - \langle v_i, \lambda_j v_j \rangle \\ &= \langle T(v_i), v_j \rangle - \langle v_i, T(v_j) \rangle \\ &= \langle T(v_i), v_j \rangle - \langle T(v_i), v_j \rangle = 0, \end{aligned}$$

pois T é auto-adjunto. □

Observação: Se $T(v) = \lambda v$ então, para todo múltiplo $w = \alpha v$, tem-se ainda $T(w) = \lambda w$. Logo, na situação do Teorema 6, os vetores v_1, \dots, v_m podem ser tomados unitários, caso haja conveniência.

Um problema importante sobre operadores num espaço vetorial de dimensão finita é o de encontrar uma base em relação à qual a matriz desse operador seja a mais simples possível. Mostraremos que, se $T : V \rightarrow V$ é um operador auto-adjunto (associado a uma matriz simétrica, pois $T = T^* \Rightarrow A = A^t$) num espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, existe uma base ortonormal em V , relativamente à qual a matriz de T é uma matriz diagonal $A = [a_{ij}]$, isto é, $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Quando se diz que a matriz do operador $T : V \rightarrow V$ na base $u_1, \dots, u_n \subset V$ é uma matriz diagonal, isto significa que, para todo $j = 1, \dots, n$, tem-se $T(u_j) = \lambda_j u_j$, ou seja, os vetores da base dada são todos eles autovetores de T .

Vamos mostrar um caso particular do Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos em que o espaço tem dimensão 2.

Teorema 7. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador auto-adjunto num espaço vetorial de dimensão 2, munido de produto interno. Existe uma base ortonormal $\{u_1, u_2\} \subset V$ formada por autovetores de T .

Demonstração. Seja $\{v, w\} \subset V$ uma base ortonormal arbitrária. Pelo Teorema 5, temos $T(v) = av + bw$ e $T(w) = bv + cw$. Como vimos no Exemplo 20, os autovalores de T são as raízes reais do polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2$. O discriminante deste trinômio é $\Delta = (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$. Se $\Delta = 0$, então $b = 0$, $a = c$ e $T = aI$. Logo, todo vetor não-nulo em V é um autovetor. Se $\Delta > 0$, então o trinômio $p(\lambda)$ possui duas raízes reais distintas λ_1 e λ_2 . Isto, como sabemos, quer dizer que os operadores $T - \lambda_1 I$ e $T - \lambda_2 I$ são ambos não invertíveis. Logo, existem vetores não nulos (que podemos supor unitários) $u_1, u_2 \in V$ tais que $T(u_1) = \lambda_1 u_1$ e $T(u_2) = \lambda_2 u_2$. Pelo Teorema 6 $\{u_1, u_2\} \subset V$ é uma base ortonormal de autovetores de T . □

Exemplo 21. Determinar o gráfico, no plano xy , de uma equação da forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad (7)$$

onde os coeficientes a, c, d, e e f são constantes reais, com a, b e c não todos nulos. Tal equação é chamada de equação de segundo grau em x e y . A razão pela qual escrevemos $2b$ em lugar de b para o coeficiente do termo xy é que a natureza do gráfico é determinada, em grande parte, pela forma quadrática associada.

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \langle T(x, y), (x, y) \rangle \quad (8)$$

em x e y , que corresponde ao operador auto-adjunto $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ associado à matriz simétrica 2×2 ,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad (9)$$

Em geral, a forma quadrática q nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n que corresponde ao operador auto-adjunto $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a função $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$q(x) = \langle x, T(x) \rangle. \quad (10)$$

A análise da equação de segundo grau em (7) é o fato de que a matriz simétrica A associada a transformação T em (9) é ortogonalmente diagonalizável, ou seja, de acordo com o Teorema 7, existe uma base \mathcal{B} e uma matriz diagonal. Usando esse fato, demonstraremos que, exceto por alguns casos degenerados, o gráfico de toda equação de segundo grau em x e y é uma seção cônica. A expressão seção cônica vem do fato destas serem as curvas em que um plano intercepta um cone. O cone utilizado é um cone circular reto com duas folhas que se estendem ao infinito em ambos os sentidos. Há três tipos de seções cônicas. Se o plano secante é paralelo a alguma geratriz do cone, então a curva de interseção é uma parábola. De outro modo, ou ela é uma única curva fechada-elipse-, ou é uma hipérbole com dois ramos.

Para um sistema apropriado de coordenadas xy nos planos secantes de um cone circular reto, as equações dos três tipos de seções cônicas tomam as seguintes formas

$$\begin{aligned} \text{Parábola :} & \quad y^2 = kx \text{ ou } x^2 = ky \\ \text{Elipse :} & \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \text{Hipérbole :} & \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ou } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Uma seção cônica está em posição canônica em relação aos eixos coordenados se sua equação tomar uma das formas listadas nas equações (11).

Ferramentas do GeoGebra utilizadas

Neste capítulo serão apresentadas algumas ferramentas do Software GeoGebra, necessárias para realizar a sequência didática e uma abordagem da ferramenta controle deslizante que será usada nas atividades didáticas no próximo capítulo, onde os parâmetros gráficos das funções serão especificados a partir da manipulação dessa ferramenta.

Esse software foi desenvolvido pelo austríaco Markus Hohenwarter com o objetivo de ser um recurso didático. Ele iniciou o projeto do GeoGebra na Universität Salzburg em 2001 e, desde então, segue em processo de desenvolvimento e aprimoramento na Florida Atlantic University. A popularidade desse software cresce dia após dia desde sua criação.

Não é propósito desse trabalho, discutir ou ensinar como esboçar os gráficos das funções seno e cosseno e sim, tratar do comportamento gráfico das funções seno e cosseno quanto aos movimentos de translação, deflexão e deformação, tendo como ferramenta tecnológica o software GeoGebra.

As atividades seguiram o passo a passo na apresentação dos principais comandos do GeoGebra e sua utilização pode ser feita localmente, instalando gratuitamente o programa (seu download pode ser feito através do link: <http://www.geogebra.org>) ou usado através de acesso on-line pelo link: <https://www.geogebra.org/graphing>. Ver Figura 25.

Após a instalação do GeoGebra, algumas alterações ocorreram na configuração do software, as quais permitiram a análise precisa dos gráficos.

Seguindo o passo a passo.



Figura 25 – Fonte: www.geogebra.org-Acesso em 30/04/2017

1. A Figura 26, mostra a tela inicial do GeoGebra. É importante identificar a caixa de “Entrada”, local onde serão colocadas as funções, a “Janela de Álgebra” que mostrará as funções digitadas na caixa de entrada e também utilizada para selecionar as funções de interesse nas análises e, por fim, a “Janela de Visualização” onde os gráficos serão construídos.

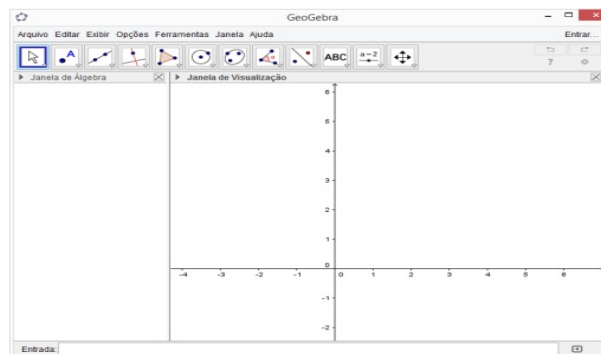


Figura 26 – Tela inicial do GeoGebra

2. Clique sobre a região do gráfico com o botão direito do mouse e selecione “malha”. Em seguida aparecerá a malha quadriculada no plano cartesiano, para facilitar a identificação de valores. A Figura 27 apresenta esse comando em destaque.

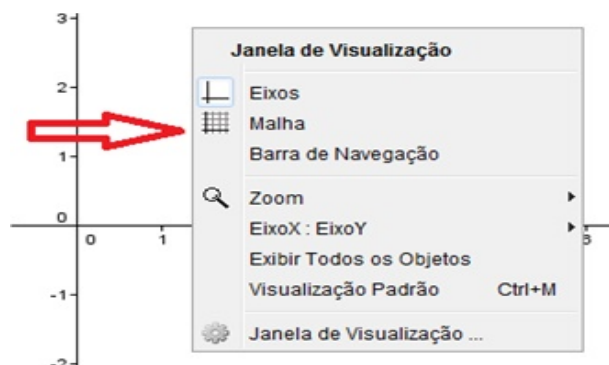


Figura 27 – Exibição da malha quadriculada

3. Clique com o botão direito do mouse sobre a área do gráfico e escolha a opção “Janela de Visualização”, para fazer a mudança da unidade do eixo-x para radianos destacada na figura 28.

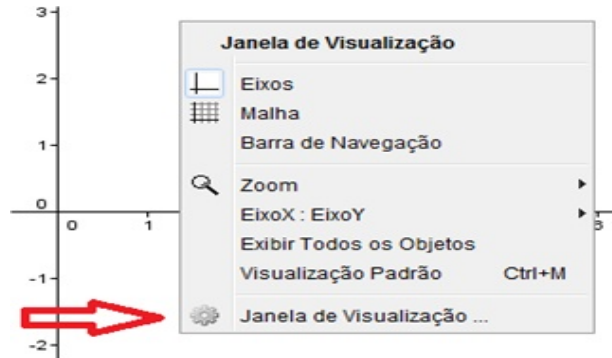


Figura 28 – Mudança de unidade dos eixos

4. Em “preferências”, selecionar “Eixo X”, definir distância $\frac{\pi}{2}$, rótulo x e unidade π . Como mostra a figura 29.

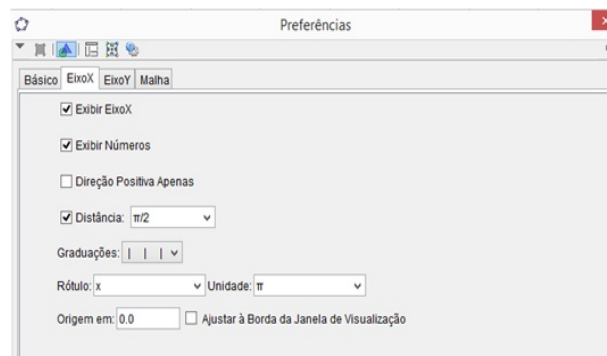


Figura 29 – Mudança de unidade do eixo horizontal para radianos

Após o passo 4 o GeoGebra está pronto para executar as funções. Na figura 30, mostra como fica a tela para início das atividades.

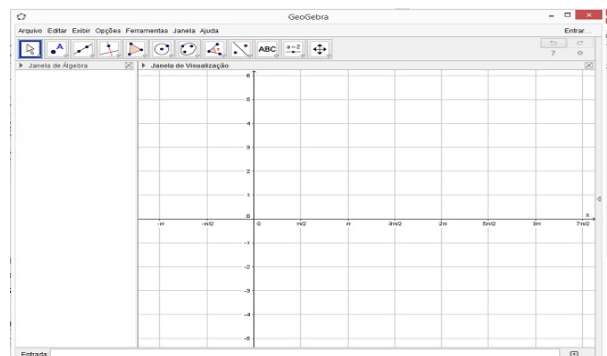


Figura 30 – Tela do GeoGebra formatada

5. Digite a função na caixa de entrada, clicando, em seguida, na tecla “Enter”. Figura 31.



Figura 31 – Caixa de entrada das funções

É possível visualizar, na “Janela de Álgebra”, a função e o seu gráfico na “Janela de Visualização”, $f(x) = \text{sen}(x)$ e o seu gráfico na “Janela de Visualização”. Figura 32.

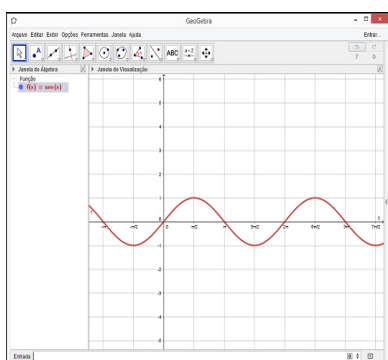


Figura 32 – Tela formatada

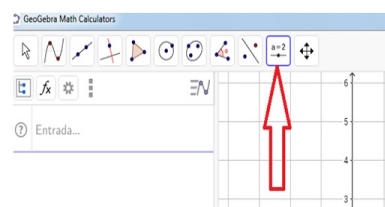


Figura 33 – Controle deslizante

As funções seno e cosseno, em especial, por serem periódicas, apresentam repetição nos gráficos.

O GeoGebra é um software que possui uma série de funções predefinidas, com sintaxes próprias. O menu “ajuda” do software direciona para tutoriais, manual, fórum de discussão que podem ajudar no uso da ferramenta tecnológica. No próximo capítulo serão apresentadas as atividades didáticas com os controles deslizantes do aplicativo gratuito GeoGebra.

Controle deslizante é uma das ferramentas do software GeoGebra que permite inserir uma variável na área de trabalho, que poderá ser alterada a partir do manuseio do mouse para deslizar o ponto preto, assim mudando o valor da variável, conforme Figura 33.

Sequência Didática com o GeoGebra

O propósito desse capítulo é apresentar uma sequência didática e os resultados obtidos a partir dela, para o estudo dos movimentos de translação, reflexão e deformação dos gráficos das funções seno e cosseno. Vislumbramos, com sua aplicação, uma melhor interpretação e visualização dos gráficos das funções seno e cosseno a partir da manipulação dos parâmetros da função e de algumas aplicações. A sequência é iniciada com um problema norteador e está dividida em duas fases, cada uma aplicada pela docente em uma turma de 1^o ano do ensino médio da Escola Estadual Mario Costa Neto (Ver Figura 34), localizada na rua Eng. Jaime Zaverucha, 89, Federação, Salvador-BA, CEP 40230-320.



Figura 34 – Escola Estadual Mario Costa Neto

Segundo (ZABALA, 1998), “as sequências didáticas são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos, tanto pelos professores quanto pelos alunos.”

A sequência didática com o uso do software pedagógico serve como veículo entre aluno e o computador. O GeoGebra, software educativo, gratuito e de fácil manipu-

lação possui como objetivo, auxiliar o professor no processo de ensino-aprendizagem. Logo, esta atividade proposta neste trabalho tem como um dos alvos o envolvimento do discente na construção do conhecimento e na melhoria da prática pedagógica.

A metodologia a ser utilizada na sequência didática é de privilegiar estratégias que estimulem o autoconhecimento dos alunos, bem como a promoção da interação entre as partes envolvidas no processo de ensino-aprendizagem.

Segundo (RICHIT; MALTEMPI, 2010), o uso de tecnologia computacional propicia, dentre outras coisas, visualização, algo que favorece a apropriação de conhecimento em matemática, já que a visualização, articulada à dinâmica desse recurso, evidencia propriedades e relações entre objetos matemáticos, que conduzem à compreensão ampla dos conceitos. Possibilita testar mudanças associadas a características algébricas ou geométricas e observar as variações nos aspectos gráficos dos conceitos matemáticos.

4.1 Planejamento, execução e resultados

Os alunos da turma do 1º ano do ensino, da Escola Estadual Mario Costa Neto, foram avisados no dia 02 de maio do ano corrente que no dia 22 de maio de 2017 iriam realizar uma atividade no laboratório de informática mediada pela professora de matemática. Em sala de aula foi retomado o conteúdo de gráficos de funções trigonométricas, uma vez que os alunos já tinham visto o conteúdo no nono ano. No dia 22 de maio de 2017, no laboratório de informática, na disciplina de matemática, na turma de 20 alunos do 1º ano do Ensino Médio, foi realizada a atividade proposta.

Atividade

Objetivos gerais

Construir o gráfico das funções seno e cosseno, usando o GeoGebra e reconhecer a influência dos parâmetros sobre o gráfico dessas funções, quanto aos movimentos de translação, reflexão e deformação nos gráficos. Tendo como referência de comparação a função $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \text{cos}(x)$.

Objetivos específicos

- Identificar os parâmetros das funções $f(x) = a + b\text{sen}(cx + d)$ e $g(x) = a + b\text{cos}(cx + d)$;

- ❑ Identificar os movimentos de translação, reflexão e deformação nas funções $f(x)$ e $g(x)$ a partir dos parâmetros;
- ❑ Resolver situação problema, a partir do conhecimento dos movimentos gráficos da função cosseno.
- ❑ Verificar a relação existente entre os parâmetros, com o período, a amplitude, o domínio e a imagem das funções $f(x)$ e $g(x)$.

Duração

- ❑ Aproximadamente 5 aulas de 50 minutos cada.

Metodologia

- ❑ Será aplicada a metodologia construtivista e expositiva.

Avaliação

- ❑ O aluno será avaliado pela participação na execução da sequência didática.

Material necessário

- ❑ O computador instalado o software GeoGebra.

Desenvolvimento da Atividade

1ª fase:

- ❑ Duração: 3 aulas
- ❑ Primeira atividade: Em laboratório foi apresentado à turma o software GeoGebra e as ferramentas do software GeoGebra, vistas no Capítulo 2. Em seguida, uma questão adaptada foi apresentada a turma para ser resolvida com o GeoGebra.

Exercício 1. Suponha que, durante certo período do ano, a temperatura t , em graus Celsius, na superfície de um lago possa ser descrita pela função $F(t) = 21 - 4 \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$, sendo t o tempo em horas medido a partir das 6h da manhã. (a) A que horas do dia a temperatura será máxima nesse lago, no período de 24h? (b) qual o valor da temperatura máxima?

Para que a questão norteadora fosse respondida foram realizados os seguintes passos:

Passo 1: Digite no campo de entrada do GeoGebra a função $f(x) = \text{sen}(x)$ e obteve o gráfico conforme a Figura 35.

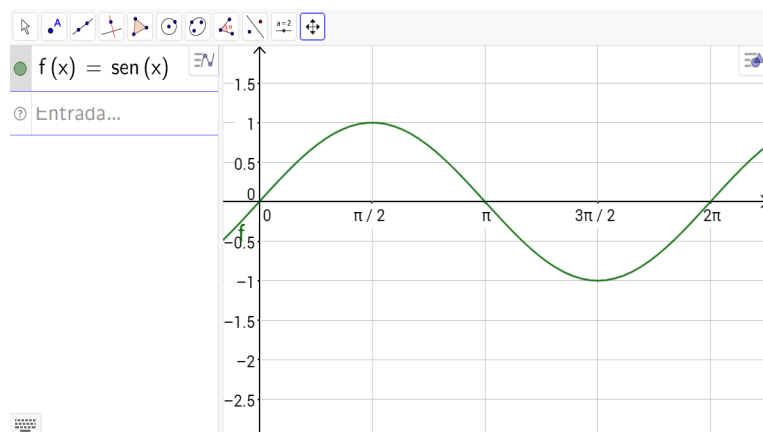


Figura 35 – Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$

Passo 2: Digite na caixa de entrada a forma generalizada da função $f(x) = a + b \text{sen}(cx + d)$, com a , b , c e d reais, sendo $b \neq 0$ e $c \neq 0$. Em seguida, aperte a tecla “Enter”. Surgiu na tela “criar controles deslizantes para: a , b , c e d ” e selecionou esta opção, ver Figura 36.

Por padrão, os valores de a , b , c , d são iguais a 1, conforme Figura 36.

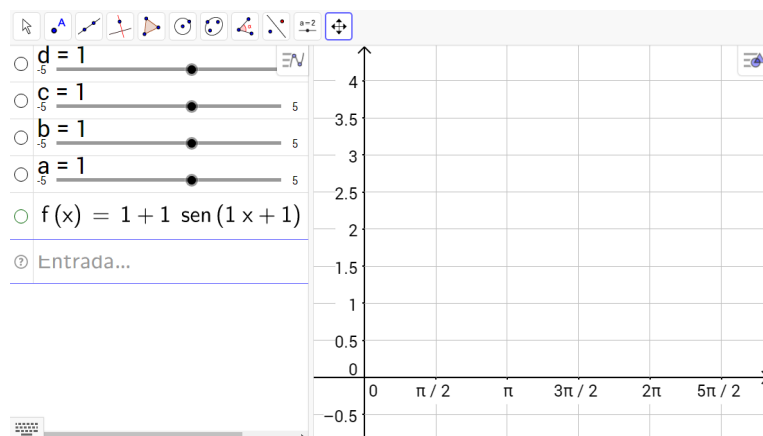


Figura 36 – criar controles deslizantes

Passo 3: Coloque os parâmetros $a = 0$ e $d = 0$. Percebeu que o gráfico encontrado foi o da função $f(x) = \text{sen}(x)$ (ver Figura 37).

Passo 4: Após identificar os parâmetros da função na fórmula generalizada da função seno, deslizou o controle a até o valor de 2 e manteve o $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$. A

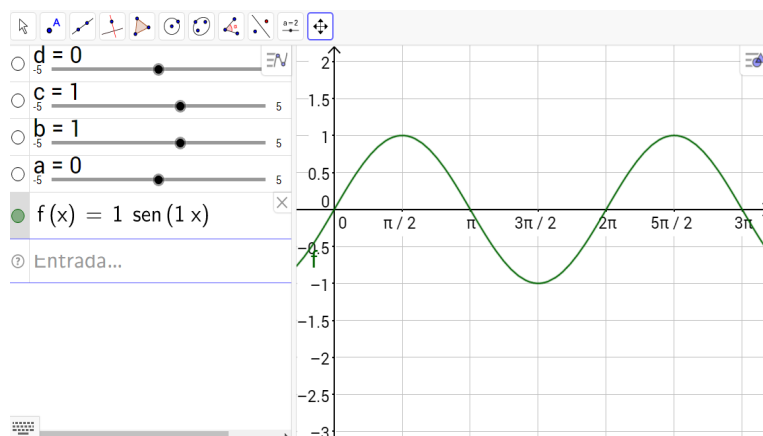
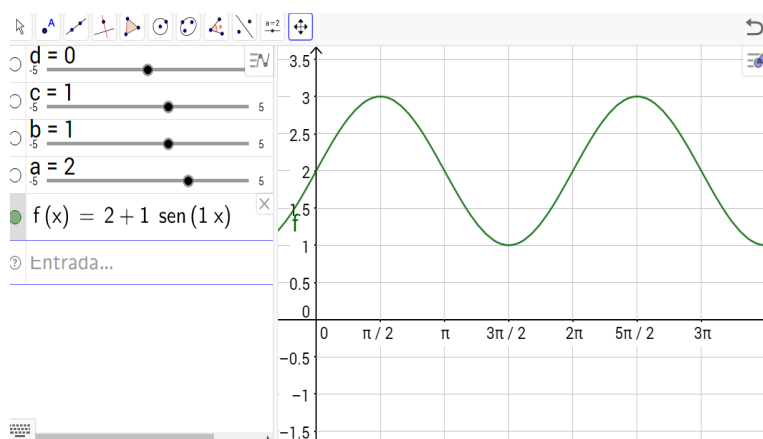
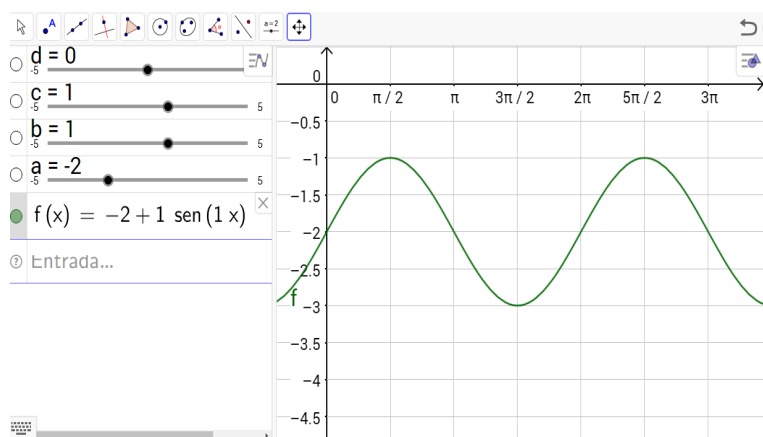


Figura 37 – Gráfico da senoíde

função foi $f(x) = 2 + \text{sen}(x)$. Em seguida, deslizou o valor $a = -2$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$. A função foi $f(x) = -2 + \text{sen}(x)$ (ver figuras 38 e 39, respectivamente).

Figura 38 – Gráfico da função $f(x) = 2 + \text{sen}(x)$ Figura 39 – Gráfico da função $f(x) = -2 + \text{sen}(x)$

Perguntas feitas aos alunos da turma e suas respostas, neste passo:

1. Qual tipo de transformação ocorreu nas figuras 38 e 39 em relação a figura 35?

Respostas dos alunos: Dos 20 alunos da turma, 17 alunos afirmaram que ocorreu translação vertical e 3 afirmaram que ocorreu translação horizontal.

2. Qual parâmetro alterou os gráficos das figuras 38 e 39 em relação a figura 35?

Respostas dos alunos: Dos 20 alunos da turma, 18 alunos afirmaram que o parâmetro que alterou os gráficos foi o a e, 2 afirmaram que foi o b .

3. O conjunto Imagem das funções foi alterado nas figuras 38 e 39 em relação ao da figura 35?

Respostas dos alunos: Dos 20 alunos da turma, 19 alunos afirmaram que o conjunto imagem das funções sofreu alteração e, 1 afirmou que não.

4. O período das funções foi alterado nas figuras 38 e 39 em relação ao da figura 35?

Respostas dos alunos: Dos 20 alunos da turma, 19 alunos afirmaram que o conjunto imagem das funções sofreu alteração e, 1 afirmou que não.

Conclusões construídas com o aluno:

Nos gráficos das figuras 38 e 39, observou-se que em relação à função $f(x) = \sin(x)$, ao ser alterado apenas o valor do parâmetro a , o gráfico sofreu translação vertical. Quando $a > 0$ a função sofreu uma translação vertical “para cima” uma quantidade de unidades equivalente a a . Se $a < 0$ a função sofreu uma translação vertical “para baixo” a quantidade de unidades equivalente a a em relação a 35. Ou seja, o conjunto imagem foi alterado. O período, o domínio e amplitude da função não foram alterados, mas a imagem foi alterada a quantidade de unidades equivalente a a , ou seja, o conjunto imagem passou de $[-1; 1]$ para $[-1 + a; 1 + a]$.

Passo 5: Deslize o controle b até o valor de 4 e mantenha $a = 0$, $c = 1$, e $d = 0$. A função obtida foi: $f(x) = 4 \sin(x)$. Em seguida, deslize o controle b até o valor de $\frac{1}{2}$, mantendo $a = 0$, $b = 1$ e $d = 0$. A função obtida foi: $f(x) = \frac{1}{2} \sin(x)$. Por último, deslize o controle b até o valor de -4 , mantendo $a = 0$, $c = 1$ e $d = 0$. A função obtida foi: $f(x) = -4 \sin(x)$ (ver figuras: 40, 41 e 42, respectivamente).

Perguntas feitas aos alunos da turma e suas respostas, neste passo:

1. Qual transformação ocorreu nos gráficos das figuras: 40, 41 e 42?

Respostas dos alunos: Os 20 alunos da turma, afirmaram que ocorreu deformação vertical.

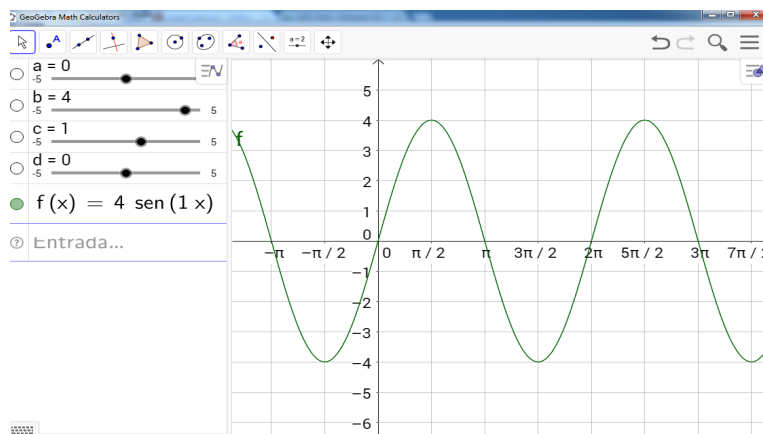


Figura 40 – Gráfico da função $f(x) = 4 \text{ sen}(x)$

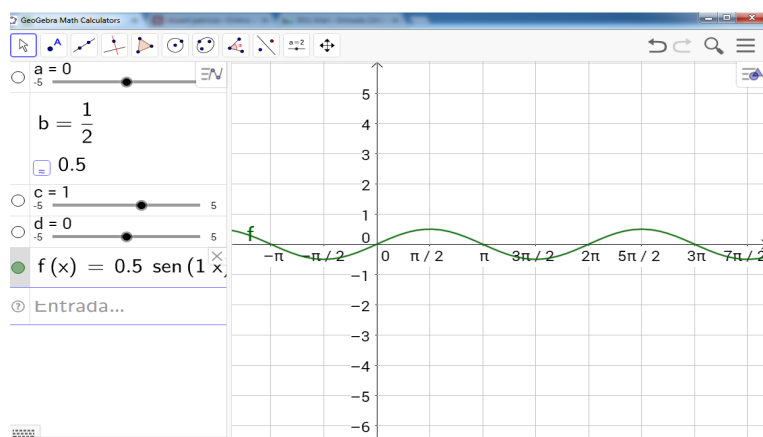


Figura 41 – Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{2} \text{ sen}(x)$

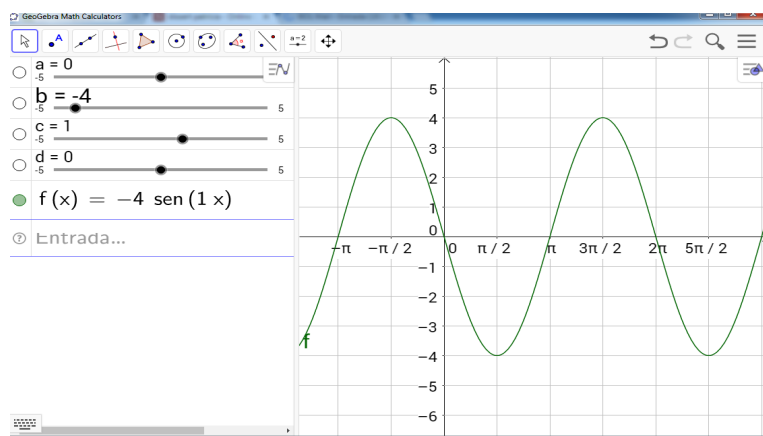


Figura 42 – Gráfico da função $f(x) = -4 \text{ sen}(x)$

2. Qual parâmetro alterou os gráficos das figuras: 40, 41 e 42 em relação a figura 35?

Respostas dos alunos: Dos 20 alunos da turma, 18 alunos afirmaram que o parâmetro que alterou os gráficos foi o b e, 2 afirmaram que foi o c .

3. O conjunto Imagem das funções foi alterado nas figuras 40, 41 e 42 em relação ao da figura 35?

Resposta dos alunos: Todos os 20 alunos afirmaram que o conjunto imagem das funções sofreu alteração.

Conclusões construídas com o aluno:

Nos gráficos das figuras 40, 41 e 42, observou-se que em relação a função $f(x) = \text{sen}(x)$ ao ser alterado apenas o valor do parâmetro b , a função sofreu deformação vertical e, quando o $b > 0$, a função teve aumentada sua amplitude e o conjunto imagem teve o seu diâmetro aumentado b vezes e, quando $0 < b < 1$, a deformação vertical diminuiu sua amplitude. Quando, $b < 0$ além dessa deformação, o gráfico da função sofreu reflexão em relação a função da figura 35. Ou seja, a alteração do parâmetro de b , alterou a amplitude da função e, conseqüentemente, o conjunto imagem que passou de $[-1; 1]$ para $[-b; b]$. Não foi observada modificação do domínio e do período das funções.

Passo 6: Deslize o controle c até o valor $\frac{1}{2}$, manteve $a = 0$, $b = 1$ e $d = 0$. A função obtida foi $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$. Em seguida, deslize o controle c até o valor 4, mantendo $a = 0$ e $d = 0$. A função obtida foi: $f(x) = \text{sen}(4x)$. Por último, deslize o controle c até o valor de -1 , mantendo $a = 0$, $b = 1$ e $d = 0$. A função obtida foi: $f(x) = \text{sen}(-x)$ (ver figuras: 43, 44 e 45, respectivamente).

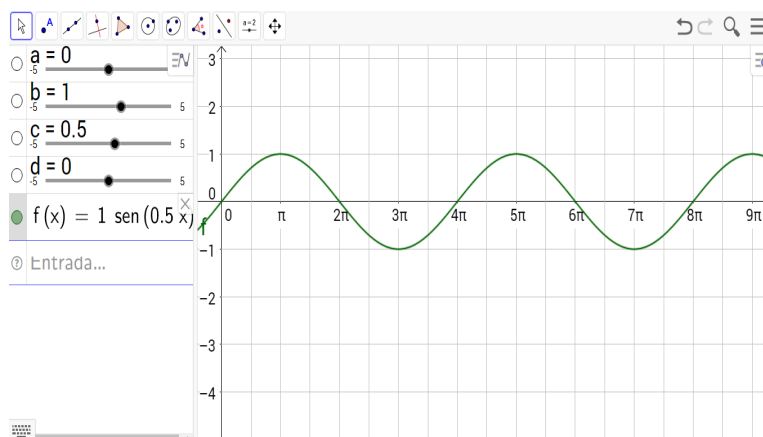
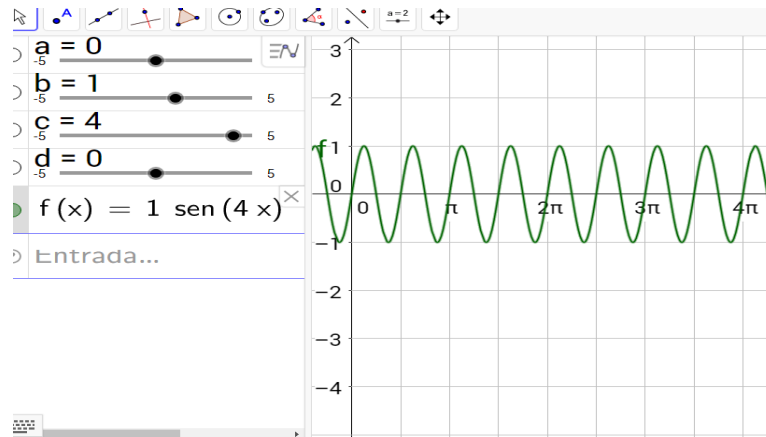
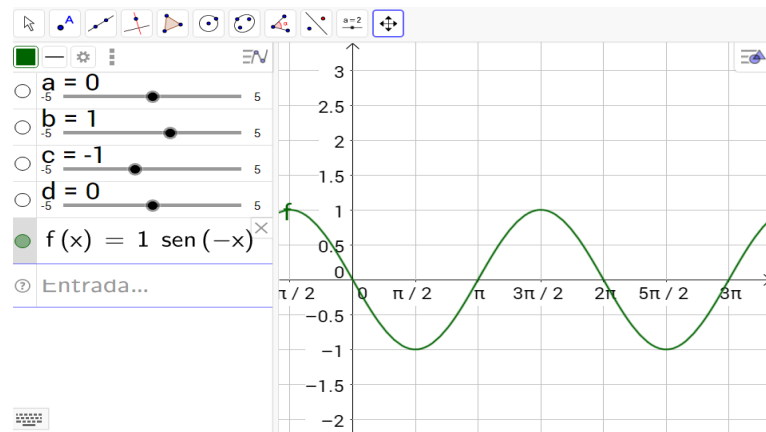


Figura 43 – Gráfico da função $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

Perguntas feitas aos alunos da turma e suas respostas, neste passo:

1. Qual transformação os gráficos das figuras: 43, 44 e 45, sofreram em relação ao da figura 35?

Figura 44 – Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(4x)$ Figura 45 – Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(-x)$

Respostas dos alunos: Dos 20 alunos da turma, 19 alunos responderam que a transformação foi a deformação horizontal e, 1 aluno respondeu que tinha sido deformação vertical.

- Qual parâmetro alterou os gráficos das figuras 43, 44 e 45, em relação ao gráfico da figura 35?

Resposta dos alunos: Todos os 20 alunos da turma responderam que o parâmetro foi o c .

- Os períodos das funções nas figuras:43, 44 e 45 sofreram alterações em relação à função apresentada na figura 35?

Resposta dos alunos: Todos os 20 alunos da turma responderam que os períodos sofreram alterações em relação ao gráfico da 35.

- O conjunto Imagem das funções das figuras 43, 44 e 35, sofreu alteração em relação ao gráfico da figura 35?

Resposta dos alunos: Todos os 20 alunos da turma, responderam que o conjunto imagem não foi alterado em relação ao gráfico da figura 35.

Conclusões construídas com o aluno:

Nos gráficos das figuras 43, 44 e 45, observou-se que em relação a função $f(x) = \text{sen}(x)$, ao ser alterado o valor do coeficiente c , a função sofreu deformação horizontal. Quando o $c > 1$ a deformação horizontal diminuiu o período da função. Mas, manteve a imagem e domínio. Quando $0 < c < 1$, a deformação horizontal, aumentou o período e manteve inalterados o domínio e a imagem da função. Ou seja, o período da função foi dividido pelo valor de c . E quando $c < 0$ além dessa deformação o gráfico sofreu reflexão em relação a origem. Isso ocorreu pois a função seno é ímpar, ou seja, $f(-x) = -f(x)$.

Passo 7: Deslize o controle d até o valor de $\frac{\pi}{2}$, mantendo $a = 0$, $b = 1$ e $c = 1$. A função obtida foi: $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Em seguida, deslize o controle d até o valor de $-\frac{\pi}{2}$, mantendo $a = 0$, $b = 1$ e $c = 1$. A função obtida foi: $f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (ver figuras 46 e 47, respectivamente).

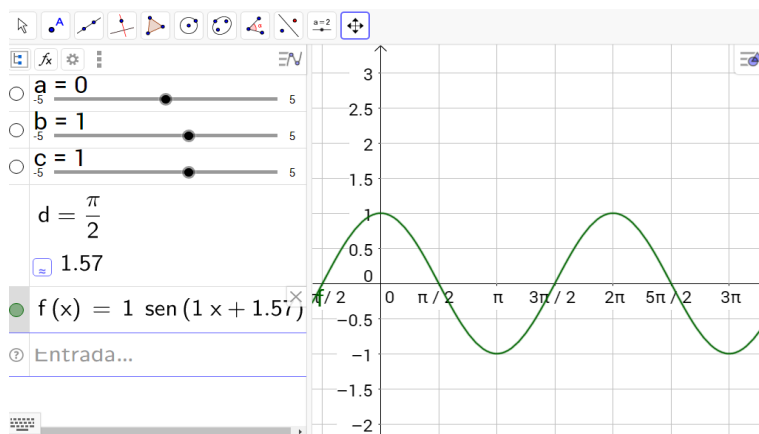


Figura 46 – Gráfico da função $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Perguntas feitas aos alunos da turma e suas respostas, neste passo:

1. Qual transformação ocorreu nos gráficos das figuras: 46 e 47 em relação ao da figura 35?

Resposta dos alunos: Os 20 alunos da turma responderam que foi a translação horizontal.

2. Qual parâmetro alterou os gráficos das figuras 46 e 47 em relação ao da figura 35?

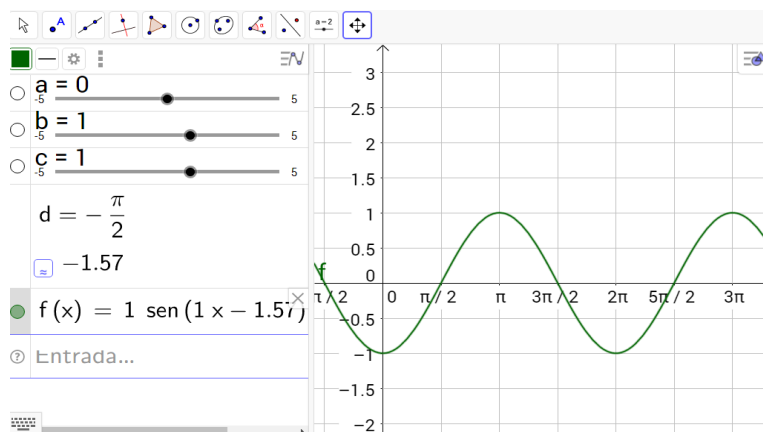


Figura 47 – Gráfico da função $f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Resposta dos alunos: Os 20 alunos da turma responderam que foi o parâmetro d .

3. O período das funções foi alterado das figuras: 46 e 47 em relação ao da figura 35?

Resposta dos alunos: Os 20 alunos da turma responderam que sim.

Conclusões construídas com o aluno:

Nos gráficos das figuras 46 e 47, observou-se que a função sofreu uma translação horizontal “para esquerda e “para direita, respectivamente. A translação horizontal não alterou o domínio, a imagem, a amplitude e o período.

2ª fase:

- Duração: 2 aulas
- Nesta fase a construção dos gráficos foi em relação a função $g(x) = a + b \cos(cx + d)$. A ideia foi fazer uma comparação com a função cosseno $g(x) = \cos(x)$ com a modificação de cada parâmetro e foram seguidos cinco passos para subsidiar a resposta da questão norteadora.

Passo 1: Digite no campo de entrada a função $g(x) = \cos(x)$ (ver Figura 48).

Passo 2: Digitou na caixa de entrada a função $g(x) = a + b \cos(cx + d)$, com a , b , c e d reais, sendo $b \neq 0$ e $c \neq 0$. Em seguida apertou a tecla “Enter”. Surgiu, na tela “criar controles deslizantes para: a , b , c e d ” e selecionou esta opção (ver Figura 49).

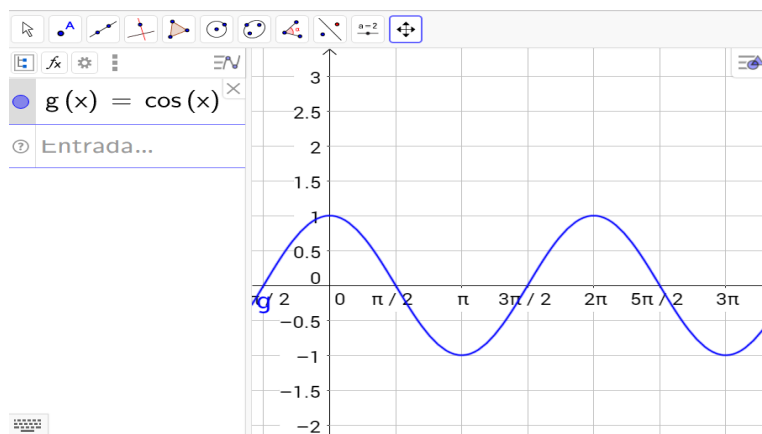


Figura 48 – Gráfico da função $g(x) = \cos(x)$

Por padrão, os valores de a , b , c e d são iguais a 1, ver Figura 50.

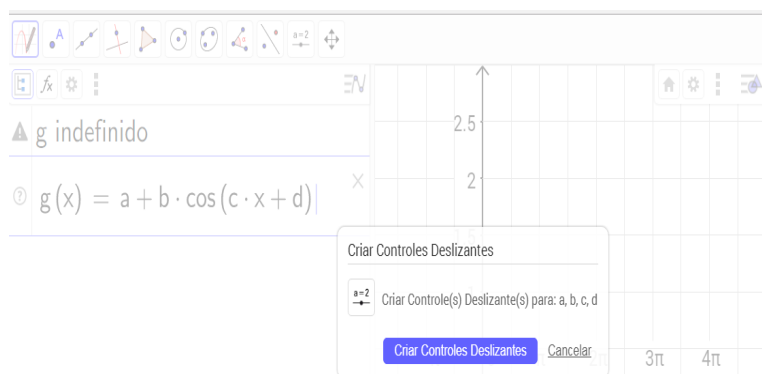


Figura 49 – Controles deslizantes

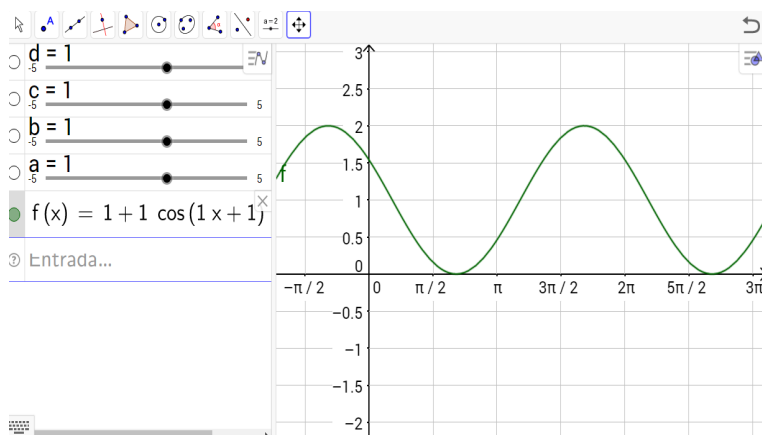


Figura 50 – Controles deslizantes iguais a 1

Passo 3: Deslize o controle a até o valor de 2, mantendo $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$. A função obtida foi $f(x) = 2 + \cos(x)$. Em seguida, deslizou o controle a até o -2 ,

mantendo $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$. A função obtida foi $f(x) = -2 + \cos(x)$ (ver figuras 51 e 52, respectivamente).

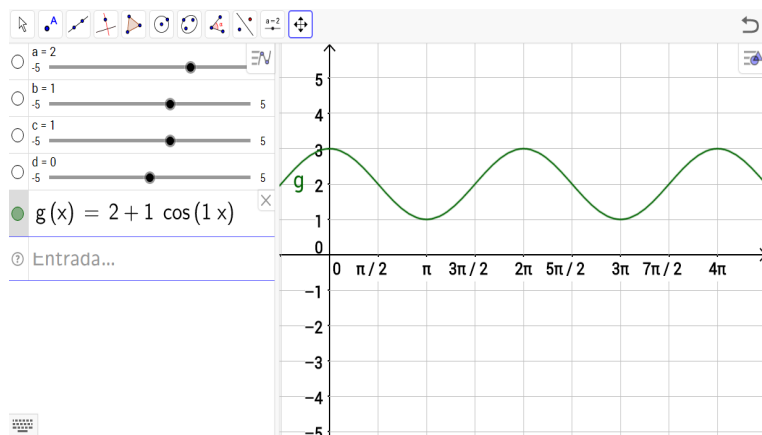


Figura 51 – Gráfico da função $g(x) = 2 + \cos(x)$

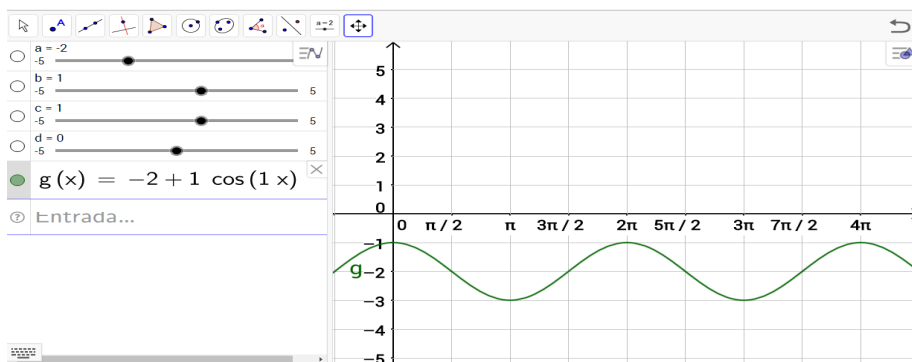


Figura 52 – Gráfico da função $g(x) = -2 + \cos(x)$

Perguntas feitas aos alunos da turma e suas respostas, neste passo:

1. Qual transformação ocorreu nas Figuras 51 e 52 em relação a Figura 48?

Resposta dos alunos: Os 20 alunos da turma responderam que foi Translação vertical.

2. Qual parâmetro alterou os gráficos das figuras 51 e 52 em relação a Figura 48?

Resposta dos alunos: Os 20 alunos da turma responderam que foi o parâmetro a .

3. Os períodos das funções das Figuras 51 e 52 sofreram alterações em relação a Figura 48?

Resposta dos alunos: Os 20 alunos responderam não.

4. O conjunto imagem das funções nas Figuras 51 e 52 sofreu alteração em relação a Figura 48?

Resposta dos alunos: os 20 alunos da turma responderam sim.

Conclusões construídas com o aluno:

Nos gráficos das figuras 51 e 52, observou-se que em relação a função da figura 48, ao ser alterado o valor do parâmetro a , a função sofreu translação vertical. Quando o $a > 0$ a função sofreu uma translação vertical “para cima” uma quantidade de unidades equivalente a a . Quando $a < 0$ a função sofreu uma translação vertical “para baixo” a quantidade de unidades equivalente a a . Ou seja, o período, o domínio e amplitude da função não foram alterados, mas a imagem foi alterada a quantidade de unidades equivalente a a , ou seja, o conjunto imagem da função passou de $[-1, 1]$ para $[a - 1; a + 1]$.

Passo 4: Deslize o controle b até 3, mantendo $a = 0$, $c = 1$ e $d = 0$. A função foi $g(x) = 3 \cos(x)$. Em seguida, deslize o controle b até $\frac{1}{2}$, mantendo $a = 0$, $c = 1$ e $d = 0$. A função foi $g(x) = \frac{1}{2} \cos(x)$. Por último, deslize o controle b até -3 , mantendo $a = 0$, $c = 1$ e $d = 0$. A função foi $g(x) = -3 \cos(x)$ (ver figuras 53, 54 e 55, respectivamente).

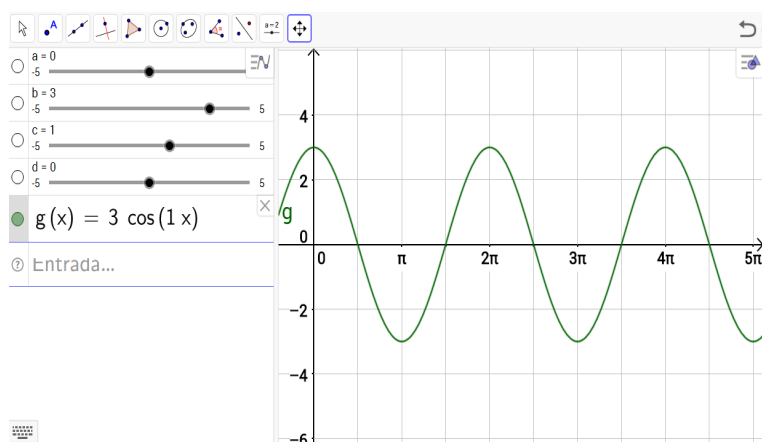


Figura 53 – Gráfico da função $g(x) = 3 \cos(x)$

Perguntas feitas aos alunos da turma e suas respostas, neste passo:

1. Qual transformação ocorreu nas Figuras 53, 54 e 55 em relação a figura 48?

Resposta dos alunos: Os 20 alunos da turma responderam que foi deformação vertical.

2. Qual parâmetro alterou os gráficos das figuras 53, 54 e 55 em relação a Figura 48?

Resposta dos alunos: Os 20 responderam que foi o parâmetro b .

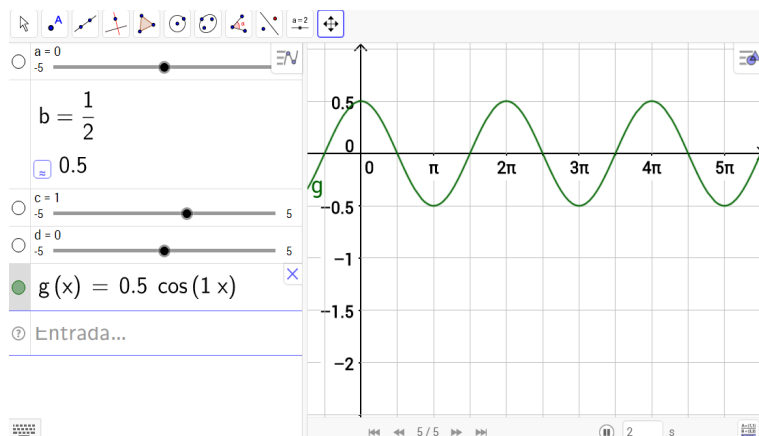


Figura 54 – Gráfico da função $g(x) = \frac{1}{2} \cos(x)$

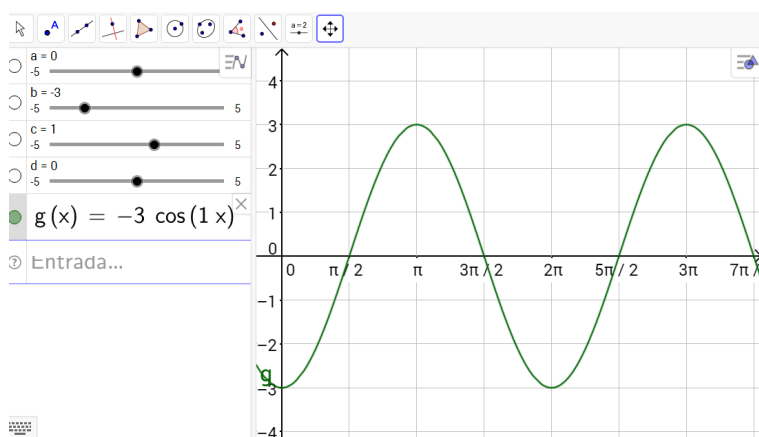


Figura 55 – Gráfico da função $g(x) = -3 \cos(x)$

3. Os períodos das funções das Figuras 53, 54 e 55 sofreram alterações em relação a função da figura 48?

Resposta dos alunos: Os 20 alunos da turma responderam não.

4. O conjunto imagem das funções das figuras 53, 54 e 55 sofreu alteração em relação a figura 48?

Resposta dos alunos: Os 20 alunos da turma responderam Sim.

Conclusões construídas com o aluno:

Observou-se que em relação a função $g(x) = \cos(x)$, ao ser alterado o valor do parâmetro b , a função sofreu deformação vertical. Quando $b > 0$ a função sofreu uma deformação vertical, aumentou a sua amplitude a quantidade de vezes do valor de b e quando $0 < b < 1$, a deformação vertical diminuiu sua amplitude. Quando $b < 0$ além dessa deformação o gráfico sofreu reflexão em relação ao eixo O_x . Ver Figuras 53, 54 e 55, respectivamente.

Passo 5: Deslize o controle c até o valor de $\frac{1}{2}$, mantendo $a = 0$, $b = 1$ e $d = 0$. A função foi $g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$. Em seguida, deslize o controle c até 3, mantendo $a = 0$, $b = 0$ e $d = 0$. A função foi $g(x) = \cos(3x)$. Por último, o aluno deslizou o controle c até -1 , mantendo $a = 0$, $b = 1$ e $d = 0$. A função obtida foi $g(x) = \cos(-x)$ (ver figuras 56, 57 e 58, respectivamente).

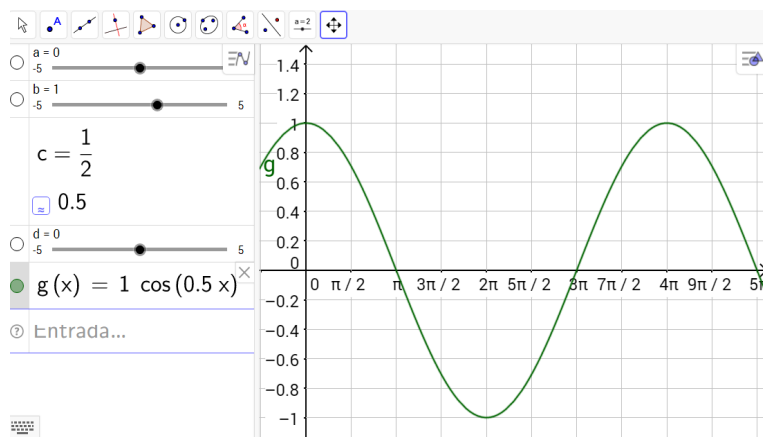


Figura 56 – Gráfico da função $g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

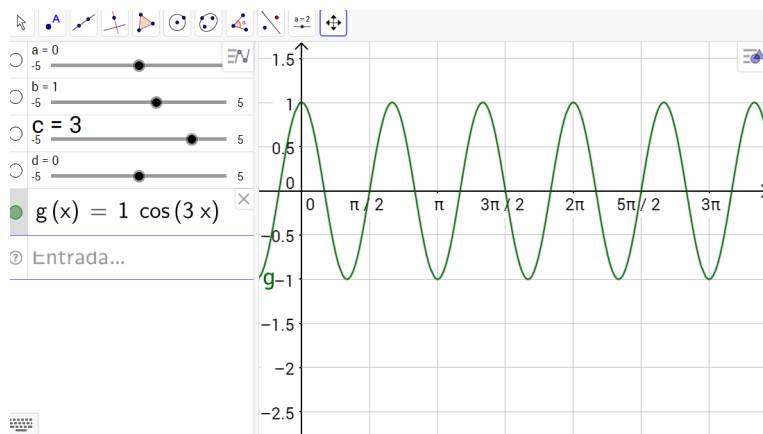


Figura 57 – Gráfico da função $g(x) = \cos(3x)$

Perguntas feitas aos alunos da turma e suas respostas, neste passo:

1. Qual transformação ocorreu nas figuras 56, 57 e 58 em relação a figura 48?

Resposta dos alunos: Os 20 alunos da turma responderam que foi deformação horizontal.

2. Qual parâmetro alterou os gráficos das figuras 56, 57 e 58 em relação a figura 48?

Resposta dos alunos: os 20 alunos responderam que foi o parâmetro c .

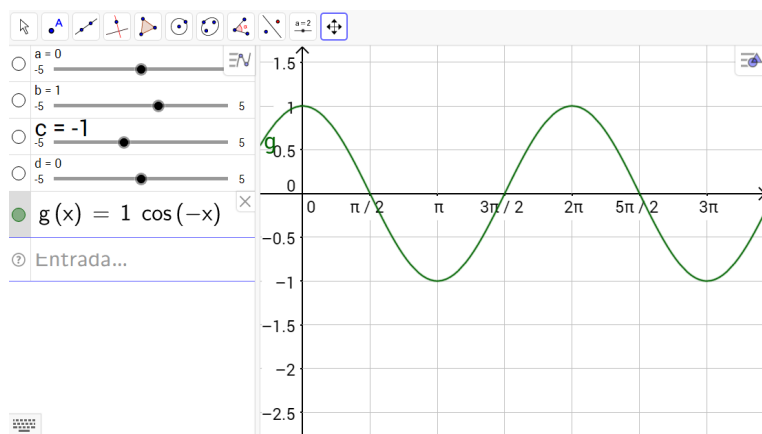


Figura 58 – Gráfico da função $g(x) = \cos(-x)$

3. O período das funções foi alterado das figuras 56, 57 e 58 em relação ao da figura 48?

Resposta dos alunos: Os 20 alunos da turma responderam sim.

4. O conjunto Imagem das funções das figuras 56, 57 e 58 sofreu alteração em relação a figura 48?

Resposta dos alunos: Os 20 da turma responderam que não.

Conclusões construídas com o aluno:

Observou-se que em relação a função gráfico da figura 48, ao ser alterado o valor do coeficiente c , a função sofreu deformação horizontal. Quando $c > 1$ a deformação horizontal diminuiu seu período. Mas, manteve a imagem e domínio. Quando $0 < c < 1$, a deformação horizontal, aumentou o período e manteve inalterados o domínio e a imagem da função. Ou seja, o período da função ficou dividido pelo valor de c . Quando, $c < 0$ a função cosseno por ser uma função par, não sofreu reflexão. Porque $\cos(x) = \cos(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ver as figuras 56, 57 e 58, respectivamente.

Passo 6: Deslize o controle d até o valor de $\frac{\pi}{2}$, mantendo $a = 0$, $b = 1$ e $c = 1$. A função obtida foi $g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Em seguida, deslize o controle d até o valor de $-\frac{\pi}{2}$, mantendo $a = 0$, $b = 1$ e $c = 1$. A função obtida foi: $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (ver figuras 59 e 60, respectivamente).

Perguntas feitas aos alunos da turma e suas respostas, neste passo:

1. Qual transformação ocorreu no gráfico das Figuras: 59 e 60 em relação a figura 48?

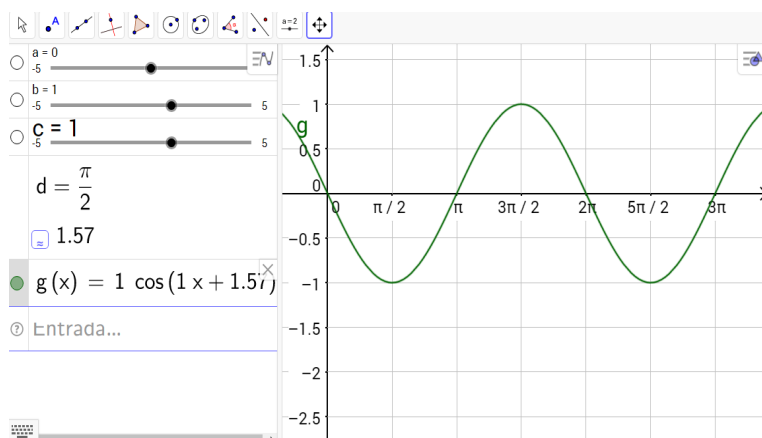


Figura 59 – Gráfico da função $g(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

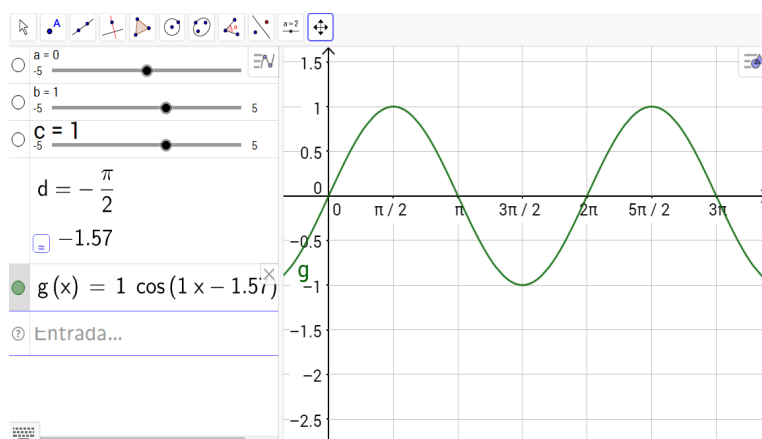


Figura 60 – Gráfico da função $g(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

Resposta dos alunos: Os 20 alunos da turma responderam que foi translação horizontal.

2. Qual parâmetro alterou os gráficos das Figuras: 59 e 60 em relação a figura 48?

Resposta dos alunos: Os 20 alunos da turma responderam que foi o parâmetro d .

3. O período das funções foi alterado das figuras 59 e 60 em relação ao da figura 48?

Resposta dos alunos: Os 20 alunos da turma responderam que Não.

Conclusões construídas com o aluno:

Nos gráficos das figuras 59 e 60, observou-se que em relação a função da figura 48, a função sofreu uma translação horizontal “para esquerda” e “para direita”

respectivamente. A translação horizontal não alterou o domínio, a imagem, a amplitude e o período. A função da $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ coincidiu com a função $f(x) = \sin(x)$.

Solução do problema norteador 1 usando o software GeoGebra:

Resposta algébrica

O aluno deve identificar o parâmetro c da função $g(x) = a + b \cos(cx + d)$ e comparar a função do problema e identificar o parâmetro $\frac{\pi}{12}$ que permite calcular o tempo que a temperatura será mínima. O cálculo do tempo será $t = 24h$. Logo, a temperatura máxima será em $12h$. Assim, $F(12) = 25^\circ C$.

Resposta: A temperatura será máxima às $12h$ e no valor de $25^\circ C$.

Resposta Gráfica

Usando o GeoGebra a visualização da resposta é rápida. Pois o ponto sobre a função $F(t)$ onde a função tem ponto de máximo. Observa-se a resposta na Figura 61.

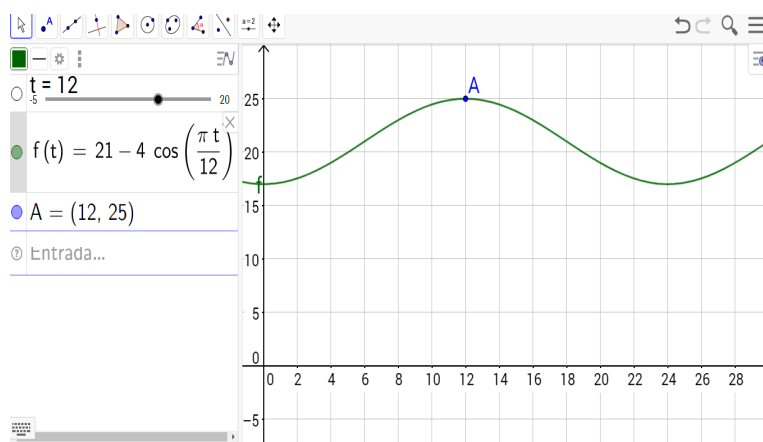


Figura 61 – Gráfico da função $F(t)$ com o ponto A

Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivo utilizar o software GeoGebra para estudar o movimento de gráfico de funções, aplicados às funções seno e cosseno e realizar uma atividade didática, colocando o aluno no papel de sujeito ativo, investigador e explorador. O software GeoGebra foi escolhido por ser gratuito e simples de manipular.

Em seus estudos, Corradi afirma que:

Foi possível perceber que há um grande número de docentes que conduzem suas aulas apresentando definições seguidas de listas de exercícios, treinando os alunos para reprodução do conteúdo, muitas vezes apenas decorado e não compreendido. Ainda conforme Fiorentini (1995), Miorim (1998), D. Ambrósio (1993), essa prática não é propícia à aprendizagem por não possibilitar a compreensão e a construção do conhecimento pelo aluno. Penso que os professores precisam de atividades de ensino e aprendizagem e de uma postura diferenciada para trabalhar os conteúdos de Trigonometria, de maneira significativa em sala de aula em que os estudantes passam a ser os protagonistas e o professor o orientador/mediador. (CORRADI, 2013).

O recurso tecnológico foi pensado a partir da reflexão e planejamento sobre a utilização do mesmo na abordagem do estudo de funções seno e cosseno, em especial para o 1º ano do Ensino Médio.

O uso da tecnologia na abordagem dos conteúdos matemáticos não substitui o livro didático. O livro didático ainda é um recurso pedagógico de ensino de grande importância no processo de ensino aprendizagem. Mais ainda, quando se trata do ensino de Matemática no cenário da escola pública no Brasil.

Por entender que ensinar é dar condições ao discente para que ele se aproprie do conhecimento e consiga, a partir daí, abstrair e generalizar, foi feito com esse propósito as atividades da sequência didática com uso do GeoGebra, uma ferramenta motivadora e disseminadora do conhecimento a cerca do comportamento gráfico, identificando e manipulando os parâmetros da função.

A sequência didática seguiu um passo a passo, distribuída em duas fases: a primeira, com duração de 03 aulas, foi iniciada com a apresentação de um problema norteador que foi resolvido após o desenvolvimento da segunda fase. Em seguida, o aluno com uso do software GeoGebra, construiu os gráficos da função $f(x) = a + b\sin(cx + d)$, visualizando e identificando os movimentos de translação, reflexão e deformação a partir da alteração dos parâmetros da função, usando a ferramenta controle deslizante do GeoGebra. A segunda fase, com duração de 02 aulas, o aluno construiu, com uso da ferramenta controle deslizante, os gráficos da função $g(x) = a + b\cos(cx + d)$. Visualizando e identificando os movimentos de translação, reflexão e deformação a partir da alteração dos parâmetros da função. Nas duas fases, o aluno respondeu algumas perguntas sobre o comportamento dos gráficos e as respostas foram apresentadas através de gráficos de Pizza 3D.

O desenvolvimento da atividade não apresentou dificuldades para a professora e o aluno. Entretanto, a logística de execução não foi muito satisfatória. O laboratório de informática possui apenas oito computadores para uma turma de vinte alunos. Assim, para realização da atividade foi necessário a formação de quatro duplas e quatro trios de alunos nos computadores.

Depois da execução de todas as fases descritas na sequência didática, o aluno demonstrou que o estudo gráfico das funções seno e cosseno está compreendido e devidamente interpretado. A partir do uso do software GeoGebra, a construção dos gráficos de funções que envolvem as funções seno e cosseno ficou mais fácil e essa ferramenta possibilitou do mesmo ter adquirido o conhecimento de forma diferenciada, interativa e construtiva.

Os esboços dos gráficos feitos com uso do GeoGebra permitiram visualizar e sistematizar os dados das funções e compreender como os movimentos gráficos ocorreram. A partir do uso do software e da análise dos significados dos parâmetros, foi possível ocorrer um diálogo entre a professora e o aluno sobre o conhecimento abordado.

Verificou-se, com a aplicação dessa atividade, que o software GeoGebra foi um instrumento instigador do pensamento, no modo de despertar o interesse do aluno

no conteúdo abordado. A aprendizagem decorreu através de um trabalho diferente do habitual e, com a mediação do professor, inserir, no processo pedagógico, os conhecimentos que valorizaram e dinamizaram a abordagem do conteúdo.

Realizando uma pesquisa nas artes, foi possível notar que existe a preocupação com o estudo dos movimentos gráficos envolvendo as funções seno e cosseno com o uso do GeoGebra. Mas, não encontrei na busca um só trabalho que resolvesse situações problema com o uso do GeoGebra, reconhecendo a importância e excelência que o mesmo tem na visualização da resposta de um problema em questão. Em (SALAZAR *et al.*, 2015), traz alguns exemplos de situações problema, entretanto não resolve um usando o software GeoGebra. Em (OKADA, 2013), é feita uma abordagem dos gráficos das funções, entretanto não é feita uma conexão com a solução de situações problema com o uso do software e o gráfico dessas funções.

Diante do resultado positivo com o uso do software GeoGebra, em sala de aula, e entender da importância das novas tecnologias para educação. Despertou-me, um interesse de estudar mais sobre as possibilidades que o software GeoGebra oferece no estudo dos movimentos das funções cossecante, tangente e secante.

O interesse de incorporar as ferramentas tecnológicas no processo de ensino. É algo fundamental, por isso, a importância da formação continuada dos docentes. Eu mesma, não conhecia o software GeoGebra. Já tinha ouvido falar, mas nunca tinha manuseado. Porém, quando fui convidada pelo meu orientador a utilizá-lo como ferramenta pedagógica para o estudo das funções seno e cosseno. Não hesitei. Fiz uma busca na internet e percebi, que esse software é realmente de fácil manuseio. A experiência foi satisfatória tanto para os alunos que demonstraram total interesse na aprendizagem do conteúdo abordado, como a professora que construiu uma linguagem de entendimento com seu aluno, com ajuda do software.

O estudo sobre o tema não está exaurido. Espera-se que propostas similares futuras aprofundem o tema abordado. Surgiu o interesse a partir desse trabalho, em desenvolver conhecimento sobre os movimentos gráficos com uso do software GeoGebra, corroborando em atrelar o recurso tecnológico ao conhecimento pedagógico.

Referências

- BITTAR, M. A escolha do software educacional e a proposta didática do professor: estudo de alguns exemplos em matemática. **Educação Matemática, Tecnologia e Formação de Professores: algumas reflexões. Campo Mourão-PR: Editora de Fecilcam**, p. 215–243, 2010.
- CORRADI, D. K. S. Investigações matemáticas mediadas pelo pensamento reflexivo no ensino e aprendizagem das funções seno e cosseno: uma experiência com alunos do segundo ano do ensino médio. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, 2013.
- LUCENA, M. A gente é uma pesquisa: desenvolvimento cooperativo da escrita apoiado pelo computador. **Rio de Janeiro**, 1992.
- OKADA, S. Explorando gráficos das funções elementares por meio do software geogebra. 2013.
- RICHIT, A.; MALTEMPI, M. V. Desafios e possibilidades do trabalho com projetos e com tecnologias na licenciatura em matemática challenges and opportunities of working with projects and technologies with a degree in mathematics p.(15-42). **Zetetiké:Revista de Educação Matemática**, v. 18, n. 33, 2010.
- ROSA, S. S. d. Construtivismo e mudança. 2000.
- SALAZAR, D. M. *et al.* Geogebra e o estudo das funções trigonométricas no ensino médio. Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015.
- TECNOLÓGICA, B. M. da Educação. Secretaria de Educação Média e. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio**. [S.l.]: MEC, 1999.
- VALENTE, J. A. Diferentes uso do computador na educação. **Computadores e conhecimento: repensando a educação**, v. 2, 1993.
- ZABALA, A. As relações interativas em sala de aula: o papel dos professores e dos alunos. **A prática educativa: como ensinar. Porto Alegre: Editora Artes Médicas**, 1998.

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas / Colegiado do Programa de Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional

Rua Rui Barbosa, 710, Centro, Campus Universitário de Cruz das Almas, Cruz
das Almas-BA

CEP: 44380-000

Telefone: (75) 3621-4314

<<http://www.ufrb.edu.br/profmat/>>