

Álgebra linear: secções cônicas e aplicações

Robson Edvaldo da Silva Pereira

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Robson Edvaldo da Silva Pereira

Álgebra linear: secções cônicas e aplicações

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Rosana Retsos Signorelli Vargas

USP – São Carlos
Agosto de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P634á Pereira, Robson Edvaldo da Silva
Álgebra linear: secções cônicas e aplicações /
Robson Edvaldo da Silva Pereira; orientadora Rosana
Retsos Signorelli Vargas. - São Carlos - SP, 2017.
87 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Álgebra linear . 2. Cônicas. 3. Teorema
espectral . 4. Transformações lineares . 5.
Aplicações. I. Vargas, Rosana Retsos Signorelli,
orient. II. Título.

Robson Edvaldo da Silva Pereira

Linear algebra: conical sections and applications

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Rosana Retsos Signorelli Vargas

USP – São Carlos
August 2017

Dedico a Deus o desenvolvimento deste trabalho, pois sem Ele não teria força e paciência para escrevê-lo, com o grande número de aulas que tive que lecionar ao longo do curso. Também a minha esposa e filha, por serem inspiração nos momentos de desânimo e cansaço, a minha esposa por cuidar dos outros afazeres na medida em que estava comprometido com esta dissertação. Dedico também a minha família e aos colegas de sala que fizeram parte deste sonho.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao Senhor que reina para todo o sempre em nome de Jesus, pois Ele havia falado que estava comigo neste projeto de vida, a minha esposa que foi companheira, mãe, irmã e responsável pelo lar, já que o tempo que tinha livre em casa foi dedicado aos estudos das disciplinas e trabalhos. Agradecer aos colegas de classe pelos momentos compartilhados, emoções, alegrias e tristezas, ao Humberto por me ajudar a formatar a dissertação em latex, onde tive grandes dificuldades para aprender como escrever o texto. A minha orientadora Rosana Retsos Signorelli Vargas pelos encontros, pelas reuniões via Skype, pela sua paciência, flexibilidade e palavras de ânimo. Por fim, ao IMPA, SBM e a USP, pelo desenvolvimento do programa e por se enquadrar no conteúdo matemático que desejei estudar, a CAPES pelo auxílio financeiro.

RESUMO

PEREIRA, ROBSON EDVALDO DA SILVA. **Álgebra linear: secções cônicas e aplicações**. 2017. 87 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

Neste trabalho desenvolvemos o estudo da álgebra linear, secções cônicas e aplicações. Apresentamos os conceitos mais importantes da álgebra linear, estudando os espaços vetoriais, subespaços vetoriais, matriz de mudança de base, transformações lineares e produto interno. O principal resultado do trabalho é o teorema espectral que fornece ferramentas para se estudar as secções cônicas não elementares, ou seja, aquelas nas quais uma parábola, elipse ou hipérbole são apresentadas com seus eixos não paralelos aos eixos coordenados do plano cartesiano. Uma vez de posse deste teorema é mostrado um processo prático no qual transformamos uma equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g = 0$ na equação $k_1(x')^2 + k_2(y')^2 + (dx_1 + ey_1)x' + (dx_2 + ey_2)y' + g = 0$ sem o termo misto xy , onde após a eliminação deste, podemos deduzir a equação da cônica identificando assim esta curva. Apresentamos exemplos de cônicas com eixos paralelos e não paralelos aos coordenados do plano cartesiano e utilizamos o software geogebra para visualização. Também discutimos algumas aplicações das cônicas como trajetória de corpos celestes (planeta Terra e um cometa), princípio de reflexão da parábola mostrando o porquê das antenas e dos captadores de ondas sonoras serem parabólicos. Demonstramos um teorema que denominei de identificador de uma curva cônica pois com ele é possível classificar a cônica sem realizar o processo prático, apenas para isso identificamos através da equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g = 0$, quais os valores de a, b e c e feito isto calculamos o “discriminante” $b^2 - 4ac$, analisamos os sinais e a nulidade, ou seja, se é maior que zero, menor que zero ou igual a zero, assim é possível classificar a cônica.

Palavras-chave: Álgebra linear , Cônicas, Teorema espectral , Transformações lineares , Aplicações.

ABSTRACT

PEREIRA, ROBSON EDVALDO DA SILVA. **Linear algebra: conical sections and applications**. 2017. 87 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

The paper develops the study of linear algebra, conic sections and applications. I present the most important concepts of linear algebra, studying vector spaces, vector subspaces, base change matrix, linear transformations, internal product. The main result of the work is the spectral theorem, which provides tools to study the non-elementary conic sections, that is, those in which a parabola, ellipse or hyperbola are presented with their axes not parallel to the cartesian plane's coordinate axes. Using this theorem we show a practical process in which we transform an equation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g = 0$ into the equation $k_1(x')^2 + k_2(y')^2 + (dx_1 + ey_1)x' + (dx_2 + ey_2)y' + g = 0$ without the mixed term xy , where after its elimination we can deduce the conic equation thus identifying the curve we are looking for. I present examples of conic with parallel and non-parallel axes to the coordinates of the Cartesian plane and use the geogebra software for visualization. I discuss some applications of the conic as a trajectory of celestial bodies (planet Earth and a comet), principle of reflection of parabola showing why the antennas and sound wave pickups are parabolics. I demonstrate a theorem that I named the identifier of a conic curve, with it it is possible to classify the conic without realizing the practical process only for this. I identify through the equation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g = 0$, what are the values of a, b , and c and, with this done, I compute the discriminant $b^2 - 4ac$ and analyze the signs and the nullity, that is, if it is greater than zero, less than zero or equal to zero, therefore is possible to classify the conic.

Keywords: Linear algebra , Conical , Espectral theorem, Linear transformations , Applications.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Intersecções cônicas	17
Figura 2 – vetor v e vetor $u + w$	29
Figura 3 – projeção de v na direção de u	43
Figura 4 – Secções cônicas em cones de duas folhas	51
Figura 5 – Elipse de centro O	52
Figura 6 – Ponto P pertencente a elipse	53
Figura 7 – Hipérbole de centro O	55
Figura 8 – Ponto P pertencente a hipérbole	55
Figura 9 – Parábola	57
Figura 10 – Elipse com eixos não paralelos aos eixos coordenados	60
Figura 11 – mudança de base	61
Figura 12 – Parábola de foco F e diretiz d	62
Figura 13 – Construção da parábola	63
Figura 14 – A antena ideal converge todos os sinais recebidos a um ponto fixo	63
Figura 15 – Primeira propriedade da parábola	64
Figura 16 – Segunda propriedade da parábola	65
Figura 17 – Segunda propriedade da parábola: reflexão	65
Figura 18 – Antena parabólica-telescópio de rádio	66
Figura 19 – Farol de carro	66
Figura 20 – Planeta Terra nos pontos afélio e periélio	67
Figura 21 – Tabela com as excentricidades dos planetas	68
Figura 22 – Órbitas de alguns planetas	69
Figura 23 – Órbita elíptica dos planetas e do planeta X(O "planeta X"é um suposto corpo celeste do sistema solar cuja órbita estaria além da de Netuno)	69
Figura 24 – estrutura de um átomo: órbita dos elétrons elíptica	70
Figura 25 – Trajetória hiperbólica do cometa C/2102 S1 ISON	71
Figura 26 – Torre de refrigeração de uma usina nuclear	71
Figura 27 – Elipse com centro em $(0,0)$	72
Figura 28 – Hipérbole com centro na origem	73
Figura 29 – Parábola com centro na origem	74
Figura 30 – Elipse com centro no ponto $(5,5)$	75
Figura 31 – Hipérbole com centro no ponto $(4,4)$	76
Figura 32 – Elipse rotacionada	78

Figura 33 – Hipérbole rotacionada	79
Figura 34 – Retas paralelas	81
Figura 35 – Hipérbole rotacionada	83
Figura 36 – Parábola rotacionada	84
Figura 37 – reta bissetriz dos quadrantes pares	84

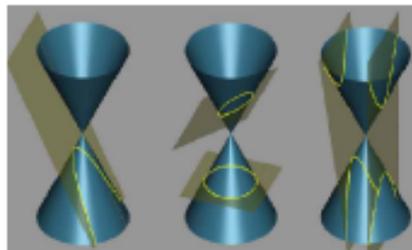
SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	TÓPICOS DE ÁLGEBRA LINEAR	19
2.1	Matrizes	19
2.1.1	<i>Operações com matrizes</i>	21
2.2	Sistemas lineares	24
2.3	Espaços vetoriais	28
2.3.1	<i>Subespaços vetoriais</i>	31
2.3.2	<i>Base de um espaço vetorial.</i>	33
2.4	Transformações lineares	35
2.5	Produto interno	40
3	CÔNICAS	51
3.1	Aplicações e secções cônicas.	61
3.1.1	<i>Algumas curiosidades</i>	61
3.1.2	<i>Identificando cônicas através de suas equações</i>	72
	REFERÊNCIAS	87

INTRODUÇÃO

Os historiadores atribuem ao matemático Menaecmus (380-320 A.C. aproximadamente), discípulo de Eudócio na Academia de Platão, a descoberta das curvas cônicas ou secções cônicas quando trabalhava na resolução do problema da duplicação do cubo. Foi ele o primeiro a mostrar que as elipses, as parábolas e as hipérbolas são obtidas como secções de um cone quando cortado por planos não paralelos à sua base conforme figura [1].

Figura 1 – Intersecções cônicas



Fonte – <http://profleonardomatematica.blogspot.com.br/2011/09/conicas-e-geometria-analitica.html>

Nos escritos de Pappus de Alexandria (290-350 aproximadamente), credita-se ao geometra grego Aristeu (370-300 A.C.) a publicação do primeiro tratado sobre secções cônicas. Mais tarde, o astrônomo e matemático grego Apolônio de Perga (262-190 A.C.) recompilou e aprimorou os resultados conhecidos até então sobre o assunto na sua obra Secções Cônicas. A

denominação das curvas não foi devida a Menaecmus. As curvas somente foram nomeadas na obra de Apolônio, mas os nomes parábola e hipérbole foram usados antes dele. Foi Apolônio quem considerou as curvas como secções do cone duplo, com o qual a hipérbole adquiriu outro ramo, tal qual conhecemos hoje em dia. A obra **Secções Cônicas** de Apolônio e os Elementos de Euclides constituem o ápice da matemática grega.

A motivação principal de Pierre de Fermat na elaboração da sua obra *Ad Locos Planos et Solidos Isogoge* (1636), no qual estabelece um sistema de coordenadas na Geometria Euclidiana (equivalente ao de Descartes), aconteceu quando restaurara a obra perdida de Apolônio, *Plane Loci*, seguindo o delineamento feito por Pappus. De posse da teoria de equações de François Viète, Fermat fez uso sistemático da linguagem algébrica para obter as demonstrações dos teoremas enunciados por Pappus na sua descrição da obra de Apolônio. Aplicação da álgebra combinada com a natureza particular dos lugares geométricos estudados em *Plane Loci* e as técnicas usadas nas demonstrações dos resultados revelaram a Fermat que todos os lugares geométricos discutidos por Apolônio poderiam se exprimir na forma de equações algébricas com duas variáveis, cuja análise, usando a teoria de Viète, produziria as propriedades fundamentais do lugar geométrico assim como a natureza da sua construção. Fermat aplicou os mesmos procedimentos ao estudar a obra *Cônicas* de Apolônio e, através das propriedades que definem as secções cônicas, obteve suas equações. Seus estudos e análise deram lugar a sete equações que ele podia obter como formas irreduzíveis a partir da equação geral do segundo grau com duas variáveis, escrita na linguagem atual, é:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g = 0.$$

Segundo os valores dos coeficientes desta equação, Fermat classificou os lugares geométricos obtidos na seguinte nomenclatura: reta, hipérbole equilátera, par de retas concorrentes, parábola, círculo, elipse e hipérbole.

TÓPICOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Este capítulo aborda os principais temas da álgebra linear como: Matrizes, Sistemas lineares, Espaços vetoriais, Subespaços vetoriais, Produto interno e Transformações lineares.

É provado ainda o teorema espectral que é o principal resultado da teoria para o desenvolvimento dos próximos capítulos, apresento também as propriedades dos tópicos acima.

2.1 Matrizes

Uma matriz é uma tabela disposta em m linhas e n colunas, onde $m, n \in \mathbb{N}^*$, suas entradas são seus elementos, que por sua vez pertencem ao conjunto dos números reais ou dos números complexos, (neste trabalho estudaremos as matrizes nas quais seus elementos são números reais). Dizemos que uma matriz com m linhas e n colunas é do tipo $m \times n$, lendo: matriz do tipo m por n . Quando em uma matriz qualquer o número de linhas for igual ao de colunas, ou seja, $m = n$, diremos que a matriz é de ordem n ou m . Representaremos uma matriz de m linhas e n colunas por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ainda, podemos também representar uma matriz de m linhas e n colunas como $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, ou simplesmente por $a = [a_{ij}]$, quando o tipo da matriz estiver subtendida. O símbolo $M_{m \times n}(\mathbb{R})$, com $m, n \in \mathbb{N}$, denotará o conjunto das matrizes $m \times n$, ou seja, todos os seus elementos são matrizes com m linhas e n colunas. De acordo com os valores de m e n as matrizes recebem um nome especial. Vamos definir algumas matrizes especiais, que serão úteis para o desenvolvimento do texto.

Definição 2.1. (Matriz linha): É uma matriz que possui apenas uma linha, ou seja, $m = 1$ e $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.1. $\left(1 \quad -6 \quad 9 \quad 6 \quad \frac{9}{8} \right)$

Definição 2.2. (Matriz coluna): É uma matriz que possui apenas uma coluna, ou seja, $m \in \mathbb{N}$ e $n = 1$

Exemplo 2.2. $\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

Definição 2.3. (Matriz quadrada): É uma matriz na qual o número de linhas é igual ao número de colunas, ou seja, $m = n$.

Observação: Quando a matriz é quadrada a chamamos comumente de matriz de ordem m . Assim, por exemplo uma matriz quadrada de ordem 6 é uma matriz onde o número de linhas e colunas é 6.

Exemplo 2.3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \end{pmatrix}$

Em uma matriz quadrada, os elementos que tem os índices iguais, ou seja, $i = j$, formam a diagonal principal da matriz. Por outro lado, a outra diagonal é denominada secundária.

Definição 2.4. (Matriz diagonal): É uma matriz quadrada na qual os elementos que não estão na diagonal principal são iguais a zero.

Exemplo 2.4. $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Definição 2.5. (Matriz identidade): Toda matriz diagonal na qual os elementos na diagonal principal são iguais a 1.

Exemplo 2.5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Definição 2.6. (Matriz triangular superior): É uma matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero.

Exemplo 2.6.
$$\begin{pmatrix} -10 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Definição 2.7. (Matriz triangular inferior): É uma matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos acima da diagonal principal são iguais a zero.

Exemplo 2.7.
$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Definição 2.8. (Matriz nula): É uma matriz na qual todas as suas entradas, (elementos), são iguais a zero.

Exemplo 2.8.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definição 2.9. (Matriz simétrica): É uma matriz quadrada na qual seus elementos opostos, ou seja, $(a_{ij} = a_{ji})$ em relação a diagonal principal são iguais.

Exemplo 2.9.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 4 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Definição 2.10. (Matriz anti-simétrica): É uma matriz na qual os elementos opostos em relação a diagonal principal são simétricos ou opostos. Analogamente a definição 2.9, teremos $a_{ij} = -a_{ji}$.

Exemplo 2.10.
$$\begin{pmatrix} \frac{-7}{5} & 7 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}$$

2.1.1 Operações com matrizes

Nesta seção estudaremos as operações com matrizes no conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Definição 2.11. Dizemos que duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, do mesmo tipo $m \times n$, são iguais, escrevemos $A = B$, quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$ com $i, j, m, n \in \mathbb{N}$

Dizer que duas matrizes são iguais significa, dizer que elementos correspondentes terão os mesmos valores, ou seja, se um elemento ocupa a primeira linha e primeira coluna, o correspondente na outra matriz ocupa a primeira linha e primeira coluna, assim são iguais. Por

exemplo, se k e t são elementos que pertencem ao conjunto dos números reais, as matrizes $\begin{pmatrix} k & 9 \\ 7 & t \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ serão iguais se, e somente se, $k = 11$ e $t = 5$.

Definiremos **adição e multiplicação por escalar de matrizes** no conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ das matrizes de m linhas e n colunas.

Definição 2.12. Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são duas matrizes de mesma ordem n , a soma de A e B , denotada por $A + B$, é a matriz $H = [h_{ij}]$ de ordem n tal que $h_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$.

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$, define-se a **matriz oposta** de A como a matriz $-A = [-a_{ij}]$.

A adição de matrizes tem propriedades semelhantes à adição dos números reais, ou à adição de elementos em espaços vetoriais (que será tratado mais adiante), como mostra o resultado a seguir.

Teorema 2.1. Se A, B, C são matrizes de mesma ordem n , então:

- i.* $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade da adição);
- ii.* $A + B = B + A$ (comutatividade da adição);
- iii.* $A + 0 = 0 + A = A$, onde (0) denota a matriz nula de orde, n (elemento neutro);
- iv.* $A + (-A) = 0$.

Admitiremos a validade dos itens no teorema acima sem demonstração, pois nossa intenção neste momento é apenas apresentar e construir o embasamento para estudar os espaços vetoriais, transformações lineares, e aplicações nas secções cônicas.

Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, definimos o produto de A pelo número real a , como $aA = [aa_{ij}]_{m \times n}$.

Exemplo 2.11. $4 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 8 & 16 & 28 \end{pmatrix}$

Tendo definido a operação de adição em $M_{m,n}(\mathbb{R})$, definimos a operação de subtração da maneira usual: dadas as matrizes A e B em $M_{m,n}(\mathbb{R})$, $A - B = A + (-B)$.

As seguintes propriedades se verificam para quaisquer A e B em $M_{m,n}(\mathbb{R})$, e $a, a' \in \mathbb{R}$:

Teorema 2.2. *i.* $a(A + B) = aA + aB$;

ii. $(a + a')A = aA + a'A$;

iii. $a(a'A) = (aa')A$;

iv. $1A = A$

Vamos agora definir a operação de multiplicação de matrizes, conceito este que será muito importante no estudo das transformações lineares.

Definição 2.13. Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ duas matrizes. O produto AB de A por B , denotado por AB , é definido como a matriz $C = [c_{ij}]_{m \times p}$ tal que $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq p$.

Vale ressaltar que a multiplicação de matrizes não é comutativa, e se por acaso duas matrizes comutarem, ou seja, a igualdade $A.B = B.A$ for verdadeira, diremos que as matrizes A e B comutam entre si.

Apresentaremos abaixo algumas propriedades para a multiplicação de matrizes:

- i. $A(B + C) = AB + AC$; distributividade à esquerda da multiplicação em relação a adição;
- ii. $(A + B)C = AC + BC$ (distributividade à direita da multiplicação em relação à adição);
- iii. $(AB)C = A(BC)$ (associatividade);
- iv. $AI = IA = A$ (existência de elemento identidade).

Definição 2.14. (Matriz transposta): Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, chamamos de **transposta** de A , e denotamos por A^t , a matriz $[b_{ij}]_{n \times m}$, onde $b_{ij} = a_{ji}$, para todo $1 \leq i \leq n$ e para todo $1 \leq j \leq m$.

Exemplo 2.12.
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Uma matriz quadrada A é chamada simétrica se $A^t = A$ e anti-simétrica se $A^t = -A$.

Definição 2.15. (Matriz Inversa): Dada uma matriz quadrada A de ordem n , chamamos de inversa de A a uma matriz quadrada B de ordem n tal que $A.B = B.A = I_n$.

Por exemplo, dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, temos que a matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ é a inversa de A , já que $A.B = B.A = I_2$.

Vale aqui uma observação muito importante acerca da inversa de uma matriz quadrada de ordem n : nem toda matriz admite inversa. Por exemplo, uma matriz nula K não admite inversa, (Verifique para uma matriz quadrada de ordem 2), pois não existe C tal que $K.C = I$, I é a matriz identidade de ordem 2. Mesmo que uma matriz não seja nula ela pode não ter uma inversa. Tendo em vista, o discorrido, podemos dizer que uma matriz quadrada A de ordem n é invertível quando admite inversa, mais ainda, se tal matriz admite inversa esta é única. De fato: Suponhamos que B e C são duas inversas de uma matriz A de ordem n . Então $A.B = I_n$ e $C.A = I_n$. Assim, utilizando as propriedades de multiplicação de matrizes segue-se, $C = C.I_n = C.(A.B) = (C.A).B = I_n.B = B$.

é comumente chamada **matriz ampliada do sistema**. Cada linha desta matriz é simplesmente uma representação abreviada da equação correspondente no sistema.

Vamos explicar de forma breve o que são matrizes equivalentes.

Seja A uma matriz $m \times n$. Para cada $1 \leq i \leq m$, denotemos por L_i a i -ésima linha de A .

Definimos as **transformações elementares nas linhas** da matriz A como se segue: (para melhor compreensão deste assunto consulte [Hefez e Fernandez 2012])

1. Permutação das linhas L_i e L_j .
2. Substituição de uma linha L_i pela adição desta mesma linha com k vezes uma outra linha L_j .
3. Multiplicação de uma linha L_i por um número real k não nulo.

Por exemplo, vamos efetuar algumas transformações elementares nas linhas da matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \text{ Solução:}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1/2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Definição 2.17. Sejam A e B duas matrizes de ordem $m \times n$. Uma matriz A é dita ser **equivalente por linhas** à matriz B se B pode ser obtida de A pela aplicação sucessiva de um número finito de transformações elementares sobre linhas.

Observe que a noção de equivalência de matrizes por linhas corresponde à noção de equivalência de sistemas lineares quando se efetuam as respectivas transformações sobre equações. De fato, a sistemas equivalentes, correspondem matrizes associadas equivalentes, e vice-versa.

Definição 2.18. Dois sistemas são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução.

Note que se A é equivalente por linhas a uma matriz B , então B é equivalente por linhas a A , já que toda transformação elementar sobre linhas é reversível, ou seja, pode-se realizar as operações na ordem inversa.

Basta realizar as transformações elementares opostas (no sentido de que se é somado a linha 2 a linha 1, a transformação oposta é feita realizando a subtração da linha 2 a linha 1, etc.) às realizadas de A para B , então obteremos a matriz A , partindo de B .

Agora podemos enunciar o seguinte:

Teorema 2.3. Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.

Demonstração: Esta proposição é equivalente a: Sistemas associados a matrizes linha equivalentes são equivalentes. Pois, matriz ampliada é obtida pelo acréscimo de uma coluna (termos independentes). Prova: Sejam A e A' matrizes-linha equivalentes. Assim, $A' = M.A$, onde M é um produto de matrizes elementares e, portanto, invertível. Os sistemas (I) e (II) que têm A e A' como matrizes ampliadas podem ser escritos respectivamente: $N.X = B$ e $N'.X = B'$, onde N é a submatriz de A da qual se retirou a última coluna e B é esta coluna. (Idem para N', A' e B' .) Além disto, pode-se verificar que $N' = M.N$ e $B' = M.B$. Portanto, $N.X = B \iff M.NX = M.B \iff N'.X = B'$. Isto significa que os sistemas (I) e (II) são equiva-

lentes, pois toda matriz $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ que seja a solução do I será solução de II e vice-versa. \square

Em outras palavras, a mesma n -upla é solução de ambos os sistemas.

Definição 2.19. (Forma Escada) Uma matriz $m \times n$ é linha reduzida à forma escada se:

1. O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.
2. Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.
3. Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo).
4. Se as linhas $1, \dots, r$ são linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i , então $k_1 < k_2 < \dots < k_r$.

Esta última condição impõe a forma escada à matriz. Isto é, o número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobre somente linhas nulas, se houver.

Exemplo 2.13. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Não é linha reduzida à forma escada, pois a segunda condição não é satisfeita.

Exemplo 2.14. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Não é linha reduzida à forma escada, pois não satisfaz a primeira e quarta condições.

Exemplo 2.15.
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Não satisfaz a primeira nem a terceira condição.

Exemplo 2.16.
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

É linha reduzida à forma escada já que satisfaz todas as condições.

Teorema 2.4. Toda matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ é linha equivalente a uma única matriz-linha reduzida à forma escada.

Definição 2.20. Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, seja B de ordem $m \times n$ a matriz-linha reduzida à forma escada linha equivalente a A . O posto de A , denotado por p_A , é o número de linhas não nulas de B , nulidade de A é o número $n - p$.

Em face da definição 2.20, podemos notar que dada uma matriz A do tipo $m \times n$, para achar seu posto necessitamos encontrar primeiro sua matriz-linha reduzida à forma escada, e depois contar suas linhas não nulas. Este número é o posto de A , sendo a nulidade a diferença entre o número de colunas de A e o posto.

Exemplo 2.17. Desejamos encontrar o posto e a nulidade de A , onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Assim, efetuamos as seguintes operações com as matrizes:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix} \\ & \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O posto de A é 3 e a nulidade de A é $4 - 3 = 1$.

Observação: Se interpretarmos a matriz A acima como sendo a matriz ampliada de um

sistema linear, teremos:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

A matriz-linha reduzida à forma escada é linha equivalente à matriz A . Assim, o sistema que ela representa:

$$\begin{cases} x_1 & & = \frac{-7}{8} \\ & x_2 & = \frac{-1}{4} \\ & & x_3 = \frac{11}{8} \end{cases}, \text{ é equivalente ao sistema inicial, possuindo a mesma solução que este.}$$

Dizemos que um sistema linear com m equações a n incógnitas é homogêneo quando os seus termos independentes são todos nulos.

Um sistema de equações lineares $AX = B$ admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada do sistema tiver posto p_{AB} igual ao (p_A) da matriz dos coeficientes do sistema. Para a demonstração desta proposição consulte: [Hefez e Fernandez 2012]

Em relação as soluções de um sistema linear ele pode ser: impossível, ou possível e determinado, ou possível e indeterminado. Um sistema linear é chamado **impossível**, quando não tem solução, **possível e determinado**, quando tem uma única solução e **possível e indeterminado**, quando tem mais de uma solução.

Teorema 2.5. Consideremos um sistema linear com m equações e n incógnitas $AX = B$. Sejam p_{AB} o posto da matriz ampliada do sistema e p_A o posto da matriz dos coeficientes do sistema. Então:

- i.* O sistema é possível se, e somente se, $p_{AB} = p_A$.
- ii.* O sistema é possível e determinado se $p_{AB} = p_A = n$.
- iii.* O sistema é possível e indeterminado se $p_{AB} = p_A < n$.

Neste caso, $n - p_A$ é o número de incógnitas livres do sistema, ou seja, incógnitas que podem assumir qualquer valor real.

Corolário 2.1. Seja dado um sistema linear $AX = 0$ com m equações e n incógnitas.

- i.* Se A tem posto n , então o sistema possui apenas a solução nula. Em particular, isto ocorre quando $m = n$ e A é invertível.
- ii.* Se A tem posto $p < n$, então o sistema possui infinitas soluções. Em particular, isto sempre ocorre quando $m < n$.

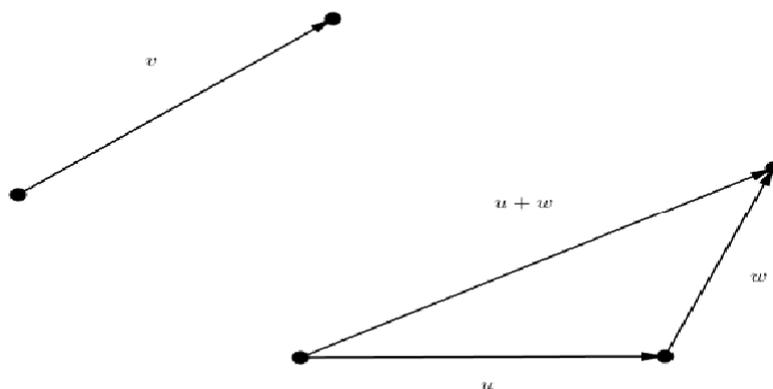
2.3 Espaços vetoriais

A noção de espaço vetorial é a estrutura, terreno, onde será desenvolvido o estudo da álgebra linear. Um espaço vetorial tem uma estrutura bem definida, satisfazendo algumas condições ou axiomas, que estão norteados por duas operações: a adição e a multiplicação de um escalar por um elemento deste espaço.

Antes de falarmos sobre espaços vetoriais, vamos explicar o que é um vetor. Existem dois tipos de grandezas: as escalares e as vetoriais. As **escalares** são aquelas que ficam completamente definidas por apenas um número real (acompanhado de uma unidade adequada). Comprimento, área, volume, massa, temperatura, são exemplos de grandezas escalares. Assim, quando dizemos que uma mesa tem $3m$ de comprimento, que o volume de uma caixa é de $10 dm^3$ ou que a temperatura ambiente é de $30^{\circ}C$, estamos determinando perfeitamente estas grandezas.

Existem no entanto, grandezas que não ficam completamente definidas apenas pelo seu módulo, ou seja, pelo número com sua unidade correspondente. Falamos das grandezas **vetoriais**, que para serem perfeitamente caracterizadas necessitamos conhecer seu módulo (ou comprimento ou intensidade), sua direção e seu sentido. Força, velocidade, aceleração, são exemplos de grandezas vetoriais. Na figura [2] temos a representação geométrica de um vetor v e do vetor $u + w$.

Figura 2 – vetor v e vetor $u + w$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Um vetor v pode ser representado por suas coordenadas (x, y) , se estiver no plano, se no espaço (x, y, z) .

Definição 2.21. Um espaço vetorial V é um conjunto não vazio, cujos elementos são chamados vetores, no qual estão definidas duas operações: a **adição**, que a cada par de vetores $u, v \in V$ faz corresponder um novo vetor $u + v \in V$, chamado a soma de u e v , e a multiplicação por um número real, $a \in \mathbb{R}$ e para cada vetor $v \in V$ faz corresponder um vetor $a \cdot v$ ou av chamado o produto de a por v . Essas operações devem satisfazer, para quaisquer a, b reais e u, v, w em V , as condições abaixo, chamadas os axiomas de espaço vetorial:

comutatividade: $u + v = v + u$;

associatividade: $(u + v) + w = u + (v + w)$ e $(ab)v = a(bv)$;

vetor nulo: existe um vetor 0 em V , chamado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $v + 0 = 0 + v = v$ para todo v em V ;

inverso aditivo: para cada vetor v em V existe um vetor $-v$ em V , chamado o inverso aditivo, ou o simétrico de v , tal que $-v + v = v + (-v) = 0$;

distributividade: $(a + b)v = av + bv$ e $a(u + v) = av + av$;

multiplicação por 1: $1 \cdot v = v$

Observação: O mesmo símbolo 0 representará o vetor nulo e o número real zero, será discernido de acordo com o contexto.

Definição 2.22. Seja A um conjunto não vazio, uma operação binária é definida da seguinte forma, $*$: $A \times A \rightarrow A$, que a todo (u, v) associa $a^*b \in A$, isto é $*(a, b) = a^*b$. Ocorrendo ainda que $*(a, *(b, c)) = *(*(a, b), c)$.

Se V é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , definimos a operação $\cdot : V \times \mathbb{R} \rightarrow V$, $\cdot(u, \alpha) = \alpha \cdot u$, denominada multiplicação por escalar. Assim, um espaço vetorial V sobre \mathbb{R} é um conjunto munido destas duas operações e com as propriedades da definição.

Exemplo 2.18. O conjunto de vetores do plano $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial, pois tem sua estrutura.

Exemplo 2.19. Para todo número natural n , o símbolo \mathbb{R}^n representa o espaço vetorial euclidiano n -dimensional. Os elementos de \mathbb{R}^n são as listas ordenadas $u = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $v = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ de números reais.

Por definição, a igualdade vetorial $u = v$ significa as n igualdades numéricas $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$.

Os números $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são chamados as coordenadas do vetor u . As operações do espaço vetorial \mathbb{R}^n são definidas pondo:

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

e

$$au = (a\alpha_1, a\alpha_2, \dots, a\alpha_n).$$

O vetor zero é, por definição, aquele cujas coordenadas são todas iguais a zero: $0 = (0, 0, \dots, 0)$

Observemos mais um exemplo de espaço vetorial: O conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ de todas as matrizes $m \times n$ é um espaço vetorial quando nele se define a soma das matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ como $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ e o produto da matriz A pelo número real k como $kA = [ka_{ij}]$. A matriz nula $0 \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é aquela formada por zeros e o inverso aditivo da matriz $a = [a_{ij}]$ é $-A = [-a_{ij}]$.

2.3.1 Subespaços vetoriais

Um subespaço vetorial do espaço vetorial V é um subconjunto $W \subset V$ que, relativamente às operações de V , é ainda um espaço vetorial. Os subespaços vetoriais constituem uma rica fonte de exemplos de espaços vetoriais.

Definição 2.23. Seja V um espaço vetorial. Um subespaço vetorial (ou simplesmente um subespaço) de V é um subconjunto $W \subset V$ com as seguintes propriedades:

- i. $0 \in W$;
- ii. Se $u, v \in W$ então $u+v \in W$;
- iii. Se $v \in W$ então, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha v \in W$.

Segue-se que se u e v pertencem ao subespaço W e α, β são números reais quaisquer, então $\alpha u + \beta v \in W$. Mais geralmente, dados $v_1, v_2, \dots, v_m \in W$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tem-se que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m \in W$.

O conjunto $\{0\}$, com o único elemento 0, e o espaço inteiro V são exemplos triviais de subespaços de V . Todo subespaço é, em si mesmo, um espaço vetorial, pois seus elementos satisfazem também as propriedades de espaço vetorial.

Exemplo 2.20. Seja $w \in V$ um vetor diferente do vetor nulo. O conjunto $W = \{\alpha w; \alpha \in \mathbb{R}\}$, ou seja, de todos os múltiplos de w é um subespaço vetorial de V , chamado a reta que passa pela origem e contém w .

É como se o vetor w sofresse na mesma direção na qual ele se encontra uma dilatação linear e contração linear, por todos os valores reais, segundo as propriedades já vista neste texto de escalar por vetor.

Exemplo 2.21. Seja x um número real qualquer, o conjunto $K = \{(x, 0) \in V = \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de V . De fato:

Vamos verificar as três condições:

- i. Basta tomar $x_1 = 0$ e segue-se que $0 \in K$
- ii. Sejam $(x_1, 0), (x_2, 0) \in K$, tais que $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, assim temos que: $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0 + 0)$, assim para dois vetores quaisquer sua soma ainda esta em K .

iii. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x, 0) \in K$, vamos mostrar que o produto de α por $(x, 0)$ pertence a K . De fato: $\alpha(x, 0) = (\alpha x, \alpha 0) = (\alpha x, 0) \in K$. Portanto, como K satisfaz as três condições de subespaço vetorial, segue-se que K é subespaço vetorial.

Para a próxima definição de subespaço gerado precisaremos explicar o que é uma combinação linear. Seja V um espaço vetorial não nulo e sejam v_1, v_2, \dots, v_n vetores de V . Diremos que um vetor $v \in V$ é uma combinação linear de v_1, v_2, \dots, v_n se existirem números reais k_1, k_2, \dots, k_n tais que

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n.$$

Definição 2.24. (Subespaço gerado) Seja X um subconjunto do espaço vetorial V . O subespaço vetorial de V gerado por X é, por definição, o conjunto de todas as combinações lineares

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$$

de vetores $v_1, v_2, \dots, v_m \in X \subset V$.

É fácil verificar que o conjunto de todas as combinações lineares de vetores do conjunto X é, de fato, um subespaço vetorial, que é indicado pelo símbolo $S(X)$. O subespaço gerado pelo conjunto $X \subset V$, contém o conjunto X e, além disso, é o menor subespaço de V que contém X . Em outras palavras, se W é um subespaço vetorial de V e $X \subset W$ então $S(X) \subset W$. Claramente, se X já é um subespaço vetorial, então $S(X) = X$. Quando o subespaço $S(X)$ coincide com V , dizemos que X é um conjunto de geradores de V .

Mais claramente: um conjunto X é um conjunto de geradores do espaço vetorial V quando todo vetor $u \in V$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores de X , ou seja,

$$u = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$$

de vetores v_1, v_2, \dots, v_m pertencentes a X .

Exemplo 2.22. Se $v \in V$ é diferente do vetor nulo, o subespaço gerado por v é a reta que passa pela origem e contém v .

Exemplo 2.23. Os chamados vetores canônicos $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ constituem um conjunto de geradores do espaço vetorial \mathbb{R}^n . De fato: seja $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tem-se $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Analogamente os monômios $1, x, \dots, x^n$ formam um conjunto de geradores de P_n , espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n , com $n \in \mathbb{N}$.

Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de V . O subespaço vetorial de V gerado pela reunião $W_1 \cup W_2$ é, como se vê facilmente, o conjunto de todas as somas $w_1 + w_2$, onde $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$. Ele é representado pelo símbolo $W_1 + W_2$.

Quando os subespaços $W_1, W_2 \subset V$ têm em comum apenas o elemento $\{0\}$, escreve-se $W_1 \oplus W_2$ em vez de $W_1 + W_2$ e dizemos que $W = W_1 \oplus W_2$ é a soma direta de W_1 e W_2 .

Teorema 2.6. Sejam W, W_1, W_2 subespaços vetoriais de V , com $W_1 \subset W$ e $W_2 \subset W$. As seguintes afirmações são equivalentes:

i. $W = W_1 \oplus W_2$;

ii. Todo elemento $w \in W$ se escreve, de maneira única, como soma $w = w_1 + w_2$, onde $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$.

Demonstração: Provaremos primeiramente que *i* implica *ii*. Por hipótese, temos que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ e suponhamos que $w_1 + w_2 = v_1 + v_2$, com $w_1, v_1 \in W_1$ e $w_2, v_2 \in W_2$. Assim $w_1 - v_1 = v_2 - w_2$. Como $w_1 - v_1 \in W_1$ e $v_2 - w_2 \in W_2$, segue-se que $w_1 - v_1$ e $v_2 - w_2$ pertencem ambos a W_1 e W_2 . Mas, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Logo $w_1 - v_1 = -v_2 - w_2 = 0$, ou seja, $w_1 = v_1$ e $w_2 = v_2$. Para provar que *ii* implica *i*, seja $v \in W_1 \cap W_2$. Então $0 + v = 0 + v$, com $0, v \in W_1$ e $v, 0 \in W_2$, como $0 + v = v + 0 = 0$, assim por hipótese todo vetor se escreve de maneira única, logo $0 = v$, portanto $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. \square

Exemplo 2.24. Em \mathbb{R}^4 , sejam W_1 o subespaço gerado pelos vetores $w_1 = (1, 0, 0, 0)$, $w_3 = (0, 0, 1, 0)$ e W_2 o subespaço gerado pelos vetores $w_2 = (0, 1, 0, 0)$, $w_4 = (0, 0, 0, 1)$. Então W_1 é o conjunto dos vetores da forma $(k_1, 0, k_3, 0)$ enquanto os vetores de W_2 têm a forma $(0, k_2, 0, k_4)$. É evidente que $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$.

2.3.2 Base de um espaço vetorial.

Uma base em um espaço vetorial é um conjunto de vetores ordenados, que geram todos os vetores deste espaço. Em um espaço vetorial pode haver infinitas bases. Trata-se de um conjunto extremamente importante, pois observando seus elementos podemos identificar como são os vetores quaisquer do espaço vetorial.

Seja V um espaço vetorial. Diz-se que um conjunto $K \subset V$ é linearmente independente (*L.I.*) quando nenhum vetor $v \in K$ é combinação linear de outros elementos de K . Para evitar ambiguidade, no caso em que $K = \{v\}$ consta de um único elemento v , dizemos que K é *L.I.*, por definição, quando v é diferente do vetor nulo. Quando K é *L.I.*, dizemos também que os seus elementos são vetores linearmente independentes.

Quando K é *L.I.* seus elementos são todos diferentes de 0, pois o vetor nulo é combinação linear de quaisquer outros. De fato: o vetor nulo pode-se escrito como $0 = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_m$.

Teorema 2.7. Seja K um conjunto *L.I.* no espaço vetorial V . Se $k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n = 0$ com $v_1, v_2, \dots, v_n \in K$ então $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$. Reciprocamente, se a única combinação linear nula de vetores de K é aquela cujos coeficientes são todos iguais a zero, então K é um conjunto *L.I.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que se tenha $k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n = 0$, com $v_1, v_2, \dots, v_n \in K$ mas nem todos os k_j sejam nulos. Por simplicidade, seja $k_2 \neq 0$. Então teremos $v_2 = -(k_1/k_2)v_1 - (k_3/k_2)v_3 - \dots - (k_n/k_2)v_n = 0$, o que exprime v_2 como combinação linear de outros elementos de K , o que contradiz a hipótese.

Reciprocamente, se K é não *L.I.*, algum dos seus vetores seria combinação linear dos demais: $v = k_1v_1 + \dots + k_nv_n$, logo $1v - k_1v_1 - \dots - k_nv_n = 0$, uma combinação linear nula de vetores em K , na qual pelo menos o primeiro coeficiente não é zero. \square

Corolário 2.2. Se $v = k_1v_1 + \dots + k_nv_n = t_1v_1 + \dots + t_nv_n$ e os vetores v_1, \dots, v_n são *L.I.* então $k_1 = t_1, \dots, k_n = t_n$.

Demonstração: De fato, tem-se neste caso $(k_1 - t_1)v_1 + \dots + (k_n - t_n)v_n = 0$, logo $k_1 - t_1 = \dots = k_n - t_n = 0$. \square

Evidentemente, todo subconjunto não vazio de um conjunto *L.I.* é ainda *L.I.*

Teorema 2.8. Sejam v_1, \dots, v_n vetores ordenados não-nulos do espaço vetorial V . Se nenhum deles é combinação linear dos anteriores então o conjunto $k = \{v_1, \dots, v_n\}$ é *L.I.*

Um conjunto $K \subset V$ diz-se linearmente dependente (abreviadamente *L.D.*) quando não é *L.I.* Isto significa que algum dos vetores $v \in K$ é combinação linear de outros elementos de K , ou então que $K = \{0\}$. Para que K seja *L.D.* basta que exista uma combinação linear $k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n = 0$ de vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in K$ com algum coeficiente $k_j \neq 0$. Vale observar que se 0 é um elemento de K então K é *L.D.*

Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto $B \subset V$ linearmente independente que gera V . Isto significa que todo vetor $v \in V$ se exprime, de modo único, como combinação linear $k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n = v$ de elementos v_1, v_2, \dots, v_n da base B . Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V e $k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n = v$, então os números k_1, \dots, k_n chamam-se as coordenadas de v na base B , e representamos na forma matricial do seguinte modo:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

Diz-se que o espaço vetorial V tem dimensão finita quando admite uma base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ com um número finito n de elementos. Este número, que é o mesmo para todas as bases de V , chama-se a dimensão do espaço vetorial $V : n = \dim V$. Por extensão dizemos que o espaço vetorial $V = \{0\}$ tem dimensão zero.

2.4 Transformações lineares

As funções naturais no contexto dos espaços vetoriais, as chamadas de transformações lineares, formam uma classe muito especial de funções que têm muitas aplicações na física, nas engenharias e em vários ramos da matemática. As funções nas quais se está interessado na álgebra linear são as funções cujos domínios e contradomínios são espaços vetoriais e que, além disso, preservam as operações de adição de vetores e de multiplicação de um vetor por um escalar. Esta é a definição que se segue:

Definição 2.25. Sejam V e W espaços vetoriais. Uma transformação linear de V em W é uma função $T : V \rightarrow W$ que possui as seguintes propriedades:

$$i. T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2), \text{ para quaisquer } v_1, v_2 \in V;$$

$$ii. T(av) = aT(v), \text{ para quaisquer } v \in V \text{ e } a \text{ em } \mathbb{R}.$$

Para provarmos que $T(0) = 0$ como consequência da propriedade i acima, vamos provar que $(-1)u = -u$ (*). Mas, antes provemos a seguinte afirmação: se $w + u = w + v$ então $u = v$. Com efeito, da igualdade $w + u = w + v$ segue-se que $u = 0 + u = (-w + w) + u = -w + (w + u) = -w + (w + v) = (-w + w) + v = 0 + v = v$. Agora provemos (*) $u + (-1)u = 1.u + (-1)u = [1 + (-1)]u = 0.u = 0$, logo da igualdade $u + (-1)u = 0$ segue que $-u = (-1)u$. Como consequência da propriedade i , em uma transformação linear qualquer T , tem-se que $T(0) = 0$. De fato: $0 = T(0) - T(0) = T(0) + (-1)T(0) = T(1.0 - 1.0) = T(0)$.

Uma propriedade importante de uma transformação linear é que ela fica totalmente determinada se conhecermos seus valores nos vetores de uma base de seu domínio. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.9. Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de um espaço vetorial V . Sejam w_1, w_2, \dots, w_n vetores de um espaço vetorial W . Então existe uma única transformação linear $T : V \rightarrow W$ tal que $T(v_j) = w_j, \forall 1 \leq j \leq n$.

Demonstração: Tomemos $v \in V$. Como B é uma base de V , v se escreve de modo único como uma combinação linear dos vetores de B , digamos $v = k_1v_1 + \dots + k_nv_n$. Defina $T : V \rightarrow W$ por $T(v) = k_1w_1 + \dots + k_nw_n$. A função T está bem definida, pois os números reais k_1, \dots, k_n são unicamente determinados a partir de v . Além disso, T é uma transformação linear. De fato, tomemos k em \mathbb{R} e w em V . Suponhamos que $w = b_1v_1 + \dots + b_nv_n$. Como $v + kw = (k_1 + kb_1)v_1 + \dots + (k_n + kb_n)v_n$, segue que $T(v + kw) = (k_1 + kb_1)w_1 + \dots + (k_n + kb_n)w_n = (k_1w_1 + \dots + k_nw_n) + k(b_1w_1 + \dots + b_nw_n) = T(v) + kT(w)$.

Para mostrar que $T(v_j) = w_j$, fixe j , onde $1 \leq j \leq n$. Como $v_j = 0v_1 + \dots + 1v_j + \dots + 0v_n$, segue que $T(v_j) = 0w_1 + \dots + 1w_j + \dots + 0w_n = w_j$.

Vejamos agora que T é a única função com as propriedades desejadas. Para isto, suponhamos que $S : V \rightarrow W$ seja uma transformação linear tal que $S(v_j) = w_j$ para todo

j , com $1 \leq j \leq n$, tomemos $v \in V$ por v e pela linearidade de S (propriedade *ii*), temos que $S(v) = k_1S(v_1) + \cdots + k_nS(v_n)$. Como $S(v_j) = w_j$ para todo $1 \leq j \leq n$, obtemos $S(v) = k_1w_1 + \cdots + k_nw_n = T(v)$.

Como $v \in V$ foi tomado de modo arbitrário, segue que $S = T$. □

Definição 2.26. Núcleo de uma Transformação linear: Se $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear, o núcleo de T , denotado por $\text{Ker}T$, é o conjunto de vetores de V que são levados por T no vetor nulo de W , ou seja,

$$\text{Ker}T = \{v \in V; T(v) = 0\}.$$

Note que $\text{Ker}T$ é um subconjunto não vazio de V , já que $T(0) = 0$. Mais ainda, $\text{Ker}T$ é um subespaço de V . De fato, se $v_1, v_2 \in \text{Ker}T$ e se $a \in \mathbb{R}$, então $v_1 + av_2 \in \text{Ker}T$, pois $T(v_1 + av_2) = T(v_1) + aT(v_2) = 0 + a \cdot 0 = 0$.

Teorema 2.10. Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Temos que T é injetiva se, e somente se, $\text{Ker}T = 0$.

Demonstração: Suponha que T seja injetiva, então $\text{Ker}T = \{0\}$. De fato: Sendo, T injetiva e como $T(0) = 0$, tem-se que $T(v) = 0 = T(0)$ implica que $v = 0$. Reciprocamente, por hipótese $\text{Ker}T = \{0\}$. Tomemos u e v vetores em V . Se $T(u) = T(v)$, então $T(u) - T(v) = 0$. Equivalentemente, $T(u - v) = 0$. Assim, $u - v \in \text{Ker}T$. Como $\text{Ker}T = \{0\}$, segue-se que $u - v = 0$, logo $u = v$, mostrando a injetividade de T . □

Definição 2.27. A imagem de uma Transformação linear: A imagem de T de uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ é o conjunto $\text{Im}T = T(V)$.

Teorema 2.11. Teorema do Núcleo e da Imagem: Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear, onde V tem dimensão finita. Então:

$$\dim(\text{Ker}T) + \dim(\text{Im}T) = \dim(V).$$

Obs: Uma transformação linear bijetiva é chamada *isomorfismo*. Dois espaços vetoriais que possuem um isomorfismo entre eles serão ditos isomorfos, o que, em grego, significa: possuem mesma forma.

Teorema 2.12. Se V e W são espaços vetoriais de dimensão k , então V e W são isomorfos.

Demonstração: Para provarmos que V e W são isomorfos, devemos mostrar que existe uma transformação linear bijetiva de V em W . Para isto, tomemos $\alpha = \{v_1, \dots, v_k\}$ e $\beta = \{w_1, \dots, w_k\}$ bases de V e W , respectivamente. Dado $v \in V$, podemos escrever de modo único

$$v = a_1v_1 + \cdots + a_kv_k,$$

com $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$.

Defina, então, $T : V \rightarrow W$ por $T(v) = a_1 w_1 + \dots + a_k w_k$. T está bem definida e, além disso, T é uma transformação linear. Para provarmos que T é bijetiva basta provarmos, que T é injetiva, pois V e W têm dimensão k . Ora, se $v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$ e $0 = T(v) = a_1 w_1 + \dots + a_k w_k$, segue-se que $a_1 = \dots = a_k = 0$, pois $\{w_1, \dots, w_k\}$ é uma base de W . Logo, $v = 0$, mostrando que $\text{Ker}T = \{0\}$. \square

Definição 2.28. Sejam $T : V \rightarrow W$ e $S : V \rightarrow W$ transformações lineares. Definimos a soma de T e S , denotada por $T + S : V \rightarrow W$ dada, para todo $v \in V$, por $(T + S)(v) = T(v) + S(v)$.

Se $k \in \mathbb{R}$, definimos o produto de k por T , denotando-o kT , como a função $kT : V \rightarrow W$ dada, para todo $v \in V$, por $(kT)(v) = kT(v)$.

Vamos denotar por $L(V, W)$ o conjunto de todas as transformações lineares de V em W . As operações descritas acima definem uma adição e uma multiplicação por escalar em $L(V, W)$, obedecendo a estrutura de um espaço vetorial. Se $W = \mathbb{R}$, o espaço $L(V, W)$ é chamado espaço dual de V e seus elementos são chamados funcionais lineares em V .

A composição de duas transformações lineares $T : V \rightarrow W$ e $S : W \rightarrow U$ é a composição usual de funções:

$$(S \circ T)(v) = S(T(v)), v \in V.$$

A função $S \circ T$ é também uma transformação linear.

Sejam $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear e $n \in \mathbb{N}$. Definimos a n -ésima potência de T , denotando-a por T^n , como a função $T^n : V \rightarrow V$ dada por

$$T^1 = T, T^n = T \circ \dots \circ T, n \geq 2.$$

T^n também é uma transformação linear. Definimos também T^0 como a função identidade em V , ou seja, $T^0 = I_V$.

Matriz de uma transformação linear: Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear, em que $\dim V = n$ e $\dim W = m$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Sejam $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\beta = \{w_1, \dots, w_m\}$ bases de V e W , respectivamente. Como β é uma base de W , podemos determinar de modo único números reais a_{ij} , com $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, tais que

$$T(v_i) = a_{i1} w_1 + \dots + a_{im} w_m.$$

Assim para cada vetor v_i teremos sua imagem $T(v_i)$, escrevendo este vetor como combinação linear dos elementos da base de W , determinamos a coluna i da matriz, até encontrarmos as n colunas com m linhas. Representamos a matriz da transformação T nas bases mencionadas

como:

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matriz $[T]_{\beta}^{\alpha}$, que representa T em relação às bases α e β , é chamada a matriz de T nas bases α, β . Portanto, temos a seguinte expressão para determinar as coordenadas da imagem de um vetor em V .

$$[T(v)]_{\beta} = [T]_{\beta}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha}, \quad \forall v \in V.$$

Observemos que a matriz é do tipo $m \times n$ tal que, para cada $1 \leq i \leq n$, a i -ésima coluna da matriz da transformação é dada pelas coordenadas de $T(v_i)$ na base β .

Exemplo 2.25. Sejam $\alpha = \{(1, 1), (0, 2)\}$ e $\beta = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 2, 0)\}$, bases de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, respectivamente. Calculemos $[T]_{\beta}^{\alpha}$, onde $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por $T(x, y) = (2x, x - y, 2y)$. Observemos que a matriz desta transformação é do tipo 3×2 . Assim:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Pelo que vimos a_{11}, a_{21}, a_{31} são as coordenadas de $T(1, 1)$ na base β e a_{12}, a_{22}, a_{32} são as coordenadas de $T(0, 2)$ na base β . Ou seja,

$$T(1, 1) = (2, 0, 2) = a_{11}(1, 0, 1) + a_{21}(0, 1, 0) + a_{31}(1, 2, 0)$$

e

$$T(0, 2) = (0, -2, 4) = a_{12}(1, 0, 1) + a_{22}(0, 1, 0) + a_{32}(1, 2, 0).$$

Resolvendo o sistema encontramos os valores dos elementos da matriz, Portanto:

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Quando a transformação linear for de um espaço vetorial V nele mesmo, ela será chamada de operador em V .

Teorema 2.13. Sejam T e T' transformações lineares de V em W , onde V e W são espaços vetoriais de dimensão finita. Se α, β são bases de V e W respectivamente, então:

$$[T + T']_{\beta}^{\alpha} = [T]_{\beta}^{\alpha} + [T']_{\beta}^{\alpha}$$

Teorema 2.14. Sejam $T : V \rightarrow W$ e $S : W \rightarrow U$ transformações lineares, em que V, W e U são espaços vetoriais de dimensão finita. Se α, β, γ são bases de V, W e U , respectivamente, então:

$$[S \circ T]_{\gamma}^{\alpha} = [S]_{\gamma}^{\beta} \cdot [T]_{\beta}^{\alpha}$$

Mudança de Base: Um problema comum no estudo de espaços vetoriais de dimensão finita é conhecer as relações entre as coordenadas de um vetor em diferentes bases. Como a noção de base é a generalização para espaços vetoriais arbitrários da noção de sistemas de coordenadas em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , mudar de base é análogo a mudar de eixos coordenados.

Dado um espaço vetorial V arbitrário de dimensão finita e duas bases α e β de V , podemos obter uma relação entre as matrizes $[v]_{\alpha}, [v]_{\beta}$ de um vetor v em V , usando, para isto, o operador identidade em V . De fato: Vimos que para todo v pertencente a V , temos que

$$[v]_{\beta} = [I_V]_{\beta}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha}.$$

A matriz $[I_V]_{\beta}^{\alpha}$ é chamada matriz mudança de base α para β , pois, pela igualdade acima, esta matriz nos permite obter as coordenadas de um vetor v em V em relação à base β uma vez conhecidas suas coordenadas na base α .

Exemplo 2.26. Considerando a base canônica α de \mathbb{R}^2 e a outra base $\beta = \{(1, 1), (1, 2)\}$, temos que

$$[I_{\mathbb{R}^2}]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix},$$

onde a_1, a_2, b_1, b_2 são números reais satisfazendo o sistema de equações

$$\begin{cases} (1, 0) = a_1(1, 1) + a_2(1, 2) \\ (0, 1) = b_1(1, 1) + b_2(1, 2) \end{cases}$$

Resolvendo as equações acima, obtemos $a_1 = 2, a_2 = -1, b_1 = -1, b_2 = 1$. Portanto,

$$[I_{\mathbb{R}^2}]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se quisermos determinar as coordenadas de um vetor na base β em função das coordenadas de um vetor na base α , basta multiplicar a matriz pelas coordenadas deste vetor na base α .

Teorema 2.15. Sejam α, β duas bases de um espaço vetorial de dimensão finita V . Se T é um operador linear em V , então $[T]_{\alpha}^{\alpha} = P^{-1} \cdot [T]_{\beta}^{\beta} \cdot P$, onde $P = [I_V]_{\beta}^{\alpha}$.

Obs: A relação acima é tão importante que recebe um nome especial: Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, dizemos que B é semelhante a A , quando existir uma matriz inversível P tal que $B = P^{-1}AP$.

É fácil verificar que se uma matriz B é semelhante a uma matriz A , então A também é semelhante a B . De fato: Sendo B semelhante a A tem-se $B = P^{-1}.A.P$, multiplicando a esquerda ambos os membros da igualdade pela matriz P , $P.B = P.P^{-1}.A.P = I.A.P = A.P$, onde I é a matriz identidade, multiplicando à direita ambos os membros da igualdade pela matriz P^{-1} , $P.B.P^{-1} = A.P.P^{-1} = A.I = A$, sendo P a matriz mudança de base e P^{-1} sua inversa, temos que $A = (P^{-1})^{-1}.B.P^{-1}$. Assim, dizemos simplesmente que A e B são semelhantes. Tendo em vista a igualdade no teorema acima, $[T]_{\alpha}^{\alpha}, [T]_{\beta}^{\beta}$ são semelhantes.

2.5 Produto interno

O produto interno, trata-se de uma noção que completa e enriquece a estrutura de um espaço vetorial, permitindo a utilização de uma linguagem geométrica altamente sugestiva e o destaque de tipos especiais de operadores, os quais admitem uma análise profunda de suas propriedades.

Seja V um espaço vetorial. Um produto interno em V é uma função que a cada par de vetores $u, v \in V$ associa o número real, denotado por $\langle u, v \rangle$, que satisfaz as seguintes condições:

Para quaisquer vetores $u, v, w \in V$ e qualquer número real k ,

i. $\langle v, v \rangle \geq 0$;

ii. $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$;

iii. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;

iv. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;

v. $\langle ku, v \rangle = k\langle u, v \rangle$.

O produto interno usual em \mathbb{R}^n ou produto escalar de \mathbb{R}^n é definido como:

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n,$$

onde os vetores $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Verifique que as condições de i a v são satisfeitas.

Seja V um espaço com produto interno. Define-se a norma do vetor v de V , ou comprimento de v , denotado por $\|v\|$, como o número real:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Se $\|v\| = 1$, dizemos que v é um vetor unitário.

A distância $d(u, v)$ entre dois vetores u e v de V é definida como

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}.$$

Obs: Em posse do produto interno definimos o ângulo $\theta, 0 \leq \theta \leq \pi$, entre dois vetores u, v como:

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Teorema 2.16. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Se u e v são vetores de um espaço com produto interno V , então:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|,$$

com igualdade valendo se, e somente se, u e v são linearmente dependentes.

Propriedades da norma: Se u e v são vetores em um espaço V com produto interno e se $k \in \mathbb{R}$, então:

- i. $\|u\| \geq 0$;
- ii. $\|u\| = 0 \iff u = 0$;
- iii. $\|ku\| = |k| \|u\|$;
- iv. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualdade triangular).

Vamos definir agora a noção de ortogonalidade: Sejam u e v dois vetores não nulos de um espaço com produto interno V e seja θ o ângulo entre eles. Segue do que vimos que se $\cos \theta = 0$, então o ângulo entre u e v será 90 graus. Convencionou-se que o vetor nulo é perpendicular a todo vetor de V . Portanto, dizemos que dois vetores u, v quaisquer de V são ortogonais quando $\langle u, v \rangle = 0$.

Sejam v um vetor de V e W um subespaço de V . Dizemos que v é ortogonal a W se v é ortogonal a cada vetor de W . O conjunto de todos os vetores de V que são ortogonais a W é chamado complemento ortogonal de W e é denotado por $W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}$

Teorema 2.17. Seja W um subespaço de um espaço com produto interno V . Então:

- i. W^\perp é um subespaço de V ;
- ii. $W \cap W^\perp = \{0\}$;
- iii. $(W^\perp)^\perp = W$.

Demonstração: (i). Primeiramente, é claro que $0 \in W^\perp$. Tomemos u e v em W^\perp e $a \in \mathbb{R}$. Se $w \in W$, então

$$\langle u + av, w \rangle = \langle u, w \rangle + a \langle v, w \rangle = 0 + a0 = 0,$$

mostrando que $u + av$ é ortogonal a w . Como $w \in W$ foi tomado de modo arbitrário, temos que $u + av$ é ortogonal a cada vetor de W , ou seja $u + av$ está em W^\perp . Portanto, W^\perp é um subespaço de V .

(ii). Para esta demonstração pode-se consultar a referência bibliográfica [Lima 2009]
 (iii). De fato: seja qual for o conjunto não-vazio $X \subset V$, vale a inclusão $X \subset (X^\perp)^\perp$. Em

particular, o subespaço W está contido em $(W^\perp)^\perp$. Assim, $\dim(W^\perp)^\perp = \dim V - \dim W^\perp = \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W$. Logo $W = (W^\perp)^\perp$. \square

Um conjunto de vetores em V é chamado conjunto ortogonal se quaisquer dois vetores distintos do conjunto são ortogonais.

Um conjunto ortogonal no qual cada vetor tem norma 1 é chamado conjunto ortonormal. Se v é um vetor não nulo em um espaço com produto interno, segue que o vetor $\|v\|^{-1}v$ tem norma 1. O processo de multiplicar um vetor não nulo pelo inverso de sua norma para obter um vetor de norma 1 é chamado de normalização.

Teorema 2.18. Todo conjunto ortogonal de vetores não nulo de V é linearmente independente.

Demonstração: Seja $\{v_1, \dots, v_r\}$ um conjunto de vetores ortogonais de V com produto interno. Consideremos a equação

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r = 0.$$

Vamos mostrar que $a_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq r$. Fixe $1 \leq i \leq r$. Então,

$$\begin{aligned} \langle a_1v_1 + \dots + a_rv_r, v_i \rangle &= a_1\langle v_1, v_i \rangle + \dots + a_i\langle v_1, v_i \rangle \\ &+ a_{i+1}\langle v_{i+1}, v_i \rangle + \dots + a_r\langle v_r, v_i \rangle = a_i\langle v_i, v_i \rangle \quad (1) \end{aligned}$$

já que $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ sempre que $j \neq i$. Por outro lado

$$\langle a_1v_1 + \dots + a_rv_r, v_i \rangle = \langle 0, v_i \rangle = 0. \quad (2)$$

De 1 e 2 segue que $a_i\langle v_i, v_i \rangle = 0$ e como v_i é um vetor não nulo, temos necessariamente que $a_i = 0$. Como i foi tomado de modo arbitrário em seu intervalo de variação, segue o resultado. \square

Uma base na qual seus vetores são todos ortogonais é dita base ortogonal e se seus vetores são ortonormais ela é dita base ortonormal.

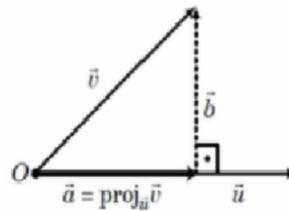
Um exemplo muito simples de base ortonormal é a base canônica do \mathbb{R}^n .

A projeção do vetor v ao longo de u é denotada por $proj_u(v)$ e é definida por:

$$proj_u(v) = ku = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

onde $k = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle}$.

A figura [3] ajuda a compreender melhor a projeção de v na direção de u .

Figura 3 – projeção de v na direção de u 

Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos agora construir uma base ortonormal a partir de uma base qualquer que não é ortonormal. Este processo é chamado de ortogonalização de Gram-Schmidt, depois basta normalizar.

Seja $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V . Tomemos: $w_1 = v_1$, $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$,

$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2$, continuamos o processo, até determinarmos o vetor:

$w_n = v_n - \dots - \frac{\langle v_n, w_{n-1} \rangle}{\|w_{n-1}\|^2} w_{n-1}$.

Assim construímos uma base ortogonal de V , $\alpha = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. Agora para encontrar uma base ortonormal basta normalizar os vetores de α .

Para demonstrarmos o próximo teorema 2.20 precisaremos do seguinte:

Teorema 2.19. Dado um funcional linear ϕ em V , existe um único vetor $v \in V$ tal que $\phi = \phi_v$.

Para sua demonstração consulte [Hefez e Fernandez 2012].

Teorema 2.20. Dado um operador linear T em V , existe um único operador linear T^* em V tal que $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle$ para quaisquer $v, w \in V$.

Demonstração: Tome $w \in V$. Como a função definida por $v \mapsto \langle T(v), w \rangle$ é um funcional linear em V , segue, do teorema 2.19, que existe um único vetor $w' \in V$ tal que

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, w' \rangle, \forall v \in V.$$

Basta definir $T^*(w) = w'$. O teorema 2.19 também nos mostra que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V , então

$$T^*(w) = w' = \langle T(v_1), w \rangle v_1 + \dots + \langle T(v_n), w \rangle v_n.$$

Daí, vê-se claramente que T^* é linear. □

O operador linear T^* é chamado operador adjunto de T . Assim, o teorema afirma que todo operador linear T , em um espaço com produto interno de dimensão finita, possui um operador adjunto T^* . O próximo resultado mostra como podemos obter T^* a partir de uma representação matricial de T .

Teorema 2.21. Para toda base ortonormal α de V e para todo operador linear T em V , temos que $[T^*]_{\alpha}^{\alpha} = ([T]_{\alpha}^{\alpha})^t$.

Um operador linear $T : V \rightarrow V$ é dito ser um operador simétrico quando $T^* = T$. Logo tendo em vista o teorema acima observamos que se T é um operador simétrico em V , então para toda base ortonormal α de V temos

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = ([T]_{\alpha}^{\alpha})^t.$$

Concluimos que $T : V \rightarrow V$ é simétrico se, e somente se, $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ é uma matriz simétrica.

Exemplo 2.27. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(x, y, z) = (2x - y + z, -x + y + 3z, x + 3y)$. Se α é a base canônica de \mathbb{R}^3 , então:

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz simétrica e, portanto, T é um operador simétrico.

Operador Ortogonal: Um operador linear $T : V \rightarrow V$ é dito ser ortogonal quando

$$T^*T = TT^* = I_V.$$

Em outras palavras, T é um operador ortogonal quando T é inversível e $T^* = T^{-1}$.

Diremos que um operador T em V preserva norma, preserva distância, ou preserva produto interno, quando, para todos $u, v \in V$, se tenha $\|T(v)\| = \|v\|$, $d((T(u), T(v))) = d(u, v)$, $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$, respectivamente.

Obs: Se um operador é ortogonal ele tem as propriedades acima, ainda leva base ortonormal em base ortonormal.

Definição 2.29. Matriz Ortogonal: Uma matriz $K \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ é dita ser ortogonal quando cumpre a condição $KK^t = K^tK = I_n$.

Em outras palavras, K é uma matriz ortogonal se K é inversível e $K^t = K^{-1}$. Segue imediatamente da definição que uma matriz K é ortogonal se, e somente se, a matriz K^t é ortogonal.

Alguns resultados importantes acerca de matrizes ortogonais e operadores ortogonais serão elencados, mas não demonstrados, pois este não é o objetivo central deste trabalho, para encontrá-los você pode consultar [Hefez e Fernandez 2012]

Seja $K = [k_{ij}]_{n \times n}$ uma matriz. São equivalentes as proposições:

- i. K é ortogonal;
- ii. As colunas de K formam um conjunto ortonormal em \mathbb{R}^n ;
- iii. As linhas de K formam um conjunto ortonormal em \mathbb{R}^n .

Teorema 2.22. Se α e β são bases ortonormais de V , então a matriz mudança de base $[I_V]_{\beta}^{\alpha}$ é uma matriz ortogonal.

Exemplo 2.28. Sejam $\alpha = \{(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}), (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})\}$ e $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$, bases ortonormais de \mathbb{R}^2 . Vamos determinar a matriz $[I_{\mathbb{R}^2}]_{\beta}^{\alpha}$. Assim: $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) = a_{11} \cdot (1, 0) + a_{21} \cdot (0, 1)$ e $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = a_{12} \cdot (1, 0) + a_{22} \cdot (0, 1)$, resolvendo as equações encontramos a matriz :

$$[I_{\mathbb{R}^2}]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \text{ que é ortogonal.}$$

Outro teorema importante sobre operadores lineares segue-se abaixo.

Teorema 2.23. Sejam α uma base ortonormal de V e T um operador linear em V . Seja $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. T é ortogonal se, e somente se, $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ é ortogonal.

Demonstração: Se $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V e se T é um operador ortogonal em V então, o conjunto $\beta = \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ é uma base ortonormal de V . De fato: $[T]_{\alpha}^{\alpha} = [a_{ij}]$, então para todo i , com $1 \leq i \leq n$, temos $T(v_i) = a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \dots + a_{ni}v_n$. Como β é ortonormal, segue que $\langle T(v_i), T(v_j) \rangle = 0$, se $i \neq j$ e $\langle T(v_i), T(v_i) \rangle = 1$. Por outro lado, sendo α ortogonal, temos que:

$$\begin{aligned} a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{ni}a_{nj} &= \langle a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \dots + a_{ni}v_n, a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \dots + a_{nj}v_n \rangle \\ &= \langle T(v_i), T(v_j) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (**) \end{aligned}$$

mostrando assim que as colunas de $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ formam um conjunto ortonormal em \mathbb{R}^n . Logo $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ é uma matriz ortogonal. Suponhamos agora que $[T]_{\alpha}^{\alpha} = [a_{ij}]$ é uma matriz ortogonal. Para mostrarmos que T é ortogonal basta provarmos que o conjunto $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ é

ortonormal em V , mas isto pode ser verificado facilmente tendo em vista (**). \square

Esta demonstração encontra-se em [Hefez e Fernandez 2012]

Diremos que um operador definido sobre um espaço vetorial V de dimensão finita é *diagonalizável*, quando for possível representá-lo por uma matriz diagonal em alguma base de V .

Definição 2.30. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Um número real c será dito um autovalor de T se existir um vetor não nulo v em V tal que $T(v) = cv$. O vetor v é chamado de autovetor de T associado a c .

Obs: Nem todo operador linear possui autovalores e autovetores. De fato: Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $T(x, y) = (-y, x)$. Se $c \in \mathbb{R}$ e $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2, v \neq 0$, são tais que $T(x, y) = c(x, y)$, então $(-y, x) = c(x, y)$. Equivalentemente

$$\begin{cases} cx = -y \\ cy = x \end{cases}$$

donde obtemos a equação $(c^2 + 1)y = 0$. Como $c \in \mathbb{R}$, a equação $(c^2 + 1)y = 0$ é verificada somente se $y = 0$. Mas se $y = 0$, segue da segunda equação do sistema acima que $x = 0$. Como v não é o vetor nulo, isso não pode ocorrer. Concluimos, então, que T não tem autovalores e não tem autovetores.

Teorema 2.24. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear e sejam k_1, \dots, k_p autovalores distintos de T . Se v_1, \dots, v_p são autovetores associados aos autovalores k_1, \dots, k_p , respectivamente, então $\{v_1, \dots, v_p\}$ é linearmente independente.

Demonstração: A prova será feita por indução sobre r . O resultado é válido para $r = 1$, pois se $T : V \rightarrow V$ é um operador linear com autovalor c_1 e se v_1 é um autovetor de T associado a c_1 , então $\{v_1\}$ é linearmente independente, pois $v_1 \neq 0$. Suponhamos agora o resultado válido para $r - 1$ e vamos prová-lo para $r, r \geq 2$. Para isto, consideremos a equação

$$a_1 v_1 + \dots + a_r v_r = 0, \quad (4)$$

onde a_1, a_2, \dots, a_r são números reais. Aplicando T em (4), obtemos

$$a_1 (c_1 v_1) + \dots + a_r (c_r v_r) = 0, \quad (5)$$

já que $T(v_j) = c_j v_j$, para todo $1 \leq j \leq r$. Por outro lado, T possui pelo menos um autovalor não nulo. Sem perda de generalidade, suponhamos que $c_r \neq 0$. Multiplicando (4) por c_r , obtemos

$$a_1 (c_r v_1) + \dots + a_r (c_r v_r) = 0. \quad (6)$$

De (5) e (6),

$$a_1 (c_1 - c_r) v_1 + \dots + a_{r-1} (c_{r-1} - c_r) v_{r-1} = 0. \quad (7)$$

Pela hipótese de indução, $\{v_1, v_2, \dots, v_{r-1}\}$ é linearmente independente. Portanto, de (7), segue-se que

$$a_j(c_j - c_r) = 0, \forall 1 \leq j \leq r-1. \quad (8)$$

Como os autovalores c_1, c_2, \dots, c_r são todos distintos, de (8) obtemos que $a_j = 0$ para todo $1 \leq j \leq r-1$. Substituindo estes valores em (4), concluímos que $a_r = 0$ também, já que $v_r \neq 0$. Portanto, $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é independente. \square

Corolário 2.3. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Se $\dim V = n$ e T possui n autovalores distintos, então V possui uma base formada por autovetores de T .

Demonstração: Pelo teorema 2.24, n autovalores distintos implicam na existência de um conjunto de autovetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ linearmente independente. Como $G(v_1, v_2, \dots, v_n) \subset V$ e $\dim[G(v_1, v_2, \dots, v_n)] = n = \dim V$, temos que $G(v_1, v_2, \dots, v_n) = V$, logo $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V . \square

Observação: Seja A uma matriz quadrada de ordem n . A matriz $tI_n - A$, onde t é um número real qualquer, é chamada matriz característica de A . O determinante dessa matriz é um polinômio em t , chamado polinômio característico da matriz A e denotado por $P_A(t)$ (para mais sobre definições e propriedades dos determinantes de matrizes consulte [Hefez e Fernandez 2012], [Lima 2009] e [Costa e Wetzler 1980]). As raízes deste polinômio são autovalores do operador associado a esta matriz e dizemos que v é um autovetor de T se $[v]_\alpha$ é uma solução não trivial do sistema linear $A.X = 0$, onde $A = t_0I_n - [T]_\alpha^\alpha$, sendo t_0 autovalor de T associado a v .

Teorema 2.25. Um operador linear $T : V \rightarrow V$ admite uma base β em relação à qual a matriz $[T]_\beta^\beta$ é diagonal se, e somente se, essa base β for formada por autovetores de T .

Demonstração: Suponhamos que $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V tal que $[T]_\beta^\beta$ é diagonal, digamos

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Como, para cada $1 \leq j \leq n$, $T(v_j) = 0v_1 + \cdots + 0v_{j-1} + a_jv_j + 0v_{j+1} + \cdots + 0v_n = a_jv_j$, segue que a_j é um autovalor de T e v_j é um autovetor de T associado a a_j . Portanto, β é uma base formada de autovetores de T .

Suponhamos agora que $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é uma base de V formada por autovetores de T . Existem, então, números reais k_1, k_2, \dots, k_n tais que, para cada $1 \leq j \leq n$, $T(u_j) = k_ju_j$. Observamos que os k_j 's não são necessariamente todos distintos. Pela definição de $[T]_\beta^\beta$, temos

que

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix},$$

ou seja, $[T]_{\beta}^{\beta}$ é uma matriz diagonal. □

Se T é um operador linear em um espaço V de dimensão n , o teorema nos diz que T é diagonalizável se, e somente se, T tem n autovetores linearmente independentes. Em particular, se T tem n autovalores distintos, então T é diagonalizável. Dizemos que uma matriz é diagonalizável quando o operador associado a ela é diagonalizável.

Teorema 2.26. Uma matriz $K \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma matriz P invertível de ordem n tal que $P^{-1}KP$ é uma matriz diagonal.

Demonstração: Para provarmos a condição suficiente, tomemos $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, onde v_j é o vetor j -ésima coluna de P . Seja α a base canônica de \mathbb{R}^n . Assim

$$[T_A]_{\beta}^{\beta} = [I_{\mathbb{R}^n}][T_A]_{\beta}^{\alpha}[I_{\mathbb{R}^n}]_{\alpha}^{\beta}.$$

Equivalentemente,

$$[T_A]_{\beta}^{\beta} = P^{-1}AP,$$

já que $[I_{\mathbb{R}^n}]_{\alpha}^{\beta} = P$ pela maneira como β foi construída. Como $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal, segue-se que $[T_A]_{\beta}^{\beta}$ é uma matriz diagonal. Portanto, T_A é diagonalizável e, então, A também. □

Exemplo 2.29. Consideremos a matriz $K = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, a matriz que diagonaliza K é a matriz

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. De fato: Seja D a matriz diagonal procurada, e observando que P é invertível, pois

seu determinante é diferente de zero, temos que: $D = P^{-1}KP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ que é uma matriz diagonal.

Obs: A matriz P é chamada de matriz que diagonaliza K .

O teorema logo a seguir é o resultado principal deste texto, pois com ele temos ferramentas suficientes para trabalharmos com as aplicações.

Teorema 2.27. (Espectral) Para todo operador simétrico $T : V \rightarrow V$, num espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno, existe uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ formada por autovetores de T .

Demonstração: Usaremos indução na dimensão de V . O teorema é claro se $\dim V = 1$. Supondo-o verdadeiro em dimensão $n - 1$, seja $\dim V = n$. Existe um autovetor unitário u_n , portanto o subespaço $F \subset V$, de dimensão 1, invariante por T . O complemento ortogonal F^\perp também é invariante por T . Como $\dim(F^\perp) = n - 1$, a hipótese de indução assegura a existência de uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_{n-1}\} \subset F^\perp$ formada por autovetores da restrição $T : F^\perp \rightarrow F^\perp$. Segue-se que $\{u_1, \dots, u_{n-1}, u_n\} \subset V$ é uma base ortonormal formada por autovetores de T . \square Esta demonstração encontra-se em [Lima 2009]

A importância deste teorema reside no fato de que com ele podemos caracterizar alguns lugares geométricos conhecendo sua equação geral, que neste trabalho será do segundo grau, para isto precisaremos de alguns elementos que serão utilizados como ferramentas para então discorrer algumas aplicações, determinar os autovalores e em seguida os autovetores que nos darão as direções dos novos eixos ortogonais.

Dada uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, o conjunto $f^{-1}(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$ é a curva de nível c da função f , onde $c \in \text{im}(f)$.

Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é a função linear $f(x, y) = ax + by$, com $(a, b) \neq (0, 0)$, as curvas de nível de f são retas do plano perpendiculares ao vetor $v = (a, b)$. Mostraremos no próximo capítulo que as curvas de nível de uma função quadrática de duas variáveis, ou seja, de uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por: $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g$, onde $a \neq 0, b \neq 0$ ou $c \neq 0$, são as cônicas ou suas degenerações.

Para tal, quando $b \neq 0$, basta mostrar que existe um sistema de eixos ortogonais $OX'Y'$, que tem as direções dos autovetores, para o qual a função f , nas coordenadas x', y' , se escreve na forma: $f(x, y) = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + d'x' + e'y' + g$.

No caso particular em que se tem $d = g = e = 0$, a função quadrática $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ é um polinômio homogêneo do segundo grau (todos os termos tem grau 2). Estes polinômios são chamados **formas quadráticas** de duas variáveis.

Vamos ver alguns exemplos:

Exemplo 2.30. Determine o lugar geométrico em \mathbb{R}^2 determinado pela equação $2x^2 + 2\sqrt{2}xy + y^2 - 12 = 0$.

Solução: Observemos que na equação, embora o termo $b = 2\sqrt{2}$, trata-se de um trinômio quadrado perfeito, ou seja, $(\sqrt{2}x + y)^2 = 12$, que também pode ser reescrita da maneira seguinte $(\sqrt{2}x + y - \sqrt{12})(\sqrt{2}x + y + \sqrt{12}) = 0$, onde o conjunto solução são os pares ordenados (x, y) do plano cartesiano que a satisfazem. Concluimos, então que são pontos das retas paralelas $r : \sqrt{2}x + y - \sqrt{12} = 0$, $s : (\sqrt{2}x + y + \sqrt{12}) = 0$. Observação: como neste exemplo a equação representa duas retas paralelas, segue que a cônica é degenerada.

Exemplo 2.31. Determine o lugar geométrico em \mathbb{R}^2 representado pela equação $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 7\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y + 10 = 0$.

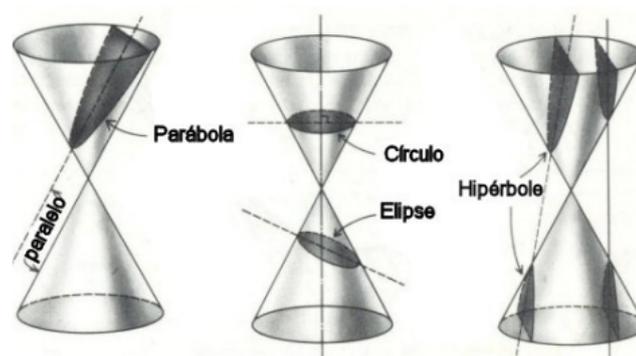
Notemos que neste exemplo $b \neq 0$ e já não é mais possível completar os quadrados (um na variável x e o outro na variável y), surge, então a pergunta natural, como identificar a curva associada a esta equação?. Isto é assunto do próximo capítulo e ainda definiremos as cônicas e demonstraremos suas equações.

CÔNICAS

Neste capítulo vamos estudar os tipos de curvas cônicas e suas aplicações, bem como apresentar alguns exemplos. Para melhor compreensão deste capítulo consulte [Hefez e Fernandez 2012], [Delgado, Frensel e Crissaff 2013], [Costa e Wetzler 1980] e [Iezzi 2005]

Como vimos na introdução do trabalho: uma secção cônica é uma curva obtida pela interseção de um plano com um cone de duas folhas, esta secção pode ser uma elipse, parábola, hipérbole ou suas degenerações. Conforme figura [4]. Vejamos quais são os tipos de intersecções e demonstrar suas equações.

Figura 4 – Secções cônicas em cones de duas folhas



Fonte – <http://astro.if.ufrgs.br/conica.jpg>

Definição 3.1. (Elipse) Dados dois pontos fixos F_1, F_2 , pertencentes a um plano α , seja $2c$ a distância entre eles. Elipse é o conjunto dos pontos de α cuja soma das distâncias a F_1, F_2 é a constante $2a$, (sendo $2a > 2c$), em notação de conjunto $\{P \in \alpha : PF_1 + PF_2 = 2a\}$, onde PF_1 denota a distância do ponto P ao ponto F_1 , PF_2 a distância do ponto P ao ponto F_2 .

Elementos da Elipse:

I : distância focal: distância entre os focos $F_1F_2 = 2c$;

II : focos: os pontos F_1 e F_2 ;

III : centro O : ponto médio do segmento focal F_1F_2 ;

IV : vértices A_1 e A_2 : interseção da elipse com a reta focal;

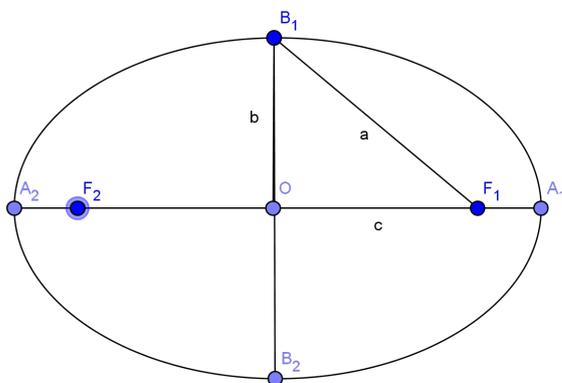
V : vértices B_1 e B_2 : interseção da elipse com a mediatriz de A_1A_2 ;

VI : eixo maior: segmento A_1A_2 de medida $2a$;

VII : eixo menor: segmento B_1B_2 de medida $2b$;

VIII : excentricidade: o número $0 < e = \frac{c}{a} < 1$.

Figura 5 – Elipse de centro O

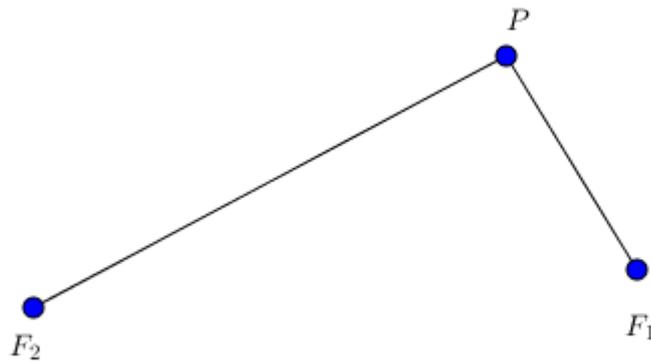


Fonte: Elaborada pelo autor.

relação notável, temos: $a^2 = b^2 + c^2$.

Vamos deduzir a equação de uma elipse com centro na origem do plano cartesiano, focos $F_1 = (c, 0)$; $F_2 = (-c, 0)$, onde $P = (x, y)$, eixo maior no eixo das abscissas. A dedução é imediata: $P \in \text{elipse} \Leftrightarrow PF_1 + PF_2 = 2a$

Figura 6 – Ponto P pertencente a elipse



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx \Rightarrow a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = (a^2 - cx)^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Analogamente quando uma elipse tem seu maior eixo no eixo das ordenadas sua equação será:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Quando seu centro é o ponto de coordenadas (x_0, y_0) suas equações são $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$, com eixo maior paralelo aos eixos x e y respectivamente.

Definição 3.2. (Hipérbole) Dados dois pontos fixos F_1, F_2 pertencentes a um plano α , seja $2c$ a distância entre eles. Hipérbole é o conjunto dos pontos de α cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ (sendo $0 < 2a < 2c$), em notação de conjunto $\{P \in \alpha : |PF_1 - PF_2| = 2a\}$, onde PF_1 denota a distância do ponto P ao ponto F_1 , PF_2 do ponto P ao ponto F_2 .

Elementos da Hipérbole:

I. F_1, F_2 : focos;

II. O : Centro;

III. A_1A_2 : eixo real ou transverso;

IV. B_1B_2 : eixo imaginário;

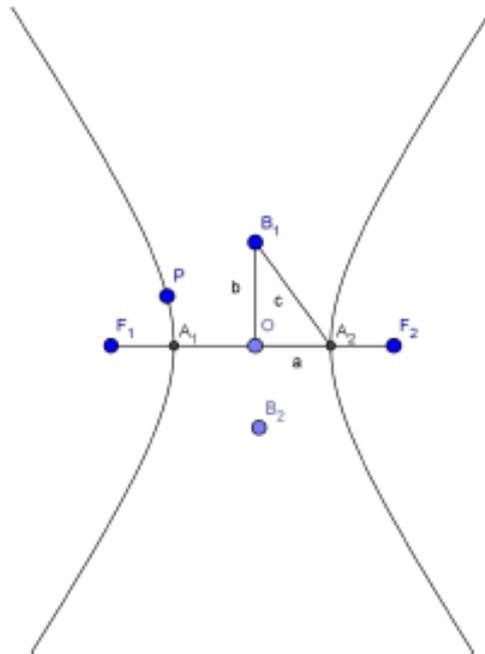
V. $2c$: distância focal;

VI. $2b$: medida do eixo imaginário

VII. $\frac{c}{a}$: excentricidade.

relação notável: $c^2 = a^2 + b^2$.

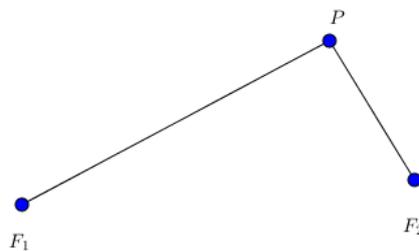
Figura 7 – Hipérbole de centro O



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos deduzir a equação de uma hipérbole com centro na origem do plano cartesiano, focos $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, onde $P = (x, y)$, eixo real no eixo das abscissas. A dedução é imediata: $P \in \text{hipérbole} \iff |PF_1 - PF_2| = 2a$, então:

Figura 8 – Ponto P pertencente a hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \mp 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \mp 2a$$

$$\begin{aligned}
(x+c)^2 + y^2 &= (x-c)^2 + y^2 \mp 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \\
4cx - 4a^2 &= \mp 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \implies cx - a^2 = \mp a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
(cx - a^2)^2 &= a^2(x-c)^2 + a^2y^2 \\
c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \\
(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \implies b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1.
\end{aligned}$$

As equações em que as posições da hipérbole mudam estão descritas abaixo:

Hipérbole com centro na origem do plano cartesiano e eixo real contido no eixo das ordenadas.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Hipérbole com centro no ponto (x_0, y_0) do plano cartesiano e eixo real paralelo ao eixo das abscissas: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.

Hipérbole com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo real paralelo ao eixo das ordenadas: $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$.

Definição 3.3. (Parábola) Dados um ponto F e uma reta d , pertencentes a um plano α , com $F \notin d$, seja p a distância entre F e d . Parábola é o conjunto dos pontos de α que estão a mesma distância de F e d , em notação de conjunto $\{P \in \alpha : PF = Pd\}$, onde PF denota a distância do ponto P ao ponto F e Pd a distância do ponto P a reta d (diretriz).

Elementos da Parábola:

I.F : Foco;

II.d : diretriz;

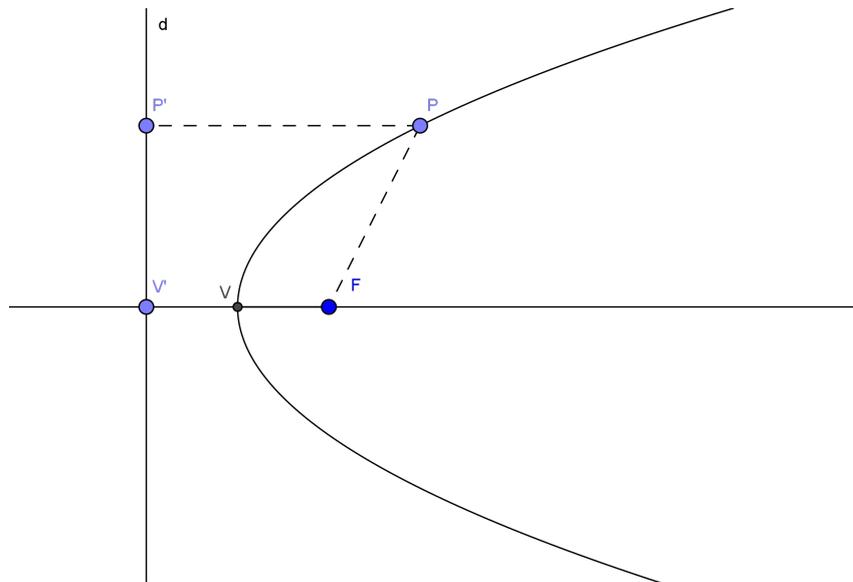
III.p : parâmetro;

IV.V : vértice;

V. reta VF : eixo de simetria

relação notável $VF = \frac{p}{2}$.

Figura 9 – Parábola



Fonte: Elaborada pelo autor.

Antes de deduzir a equação de uma parábola vamos definir a distância entre um ponto P e um conjunto como a menor das distâncias entre o ponto e os pontos do conjunto, assim por exemplo para determinarmos a distância entre um ponto P e uma reta d , basta determinarmos a distância entre P , e $Q \in d$, onde PQ é o segmento ortogonal a d . Vamos deduzir a equação de uma parábola de vértice $V = (0,0)$, foco $F = (\frac{p}{2}, 0)$ e a diretriz d tem equação $x = -\frac{p}{2}$. A dedução é imediata: $P \in \text{parábola} \iff PF = PP'$, então:

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} &= \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} \\ \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \\ x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 &= x^2 + px + \frac{p^2}{4} \\ y^2 &= 2px. \end{aligned}$$

As equações em que as posições da parábola mudam estão descritas abaixo:

Equação da parábola com foco no eixo y .

$$x^2 = 2py.$$

Equações da parábola com focos fora da origem e eixo de simetria paralelo aos eixos das ordenadas e abscissas respectivamente:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \quad , \quad (y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

Vamos mostrar agora um processo no qual será possível dada uma função quadrática do segundo grau com termo misto xy , reduzi-lá a uma das equações das cônicas: parábola, elipse ou hipérbole.

Seja dada a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g = 0.$$

Esta é equivalente à equação matricial

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [g] = [0]. (*)$$

Seja $A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$. Como A é uma matriz simétrica, pelo Teorema Espectral, existe uma base ortonormal β de \mathbb{R}^2 formada por autovetores da T_A . Assim, se t_1, t_2 são autovetores da transformação (pode ser que $t_1 = t_2$), existem autovetores v_1, v_2 associados a t_1, t_2 , respectivamente, tais que $\beta = \{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^2 . A matriz $P = [I_{\mathbb{R}^2}]_{\beta}^{\alpha}$, onde α é a base canônica de \mathbb{R}^2 , diagonaliza A ortogonalmente, já que $D = P^{-1}AP$ é a matriz diagonal $\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$ com $P^{-1} = P^t$. Portanto, $A = PDP^t$. (**)

Substituindo (**) em (*), obtemos a equação matricial $(\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} P) D (P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [g] = [0]$. (***)

O produto matricial $P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, que aparece na equação (***), é a matriz das coordenadas de um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ em relação à base β , pois

$$P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [I_{\mathbb{R}^2}]_{\beta}^{\alpha} [v]_{\alpha}.$$

Chamemos $[v]_{\beta}$ de $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Substituindo em (***), obtemos $\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [g] = [0]$ (****)

uma vez que

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

implica que

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = (P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix})^t = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^t (P^t)^t = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} P$$

e

$$P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P(P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = (PP^{-1}) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Se $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$, obtemos de (****) a equação

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [g] = [0],$$

ou seja, obtemos a equação

$$k_1(x')^2 + k_2(y')^2 + (dx_1 + ey_1)x' + (dx_2 + ey_2)y' + g = 0.$$

Como a equação acima não apresenta o termo misto $x'y'$, podemos reduzi-lá a uma das equações deduzidas nesta seção ou os casos degenerados, e assim determinar o lugar geométrico em \mathbb{R}^2 dado por $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g = 0$.

Vamos dar um exemplo de uma curva cônica onde seu eixo não é paralelo ao eixo das abscissas ou ordenadas.

Exemplo 3.1. Que lugar geométrico em \mathbb{R}^2 a equação $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 12 = 0$ representa?

Solução: Vamos reescrever a equação na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-12] = [0].(1)$$

Seja $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Como A é uma matriz simétrica, pelo Teorema Espectral, A é ortogonalmente diagonalizável. De fato, os autovalores de A são $t_1 = 1$ e $t_2 = 6$. Vamos determinar os autovetores associados a estes autovalores. Pela observação após o corolário 2.3 basta determinar uma solução não trivial da equação $A.X = 0$, tomando $t_1 = 1$.

Temos que : $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, resolvendo a equação matricial chegamos a solução $y = -2x$, que nos dá o autovetor $(1, -2)$ após normalizar obtemos o autovetor unitário

$v_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ e analogamente para $t_2 = 6$, encontramos o autovetor unitário $v_2 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ que são autovetores de t_1, t_2 , respectivamente. Assim $\beta = \{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^2 formada por autovetores da transformação. Seja $P = [I_{\mathbb{R}^2}]_{\alpha}^{\beta}$, onde α é a base canônica de \mathbb{R}^2 . Chamemos $D = P^{-1}.A.P$.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Como $A = P.D.P^t$, pois $P^{-1} = P^t$, a equação (1), fica:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot P^t \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-12] = [0].$$

Observando que $P^t \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é a matriz das coordenadas de um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ em relação à base β , chamemos $[v]_{\beta}$ de $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Substituindo na equação matricial anterior, teremos:

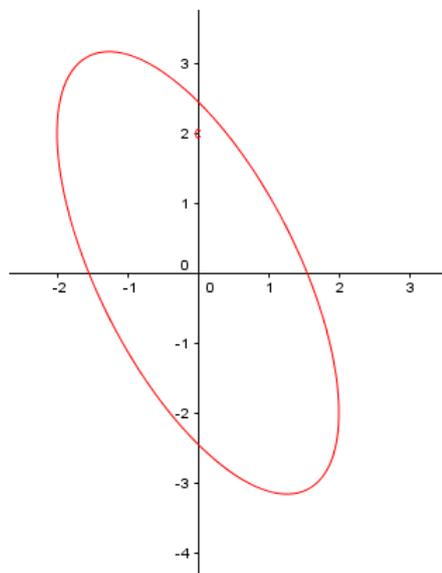
$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [-12] = [0].$$

Resolvendo o produto matricial acima, chegamos a equação $(x')^2 + 6(y')^2 = 12$, dividindo ambos os membros da equação por 12, teremos:

$$\frac{(x')^2}{12} + \frac{(y')^2}{2} = 1.$$

Concluimos que a equação (1) é uma elipse, podemos visualizar o gráfico com a ajuda do software Geogebra na figura [10] abaixo.

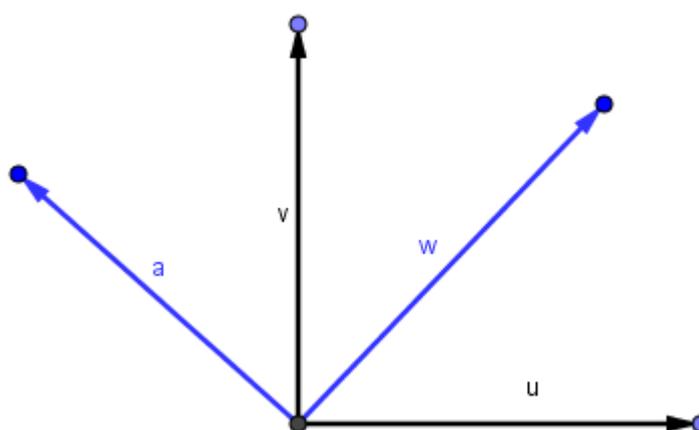
Figura 10 – Elipse com eixos não paralelos aos eixos coordenados



Fonte: Elaborada pelo autor.

No exemplo 3.1 observe que os eixos maior e menor da elipse não são paralelos aos eixos coordenados, isto se deve ao fato da mudança da base α para a base β , onde os eixos nesta base tem a direção dos autovetores do operador simétrico conforme o teorema espectral. Observe a figura [11], os vetores u, v são da base α e os vetores a, w da base β , após a mudança de base tudo se passa como se estivessemos realizando os cálculos no espaço vetorial nesta base β , com a ajuda do processo descrito acima é possível mudar de eixos coordenados e eliminar o termo misto $x.y$ na equação quadrática nas variáveis x e y e passar a trabalhar com as variáveis x', y' .

Figura 11 – mudança de base



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na próxima seção mostraremos os tipos de curvas cônicas, determinadas com o processo acima e com a ajuda do software Geogebra plotamos o gráfico para visualizar a curva.

3.1 Aplicações e secções cônicas.

Nesta seção utilizaremos os conteúdos desenvolvidos ao longo do trabalho, como ferramenta para determinar a cônica através de sua equação.

3.1.1 Algumas curiosidades

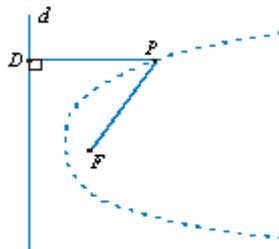
Como vimos neste capítulo as cônicas apresentam algumas propriedades interessantes, evidentemente cada qual tem as suas respectivas, com base nestas propriedades vamos mostrar algumas aplicações que estão presentes em nosso dia a dia.

Aplicações da parábola.

Para compreender melhor estas aplicações pode-se consultar [Wagner 1997]

Como vimos a parábola é um conjunto de pontos com uma propriedade específica, onde são dados uma reta d (diretriz) e um ponto fixo F (foco), com F fora de d tal que todos os pontos da parábola estão a mesma distância de F e d .

Figura 12 – Parábola de foco F e diretriz d

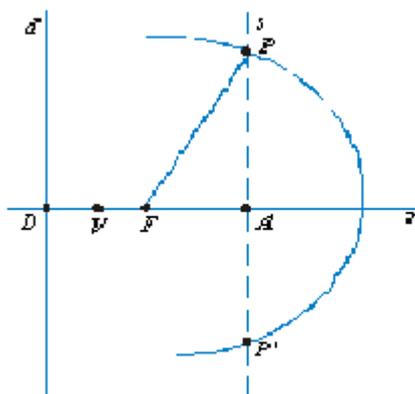


Fonte – <http://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm>

As parábolas são curvas bem conhecidas e estão presentes em nosso cotidiano na natureza, tecnologia, etc. Por exemplo: nos faróis dos carros, espelhos de telescópios, trajetória de uma bola (é próxima de uma parábola, pois precisaríamos de condições ideais), de futebol ao ser chutada, etc. Como podemos ver são vários os exemplos, vamos discorrer este assunto para justificarmos o porquê destes objetos serem parabólicos.

Na figura [12], como $PD = PF$ segue-se que P pertence a parábola de foco F e diretriz d . Para que possamos obter os infinitos pontos da parábola de foco F e diretriz d tracemos uma reta r passando por F e perpendicular a d obtendo assim o ponto $r \cap d = D$.

Figura 13 – Construção da parábola

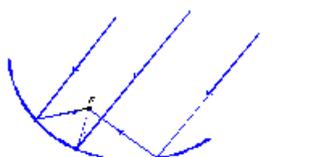


Fonte – <http://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm>

O segmento DF chama-se parâmetro da parábola e o ponto V , médio de DF , é o vértice da parábola. Para cada ponto A da semi-reta VF , trace a reta s , perpendicular a r . A circunferência de centro F e raio AD corta s nos pontos P e P' , que pertencem a parábola. Como $PF = AD$, a distância de P ao foco é igual à sua distância a diretriz.

Voltando em alguns objetos já citados, observemos dois em especial: os faróis e espelhos astronômicos. Os sinais que são recebidos (ondas de rádio ou luz) que sabemos se propagar pelo ar, são muito fracos. Por este motivo é necessário captá-los em uma área relativamente grande e concentrá-los em um único ponto para que sejam naturalmente amplificados. Portanto, a superfície da antena ou do espelho deve ser de tal modo que todos os sinais recebidos de uma mesma direção sejam direcionados para um único ponto após a reflexão.

Figura 14 – A antena ideal converge todos os sinais recebidos a um ponto fixo



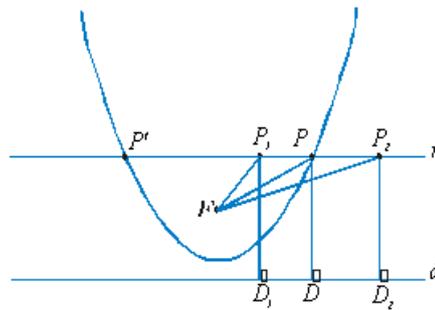
Fonte – <http://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm>

A parábola possui exatamente esta propriedade e, por isso, as antenas e os espelhos

precisam ser parabólicos. Para demonstrar esta afirmação, vejamos duas propriedades da parábola que vão confirmar o que dissemos.

Primeira propriedade: Notemos que inicialmente uma parábola separa o plano em duas regiões: uma, onde cada ponto tem distância ao foco menor que a sua distância à diretriz (comumente chamada região interior) e outra onde a distância de cada ponto ao foco é maior que a distância a diretriz (chamada região exterior).

Figura 15 – Primeira propriedade da parábola



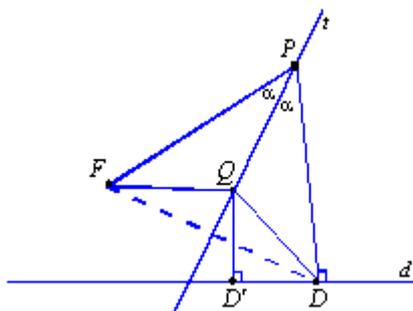
Fonte – <http://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm>

A figura anterior mostra uma parábola de foco F e diretriz d e uma reta r paralela a d cortando a curva em P e P' . Se o ponto P_1 da reta r é interior ao segmento PP' , então $P_1F < PF = PD = P_1D_1$ e, portanto, P_1 é interior a parábola. Por outro lado, se P_2 é um ponto da reta r exterior ao segmento PP' , então $P_2F > PF = PD = P_2D_2$ e P_2 é exterior a parábola.

Segunda propriedade: Os raios de luz e as ondas de rádio propagam-se no espaço em linha reta. Aliás, isso não é inteiramente verdadeiro, mas para o observador da Terra é praticamente. Quando esses sinais são refletidos em um ponto de uma superfície, tudo se passa como se estivessem sendo refletidos em um plano tangente à superfície nesse ponto, de acordo com a famosa lei da Física: “o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão”

Consideremos agora um ponto P qualquer da parábola de foco F e diretriz d , e ainda a reta t , bissetriz do ângulo FPD . Vamos mostrar geometricamente que t é tangente à parábola.

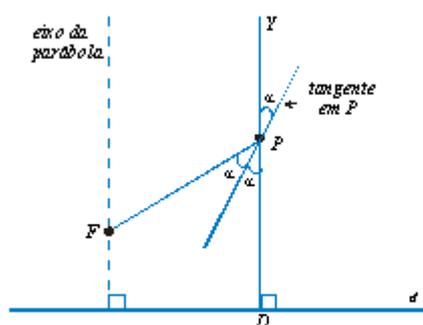
Figura 16 – Segunda propriedade da parábola



Fonte – <http://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm>

No triângulo FPD , como $PF = PD$, a reta t , bissetriz do ângulo FPD , é também mediana e altura. Em outras palavras, a reta t é mediatriz do segmento FD . Seja agora Q , um ponto qualquer da reta t , distinto de P . Se D' é a projeção de Q sobre d , temos: $QF = QD > QD'$. Portanto, Q é exterior à parábola. Ora, o ponto P da reta t pertence à parábola e todos os outros pontos de t são exteriores. Logo, t é tangente à parábola em P .

Figura 17 – Segunda propriedade da parábola: reflexão



Fonte – <http://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm>

Observe, na figura acima, a semi-reta PY , prolongamento do segmento DP . Como a

tangente à parábola em P é bissetriz do ângulo FPD , temos que PY e PF fazem ângulos iguais com essa tangente. Por isso, todo sinal recebido na direção do eixo da parábola toma a direção do foco após a reflexão.

Figura 18 – Antena parabólica-telescópio de rádio

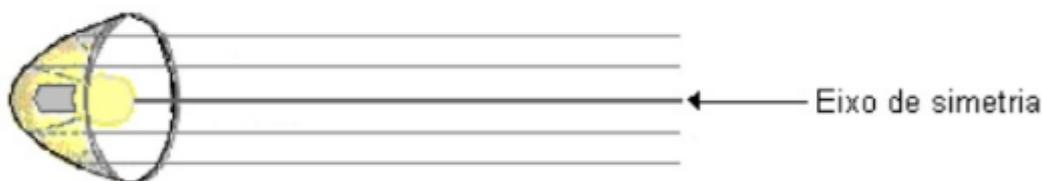


Fonte – <https://pt.dreamstime.com/fotografia-de-stock-antena-parabolica-telescopia-de-radio-image31205822>

Figura 19 – Farol de carro

Faróis de carros

- Ao ligar faróis de carro, os raios de luz, provenientes da lâmpada que se encontra no foco da parábola, incidem num espelho parabólico e são refletidos paralelamente ao eixo de simetria



Fonte – fonte:<http://sites.unicentro.br/wp/petfisica/2016/03/30/parabolas-as-curvas-misteriosas/>

Nos dois casos acima: Farol de carro e Antena parabólica-telescópio de rádio, suas superfícies são denominadas parabolóides, a parábola está na interseção de um plano com esta superfície, o plano que contém o raio luminoso ou no outro caso (contém as ondas sonoras), e o vértice do parabolóide.

Aplicações da elipse

Para compreender melhor estas aplicações pode-se consultar [Esquef e Ribeiro 2012].

Assim como a parábola a elipse também esta presente em nosso cotidiano nas mais diversas situações. Pode-se encontrar aplicações da elipse na Astronomia, Física, Engenharia Civil, Odontologia, Ciências , etc. Por exemplo, a trajetória que o planeta Terra descreve ao redor do Sol é elíptica, arcos em forma de semi-elipse na construção de pontes de concretos e de pedras, Resistência dos materiais, teoria de correntes elétricas estacionárias, dispositivo de iluminação de dentistas. Vamos mostrar algumas aplicações bem conhecidas. Aprende-se em geral no ensino médio que as órbitas dos planetas ao redor do Sol são elípticas, ou seja, são regidas pelas três leis de Kepler das quais a primeira afirma que: “a órbita de qualquer planeta ao redor do Sol é elíptica com o Sol em um dos focos”. Vamos Criar um sistema cartesiano em um plano orbital. Antes vamos definir, o que é afélio e periélio.

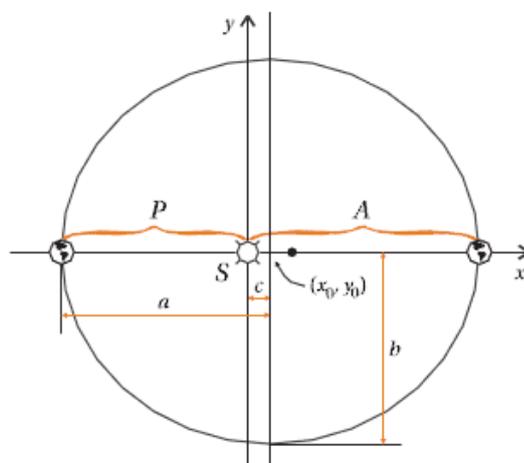
Afélio: O ponto da órbita em que o planeta está mais afastado do Sol.

Periélio: O ponto da órbita em que o planeta está mais próximo do Sol.

Algumas distâncias astronômicas são encontradas em livros de Astronomia ou em sites confiáveis.

No plano orbital do planeta (plano que contém sua órbita), vamos imaginar com o auxílio da figura [20], um eixo x passando pelos dois focos da elipse: um o Sol, S , e o outro o pequeno ponto a direita. O eixo y é perpendicular ao x e passa pelo Sol, (o Sol é “fixo”), também temos o planeta Terra, no seu afélio e periélio, sendo A e P , respectivamente, a distância do afélio e periélio ao Sol.

Figura 20 – Planeta Terra nos pontos afélio e periélio



Fonte – <http://rpm.org.br/cdrpm/77/7.html>

Vamos agora determinar a posição do planeta em função de A e P . Partindo da equação da elipse, conforme demonstrado no capítulo 3, tem-se $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ em que a é metade

do eixo maior e b metade do eixo menor e x_0, y_0 são as coordenadas do centro da elipse no sistema cartesiano. A distância entre os focos é $2c$. No caso da figura [20], temos que $x_0 = c$ e $y_0 = 0$. Portanto, a equação da elipse fica $\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (*)

Da figura, temos que $A + P = 2a$ e $P + 2c = A$, o que permite obter a e c em função de A e P : $a = \frac{A+P}{2}$ e $c = \frac{A-P}{2}$. Substituindo esses valores de a e c na relação conhecida entre a, b e c , ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$, obtemos b em função de A e P :

$$\left(\frac{A+P}{2}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{A-P}{2}\right)^2,$$

isolando b e fazendo os cálculos chegamos a $b^2 = A.P$. A equação (*) da elipse pode ser reescrita em função de A e P , da seguinte maneira:

$$\frac{\left(x - \frac{A-P}{2}\right)^2}{\left(\frac{A+P}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{A.P} = 1. (**)$$

A excentricidade $e = \frac{c}{a}$ da elipse é dada por $e = \frac{\frac{A-P}{2}}{\frac{A+P}{2}} = \frac{A-P}{A+P}$.

A tabela a seguir mostra, em Unidade Astronômica (U.A. @), as medidas A , as medidas P e as excentricidades dos planetas, calculadas usando as relações acima.

Figura 21 – Tabela com as excentricidades dos planetas

Planeta	A (U.A.)	P (U.A.)	e
Mercúrio (Me)	0,46670	0,30750	0,20563
Vênus (V)	0,72823	0,71834	0,00677
Terra (T)	1,01671	0,98329	0,01671
Marte (M)	1,66599	1,38133	0,09341
Júpiter (J)	5,45517	4,95156	0,04839
Saturno (S)	10,05351	9,02063	0,05413
Urano (U)	20,09647	18,28606	0,04717
Netuno (N)	30,32713	29,81080	0,00859

Fonte – <http://rpm.org.br/cdrpm/77/7.html>

@Unidade Astronômica (U.A): medida de distância utilizada em Astronomia. A unidade Astronômica é definida como a distância média entre a Terra e o Sol. Uma U.A equivale a 149597870,7km. Observando a tabela podemos analisar alguns aspectos das excentricidades das órbitas. Como vimos a excentricidade de uma elipse é tal que $0 < e < 1$; para $e = 0$, a é uma elipse degenerada em uma circunferência e, para $e = 1$, um segmento de reta. Se a excentricidade se aproxima de zero, então A se aproxima de P e a equação (**) tende a equação da circunferência: $x^2 + y^2 = R^2$, com $R^2 \cong A^2 \cong P^2$.

Observando as excentricidades na figura [21], vemos que, exceto Mercúrio, elas estão na ordem dos centésimos ou milésimos, ou seja, todas bem próximas de zero. Portanto, podemos

auferir que as órbitas (trajetórias) tem aspectos parecidos com circunferências. Na figura a seguir podemos observar as órbitas de alguns planetas.

Figura 22 – Órbitas de alguns planetas

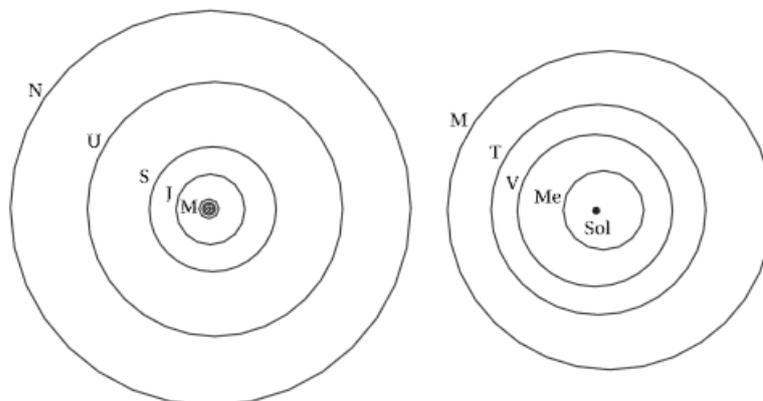


figura 2
escala: 3 mm = 1 U.A.

figura 3
escala: 3 cm = 1 U.A.

Fonte – <http://rpm.org.br/cdrpm/77/7.html>

Observe que, na órbita de Mercúrio (Me), o Sol aparece bem mais deslocado do centro da elipse do que na da Terra ou na de Vênus; é isso porque a excentricidade de Mercúrio é cerca de 12 vezes maior que a da Terra e cerca de 30 vezes maior que a de Vênus.

Seguem abaixo duas imagens de objetos elípticos:

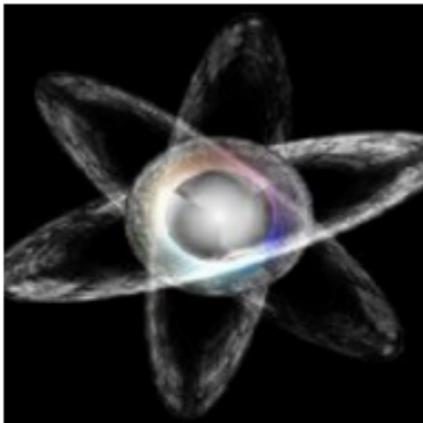
Figura 23 – Órbita elíptica dos planetas e do planeta X (O "planeta X" é um suposto corpo celeste do sistema solar cuja órbita estaria além da de Netuno)



Órbita elíptica do Planeta X

Fonte – <http://mixtokent.wixsite.com/blog/single-post/2016/09/09/Nibiru-ou-Planeta-X-na-busca-pelo-planeta-astrC3B4nomos-descobrem-objetos-nos-confins-do-Sistema-Solar>

Figura 24 – estrutura de um átomo: órbita dos elétrons elíptica



Fonte – <http://etevm.g12.br/blogs/matematica/page/18/>

Aplicações da hipérbole

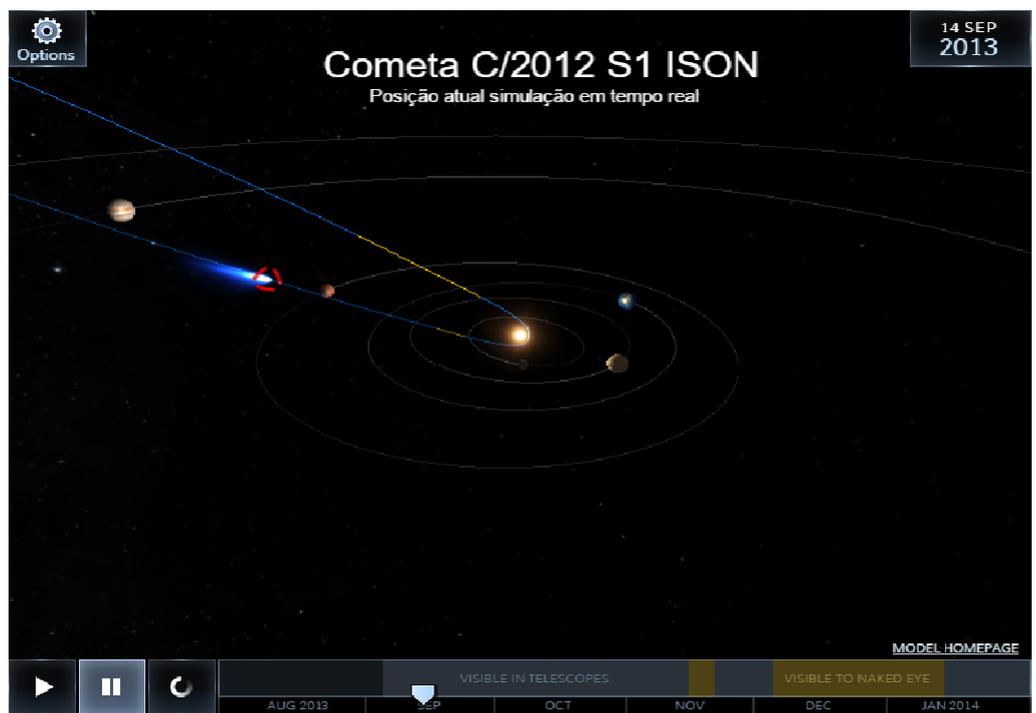
Vamos mostrar agora algumas aplicações da hipérbole, assim como foi discorrido na parábola e elipse.

Já ouvimos ou até mesmo vimos cometas, uma aplicação interessante da hipérbole está nas órbitas dos cometas. Vamos explicar o que é um cometa: São pedras “pedras de gelo sujo”, o gelo dessas pedras é formado principalmente por material volátil (passa direto do estado sólido para o estado gasoso) e a “sujeira” é constituída principalmente por poeira e pedras (dos tamanhos mais variados). (consulte [Casas 2004])

Um fato curioso é que os cometas podem descrever três tipos de órbitas: elípticas, parabólicas ou hiperbólicas. Pelo fato de os cometas possuírem massa muito pequena a influência gravitacional sobre os planetas é quase nula. Entretanto, em virtude das perturbações gravitacionais do Sol e de alguns planetas muito grandes como Júpiter e Saturno, a órbita de alguns cometas podem ser alteradas. Os cometas cujas órbitas são hiperbólicas ou parabólicas não são periódicos pois sua órbita não é fechada, é o mesmo que imaginarmos um ponto P descrevendo a trajetória de um ramo da hipérbole e se deslocando para o infinito, ou seja, para as profundezas do nosso sistema solar.

Na figura abaixo esta registrado em tempo real a imagem do cometa (na data da figura) C/2012 S1 ISON.

Figura 25 – Trajetória hiperbólica do cometa C/2102 S1 ISON



Fonte – <http://www.apolo11.com/ison.php>

Na engenharia civil destaca-se também a utilização da hipérbole em estruturas de construções, como no hiperbolóide (sólido limitado obtido pela rotação de uma hipérbole em torno do seu eixo). Por exemplo, na imagem abaixo temos uma torre de refrigeração de uma usina nuclear, os hiperbolóides são utilizados devido a sua estrutura física e rigidez.

Figura 26 – Torre de refrigeração de uma usina nuclear



Fonte – <http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2013/04/conicas-noco-es-intuitivas-e-aplicacoes.html>:

3.1.2 Identificando cônicas através de suas equações

Nesta parte do trabalho iremos encontrar a cônica determinada pelas curvas de nível de uma função quadrática de duas variáveis, ou seja, de uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g$, onde $a \neq 0$, $b \neq 0$ ou $c \neq 0$, são as cônicas ou as cônicas degeneradas.

Exemplo 3.2. Caracterize a cônica representada pela equação $4x^2 + 9y^2 = 36$ e esboce seu gráfico.

Solução: Dividindo por 36, temos:

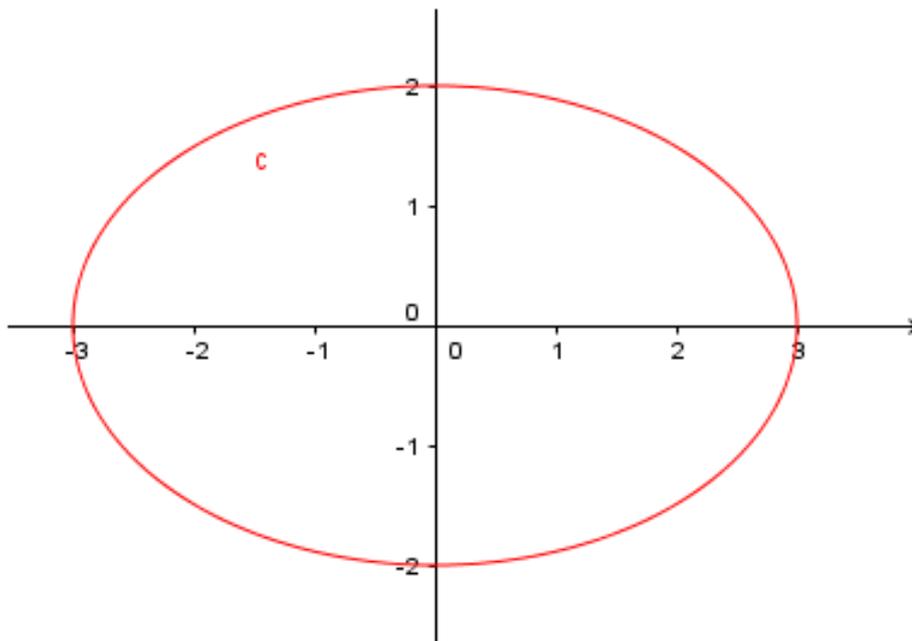
$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

portanto a cônica é uma elipse com centro na origem e eixo maior horizontal tal que:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$$

Figura 27 – Elipse com centro em (0,0)

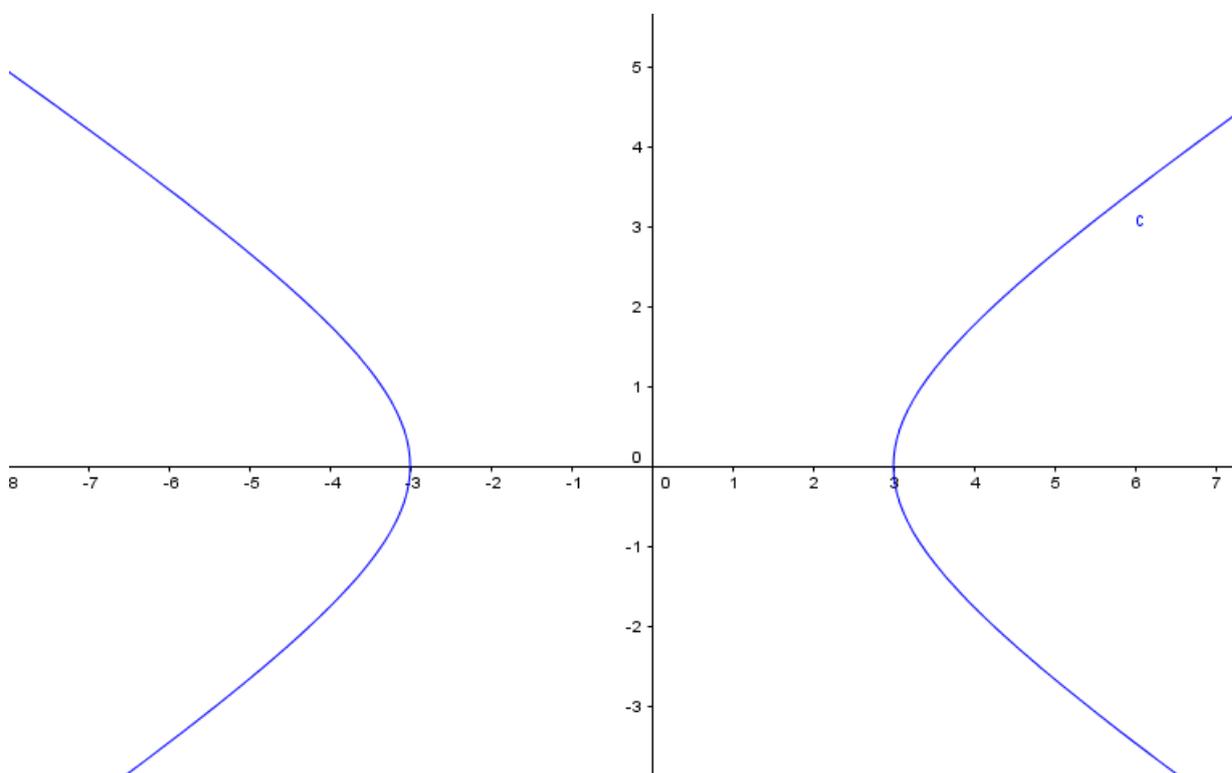


Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.3. Caracterize a cônica representada pela equação $4x^2 - 9y^2 = 36$, em seguida faça um esboço do seu gráfico.

Solução: $4x^2 - 9y^2 = 36 \implies \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ portanto a cônica é uma hipérbole com centro $(0, 0)$, eixo real horizontal, pois a diferença é feita de x^2 para y^2 e $\left. \begin{array}{l} a^2 = 9 \implies a = 3 \\ b^2 = 4 \implies b = 2 \end{array} \right\} \implies c = \sqrt{13}$

Figura 28 – Hipérbole com centro na origem

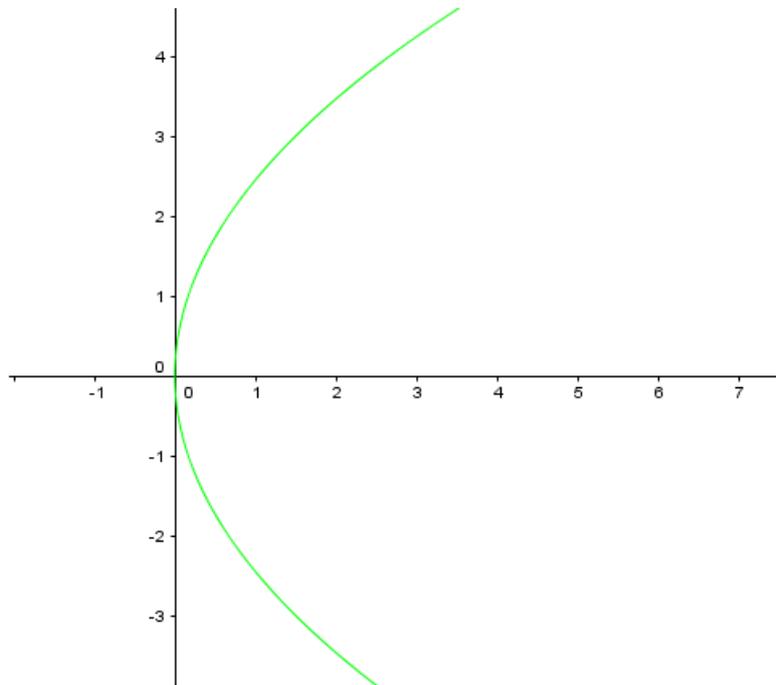


Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.4. Qual é a cônica representada pela equação $y^2 = 6x$? esboçe seu gráfico.

Solução: $y^2 = 6x \implies y^2 = 2 \cdot 3 \cdot x$, portanto a cônica é uma parábola com vértice na origem, eixo horizontal e parâmetro $p = 3$.

Figura 29 – Parábola com centro na origem



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.5. Qual é a cônica representada pela equação $9x^2 + 16y^2 - 90x - 160y + 481 = 0$? Esboce seu gráfico.

Solução: Para encontrarmos a cônica representada por tal equação vamos completar os quadrados nas variáveis x e y . Assim :

$$9x^2 - 90x + 16y^2 - 160y + 481 = 0$$

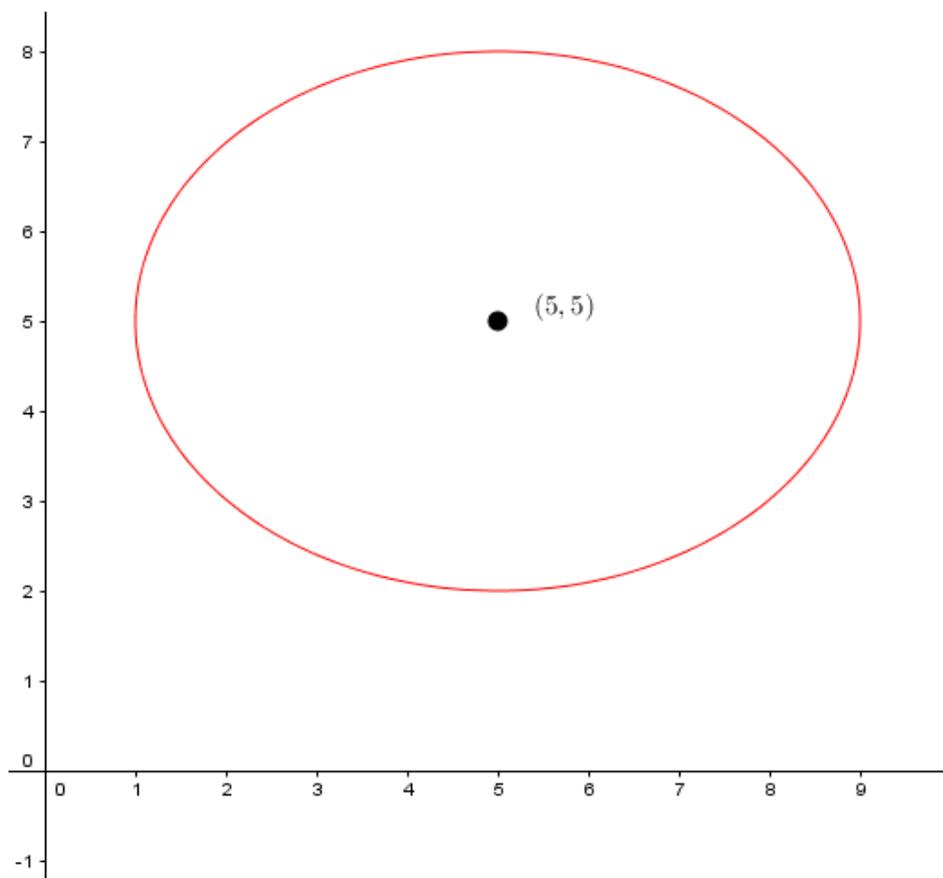
$$9.(x^2 - 10x + 5^2) + 16.(y^2 - 10y + 5^2) = -481 + 225 + 400$$

$$9.(x - 5)^2 + 16.(y - 5)^2 = 144$$

$$\frac{(x - 5)^2}{16} + \frac{(y - 5)^2}{9} = 1.$$

Portanto, a cônica representada pela equação é uma elipse de centro $(5, 5)$. Observe o gráfico abaixo.

Figura 30 – Elipse com centro no ponto (5,5)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.6. Qual é a cônica representada pela equação $4x^2 - y^2 - 32x + 8y + 52 = 0$? Esboce seu gráfico.

Solução: Vamos completar os quadrados nas variáveis x e y . Assim:

$$4x^2 - 32x - y^2 + 8y = -52$$

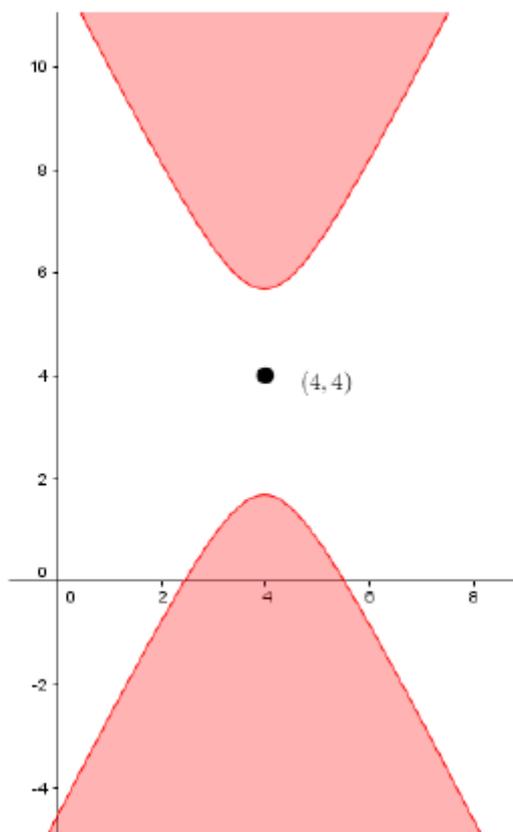
$$4.(x^2 - 8x + 4^2) - 1.(y^2 - 8y + 4^2) = -52 + 64 - 16$$

$$4.(x - 4)^2 - (y - 4)^2 = -4$$

$$\frac{(y - 4)^2}{4} - \frac{(x - 4)^2}{1} = 1$$

Portanto a cônica representada pela equação é uma hipérbole de centro $(4, 4)$ e eixo real paralelo ao eixo das ordenadas. Observe o gráfico abaixo:

Figura 31 – Hipérbole com centro no ponto (4,4)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Daqui para frente apresentaremos exemplos nos quais as equações estão munidas do termo misto (xy), ou seja, são cônicas onde seus eixos não são paralelos aos eixos coordenados.

Para determinarmos o tipo de cônica associada a equação precisaremos utilizar o processo descrito neste capítulo .

Exemplo 3.7. Determine o lugar geométrico em \mathbb{R}^2 representado pela equação $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 7\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y + 10 = 0$ (*)

Solução: Notemos que a equação (*) é equivalente a equação matricial

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} (**)$$

Chame $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Como A é uma matriz simétrica, pelo Teorema Espectral, A é ortogonalmente diagonalizável. De fato, os autovalores de A são $t_1 = 3, t_2 = 1$. O vetor unitário $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e o vetor unitário $v_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ são autovetores de t_1 e t_2 , respectivamente. Assim, $\beta = \{v_1, v_2\}$ é uma

base ortonormal de \mathbb{R}^2 formada por autovetores da transformação. Seja $P = [I_{\mathbb{R}^2}]_{\alpha}^{\beta}$, onde α é a base canônica de \mathbb{R}^2 . Chame $D = P^{-1}AP$. Temos

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $A = PDP^t$, já que $P^{-1} = P^t$, segue de (***) que

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (***)$$

Observemos que o produto matricial $P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é a matriz das coordenadas de um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ em relação à base β , pois

$$P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [I_{\mathbb{R}^2}]_{\beta}^{\alpha} [v]_{\alpha}.$$

Chamemos $[v]_{\beta}$ de $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Substituindo em (***) , obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$3(x')^2 + (y')^2 + 12x' - 2y' + 10 = 0. \quad (***)$$

Com a mudança da base canônica α para a base β , reduzimos a equação (*) à equação (***) , que não apresenta o termo misto $x'y'$. Agora, vamos reduzir (***) completando quadrados. Ora,

$$3(x')^2 + (y')^2 + 12x' - 2y' + 10 = 0$$

equivale à equação

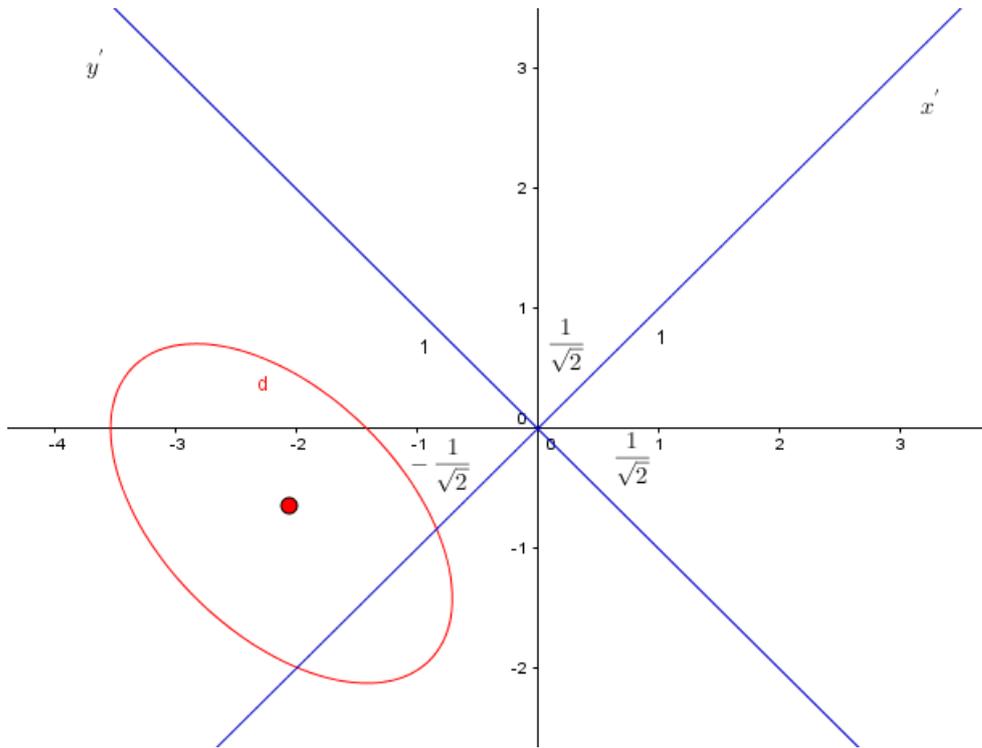
$$3(x' + 2)^2 + (y' - 1)^2 = 3,$$

ou seja,

$$(x' + 2)^2 + \frac{(y' - 1)^2}{3} = 1.$$

Portanto, a equação (*) representa uma elipse. Para esboçarmos o gráfico dessa elipse, precisamos considerar as novas coordenadas x' e y' . Assim, nesse sistema de coordenadas, a elipse tem centro $(-2, 1)$, semi-eixo menor medindo 1 e semi-eixo maior medindo $\sqrt{3}$, sendo este semi-eixo paralelo ao eixo y' . Conforme figura abaixo:

Figura 32 – Elipse rotacionada



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.8. Que lugar geométrico em \mathbb{R}^2 a equação $4x^2 - 3y^2 + 24xy - 156 = 0$ representa?

Solução: A equação $4x^2 - 3y^2 + 24xy - 156 = 0$ equivale a equação matricial

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -156 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

A matriz $\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$ é simétrica. Logo, pelo teorema Espectral, A é ortogonalmente diagonalizável. De fato, $c_1 = 13$ e $c_2 = -12$ são os autovalores de A . O vetor $v_1 = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ é um autovetor associado a $c_1 = 13$ e o vetor $v_2 = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ é um autovetor associado a $c_2 = -12$. Logo, a base $\beta = \{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^2 formada por autovetores. Seja $P = [I_{\mathbb{R}^2}]_{\alpha}^{\beta}$, onde α é a base canônica de \mathbb{R}^2 . Chamemos $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Temos:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Chamando $[v]_{\beta}$ de $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, onde $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, de (1) e (2) obtemos a equação matricial

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -156 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix},$$

que equivale a equação

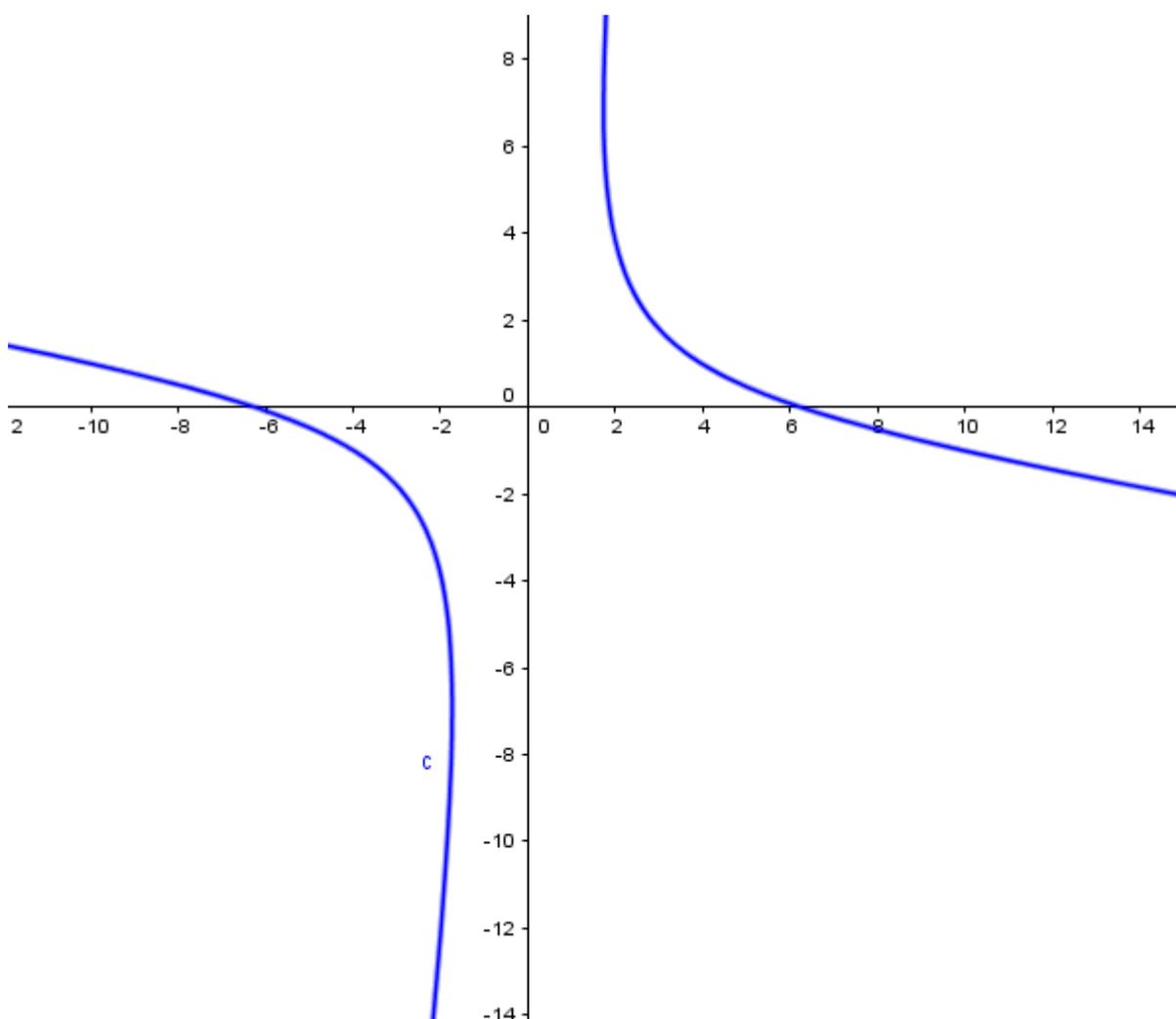
$$13(x')^2 - 12(y')^2 - 156 = 0,$$

ou seja,

$$\frac{(x')^2}{12} - \frac{(y')^2}{13} = 1.$$

Portanto, a equação $4x^2 - 3y^2 + 24xy - 156 = 0$ representa uma hipérbole. Com a utilização do software Geogebra podemos visualizar, observe o gráfico abaixo correspondente a equação acima.

Figura 33 – Hipérbole rotacionada



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.9. Determine o lugar geométrico em \mathbb{R}^2 determinado pela equação $2x^2 + 2\sqrt{2}xy + y^2 - 12 = 0$.

Solução: Vamos reescrever a equação na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [0] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-12] = [0].$$

Chame $A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$. (1) Como A é uma matriz simétrica, pelo Teorema Espectral, A é ortogonalmente diagonalizável. De fato, os autovalores de A são $t_1 = 0$ e $t_2 = 3$. O vetor unitário $v_1 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3})$ e o vetor unitário $v_2 = (\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ são autovetores de t_1, t_2 , respectivamente.

Assim $\beta = \{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^2 formada por autovetores da transformação. Seja $P = [I_{\mathbb{R}^2}]_{\alpha}^{\beta}$, onde α é a base canônica de \mathbb{R}^2 . Chamemos $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Como $A = P \cdot D \cdot P^t$, pois $P^{-1} = P^t$, a equação (1), fica:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot P^t \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [0] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-12] = [0].$$

Observando que $P^t \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é a matriz das coordenadas de um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ em relação à base β , chamemos $[v]_{\beta}$ de $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Substituindo na equação matricial anterior, teremos:

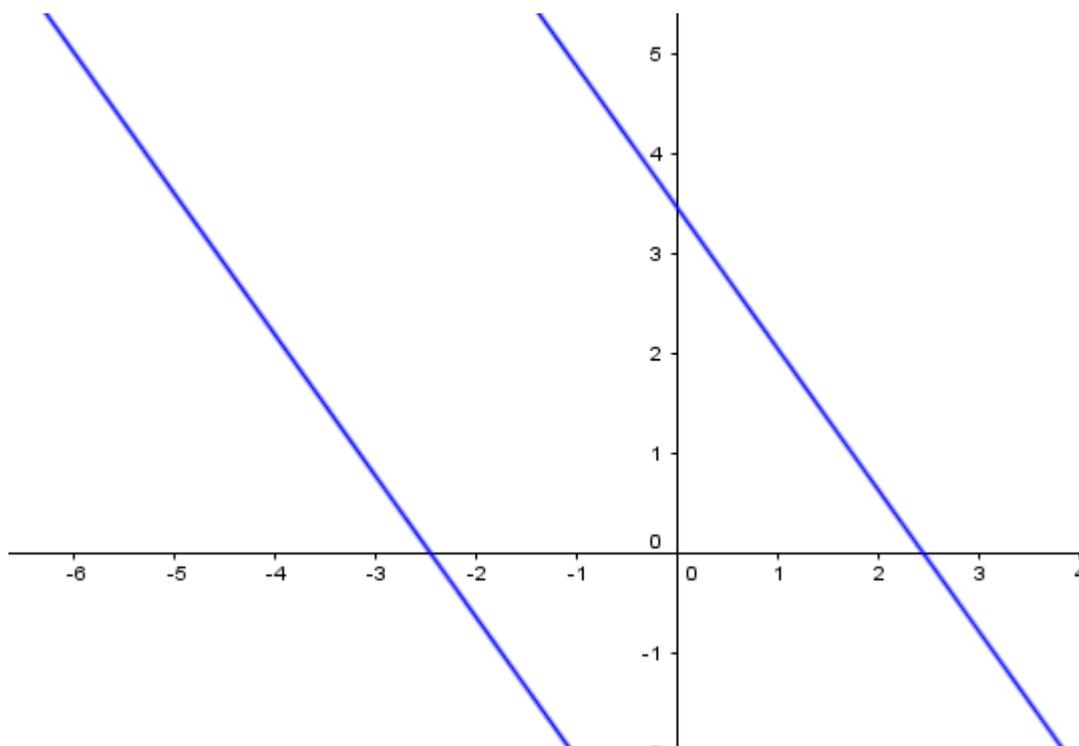
$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [0] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [-12] = [0]. (2)$$

Portanto, realizando os produtos matriciais a equação (2), fica:

$$3(y')^2 - 12 = 0.$$

Concluimos que a curva determinada pela equação é um par de retas paralelas. Podemos visualizar a curva com a ajuda do software Geogebra, conforme imagem abaixo:

Figura 34 – Retas paralelas



Fonte: Elaborada pelo autor.

Identificador de cônicas

Nesta parte do trabalho mostraremos como identificar uma cônica nos casos não degenerados, (mesmo que seja degenerada esta fórmula trata-se de um processo bem prático que nos ajuda orientando, já que existe uma relação entre a cônica e sua degeneração) uma vez conhecida sua equação, a vantagem está no fato de que podemos saber de que curva estamos falando antes mesmo de realizar todos os processos elaborados ao longo do trabalho, assim chamaremos esta fórmula de identificador de cônica. Entretanto, antes precisaremos enunciar o seguinte:

Teorema 3.1. (Identificador de cônica) Dada uma cônica definida pela equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g = 0$. Sejam t_1, t_2 os autovalores associados a sua matriz simétrica; então:

i. Se $t_1 \cdot t_2 > 0$ esta equação representa uma elipse, ou suas degenerações (um ponto ou o vazio).

ii. Se $t_1 \cdot t_2 < 0$ esta equação representa uma hipérbole ou sua degeneração (par de retas concorrentes).

iii. Se $t_1 \cdot t_2 = 0$ esta equação representa uma parábola ou suas degenerações (par de retas paralelas, uma reta ou o vazio).

Demonstração: Vimos que a equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g = 0$ pode ser representada,

após mudança de base (ortonormal), como:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [g] = [0],$$

ou seja, obtemos a equação:

$$t_1(x')^2 + t_2(y')^2 + (dx_1 + ey_1)x' + (dx_2 + ey_2)y' + g = 0. (*)$$

i. Vamos analisar primeiramente o caso em que $t_1 \neq 0$ e $t_2 \neq 0$. Note que podemos reescrever a equação (*) como $t_1(x')^2 + t_2(y')^2 + k = 0$, onde $k = (dx_1 + ey_1)x' + (dx_2 + ey_2)y' + g$. Assim, temos que se:

1. t_1 e t_2 forem ambos positivos, teremos para $k < 0$ uma elipse; para $k = 0$ teremos um ponto e para $k > 0$ teremos o conjunto vazio.

2. t_1 e t_2 forem ambos negativos, também teremos uma elipse, um ponto ou o vazio, conforme k seja positivo, negativo ou nulo.

ii. t_1 e t_2 tiverem sinais opostos, poderemos ter uma hipérbole, quando $k \neq 0$, ou um par de retas concorrentes se $k = 0$.

iii. Vamos considerar agora a situação em que $t_1 = 0$ (e, portanto $t_2 \neq 0$). Como vimos partindo da equação (*), chegamos a equação $t_2(y')^2 + (dx_1 + ey_1)x' + (dx_2 + ey_2)y' + g$. Notemos que se:

1. $(dx_1 + ey_1) \neq 0$ teremos uma parábola.

2. $(dx_1 + ey_1) = 0$, poderemos ter um par de retas paralelas, uma reta ou o vazio.

3. O caso em que $t_2 = 0$ é analisado de maneira análoga. □

Teorema 3.2. O determinante associado à matriz $\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$ é igual ao produto de seus autovalores $t_1.t_2$

Demonstração: De fato: Seja $A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$, temos que seu determinante é dado por: $a.c - \frac{b^2}{4} =$

$(4ac - b^2)/4$, por outro lado, o polinômio característico é dado por $p_A(t) = \det \begin{bmatrix} t - a & -\frac{b}{2} \\ -\frac{b}{2} & t - c \end{bmatrix}$,

assim $p(t) = (t - a).(t - c) - \frac{b^2}{4} = t^2 - t(a + c) + ac - \frac{b^2}{4}$, sendo t_1, t_2 as raízes, que são os autovalores de A , desta função quadrática, o produto das raízes é dado por: $ac - \frac{b^2}{4} = (4ac - b^2)/4$.

□

Assim o sinal de $t_1.t_2$ é o mesmo de $-(\frac{b^2}{4} - ac)$, que também tem o mesmo sinal de $-(b^2 - 4ac)$. Portanto, podemos reescrever o teorema anterior em função do “discriminante” $b^2 - 4ac$.

Teorema 3.3. (Identificador de cônica) Dada a equação $t_1(x')^2 + t_2(y')^2 + (dx_1 + ey_1)x' + (dx_2 + ey_2)y' + g = 0$., esta equação no plano representará:

- i. uma elipse ou suas degenerações, se $b^2 - 4ac < 0$
- ii. uma parábola ou suas degenerações, se $b^2 - 4ac = 0$
- iii. uma hipérbole ou suas degenerações, se $b^2 - 4ac > 0$.

Exemplo 3.10. Classifique a cônica representada pela equação $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 16 = 0$.

Solução: Vamos utilizar o teorema 3.3, para classificar a cônica dada pela equação acima, temos que $a = 3, b = 10$ e $c = 3$. Calculemos o discriminante $b^2 - 4ac$. Temos : $10^2 - 4.3.3 = 100 - 36 = 64 > 0$, assim pelo teorema 3.3 trata-se de uma hipérbole. Podemos visualizar o gráfico [35] desta equação, plotado no software Geogebra.

Figura 35 – Hipérbole rotacionada

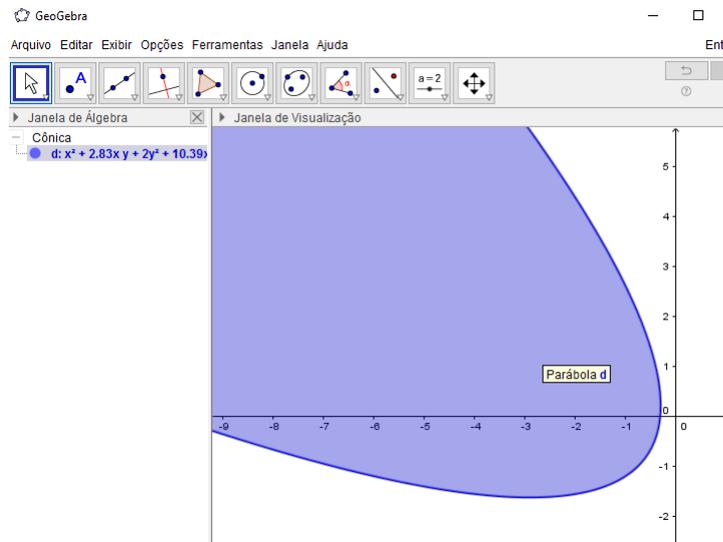


Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.11. Classifique a cônica definida pela equação $x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + 6\sqrt{3}x + 3 = 0$.

Solução: Vamos utilizar o teorema 3.3, para classificar a cônica determinada pela equação. Observemos que $a = 1, b = 2\sqrt{2}, c = 2$, assim temos que o discriminante é: $(2\sqrt{2})^2 - 4.1.2 = 8 - 8 = 0$, logo pelo teorema 3.3, concluímos que se trata de uma parábola. Podemos visualizar o gráfico [36] desta equação, com a ajuda do software Geogebra.

Figura 36 – Parábola rotacionada

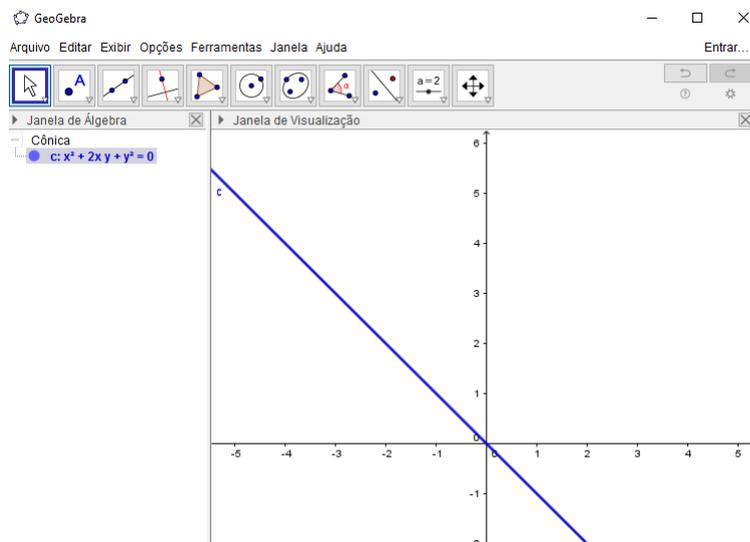


Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.12. Classifique a cônica determinada pela equação $x^2 + 2xy + y^2 = 0$.

Solução: Temos que $a = 1$, $b = 2$ e $c = 1$. Assim calculando o discriminante, temos que: $b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$, assim trata-se de uma parábola ou suas degenerações, podemos visualizar o gráfico [37] desta equação, plotado no software Geogebra.

Figura 37 – reta bissetriz dos quadrantes pares



Fonte: Elaborada pelo autor.

Conclusão

Esperamos que com este trabalho o leitor desenvolva mais seu conceitual teórico na álgebra linear principalmente nas secções cônicas. Investigue situações do cotidiano na qual possa descobrir as aplicações das cônicas e com isto explora-las , resolva exercícios e faça uso dos métodos apresentados para identificar uma cônica através de sua equação, plotando em seguida no Geogebra para visualizar o gráfico. Portanto, descubra por meio desta dissertação que as secções cônicas não se limitam aos casos nos quais os eixos são paralelos aos coordenados, ou seja, notem que tem-se casos em que os eixos maior e menor da elipse não tem a direção paralela aos eixos cartesianos, os eixos real e imaginário da hipérbole não tem a direção paralela aos eixos cartesianos, o eixo de simetria da parábola não é paralelo a um dos eixos cartesianos e descubram o prazer de identificar curvas em que suas equações não são elementares.

REFERÊNCIAS

- CASAS, R. L. Cometas. **UFMG-Observatório Astronômico Frei Rosário**, 2004. Citado na página [70](#).
- COSTA, B.; WETZLER, F. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Editora Harbra, 1980. Citado nas páginas [47](#) e [51](#).
- DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. Coleção profmat. In: **Geometria Analítica**. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2013. Citado na página [51](#).
- ESQUEF, P. A.; RIBEIRO, S. A. P. Elipses e as Órbitas dos planetas. **Revista do Professor de Matemática**, v. 77, 2012. Citado na página [67](#).
- HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. S. Coleção profmat. In: **Introdução à Álgebra Linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2012. Citado nas páginas [25](#), [28](#), [43](#), [45](#), [46](#), [47](#) e [51](#).
- IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar. In: **Geometria Analítica**. 5. ed. São Paulo: Atual Editora, 2005. v. 7. Citado na página [51](#).
- LIMA, E. L. Coleção matemática universitária. In: **Álgebra Linear**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. Citado nas páginas [41](#), [47](#) e [49](#).
- WAGNER, E. Porque as antenas são parabólicas. **Revista do Professor de Matemática**, v. 33, 1997. Citado na página [62](#).