

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL**

ERIVALDO PEREIRA DA SILVA

SOBRE O ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

JUAZEIRO DO NORTE

2017

ERIVALDO PEREIRA DA SILVA

SOBRE O ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora:

Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa

JUAZEIRO DO NORTE

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

S586s

Silva, Eivaldo Pereira da.

Sobre o ensino da análise combinatória/ Eivaldo Pereira da Silva. – 2017.

63 f.: il.; color.; enc. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia – Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Juazeiro do Norte, 2017.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Prof^ª. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa.

1. Combinatória. 2. Revisão. 3. Conjuntos. 4. Problemas recreativos. I. Costa, Maria Silvana Alcântara.
II. Título.

CDD 510.7



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Sobre o Ensino da Análise Combinatória

Erivaldo Pereira da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 25 de julho de 2017.

Banca Examinadora

Maria Silvana Alcântara Costa

Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa – UFCA

Orientadora

Plácido Francisco de Assis Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis
Andrade - UFCA

Erica Boizan Batista

Profa. Dra. Erica Boizan Batista - UFCA

Dedico primeiramente a Deus, por ser essencial em minha vida, aos meus familiares e aos meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Ao meu pai, José Vicente da Silva e a minha mãe, Josefa Pereira da Silva pelo apoio e educação que me deram.

A minha esposa, Paula Iuskla Alves Alencar, pelo incentivo e por sempre acreditar na minha capacidade. Também pela paciência e carinho nos momentos em que precisei.

Aos meus amigos pela confiança e apoio depositados em mim. Em especial a Marcondes, Jhonnata e Naélío pelas tardes prazerosas de estudo.

A minha orientadora Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa, pelo apoio, pela compreensão e pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos colegas da turma de mestrado, pelas reflexões, críticas e sugestões.

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

“A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.” (Descartes)

RESUMO

O presente trabalho tem como principal objetivo discutir o ensino da Análise Combinatória. A justificativa para a escolha da temática advém da minha experiência docente no Ensino Médio ao perceber que grande parte dos alunos tem dificuldade em aprender o conteúdo desta disciplina ou tem pouco interesse pela mesma, o que é um fator preocupante, pois tais conteúdos são importantes na formação do aluno. Para isto fizemos uma revisão sobre conteúdos básicos como noções de conjuntos e um comparativo entre os principais conceitos da Análise Combinatória. Os conceitos e problemas são discutidos na perspectiva dos PCNEM e os PCNEM +. Sugerimos problemas e atividades do universo recreativo e/ou de interesse do aluno que podem ser trabalhadas em sala de aula de forma a contribuir com a aprendizagem do tema em estudo. Vale ressaltar que este trabalho tem como público alvo estudantes do Ensino Médio, logo o conteúdo é abordado de maneira simples e detalhada.

Palavras-chave: Combinatória. Revisão. Conjuntos. Problemas recreativos.

ABSTRACT

The main objective of this work is to discuss the teaching of Combinatorial Analysis. The justification for choosing the subject comes from my teaching experience in High School when realizing that most of the students have difficulty learning the content of this subject or have little interest in it, which is a worrying factor, since such contents are important in Training. For this we did a review on basic contents as notions of sets and a comparison between the main concepts of Combinatorial Analysis. The concepts and problems are discussed in the perspective of PCNEM and PCNEM +. We suggest problems and activities in the universe of recreation and / or student interest that can be worked in the classroom in order to contribute to the learning of the topic being studied. It is worth mentioning that this work has as a target high school students, so the content is addressed in a simple and detailed manner.

Keywords: Combinatorics. Review. Sets. Recreation problems.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração de $A \subset B$	17
Figura 2 – Ilustração de $A \cup B$	18
Figura 3 – Ilustração de $A \cap B$	19
Figura 4 – Ilustração de três conjuntos disjuntos dois a dois	20
Figura 5 – Ilustração da solução do exemplo II	28
Figura 6 – Ilustração da solução do exemplo III	29
Figura 7 – Ilustração da solução do exemplo I	35
Figura 8 – Tipos de agrupamentos	38
Figura 9 – Ilustração da permutação circular	39
Figura 10 – Jogos de cada equipe na 1ª fase	48
Figura 11 – Jogos da 1ª fase	49
Figura 12 – Jogos das semifinais e finais	50
Figura 13 – Peças do jogo de Xadrez	51
Figura 14 – Imagem de uma disposição inicial das peças do Jogo de Xadrez	52
Figura 15 – Padrão desbloqueio I	54
Figura 16 – Padrão desbloqueio II	54
Figura 17 – Padrão desbloqueio III	55

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Quantidade de padrões válidos	59
--	----

LISTA DE SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
FIDE	Federação Internacional de Xadrez
PCNEM+	Parâmetros Curriculares Nacionais+ para o Ensino Médio
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
RPM	Revista do Professor de Matemática
UFCA	Universidade Federal do Cariri

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	MATEMÁTICA BÁSICA	15
2.1	A Noção de Conjunto	15
2.2	A Relação de Inclusão	17
2.3	Igualdade entre Conjuntos	17
2.4	Reunião e Interseção	18
2.5	Conjuntos Disjuntos	20
2.6	Conjunto dos Números Naturais	20
2.7	Sequência	20
2.8	Produto Cartesiano	21
3	ANÁLISE COMBINATÓRIA	23
3.1	Princípio Aditivo	23
3.2	O Princípio da Inclusão-Exclusão	25
3.3	Princípio Fundamental da Contagem	27
3.4	Permutação Simples	30
3.5	Arranjo Simples	32
3.6	Combinação Simples	34
3.7	Permutação Circular	39
3.8	Permutação com Repetição	40
4	SUGESTÕES DE ATIVIDADES DO UNIVERSO RECREA- TIVO DO ALUNO PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA	43
4.1	Combinatória nos PCNEM e PCNEM +	43
4.2	Problemas e/ou atividades para o Ensino de Combinatória . .	45
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	60
	REFERÊNCIAS	62

1 INTRODUÇÃO

A Análise Combinatória desenvolveu-se a partir da necessidade de resolver problemas da humanidade. Nesse sentido, enquanto conjunto de procedimentos que possibilita a construção de grupos diferentes, formados por um número finito de elementos de um conjunto em circunstâncias determinadas, auxilia na resolução de problemas de contagem. A resolução de problemas combinatórios amplia-se por meio da utilização de técnicas que foram úteis no desenvolvimento de outros campos da Matemática, como a própria Teoria dos Conjuntos, a Teoria dos Números, Investigação Operativa, Geometria, etc.. Nesse sentido, é uma forma de contagem utilizada como alternativa à impossibilidade de contar pelo método usual em função do número de elementos do conjunto ser muito grande.

A Análise Combinatória surgiu na Idade Média, em parte pela necessidade de se conhecer as possibilidades de resultados dos jogos de azar que eram bastante disseminados e praticados através de apostas. Dessa forma, a necessidade de elaboração de cálculos a partir da Análise Combinatória resultou do interesse de se conhecer as possibilidades dos resultados dos jogos. Com o seu desenvolvimento, surgiram outras aplicações e usos.

A utilização de regras básicas de contar e suas aplicações, contudo, durante muito tempo tiveram destaque por meio de problemas com ênfase na memorização. Um exemplo é o Problema 79 do Papiro Egípcio de Rhind (cerca de 1650 a. C.) que segue: *Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat¹ de grãos; quantos itens têm ao todo?*

Esse “problema do papiro de Rhind” trata-se de um problema combinatório e pode ser utilizado pelo professor como base para a introdução do estudo da Análise Combinatória, pelos seus históricos e surgimento, mas também pela caracterização como problemas do dia a dia, para a partir dele, desenvolver o ensino dos seus conceitos e aplicações, uma vez que estes são importantes para outros cálculos matemáticos em outros campos da Matemática e em outras áreas do conhecimento.

Na minha experiência docente no Ensino Médio percebo que uma grande parte dos alunos não gosta de combinatória e isso se deve à falta de domínio de conceitos matemáticos basilares necessários à compreensão desses conteúdos. Isso em grande medida tem levado às dificuldades de aprendizagem de combinatória e mistificação por parte do aluno de que os conteúdos e habilidades desse campo da Matemática são de difícil compreensão e aquisição.

Ao constatar essa realidade e compreender que a Análise Combinatória tem função formativa, a partir da estruturação do pensamento e do raciocínio dedutivo do aluno, assim como tem papel instrumental na resolução de outros problemas matemáticos e do dia a dia, considero que tais conteúdos precisam ser trabalhados em sala de aula de uma forma que potencialize a aprendizagem do aluno. Dessa forma, essa realidade

¹Hekat é uma unidade de medida de grãos utilizada no Egito Antigo que equivale a 4,8 litros.

constitui justificativa suficiente para escolher a Análise Combinatória como temática para desenvolver este trabalho.

Dessa forma, o presente trabalho tem como objetivo tratar da necessidade de revisão de conceitos matemáticos básicos necessários à compreensão das noções e conceitos de combinatória, fazer comparação entre os conceitos de Permutação simples, Permutação com elementos repetidos, Arranjos e Combinações e apontar sugestões de problemas e/ou atividades que, por envolverem elementos recreativos ou por fazerem parte do cotidiano dos alunos, quando desenvolvidas em sala de aula, despertam o interesse do aluno e potencializam a aprendizagem destes conteúdos.

Os resultados apontam para a necessidade do professor, antes de introduzir o estudo de combinatória, fazer revisão da matemática básica necessária à compreensão dos princípios aditivo e multiplicativo, bem como revisar os conceitos de conjuntos, principalmente no que se refere à utilização dos conectivos “e” e “ou”.

O trabalho divide-se em cinco partes: o capítulo 1 é este texto introdutório; o capítulo 2 apresenta uma breve revisão da matemática básica com ênfase nos conceitos de conjuntos que são utilizados na Análise Combinatória e suas principais notações; o capítulo 3 trata do estudo do princípio aditivo e princípio fundamental da contagem, bem como dos conceitos de Permutação simples, Permutação circular, Permutação com repetição, Arranjos e Combinação simples, fazendo também um comparativo entre eles; o capítulo 4 trata de como os PCNEM e PCNEM + abordam o estudo de Combinatória e traz algumas sugestões de problemas/atividades as quais julga-se que podem potencializar a aprendizagem dos alunos; em seguida, o texto conclusivo onde são feitas algumas considerações a respeito dos resultados do trabalho e as suas possibilidades de uso.

A perspectiva é de que esse trabalho, a partir do seu conteúdo e forma de abordagem, seja útil aos professores e alunos e que possa contribuir para a melhoria do ensino de combinatória, bem como melhorar a relação dos alunos com os conteúdos desse campo do conhecimento matemático em função disso e da melhoria da aprendizagem.

2 MATEMÁTICA BÁSICA

Neste capítulo apresentaremos uma breve revisão sobre as noções elementares da teoria de conjuntos que são utilizadas no estudo de Análise Combinatória. Tais noções são restritas àquelas notações e conceitos necessários à compreensão do Capítulo referente à Análise Combinatória e são os seguintes: noção de conjunto; relação de inclusão; igualdade entre conjuntos; reunião e intersecção; conjuntos disjuntos; conjunto dos números naturais; sequências e produto cartesiano. Para maiores detalhes sobre o assunto sugerimos (LIMA, 2014), (LIMA, 2016) e (IEZZI and MURAKAMI, 1985).

2.1 A Noção de Conjunto

A compreensão da noção de conjunto, suas notações e conceitos é essencial ao entendimento de conceitos de outros campos do conhecimento matemático. Nesse aspecto a abordagem da Matemática contemporânea tem sido feita por meio da linguagem de conjuntos.

Podemos dizer que um conjunto é uma coleção qualquer de objetos. Por exemplo, o conjunto das vogais, o conjunto dos algarismos romanos, etc. Cada objeto que constitui o conjunto é chamado de elemento, podendo ser um número, uma letra, um nome etc. Neste trabalho para representar conjuntos, utilizamos as letras maiúsculas do nosso alfabeto, como por exemplo, A , B , C , D , etc. Podemos representar os elementos desses conjuntos pelas letras minúsculas, como por exemplo, a , b , c , w , x , etc.

Em uma situação determinada é necessário representar o conjunto universal. Nesse caso, a sua representação será feita pela letra Ω (ômega) do alfabeto grego.

Para indicar a relação de pertinência de um elemento em relação a um conjunto utilizamos o símbolo \in . Por exemplo, quando um elemento x pertencer a um conjunto A , escrevemos, neste caso que

$$x \in A.$$

Por outro lado, para indicar a relação de não pertinência de x ao conjunto A , escrevemos

$$x \notin A.$$

Para nomear os elementos de um conjunto ou descrever suas propriedades, colocamos no interior das chaves. Quando um conjunto tiver um número pequeno de elementos, podemos simplesmente listá-los.

Exemplo 1 *Conjunto dos nomes de Estados que compõem a região do Nordeste.*

$A = \{\text{Alagoas, Bahia, Ceará, Maranhão, Paraíba, Pernambuco, Piauí, Rio Grande do Norte, Sergipe}\}.$

Exemplo 2 *Conjunto dos números ímpares positivos.*

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}.$$

◇

Exemplo 3 *Conjunto dos algarismos romanos.*

$$A = \{I, V, X, L, C, D, M\}.$$

◇

Um conjunto também pode ser descrito por uma propriedade P , comum a todos os seus elementos. Nesse caso escrevemos

$$A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade } P\}.$$

Entendemos esse conjunto como os elementos x pertencentes ao conjunto A , tal que x tem a propriedade P .

Exemplo 1 $A = \{x \mid x \text{ é um divisor de } 5\}$. Como a propriedade é ser divisor de 5 então

$$A = \{1, -1, 5, -5\}.$$

◇

Exemplo 2 $A = \{x \mid x \text{ é um naipe das cartas de um baralho}\}$. Se x é um naipe de cartas de um baralho então

$$A = \{\text{paus, ouro, copas, espada}\}.$$

◇

O conjunto vazio será representado pelo símbolo \emptyset , é aquele conjunto que não possui elemento algum. Por exemplo, o conjunto dos objetos x tais que x é diferente de si mesmo é um conjunto vazio.

Indicaremos por $\#A$ para representar cardinalidade de um conjunto A , isto é, o número de elementos do conjunto A .

Exemplo 1 *O conjunto das vogais*

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

possui 5 elementos, logo $\#A = 5$.

◇

Exemplo 2 *O conjunto dos naipes das cartas de um baralho*

$$B = \{\text{paus, ouro, copas, espada}\}$$

possui 4 elementos, então $\#B = 4$.

◇

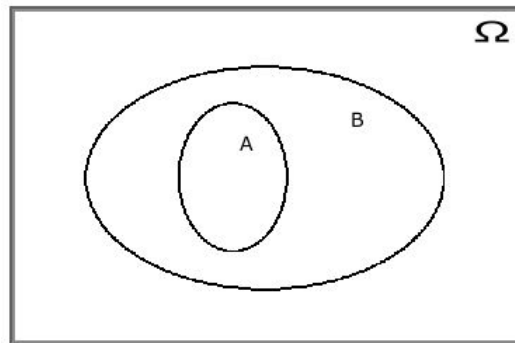
2.2 A Relação de Inclusão

Considere dois conjuntos, A e B . Se todos os elementos de A forem também elementos de B , diz-se que A é um subconjunto de B ou que A está contido em B ou, ainda que A é parte de B . Indicamos esse fato por

$$A \subset B.$$

Observe a Figura 1.

Figura 1 – Ilustração de $A \subset B$



Fonte: Ilustração do autor

Se A não for subconjunto de B , escrevemos $A \not\subset B$. Nesse caso, existe pelo menos um elemento x tal que $x \in A$ e que $x \notin B$.

Diremos que um conjunto A é um subconjunto de B se, e somente se, todo elemento de A pertencer também a B .

Exemplo 1 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$ e $C = \{1\}$. Note que os conjuntos B e C são subconjuntos de A , isto é, $B \subset A$ e $C \subset A$.

◇

2.3 Igualdade entre Conjuntos

Diremos que um conjunto A é igual a um conjunto B , quando todo elemento de A for elemento de B , e reciprocamente, quando todo elemento de B for elemento de A , ou seja, quando $A \subset B$ e $B \subset A$. Por exemplo,

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 3, 2, 1\}$$

e

$$\{x \mid 3x - 2 = 10\} = \{4\}.$$

Observe que os conjuntos são iguais independentemente da ordem dos elementos, isto é, $\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 3, 2, 1\} = \{1, 3, 4, 2\}$.

Nesse aspecto, é importante perceber que a ordem dos elementos não diferencia os conjuntos. Contudo, na resolução de alguns problemas matemáticos a ordem desses elementos precisam ser consideradas.

2.4 Reunião e Interseção

Indicaremos por $A \cup B$ a reunião dos conjuntos A e B , isto é, o conjunto dos elementos que pertencem a A ou a B , ou ainda, o conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A ou B .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Note que, $x \in A \cup B$ quando ocorrer ao menos uma das condições seguintes:

$$x \in A \text{ ou } x \in B.$$

Exemplo 1 Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4\}$, então temos

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

◇

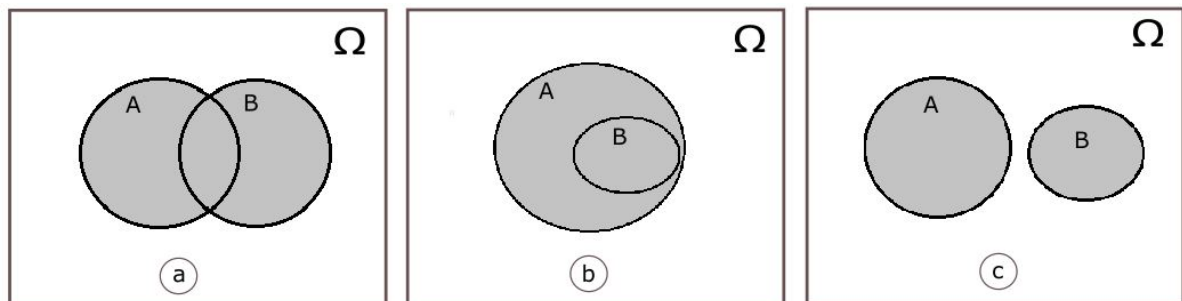
Exemplo 2 Sejam $A = \{a, e, i, o\}$ e $B = \{o, u\}$, então temos

$$A \cup B = \{a, e, i, o, u\}.$$

◇

A parte hachurada da Figura 2 ilustra os casos de união entre os conjuntos A e B .

Figura 2 – Ilustração de $A \cup B$



Fonte: Ilustração do autor

Indicaremos por $A \cap B$ a intersecção dos conjuntos A e B , isto é, o conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a A e a B . Se considerarmos as afirmações

$$x \in A \text{ e } x \in B,$$

teremos que $x \in A \cap B$, quando ambas afirmações forem verdadeira.

Exemplo 1 Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3\}$, então

$$A \cap B = \{2, 3\}.$$

◇

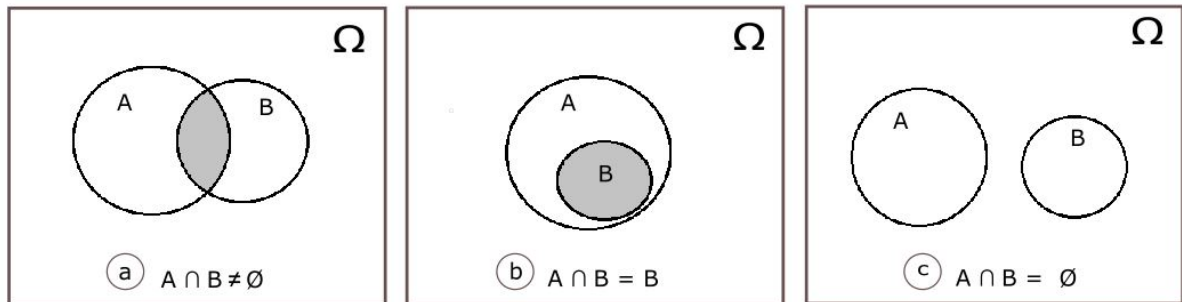
Exemplo 2 Sejam $A = \{a, e, i\}$ e $B = \{o, u\}$. Neste caso

$$A \cap B = \emptyset.$$

◇

A parte hachurada da Figura 3 ilustra a intersecção de A e B .

Figura 3 – Ilustração de $A \cap B$



Fonte: Ilustração do autor

Segue então que

$$\begin{cases} x \in A \cup B \text{ significa que } "x \in A \text{ ou } x \in B" \\ x \in A \cap B \text{ significa que } "x \in A \text{ e } x \in B". \end{cases}$$

É importante notar que os conectivos lógicos “ou” e “e” estão interligados as operações $A \cup B$ e $A \cap B$ entre conjuntos.

Considere um conjunto A constituído pelos elementos que possuem a propriedade P e B um conjunto constituído pelos elementos que possuem a propriedade Q , então $A \cup B$ é definido pela propriedade “ P ou Q ” e $A \cap B$ é definido pela propriedade “ P e Q ”.

É importante deixar claro que em Matemática, a afirmação “ P ou Q ” significa que pelo menos uma das afirmações P ou Q é válida, podendo ser até mesmo as duas.

O conectivo “ou” possui um significado diferente na linguagem matemática daquele que é utilizado na linguagem comum. No dia a dia a palavra “ou” geralmente é atribuída a alternativas excludentes entre si. Por exemplo (prefere suco ou refrigerante?), esta pergunta é feita para se referir apenas a um tipo de bebida. Já no uso matemático, pode ser os dois.

Por outro lado, o conectivo “e” assume o mesmo significado, tanto na linguagem matemática quanto da língua materna.

Para três conjuntos quaisquer, digamos A , B e C valem as seguintes propriedades da reunião:

1. $A \cup B = B \cup A$ (comutativa).
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativa).

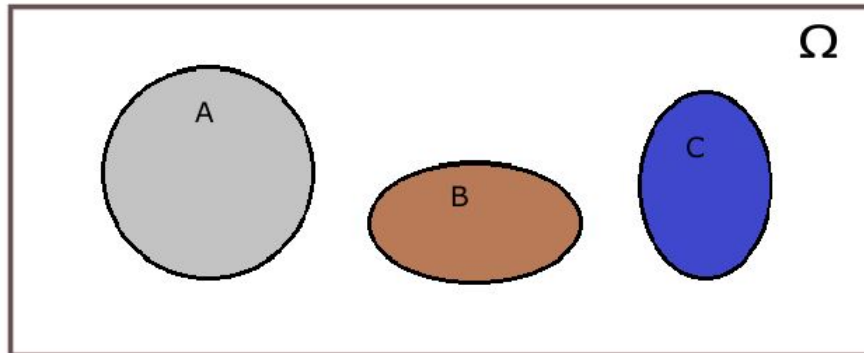
Também são válidas as propriedades comutativa e associativa da intersecção, com relação a três conjuntos quaisquer, isto é:

1. $A \cap B = B \cap A$ (comutativa).
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (associativa).

2.5 Conjuntos Disjuntos

Quando os conjuntos A e B , não possuem elementos em comum, isto é, $A \cap B = \emptyset$, serão denominados *conjuntos disjuntos*. Quando tivermos mais de dois conjuntos, eles serão disjuntos quando forem disjuntos tomados 2 a 2. Observe a Figura 4 que mostra o caso de três conjuntos disjuntos.

Figura 4 – Ilustração de três conjuntos disjuntos dois a dois



Fonte: Ilustração do autor

Note que quando os três conjuntos são disjuntos, então,

$$A \cap B \cap C = \emptyset.$$

2.6 Conjunto dos Números Naturais

Representado pelo símbolo \mathbb{N} , o conjunto dos números naturais é formado pelos números 1, 2, 3, 4, 5...

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Em \mathbb{N} , estão definidas duas operações a adição e a multiplicação. Para quaisquer a , b e c pertencentes aos números naturais, estas operações estendem-se as propriedades:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associativa da adição).
2. $a + b = b + a$ (comutativa da adição).
3. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associativa da multiplicação).
4. $a \cdot b = b \cdot a$ (comutativa da multiplicação).

2.7 Sequência

Uma sequência é uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ cujo domínio é o conjunto dos números Naturais e o contradomínio é o conjunto dos números Reais.

Perceba que a cada número natural n associamos um número real a_n . Vejamos dois exemplos.

Exemplo 1 A sequência dos números naturais $(1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$.

Exemplo 2 *A sequência dos anos, a partir de 1998, nos quais a copa do mundo de futebol é realizada (1998, 2002, 2006, 2010, 2014, ...).*

◇

Em uma sequência os elementos são denominados termos. No exemplo 2, o primeiro termo é 1998, o segundo termo é 2002, o terceiro termo é 2006 e assim sucessivamente.

De um modo geral, uma sequência pode ser representada da seguinte forma:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots).$$

O índice n indica a posição do elemento na sequência. Dessa maneira, o primeiro termo é indicado por a_1 , o segundo por a_2 e assim sucessivamente.

O que diferencia sequência de conjuntos é que na sequência os elementos obedecem a uma ordem, podemos dizer quem é o primeiro elemento da sequência, o segundo elemento, etc.. Já os elementos de um conjunto não tem ordem. Não existe um primeiro elemento. Vejamos um exemplo.

Exemplo 3 *O conjunto dos nomes dos alunos de uma turma.* Nesse caso, podemos dispor os nomes dos alunos em qualquer ordem. Por exemplo,

$$\{\text{Beatriz, Vitor, Ana, \dots, Carlos}\} \text{ ou } \{\text{Vitor, Beatriz, Carlos, \dots, Ana}\}.$$

Porém, se procurássemos a sequência dos nomes dos alunos de uma turma, disposto em ordem alfabética. Nesse caso, os nomes dos alunos devem ser dispostos em apenas uma ordem,

$$(\text{Ana, Beatriz, Carlos, \dots, Vitor}).$$

◇

2.8 Produto Cartesiano

Chamaremos de produto cartesiano dos conjuntos A por B o conjunto denotado por $A \times B$ constituídos pelos pares ordenados (a, b) onde a é um elemento de A e b é um elemento de B .

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B \}.$$

Exemplo 1 *Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ temos*

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

e

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Note que produto cartesiano de dois conjuntos A e B , com $A \neq B$ não possui a propriedade comutativa, isto é, $A \times B \neq B \times A$.

De forma semelhante, o produto cartesiano de três conjuntos é obtido tomando ternos em vez de pares. No caso geral, se temos n conjuntos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ é definido como o conjunto das n -uplas, isto é, uma sequência com n elementos (a_1, a_2, \dots, a_n) , onde $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$.

3 ANÁLISE COMBINATÓRIA

No Ensino Médio, uma das dificuldades dos alunos em compreender questões envolvendo problemas de contagem, está relacionada ao entendimento dos princípios básicos da Combinatória. Duas perguntas bem frequentes que surgem quando os alunos do Ensino Médio estão resolvendo problemas de combinatória são as seguintes: “*Os resultados obtidos devem ser somados ou multiplicados?*”, “*Esse problema é de Arranjo ou Combinação?*”. Isso decorre do fato de que os alunos não compreenderam bem a definição dos princípios e confundem-os. Para compreendê-los devemos ter uma boa compreensão sobre as noções básicas de conjuntos. O objetivo deste capítulo é estudar os princípios básicos da contagem tais como o princípio aditivo, o princípio da inclusão-exclusão, o princípio fundamental da contagem, permutação simples, arranjos simples, combinação simples, permutação circular e permutação com repetição. Trabalharemos com tais princípios, pois através deles podemos resolver uma grande quantidade de problemas de contagem e desta forma facilitar a compreensão destes conceitos.

3.1 Princípio Aditivo

Podemos enunciar o Princípio Aditivo ou o Princípio da Adição da seguinte forma: **Princípio Aditivo:** Se A e B são dois conjuntos disjuntos, ($A \cap B = \emptyset$) com um número p e q de elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

Para a compreensão do princípio aditivo é necessário que o aluno compreenda a linguagem básica dos conjuntos. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1 *Numa lanchonete, há 3 tipos de salgados e 2 sabores de doces. Suponha que Mário só tenha permissão para comer um desses lanches. Determine quantas são as possíveis escolhas que Mário possa fazer?*

Solução: Como ele tem permissão para comer apenas um lanche, então ou Mário escolhe um dos três tipos de salgados ou escolhe um dos dois tipos de doces. Considere que A seja o conjunto dos salgados e B seja o conjunto dos doces, isto é:

$$\begin{cases} A = \{s \mid s \text{ é um salgado}\} = \{s_1, s_2, s_3\}, \text{ e} \\ B = \{d \mid d \text{ é um doce}\} = \{d_1, d_2\}. \end{cases}$$

Se Mário escolher um salgado, ele terá 3 opções ou caso ele escolher comer um doce, terá 2 opções. Podemos perceber que os elementos destes dois conjuntos são distintos, logo os conjuntos são disjuntos. Então podemos utilizar o Princípio Aditivo. Como estamos querendo saber o número de formas de escolher um evento ou outro, então estamos procurando a união dos conjuntos A e B e mais, como os conjuntos são disjuntos, temos

$$A \cup B = \{s_1, s_2, s_3, d_1, d_2\}.$$

Assim ao todo são:

$3 + 2 = 5$ possibilidades de escolhas.

◇

Percebemos que o entendimento das noções básicas de conjuntos facilita o estudo de problemas envolvendo o Princípio Aditivo. Para identificar problemas envolvendo o Princípio da Aditivo, temos uma ferramenta muito útil que é o conectivo “ou”, pois está diretamente relacionado a tal princípio. *Ou* escolhe s_1 , *ou* escolhe s_2 , *ou* escolhe s_3 , e assim por diante.

Exemplo 2 *João ofereceu a Mário 3 livros de Álgebra, 7 livros de Combinatória e 5 livros de Geometria e pediu-lhe para escolher um único livro. De quantas maneiras Mário pode realizar essa escolha?*

Antes de apresentarmos a solução deste exemplo façamos algumas ponderações. A dificuldade encontrada pelos alunos neste caso acima é que o princípio fala apenas de dois conjuntos disjuntos e no problema a seguir temos três conjuntos. Denotemos por A o conjunto dos livros de álgebra, por C o conjunto dos livros de combinatória e G o conjunto dos livros de geometria. Podemos pensar da seguinte maneira: Ou Mário escolhe um livro de Álgebra ou Mário escolhe um livro de Combinatória ou Mário escolhe um livro de Geometria. Perceba que os conjuntos são disjuntos dois a dois, isto é, os elementos de um conjunto não pertencem a outro. Então poderíamos fazer a seguinte pergunta: “Na resolução do problema acima, podemos aplicar o Princípio Aditivo?”. A resposta para essa pergunta é sim! Vamos resolver o problema em duas etapas:

1ª etapa: Calcularemos de quantas maneiras Mário pode escolher ou um livro de Álgebra ou um livro de Combinatória. Como os conjuntos são disjuntos, basta somar seus elementos, isto é, $\#(A \cup C) = \#A + \#C = 3 + 7 = 10$.

Chamaremos de D o conjunto formado pelos livros de Álgebra ou os livros de Combinatória, isto é, $D = A \cup C$. Logo,

$$\#D = \#(A \cup C) = 10.$$

2ª etapa: Calcularemos de quantas maneiras Mário pode escolher ou um livro do conjunto D (livro de Álgebra ou Combinatória) ou um livro do conjunto G . Note que agora temos dois conjuntos, D e G . Temos ainda que os conjuntos são disjuntos, ou seja, não possuem elementos em comum, então podemos aplicar o Princípio Aditivo. Dessa forma, calcularemos o número de modo de Mário escolher ou um livro do conjunto D ou um livro do conjunto G , e para isso basta somar seus elementos. Portanto,

$$\#(D \cup G) = \#D + \#G = 10 + 5 = 15.$$

Usando a associatividade segue que,

$$\#((A \cup C) \cup G) = \#(A \cup C) + \#G = \#A + \#C + \#G = 3 + 7 + 5 = 15.$$

Observe que a expressão acima equivale à soma das possibilidades individuais de cada um dos três conjuntos.

Poderíamos também resolver o problema anterior da seguinte forma. Considere os três conjuntos de livros:

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$, conjunto dos livros de Álgebra.

$C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7\}$, conjunto dos livros de Combinatória.

$G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$, conjunto dos livros de Geometria.

Como os conjuntos são disjuntos dois a dois, queremos:

$$A \cup C \cup G = \{a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\},$$

cuja quantidade de elementos é igual a número de elementos de A , somado com o número de elementos de C , e o número de elemento de G . Assim segue que:

$$\#(A \cup C \cup G) = 3 + 7 + 5 = 15.$$

◇

Note que seguindo o mesmo raciocínio dos itens precedentes, chegamos à conclusão de que o Princípio Aditivo pode se estender a n conjuntos disjuntos dois a dois. Cujas demonstração pode ser encontrada em (BEZERRA, 2013).

Princípio Aditivo: *(Caso geral) Se A_1, A_2, \dots, A_n são conjuntos disjuntos dois a dois e se $\#A_i = j_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$, então*

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = j_1 + j_2 + \dots + j_n.$$

Novamente, vale ressaltar que compreender as noções básicas de conjuntos, facilita bastante o entendimento do Princípio Aditivo. É muito comum no Ensino Médio, os alunos resolverem problemas apenas substituindo valores em fórmulas já prontas, por isso, há uma dificuldade na compreensão dos conceitos de Análise Combinatória, pois esta disciplina exige, compreensão de outros conteúdos de matemática básica.

Uma pergunta que surge naturalmente em sala de aula com relação ao princípio aditivo é a seguinte: “E se os conjuntos não fossem disjuntos, como contar o número de elementos da união dos conjuntos?”. Para esse tipo de situação introduziremos a seguir o princípio da Inclusão-Exclusão.

3.2 O Princípio da Inclusão-Exclusão

Sabemos que o princípio aditivo é um método para contar o número de elementos da união de conjuntos disjuntos e para isso, basta somar o número de elementos de cada conjunto.

O Princípio da Inclusão-Exclusão é uma ferramenta que permite contar o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos disjuntos ou não. A sua versão mais simples, diz o seguinte.

O Princípio da Inclusão-Exclusão: *Sejam A e B conjuntos quaisquer. Então*

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

A justificativa para o resultado acima é a seguinte. Para contarmos o número de elementos pertencentes à união de dois conjuntos A e B . Contamos o número de elementos do conjunto A e contamos o número de elementos do conjunto B . Mas quando fazemos isso, estamos contando o número de elementos que pertencem à intersecção dos conjuntos A e B duas vezes, ou seja, quando contamos o número de elementos do conjunto A e outra vez quando contamos o número de elementos do conjunto B . Para corrigir o excesso, basta descartar a segunda contagem, dessa forma obtemos

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

Vejam os o exemplo seguinte.

Exemplo 1 *Em um grupo de jovens, 30 dos jovens gostam de vôlei, 40 gostam de futebol e 10 gostam de ambos. Sabendo que todos os jovens gostam de pelo menos um desses dois esportes, qual é o número de jovens do grupo?*

Solução: Note que o princípio aditivo não pode ser utilizado nesse problema, pois os dois conjuntos envolvidos não são disjuntos, isto é, o conjunto dos jovens que gostam de vôlei e o conjunto dos jovens que gostam de futebol possuem elementos em comum. Denotemos por V o conjunto dos jovens que gostam de vôlei e por F o conjunto dos jovens que gostam de futebol. Note que $\#(V \cup F)$ é número de elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos. Para contar os elementos de $V \cup F$ contamos $\#V$, que é igual 30 jovens e $\#F$, que é igual a 40 jovens. Mas quando fazemos isso, estamos contando o número de jovens que gostam de vôlei e futebol duas vezes. Uma vez quando contamos o número de elementos do conjunto V e outra vez quando contamos o número de elementos do conjunto F . Para corrigir o excesso, basta descartar a segunda contagem. Dessa forma obtemos

$$\#(V \cup F) = 30 + 40 - 10 = 60 \text{ jovens.}$$

◇

Para três conjuntos A , B e C o princípio da Inclusão-Exclusão, diz que

O Princípio da Inclusão-Exclusão: *Sejam A , B e C conjuntos quaisquer. Então*
 $\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$.

A justificativa para o resultado acima é a seguinte. Para contar os elementos de $A \cup B \cup C$, contamos o número de elementos de A , o número de elementos de B e o número de elementos de C . Mas então os elementos de $A \cap B$ foram contados duas vezes (uma em $\#A$ e outra em $\#B$), o mesmo ocorre com os elementos de $A \cap C$ e $B \cap C$. Mas então os elementos de $A \cap B \cap C$ foram contados três vezes (em $\#A$, em $\#B$ e em $\#C$) e descontado três vezes (em $\#(A \cap B)$, em $\#(A \cap C)$ e em $\#(B \cap C)$). Contados três vezes e descontados três vezes significa que eles não estão sendo contados. Para corrigir devemos incluí-los na contagem e assim obtemos

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C).$$

No caso geral o número de elementos da união é obtido somando os números de elementos de cada conjunto, subtraindo os números de elementos das intersecções dois a dois, somando as intersecções três a três, subtraindo as intersecções quatro a quatro etc.. Para maiores detalhes consulta (*MORGADO et al.*, 1991).

3.3 Princípio Fundamental da Contagem

O Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio da Multiplicação é uma ferramenta muito útil para resolver problemas de contagem. Podemos enunciá-lo da seguinte forma:

Princípio Fundamental da Contagem: Se um evento A puder ocorrer de m maneiras, um evento B puder ocorrer de n maneiras e A for independente de B , então a quantidade de maneiras em que os dois ocorrem simultaneamente, isto é, ao mesmo tempo, é $m \cdot n$.

Observe o seguinte exemplo:

Exemplo 1 *Quantos números de dois algarismos distintos ou não podem ser formados, usando os dígitos 1, 2, 3 e 4?*

Solução: Sem perda de generalidade chamaremos de A o evento da escolha do algarismo que ocupará a ordem das dezenas. Chamaremos de B o evento da escolha do algarismo que ocupará a ordem das unidades. O problema consiste em determinar o número de modos de escolher o evento A e o número de modos de escolher o evento B . Note que uma vez escolhido o algarismo que ocupará a ordem das dezenas, não impedirá a escolha do algarismo que ocupará a ordem das unidades. Para cada escolha do algarismo que ocupará a ordem das dezenas teremos a mesma quantidade de possibilidades para a escolha do algarismo que ocupará a ordem das unidades. Portanto os eventos A e B são independentes. Podemos representar o resultado de acordo com o conjunto abaixo, formado por pares onde o primeiro elemento representa o número que ocupará a ordem das dezenas e o segundo elemento ocupará a ordem das unidades. O conjunto é o seguinte:

$$\{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}.$$

Como os números são formados por dois algarismos, podemos considerar cada número como um par de dígitos (a, b) em que $a \in A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $b \in B = \{1, 2, 3, 4\}$. Logo o número de pares ordenados (ou modos de formar números de dois algarismos com os dígitos 1, 2, 3 e 4) será igual ao número de modos de formar sequências (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$, o que pode ser feito multiplicando o número de elementos do conjunto A pelo número de elementos do conjunto B , dessa forma segue que,

$$4 \cdot 4 = 16.$$

◇

Para identificar problemas envolvendo o Princípio Fundamental da Contagem, te-

mos uma ferramenta muito útil que é o conectivo “e”, pois está diretamente relacionado a tal princípio. Queremos o número de modos de escolher o evento A e o número de modos de escolher o evento B . Dessa forma estamos dividindo o nosso problema em casos onde aparecerá o conectivo “e”. Vejamos outro exemplo.

Exemplo 2 *Maria deseja ir a uma festa. Sabendo que ela dispõe de 3 blusas e 2 calças. De quantas maneiras ela poderá arrumar-se vestindo uma blusa e uma calça?*

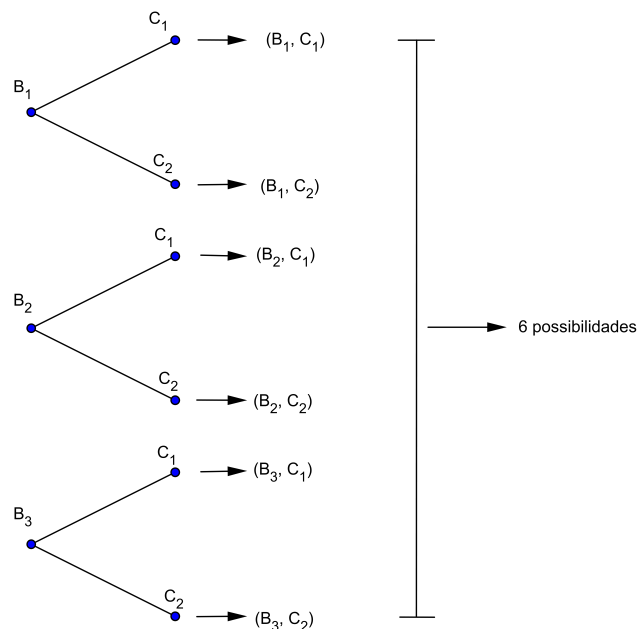
Solução: Denotaremos por $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, o evento escolha das blusas e por $C = \{c_1, c_2\}$, o evento escolha das calças. Se Maria vestir qualquer uma das 3 blusas, isso não impedirá de escolher entre as duas calças distintas, isto é, para qualquer escolha da blusa, existe o mesmo número de escolha de calças, portanto esses eventos são independentes. Dessa forma, pelo Princípio Fundamental da Contagem, basta multiplicar o número de blusas pelo número de calças. Portanto, o número de modos de Maria se vestir (escolher uma blusa e escolher uma calça) é:

$$3 \cdot 2 = 6 \text{ maneiras.}$$

◇

Podemos visualizar a solução do problema através do esquema representado na Figura 5, também conhecido por árvore das possibilidades.

Figura 5 – Ilustração da solução do exemplo II



Fonte: Ilustração do autor

Vejamos outra situação envolvendo três eventos.

Exemplo 3 *Maria deseja ir a uma festa. Sabendo que ela dispõe de 3 blusas, 2 calças e 2 pares de sandálias diferentes. De quantas maneiras ela poderá arrumar-se vestindo uma blusa, uma calça e calçando uma sandália?*

Solução: Note que agora temos três eventos, a escolha da blusa, a escolha da calça e a escolha da sandália. Na definição do Princípio Fundamental da Contagem trata-se apenas de dois eventos independentes.

Para resolver este problema podemos usar a propriedade associativa $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Vejamos: Temos agora, dois eventos: a escolha da roupa (blusa e calça) e a escolha da sandália. Para cada escolha da roupa não impedirá a escolha da sandália. Para calcular o número de modos de escolher a roupa (escolha da blusa e calça), basta multiplicarmos o número de blusas pelo número de calça, como já foi feito no exemplo anterior, temos 6 possibilidades. Utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, o número de modos de escolher a roupa e escolher a sandália é:

$$6 \cdot 2 = 12 \text{ possibilidades.}$$

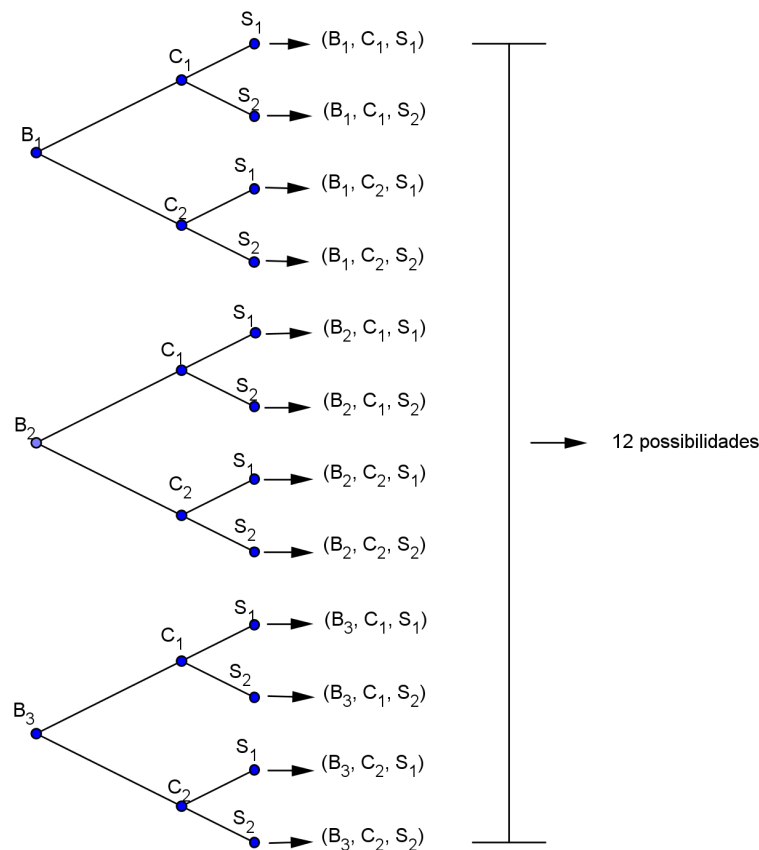
Podemos observar que essa solução encontrada é a expressão $(2 \cdot 3) \cdot 2$. Pela propriedade associativa da multiplicação, essa expressão equivale a $2 \cdot 3 \cdot 2$, isto é, à multiplicação das possibilidades individuais de cada uma dos três eventos: Escolha da blusa (2 possibilidades), a escolha da calça (3 possibilidades) e a escolha da sandália (2 possibilidades). Dessa forma, o número total de Maria se vestir é

$$(2 \cdot 3) \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12 \text{ possibilidades.}$$

◇

Podemos visualizar a solução do problema através da Figura 6.

Figura 6 – Ilustração da solução do exemplo III



Note que na medida em que é acrescida uma quantidade de novos itens à disposição de Maria para arrumar-se, o número total de possibilidades aumenta de modo proporcional à quantidade de itens acrescentados.

De forma análoga, esse raciocínio poderá ser aplicado para problemas com n eventos independentes. Sendo assim, o Princípio Fundamental da Contagem pode ser enunciado de forma geral:

Princípio Fundamental da Contagem: *(Caso geral) Se eventos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ puderem ocorrer de, respectivamente, $j_1, j_2, j_3, \dots, j_n$ maneiras e se $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ forem todos eventos independentes entre si, então a quantidade de maneiras distintas em que os n eventos ocorrem simultaneamente, isto é, ao mesmo tempo, é dada pelo produto*

$$j_1 \cdot j_2 \cdot j_3 \cdot \dots \cdot j_n.$$

3.4 Permutação Simples

Para melhor compreendermos a fórmula de permutação simples e os demais princípios da Análise Combinatória, definiremos o fatorial de um número natural n , da seguinte forma.

Definição 1 *O fatorial de um número natural n , cuja notação é $n!$, é o produto de todos os números naturais de 1 até n , isto é*

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1, \text{ para } n \geq 1.$$

Observe que $1! = 1$ e, temos por convenção que $0! = 1$.

Segue então que

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Permutação simples são os diferentes agrupamentos ordenados que podem se formar com todos os n elementos de um conjunto dado, diferenciados apenas pela ordem.

Definição 2 *Permutação simples: Considere n objetos distintos. Qualquer coleção ordenada desses n objetos é denominada permutação simples de n .*

Indiquemos por P_n a quantidade de permutações simples de n objetos.

Um problema genérico que ocorre com frequência nos livros do Ensino Médio, é o seguinte:

Problema das Permutações Simples *De quantos modos é possível permutar os elementos de um conjunto, com n objetos distintos?*

Por exemplo, se tivermos três objetos distintos a, b e c , de quantos modos é possível ordená-los em fila? Listando todas as configurações em fila teremos as seguintes possibilidades

$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$

Logo temos seis maneiras de ordená-los em fila. Poderíamos ter respondido a esta pergunta sem ter a necessidade de visualizar todas as maneiras, utilizando o seguinte raciocínio. Para a escolha do objeto que ocupará a primeira posição temos 3 possibilidades (a, b ou c), para a escolha do objeto que ocupará a segunda posição temos 2 possibilidades, uma vez que não poderá mais utilizar o objeto que ocupou a primeira posição, e para a escolha do objeto que ocupará a terceira posição teremos 1 possibilidade, uma vez que já foram utilizados dois objetos nas posições anteriores. Assim, pelo Princípio Fundamental da contagem teremos $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilidades.

Podemos utilizar o mesmo raciocínio desse caso particular para responder a pergunta anterior. Queremos encontrar a quantidade de agrupamentos envolvendo todos os n elementos de um conjunto. Note que, temos n modos para a escolha do objeto que ocupará o primeiro lugar. Uma vez escolhido o objeto que ocupará o primeiro lugar, restam $(n - 1)$ modos de escolher o objeto que ocupará o segundo lugar. Uma vez escolhido os dois objetos que ocuparão os dois primeiros lugares, restam $(n - 2)$ modos de escolher o objeto que ocupará o terceiro lugar. Continuando com este processo até que seja ocupada a n -ésima posição teremos $[n - (n - 1)] = 1$ modos de escolher o objeto que ocupará esta posição. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, a quantidade de permutações é:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot [n - (n - 2)] \cdot [n - (n - 1)] = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$$

Portanto, o número de modos possíveis para permutar os elementos de um conjunto com n objetos distintos é

$$P_n = n!$$

◇

Exemplo 1 *Quantos são os anagramas da palavra ESTUDO?*

Solução: Denotemos por $M = \{ E, S, T, U, D, O \}$. Assim, $\#M = 6$ e todos os objetos são distintos dois a dois, dessa forma segue que:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

◇

Exemplo 2 *De quantas formas podem 5 pessoas ficar em fila indiana?*

Solução: Perceba que cada forma de ficar em fila indiana, é uma permutação das 5 pessoas. O número de permutações (modos de ficar em fila indiana) será:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

◇

3.5 Arranjo Simples

Arranjos simples de elementos tomados por partes são os diferentes agrupamentos ordenados que podem se formar com uma quantidade fixa de elementos de um conjunto dado é o objeto de estudo desta seção.

Definição 3 *Arranjos Simples:* Dado um conjunto M com n elementos. Chamaremos de arranjo simples a qualquer r -upla (sequência de r elementos) formada com elementos de M , com $1 \leq r \leq n$.

Para a compreensão do conceito de arranjos simples é necessário que o aluno compreenda o que é uma sequência e, dessa forma, perceber que a ordem dos elementos produz um novo agrupamento. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 1 *Existem 4 cadeiras enumeradas de 1 a 4. De quantas formas três pessoas podem sentar-se nessas cadeiras?*

Solução: Inicialmente notemos que cada maneira delas sentarem, corresponde a uma tripla ordenada (sequência de 3 elementos) de números distintos escolhidos entre 1, 2, 3 e 4. Por exemplo, a tripla

$$(1, 2, 3) \left\{ \begin{array}{l} \text{a pessoa } A \text{ senta na cadeira } 1 \\ \text{a pessoa } B \text{ senta na cadeira } 2 \\ \text{a pessoa } C \text{ senta na cadeira } 3 \end{array} \right.$$

Listando todas triplas, temos

$$\begin{array}{l} (1, 2, 3) (1, 2, 4) (1, 3, 4) (1, 3, 2) (1, 4, 2) (1, 4, 3) (2, 3, 4) (2, 4, 3) \\ (2, 1, 3) (2, 1, 4) (2, 4, 1) (2, 3, 1) (3, 1, 4) (3, 2, 4) (3, 4, 1) (3, 4, 2) \\ (3, 1, 2) (3, 2, 1) (4, 1, 3) (4, 3, 1) (4, 2, 3) (4, 3, 2) (4, 1, 2) (4, 2, 1) \end{array}$$

Portanto, temos um total de 24 maneiras das pessoas sentarem.

◇

Podemos observar que, mesmo com uma quantidade pequena de pessoas e de cadeiras, não é tão fácil listar todas as maneiras. Por essa razão devemos buscar outra maneira para solucionar o problema.

Outro problema genérico que aparece com muita frequência nos livros do Ensino Médio, é o problema dos arranjos simples.

Problema dos Arranjos Simples *Seja M um conjunto com n elementos. Qual é o número total de arranjos simples, isto é, sequência de r elementos, formado com elementos desse conjunto?*

Utilizaremos a notação $A_{n,r}$ para indicar a quantidade de arranjos de n elementos tomados r a r .

Para escolher o primeiro dos r elementos temos n opções; como já foi escolhido um dos n elementos não podemos mais utilizá-lo, sendo assim, restam $(n - 1)$ opções

para a escolha do segundo elemento. Repetimos este processo até a escolha do r -ésimo elemento, que pode ser feita de $[n - (r - 1)]$ maneiras. Então pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$A_{n,r} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot [n - (r - 1)].$$

Note que a multiplicação se repete por r fatores. Dessa forma temos

$$A_{n,r} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - r + 1).$$

Multiplicando essa expressão por $\frac{(n - r)!}{(n - r)!}$, chega-se à

$$A_{n,r} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - r + 1) \cdot \frac{(n - r)!}{(n - r)!}.$$

$$A_{n,r} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - (r - 1)) \cdot (n - r) \cdot (n - (r + 1)) \cdot \dots \cdot (n - (n - 1))}{(n - r)!}.$$

Assim temos:

$$A_{n,r} = \frac{n!}{(n - r)!}.$$

◇

Em particular se:

- $n = r$ é fácil perceber que $A_{n,r} = \frac{n!}{(n - n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n$, que é a permutação de n elementos tomados n a n . Desse caso particular, perceba que se $0!$ não fosse igual a 1, não teríamos $A_{n,r} = P_n$.

- $r = 1$, temos $A_{n,1} = \frac{n!}{(n - 1)!} = \frac{n \cdot (n - 1)!}{(n - 1)!} = n$.

Exemplo 2 *Um clube tem 30 membros. A diretoria é formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. De quantas maneiras é possível formar uma diretoria?*

Solução: Procuramos agrupamento de 4 elementos em que a ordem é importante, pois, por exemplo, se tivermos quatro pessoas A, B, C e D. Com A (presidente), B (Vice-presidente), C (secretário) e D (tesoureiro) e mudarmos essa ordem, isto é, B (presidente), C (vice-presidente), A (secretário) e D (tesoureiro) obteremos um agrupamento diferente. Dessa forma temos 30 elementos para serem arranjados 4 a 4. Assim,

$$A_{30,4} = \frac{30!}{(30 - 4)!} = \frac{30!}{26!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26!}{26!} = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 657\,720 \text{ maneiras.}$$

◇

Podemos resolver problemas de Arranjos Simples utilizando apenas o Princípio Fundamental da Contagem. Observe.

Outra Solução: Como o clube possui 30 membros e a diretoria é composta por 4 integrantes, então para o cargo de presidente temos 30 opções. Uma vez escolhido o cargo de presidente, para o cargo de Vice-presidente, restam 29 opções. Uma vez escolhido os

dois primeiros cargos, para o cargo de secretário, restam 28 opções. Finalmente, uma vez ocupados os três primeiros cargos, para o cargo de tesoureiro, restam 27 opções. Usando o Princípio Fundamental da Contagem, o resultado procurado será

$$30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 657\,720 \text{ maneiras.}$$

Exemplo 3 *As 5 finalistas do concurso para Miss Universo são: Miss Japão; Miss Brasil; Miss Finlândia; Miss Argentina; Miss Noruega. De quantas formas os juízes poderão escolher o primeiro, segundo e o terceiro lugares neste concurso?*

Solução: Cada maneira de escolher os três primeiros lugares consiste de uma sequência de três mulheres (sequência, porque as posições estão numa ordem) escolhidas entre as cinco existentes. Logo, esse número de sequências procurado é:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ maneiras.}$$

◇

Sem uso da fórmula, podemos resolvê-lo da seguinte forma.

Outra Solução: Como são 5 finalistas. Para escolhermos a miss que ocupará o primeiro lugar temos 5 possibilidades. Uma vez escolhida a miss que ocupará o primeiro lugar, para a miss que ocupará o segundo lugar restam 4 possibilidades. Uma vez escolhidos os dois primeiros lugares, restam 3 possibilidades para a miss que ocupará o terceiro lugar. Usando o Princípio Fundamental da Contagem, o resultado procurado será

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ maneiras.}$$

3.6 Combinação Simples

Combinação simples de elementos tomados por partes são os diferentes agrupamentos ou subconjuntos que podem se formar com uma quantidade fixa de elementos de um conjunto dado. Mais precisamente.

Definição 4 *Combinação Simples: Seja M um conjunto com n elementos. Chamamos de combinações simples dos n elementos, tomados r a r , os subconjuntos de M constituídos de r elementos, com $(r \leq n)$.*

Para a compreensão do conceito de combinação simples é necessário que o aluno compreenda o que é um subconjunto e que, alterando a ordem dos elementos, não obtemos um novo subconjunto e portanto, um novo agrupamento. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1 *Há 6 pontos distintos marcados sobre uma circunferência. Quantos segmentos de reta podem ser traçados utilizando-se esses 6 pontos?*

Solução: O problema consiste em determinar de quantos modos podemos escolher dois pontos para traçarmos um segmento de reta. Para resolvê-lo, vamos dividi-lo em duas etapas.

1ª etapa: Calcularemos o número de maneiras para escolher a primeira extremidade do

segmento. Como são seis pontos, temos

6 possibilidades.

2º etapa: Calcularemos o número de maneiras para escolher a segunda extremidade, uma vez que já foi escolhida a primeira extremidade. Como já foi escolhida a primeira extremidade, restam cinco pontos para a segunda extremidade, portanto temos

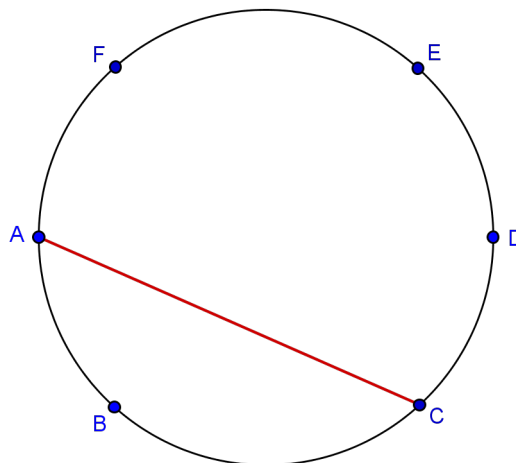
5 possibilidades.

Dessa forma, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos

$$6 \cdot 5 = 30 \text{ possibilidades}$$

Note que, nomeando os pontos por A, B, C, D, E, F temos, dentre essas 30 possibilidades, casos que representam o mesmo segmento de reta, isto é, os pontos (A, C) e (C, A) representam o mesmo segmento. Observe a Figura 7.

Figura 7 – Ilustração da solução do exemplo I



Fonte: Ilustração do autor

Dessa forma cada segmento foi contado $(2!)$ vezes. Para descartar o que foi contado a mais, basta dividir o nosso problema por $(2!)$. Portanto,

$$\frac{6 \cdot 5}{2!} = 15.$$

◇

Para melhor compreensão, vejamos outro exemplo com três etapas.

Exemplo 2 *Em uma equipe de 5 alunos, 3 serão escolhidos para representar a equipe na apresentação de um trabalho de Matemática. De quantas maneiras distintas esses alunos poderão ser escolhidos?*

Solução: O problema consiste em determinar de quantos modos podemos escolher três alunos em um grupo de cinco alunos. Para resolver esse problema, vamos dividi-lo em três etapas.

1º etapa: Calcularemos o número de modos de escolher o primeiro aluno para compor a

equipe, como são ao todo 5 alunos, temos

5 possibilidades.

2º etapa: Calcularemos o número de modos de escolher o segundo aluno para compor a equipe. Uma vez que já foi escolhido o primeiro aluno, restam 4 alunos. Então temos

4 possibilidades.

3º etapa: Calcularemos o número de modos de escolher o terceiro aluno para compor a equipe. Como já foram escolhido dois alunos restam agora 3 alunos. Assim há

3 possibilidades.

Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem temos

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ possibilidades.}$$

Note que, nomeando os alunos por A, B, C, D e E, dentre essas 60 possibilidades, existem casos que representam a mesma equipe, isto é, as equipes $\{A, B, C\}$, $\{A, C, B\}$, $\{B, A, C\}$, $\{B, C, A\}$, $\{C, A, B\}$ e $\{C, B, A\}$ representam a mesma equipe. Nesse caso a ordem em que os alunos formam as equipes com 3 integrantes não importa, por isso, temos que pensar que a equipe é um conjunto com cinco elementos e o grupo que apresentar o trabalho são subconjuntos com três elementos. Note que cada grupo escolhido foi contado (3!) vezes. Portanto, para corrigir o que foi contado a mais, basta dividir por (3!).

$$\frac{60}{3!} = \frac{60}{6} = 10.$$

◇

Apartir dos exemplos anteriores o seguinte problema pode ser formulado.

Problema das Combinações Simples *Quantos são os subconjuntos com r elementos de um conjunto M , com n elementos?*

Utilizaremos a notação $C_{n,r}$ ou $\binom{n}{r}$ para representar o número de combinações de n elementos tomados r a r .

Podemos dividir o nosso problema em r etapas. Temos n possibilidades de definir o primeiro elemento que irá compor o subconjunto, uma vez escolhido o primeiro, temos $(n - 1)$ possibilidades de escolher o segundo elemento. Uma vez escolhido o segundo, temos $(n - 2)$ possibilidades de escolha do terceiro, e assim sucessivamente até termos $(n - r + 1)$ possibilidade de escolha do r -ésimo elemento para compor o subconjunto. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, teríamos

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - r + 1) \text{ subconjuntos distintos.}$$

Perceba que, para cada escolha de r elementos, podemos mudar a ordem desses de

$$r \cdot (r - 1) \cdot (r - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = r!$$

formas distintas, pois para ocupar a primeira posição temos r opções, uma vez esco-

lhida a primeira posição, temos $(r - 1)$ opções de escolher a segunda posição, e assim sucessivamente até termos 1 possibilidade de escolha da r -ésima posição. Todas essas $r!$ permutações dos r elementos representam o mesmo subconjunto e foram contadas a mais. Como cada subconjunto está sendo contado $(r!)$ vezes. Para descartar o excesso devemos dividir o resultado encontrado por $r!$. Portanto

$$C_{n,r} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - r + 1)}{r!} = \frac{A_{n,r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n - r)!}.$$

Logo,

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n - r)!}.$$

◇

Observe os casos particulares:

1º Caso: n e r pertencem ao conjunto dos números naturais e $n = r$, temos

$$C_{n,n} = \frac{n!}{n!(n - n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1.$$

Ou seja, a quantidade de subconjuntos com n elementos de um conjunto M com n elementos só poderá ser 1, que é o próprio conjunto.

2º Caso: n é um número natural não nulo e $r = 0$, logo

$$C_{n,0} = \frac{n!}{0!(n - 0)!} = \frac{n!}{0!n!} = 1.$$

Assim, a quantidade de subconjunto com 0 elementos de um conjunto M é exatamente 1, pois este subconjunto é o conjunto vazio. Isto justifica o porquê de $0! = 1$.

3º Caso: Se $n = r = 0$. Logo $M = \emptyset$ e

$$C_{0,0} = \frac{0!}{0!(0 - 0)!} = 1.$$

Isto significa que o único subconjunto do conjunto vazio é o próprio conjunto vazio.

Exemplo 3 *Deseja-se formar uma comissão de três membros e dispõe-se de dez funcionários. Quantas comissões podem ser formadas?*

Solução: Seja M o conjunto dos 10 funcionários, vamos representar os dez funcionários pelas letras A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Note que a comissão formada com os funcionários $\{A, B, C\}$ é a mesma que a comissão formada por $\{C, B, A\}$, isto é, a ordem dos elementos não mudou a decisão a ser tomada. Logo temos uma combinação dos 10 elementos de M tomados 3 a 3. Dessa forma, temos:

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3! \cdot (10 - 3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = \frac{720}{6} = 120.$$

◇

Observe que se atribuíssemos uma função ou cargo, para os funcionários que participarão das comissões teríamos um problema de arranjos simples, pois nesse caso, a ordem dos elementos importaria. Vejamos o exemplo.

Exemplo 4 Se 10 funcionários, tivessem que ocupar um cargo de presidente, vice-presidente e secretário. De quantas formas poderia ser feita essa escolha?

Solução: Procuramos agrupamento de 3 elementos em que a ordem é importante, pois, se tivermos três pessoas A, B e C. Com A (presidente), B (Vice-presidente) e C (secretário) e mudarmos essa ordem, isto é, C (presidente), B (vice-presidente) e A (secretário) obteremos um agrupamento diferente. Dessa forma temos 10 elementos para serem arranjados 3 a 3. Assim, temos de calcular:

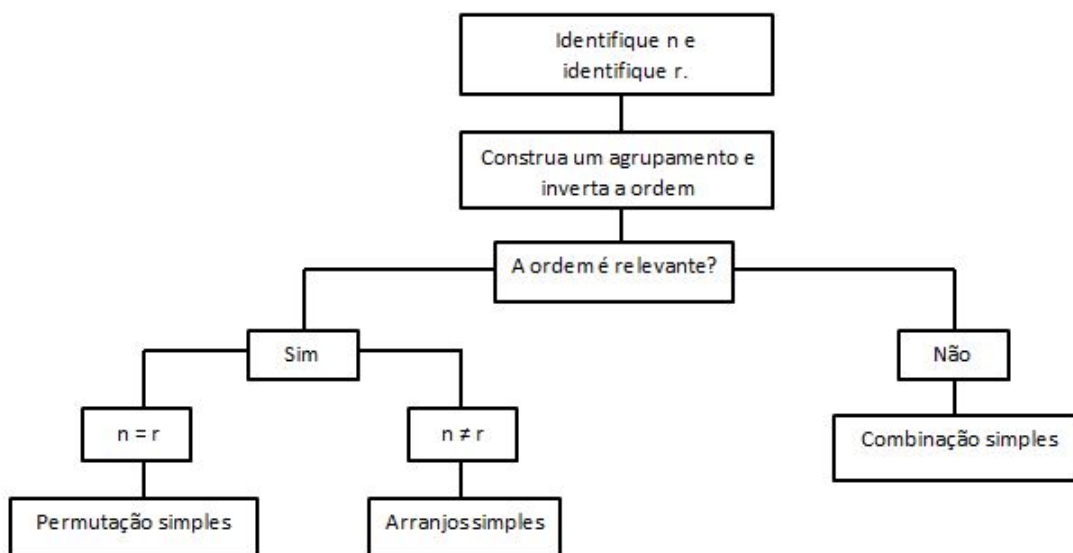
$$A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 720 \text{ maneiras.}$$

◇

É muito comum os alunos, na resolução das questões de Combinatória, iniciantes no assunto, invertem as fórmulas de arranjos e combinações simples. Um dos motivos para que isso ocorra, é estes não perceberem que, a ordem dos elementos está relacionada aos conceitos de arranjos e combinação simples. Diante disso, é importante fazer uma breve revisão sobre os conceitos de subconjuntos e sequências, já que estão profundamente interligados aos conceitos de arranjos e combinações simples. Outro motivo é que muitas vezes, estas fórmulas são ensinadas sem relacioná-las. Isso faz com que a diferença entre tais conceitos não seja percebida.

Para fazer a comparação entre os conceitos e fazer a diferenciação entre eles observamos a Figura 8 a seguir:

Figura 8 – Tipos de agrupamentos



Fonte: Ilustração do autor

A Figura 8 é importante para fazer o comparativo entre os principais conceitos de combinatória, contudo, no caso das permutações, outros dois tipos específicos serão tratados a seguir.

3.7 Permutação Circular

Permutações circulares de n objetos distintos é qualquer modo de colocar esses n objetos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo. Mais precisamente.

Definição 5 *Seja um conjunto M com n elementos. Uma permutação circular de n objetos distintos, é toda arrumação desses objetos, em torno de um círculo, de modo que os objetos estejam dispostos em exatamente n lugares, igualmente espaçados.*

Indicaremos por $(PC)_n$ o número total de permutações circulares de n objetos distintos.

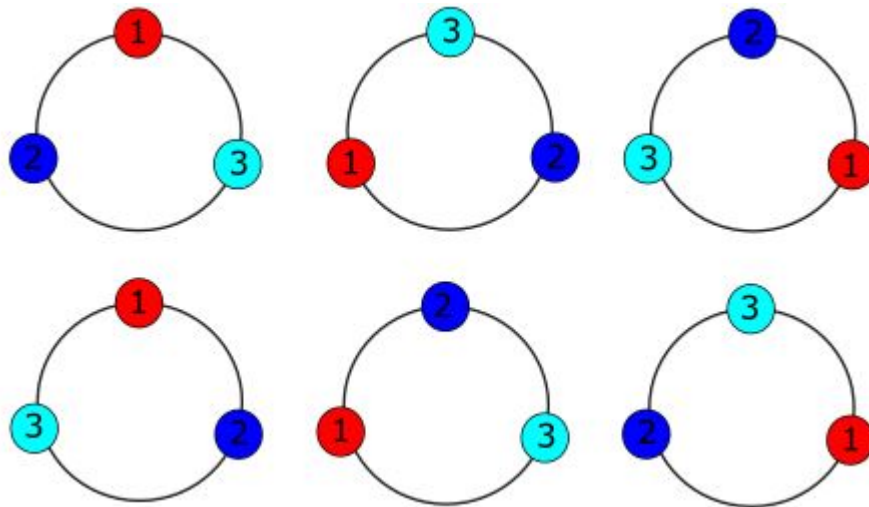
Exemplo 1 *Quantas rodas de ciranda podem ser formadas com 3 crianças?*

Solução: Temos 3 opções para colocar a primeira criança na roda de ciranda. Uma vez colocada a primeira criança na roda de ciranda, restam 2 opções para colocar a segunda criança. Uma vez colocadas as duas primeiras crianças, resta apenas uma opção para colocar a terceira criança. Pelo Princípio Fundamental da contagem, temos

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6 \text{ possibilidades.}$$

Observe a Figura 9.

Figura 9 – Ilustração da permutação circular



Fonte: Ilustração do autor

No entanto, na primeira linha, as três primeiras possibilidades que as crianças estão dispostas podem coincidir entre si por rotação e o mesmo ocorre com as três últimas. Dessa forma, para corrigir o excesso basta dividir o número de possibilidades por 3. Logo,

$$(PC)_3 = \frac{6}{3} = 2.$$

◇

A partir da definição e do caso particular anterior o seguinte problema pode ser formulado.

Problema das Permutações Circulares: *De quantos modos podemos colocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo, se considerarmos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação?*

Solução: Para colocar o primeiro objeto, temos n modos. Uma vez colocado o primeiro objeto, restam $(n-1)$ modos para colocar o segundo objeto. Repetindo o processo até termos $[n-(n-1)]$ modos para ocupar a n -ésima posição. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots [n-(n-1)] = P_n = n!$ formas diferentes. Como temos uma permutação circular, o círculo terá n espaços para serem ocupados pelos n elementos. Uma vez escolhida qualquer uma das $n!$ permutações dos n elementos, podemos fazer com esta n rotações pelo círculo obtendo apenas permutações iguais. Dessa forma cada uma das $n!$ permutações pode ser colocada de n formas diferentes, assim para corrigir o excesso basta dividir o número de possibilidades por n . Logo,

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = \frac{n \cdot (n-1)!}{n} = (n-1)!$$

Portanto $(PC)_n = (n-1)!$.

◇

Exemplo 2 *De quantas formas diferentes 6 pessoas podem sentar-se em torno de uma mesa circular?*

Solução: $(PC)_6 = (6-1)! = 5! = 120$.

◇

3.8 Permutação com Repetição

Permutação de elementos repetidos é uma variação da permutação simples e ocorre quando, dentre o total de elementos do conjunto existe algum ou alguns deles que se repetem. Nesse caso, esses elementos repetidos ou iguais, não permutam entre si. Assim, Permutação de elementos repetidos deve seguir uma forma diferente da permutação, pois elementos repetidos permutam entre si. Nesse caso a fórmula é diferente.

Definição 5 *Permutação com Repetição:* *Uma permutação com repetição de n objetos, com n_1 deles iguais a a_1 , n_2 deles iguais a a_2 , ..., n_r deles iguais a a_r , é qualquer coleção ordenada desses n objetos.*

Indiquemos por $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_r}$ o número de modos de permutar n objetos dos quais n_1 são iguais a a_1 , n_2 são iguais a a_2 , ..., n_r são iguais a a_r .

Na permutação simples devemos ter todos os elementos, que serão permutados, distintos. No entanto, em algumas situações encontraremos casos em que a permutação ocorre com elementos repetidos, nesse caso, devemos ter cuidado no cálculo da mesma.

Observe o exemplo.

Exemplo 1 *Quantos anagramas possui a palavra "BÁRBARA"?*

Solução: Como a palavra “BÁRBARA” possui letras repetidas, não podemos utilizar permutações simples, pois nesse caso, os anagramas B_1ARB_2ARA e B_2ARB_1ARA seriam considerados diferentes. Para compor os anagramas da palavra “BÁRBARA” devemos colocar $3A$, $2B$ e $2R$ em 7 lugares. Vejamos os lugares: $\square\square\square\square\square\square\square$. A quantidade de maneiras de escolher os lugares onde serão dispostos a letra A é $C_{7,3}$, pois são 7 lugares e $3A$. Suponha que os lugares onde serão colocados os $3A$ sejam $\square A \square A \square \square A \square$. Depois de colocadas a letra A , temos $C_{4,2}$ formas de escolher os lugares para colocar a letra B , pois restam 4 lugares e $2B$. Finalmente, uma única maneira de escolher os lugares para a letra R .

Portanto temos,

$$P_7^{3,2,2} = C_{7,3} \cdot C_{4,2} \cdot 1 = 35 \cdot 6 \cdot 1 = 210.$$

◇

Exemplo 2 *Quantos números de 6 algarismos podemos formar permutando os algarismos 4, 4, 5, 5, 5 e 8?*

Solução: Para formar um número de seis algarismos devemos arrumar os 2 algarismos quatro, os 3 algarismos cinco e 1 algarismo oito em 6 lugares. O número de modos de escolher os lugares onde serão colocados os algarismos 4 é $C_{6,2}$. Depois de colocados os algarismos 4, temos $C_{4,3}$ modos de escolher os lugares para colocar os algarismos 5 e, finalmente, um único modo de escolher o lugar para colocar o algarismo 8.

Portanto temos,

$$P_6^{2,3,1} = C_{6,2} \cdot C_{4,3} \cdot 1 = 15 \cdot 4 \cdot 1 = 60.$$

◇

Problema das Permutações com Repetição *Quantas são as permutações de n objetos onde cada elemento a_i se repete n_i vezes, para $i = 1, 2, \dots, r$, e $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$?*

Seguindo o mesmo raciocínio dos exemplos 1 e 2, o número de modos de escolher os lugares onde serão colocados os objetos a_1 é C_{n,n_1} . Depois de colocados os objetos a_1 , temos C_{n-n_1,n_2} modos de escolher os lugares para colocar os objetos a_2 e assim sucessivamente, obtendo dessa forma:

$$\begin{aligned} P_n^{n_1, n_2, \dots, n_r} &= C_{n, n_1} \cdot C_{n-n_1, n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2, n_3} \cdot \dots \cdot C_{n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1}, n_r} \\ P_n^{n_1, n_2, \dots, n_r} &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \\ &\quad \dots \cdot \frac{(n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1})!}{n_r!(n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1}-n_r)!} \end{aligned}$$

Como $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ e $0! = 1$, segue que,

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_r!}.$$

◇

Exemplo 3 *Quantos anagramas existem da palavra ANALÍTICA?*

Solução: Como temos 3 letras A, 2 letras I, 1 letra N, 1 letra L, 1 letra T e 1 letra C, a resposta é

$$P_9^{3,2,1,1,1,1} = \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 30\,240.$$

◇

4 SUGESTÕES DE ATIVIDADES DO UNIVERSO RECREATIVO DO ALUNO PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA

Nesse capítulo apresentamos algumas sugestões de problemas e/ou atividades do universo recreativo e de interesse do aluno para serem trabalhadas em sala de aula que podem contribuir para apontar caminhos para o professor trabalhar os conteúdos de Análise Combinatória e possibilitar a mitigação das dificuldades de aprendizagem dos alunos. Tais problemas e/ou atividades quando trabalhados em sala de aula facilitam a compreensão dos alunos com relação a alguns conceitos básicos de Combinatória, bem como a diferenciação entre eles. Ao ensinar dessa forma, o professor demonstra para o aluno a associação entre os elementos conceituais de Combinatória com a sua aplicação concreta em problemas práticos. A perspectiva de melhoria da aprendizagem se dá em função dos problemas e/ou atividades propostas fazerem parte do universo recreativo do aluno, ou ainda de situações do seu cotidiano. Faremos inicialmente uma introdução sobre como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e os Parâmetros Curriculares Nacionais Mais - Ensino Médio (PCNEM +) abordam o estudo de Combinatória e em seguida sugere-se os problemas/atividades recreativas que julgamos relevantes para facilitar o ensino e aprendizagem desses conteúdos.

4.1 Combinatória nos PCNEM e PCNEM +

As necessidades sociais, culturais e profissionais contemporâneas, independente da área de atuação, apontam para a necessidade do domínio de competências em Matemática. Nesse sentido a Matemática do Ensino Médio, no seu aspecto formativo, contribui para a estruturação do pensamento e do raciocínio dedutivo. Além disso, assume um papel instrumental, uma vez que serve como ferramenta para resolver problemas do cotidiano, independente da atividade humana.

Sobre isso os PCNEM (BRASIL, 2000, p. 40) reafirmam que:

[...] todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.

Dessa forma, o papel formativo da Matemática no Ensino está ligado ao desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes que são uteis tanto nessa área do conhecimento quanto fora dela, a partir de quando o aluno desenvolve a sua capacidade de resolver problemas genuínos e adquire hábitos de investigação. Ao falar do caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, os PCNEM (BRASIL, 2000, p. 40) destacam: “[...] deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a

atividade profissional”.

A Matemática do Ensino Médio possui caráter formativo e instrumental, com características estruturais específicas. Assim, para efeito do ensino de Matemática, a organização dos conteúdos em eixos ou temas estruturadores possibilita a sua compreensão em universos finitos especialmente ligados à sua compreensão.

Os temas estruturadores são Álgebra: Números e Funções, Geometria e Medidas e Análise de Dados. Dentro de tais eixos é importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. Cada tema é organizado em unidades temáticas e a Contagem faz parte da Análise de dados.

Nessa unidade temática os PCNEM + (BRASIL, 2002, p. 127) destacam os seguintes conteúdos e habilidades:

Contagem: princípio multiplicativo; problemas de contagem.

Habilidades: Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos.

Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem.

Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem.

A Análise Combinatória faz parte da Contagem e tem grande importância para o desenvolvimento das habilidades cognitivas do estudante, sendo requisito necessário à aprendizagem de outros conhecimentos dessa área do conhecimento e destaca-se pela vasta possibilidade de aplicação em problemas do cotidiano, sendo, portanto, útil à desmistificação da Matemática.

A esse respeito os PCNEM + (BRASIL, 2002, p. 126-127) complementam:

A Contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande.

Essa proposição dos PCNEM + aponta para a importância do raciocínio combinatório na formação do aluno, principalmente no Ensino Médio, inclusive a atenção que o professor precisa ter no sentido de desenvolver o ensino desse conteúdo de forma a potencializar a aprendizagem e o desenvolvimento das competências e habilidades dos

alunos.

A abordagem dos conteúdos de Análise combinatória deve ser precedida de uma revisão dos conteúdos basilares, principalmente no que se refere à Matemática básica e a noção e conceitos elementares de conjunto. A partir daí, no ensino de Análise Combinatória, a utilização de atividades recreativas e/ou de interesse dos alunos são contributivas para melhorar a aprendizagem do aluno porque chamam a sua atenção por fazerem parte do seu dia a dia.

Ao utilizar em sua aula os problemas de contagem que fazem parte do cotidiano dos alunos, por meio de atividades recreativas e/ou de seu interesse, o professor possibilita aos mesmos à compreensão de que os conteúdos relativos a estes têm utilidade prática e, portanto, encontram sentido em aprendê-las.

Segue-se sugestões de atividades com essas características e que podem ser aplicadas pelo professor no ensino de Análise Combinatória.

4.2 Problemas e/ou atividades para o Ensino de Combinatória

Esse exemplo trata de um problema prático muito presente no Ensino Médio porque faz parte da realidade das eleições dos grêmios estudantis que ocorrem todos os anos nas escolas.

Problema 1. Para a composição da chapa para concorrer às eleições do Grêmio Estudantil de uma Escola de Ensino Médio WY dez alunos se propuseram a participar. Como precisam ser preenchidos apenas os cargos de Presidente, vice presidente, 1º secretário, 2º secretário, 1º tesoureiro e 2º tesoureiro, precisam ser escolhidos dentre os dez alunos, apenas seis deles, para em seguida fazer a distribuição nos cargos. Nestas condições determine:

Item 1. *Quantas são as maneiras diferentes de escolher as seis pessoas que participarão da chapa?*

Item 2. *De quantas maneiras diferentes as seis pessoas escolhidas podem ser distribuídas nos cargos da chapa?*

Item 3. *Na hipótese de serem escolhidos um Presidente, um vice presidente, dois secretários, sem distinção de ordem e dois tesoureiros também sem distinção de ordem, de quantas maneiras diferentes essa escolha poderia ser feita?*

Solução:

Item 1

Para a escolha das seis pessoas que participarão da chapa, como inicialmente não serão distribuídos os cargos, a posição de cada um no grupo escolhido não tem importância. Nesse caso utilizamos uma combinação de 10 elementos, tomados 6 a 6.

Então, temos:

$$C_{10,6} = \frac{10!}{6! \cdot (10-6)!} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210 \text{ possibilidades.}$$

Logo, para a escolha dos seis alunos dentre os dez que se propuseram a participar da chapa, temos 210 maneiras diferentes.

Item 2

Para a distribuição dos seis alunos escolhidos para participar da chapa, nos seis cargos e, considerando que todos tem interesse em concorrer a quaisquer dos cargos na chapa e, a posição de cada um na distribuição dos cargos têm importância, logo temos um arranjo de 6 elementos, tomados 6 a 6.

Nesse caso, como envolve todos os elementos do conjunto, o arranjo é uma permutação simples de 6 elementos.

Então, temos:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ possibilidades.}$$

No caso de considerarmos um arranjo de 6 elementos, tomados 6 a 6 e optarmos pela resolução por esse mecanismo, então temos:

$$A_{6,6} = \frac{6!}{(6-6)!} = \frac{6!}{1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 720 \text{ possibilidades.}$$

Logo, para a distribuição dos seis alunos nos seis cargos da chapa temos 720 maneiras diferentes de fazê-lo.

Item 3

Para a distribuição dos seis alunos escolhidos para participar da chapa, nos seis cargos e, na hipótese de ter dois cargos de secretários sem distinção entre eles e dois cargos de tesoureiro também sem distinção. Nesse caso a posição entre os dois secretários não importa, assim como a posição entre os dois tesoureiros também não importa. Dessa forma, temos um caso de Permutação com 6 elementos, com elementos repetidos (dois secretários e dois tesoureiros).

Então, temos:

$$P_6^{2,2} = \frac{6!}{2! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 1 \cdot 2!} = 180 \text{ possibilidades.}$$

Logo, para a distribuição dos seis alunos nos seis cargos da chapa, na hipótese de não haver distinção entre os dois cargos de secretário e entre os dois cargos de tesoureiro, temos 180 maneiras diferentes de fazê-lo.

◇

O problema a seguir consiste na realização dos Jogos Interclasses de FUTSAL, onde o professor pode atribuir a um grupo de alunos, a tarefa de elaborar a tabela do torneio

a partir de um regulamento. O problema pode consistir em determinar a quantidade de jogos e preparar um “esquema” para explicar junto aos demais interessados como foi determinado esse total de jogos.

Então vejamos:

Problema 2. Os jogos Interclasses de FUTSAL serão realizados durante todo o semestre letivo 2017.2 e deles participarão equipes das doze salas de aula (1º A, 1º B, 1º C, 1º D, 1º E, 2º A, 2º B, 2º C, 2º D, 3º A, 3º B e 3º C) da nossa escola. Para que os resultados finais do torneio sejam alcançados todas as equipes se enfrentarão entre si em partida única entre elas na primeira fase. Ao final desta, as quatro salas melhores classificadas, em ordem decrescente de pontuação e/ou pelos demais critérios do regulamento participarão das partidas semifinais e finais da seguinte forma: 1º colocado enfrenta o 4º colocado em partida única e o 2º colocado enfrenta o 3º colocado também em partida única; os perdedores disputarão os 3º e 4º lugares em mais uma partida única e os ganhadores farão uma partida para decidir qual equipe será vice campeã e campeã, respectivamente. Os representantes das equipes do 2º A, 2º B, 2º C e 2º D, – supervisionados pelos representantes dos terceiros anos e acompanhados pelos representantes dos primeiros anos –, serão responsáveis por elaborar a tabela com o total de jogos. Nestas condições:

Item 1. *Determine o número total de jogos.*

Item 2. *Construa uma tabela com os jogos da primeira fase.*

Item 3. *Construa uma tabela com as datas dos jogos da primeira fase.*

Item 4. *Construa uma tabela com os jogos das semifinais e finais.*

Item 5. *Calcule a quantidades de maneiras de se obter a classificação dos quatro semifinalistas.*

Item 6. *Calcule a quantidades de maneiras de se obter a classificação dos três primeiros colocados a partir dos quatro semifinalistas.*

Solução:

Item 1

Para saber o número total de jogos, faremos uma combinação das 12 equipes tomadas 2 a 2 (duas a duas) em turno único, ou seja, $C_{12,2}$.

Essa combinação é a seguinte:

$$C_{12,2} = \frac{12!}{2! \cdot (12-2)!} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{2 \cdot 1 \cdot 10!} = \frac{132}{2} = 66.$$

Logo, na primeira fase serão realizadas 66 partidas e, como se classificam para as semifinais quatro equipes que jogarão duas a duas, são mais duas partidas e, nas finais serão também mais duas partidas, o total de partidas será dado pela soma de:

66 partidas da primeira fase;

02 partidas das semifinais;

02 partidas das finais.

Ou seja,

$$\text{Total de partidas} = 66 \text{ partidas} + 02 \text{ partidas} + 02 \text{ partidas} = 70 \text{ partidas}$$

Item 2

Como é necessário montar a tabela, não é suficiente saber qual o número de partidas a serem realizadas no torneio, mas, quais são essas partidas. Nesse sentido, para obter o esquema de jogos basta fazer a seguinte tabela, representada na Figura 10:

Figura 10 – Jogos de cada equipe na 1ª fase

Jogos do 1º A	1º A x 1º B	1º A x 1º C	1º A x 1º D	1º A x 1º E	1º A x 2º A	1º A x 2º B	1º A x 2º C	1º A x 2º D	1º A x 3º A	1º A x 3º B	1º A x 3º C
Jogos do 1º B	1º B x 1º C	1º B x 1º D	1º B x 1º E	1º B x 2º A	1º B x 2º B	1º B x 2º C	1º B x 2º D	1º B x 3º A	1º B x 3º B	1º B x 3º C	
Jogos do 1º C	1º C x 1º D	1º C x 1º E	1º C x 2º A	1º C x 2º B	1º C x 2º C	1º C x 2º D	1º C x 3º A	1º C x 3º B	1º C x 3º C		
Jogos do 1º D	1º D x 1º E	1º D x 2º A	1º D x 2º B	1º D x 2º C	1º D x 2º D	1º D x 3º A	1º D x 3º B	1º D x 3º C			
Jogos do 1º E	1º E x 2º A	1º E x 2º B	1º E x 2º C	1º E x 2º D	1º E x 3º A	1º E x 3º B	1º E x 3º C				
Jogos do 2º A	2º A x 2º B	2º A x 2º C	2º A x 2º D	2º A x 3º A	2º A x 3º B	2º A x 3º C					
Jogos do 2º B	2º B x 2º C	2º B x 2º D	2º B x 3º A	2º B x 3º B	2º B x 3º C						
Jogos do 2º C	2º C x 2º D	2º C x 3º A	2º C x 3º B	2º C x 3º C							
Jogos do 2º D	2º D x 3º A	2º D x 3º B	2º D x 3º C								
Jogos do 3º A	3º A x 3º B	3º A x 3º C									
Jogos do 3º B	3º B x 3º C										

Fonte: elaborada pelo autor Ano: 2017.

Note que a tabela apresenta a quantidade de jogos calculada pela combinação

$$C_{12,2}$$

referente aos jogos da primeira fase. Para os demais jogos, acrescenta-se o cruzamento colocado pela proposição do problema, ou seja,

Semifinais

jogo 67: 2º colocado X 3º colocado

jogo 68: 1º colocado X 4º colocado

Finais

jogo 69: Perdedor do jogo 67 X Perdedor do jogo 68

jogo 70: Ganhador do jogo 67 X Ganhador do jogo 68

Item 3

Montagem da Tabela da 1ª fase em cada uma das rodadas:

– A tabela com as datas e jogos é preenchida conforme o exemplo a seguir. Para facilitar o preenchimento quando for utilizada uma planilha no computador, marca-se com cores diferentes cada equipe já posta na tabela, conforme o exemplo a seguir. Quando for utilizada uma planilha impressa, usa-se como fonte de dados a tabela anterior, eliminando os jogos já marcados nesta tabela. Observe a Figura 11.

Figura 11 – Jogos da 1ª fase

1ª Rodada	Data: ___/___/___	1º A x 1º B	1º C x 1º D	2º A x 2º B	2º C x 3º C	1º E x 2º D	3º A x 3º B
2ª Rodada	Data: ___/___/___	1º A x 1º C	1º B x 1º D	2º A x 2º C	2º B x 3º B	1º E x 3º A	2º D x 3º C
3ª Rodada	Data: ___/___/___	1º A x 1º D	1º B x 1º C	2º A x 3º B	2º C x 3º A	1º E x 3º C	2º B x 2º D
4ª Rodada	Data: ___/___/___	1º A x 1º E	1º B x 2º A	1º C x 2º D	1º D x 3º A	2º B x 2º C	3º B x 3º C
5ª Rodada	Data: ___/___/___	1º A x 2º A	1º B x 1º E	1º C x 2º B	1º D x 2º D	2º C x 3º B	3º A x 3º C
6ª Rodada	Data: ___/___/___	1º A x 2º B	1º B x 2º C	1º C x 1º E	1º D x 3º C	2º A x 3º A	2º D x 3º B
7ª Rodada	Data: ___/___/___	1º A x 2º C	1º B x 2º B	1º C x 3º B	1º D x 1º E	2º A x 3º C	2º D x 3º A
8ª Rodada	Data: ___/___/___	1º A x 2º D	1º B x 3º A	1º C x 2º C	1º D x 2º A	1º E x 3º B	2º B x 3º C
9ª Rodada	Data: ___/___/___	1º A x 3º A	1º B x 3º B	1º C x 3º C	1º D x 2º B	1º E x 2º A	2º C x 2º D
10ª Rodada	Data: ___/___/___	1º A x 3º B	1º B x 3º C	1º C x 3º A	1º D x 2º C	1º E x 2º B	2º A x 2º D
11ª Rodada	Data: ___/___/___	1º A x 3º C	1º B x 2º D	1º C x 2º A	1º D x 3º B	1º E x 2º C	2º B x 3º A

Fonte: tabela elaborada pelo autor Ano: 2017.

É importante destacar que essa última tabela é uma resposta ao problema. Podem existir outras, com mudanças das datas e ordens dos jogos, no entanto, o número de jogos e os cruzamentos das equipes serão exatamente estes, independente dessas mudanças. Por outro lado, no cruzamento dos jogos das semifinais e finais, serão exatamente quatro jogos. As equipes que participarão destes jogos é que podem mudar, dentre as equipes que disputam os Jogos Interclasses.

Item 4

Montagem da Tabela das semifinais e finais:

– Como ainda não são conhecidas as equipes classificadas a tabela deve ser organizada pelo número do jogo. E como na primeira fase serão realizados 66 jogos, os jogos das semifinais serão os de número 67 e 68 e os jogos das finais serão os de número 69 e 70, conforme a tabela a seguir:

Figura 12 – Jogos das semifinais e finais

Semifinais	Data:	Jogo 67: 2º colocado	x	3º colocado
	—/—/—	Jogo 68: 1º colocado	x	4º colocado
Finais	Data:	Jogo 69: Perdedor do jogo 67	x	Perdedor do jogo 68
	—/—/—	Jogo 70: Ganhador do jogo 67	x	Ganhador do jogo 68

Fonte: tabela elaborada pelo autor Ano: 2017.

Item 5

Calcular a quantidade de maneiras de se obter a classificação dos quatro semifinalistas:

Para a classificação dos quatro primeiros colocados perceba que a ordem de posição é relevante para a classificação das equipes. Nesse sentido, a contagem deverá ser feita por meio de um arranjo de 12 elementos tomados de 4 em 4. Assim, como não nos interessa saber quais são esses arranjos, mas, apenas a sua quantidade, utilizamos a fórmula:

$$A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Substituindo, temos:

$$A_{12,4} = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11.880$$

Logo, são 11.880 maneiras de se obter a classificação das quatro equipes semifinalistas.

Item 6

Calcular a quantidade de maneiras de se obter a classificação dos três primeiros colocados, a partir dos quatro semifinalistas:

Para calcular a quantidade de maneiras de se obter os três primeiros classificados a partir dos quatro semifinalistas, utilizamos o princípio multiplicativo.

Assim, para ocupar a primeira posição temos 4 possibilidades, para ocupar a segunda posição temos 3 possibilidades e para ocupar a terceira posição resta 2 possibilidades. Logo,

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Dessa forma, são 24 maneiras de se obter a classificação dos três primeiros colocados

a partir das semifinais.

◇

Problema 3. Este problema foi retirado da Revista do Professor de Matemática (RPM) 90 (2016) e diz respeito ao Xadrez 960 que é uma variante do Xadrez tradicional e já foi reconhecido pela Federação Internacional de Xadrez (FIDE).

Santos (2016, p. 24-25) destaca que segundo a FIDE, as regras do jogo do Xadrez 960 são as seguintes:

Os peões brancos são colocados como no xadrez tradicional, na segunda fila. As peças brancas restantes são colocadas randomicamente na primeira fila, mas com as seguintes restrições:

i) O rei é colocado entre as duas torres.

ii) Os bispos são colocados em casas de cores opostas.

iii) As peças pretas do oponente são colocadas exatamente na posição oposta das peças brancas.

A posição inicial pode ser gerada antes da partida tanto por um programa de computador ou usando dados, moedas, cartas, etc.

O desenvolvimento da partida é o mesmo do xadrez tradicional.

Antes de iniciar a resolução do problema convém apresentar as peças brancas e pretas do Xadrez com os seus respectivos nomes, conforme pode-se observar na figura a seguir:

Figura 13 – Peças do jogo de Xadrez

Brancas	Nome	Pretas
	Rei	
	Dama	
 	Torre	 
 	Bispo	 
 	Cavalo	 
       	Peão	       

Fonte: <http://projetoxadreznaescola10.blogspot.com.br/2010/> Acesso em 10 de Julho de 2017.

Na resolução do problema devemos considerar que, como as posições das peças pretas ficam determinadas a partir das peças brancas, pela regra iii), basta contarmos quantas disposições de peças são possíveis para as brancas, no início do jogo. A partir daí saberemos a quantidade de disposições das peças pretas e em seguida a quantidade de disposições de todas as peças do jogo.

Na Figura 14 a seguir mostramos uma disposição inicial das peças do jogo de Xadrez, no entanto, existem muitas outras disposições, cuja quantidade será calculada na resolução do problema proposto. Pode-se perceber ainda que os peões são colocados na segunda fila, portanto, não têm interferência na disposição das demais peças que serão colocadas na primeira fila e constituem o objeto do presente problema.

Figura 14 – Imagem de uma disposição inicial das peças do Jogo de Xadrez



Fonte:<http://projetoxadreznaescola10.blogspot.com.br/2010/> Acesso em 10 de Julho de 2017.

1º Passo:

Colocação dos dois bispos:

Como são quatro casas brancas e quatro pretas disponíveis para os bispos por ii). Utilizamos o princípio multiplicativo, obtemos

$$4 \cdot 4 = 16 \text{ possibilidades.}$$

Logo são 16 possibilidades para a colocação dos dois bispos.

2º Passo:

Colocação dos dois cavalos:

Como são dois cavalos e das oito casas iniciais, duas foram ocupadas pelos bispos, restam seis casas que podem ser utilizadas para a colocação dos cavalos sem restrições. Em seguida, colocamos os dois cavalos, sobre os quais não há restrição, nesse caso utilizamos uma combinação de 6 elementos tomados 2 a 2.

Então, temos:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15 \text{ possibilidades.}$$

Logo, para a colocação dos dois cavalos temos 15 possibilidades.

3º Passo:

Colocação da rainha:

Como das oito casas, quatro delas foram ocupadas pelos dois bispos e pelos dois cavalos, restam quatro casas que, em qualquer uma delas pode ser colocada a rainha.

Então, temos:

4 possibilidades.

Logo, para a colocação da rainha temos 4 possibilidades.

4º Passo:

Colocação das duas torres e do rei:

Das oito casas restantes, cinco delas já foram ocupadas, restando apenas três casas, sendo elas destinadas para as duas torres e o rei. Pela condição i) o rei deve ficar entre as duas torres e, nesse caso passamos a ter apenas uma possibilidade.

1.

Logo, para a colocação do rei e das duas torres temos apenas 1 possibilidade.

5º Passo:

Cálculo de todas as diferentes maneiras de se disporem as peças no Xadrez 960.

As possibilidades calculadas foram feitas para as peças brancas e, como as peças pretas são em igual quantidade e dependem da colocação das peças brancas pela regra iii), então aplicamos o princípio multiplicativo utilizando como fatores as possibilidades até então encontradas. Então temos:

$$16 \cdot 15 \cdot 4 \cdot 1 = 960 \text{ possibilidades.}$$

Logo, são 960 maneiras diferentes de se disporem as peças no Xadrez 960. É dessas possibilidades que advém o nome dessa variante do xadrez tradicional (RPM 90).

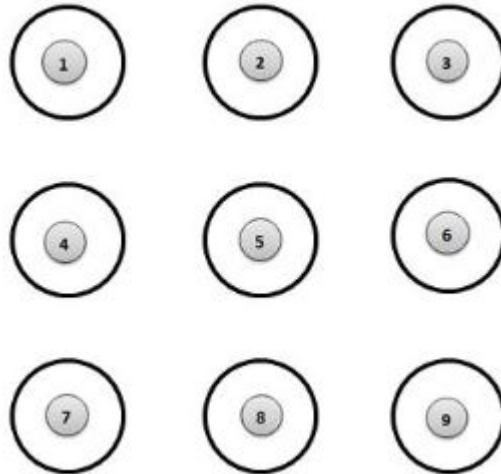
◇

Problema 4. Este problema também foi proposto na Revista do Professor de Matemática (RPM) Nº 90 que destaca os padrões permitidos para bloquear o acesso inadequado a dispositivos móveis como celulares, *tablets*, etc.. Esse bloqueio de tela é definido, de modo que a sua liberação para o uso só é feita depois da confirmação desse padrão cadastrado de modo prévio (RPM 90. 2016). Esse padrão, de acordo com Dutenhefner e Cadar (2016, p. 39), “é um desenho formado por segmentos de reta que unem alguns dos nove pontos apresentados em um quadrado 3 x 3”.

Esse padrão segue regras predefinidas e fez parte de um questionamento de uma aluna do nível I da OBMEP que foi premiada em 2015. A sua pergunta foi: “Quantos são aqueles desenhos para desbloquear um celular?” Essa pergunta partindo de uma aluna desse nível parece ser um exemplo claro de que os alunos associam conceitos matemáticos a situações do dia a dia.

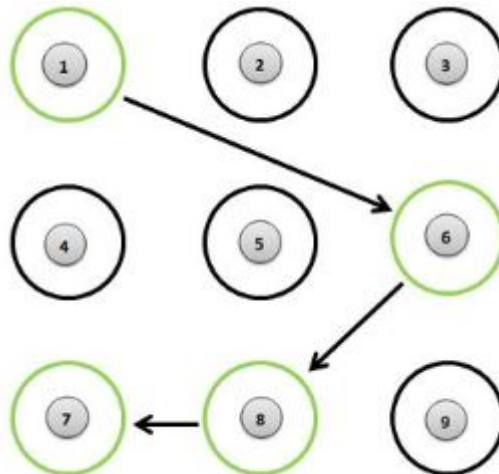
Para uma melhor compreensão, vamos numerar os nove pontos do quadrado 3x3 como na Figura 15 e vamos representar o padrão como uma sequência de números escrita entre parênteses. Por exemplo, na Figura 16 vemos o padrão (1687).

Figura 15 – Padrão desbloqueio I



Fonte: Ilustração do autor

Figura 16 – Padrão desbloqueio II



Fonte: Ilustração do autor

Essa notação estabelece uma correspondência entre uma figura de um padrão e uma sequência de Algarismos. Nessa notação, uma sequência (a_1, a_2, \dots, a_k) de Algarismos entre 1 e 9 correspondente a um padrão válido de comprimento k se:

(R1) os Algarismos a_1, a_2, \dots, a_k são dois a dois distintos.

(R2) $k \geq 4$.

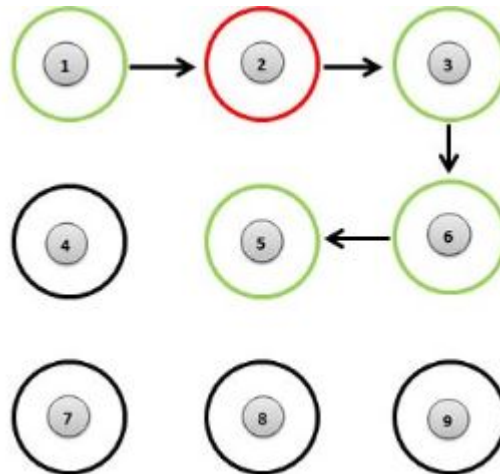
(R3) se o segmento que conecta dois pontos consecutivos a_i e a_{i+1} da sequência possuir como ponto médio um dos pontos do quadrado 3×3 , então esse ponto médio deve ser um dos pontos visitados anteriormente:

$$a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$$

Para compreender melhor essas restrições, principalmente (R3), vamos alguns exemplos.

1. (1365) não é uma sequência válida, pois, para conectar os pontos 1 e 3, devemos passar obrigatoriamente pelo ponto 2. Observe a Figura a 17.

Figura 17 – Padrão desbloqueio III



Fonte: Ilustração do autor

2. (2413) é uma sequência válida, pois, para conectar os pontos 1 e 3, passamos pelo ponto 2 e esse é um ponto que foi visitado anteriormente.
3. (1285) não é uma sequência válida, pois, para passar pelo ponto 2 para o ponto 8, devemos passar anteriormente pelo ponto 5.

Para facilitar a contagem dos padrões permitidos e para ilustrar que existem pontos com características diferentes no quadrado 3x3, vamos classificar esses pontos da seguinte maneira:

- Os pontos 1, 3, 7 e 9 são pontos de vértice.

Observe que um ponto de vértice pode ser conectado a outros cinco pontos. Por exemplo, o ponto de vértice 1 pode ser conectado aos pontos 2, 4, 5, 6 e 8. Para conectar o ponto 1 aos pontos 3, 7 e 9, existe a restrição (R3)

- Os pontos 2, 4, 6 e 8 são pontos de aresta.

Um ponto de aresta pode ser conectado a outros sete pontos. Por exemplo, o ponto 2 pode ser conectado aos pontos 1, 3, 4, 5, 6, 7 e 9. Para conectar 2 a 8 existe a restrição (R3)

- O ponto 5 é o ponto central. Ele pode ser conectado, sem restrição, a qualquer um dos outros oito pontos.

Nosso objetivo é contar quantas são as sequências de algarismos distintos (a_1, a_2, \dots, a_k) , com $k \geq 4$, que definem um padrão válido. Neste caso, como as restrições (R1) e (R2) já são condições satisfeitas, devemos pensar apenas na condição (R3). Pensando de maneira indireta, para que uma tal sequência não seja um padrão válido, devem existir dois pontos consecutivos a_i e a_{i+1} tais que o ponto médio do segmento (a_i, a_{i+1}) é diferente dos pontos anteriores a_1, a_2, \dots, a_{i-1} . Para caracterizar essa condição, dentre todos os segmentos que unem os 3x3 pontos, vamos chamar de pulos os segmentos que possuem como ponto médio um dos pontos do quadrado 3x3. Mais especificamente, existem pulos de aresta e pulos de vértice dependendo se as extremidades do segmento são pontos de

aresta ou pontos de vértice. Existem 4 pulos de aresta e existem 12 pulos de vértice a saber:

Pulos de aresta: (28),(82),(46) e (64).

Pulos de vértice: (13),(17),(19),(31),(37),(39),(71),(73),(79),(91),(93),(97)

Vistos esses entendimentos iniciais, vamos apenas explicitar a contagem de padrões de comprimento 4. Para que uma tal sequência não defina um padrão válido, ela deve pertencer a um dos três conjuntos definidos a seguir:

(1) Seja A o conjunto dessas sequências $(abcd)$ tais que (ab) é um pulo.

(2) Seja B o conjunto dessas sequências $(abcd)$ tais que (bc) é um pulo e a não é o ponto médio do segmento (b, c) .

(3) Seja C o conjunto dessas sequências $(abcd)$ tais que (cd) é um pulo e a e b não são iguais ao ponto médio do segmento (c, d) .

Nestas condições:

Item 1. *Determine quantas sequências $(abcd)$ está no conjunto A .*

Item 2. *Determine quantas sequências $(abcd)$ está no conjunto B .*

Item 3. *Determine quantas sequências $(abcd)$ está no conjunto C .*

Item 4. *Determine quantas sequências $(abcd)$ está no conjunto $A \cap B$.*

Item 5. *Determine quantas sequências $(abcd)$ está no conjunto $A \cap C$.*

Item 6. *Determine quantas sequências $(abcd)$ está no conjunto $B \cap C$.*

Item 7. *Determine quantas sequências $(abcd)$ está no conjunto $A \cap B \cap C$.*

Item 8. *Determine a quantidade de padrões válidos de comprimento 4.*

Solução:

Item 1

Vamos determinar quantas sequências $(abcd)$ está no conjunto A .

Uma sequência $(abcd)$ está no conjunto A se (ab) é um pulo. Podemos escolher esse pulo de 16 maneiras diferentes. Em seguida, evitando os pontos a e b , podemos escolher c de 7 maneiras e, evitando os pontos a, b e c , podemos escolher d de 6 maneiras diferentes. Daí,

$$\#A = 16 \cdot 7 \cdot 6 = 672.$$

Item 2

Vamos determinar quantas sequências $(abcd)$ está no conjunto B .

Uma sequência $(abcd)$ está no conjunto B se (bc) é um pulo e se a não é o ponto médio do segmento (bc) . Podemos escolher esse pulo de 16 maneiras diferentes. Uma

vez escolhido o pulo, sobram 6 possibilidades para a , pois devemos evitar os pontos b, c e o ponto médio do segmento (b, c) . Em seguida, sobram 6 possibilidades para d , pois devemos evitar os pontos a, b e c . Assim,

$$\#B = 16 \cdot 6 \cdot 6 = 576.$$

Item 3

Vamos determinar quantas sequências $(abcd)$ está no conjunto C .

Uma sequência $(abcd)$ está no conjunto C se (cd) é um pulo e se a e b são diferentes do ponto médio do segmento (c, d) . O pulo pode ser escolhido de 16 maneiras diferentes. Uma vez escolhido o pulo, sobram 6 possibilidades para a , pois devemos evitar os pontos c, d e o ponto médio do segmento (c, d) . Em seguida, sobram 5 possibilidades para b , pois devemos evitar os pontos a, c, d e o ponto médio do segmento (c, d) . Daí

$$\#C = 16 \cdot 6 \cdot 5 = 480.$$

Item 4

Vamos determinar quantas sequências $(abcd)$ está no conjunto $A \cap B$.

Uma sequência $(abcd)$ está no conjunto $A \cap B$ se (ab) e se (bc) são pulos. A única possibilidade de conectar consecutivamente dois pulos é ligando três pontos de vértice. Daí, os pontos a, b e c podem ser escolhidos de $4 \cdot 3 \cdot 2$ maneiras diferentes. Evitando esses vértices, o ponto d pode ser escolhido de 6 maneiras diferentes. Assim,

$$\#(A \cap B) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 = 144.$$

Item 5

Vamos determinar quantas sequências $(abcd)$ está no conjunto $A \cap C$.

Uma sequência $(abcd)$ está no conjunto $A \cap C$ se (ab) e se (cd) são pulos e se a e b são diferentes do ponto médio do segmento (c, d) . Para calcular $\#(A \cap C)$, vamos analisar duas possibilidades dependendo se (ab) é um pulo de vértice ou pulo de aresta.

- Se (ab) é um pulo de vértice, então podemos escolher (ab) de 12 maneiras diferentes. Em seguida, podemos escolher (cd) como qualquer pulo que não contém os pontos a e b . Isso implica que podemos escolher (cd) de 6 maneiras diferentes e nesse caso obtemos $12 \cdot 6 = 72$ possibilidades.

- Se (ab) é um pulo de aresta, podemos escolher (ab) de 4 maneiras diferentes. Em seguida, podemos escolher (cd) como qualquer pulo que não tem a ou b como ponto médio. Isso implica que podemos escolher (cd) de 10 maneiras diferentes e, nesse caso, temos $4 \cdot 10 = 40$ possibilidades.

Somando esses dois subtotais, obtemos:

$$\#(A \cap C) = 72 + 40 = 112.$$

Item 6

Vamos determinar quantas sequências $(abcd)$ está no conjunto $B \cap C$.

Uma sequência $(abcd)$ está no conjunto $B \cap C$ se (bc) e (cd) são pulos e se a é diferente dos pontos médios desses pulos. Sabemos que, para conectar um pulo (bc) imediatamente em um pulo (cd) , os pontos b, c e d devem ser pontos de vértice. Para escolher temos 4 possibilidades. Uma vez escolhido o primeiro vértice, resta 3 possibilidades para o segundo vértice. Uma vez escolhidos os dois primeiros vértices, resta 2 possibilidades para o terceiro vértice. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos $4 \cdot 3 \cdot 2$ maneiras diferentes. Agora, para escolher o ponto a , existem 4 possibilidades, pois precisamos evitar os três vértices já escolhidos e os dois pontos médios dos pulos (bc) e (cd) . Portanto, o total de possibilidades nesse caso é igual a

$$\#(B \cap C) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 96.$$

Item 7

Vamos determinar quantas sequências $(abcd)$ está no conjunto $A \cap B \cap C$.

No conjunto $A \cap B \cap C$, uma sequência $(abcd)$ é formada por quatro pontos de vértice. Assim, temos 4 opções para escolher o primeiro vértice. Uma vez escolhido o primeiro vértice, restam 3 opções para escolher o segundo vértice. Uma vez escolhidos os dois primeiros vértices, restam 2 opções para escolher o terceiro vértice. Finalmente, uma vez escolhidos os três primeiros vértices, resta apenas 1 opção para escolher o quarto vértice. Utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, temos,

$$\#(A \cap B \cap C) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Item 8

Vamos contar quantas sequências $(abcd)$ de quatro algarismos distintos, escolhidos entre 1 e 9, definem um padrão válido.

Para escolher o primeiro termo da sequência temos 9 possibilidades. Uma vez escolhido o primeiro termo, restam 8 possibilidades para escolher o segundo termo. Uma vez escolhido os dois primeiros termos, restam 7 possibilidades para escolher o terceiro termo. Finalmente, como já foi escolhido três termos, restam 6 possibilidades para escolher o quarto termo. Pelo princípio multiplicativo, a quantidade total de tais sequências é igual a

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024.$$

Porém, dentre essas sequências, existe algumas que não define um padrão válido. Desse modo, para contar quantos são os padrões válidos, vamos subtrair desse total, 3024, a quantidade de sequências que não definem um padrão válido.

A quantidade de padrões válidos de comprimento 4 é, igual a

$$3024 - \#(A \cup B \cup C).$$

Para calcular a quantidade de elementos da união $A \cup B \cup C$, vamos utilizar o princípio da Inclusão-Exclusão:

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C).$$

A quantidade de elementos de cada um dos conjuntos que aparece no lado direito da igualdade acima já foram calculadas nos itens precedentes. Dessa forma, utilizando como fatores as possibilidades até então encontradas. Segue que,

$$\#(A \cup B \cup C) = 672 + 576 + 480 - 144 - 112 - 96 + 24 = 1400.$$

Logo, existem 1400 seqüências $(abcd)$ de quatro algarismos distintos que não definem um padrão.

Portanto, a quantidade de padrões válidos de comprimento 4 é igual a

$$3024 - 1400 = 1624.$$

Dessa forma, concluímos que existem 1624 seqüências $(abcd)$ de quatro algarismos distintos que definem um padrão válido de comprimento 4.

◇

De forma análoga, analisando cada vez mais conjuntos e cada vez mais quantidades de intersecções, é possível calcular a quantidade de padrões válidos de quaisquer comprimentos. Veja na tabela abaixo, a quantidade de padrões válidos de comprimento 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Tabela 1 – Quantidade de padrões válidos

comprimento	quantidade
4	1624
5	7 152
6	26 016
7	72 912
8	140 704
9	140 704
Total	389 112

Fonte: (RPM) 90 (2016)

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os problemas de contagem que envolvem a combinatória fazem parte dos conteúdos mais importantes do Ensino Médio, uma vez que estão presentes no Eixo Análise de Dados dos PCNEM, assim, como são tratados nos PCNEM +. Essa presença nestes documentos orientadores da educação brasileira ocorre em função do seu caráter formativo na estruturação do pensamento e raciocínio dedutivo do aluno, bem como do seu papel instrumental na resolução de problemas do cotidiano e, ainda por auxiliar na resolução de outros problemas do campo da Matemática.

É muito frequente problemas de contagem em provas de concursos, provas de vestibulares de universidades públicas e privadas, em avaliações externas, exames nacionais e outros. Essas demandas dos problemas de contagem fortalecem ainda mais a necessidade dos alunos aprenderem esses conteúdos no Ensino Médio.

No decorrer do trabalho é possível observar que, para aprender Análise Combinatória e os problemas de contagem, o aluno precisa ter domínio de conteúdos basilares de Matemática, principalmente as noções e conceitos de conjuntos, uma vez que estes contribuem para a compreensão dos conceitos de combinatória. Nesse caso, apontamos também a necessidade do professor fazer revisão desses conteúdos para que possa facilitar a aprendizagem do aluno.

Apresentamos ainda, os principais conceitos de combinatória, visando melhorar a compreensão do aluno, e possibilitar ao mesmo fazer a distinção entre esses conceitos e identificar qual ou quais deles aplicar diante de um problema.

Apontamos ainda a visão dos PCNEM e PCNEM + sobre os conteúdos de Análise Combinatória e a partir dos exemplos podemos verificar o quanto os problemas de contagem fazem parte dos problemas do cotidiano e, dessa forma é interessante apresentar nas práticas de ensino destes conteúdos esses problemas, uma vez que podem caracterizar-se atividades recreativas dos próprios alunos e ainda podem destacar-se como “problemas de interesse dos alunos” em função de fazer parte da sua vida.

Enfim, apontamos alguns problemas e/ou atividades que podem ser utilizadas pelos professores em sala de aula visando mitigar algumas dificuldades de aprendizagem dos alunos, incentivar o gosto pela Matemática e conteúdos de Combinatória e potencializar a sua aprendizagem. Acreditamos que os exemplos de problemas de contagem apontados podem ser úteis porque demonstra a aplicabilidade dos conteúdos, o que sugere ao aluno a necessidade de utilizá-los e, portanto, de aprendê-los.

Acreditamos ainda, que os problemas e/ou atividades recreativas e que envolvem a sua interatividade, bem como aqueles que fazem parte do seu dia a dia constituem problemas do “seu interesse” e podem potencializar a sua aprendizagem. As discussões a respeito do seu uso e resultados não encerram no presente trabalho, mas, espera-se que as discussões sobre Combinatória e as proposições de abordagem desses conteúdos possam

ser uteis ao professor para melhorar o ensino de Combinatória e, ao aluno para que possa melhorar sua compreensão acerca destes conteúdos.

REFERÊNCIAS

ALVES, Vanderli de Araújo. **Sobre o Princípio Fundamental da Contagem**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Universidade Federal do Ceará (UFC). Juazeiro do Norte: UFC/PROFMAT, 2015.

BEZERRA, Luis Rodrigo D'Andrada. **Métodos de Contagem**. Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Universidade Federal da Paraíba (UFPB). João Pessoa: UFPB/PROFMAT, 2013.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ensino Médio. Ministério da Educação (MEC), Secretaria da Educação Média e Tecnológica (SEMTEC). Brasília: MEC/SEMTEC, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio (PCNEM): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2000a.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 2002b.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. Volume 2, 2ª edição. São Paulo: Ática, 2014.

DUTENHEFNER, Francisco; CADAR, Luciana. Quantos padrões existem? In: **Revista do Professor de Matemática (RPM)**. N. 90. Ano 34. 2016. 2º quadrimestre. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2016.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar**, Volume 5, 6ª edição, 2ª reimpressão. São Paulo: Atual, 1993.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar**, Volume 1, 3ª edição. São Paulo: Atual, 1985.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. 1ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. Volume 1, 14ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **Temas e Problemas**. 3ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade**,

9ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

PROJETO XADREZ NA ESCOLA. Movimentos das peças. Disponível em: <http://projetoxadreznaescola10.blogspot.com.br/2010/>. Acesso em: 10 de julho de 2017, 2010.

SANTOS, Rogério César dos. Painel II: O Xadrez 960. In: **Revista do Professor de Matemática (RPM)**. N. 90. Ano 34. 2016. 2º quadrimestre. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2016.

SILVA, Erildo de Sousa da. **O Ensino da Teoria da Contagem no Ensino Médio**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Universidade Federal de Rondônia – UNIR. Porto Velho: UNIR/PROFMAT, 2016.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **História da Probabilidade**. Disponível em: <<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/historiap-probabilidade.htm>>. Acesso em: 01 de maio 2017, [s. d.].

WIELEITNER, H. **História de la Matemática**. Barcelona: Labor, 1932.