Universidade Federal de Sergipe
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

As Equações Polinomiais do 3º e 4º Graus
Sua História e Suas Soluções

Por

Sérgio Ricardo dos Santos
Mestrado Profissional em Matemática

São Cristóvão - Sergipe
Abril de 2013

Universidade Federal de Sergipe
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Sérgio Ricardo dos Santos

As Equações Polinomiais do 3º e 4º Graus

Sua História e Suas Soluções

Trabalho apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito final para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo PROFMAT.

Orientador: Profº. Dr. Evilson da Silva Vieira

São Cristóvão - Sergipe
Abril de 2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Santos, Sérgio Ricardo dos
S237e As equações polinomiais do 3° e 4° graus: sua história e suas soluções / Sérgio Ricardo dos Santos; orientador Evilson da Silva Vieira. – São Cristóvão, 2013.
88 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat) – Universidade Federal de Sergipe, 2013.

1. Matemática - História. 2. Equações. 3. Àlgebra. I. Vieira, Evilson da Silva, orient. II. Título

CDU 51(091)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

As equações polinomiais de 3° e 4° graus

por

Sérgio Ricardo dos Santos

Aprovada pela Banca Examinadora:

Evilson S. Vieira
Prof. Dr. Evilson da Silva Vieira - UFS
Orientador

Prof. Dr. Etereldes Gonçalves Júnior - UFES
Primeiro Examinador

Paulo de Souza Rabelo
Prof. Dr. Paulo de Souza Rabelo – UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 13 de abril de 2013

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Critóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

Dedico este TCC à minha mãe, Terezinha, pelo apoio constante,
e ao meu sobrinho Hélder, pela amizade sincera.

Agradecimentos

A Deus, por ter-me concedido a benção de estar vivo.

À minha mãe, Terezinha, e à minha família, por todo o apoio durante esses dois anos.

À minha namorada, Zélia, pela paciência e pelo companheirismo de sempre.

À SBM, ao IMPA e à UAB, por terem implementado o PROFMAT, que proporcionou a mim e a tantos outros a oportunidade de fazer um curso em nível de Mestrado.

À CAPES, pelo apoio financeiro, sem o qual esse Mestrado dificilmente seria levado a termo.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Evilson Vieira, pela paciência em me explicar fatos elementares de uma perspectiva mais ampla, e pelas numerosas correções e observações pertinentes.

Ao Prof. Dr. Paulo Rabelo, pela revisão acurada do texto final e pelas numerosíssimas sugestões de melhoria deste TCC.

Ao coordenador do PROFMAT (Polo Aracaju), Prof. Dr. Fábio dos Santos, pela forma segura e responsável com que conduziu as ações relativas ao Mestrado Profissional.

A todos os professores que, durante esses dois anos, estiveram ao nosso lado, ensinando e orientando.

Um agradecimento especial aos professores Kalasas Vasconcelos de Araújo e Almir Rogério Silva Santos, pessoas muito competentes e sempre atenciosas, amigos que desde o início nos auxiliaram a superar as muitas barreiras ao longo do caminho.

Aos colegas de turma, sempre unidos, nas horas felizes e também nas difíceis, e que tanto aprenderam quanto ensinaram, durante esse Mestrado. Em especial, quero agradecer aos colegas Wellington, Hélio, Anselmo e Davi. Muitas vezes estivemos reunidos para estudar para as provas ou para resolver as desafiadoras listas de exercícios!

A todos vocês, o nosso muito obrigado!

Sérgio Ricardo dos Santos
Abril de 2013

"Bom mesmo é ir à luta com determinação, abraçar a vida com paixão, perder com classe e vencer com ousadia, porque o mundo pertence a quem se atreve e a vida é muito bela para ser insignificante."

Augusto Branco.

Resumo

As equações polinomiais constituem um dos capítulos basilares da história da Álgebra. O objetivo deste trabalho é apresentar a narrativa histórica da resolução das equações polinomiais do 3º e 4º graus e de explanar, em linguagem tão simples quanto possível, os métodos clássicos resolutivos dessas equações. Também foram incluídas demonstrações de técnicas alternativas mais modernas para resolver esses tipos de equações. Em todos os casos foram exibidos exemplos numéricos ilustrativos desses métodos. Ao final é deduzida uma nova fórmula resolutiva da cúbica, utilizando-se meras técnicas algébricas elementares, além de serem demonstrados alguns pequenos resultados acerca das equações cúbicas e quárticas. Por conta da simplicidade com que o texto foi construído, esta dissertação é quase que totalmente acessível aos estudantes do ensino médio.

Palavras-Chave: História da Matemática, resolução de equações polinomiais cúbicas e quárticas.

Abstract

The polynomial equations constitute one of the cornerstones chapters in the history of Algebra. The objective of this work is to present a historical narrative of the resolution of the polynomial equations 3 and 4 degrees and explain, in language as simple as possible, the classical methods resolving these equations. Also included demonstrations of alternatives techniques more modern to solve these types of equations. In all cases are shown illustrative numerical examples of these methods. At the end is deduced a new formula solving the cubic, using mere elementary algebraic techniques, as well as being shown some small results on the cubics and quartics equations. Because of the simplicity with which the text was constructed, this dissertation is almost entirely accessible to high school students.

Keywords: History of Mathematics, solving cubic and quartic polynomial equations.

Sumário

Agradecimentos **iv**

Resumo **vi**

Abstract **vii**

Introdução **1**

1 História **2**

1.1 Equações lineares e quadráticas 2

1.2 As cúbicas 4

1.2.1 Em busca de uma fórmula 4

1.2.2 Cardano entra em cena 10

1.2.3 Cai a quártica 18

1.2.4 A Grande Arte 19

1.2.5 Surgem os complexos 23

1.2.6 Viète aborda a cúbica 26

1.3 O que aconteceu depois 27

2 Álgebra **30**

2.1 Transformação da cúbica geral na forma reduzida 30

2.2 Solução de Cardano para $\boldsymbol{y^3 + py = q}$ $(\boldsymbol{p, q > 0})$ 31

2.3 Solução de Cardano para $\boldsymbol{y^3 = py + q}$ $(\boldsymbol{p, q > 0})$ 32

2.4 Solução da equação $\boldsymbol{y^3 + py + q = 0}$, com $\boldsymbol{p, q} \in \mathbb{R}$ 33

2.5 Critério para classificação das raízes da cúbica 34

2.6 Exemplos numéricos de cúbicas 36

2.7 A solução algébrica de Viète 39

2.8 A solução trigonométrica de Viète 40
2.9 Uma maneira "rápida" de resolver uma cúbica 43
2.10 Solução geral usando números complexos 44
2.11 A solução de Ferrari para a quártica 47
2.12 Exemplos numéricos de quárticas 50
2.13 Uma resolução alternativa para a quártica 52
2.14 O método de Newton-Raphson 57

3 Alguns resultados relacionados às equações cúbicas e quárticas 61

3.1 Minha resolução para a cúbica 61
3.2 Influência de $\boldsymbol{\delta}$ sobre $\boldsymbol{\Delta_T}$ 67
3.3 Relação entre $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{\Delta_T}$ 68
3.4 Determinação da raiz dupla das cúbicas do tipo $\boldsymbol{D = 0}$ 69
3.5 Equação dos quadrados das raízes de uma cúbica 71
3.6 Equação dos quadrados das raízes de uma quártica 72

Conclusão 74

Referências Bibliográficas 75

Páginas Web Consultadas 76

Softwares Utilizados 78

Introdução

Resolver equações sempre foi a motivação principal para o desenvolvimento da Álgebra. Desde os primórdios da civilização, o ser humano sentiu a necessidade de dar forma aos seus pensamentos e, no que concerne ao pensamento matemático, as primeiras ideias trataram de representar quantidades através de símbolos, evoluindo para os sistemas de numeração e posteriormente para a escrita de sentenças matemáticas mais elaboradas. As equações surgem como um desdobramento natural da maneira matemática de pensar, baseando-se na ideia fundamental de igualdade. Resolver uma equação se traduz em descobrir um valor que venha a tornar iguais dois grupos a princípio diferentes.

As primeiras equações elaboradas e resolvidas pelos humanos tinham, naturalmente, uma forma muito simples, mas já traziam implícita a ideia de incógnita, a quantidade inicialmente desconhecida que equilibra o "tamanho" de dois conjuntos. Com o desenvolvimento paulatino da Matemática, as equações evoluíram em complexidade e na forma como são representadas. Hoje em dia elas estão envolvidas com praticamente tudo que compõe a sociedade moderna. Há uma vasta gama de categorias de equações, cujas incógnitas podem não ser meramente números, mas também funções. Equações poderosas o bastante para abarcar quase todos os problemas que possam ser traduzidos em linguagem matemática.

A proposta deste trabalho é a de oferecer aos estudantes de nível básico um entendimento elementar sobre as chamadas equações polinomiais de 3^o e 4^o graus e suas soluções, que constituíram um capítulo importante da História da Matemática. Como veremos, elas são o limite do que é possível resolver utilizando-se técnicas algébricas elementares e, por isso mesmo, provocaram uma revolução na Álgebra, sendo o divisor de águas entre a Álgebra clássica e a moderna.

A fim de tornar a leitura um pouco mais interessante, incluí um relato do desenvolvimento histórico em que estas descobertas aconteceram. O Renascimento foi um período ímpar não apenas na História da Matemática, mas também na História da humanidade, que reuniu num mesmo lugar e época uma numerosa plêiade de sábios, que impulsionaram sobremaneira o desenvolvimento da civilização. Nomes como Leonardo da Vinci, Maquiavel, Colombo, Raphael, Michelângelo, Botticelli, Copérnico, Galileu, Ariosto, todos rutilaram naquele período da História, realmente algo sem precedentes e difícil de ser aceito como mera obra do acaso. Aquela foi mesmo uma época de revoluções, em que velhos paradigmas foram quebrados para dar lugar a outros mais condizentes com o avanço da humanidade. Eis aqui um vislumbre do que então sucedia especificamente com a Álgebra.

Capítulo 1

História

1.1 Equações lineares e quadráticas

A história da resolução das equações algébricas remonta ao tempo da civilização babilônica, cuja existência data do século XVI a.C., estendendo-se até o século VI d.C., na região então conhecida como Mesopotâmia, que hoje corresponde ao Iraque. Os babilônios já sabiam, cerca de 1700 a.C., resolver equações lineares e quadráticas, por meio de "regras" que davam o passo-a-passo para achar a solução. Vale lembrar que essas equações, bem como as "regras" que as resolviam, eram expostas de forma retórica, discursiva, em nada se assemelhando à maneira moderna de denotar matemática. Além disso, na ciência babilônica não havia nenhum interesse em demonstrar ou justificar os procedimentos que levavam ao resultado. Os babilônios eram bem pragmáticos: para cada problema, quase sempre motivado por alguma razão prática, eles apresentavam uma "receita" que o resolvia. A abordagem, assim como em todas as antigas culturas, era puramente geométrica. Veja, por exemplo, o enunciado do problema 2, extraído do tablete babilônico 13.901, exposto no Museu Britânico:

"Subtraí o lado da área do meu quadrado. 870."

Em notação moderna, isso significa: $x^2 - x = 870$.

Também os egípcios foram bem sucedidos nesse quesito, embora com menos desenvoltura que os babilônios, devido, em parte, talvez, ao fato de que estes últimos usavam um sistema de numeração mais poderoso (posicional, de base 60) do que o utilizado pelos egípcios, que não era posicional e baseava-se em apenas 10 símbolos.

Posteriormente, os gregos aperfeiçoaram esses métodos. Mais precisamente, eles introduziram os conceitos de prova e demonstração, embora ainda bastante apegados à visão geométrica dos entes matemáticos. No caso das equações quadráticas, por exemplo, os gregos demonstraram que resolver qualquer equação deste tipo se resume a encontrar dois números cuja soma e cujo produto sejam previamente conhecidos. Aliás, era a partir desse fato que os babilônios buscavam a solução de uma equação quadrática, porém sem nenhuma explicação que justificasse o procedimento que permitia encontrar tais números. De fato, como eles chegaram a essas "receitas", permanece um mistério até hoje!

As culturas orientais tampouco ficaram atrás nas descobertas concernentes às equações. Registros matemáticos chineses dão conta de que eles chegaram a muitos resultados importantes, inclusive no tópico da resolução de equações. Um exemplo notável é a coleção chinesa *Nove capítulos da arte matemática (jiu zhang suan shu)*, escrita em algum momento entre 206 a.C. e 221 d.C. Ela se baseou em escritos ainda mais antigos, e consiste num conjunto de 246 problemas diversos, abrangendo desde a agrimensura até questões puramente matemáticas. No quesito das equações, são resolvidos, no capítulo 8 de *Nove capítulos*, problemas envolvendo pelo menos três equações lineares, cada uma com três incógnitas! Matemáticos indianos, como **Bramagupta**, produziram matemática de ótimo nível, antecipando-se na manipulação de números negativos. Os árabes, por sua vez, além de produzir matemática genuinamente árabe, tiveram fundamental importância ao absorver, preservar, aprimorar e, mais tarde, transmitir para a Europa o antigo e valioso conhecimento grego, que estagnou por cerca de 1.000 anos! Duas contribuições das culturas orientais cuja difusão pelo mundo é devida aos árabes, e que merecem ser citadas, pois representam marcos importantes na História da Matemática são : o advento dos números negativos e a criação do sistema indo-arábico de numeração.

O primeiro a expor de forma sistemática as soluções da equação quadrática foi o astrônomo **Mohamed ibn Musa al-Khwarizmi** que, no ano de 830, escreveu um livro chamado *al-jabr w'al Muqabala*, cuja tradução aproximada é "restauração e simplificação", referindo-se a técnicas padronizadas para manipular e resolver equações. Nessa obra, ele mostra como resolver equações lineares e quadráticas. Foi do termo "al-jabr" que derivou a palavra "álgebra", e até mesmo a palavra "algoritmo", hoje utilizada para descrever qualquer procedimento que resolva algum problema específico por meio de etapas sucessivas, deriva, de maneira um pouco forçada, da palavra "Al-Khwarizmi". A solução completa da equação quadrática mais geral só veio aparecer no século XII, na Europa, em uma obra intitulada "*Hibbur ha-meshihah ve-ha-tishboret*" (Tratado sobre medição e cálculo), de autoria do matemático judeu-espanhol **Abraham bar Hiyya Ha-nasi** (1070-1136). Como qualquer estudante do ensino médio hoje sabe, a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, é resolvida por meio da conhecida fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Desde os progressos alcançados pelos babilônios, já haviam se passado cerca de 3.000 anos, ao longo dos quais os avanços no que diz respeito à resolução das equações algébricas foram modestos, embora à custa de muita dedicação e esforço de tantos perseguidores da verdade. Foi então que teve lugar, em fins do século XIII, o fenômeno sociocultural denominado Renascimento (ou Renascença), que se caracterizou por uma súbita e extraordinária eclosão de transformações na vida humana, em quase todos os seus aspectos (social, cultural, científico, religioso, etc). De repente, a Europa despertava de uma longa hibernação, como que para compensar o tempo durante o qual esteve "parada". É notável, nessa época histórica, a renovação do interesse geral pelas artes, pelas ciências e pela filosofia, fato que iria perdurar até meados do século XVII. A história das equações algébricas estava prestes a entrar num novo capítulo, de início na Itália, para logo se seguir em outros países da Europa. O lento progresso que se observou até que as equações lineares e quadráticas fossem completamente esquadrinhadas logo iria contrastar com um dos períodos mais agitados da História da Matemática.

1.2 As cúbicas

1.2.1 Em busca de uma fórmula

Naturalmente, o próximo passo a ser dado seria o de resolver as equações do 3º grau, também conhecidas como equações cúbicas. A cúbica mais geral tem a forma:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

na qual x é a incógnita e a, b, c, e d são constantes numéricas reais chamadas coeficientes. Resolver algebricamente uma tal equação significa encontrar uma fórmula que calcule x em função dos coeficientes e que envolva somente as operações aritméticas fundamentais e a extração de raízes, numa cadeia finita de etapas. No jargão da Matemática, se é possível resolver uma equação sob essas restrições, dizemos que ela é "solúvel por radicais".

Talvez os matemáticos do século XVI tenham pensado que, a exemplo do que aconteceu com as equações quadráticas, seria apenas uma questão de tempo até que algum algebrista conseguisse resolver a equação do 3º grau, mas, de forma desafiadora, resolver a cúbica revelou-se ser uma noz muito mais dura do que se supunha a princípio. Algo que deve ser mencionado é que a busca pela resolução das cúbicas não foi motivada por nenhuma razão de ordem prática. Ao contrário, tornou-se uma questão de meramente satisfazer o intelecto, numa época em que a Matemática começava a se ocupar com questões de dentro dela própria.

Antes de prosseguir, devemos fazer uma observação. Na notação algébrica contemporânea, equações como:

$$x^3 + px = q, \qquad x^3 + m = nx \qquad \text{e} \qquad x^3 = sx + t,$$

em que p, q, m, n, s e t são constantes numéricas positivas, são equações qualitativamente equivalentes, bastando transpor todos os termos para um dos lados da igualdade, o esquerdo, por exemplo, para obtermos equações de mesma forma, com coeficientes positivos e negativos. Também é claro para nós, hoje em dia, que se numa equação polinomial de grau n não aparece alguma potência da incógnita, então isso significa que o coeficiente do termo faltante vale zero. Por exemplo, a equação $2x^3 + 5x - 8 = 0$ equivale à equação $2x^3 + 0x^2 + 5x - 8 = 0$.

Pois bem, essas ideias, que hoje nos parecem bastante óbvias, não haviam ainda amadurecido o suficiente na cultura matemática da Itália renascentista, de modo que os coeficientes considerados "válidos", na época, eram sempre quantidades estritamente positivas, fazendo com que as equações destacadas acima fossem consideradas de tipos diferentes. Além disso, uma equação que não apresentasse o termo em x^2, por exemplo, era considerada diferente de outra que o tivesse. Um dos motivos para essas incômodas limitações foi a rejeição aos números negativos, que por muito tempo não foram sequer considerados como números.

Voltando às cúbicas, não foram poucas as tentativas de resolvê-las. Segue um resumo das primeiras investidas:

- Os antigos babilônios conseguiam resolver, por meio de tabelas, algumas poucas cúbicas muito específicas;

- O matemático chinês **Wang Xiaotong** (580 – 640), em sua obra "*Jigu Suanjin*" (Continuação da matemática antiga), encontrou as soluções de 25 equações cúbicas particulares da forma $x^3 + px^2 + qx = N$;

- O poeta e matemático persa **Omar Khayyam** (1048 – 1131), no século XII, resolveu os 14 tipos de equações cúbicas que foi capaz de distinguir, valendo-se, para isso, de um método geométrico, que consistia em determinar a intersecção de duas curvas cônicas (uma parábola e um círculo), técnica que seria, muito tempo depois, retomada por **Descartes** (1596 – 1650);

- **Leonardo de Pisa** (1170 – 1240), conhecido como **Fibonacci**, homem de feitos matemáticos extraordinários, ao enfrentar um desafio que lhe fora proposto, provou que as soluções da equação $x^3+2x^2+10x = 20$ não são euclidianamente construtíveis, ou seja, não podem ser construídas por meio de régua (sem marcas) e compasso, apenas. Embora não tenha conseguido resolver a equação, Fibonacci foi capaz de encontrar uma solução numérica aproximada, exibindo-a em notação sexagesimal (1.22.7.42.33.4.40). No sistema atual de numeração isso vale $1,3688081075$, correto até a 9ª casa decimal! Ele não explicou como chegou a esse número, mas hoje acredita-se que ele tenha empregado uma técnica conhecida como "método da dupla falsa posição";

- Três talentosos algebristas da região de Florença: **Maestro Biaggio**, **Antonio Mazzinghi** (no século XIV), e **Maestro Benedetto** (no século XV) envidaram grandes esforços na tentativa de resolver a cúbica, sem sucesso;

- **Maestro Dardi**, de Pisa, no século XIV, encontrou soluções engenhosas para não menos do que 198 tipos de equações, mas não para a cúbica geral;

- **Piero della Francesca** (1415 – 1492), famoso pintor renascentista, que também era um hábil matemático, igualmente fracassou no seu intento de dominar a cúbica.

Talvez, em parte, por conta de todos esses insucessos, é que o frade franciscano **Luca Pacioli** (1445 – 1517), célebre matemático e escritor italiano, tenha concluído, na sua obra-prima *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* (O conhecimento reunido de aritmética, geometria, proporção e proporcionalidade) que: *"para as equações cúbicas e quárticas, (...) não foi possível até agora formar regras gerais"*. A resolução da cúbica, afirmou Pacioli, era tão impossível quanto a quadratura do círculo. Pacioli foi um matemático importante não propriamente pela sua produção matemática, mas sobretudo por difundir o que já se sabia dessa ciência até então. A sua "Summa", já citada, um compêndio de 616 páginas, constituiu-se num verdadeiro tratado, pretendendo ser a síntese de todo o conhecimento matemático da época. Essa obra trouxe consigo duas características particularmente felizes: foi confeccionada por meio da inovadora tecnologia de impressão por tipos móveis (criada por Guttenberg, em 1456); e foi escrita em italiano comum (ou "rústico"), o que permitiu o acesso ao seu conteúdo mesmo aos não versados em latim. Foram essas qualidades que possivelmente fizeram da "Summa", de 1494, uma obra de acentuada influência na Itália do século XVI. Como pontos negativos podemos citar a existência de numerosos erros, a notação algébrica pouco inteligível e o fato de seu conteúdo basear-se quase que totalmente no Liber Abaci (1202), de Fibonacci, trazendo muito pouco conhecimento genuinamente novo. Dois fatos interessantes acerca de Pacioli: foi professor e amigo do grande **Leonardo da Vinci** (1452 – 1519) e é considerado o pai da Contabilidade, por ter sido o inventor do "método das partidas dobradas", usado nesse ramo do saber até os dias atuais.

A afirmação de Pacioli de que não havia regras gerais que resolvessem as cúbicas soou como uma verdade praticamente absoluta, haja vista a respeitada reputação conquistada pelo distinto matemático. No entanto, a História mostrou que ele estava enganado. Na verdade, Pacioli apenas não fora suficientemente inventivo para poder decifrar o segredo da resolução da cúbica.

O primeiro a de fato encontrar uma solução puramente algébrica para uma equação cúbica (embora não fosse ainda a cúbica geral) foi um professor da Universidade de Bolonha, chamado **Scipione del Ferro** (1465 – 1526). Bolonha é a mais antiga universidade do mundo, fundada no ano de 1088, e ainda em funcionamento até os dias atuais. Sobre a vida de del Ferro, pouco se sabe. Embora descrito por várias fontes como um talentoso algebrista, nenhum de seus escritos sobreviveu até os nossos dias. Ele provavelmente conheceu Pacioli, em 1501, quando da passagem deste último por Bolonha, a fim de proferir palestras. Especula-se que Pacioli tenha incentivado del Ferro a tentar resolver a cúbica, dada a notável destreza de del Ferro em manipular expressões algébricas contendo radicais. E, com efeito, por volta de 1515, del Ferro realizou a extraordinária façanha de encontrar uma fórmula resolutiva para a teimosa equação do 3º grau.

A equação resolvida por del Ferro tinha a forma $x^3 + px = q$. Ela claramente não corresponde ao caso mais geral, mas, como explicaremos adiante, pode-se transformar qualquer cúbica geral numa que tenha o formato daquela de del Ferro, de modo que podemos reduzir o problema original, difícil, a um outro mais simples, que sabemos resolver. Uma descoberta deste porte deveria, por certo, ser logo publicada, o que traria notoriedade e respeito ao seu descobridor, no caso, del Ferro. No entanto, isso não aconteceu. Scipione preferiu manter a sua fórmula mágica em segredo. A razão pela qual ele fez essa aparentemente contraditória escolha é elucidada quando se analisa o contexto social da Itália renascentista do século XVI.

Naquela época, em que o interesse pelo conhecimento estava em alta, era relativamente comum a realização de debates orais e discussões públicas, de cunho intelectual, entre os sábios e estudiosos de várias áreas do saber. De maneira um tanto surpreendente, quando visto da perspectiva atual, esses eventos atraíam grandes multidões, entre dignitários das universidades, partidários dos debatedores, membros da nobreza e da burguesia e até pessoas comuns, atraídas pela oportunidade de diversão e de aposta. Não raro, os próprios contendores apostavam elevadas quantias em dinheiro na sua vitória. Para além do espírito renascentista que grassava na Itália, havia uma razão bem concreta para explicar o interesse dos estudiosos em participar desses embates. Para muitos daqueles intelectuais da época, a renovação dos seus contratos de trabalho e mesmo a sua reputação na cidade ou na instituição/universidade a que serviam dependia, em grande parte, do êxito em apresentar uma boa performance nesses desafios. Sair vencedor desses confrontos era sinônimo de estabilidade no emprego, novas ofertas de trabalho e aumento de salário. Não apenas por isso. Muitos daqueles matemáticos tinham os seus "patronos", pessoas endinheiradas da burguesia ou da nobreza, que os apoiavam monetariamente, em troca do assessoramento matemático muitas vezes necessário em questões de ordem financeira.

Sair-se mal nessas competições poderia significar a perda dos "patrocinadores".

Normalmente, no caso dos matemáticos, esses desafios tinham o seguinte formato: cada um dos duelantes propunha uma série de problemas ao adversário, que deveriam ser resolvidos num prazo previamente acordado, ao fim do qual seria declarado vencedor aquele que mais problemas conseguisse resolver corretamente. Essas "batalhas" eram travadas, geralmente, em praças públicas, igrejas ou na corte de algum nobre ou príncipe apreciador do conhecimento.

Pois bem, agora parece claro o porquê de del Ferro conservar oculta a sua descoberta. No caso de ser desafiado por algum outro matemático, ter uma arma secreta faria toda a diferença. Seria mesmo a garantia da vitória e, por conseguinte, da sua permanência na universidade e da sua boa reputação matemática. Assim, em vez de bradar aos quatro ventos o que encontrara, del Ferro revelou a sua fórmula a apenas duas pessoas próximas: seu discípulo e genro **Annibale della Nave** e seu aluno, o veneziano **Antonio Maria Fiore**. Todas as fontes a que tivemos acesso descrevem este último como um matemático inexpressivo, de parcos talentos. Com a morte de del Ferro, o misterioso método de resolução das cúbicas, exposto num manuscrito, passou a ser propriedade de della Nave, por herança. Fiore, que desejava obter fama e prestígio entre os matemáticos, resolveu também não publicar de pronto a fórmula, a exemplo do que fizera seu mestre. Ele esperou a ocasião oportuna para usar o conhecimento secreto a seu favor. E esse tempo finalmente chegou, quando, em 1535, Fiore resolveu desafiar publicamente o renomado matemático italiano **Niccolò Tartaglia** (1499 – 1557).

Antes de prosseguir, queremos apresentar a bela e elegante fórmula descoberta por Scipione del Ferro:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Niccolò, cujo sobrenome era provavelmente Fontana, nasceu em Bréscia, uma pequena cidade no Norte da Itália, em 1499 ou 1500. De família humilde, desde cedo teve de lidar com as agruras da vida. Aos seis anos de idade ficou órfão de pai, o que acentuou em muito a pobreza da família, deixando a viúva e os filhos numa situação de extrema penúria. Conta-se que Niccolò teve sua alfabetização interrompida quando ainda estava na letra k do abecedário, pois a família não teve condições de continuar pagando um tutor. O pequeno, entretanto, não se deteve, e conseguiu completar seus estudos por conta própria, numa precoce demonstração de sua personalidade obstinada.

Niccolò Tartaglia (1499-1557)

Mas foi então que, aos 12 anos, ele se deparou com a face mais obscura da natureza humana, vindo a conhecer, da pior maneira, o lado brutal e indiferente dos homens para com os seus semelhantes. Essa traumática experiência o marcaria pelo resto da vida, não apenas em sua alma, mas também no seu corpo. Na manhã de 19 de fevereiro de 1512, a cidade de Bréscia foi tomada por tropas francesas, que deixavam um rastro de destruição e morte por onde passavam. Muitos dos moradores do lugarejo, apavorados, refugiaram-se na igreja da cidade, na esperança ingênua de que lá teriam alguma chance de não serem trucidados, afinal estavam na casa de Deus! Uma atmosfera de terror se instalou no interior do templo, a multidão imóvel, paralisada que estava pelo medo colossal. Niccolò e sua mãe estavam entre aqueles desafortunados. O completo silêncio foi quebrado quando as portas da igreja foram violentamente rompidas, dando passagem a uma turba ensandecida de homens perversos montados em seus cavalos. Um covarde e sangrento massacre se seguiu, no qual nem as mulheres, tampouco as crianças, foram poupadas. O menino teve a boca e a cabeça golpeadas pela espada de um soldado, jazendo moribundo no chão do cenário de horror após a carnificina. No comando da tropa assassina estava um jovem de apenas 22 anos, o terrível Gaston de Foix. O atroz comandante, contudo, não durou muito. Dali a 57 dias, viria a morrer na batalha de Ravenna, quando teve seu rosto perfurado por 15 golpes de lança!

Por milagre, a mãe de Niccolò não fora ferida seriamente. Seu rebento, entretanto, não teve a mesma sorte: com graves lesões, o menino tinha poucas chances de sobreviver. Sob os cuidados intensivos da mãe abnegada, malgrado a total falta de recursos, Niccolò lentamente recuperou a saúde, mas não sem sequelas. O golpe que sofrera na boca comprometeu permanentemente a sua dicção, de maneira que ele ficou gago. Por conta disso, ele passou a ser chamado de **Tartaglia**, que significa gago, em italiano. O próprio Niccolò tomou para si essa denominação, e doravante, nesse texto, ele sempre será referido como tal. Quando adulto, Tartaglia usava uma volumosa barba, a fim de esconder as cicatrizes desfigurantes. Não obstante os duros reveses que marcaram a sua infância, Tartaglia se tornou um matemático de apurado talento, vindo mesmo a exercer o ofício de professor de Matemática em Veneza, para onde se mudou em 1534, após uma rápida passagem por Verona. Ele foi capaz, dentre outras coisas, de descobrir a lei de formação dos coeficientes no desenvolvimento de $(x+a)^n$, e de realizar avanços em áreas como a Mecânica, a Artilharia e a Agrimensura. Também conduziu estudos sobre tiro e fortificações. Nesses campos, em particular, Tartaglia fez algumas descobertas, como a de que a trajetória de um projétil nunca é retilínea, sendo tão menos curva quanto maior for a velocidade do projétil, e a de que o alcance máximo de uma bala de canhão, por exemplo, é atingido quando a mesma é lançada sob um ângulo de elevação de 45 graus. Tartaglia, portanto, lançou as bases da ciência hoje conhecida como Balística.

Em 1530, um colega e conterrâneo de Tartaglia, de nome Zuanne de Tonini da Coi, lhe propôs o desafio de resolver a equação $x^3 + 3x^2 = 5$. Tartaglia atacou o difícil problema e, após um grande esforço, conseguiu achar a solução. De alguma maneira, a notícia de que Tartaglia fora capaz de resolver uma cúbica chegou ao conhecimento de Fiore, mas este duvidou que Tartaglia realmente o tivesse conseguido. Talvez o gago estivesse apenas blefando, deve ter pensado Fiore. Ora, já que tinha em seu poder a fórmula de del Ferro, Fiore viu naquele momento a tão esperada oportunidade de ser exalçado à elite matemática italiana. Vencer um matemático de nomeada como Tartaglia lhe renderia fama e respeito imediatos, o que certamente se traduziria em ofertas de emprego.

Tartaglia aceitou o repto. Os detalhes precisos do confronto foram logo assentados: cada um dos competidores deveria elaborar uma lista de 30 problemas, que seriam depositados em envelopes lacrados num tabelião. Uma vez retirados os envelopes, os problemas deveriam ser resolvidos pelo adversário num prazo de 40 a 50 dias. Quem resolvesse corretamente mais problemas seria considerado o vencedor. Foi fixada, ainda, uma recompensa para cada problema resolvido (segundo algumas fontes, o perdedor deveria pagar a conta de um banquete para o vencedor e para 30 de seus amigos). A princípio, Tartaglia não via motivos para se preocupar. Ele já havia vencido competições anteriores, e seu oponente não lhe parecia ser lá muito ameaçador. Afinal, quem o desafiava não passava de um ilustre desconhecido. No entanto, deve ter ocorrido a Tartaglia que, justamente por isso, talvez Fiore realmente escondesse uma carta na manga, algum resultado inédito e possivelmente muito forte, do contrário não se teria aventurado a enfrentar um estudioso de sua envergadura. E, de fato, a poucos dias do confronto, Tartaglia obteve a informação de que Fiore detinha um método resolutivo para as cúbicas. Pressentindo que esse seria o tema principal a ser abordado por Fiore, Tartaglia mergulhou de cabeça numa busca frenética pela resolução completa das equações do tipo:

$$ax^3 + bx = c \qquad \text{e} \qquad ax + b = x^3.$$

Todos os neurônios de Tartaglia puseram-se a trabalhar como jamais o tinham feito até então. Ante a ameaça de ser suplantado por um novato, tornou-se uma questão de honra estar preparado para o que quer que Fiore lhe lançasse. Empreendeu longas e angustiantes tentativas e, uma vez mais, Tartaglia demonstrou ser, acima de tudo, um homem capaz de superar os mais ferrenhos obstáculos. Cerca de uma semana antes de retirar o envelope que continha os problemas, não apenas logrou solucionar a equação $ax^3 + bx = c$ (redescobrindo a fórmula de del Ferro), como também, apenas um dia depois, resolveu a equação do tipo $ax + b = x^3$! Como já sabia calcular a solução das equações do tipo $x^3 + ax^2 = b$ (o desafio que lhe fora proposto por da Coi), Tartaglia dispunha agora de um arsenal quase completo, estando pronto para aniquilar qualquer cúbica que lhe aparecesse pela frente.

O aguardado dia do duelo, 23 de fevereiro de 1535, finalmente chegou. Fiore decerto estava confiante na sua vitória, crente que surpreenderia Tartaglia com problemas que só ele sabia como resolver. Quando os envelopes foram finalmente abertos, a situação ficou clara: todos os problemas propostos por Fiore redundavam, como era de se esperar, em equações cúbicas do tipo resolvido por del Ferro: $ax^3 + bx = c$. A lista elaborada por Tartaglia, por sua vez, continha problemas envolvendo diversos tópicos da Matemática. Naqueles envolvendo equações do 3º grau, as cúbicas obtidas eram de tipos variados, abrangendo toda a gama de equações por ele explorada. Nas palavras de Tartaglia: *"para mostrar que eu tinha pouca consideração por ele e não tinha motivo para temê-lo"*. O desfecho, ainda que previsível, não deixou de causar admiração à numerosa plateia, que ali se reuniu para apreciar o celebrado embate: no exíguo intervalo de apenas 2 horas, Tartaglia estraçalhou, qual um rolo compressor, todos os 30 problemas propostos por Fiore. Este, por seu turno, de forma vergonhosa, não conseguiu resolver nem sequer um único dos problemas da lista de Tartaglia. Para esnobar um pouco mais o medíocre oponente, Tartaglia ainda recusou a recompensa. Não carecia de receber nada de um tão mau jogador. Totalmente humilhado, Fiore caiu na obscuridade, e hoje em dia é lembrado apenas como alguém que pretendeu ganhar fama à custa do talento de outrem. Tartaglia, ao reverso, conquistou ainda mais respeito e admiração.

1.2.2 Cardano entra em cena

A notícia da vitória retumbante de Tartaglia rapidamente se espalhou pela Itália, e chegou ao conhecimento daquele que, sem dúvida, é o personagem mais pitoresco de toda a saga envolvendo a resolução das cúbicas: **Girolamo Cardano** (1501 – 1576).

Girolamo Cardano (Jerôme Cardan, na versão latina), foi, sem sombra de dúvida, um homem genial, um autêntico representante do espírito renascentista. Sua vigorosa mente transitou com desenvoltura por temas tão numerosos quanto díspares: Matemática, Astrologia, Astronomia, Filosofia, Medicina, Física, Ética, Música, apenas para citar alguns. Investigador nato, sua incansável curiosidade o arrebatava a se aprofundar em tudo o que atraísse a atenção de sua mente portentosa. Jogador inveterado, tinha compulsão por xadrez, dados, gamão e cartas. Sua genialidade, contudo, contrastava com sua personalidade: de temperamento explosivo e modos rudes, colecionou muitos desafetos entre seus contemporâneos. Certa vez, num jogo, ao desconfiar que o outro jogador trapaceava, cortou-lhe o rosto com uma faca! Sua vida foi uma estrada sinuosa, repleta de boas e amargas surpresas, cheia de altos e baixos, enfim, foi uma vida emocionante, em todos os sentidos. Conheceu a pobreza e a fartura, experimentou a glória e a desventura, a honra e a vergonha, numa montanha russa poucas vezes observada na vida de um mesmo ser humano, descrita por ele próprio em uma mui detalhada e reveladora autobiografia.

Antes de narrar como Jerôme Cardan se envolveu com a resolução das cúbicas, faremos uma breve digressão, a fim de discorrer um pouco mais sobre a vida deste indivíduo brilhante e enigmático.

Girolamo Cardano (1501-1576)

Ele nasceu em Pavia, Itália, em 1501, fruto de uma relação "não oficial" entre um advogado milanês, chamado Fazio Cardano, com uma viúva bem mais jovem, Chiara Micheri. Até completar os sete anos, o pequeno Cardan sofreu com os castigos físicos aplicados por seus pais, que o surravam sem nenhuma clemência. Após cada uma dessas severas punições, como relatou depois, ele ficava doente a ponto de morrer. Fazio, que era um homem erudito, amigo de **Leonardo da Vinci** (a quem assessorou, em várias ocasiões, em questões de geometria), conduziu a educação de Cardano, que mais tarde estudou os clássicos, Medicina e Matemática nas universidades de Pavia e Pádua.

Durante seus anos de estudante, sua principal fonte de renda foram os jogos de azar, em que ele mais ganhava do que perdia, já que aplicava seus conhecimentos matemáticos a fim de avaliar eficazmente as chances de ser bem sucedido. Posteriormente em sua vida, ele escreveu um livro sobre o cálculo de probabilidades, chamado *Liber de ludo aleae* (O livro dos jogos de azar), onde introduz a definição moderna de probabilidade, antecipando-se em muito, cerca de 100 anos, aos trabalhos de Pascal e Fermat. Devido à sua maneira de ser, áspera e arrogante, ganhou a antipatia até mesmo de muitos dos seus professores, de modo que o seu doutoramento foi-lhe negado por duas vezes pela universidade. Somente na terceira votação secreta ele finalmente obteve seu título, em 1525 (na primeira, rejeitaram-no por 47 a 9!). A sua autobiografia, intitulada *De vita* *propria liber* (O livro da minha vida), de 1575, é um livro singular, que impressiona tanto pela extrema franqueza com que seu autor se expressa, chegando a reconhecer os seus próprios defeitos, como pelo detalhismo exacerbado. Nele, Cardano se auto define como engenhoso, elegante, sensual, piedoso, fiel, amigo da sabedoria, reflexivo, empreendedor, entusiasta, inventivo, teimoso, astuto e trabalhador. Não pense com isso que Cardano pretendia se autopromover, já que ele também definiu a si próprio como: descuidado, charlatão, desbocado, espião, melancólico, traidor, invejoso, solitário, obsceno, vingativo, cruel com os seus, retraído, antipático, severo, incomparavelmente vicioso e portador de total desprezo pela religião.

Desnecessariamente meticuloso, Cardano não poupou de registro, ao que parece, nem mesmo os pormenores mais íntimos e excêntricos de sua vida. Por exemplo, lá ele revela, entre outras coisas, que sofrera de numerosas enfermidades em sua juventude, desde hemorroidas, hérnias e insônia até impotência sexual, que lhe acometera dos 21 aos 31 anos, quando subitamente desapareceu, por ocasião do seu casamento. Aos cinquenta anos, começou a urinar em demasia, problema que o acompanhou até o seu fim. Tampouco no aspecto psicológico Cardano esteve livre de padecimentos: ele sofria de acrofobia (medo mórbido de altura), e tinha um medo incontrolável de cães enfurecidos (foi mordido por um na infância, por duas vezes). Além disso, desenvolveu o estranho hábito de infligir dor física a si próprio, pois se deleitava com o prazer que sentia quando a dor cessava. Não bastassem essas bizarrices, ele aparentemente tinha inclinações suicidas: "*Algumas vezes fui atormentado pela vontade de me matar; acho que deve acontecer com outras pessoas que não contam isso em seus livros*", escreveu Cardano. Também se dizia capaz de "ler" a personalidade das pessoas com base apenas nas irregularidades de seus rostos, invenção a que chamou de "metoposcopia". Desde cedo se dedicou à esgrima, alcançando um desempenho digno de profissionais.

Girolamo, apesar dessas características incomuns, era dono de uma aguçada inteligência. Escritor produtivo, publicou 131 livros, sobre os mais variados assuntos. Outros 111 livros e 170 manuscritos, de sua lavra, resolveu não publicar, por não considerá-los bons o suficiente para tal. Por duas vezes na vida, Cardano queimou parte de suas obras. Na primeira, nove livros. Na segunda, 124! Uma de suas obras que chegou a ser impressa, intitulada Consolação, tornou-se um best-seller em toda a Europa. Tratava-se de um apanhado de conselhos a todos os que sofrem. A sua "Ars Magna", um livro sobre Álgebra, tornou-se a mais importante obra matemática do século, da qual voltaremos a falar mais adiante.

Suas realizações não ficaram adstritas ao campo das ideias escritas, tendo sido um criativo inventor, que nos legou artefatos presentes ainda nos dias de hoje, como o eixo cardan (junta universal) e o fechamento de combinação (cadeado com código). Deu várias contribuições à hidrodinâmica e argumentou sobre a impossibilidade do movimento perpétuo. Cardano tinha fortes inclinações ao ocultismo e a assuntos de natureza mística. Essa faceta do universo de Cardano foi exposta em duas enciclopédias de sua autoria: *De Rerum subtilitate* (Da sutileza das coisas), de 1555, e *De Rerum Varietate* (Da variedade das coisas), de 1557, que consistem numa coleção de experimentos físicos e de especulações de natureza filosófica e ocultista.

Por volta de 1525, Cardano, que era um aluno brilhante, estava em campanha para se tornar diretor da universidade de Pádua. Bem por essa época, seu pai, Fazio, morreu. Cardan conseguiu ser eleito, por margem de apenas um voto, um resultado surpreendentemente bom, dado que muitos na universidade o tinham em péssima conta. Então começou a dilapidar toda a herança do pai, afundando no vício do jogo. Já formado em medicina, tentou ser aceito como membro do Colégio de Médicos de Milão, a fim de exercer a profissão naquela cidade, onde residia sua mãe, mas a instituição o rejeitou. O motivo alegado foi o de que era filho bastardo. Na verdade, ninguém ali queria por perto um homem que, ainda em seus tempos de estudante, escrevera um artigo intitulado "*Das opiniões divergentes dos médicos*", no qual afirmava, basicamente, que a elite médica da época não passava de um bando de charlatães.

Cardano então resolveu exercer o ofício em Piove di Sacco, um vilarejo próximo. Em 1531, casou-se com Lucia Bandarini, uma jovem de apenas 15 anos que teria aparecido em sonho para Cardano. Dessa união nasceram três filhos, dois homens e uma mulher. Como as finanças não iam bem, mudou-se para Gallarate, em 1532, após cinco anos em Sacco. Um ano depois, retornou finalmente a Milão, no intuito de ganhar mais dinheiro, porém foi novamente recusado pelo Colégio de Médicos. Ávido por obter mais alguma renda, atirou-se a jogar e, de tanto perder, levou a si próprio e a família à bancarrota completa, chegando mesmo a penhorar a mobília da casa e as joias da esposa. A certa altura, a família Cardan chegou a dormir num albergue. A vida não estava nada boa. "*Naqueles dias*", escreveu, "*eu carregava um desgosto tão profundo que procurei magos e adivinhos em busca de alguma solução para os meus tantos problemas.*" Mas foi então que, em 1534, sua sorte começou a mudar.

Seu falecido pai deixara vago o cargo de conferencista que ocupava na Fundação Piatti, em Milão. Por influência dos amigos de Fazio, Cardano foi conduzido ao cargo, o que lhe proporcionou uma melhora na renda, além de muito tempo livre, que ele aproveitava para clinicar, embora de forma clandestina, já que o Colégio de Médicos insistia em negar-lhe acesso. A habilidade e perspicácia de Cardano como médico logo se tornaram evidentes. Malgrado o elementar estágio em que se encontrava a Medicina, Cardano logo ganhou fama pelo êxito excepcional em curar seus pacientes. Talvez a sorte o tenha ajudado . Até membros da faculdade vinham ao encontro de Cardano para pedir a sua opinião acerca de assuntos médicos. Os pacientes tratados por Cardano, bem como as suas famílias, tornaram-se seus gratos apoiadores, de modo que, nessa época da vida, Jerôme gozava de respeito, prestígio e boa fama. Também passou a ganhar muito dinheiro, já que parte da sua ampla clientela era composta por pessoas abastadas.

Revoltado com a falta de reconhecimento do Colégio de Médicos de Milão, publicou, em 1536, um livro baseado naquele seu velho artigo da faculdade, em que atacava a classe médica. Nessa nova obra, muito mais acintosa e agressiva, inclusive no seu título (*De malo recentiorum medicorum medendi usu libellus* – "Sobre as más práticas de medicina em uso comum"), Cardano ridicularizava as maneiras artificiais dos médicos, que priorizavam a forma e as aparências em detrimento do conteúdo e da experiência. Para desespero dos médicos de Milão, a obra foi um sucesso. Em 1546, Cardano foi surpreendido pela prematura morte da esposa, mas ao que parece isso não o abalou muito.

No meio do século Cardano atingira o ápice de sua bem-aventurança, granjeando fama internacional, a ponto de ser requisitado por nobres de vários países da Europa para prestar seus eficientes serviços médicos. Certa vez foi muito bem pago para ir a Edimburgo tratar o arcebispo de St. Andrews, que sofria de asma e já havia esgotado todas as possibilidades de tratamento, sem sucesso. Sob os cuidados de Cardano, a saúde do arcebispo rapidamente melhorou (talvez mais pelo acaso do que por qualquer outra coisa). Esse fato consolidou de vez a imagem de médico competente auferida por Cardano, tornando-o uma celebridade mundial, só perdendo, em termos de popularidade, para o célebre anatomista Andreas Vesalius. No retorno da viagem à Escócia, em 1553, Cardano foi nomeado professor de Medicina na universidade de Pavia. Bem a contragosto, o Colégio de Médicos de Milão viu-se, então, obrigado a aceitá-lo como um de seus membros. Recusar tão conceituado doutor poderia comprometer a imagem da instituição. Não apenas o integraram ao Colégio, como também o elegeram reitor. Cardano não tinha do que se queixar. Estava rico, tinha muitas posses, era respeitado. Tudo ia muito bem mesmo.

Os ventos novamente mudaram de direção. A vida de Cardano, então em águas muito tranquilas, logo entraria numa trajetória em parafuso. Dessa vez, seriam as desgraças na família que o atormentariam. Como já mencionado, Cardano gerou dois homens e uma mulher. O primogênito, seu predileto, de nome Giovanni Battista (GiamBattista), surdo de um dos ouvidos, chegou a ser um musicista de qualidade e, como o pai, tornou-se médico. Entretanto, ganhou fama mesmo foi como criminoso barato. Casou-se secretamente, contra a vontade do pai, com Brandonia de Seroni, uma mulher de caráter desprezível. Nas palavras de Cardano: "*(...) uma mulher sem valor e sem vergonha*". Cardano nunca esteve tão certo. O casamento foi desastroso: a fogosa senhora, não satisfeita apenas com o marido, o traiu um sem número de vezes. Foram três anos de convivência infernal, durante os quais ela fez questão de não esconder sua infidelidade nem mesmo do marido. Ridicularizado e alvo de zombaria geral por conta dos boatos acerca da paternidade dos seus três filhos, GiamBattista não suportou o vexame e acabou por envenenar a esposa com arsênico, quando ela ainda se recuperava do parto do terceiro filho. Ele foi preso em 17 de fevereiro de 1560. Cardano gastou uma fortuna com os melhores advogados, tentou usar sua influência sobre as autoridades judiciárias e até testemunhou em defesa do seu filho, na tentativa de livrá-lo da condenação. Cinco médicos foram requisitados a fim de demonstrar que a falecida não havia sido envenenada, ou, ao menos, que a dose ingerida teria sido insuficiente para provocar a sua morte. Diante de tantas mobilizações, tudo indicava que GiamBattista seria libertado, porém, por alguma razão desconhecida (talvez tortura), GiamBattista confessou o crime, o que sepultou de vez qualquer esperança de absolvição. Condenado formalmente por assassinato e sentenciado à morte, GiamBattista passou 53 dias na prisão, durante os quais foi impiedosamente seviciado. Cortaram-lhe a mão esquerda e, em 13 de abril de 1560, ele foi decapitado, aos 26 anos de idade. Por essa época, a morte rondava a família Cardan: "*Uma casa – a minha – testemunhou, no espaço de poucos dias, três funerais: o de meu filho, o da minha netinha, Diaregina, e de sua babá; nem meu neto estava a salvo da morte.*", escreveu.

Chiara, a filha do meio, que tinha o mesmo nome da avó, revelou-se uma mulher de lascívia desmesurada. Já aos 16 anos seduziu o próprio irmão mais velho, Giovanni Battista, de quem falamos há pouco, e ficou grávida. Ela logrou fazer um aborto, mas o procedimento a deixou estéril. Isso, que normalmente seria motivo de tristeza, para Chiara veio bem a calhar, já que assim poderia se entregar de corpo e alma à sua conduta libidinosa, sem os inconvenientes de uma gestação e sem correr o risco de ter o mesmo destino de sua futura cunhada. E assim foi. Mesmo depois de casada, Chiara continuou com a sua vida de promiscuidade, vindo a contrair sífilis, que mais tarde provocaria a sua morte.

O caçula, Aldo, tampouco destoou das tendências abjetas da família. Quando criança, se divertia torturando animais e, de tanto que gostou, transformou essa "paixão" em profissão, trabalhando, já adulto, como torturador "freelancer" para a Inquisição. Réprobo irrecuperável, extremamente violento, cometia um roubo atrás do outro. Não raro fugia de casa, a fim de praticar algum crime e, quando retornava ao lar paterno, fazia cenas horrorosas. Certa vez, durante uma discussão, irritou o pai de tal maneira, que este último cortou fora as suas orelhas. Em diversas ocasiões, Cardano socorreu Aldo, tirando-o de enormes dívidas de jogo. Por conta de tantos desgostos, Cardan acabou se cansando. Expulsou-o de casa e deserdou-o. Num outro episódio, em 1569, Aldo jogou fora todas as suas roupas e pertences, além de dinheiro. Em seguida, invadiu sorrateiramente a casa do pai, de onde fora expulso, e roubou uma grande quantidade de dinheiro e as joias da família. Cardano começou a ficar com medo dele e o denunciou às autoridades. Logo Aldo foi preso, julgado e condenado. Ele foi banido da cidade de Bolonha.

Para Cardano, a morte de seu primeiro filho foi o mais duro dentre todos os golpes que sofrera ao longo da vida, e do qual ele nunca se recuperou totalmente. Devastado pela tétrica perda, Cardan se recriminava por não ter sido capaz de livrar Giambattista da morte. A dor excruciante deve tê-lo perturbado o juízo, de modo que, a partir de então, Cardano viria a apresentar ideias incoerentes, passando por períodos de instabilidade mental. Deixou sua lucrativa atividade médica em Milão e se mudou para Pavia. Suas paranoias então se acentuaram, e Cardano relatou várias intrigas e atentados contra a sua vida, não se sabe até que ponto condizentes com a realidade. Desde o incidente com Giambattista, as finanças e a popularidade de Cardan vinham sofrendo quedas terríveis. Ele passou a ser visto como o pai de um assassino e sentiu na pele o escárnio social. O agora fragilizado Cardano virou presa fácil da miríade de inimigos que amealhou durante toda a vida. Seus antigos desafetos se compraziam em vê-lo chafurdar na ruína, e passaram a empreender perseguições em várias frentes. O Senado de Milão revogou a licença que permitia a Cardano lecionar e, adicionalmente, acusando-o de incesto e sodomia, exilou-o da província. Em decorrência disso, em 1562, Cardano foi forçado a renunciar a sua posição em Pavia. Entretanto, com a ajuda de alguns amigos leais e influentes, conseguiu ser transferido para a universidade de Bolonha, para ocupar o cargo de professor de Medicina. Cardano sentia-se, outra vez, no fundo do poço. Rememorando, posteriormente, aquele final de 1563, quando deixou Milão, Cardano escreveu: "*[estava] reduzido mais uma vez a farrapos, não tinha mais renda, minha fortuna desaparecera, meus aluguéis foram suspensos, meus livros, confiscados*".

Em 1570, pouco tempo depois da 2ª publicação da Ars Magna, Cardan veria sua situação complicar-se ainda mais. Acredita-se que o seu filho, Aldo, no período em que esteve preso, num ato de vingança, tenha delatado o pai para o Tribunal do Santo Ofício, a temida Inquisição. O fato é que Cardano foi preso imediatamente após a denúncia, sob a acusação de heresia: havia publicado, em 1554, uma obra chamada "*Comentário sobre Ptolomeu*", na qual figurava o horóscopo de Jesus Cristo, elaborado pelo próprio Cardano, o que foi interpretado como algo ignominioso. Outras fontes apontam que o motivo seria a dedicatória da Ars Magna. Cardano quis dedicar o seu livro a Andreas Osiander, um obscuro intelectual alemão, com quem se correspondia sobre assuntos relacionados à Astrologia. Osiander, que teve uma modesta participação na Reforma Alemã, teria sido, anonimamente, autor de um prefácio da obra "*Sobre a revolução das esferas celestes*", de **Nicolau Copérnico** (1473 – 1543), que, como sabemos, foi a primeira obra a propor que os planetas giravam em torno do Sol, contrariando frontalmente a Igreja. Também é fato que Cardano, no passado, publicara um livro de louvor a Nero, um dos grandes perseguidores dos cristãos no Império Romano. O detalhe perturbador é que Cardano, à época, trabalhava como astrólogo oficial do Vaticano. E mais: ele se opunha ao dogma da imortalidade da alma, além de ter escrito que o cristianismo não era verdadeiramente superior às outras religiões monoteístas. Assim, a Igreja tinha uma série de motivos para prender Cardano, e devia estar de olho nele já há algum tempo.

Felizmente a Igreja o tratou com indulgência, de modo que Cardan permaneceu apenas alguns meses encarcerado. Entretanto, sua liberdade foi condicionada à proibição de lecionar, de publicar qualquer obra e de não revelar nada sobre o processo da sua detenção. Assim, Cardano perdeu o seu posto de professor em Bolonha e seguiu para Roma, onde foi surpreendentemente bem acolhido. O Colégio de Médicos de Roma, por exemplo, concedeu-lhe adesão imediata. Embora o Papa Pio V o tenha inicialmente rejeitado, seu sucessor, Gregório XIII, que era um antigo colega de Cardano (da universidade de Bolonha), não só perdoou-lhe as heresias, como também lhe conferiu uma pensão, que Cardano conservou até a morte. Por essa época Cardan começou a escrever a sua autobiografia, que só seria publicada muito depois do seu passamento.

Cardano teria previsto, por meios astrológicos, o dia da sua própria morte. De fato, ele veio a falecer naquela data exata, mas, diz-se, não sem uma ajudinha do próprio Cardano. Como um ato final de sua conturbada vida, Girolamo Cardano, a fim de não cair no ridículo de errar uma previsão sobre sua própria pessoa, suicidou-se tomando veneno, a 21 de setembro de 1576. Para finalizar, transcrevemos um trecho de "*De vita própria liber*", no qual Cardano conclui que a sua vida, apesar de todos os pesares, afinal valeu a pena, demonstrando assim seu resiliente otimismo ante a condição humana:

"*Embora a felicidade sugira um estado bem contrário à minha natureza, posso dizer sinceramente que, de tempos em tempos, tive o privilégio de alcançar e compartilhar certa medida de felicidade. Se, de fato, existe algo de bom na vida com que possamos adornar o palco desta comédia, não fui privado de tais dádivas.*"

Depois desse breve passeio pela vida de Cardano, voltemos à narrativa da resolução das cúbicas.

Desde que entrou para a Fundação Piatti, o interesse de Cardano pela Matemática se acentuou, e ele começou a escrever muitas obras nessa área, revelando um notável talento com os números. Quando a notícia da vitória de Tartaglia sobre Fiore chegou a Milão, Cardano estava concluindo seu segundo livro de Matemática, "*Practica arithmeticae generalis et mensurandi singularis*" (A prática da aritmética e mensuração simples). Como o resultado obtido por Tartaglia foi admirável, já que havia uma crença generalizada, desde os tempos de Pacioli, de que era impossível resolver as cúbicas, Cardano considerou sedutora a ideia de incluir na sua quase acabada obra o recente método empregado por Tartaglia, com o qual finalizaria, em grande estilo, a sua "*Pratica*". Cardano deve ter tentado, durante alguns anos, descobrir, por seus próprios esforços, a fórmula resolutiva para as cúbicas, mas, tendo fracassado nessa busca, cogitou pedir a Tartaglia que este lhe revelasse o método, a fim de publicá-lo na sua obra. De início enviou um livreiro, Zuan Antonio de Bassaro, até Tartaglia, a fim de persuadi-lo a revelar a misteriosa fórmula. Tartaglia declinou da proposta de forma cortês, porém inequívoca: pretendia, como é natural, que a sua invenção fosse publicada num futuro livro de sua própria autoria. Cardano, desnecessário dizer, não se conformou, e iniciou uma relativamente extensa troca de correspondências com Tartaglia, nas quais lançou mão de todos os artifícios, desde súplicas até ameaças, para tentar convencer Tartaglia a contar o seu segredo, mas este se manteve impassível, repelindo todas as investidas de Cardano. A certa altura, Cardano acusou Tartaglia de ser um homem presunçoso, que considerava a si próprio como "*uma pessoa importante, que se acredita no cimo da montanha, quando na verdade está num vale*". Quando Tartaglia publicou, em 1537, a obra "*Nova scientia*", Cardano deve ter logo adquirido um exemplar, na esperança de que ali estivesse exposto o tão almejado procedimento para resolver equações do 3º grau. Para seu total desapontamento, a obra de Tartaglia não continha absolutamente nada sobre resolução de equações, mas sim sobre trajetórias de balas de canhão. Cardano, persistente, mudou então sua estratégia. Hostilizar Tartaglia só aumentaria a indisposição dele em colaborar. Cardano alterou o tom da negociação, mostrando-se afável e buscando tornar-se amigo de Tartaglia, apenas para conseguir o que queria. Ele se lembrou dos recentes progressos obtidos por Tartaglia no tocante à artilharia, e arquitetou um plano para atrair a sua presa. Convidou-o a vir a sua casa, em Milão, com a promessa de apresentá-lo ao vice-rei e comandante-em-chefe espanhol em Milão, Alfonso D'Avalos. Cardano urdiu bem a sua teia: para Tartaglia, um encontro com D'Avalos poderia lhe proporcionar uma boa renda, caso fosse contratado para prestar serviços relacionados à artilharia, quando teria a oportunidade de aplicar as suas mais recentes descobertas na área. Tartaglia, iludido pela promessa de Cardano, finalmente aceitou visitá-lo em Milão. Corria o ano de 1539.

Lá chegando, constatou ser falsa a promessa de que seria apresentado a D'Avalos, mas Cardano, sagaz, para compensar, dispensou à Tartaglia um tratamento de extrema cordialidade, acolhendo-o como se a um príncipe e zelando ao máximo pela sua satisfação, de modo que o visitante recebeu o melhor em termos de hospitalidade. Num clima amistoso, Cardano pediu que Tartaglia lho revelasse o método. Prometeu inclusive incluir a fórmula num capítulo especial em seu livro, onde figuraria o nome de Tartaglia como o descobridor da técnica. Tartaglia ainda resistiu por algum tempo, mas talvez tenha se sentido constrangido em não atender a um pedido daquele tão generoso anfitrião.

A narrativa sobre esse encontro entre Tartaglia e Cardano, a partir desse ponto, se baseia quase que exclusivamente em registros históricos deixados por Tartaglia, de modo que se trata da versão dele dos fatos, sem nenhuma garantia de sua fidedignidade. Essa versão destoa daquelas oriundas de outras fontes, mas não há como saber quem falou a verdade.

Por fim Tartaglia concordou em revelar o método, mas impôs uma austera condição: Cardano deveria prestar um solene juramento, no qual se comprometeria a jamais revelar o método para ninguém, devendo guardá-lo somente para si, ou seja, Cardano não poderia publicar a fórmula. Um pouco frustrado com as restrições estabelecidas por Tartaglia, Cardano assentiu e proferiu as seguintes palavras:

"*Juro a você, pelas Sagradas Escrituras de Deus, e como verdadeiro homem honrado, não apenas jamais publicar suas descobertas se você me ensiná-las, como também prometo, e empenho minha fé como verdadeiro cristão, anotá-las em código, de forma que, após a minha morte, ninguém será capaz de entendê-las.*"

Essa conversa teria acontecido em 25 de março de 1539. Finalmente, Tartaglia transmitiu a tão cobiçada informação, mas, como se não bastasse a condição imposta, o fez de um modo um tanto intrincado: por meio de um obscuro poema de 25 linhas. Para complicar ainda mais, Tartaglia só revelara, naquele poema, a fórmula já pronta, em seu estágio final, sem nenhuma indicação de como chegara a ela, ou seja, sem a demonstração.

A título de curiosidade, transcrevemos, a seguir, um trecho do referido poema (tradução de uma versão inglesa, de Ron G. Keightley):

Nos casos onde o cubo e a incógnita
Juntos equivalem a algum número inteiro, conhecido:
Encontre antes dois números que diferem por esse montante;
Seu produto, então, como é consensual,
Será igual a um terço, ao cubo, da sua incógnita;
O resíduo de suas raízes cúbicas, quando mostradas
E propriamente subtraídas, a seguir fornecerá
A incógnita principal em valor, como eu vivo!

Cardano, apesar dos percalços encontrados, deve ter ficado satisfeito com o resultado do seu longo empreendimento. Ao menos agora conhecia o método, e concentraria seus esforços em demonstrá-lo. No entanto, o juramento que fizera afigurava-se-lhe uma imensa pedra no sapato, pois, mesmo que conseguisse demonstrar a fórmula, ainda assim não poderia publicá-la por força da promessa. Embora Cardano, como ele mesmo registrou, desprezasse as coisas religiosas, manteve-se, à época pelo menos, fiel ao juramento: a *Practica arithmeticae generalis et mensurandi singularis* foi publicada em maio de 1539 sem a solução de Tartaglia.

É aqui que entra em cena outro dos personagens centrais na odisseia da resolução das equações polinomiais. **Ludovico Ferrari** (1522 – 1565) nasceu em Milão, mas logo se estabeleceu em Bolonha. De família muito humilde, aos 14 anos bateu à porta da casa de Cardano, em busca provavelmente de algum trabalho que lhe proporcionasse qualquer melhora na vida. Algum tempo antes, Cardano tinha ouvido o grasnido de uma gralha-do-campo e, supersticioso que era, acreditou que aquilo fosse um presságio de boa fortuna. Aquele menino, pensou Cardan, teria alguma relação com o prenúncio da boa sorte anunciada pela gralha, e assim acolheu o garoto para trabalhar como serviçal. Embora pareça absurda a razão que levou Cardano a aceitar Ludovico em sua casa, o tempo mostrou que não era assim tão absurda, afinal. O jovem logo chamou a atenção de Cardano pela velocidade com que aprendia e pelo raciocínio voraz. Cardano então promoveu-o a seu secretário particular, assumindo total responsabilidade por sua educação. Ferrari revelou-se um jovem de talento matemático extraordinário, cuja inteligência permitiu superar o seu mestre, por quem sentia verdadeiro carinho, chegando a referir-se a Cardano como o seu “criador”. No entanto, assim como seu mentor, Ferrari portava um gênio de natureza impetuosa. Seu temperamento explosivo e incontrolável motivou muitos atritos com Cardano, mas, apesar disso, discípulo e mestre sempre mantiveram uma relação de lealdade e colaboração mútuas. Em certa medida, Ferrari foi, para Cardano, o filho que ele sempre desejou ter.

De posse do poema que trazia implícita a resolução da cúbica descoberta por Tartaglia, Cardan conseguiu, com a ajuda de seu assistente, Ferrari – o único a quem revelara a fórmula –, encontrar uma demonstração, com argumentos geométricos, para a fórmula resolutiva da cúbica. Cardano ficou feliz, mas lembrou-se da impossibilidade de publicar o resultado, e isso o incomodava deveras. Um outro avanço importante levado a cabo por Cardano e Ferrari foi o de demonstrar que qualquer cúbica geral, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, pode ser transformada numa cúbica do tipo de del Ferro, $y^3 + py = q$, mediante uma substituição da forma $x = y + \left(-\dfrac{b}{3a}\right)$.

1.2.3 Cai a quártica

Zuanne de Tonini da Coi, aquele mesmo que desafiara Tartaglia a resolver uma cúbica, agora abordava Cardano, dessa vez instando-o a resolver uma quártica:

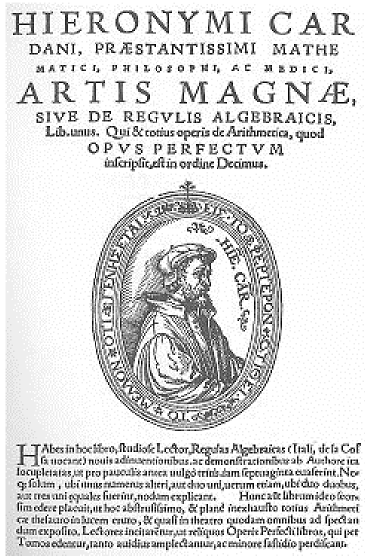
$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x.$$

Depois de incontáveis tentativas sem sucesso, Cardano passou a questão para Ferrari que, num clarão de genialidade, não apenas resolveu aquela quártica específica, mas foi muito além: ele conseguiu deduzir um método geral, puramente algébrico, que permitia resolver qualquer equação polinomial do 4º grau! O caminho trilhado por Ferrari basicamente reduzia o grau da equação, transformando a quártica num par de equações quadráticas. Para fazer essa redução, no entanto, era preciso resolver uma cúbica, cuja solução, naturalmente, já era conhecida. O jovem Ferrari, que à época contava com apenas 18 anos, fora capaz de solucionar a espinhosa quártica, numa inequívoca demonstração de seu intelecto brilhante.

Naquele mesmo ano de 1540, Cardano deixou o cargo de professor de Matemática na Fundação Piatti. Ferrari então ocupou o posto, após facilmente derrotar o outro candidato à vaga, passando, dessa maneira, a trabalhar como professor e a receber uma remuneração. A descoberta da solução das quárticas por Ferrari pôs Cardano numa situação bem desconfortável. Ele desejava que seu pupilo recebesse o devido reconhecimento pela sua descoberta mas, como a resolução de Ferrari estava atrelada à solução da cúbica, viu-se novamente obstruído pela promessa feita a Tartaglia, sob juramento, de nunca publicar a invenção deste último. Agora a pressão tornara-se mais forte do que nunca, e Cardano sentiu-se compelido a encontrar alguma saída para o impasse. Investigador nato, Cardano deve ter empreendido uma vasta pesquisa sobre as tentativas pretéritas de resolver a cúbica. Enfim encontrou evidências de que um já falecido professor de Bolonha, de nome Scipione del Ferro, fora capaz de resolver a equação. Incansáveis, Ferrari e Cardano fizeram, em 1543, uma viagem especial até Bolonha, com o objetivo certeiro de entrevistar os descendentes de del Ferro, na esperança de encontrar algum escrito que pudesse ajudá-los. Foram extremamente bem sucedidos: Annibale della Nave, que herdara de seu sogro Scipione del Ferro a resolução da cúbica, não apenas conservara os manuscritos como também os franqueou à Cardano e seu assistente para que eles pudessem examiná-los. Estava lá. Del Ferro de fato descobrira, cerca de 20 anos antes de Tartaglia, a fórmula para resolver a equação $x^3 + px = q$. Imagine só o alívio sentido por Cardano ao deparar com aquela fórmula que tanto o apoquentara. Tartaglia, afinal, não foi o primeiro a encontrá-la. De fato, ele redescobriu, por seus próprios méritos, o método de del Ferro. Assim, Cardano considerou-se desobrigado de cumprir o juramento, afinal Tartaglia pensava ter descoberto algo novo, quando na verdade del Ferro já havia chegado àquele resultado, logo Tartaglia não poderia reclamar direitos de propriedade intelectual. Além disso, o teor do juramento firmado o proibia de publicar a fórmula de Tartaglia, mas não a de del Ferro, o que lho autorizava a publicar a fórmula obtida por del Ferro.

1.2.4 A Grande Arte

Agora que o caminho estava livre, Cardano pôs-se a trabalhar com entusiasmo para concluir aquela que se tornaria a sua obra mais importante, considerada por muitos como o marco inicial da Álgebra moderna. Em 1545, Cardano publicou em Nuremberg, Alemanha, a "*Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*" (A grande arte ou as regras da álgebra, Livro um), mais conhecida como Ars Magna. Nessa obra, de 40 capítulos, Cardano analisa detalhadamente as equações cúbicas e quárticas e suas soluções. Cardano, de modo pioneiro, não se intimidou com os novos tipos de números que surgiam dessas equações: demonstrou, pela primeira vez, que as soluções de equações algébricas podem ser negativas, irracionais e até envolver raízes quadradas de números negativos, entidades a que chamou de "sofísticas".



Frontispício da Ars Magna (1545)

No caso particular das cúbicas, Cardano apresentou as soluções para cada um dos 13 tipos, algumas de sua própria lavra, outras fornecidas por Ferrari ou ainda resultantes da colaboração de ambos. Também ali surgiu o inédito conceito de raízes múltiplas de uma equação polinomial. A Ars Magna logo se projetou por toda a Europa, sendo prontamente reconhecida como obra essencial ao estudo da Álgebra. Ciente do valor que a Ars Magna representaria para o progresso da Matemática, Cardano a encerrou com as seguintes palavras: "*Escrito em 5 anos, que ele possa durar outros tantos milênios*".

A boa acolhida recebida pela Ars Magna, no entanto, não foi compartilhada por Tartaglia, que, sentindo-se traído, ficou terrivelmente irritado. O alvo da sua cólera, evidentemente, era Cardano, a quem acusava pela atitude condenável de violar um juramento sagrado. A fórmula descoberta por ele, Tartaglia, estava ganhando fama como a fórmula de Cardano, o que considerava absolutamente inaceitável! Já em 1546, Tartaglia lançou um livro, "*Quesiti et inventioni diverse*" (Novos problemas e invenções), no qual tornou pública sua revolta, acusando diretamente Cardano de perjúrio. Tartaglia não hesitou em usar palavras bem ultrajantes, e ainda incluiu o que seria um relato textual de todas as correspondências trocadas entre ele e Cardano, para que não restasse dúvida quanto ao motivo de sua tão abrasada ira.

No entanto, as acusações de Tartaglia de que Cardano usurpara uma invenção sua não se justificam. Cardano fez, em sua obra, referência à Tartaglia, dando-lhe os devidos créditos por reencontrar o resultado, mas deixando bem claro que a descoberta original se devia a Scipione del Ferro. No segundo parágrafo do capítulo de abertura da Ars Magna, Cardano declara:

"Em sua época, Scipione del Ferro, de Bolonha, resolveu o caso do cubo e da primeira potência igual a uma constante, façanha muito elegante e admirável. (...) Numa emulação desse trabalho, meu amigo Niccolo Tartaglia de Bréscia, não querendo ser superado, resolveu o mesmo caso quando participou de uma competição com seu [de del Ferro] pupilo, Antonio Maria Fiore e, comovido por minhas muitas súplicas, entregou-a a mim."

No capítulo XI ("Sobre o cubo e a primeira potência igual ao número"), Cardano repete sucintamente o crédito:

"Scipio Ferro de Bolonha, quase trinta anos atrás, descobriu esta regra e a entregou a Antonio Maria Fiore de Veneza, cuja competição com Niccolò Tartaglia de Bréscia deu a Niccolò a oportunidade de descobri-la. Ele [Tartaglia] a deu a mim em resposta às minhas súplicas, embora recusando mostrar a demonstração. Armado com esta ajuda, procurei sua demonstração de [várias] formas. Isto foi bem difícil. Segue a minha versão dela."

Apesar desse muito claro reconhecimento, Tartaglia só elevou ainda mais o clima de animosidade, dirigindo a Cardano uma torrente de insultos, de forma cada vez mais hostil, à vista de todo o público italiano. Cardano, cuja consciência estava certamente tranquila quanto ao fato, preservou-se de alimentar qualquer discórdia, e permaneceu em silêncio. Seu briguento colaborador, entretanto, não se conteve e revidou as provocações dirigidas ao seu mestre. Ferrari se dispôs, com muita energia, a defender Cardano das infundadas acusações de Tartaglia, e o fez de maneira ainda mais virulenta. Ferrari, em resposta ao livro de Tartaglia, lançou contra este um cartello, ou seja, uma carta de desafio, que ele distribuiu a 53 intelectuais e autoridades de toda a Itália, querendo com isso conferir visibilidade à contenda. Nele Ferrari dirigia-se a Tartaglia de forma absolutamente desdenhosa, acusando-o de roubar resultados de outros matemáticos e apontando muitíssimos erros na sua obra. Quem quer que lesse o cartello, teria a impressão de que Tartaglia não passava de um impostor, e isso tinha o efeito de degradar a sua imagem. Esse cartello foi enviado em 10 de fevereiro de 1547. Tartaglia o recebeu no dia 13 e em apenas seis dias contra-atacou. Na sua resposta, Tartaglia se queixou de que tenha sido Ferrari, e não Cardano, o autor do cartello. Em outra palavras, Tartaglia não queria a intromissão de terceiros, pois a altercação interessava apenas a ele e a Cardano. Reclamou que Ferrari deveria ao menos garantir que Cardan também assinasse o desafio. Em seguida, consoante a primeira queixa, recusou o convite de Ferrari para um duelo intelectual, mas deixou claro que o faria de bom grado se o oponente fosse o próprio Cardano.

Cardano manteve-se reticente, e mais uma vez não se manifestou. Seguiu-se uma amarga e rancorosa troca de farpas entre Ferrari e Tartaglia. No período compreendido entre 10 de fevereiro de 1547 e 24 de julho de 1548, Tartaglia e Ferrari trocaram pelo menos 12 cartelli (seis desafios e seis respostas), todos eles amplamente propalados a toda a elite intelectual italiana. A cada embate, Tartaglia insistia em querer trazer Cardano para o meio da briga, mas fracassou em todas as tentativas. Finalmente, em 1548, uma circunstância inesperada faria Tartaglia aceitar um convite pra duelar com Ferrari. Naquele ano foi oferecido à Tartaglia um posto de palestrante em geometria em Bréscia, sua cidade Natal. Como, à época, Tartaglia estava no meio de uma disputa com Ferrari que tomara proporções nacionais e que, por isso mesmo, despertava a curiosidade pública acerca do seu desenlace, os patronos de Bréscia acharam por bem estabelecer que, para ter acesso ao cargo, Tartaglia deveria enfrentar Ferrari num duelo, a fim de ver como o candidato se saía. Assim, como almejava aquele trabalho, Tartaglia viu-se obrigado a se comprometer com um duelo, ainda que relutantemente. Os pormenores do debate foram acertados entre as partes, ficando definido que os debatedores proporiam um ao outro 31 problemas, aqueles mesmos que figuravam nos cartelli. A maior parte desses problemas era de Matemática, mas havia também aqueles envolvendo áreas relacionadas, como Arquitetura, Astronomia, Geografia e Óptica, sendo esta mescla de conhecimentos um fato comum à época, bem ao estilo renascentista.

O debate realizou-se em Milão, em uma igreja localizada no jardim dos Frati Zoccolanti, a 10 de agosto de 1548. Uma grande plateia, composta inclusive pelas autoridades políticas e intelectuais milanesas, compareceu. O governador, por exemplo, foi nomeado árbitro supremo da competição. Ferrari trouxe consigo uma grande comitiva de correligionários, ao passo que Tartaglia talvez tenha sido acompanhado apenas pelo seu irmão. Cardano preferiu manter distância, e nesse dia permaneceu fora da cidade. Lamentavelmente, não restou nenhum registro histórico deste celebrado confronto, mas uma análise atenta do panorama pós duelo não deixa dúvidas sobre o que sucedeu. Embora Tartaglia tenha, de fato, ocupado o cargo que lhe fora ofertado em Bréscia, ocorreu que, após um ano inteiro proferindo palestras, negaram-lhe o justo pagamento pelos serviços prestados, o que o obrigou a retornar ao seu modesto cargo de professor em Veneza. Tartaglia jamais afirmou ter vencido o duelo. Além disso, relatou, em duas obras posteriores, de maneira bastante confusa, que não fora capaz de argumentar como gostaria, durante o debate, por culpa da barulhenta plateia. Há indícios, ainda que poucos, de que Tartaglia tenha mesmo abandonado a competição antes do fim do primeiro dia, decerto por não ter sido capaz de arrostar seu combativo oponente, o qual teria um entendimento mais consolidado acerca das equações quárticas e cúbicas. Cardano também menciona sucintamente, num escrito posterior, que Ferrari fora um adversário mais que à altura de Tartaglia. Tudo indica, portanto, que Tartaglia tenha sofrido uma derrota humilhante e arrasadora frente a Ferrari. Essa suposição ganha ainda mais força quando olhamos para a carreira de Ferrari, que após aquele debate entrou em rápida ascensão, levando-o ao cume do sucesso. As ofertas de emprego, por exemplo, pulularam como nunca. Ele chegou até a rejeitar a proposta de se tornar tutor do filho do imperador, para aceitar o cargo, mais lucrativo, de assessor tributário do governo de Milão. Também trabalhou para a Igreja, sob a proteção do Cardeal de Mantova, a quem serviu durante oito anos. Logo Ferrari juntou uma grande fortuna, tornando-se um raro exemplo de um jovem que, vindo das camadas menos favorecidas da sociedade, em pouco tempo alcançara os píncaros da riqueza material. Tendo atingido um excelente patamar de prosperidade, Ferrari se deu ao luxo de se aposentar aos 42 anos de idade, passando a levar uma vida de hedonismo, cheia de prazeres e devassidão. Entretanto, como que para não destoar dos eventos sinistros que permearam a história da resolução das cúbicas e quárticas, o afortunado e jovem Ferrari teria sua vida abruptamente interrompida, acrescentando mais uma tragédia à extensa fileira de desgraças dessa narrativa.

Quando retornou a Bolonha, por razões de saúde, em algum momento depois de 1556, Ferrari encontrava-se em companhia da sua irmã Madalena, uma viúva pobre, talvez a única pessoa por quem ele tenha sentido algum afeto, e com quem dividiu o mesmo lar nos anos seguintes, enquanto lecionava na universidade de Bolonha. A vasta riqueza angariada por Ferrari no correr de poucos anos despertou a inveja de Madalena. O fato é que, em 1565, Ludovico Ferrari foi envenenado com arsênico branco e, embora não haja provas diretas de que sua irmã tenha sido a autora do crime, o seu comportamento subsequente à morte de Ferrari e o fato de ela ser a única herdeira legal do irmão (que não casou nem teve filhos, pelo que se sabe), a colocam como suspeita número um. Conta-se que durante o funeral Madalena não teria demonstrado nenhuma emoção. Além disso, após o curto intervalo de duas semanas, Madalena, agora já possuidora da riqueza do falecido irmão, contraiu matrimônio. Seu primeiro ato como esposa foi transferir para o marido todo o patrimônio herdado, entre valores e propriedades. Quando Cardano, para quem a morte de Ferrari deve ter sido outra grande perda, foi a Bolonha, a fim de recuperar alguns de seus próprios livros e anotações que deixara em poder de Ferrari, ele nada encontrou. O marido de Madalena já havia se apoderado de tudo, aparentemente com o intuito de que parte daquele material fosse publicado no nome de seu filho de um casamento anterior. Tão logo se assenhorou da fortuna, o novo consorte, num gesto de "gratidão", separou-se de Madalena, deixando-a tão pobre quanto foi estúpida. Madalena morreu na absoluta (e merecida) pobreza.

Quanto à Tartaglia, nunca mais se destacou no cenário italiano, vindo a falecer nove anos depois do malfadado duelo, envolto em rancor e amargura.

* * *

Uma análise imparcial da controvérsia envolvendo del Ferro, Cardano, Tartaglia e Ferrari nos leva fatalmente à conclusão que todo o estardalhaço promovido por Tartaglia não se fundamenta. Tartaglia argumentara que publicaria um livro contendo a resolução da cúbica, mas desde o seu encontro com Cardano até a publicação da Ars Magna se passaram cinco anos, tempo mais que suficiente para levar a termo a publicação de uma obra. Se não o fez, talvez não tivesse mesmo interesse. Ele acusou Cardano de quebrar um juramento, mas, examinando objetivamente a situação, Cardano de fato não descumpriu o que prometeu. Ocorre que a fórmula obtida por Tartaglia era exatamente a mesma descoberta por Scipione del Ferro, 20 anos antes, de modo que Cardano tornou público, portanto, o trabalho de del Ferro, não o de Tartaglia. Durante os ataques de Tartaglia à Cardano, Ferrari e seu mestre sustentaram veementemente que o nome de Tartaglia foi mencionado na Ars Magna apenas para que o leitor soubesse de que maneira o próprio Cardano tomou conhecimento do trabalho pioneiro de del Ferro, e que a informação ali apresentada se baseava exclusivamente nos escritos deixados por Ferro. Não é coerente exigir propriedade intelectual sobre algo de autoria de outrem. A certa altura dos acontecimentos, Tartaglia deve ter até reconhecido isso, mas talvez o que o exasperasse era o fato de que, na prática, o nome de Cardano é que entraria para a História, beneficiando-se de todas as honras e vantagens decorrentes daquela contribuição ao progresso científico. Ao que parece, Tartaglia foi uma vítima, não de Cardano, mas de uma infeliz coincidência do destino, que Cardano procurou mitigar ao reconhecer, na Ars Magna, a contribuição de Tartaglia.

Acrescente-se aos argumentos expostos acima o fato de que Tartaglia revelou apenas o algoritmo que reflete a fórmula resolutiva da cúbica, cabendo a Cardano e seu assistente encontrar a demonstração para ela, coisa que de fato fizeram, antes mesmo de ter contato com os manuscritos legados por Ferro. Aliás, todas demonstrações contidas na Ars Magna, para os 13 tipos de cúbicas e para a quártica, foram construídas pela dupla Cardano-Ferrari.

A atitude tempestuosa de Tartaglia com relação à autoria da fórmula resolutiva da cúbica soa um tanto hipócrita quando observamos algumas de suas próprias práticas: ele produziu uma tradução de algumas obras de Arquimedes, como se fora ele próprio o tradutor, quando na verdade ele meramente publicou uma tradução latina do século XIII de autoria do estudioso flamengo Guilherme de Moerbeke. Em outro episódio, Tartaglia apresentou um resultado devido ao matemático alemão Jordanus de Nemore, como se fosse de sua própria autoria, fato inclusive mencionado por Ferrari quando da sua peleja com Tartaglia.

Pelos fatos aqui trazidos a lume, podemos afirmar, com bastante segurança, que, sob o ponto de vista da ética profissional, Cardano não cometeu nenhum ato de apropriação indevida de uma ideia matemática. Ele tinha lá seus defeitos, mas talvez as suas virtudes os compensassem com folga. Parece completamente razoável que hoje em dia a fórmula resolutiva da cúbica seja quase que exclusivamente lembrada como "a fórmula de Cardano", muito embora ele não a tenha, de fato, descoberto. Se quiséssemos adotar um critério baseado tão somente na justiça, o ideal seria referirmo-nos a esta fórmula como "a fórmula de del Ferro", o homem que, sem saber se uma tal fórmula realmente existia, lançou-se nessa busca incerta e teve a felicidade de encontrá-la!

Observação 1.1 *Embora amplamente utilizada, inclusive por autores consagrados, a expressão $\sqrt{-1}$ não pode, a rigor, ser empregada como uma definição da unidade imaginária, i. A razão é que a função raiz quadrada real não está definida para números reais negativos e, portanto, a expressão $\sqrt{-1}$ é destituída de significado, nesse contexto. O leitor interessado nos pormenores dessa impossibilidade pode consultar [11].*

Feita esta ressalva, nos permitiremos escrever expressões como $\sqrt{-121}$, apenas para que o leitor perceba como foram as primeiras tentativas de conceber os números complexos. É muito natural que os matemáticos do século XVI tentassem atribuir algum significado a essas expressões, ainda mais considerando-se que elas aparecem na fórmula de Cardano pela mera substituição das variáveis por valores numéricos.

Para os propósitos deste trabalho, admitiremos que, para $x \in \mathbb{R}$ e $x < 0$, $\sqrt{x} = \sqrt{-x} \cdot i$, em que o símbolo $\sqrt{\ }$ representa a função raiz quadrada real, e o símbolo i representa um número complexo que possui a propriedade $i^2 = -1$.

1.2.5 Surgem os complexos

Tudo parecia indicar que as cúbicas e suas irmãs próximas, as quárticas, finalmente haviam sido completamente dominadas, mas uma equação cúbica nunca se rende assim tão facilmente. Vamos relembrar a aclamada fórmula:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Já dissemos que a cúbica geral pode ser reduzida a uma cúbica de del Ferro mediante uma mudança de variável. Assim, para resolver qualquer cúbica, basta reduzi-la à forma $x^3 + px = q$ e então aplicar a fórmula acima para encontrar a solução, certo? Não totalmente! Para algumas dessas equações, especificamente aquelas cujas três raízes são reais e distintas, há uma dificuldade extra. Nestes casos, a expressão que aparece dentro das raízes quadradas:

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

torna-se negativa. No tempo de Cardano, poucos matemáticos tinham disposição para considerar números negativos em seus cálculos. Cardano, desbravador, já havia deparado com esses números e chegou a realizar operações com eles, porém, naquele caso específico, surgiu um obstáculo que parecia incontornável: o número negativo em questão aparecia dentro de uma raiz quadrada. Se os números negativos constituíam entidades de natureza exótica, as raízes quadradas deles, então, pareciam ainda mais estranhas e incompreensíveis. Tentar calcular uma raiz quadrada de um número negativo levava a um beco sem saída, já que qualquer coisa elevada ao quadrado tem de ser positiva. Para a esmagadora maioria dos matemáticos anteriores e até aquela época, deparar com um número negativo ao resolver uma equação significava que a equação não tinha solução. Essa postura, bastante cômoda, e que funcionava maravilhosamente bem para equações lineares e quadráticas, teve a sua validade posta em xeque com a chegada das equações cúbicas. Por quê?

Cardano, muito atento aos detalhes, percebeu com exatidão quando a situação problemática ocorria. Em particular, ele notou que a equação $x^3 = 15x + 4$, quando resolvida por uma das variantes da fórmula de del Ferro, produzia como resposta:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Mas ele sabia, como é fácil de verificar, que o número quatro é solução da equação. Então, de alguma maneira, a igualdade:

$$4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

tinha de ser verdadeira! Cardano ficou perplexo e confuso. A igualdade acima diz claramente que, para chegar a um número bem concreto, 4, é preciso saber fazer contas que envolvem raízes quadradas de números negativos. Em outras palavras, é como se tivéssemos um alvo bem real, mas para atingi-lo precisássemos passar por um caminho com números estranhos. Essa constatação mudou radicalmente a maneira como matemáticos encaravam esses números. Noutros tempos bastaria afirmar que a referida equação não tinha solução, mas agora, sabendo que a solução existe e é bem real, seria preciso compreender esses números e aprender a operar com eles, a fim de saber como pode ser possível que a combinação de alguns deles pudesse resultar num número real.

Cardano, não encontrando explicação, porquanto recalcitrava em aceitar aqueles objetos como números, escreveu a Tartaglia, na esperança de obter alguma luz que o orientasse. Por essa época, 1539, eles ainda se falavam. Cardano expôs a sua dúvida, apontando com exatidão em que circunstância e onde aparecia a raiz quadrada de uma quantidade negativa. No entanto, Tartaglia limitou-se a recomendar que Cardano procurasse se aprofundar mais no estudo da cúbica, demonstrando uma certa má vontade:

"*Você ainda não dominou a verdadeira forma de resolver problemas desse tipo...seus métodos são totalmente falsos.*"

Talvez Tartaglia não quisesse colaborar. O mais provável, no entanto, é que ele não tenha alcançado o mesmo nível profundo de entendimento sobre a cúbica que Cardano. Possivelmente Tartaglia não enxergou, apesar da descrição precisa feita por Cardano, qual o entrave que impedia o prosseguimento do cálculo da raiz da equação. Afirmar que os métodos de Cardano eram "totalmente falsos" foi uma clara demonstração de que Tartaglia, de fato, tinha uma muito vaga noção do cuidado e do empenho com que Cardano perscrutava as sutilezas da fórmula. Pareceu uma resposta demasiado simplista, própria de quem não quer opinar sobre algum assunto, talvez por não se sentir suficientemente capaz.

Cardano se deu conta de que o obstáculo intransponível estava mesmo na raiz quadrada de uma quantidade negativa. Só enxergou uma saída: teria de "fazer de conta" que aquelas "entidades sofísticas" eram números, evitando assim o que chamou de "torturas mentais" para tentar conferir àqueles objetos o status de números. Assim, Cardano prosseguiu com os cálculos e, manuseando as raízes quadradas de negativos como se fossem números "verdadeiros", conseguiu chegar a resultados coerentes. Esse foi o primeiro empecilho contornado, um pequeno embaraço. Entretanto, mesmo admitindo que as quantidades sofísticas eram números, em dado momento naquela fórmula resolutiva da cúbica, seria preciso:

1. Efetuar uma adição (ou uma subtração) entre uma constante numérica e um "número" sofístico;

2. Extrair a raiz cúbica do resultado do passo anterior.

Cardano podia até conceber o resultado do passo 1, mas não encontrou meios de calcular o passo 2. De fato, naquela época ninguém encontraria, pois a operação em questão consiste em calcular uma raiz cúbica do que hoje conhecemos como um número complexo. Estes números só seriam inventados muito depois, por volta de 1572, e os matemáticos só aprenderiam a manipulá-los completamente dali a uns duzentos anos! Dessa forma, o caso continuou sem solução, razão pela qual ficou conhecido como "casus irreducibilis". Este sim, foi um grande embaraço, só superado após quase duzentos anos de árduo trabalho para desenvolver a Teoria dos Números Complexos. Cardano, percebendo o tamanho do problema, não incluiu em sua Ars Magna nem mesmo um único exemplo que recaísse no "casus irreducibilis".

Embora Cardano tenha se aventurado a trabalhar com números complexos, ele o fez de forma pouco rigorosa e em problemas bem restritos. O primeiro a conceber regras formais para operar com raízes quadradas de números negativos foi o bolonhês **Rafael Bombelli** (1526 – 1572), um engenheiro hidráulico que possuía talentos matemáticos.

Na sua obra prima, "*L'Algebra parte Maggiore dell'Arithmetica*", publicada em 1572, ano da sua morte, Bombelli demonstrou, pela primeira vez, que os números complexos são, muitas vezes, inevitáveis, mesmo quando o resultado pretendido deva ser um número "verdadeiro".

No seu tratado, primeiro Bombelli definiu as regras para lidar com números negativos. Em seguida, estabeleceu a forma de efetuar operações com raízes quadradas de números negativos, manuseando-as como se fossem números "genuínos". Então ele se debruçou sobre o problema em que Cardano ficara atolado, a resolução da equação $x^3 = 15x + 4$:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Bombelli então imaginou, a partir do que chamou de "um pensamento selvagem", que as raízes cúbicas que aparecem nessa fórmula deveriam ser números da forma

$$a + b\sqrt{-1} \quad \text{e} \quad a - b\sqrt{-1},$$

de modo que as relações

$$\left(a+b\sqrt{-1}\right)^3 = 2+\sqrt{-121} \quad \text{e} \quad \left(a-b\sqrt{-1}\right)^3 = 2-\sqrt{-121}$$

fossem satisfeitas. Bombelli percebeu que as igualdades acima eram verificadas quando $a = 2$ e $b = 1$, ou seja

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2+\sqrt{-121} \quad \text{e} \quad \left(2-\sqrt{-1}\right)^3 = 2-\sqrt{-121}.$$

O mais espantoso ainda estava por vir. Ao somar esses dois números, eis que surgia o número 4, a solução da equação! A fórmula realmente estava certa. Ao operar aqueles números aparentemente sem sentido, de alguma maneira eles forneciam a resposta correta:

$$\left(2+\sqrt{-1}\right) + \left(2-\sqrt{-1}\right) = 4.$$

Isto era mesmo impressionante. Ele estava diante de entidades matemáticas de natureza exótica, que serviam tão somente como meras etapas intermediárias, desaparecendo sem deixar vestígios de sua passagem logo que levavam ao resultado correto. Quando Cardano deparou com esses objetos e ousou efetuar com eles algumas contas bem sucedidas, afirmou que aquelas quantidades eram tão sutis quanto inúteis. Bombelli agora demonstrava cabalmente que aqueles "seres" podiam até ser sutis, mas de nenhuma maneira poderiam ser considerados inúteis. O trabalho seminal de Rafael Bombelli foi o ponto de partida para o desenvolvimento da já mencionada Teoria dos Números Complexos, que ocuparia as melhores mentes matemáticas pelos dois séculos seguintes, vindo a se tornar um dos campos mais prolíficos da Matemática.

1.2.6 Viète aborda a cúbica

Houve ainda uma nova tentativa de resolução da cúbica, dessa vez empreendida pelo célebre matemático francês **François Viète** (1540 – 1603). Viète, que era advogado de profissão, fez parte da corte de vários nobres, como Carlos IX, Henrique III e Henrique IV. Apesar de se dedicar à Matemática apenas nas horas vagas, a qualidade de sua produção nessa área é admirável. Algebrista excepcional, promoveu melhoras significativas na notação algébrica. Em 1591 publicou a sua obra matemática de maior expressão, "*In artem analyticam isagoge*"(Introdução à arte analítica), na qual introduziu a ideia de representar as constantes numéricas de uma equação por letras, denominando-as de coeficientes. Tinha grande habilidade com a Trigonometria, deduzindo corretamente as regras de prostaférese e as expressões para calcular o seno e o cosseno de múltiplos inteiros de um ângulo. A sua fórmula para o cálculo de π, por exemplo, nos dá um vislumbre da habilidade e criatividade extraordinárias com que Viète manipulava as funções trigonométricas. Ela pode ser encontrada em [4]. Viète também brilhou na arte de quebrar códigos secretos. Nesta seara, Viète certa vez viu-se envolvido num episódio um pouco hilário: ao conseguir decifrar mensagens espanholas que haviam sido codificadas por meio de uma técnica particularmente complicada e, por isso mesmo, tida como indecifrável, Viète causou tamanho assombro ao rei Felipe II, da Espanha, que este foi se queixar ao Papa, acusando Viète de estar mancomunado com o demônio. No campo das equações algébricas Viète tinha predileção pela técnica de substituição de incógnitas. Usando desse expediente, Viète abordou o problema da cúbica. O interessante artíficio por ele utilizado permitiu solucionar a cúbica $x^3+px+q=0$ através de um caminho algébrico diferente daquele descoberto por del Ferro. A fórmula resultante, cuja demonstração está na segunda parte deste trabalho, é a seguinte:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}.$$

Embora à primeira vista essa fórmula pareça diferente daquela obtida por del Ferro, é possível demonstrar que elas são de fato equivalentes, inclusive, como se vê claramente, com as limitações concernentes ao "casus irreducibilis".

Não satisfeito, Viète ainda descobriu uma outra maneira de domar a cúbica, dessa vez usando o poder da sua área predileta, com a qual tinha grande familiaridade, a Trigonometria. Essa nova abordagem, embora não fosse puramente algébrica, tinha a grande vantagem de resolver cúbicas impossíveis de solucionar pelo método de Cardano. Como nem tudo é perfeito, o método em questão falha em alguns casos, mas isso não lhe diminui o mérito. Os detalhes da demonstração, bem como exemplos da aplicação dessa técnica, serão mostrados no segundo capítulo deste trabalho.

1.3 O que aconteceu depois

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de focar as equações polinomiais do 3º e 4º graus, as chamadas cúbicas e quárticas, respectivamente, seu histórico e suas soluções. No entanto, é preciso dizer que, embora a narrativa da resolução da cúbica/quártica seja emocionante, o verdadeiro clímax da história das equações algébricas se deu com o enfrentamento da próxima da fila: a quíntica. Aqui daremos apenas um breve vislumbre dessa empolgante narrativa, pois uma descrição mais completa exigiria muito espaço, além de um razoável domínio da matemática envolvida. Isto não apenas levaria tempo, como também fugiria ao escopo deste trabalho.

Naturalmente, os matemáticos estavam ávidos por conquistar mais esta terra desconhecida, mas o fato é que, durante os 250 anos que se seguiram após a solução da quártica por Ferrari, ninguém foi capaz de encontrar uma fórmula resolutiva para a quíntica. Essa busca sem precedentes na História da Matemática reuniu as mentes mais brilhantes do milênio: nomes como Descartes, Euler, Gauss, Lagrange, Bézout, Tschirnhaus, Harriot, Ruffini e Cauchy tomaram partido na caça à resolução da quíntica, que exigiu o máximo do talento e da capacidade imaginativa de cada um deles. O desenlace, surpreendente, foi protagonizado pelas mentes geniais de dois jovens prodígios da Matemática: **Niels Abel** (1802 – 1829) e **Évariste Galois** (1811 – 1832). Explicando de maneira sucinta e figurada, o que sucedeu ao se tentar solucionar a equação polinomial do 5º grau foi que a noz em questão não era apenas muito dura. Era, de fato, inquebrável, à prova de qualquer investida que pudesse ser imaginada, em termos puramente algébricos, e isto foi provado com todo o rigor. Dizendo de outra maneira, de tanto buscar uma fórmula para a quíntica geral sem obter sucesso, os matemáticos começaram a desconfiar que uma tal fórmula pudesse não existir. Para não correr o risco de consumir todas as energias mentais numa busca fadada ao fracasso, os matemáticos voltaram seus esforços para buscar uma prova de que a quíntica geral não era passível de ser resolvida algebricamente. Mesmo essa nova perspectiva revelou-se extremamente penosa, mas por fim gerou o fruto pretendido.

Paolo Ruffini (1765 – 1822) foi o primeiro a elaborar uma prova da impossibilidade de resolver a quíntica por radicais. Foi uma prova bem longa (516 páginas!), e talvez por isso não tenha sido totalmente compreendida pelos matemáticos da época, não recebendo destes a devida atenção. Só muito tempo depois é que se constatou que a prova de Ruffini continha algumas lacunas. Ela explorava um aspecto totalmente insuspeitado pelos matemáticos que o precederam: as propriedades das permutações das raízes da equação. Havia uma conexão entre essas propriedades e a possibilidade de expressar as raízes em termos de uma fórmula por radicais, algo não muito fácil de enxergar. Mais tarde, Niels Abel apresentou o que seria uma fórmula resolutiva para a quíntica, mas logo ele descobriu um erro, o que o compeliu a realizar a intrigante descoberta de que a quíntica geral de fato é impossível de se resolver por radicais. Pouco depois, um outro matemático, de nome Évariste Galois, não apenas ratificou o resultado obtido por Abel como também o ampliou para todas as outras equações de grau superior a 5, ou seja, de um só golpe, Galois provou que todas as equações polinomiais gerais de grau superior a quatro são impossíveis de ser resolvidas por meio de radicais.

Para concretizar esse feito notável, Galois inventou um novo objeto matemático, a que denominou grupo. Basicamente, um grupo é uma estrutura algébrica cujos elementos gozam de certas propriedades. A chamada Teoria de Galois é uma teoria deveras abstrusa, que só poderia ter sido mesmo concebida na mente de um gênio. Infelizmente, somente um entendimento aprofundado da teoria em questão permite enxergar sob que condições precisas, afinal, as raízes de um dado polinômio são ou não são passíveis de serem expressas por meio de uma fórmula por radicais. Dado o alto grau de complexidade da matemática exigida, não é possível traduzir, em termos simples, nem mesmo as ideias mais básicas da Teoria de Galois. Nos cursos superiores de Matemática, para se estudar a Teoria de Galois, em geral é preciso fazer um curso de Álgebra Abstrata como pré-requisito, e isto é um indicativo de que as ideias ali envolvidas não são nem de longe elementares. Galois concebeu os chamados grupos de permutação, mas a ideia de grupo é muito mais abrangente, no sentido de que várias outras estruturas matemáticas podem ser vistas como grupos. O estudo desses objetos deu origem a um novo ramo da Matemática, conhecido como Teoria dos Grupos.

Por fim, sobre a impossibilidade de resolver a quíntica, é possível, por meio de uma metáfora, dar uma ideia aproximada do seu significado: sabemos que a Matemática é uma linguagem usada para descrever uma vasta gama de fenômenos. Toda linguagem é expressa por meio de palavras, e uma das mais importantes classes de palavras no vocabulário da Matemática é a classe das funções. Funções podem ser combinadas de duas maneiras básicas: algebricamente (podemos somar, subtrair, multiplicar e dividir funções) ou por meio da operação de composição, quando "montamos" funções mais complexas a partir de outras, mais elementares, ou seja, compor é uma maneira de construir funções a partir de outras funções. Dizendo ainda de outra forma, a composição de funções acontece quando uma função "age" sobre outra, no sentido de que o objeto sobre o qual determinada função será aplicada é também uma função. Pois bem, a insolubilidade da quíntica equivale a uma declaração de que o vocabulário gerado pelas funções construídas apenas com potências e raízes é inadequado, ou insuficiente, para descrever, ou expressar, as soluções da equação polinomial do 5º grau. Essa explicação foi baseada em um trecho de [13](Capítulo 5, pág. 111).

Como vimos, Cardano e Ferrari atingiram, mesmo sem saber, o cume da montanha, no que concerne à resolução algébrica de equações polinomiais. O problema de se descobrir as raízes de um determinado polinômio tem importância central não apenas na Matemática, mas também em outras ciências, como a Engenharia e a Astronomia, por exemplo. Mesmo que estejamos lidando com funções de natureza mais complexa, quando é preciso calcular o valor dessas funções em algum ponto do seu domínio, quase sempre o que se faz é aproximar essas funções por funções polinomiais e então calcular a imagem do ponto através dessas funções polinomiais aproximadas. Na verdade, as funções polinomiais são as únicas que sabemos calcular. O problema inverso, de descobrir em que ponto do domínio uma função assume um determinado valor, acaba redundando no cálculo das raízes de polinômios. Por conta disso, os matemáticos desenvolveram métodos numéricos que permitem calcular as raízes de polinômios com o grau de precisão desejado, mesmo que não exista uma fórmula fechada para expressar essas raízes em termos dos coeficientes do polinômio. Esses algoritmos geralmente se utilizam de iterações e realimentações de valores puramente numéricos, e por isso quase sempre são implementados e executados em ambiente computacional, já que o mesmo cálculo, se feito de forma manual, seria extremamente penoso e estaria muito mais sujeito a erros. Um método numérico muito eficiente para o cálculo dos zeros de uma função é o método de Newton-Raphson, que utiliza ferramentas do Cálculo Diferencial. No segundo capítulo desse trabalho serão mostrados alguns exemplos do método de Newton-Raphson aplicado a equações cúbicas e quárticas.

Capítulo 2

Álgebra

Neste capítulo apresentaremos as demonstrações das soluções das equações do 3º e 4º graus, como também de outros fatos a elas relacionados. Apresentaremos, ainda, exemplos numéricos ilustrativos dessas soluções, e da aplicação do Método de Newton-Raphson na determinação de raízes de equações cúbicas e quárticas.

2.1 Transformação da cúbica geral na forma reduzida

Nesta seção mostraremos que qualquer equação cúbica pode ser expressa na forma $x^3 + px + q = 0$ mediante uma mudança de variável conveniente.

Consideremos a equação cúbica geral:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{2.1}$$

em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Fazendo $x = y + \delta$, com δ a ser determinado, segue que

$a(y+\delta)^3 + b(y+\delta)^2 + c(y+\delta) + d = 0$. Expandindo cada parcela e reagrupando os termos comuns, encontramos

$$ay^3 + \underbrace{(3a\delta + b)}_{b'} y^2 + \underbrace{(3a\delta^2 + 2b\delta + c)}_{c'} y + \underbrace{a\delta^3 + b\delta^2 + c\delta + d}_{d'} = 0.$$

Vamos impor que $3a\delta + b = 0$. Para tanto, tomemos $\delta = -\dfrac{b}{3a}$. Assim,

$$c' = 3a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + 2b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c = -\frac{b^2}{3a} + c$$

e

$$d' = a \cdot \left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b \cdot \left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + c \cdot \left(-\frac{b}{3a}\right) + d = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d.$$

Portanto, para $\delta = -\dfrac{b}{3a}$, transformamos a cúbica (2.1) na equação

$$ay^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right) y + \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) = 0.$$

Finalmente, multiplicando toda a equação por $\dfrac{1}{a}$, obtemos a forma reduzida:

$$y^3 + py + q = 0,$$

em que

$$\boxed{p = -\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a}} \quad \text{e} \quad \boxed{q = \frac{2}{27}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{d}{a}}.$$

2.2 Solução de Cardano para $y^3 + py = q$ $(p, q > 0)$

Veremos agora a ideia de Cardano para determinar uma solução para a equação

$$y^3 + py = q, \text{ com } p, q > 0. \tag{2.2}$$

Notemos o cuidado de Cardano ao manejar os termos de modo que os resultados intermediários sejam sempre quantidades positivas.

Consideremos a identidade $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > b > 0$, que pode ser escrita na forma

$$(a-b)^3 + 3ab(a-b) = a^3 - b^3.$$

Comparando esta última sentença com a equação (2.2), encontraremos uma solução se acharmos a e b tais que

$$\begin{cases} p = 3ab, \\ q = a^3 - b^3. \end{cases}$$

Neste caso, $y = a - b$ será uma solução de (2.2). Ora, de $p = 3ab$ segue que $p^3 = 27a^3b^3$ e, consequentemente,

$$\boxed{4a^3b^3 = \frac{4p^3}{27}}. \tag{2.3}$$

Por outro lado, de $q = a^3 - b^3$, temos que $q^2 = (a^3 - b^3)^2$ e daí

$$\boxed{a^6 - 2a^3b^3 + b^6 = q^2}. \tag{2.4}$$

Somando as equações (2.3) e (2.4), obtemos:

$a^6 + 2a^3b^3 + b^6 = q^2 + \dfrac{4p^3}{27}$ donde segue que $a^3 + b^3 = \sqrt{q^2 + \dfrac{4p^3}{27}}$.

Logo, temos o sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a^3 & + & b^3 & = & \sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}} \\ a^3 & - & b^3 & = & q \end{array}\right.$$

cuja solução é

$$a=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{e} \quad b=-\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Portanto, uma solução da equação cúbica na forma reduzida (2.2) é

$$y=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

2.3 Solução de Cardano para $y^3 = py + q$ $(p, q > 0)$

Esta secção é muito semelhante à anterior. Aqui Cardano lança mão de outra identidade, a fim de garantir quantidades positivas ao longo de todo o caminho que leva à solução.

Consideraremos agora a equação:

$$y^3 = py + q, \text{ com} p, q > 0. \tag{2.5}$$

Dessa vez faremos uso da identidade $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > b > 0$, que pode ser expressa na forma

$$(a+b)^3 = 3ab(a+b) + (a^3 + b^3).$$

Comparando esta última sentença com a equação (2.5), vemos que uma solução de (2.5) será $y = a + b$, em que a e b são tais que

$$\left\{\begin{array}{l} p = 3ab, \\ q = a^3 + b^3. \end{array}\right.$$

Agindo de modo análogo, segue de $p = 3ab$ que $p^3 = 27a^3b^3$ e, em consequência,

$$\boxed{4a^3b^3 = \frac{4p^3}{27}}\ . \tag{2.6}$$

Por outro lado, de $q = a^3 + b^3$, obtemos

$$\boxed{a^6 + 2a^3b^3 + b^6 = q^2}\ . \tag{2.7}$$

Subtraindo a equação (2.6) da equação (2.7), temos que

$a^6 - 2a^3b^3 + b^6 = q^2 - \dfrac{4p^3}{27}$, e então $a^3 - b^3 = \sqrt{q^2 - \dfrac{4p^3}{27}}$.

Logo, temos o sistema de equações

$$\begin{cases} a^3 & + & b^3 & = & q \\ a^3 & - & b^3 & = & \sqrt{q^2 - \dfrac{4p^3}{27}} \end{cases}$$

cuja solução é

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad \text{e} \qquad b = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Assim, como $y = a + b$, segue que

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

2.4 Solução da equação $y^3 + py + q = 0$, com $p, q \in \mathbb{R}$

Nesta secção buscaremos uma solução para a cúbica reduzida cujos coeficientes p e q são números reais quaisquer.

Seja a equação

$$y^3 + py + q = 0, \text{ com } p, q \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Seguindo o modus operandi das seções anteriores, tomemos a mesma identidade $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Reescrevendo-a na forma

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3,$$

e comparando com a equação (2.8), observamos que $y = a + b$ será uma solução desde que sejam satisfeitas as equações

$$p = -3ab \qquad \text{e} \qquad q = -(a^3 + b^3).$$

Dessas relações segue o sistema de equações

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = -q, \\ a^3 \cdot b^3 = -\left(\dfrac{p}{3}\right)^3. \end{cases}$$

Como é sabido, os números a^3 e b^3, sob as condições do sistema acima, são as raízes da equação quadrática $u^2 - (-q)u + \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = 0$. Assim,

$$u = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(q^2 + 4 \cdot \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Portanto,

$$a^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{e} \quad b^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Consequentemente,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

é a solução que procurávamos.

Denotaremos por D o "discriminante" $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ na expressão acima.

2.5 Critério para classificação das raízes da cúbica

Estudaremos agora a relação entre o sinal do "discriminante" D e os tipos de raízes da equação

$$y^3 + py + q = 0, \text{ com } p, q \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Sejam y_1, y_2, y_3 as raízes dessa equação. Das relações de Girard, temos que:

$y_1 + y_2 + y_3 = 0$,

$p = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3$ e

$q = -y_1y_2y_3$.

Da primeira relação obtemos que $-y_1 = y_2 + y_3$ e, usando isto na segunda relação encontramos que $p = y_1(y_2 + y_3) + y_2y_3 = -y_1^2 + y_2y_3$.

Assim, $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{y_1^2y_2^2y_3^2}{4} + \frac{(y_2y_3 - y_1^2)^3}{27}$.

1º caso: Três raízes reais, onde pelo menos duas são iguais.

Suponhamos que $y_1 = y_2$. Então de $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ decorre que $y_3 = -2y_1$ e, assim $D = \frac{y_1^2 \cdot y_1^2 \cdot (-2y_1)^2}{4} + \frac{(-2y_1 \cdot y_1 - y_1^2)^3}{27} = 0$.

Suponhamos agora que $y_1 = y_3$. De $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ decorre que $y_2 = -2y_1$ e então

$$D = \frac{y_1^2 \cdot (-2y_1)^2 \cdot y_1^2}{4} + \frac{((-2y_1) \cdot y_1 - y_1^2)^3}{27} = 0.$$

Finalmente, suponhamos que $y_2 = y_3$. De novo, como

$y_1 + y_2 + y_3 = 0$ segue que $y_1 = -2y_2$. Logo,

$$D = \frac{(-2y_2)^2 \cdot y_2^2 \cdot y_2^2}{4} + \frac{(y_2^2 - (-2y_2)^2)^3}{27} = 0.$$

Portanto, se a cúbica (2.9) possuir 3 raízes reais sendo duas delas idênticas, então $D = 0$.

2º caso: Duas raízes complexas e uma real.

Sejam $y_1 = m + ni$, $y_2 = m - ni$ e $y_3 = k$ as raízes da equação $y^3 + py + q = 0$, com $m, k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{R}^*$. Notemos que se um número complexo w é raiz de um polinômio com coeficientes reais, então seu conjugado, $\overline{w}$, também o é.

Mais uma vez, usando as relações de Girard, segue de $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ que $2m + k = 0$ e daí que $y_3 = -2m$.

Por outro lado, de $p = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = y_1y_2 + y_3(y_1 + y_2)$ segue que

$(m^2 + n^2) - 2m(2m) = n^2 - 3m^2$, donde obtemos que $\left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{n^2}{3} - m^2\right)^3$.

Finalmente, de $-q = y_1y_2y_3 = -2m(m^2 + n^2)$ segue que $\left(\frac{q}{2}\right)^2 = m^2(m^2 + n^2)^2$.

Assim,

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = m^2(m^2 + n^2)^2 + \left(\frac{n^2}{3} - m^2\right)^3 \\ &= \underbrace{3m^4n^2 + \frac{2}{3}m^2n^4}_{\geqslant 0} + \underbrace{\frac{n^6}{27}}_{>0}. \end{aligned}$$

Desde que $n \in \mathbb{R}^*$, concluímos que $D > 0$.

3º caso: Três raízes reais e distintas.

Sejam $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ as raízes da equação (2.9), e suponhamos que estas são reais e distintas.

Da primeira relação de Girard, $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ e assim $y_1^2 = (y_2 + y_3)^2$. Então

$$\begin{aligned} D &= \frac{y_1^2y_2^2y_3^2}{4} + \frac{(y_2y_3 - y_1^2)^3}{27} \\ &= \frac{((y_2 + y_3)y_2y_3)^2}{4} + \frac{(y_2y_3 - (y_2 + y_3)^2)^3}{27}. \end{aligned}$$

Chamemos y_2y_3 de R e $y_2 + y_3$ de S. Dessa forma,

$$\begin{aligned} D &= \frac{(RS)^2}{4} + \frac{(R - S^2)^3}{27} \\ &= \frac{1}{108} \cdot (4R^3 + 15R^2S^2 + 12RS^4 - 4S^6). \end{aligned}$$

Notemos que $S^2 - 2R = y_2^2 + y_3^2 > 0$ e façamos $S^2 - 2R = K$. Assim,

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{108} \cdot (4R^3 + 15R^2(K + 2R) + 12R(K + 2R)^2 - 4(K + 2R)^3) \\ &= \frac{1}{108} \cdot (50R^3 + 15KR^2 - 12K^2R - 4K^3) \\ &= \frac{50}{108} \cdot \left(R + \frac{2}{5}K\right)^2 \cdot \left(R - \frac{1}{2}K\right) . \end{aligned}$$

Analisemos os fatores desse produto. Afirmamos que $R-\frac{1}{2}K < 0$. De fato, se ocorresse o contrário, então $2R \geqslant K$ e como $K = S^2 - 2R$, teríamos $4R \geqslant S^2$. Em termos de raízes, $4y_1y_3 \geqslant (y_2 + y_3)^2$, donde concluiríamos que $(y_2 - y_3)^2 \leqslant 0$. Mas isto contradiz o fato de que $y_2 \neq y_3$.

Sabemos que $\left(R + \frac{2}{5}K\right)^2 \geqslant 0$. Analisemos sob que condições esse fator se anula. Nesse caso, $R+\frac{2}{5}K = 0$ e usando o fato de que $K = S^2 - 2R$, segue que $R+2S^2 = 0$. Em termos de raízes temos que $y_2y_3+2(y_2+y_3)^2 = 0$ e, consequentemente, $2y_2^2+5y_2y_3+2y_3^2 = 0$.

Fixemos y_3. Então a equação quadrática possui as raízes $y_2 = -\frac{1}{2}y_3$ ou $y_2 = -2y_3$.

Como $y_1 = -(y_2+y_3)$, pela primeira relação de Girard, segue que $y_1 = -(y_2-2y_2) = y_2$, ou $y_1 = -(-2y_3 + y_3) = y_3$. Mas isto contradiz o fato de que as raízes são distintas.

Como a equação $2y_2^2 + 5y_3y_2 + 2y_3^2 = 0$ é simétrica em relação a y_2 e y_3, obteríamos o mesmo resultado caso fixássemos y_2.

Dessa maneira, concluímos que $R + \frac{2}{5}K$ nunca se anula quando as raízes são reais e distintas e, portanto, $\left(R + \frac{2}{5}K\right)^2 > 0$.

Assim, $D < 0$.

2.6 Exemplos numéricos de cúbicas

Nesta secção daremos alguns exemplos que aplicam os casos estudados anteriormente. Recordemos que denotamos a cúbica geral (2.1) por $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$.

Exemplo 1

Determine as soluções da equação $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$.

Para esta equação, temos que

$$\delta = -\frac{1}{3} \cdot \frac{b}{a} = \frac{5}{3},$$

$$p = -\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} = -\frac{1}{3} \cdot (-5)^2 + 8 = -\frac{1}{3},$$

$$q = \frac{2}{27}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{d}{a} = \frac{2}{27}\cdot(-5)^3 - \frac{1}{3}\cdot(-5)\cdot 8 + (-6) = -\frac{52}{27} \quad \text{e}$$

$$D = \left(-\frac{26}{27}\right)^2 + \left(-\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{25}{27} > 0.$$

Logo, fazendo a mudança de variável $x = y + \frac{5}{3}$, obtemos a equação $y^3 - \frac{1}{3}y - \frac{52}{27} = 0$. Uma solução dessa equação é dada por

$$y = \sqrt[3]{\frac{26}{27} + \sqrt{\frac{25}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{26}{27} - \sqrt{\frac{25}{27}}} = \frac{4}{3}.$$

Em consequência, $x = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3$ é uma solução da equação original. Para determinar as outras raízes, lembremos que

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{e}$$

$-\frac{d}{a} = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, donde $x_2 + x_3 = 2$ e $x_2 \cdot x_3 = 2$.

Portanto, x_2 e x_3 são as raízes da equação $x^2 - 2x + 2 = 0$ cujas soluções são $x_2 = 1 + i$ e $x_3 = 1 - i$.

Exemplo 2

Determine as soluções da equação $8x^3 + 12x^2 + 2x - 5 = 0$.

$$\delta = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$p = -\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2},$$

$$q = \frac{2}{27}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} + \left(-\frac{5}{8}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{e}$$

$$D = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{25}{432} > 0.$$

Fazendo a mudança de variável $x = y - \frac{1}{2}$, obtemos a equação $y^3 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0$, sendo que uma de suas soluções é

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{25}{432}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{25}{432}}} = 1.$$

Como $x = y + \delta$, segue que $x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ é uma solução da equação original.

Para achar as outras raízes, procedemos como no exemplo anterior, e concluímos que x_2 e x_3 são tais que $x_2 + x_3 = -2$ e $x_2 \cdot x_3 = \frac{5}{4}$ e, portanto, são as raízes da equação $x^2 + 2x + \frac{5}{4} = 0$, cujas soluções são $x_2 = -1 + \frac{1}{2}i$ e $x_3 = -1 - \frac{1}{2}i$.

Exemplo 3

Consideremos agora a equação $x^3+4x^2-91x-490=0$ e determinemos as suas raízes. Neste caso,

$\delta = -\frac{1}{3}\cdot(4) = -\frac{4}{3}$,

$p = -\frac{1}{3}\cdot(4)^2+(-91) = -\frac{289}{3}$,

$q = \frac{2}{27}\cdot(4)^3 - \frac{1}{3}\cdot(4)\cdot(-91)+(-490) = -\frac{9826}{27}$ e

$D = \left(-\frac{4913}{27}\right)^2 + \left(-\frac{289}{9}\right)^3 = 0.$

Assim, através da mudança de variável $x = y - \frac{4}{3}$ obtemos a equação reduzida $y^3 - \frac{289}{3}y - \frac{9826}{27} = 0$. Resolvendo-a pela fórmula de Cardano, encontramos $y = \sqrt[3]{\frac{4913}{27}+\sqrt{0}} + \sqrt[3]{\frac{4913}{27}-\sqrt{0}} = \frac{2\cdot 17}{3}$. Logo, $x = \frac{34}{3} - \frac{4}{3} = 10$.

Agindo de maneira análoga ao exemplo anterior, temos que $x_2+x_3=-14$ e $x_2\cdot x_3 = 49$. x_2 e x_3 são, dessa maneira, as raízes da equação $x^2+14x+49=0$ cujas soluções são $x_2=x_3=-7$.

Exemplo 4

Neste exemplo recaímos no caso irredutível, ou seja, no caso em que a fórmula de Cardano não funciona, no sentido de que ela fornece uma raiz complexa. Consideremos a equação $x^3-13x^2+15x+189=0$.

$\delta = -\frac{1}{3}\cdot\frac{b}{a} = -\frac{1}{3}\cdot(-13) = -\frac{13}{3}$,

$p = -\frac{1}{3}\cdot(-13)^2+15 = -\frac{124}{3}$,

$q = \frac{2}{27}\cdot(-13)^3 - \frac{1}{3}\cdot(-13)\cdot 15+189 = \frac{2464}{27}$ e

$D = \left(\frac{1232}{27}\right)^2 + \left(-\frac{124}{9}\right)^3 = -\frac{1600}{3} < 0.$

Fazendo $x = y - \frac{13}{3}$ obtemos a equação reduzida $y^3 - \frac{124}{3}y - \frac{2464}{27} = 0$. Uma das suas soluções é dada por

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{-\frac{1232}{27}+\sqrt{-\frac{1600}{3}}} + \sqrt[3]{-\frac{1232}{27}-\sqrt{-\frac{1600}{3}}} \\ &= \sqrt[3]{-\frac{1232}{27}+\frac{40}{3}\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{-\frac{1232}{27}-\frac{40}{3}\sqrt{-3}}\,. \end{aligned}$$

2.7 A solução algébrica de Viète

Exibiremos agora as ideias de Viète para solucionar a cúbica reduzida.

Consideremos a equação $y^3 + py + q = 0$, em que $p, q \in \mathbb{R}$, e façamos $x = z - \dfrac{p}{3z}$, com $z \neq 0$. Então, de

$\left(z - \dfrac{p}{3z}\right)^3 + p\left(z - \dfrac{p}{3z}\right) + q = 0$, obtemos $(z^3)^2 - \dfrac{p^3}{27} + qz^3 = 0$.

Assim, tomando $z^3 = \sigma$, segue que$\sigma^2 + q\sigma - \dfrac{p^3}{27} = 0$, donde

$\sigma = -\dfrac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}$. Em consequência, $z = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}$.

Portanto,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}.$$

Essa fórmula equivale àquela descoberta por del Ferro. Vejamos por quê.

Suponhamos que, antes da raiz quadrada, usemos o sinal negativo, ou seja,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}.$$

Olhando apenas para o termo fracionário, multiplicamos tanto o numerador quanto o denominador por $\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
-\frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}} &= -\frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}} \cdot \frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}} \\
&= -\frac{p \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}{3\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^2}}
\end{aligned}$$

$$= \quad -\frac{p \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}{3\sqrt[3]{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$= \quad +\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Assim,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

que é a mesma fórmula obtida por del Ferro.

Obviamente, obteríamos o mesmo resultado se escolhêssemos o sinal positivo antes da raiz quadrada.

2.8 A solução trigonométrica de Viète

Nesta secção exporemos a solução dada por Viète para a cúbica reduzida, por meio da Trigonometria.

Consideremos a equação $y^3 + py + q = 0$, com $p, q \in \mathbb{R}$.

Fazendo a substituição $y = k\cos\theta$, com $k \neq 0$, obtemos

$(k\cos\theta)^3 + p(k\cos\theta) + q = 0$ e daí que $k^3\cos^3\theta + pk\cos\theta + q = 0$. Logo,

$$\cos^3\theta + \frac{p}{k^2}\cos\theta + \frac{q}{k^3} = 0. \tag{2.10}$$

Ora, como $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ segue que

$$\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{\cos(3\theta)}{4} = 0. \tag{2.11}$$

As equações (2.10) e (2.11) têm a mesma estrutura. Logo, podemos fazer as seguintes identificações:

$$\frac{p}{k^2} = -\frac{3}{4} \quad \text{e} \quad \frac{q}{k^3} = -\frac{\cos(3\theta)}{4}.$$

Da primeira equação temos que $k = \pm 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$ e da segunda concluímos que

$\cos(3\theta) = \pm \dfrac{\left(\dfrac{q}{2}\right)}{\sqrt{\left(-\dfrac{p}{3}\right)^3}}.$

Então vem o passo não algébrico para determinar θ em função de p e q:

$$\theta_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\arccos\left(-\frac{4q}{k^3}\right) + (n-1) \cdot 2\pi \text{ rad} \right), \text{ com } n \in \{1, 2, 3 \cdots\}. \tag{2.12}$$

De posse do valor de θ_n, calculamos $\cos\theta_n$ (outro passo não algébrico) e, finalmente, calculamos $y_n = k\cos\theta_n$.

Vejamos alguns exemplos da aplicação desse método.

Exemplo 1

Consideremos a equação $x^3 - 14x^2 + 59x - 70 = 0$. Então

$p = -\dfrac{1}{3} \cdot (-14)^2 + 59 = -\dfrac{19}{3}$,

$q = \dfrac{2}{27} \cdot (-14)^3 - \dfrac{1}{3} \cdot (-14) \cdot 59 + (-70) = \dfrac{56}{27}$, e

$\delta = -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{b}{a}\right) = \dfrac{14}{3}$. Fazendo $x = y + \dfrac{14}{3}$, obtemos a equação reduzida

$y^3 - \dfrac{19}{3}y + \dfrac{56}{27} = 0.$

Agora apliquemos o método de Viète, tomando $y = k\cos\theta$, onde

$k = \pm 2\sqrt{-\dfrac{1}{3} \cdot \left(-\dfrac{19}{3}\right)} = \pm 2\sqrt{\dfrac{19}{3^2}} = \pm\dfrac{2}{3}\sqrt{19} \approx \pm 2,905932629027.$

Determinemos os valores de θ correspondentes às três raízes.

Para $n = 1$, temos

$\cos(3\theta_1) = -\dfrac{4q}{k^3} \approx \dfrac{-4 \cdot \dfrac{56}{27} + 0 \cdot 2\pi \text{ rad}}{2,905932629027^3} \approx -0,3380863446513,$

donde $\theta_1 \approx \dfrac{1}{3}\arccos(-0,338086344651) \approx 0,63855969609$ rad e, consequentemente,

$\cos\theta_1 \approx 0,802955068547.$

Assim, $y_1 \approx (2,905932629027) \cdot (0,802955068547) \approx 2,33333333333.$

As outras raízes são determinadas fazendo-se $n = 2$ e $n = 3$ na fórmula (2.12). Dessa forma, obtemos

$\theta_2 \approx 2,7329547984$ rad e $\theta_3 \approx 4,827349900$ rad, que fornecem, respectivamente,

$y_2 \approx -2,6666666666666$ e $y_3 \approx 0,3333333333333.$

As raízes da equação serão, portanto,

$x_1 = \dfrac{14}{3} + 2,33333333333 \approx 7,$

$x_2 = \dfrac{14}{3} - 2,6666666666666 \approx 2$ e

$x_3 = \dfrac{14}{3} + 0,3333333333333 \approx 5.$

Vejamos agora dois casos em que o método de Viète falha.

Exemplo 2

Consideremos a equação $x^3 - 10x^2 + 34x - 40 = 0$.

Transformando essa equação para a forma reduzida, temos que

$p = \dfrac{2}{3}$; $\quad q = -\dfrac{20}{27}$ e $\delta = \dfrac{10}{3}$, donde, para $x = y + \dfrac{10}{3}$, concluímos que $y^3 + \dfrac{2}{3}y - \dfrac{20}{27} = 0$.

Desde que $k = \pm 2\sqrt{-\dfrac{1}{3}p} = \pm 2\sqrt{-\dfrac{2}{9}} = \pm\dfrac{2}{3}\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$, segue que não podemos aplicar o método de Viète, uma vez que k precisa ser um número real, já que $\cos 3\theta$, que é real, é calculado por meio de k.

Exemplo 3

Para a equação $x^3 - x^2 - 32x - 70 = 0$, transformando-a para a forma reduzida, encontramos

$y^3 - \dfrac{97}{3}y - \dfrac{2180}{27} = 0$, em que $x = y + \dfrac{1}{3}$. Assim,

$$k = \pm 2\sqrt{-\frac{1}{3}p} = \pm 2\sqrt{-\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{97}{3}\right)} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{97} \approx 6,565905201197$$

e

$$\cos(3\theta) = \frac{-4q}{k^3} = \frac{\dfrac{8720}{27}}{\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{97}\right)^3} \approx 1,140955999995.$$

Esta equação trigonométrica não tem solução, pois, como sabemos, para qualquer que seja o ângulo α, devemos ter:

$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Logo, também neste exemplo o método de Viète revelou-se incapaz de resolver uma cúbica. Sob que condições o método de Viète funciona?

Como $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$, da relação $k = \pm 2\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$ segue que $p < 0$.

Além disso, devemos ter

$-1 \leqslant \cos(3\theta) \leqslant 1$, ou seja $|\cos(3\theta)| \leqslant 1$. Então $\cos^2(3\theta) \leqslant 1$ e daí

$\left(\dfrac{\left(\frac{q}{2}\right)}{\pm\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}}\right)^2 \leqslant 1$. Portanto, $\dfrac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{\left(\frac{p}{3}\right)^3} \geqslant -1$ e, em consequência

$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \leqslant 0 \Rightarrow D \leqslant 0.$

Dessa maneira, o método funciona quando $p < 0$ e $D \leqslant 0$. Isso inclui o caso em que a fórmula de Cardano "emperra": quando $D < 0$.

2.9 Uma maneira "rápida" de resolver uma cúbica

Esta solução foi encontrada por Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira, hoje doutor em Matemática pelo IMPA, mas que, à época, contava com apenas 14 anos de idade. Ela foi publicada na RPM (Revista do Professor de Matemática) nº 25, em 1994. Nas palavras do Prof. Elon Lages Lima, "(...)*a mais simples e menos artificial das deduções das fórmulas resolutivas das equações do terceiro e quarto grau que conheço*". Aqui exporemos a técnica aplicada à equação cúbica, de maneira resumida.

Consideremos a sentença

$$y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}.$$

Elevando ambos os membros à terceira potência, vem:

$$y^3 = x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1x_2}\underbrace{\left(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}\right)}_{y} = x_1 + x_2 + \left(3\sqrt[3]{x_1x_2}\right)\cdot y.$$

Se denotarmos $x_1 + x_2$ por S e x_1x_2 por P, teremos que

$$y^3 - 3\sqrt[3]{P}y - S = 0.$$

Comparando esta equação com a cúbica reduzida $y^3 + py + q = 0$, percebemos que elas têm a mesma estrutura. Logo, podemos fazer as seguintes identificações:

$$p = -3\sqrt[3]{P} \quad \text{e} \quad q = -S,$$

de forma que temos o sistema

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{p^3}{27}, \\ \\ x_1 + x_2 = -q. \end{cases}$$

Os números x_1 e x_2, sob as condições acima, são as raízes da equação

$$x^2 - (-q)x + \left(-\frac{p^3}{27}\right) = 0,$$

a saber $x_{1,2} = -\dfrac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}$. Como $y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$, segue que

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Embora seja a mesma fórmula encontrada por del Ferro, a maneira como foi deduzida delineia um roteiro bem simples para se resolver uma equação cúbica geral:

1. Transformar a cúbica geral na sua forma reduzida: $y^3 + py + q = 0$;
2. Resolver a equação quadrática associada $x^2 + qx - \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 = 0$;
3. Escrever a solução da cúbica reduzida: $y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$, em que x_1 e x_2 são as raízes da equação quadrática associada;
4. Calcular as raízes da cúbica original: $x = y - \dfrac{b}{3a}$.

2.10 Solução geral usando números complexos

Dado um número complexo $z = a + bi$, se tentarmos encontrar, por meios algébricos, um outro número complexo $w = x + yi$ tal que $w^3 = z$, seremos levados ao sistema de equações:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = a, \\ -y^3 + 3x^2y = b. \end{cases}$$

A simplicidade desse sistema é apenas aparente, e tentar resolvê-lo envolve muitas dificuldades. Quando se consegue separar uma das incógnitas, x ou y, as equações resultantes são sempre de grau maior que 3. Isto inviabiliza o cálculo algébrico dessas "raízes cúbicas".

Por conta disto, o caso irredutível, aquele em que $D < 0$, só pode ser resolvido por meios não algébricos, já que este caso exige a extração das raízes cúbicas de números complexos.

Um exemplo de equação cúbica do tipo $D < 0$ é a equação examinada por Cardano:

$$x^3 - 15x - 4 = 0,$$

cuja solução é

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Essa solução pode ser escrita como

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}.$$

Representando $\sqrt{-1}$ pelo símbolo i (unidade imaginária), vem que

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}.$$

Os números complexos que aparecem dentro das raízes cúbicas são o que hoje conhecemos como números complexos conjugados.

De uma forma geral, dado um número complexo $z = a + bi$, seu conjugado, denotado por $\overline{z}$, é o complexo $\overline{z} = a - bi$, em que $a, b \in \mathbb{R}$.

Veja na figura (2.1) a representação geométrica de dois complexos conjugados.

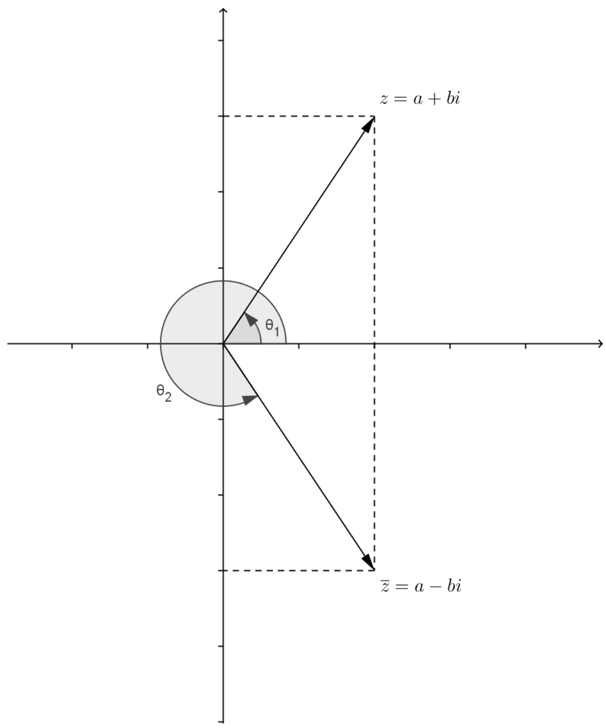


Figura 2.1: z e $\overline{z}$

Notemos que, nesta figura, $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$.

Da Teoria dos Números Complexos, sabemos que um complexo da forma $z = a + bi$ pode ser escrito na forma trigonométrica

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

em que $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\qquad \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\qquad \sin\theta = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Assim na figura acima, temos que

$$z_1 = \rho(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \qquad \text{e} \qquad z_2 = \rho(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

Como $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$, segue que

$$z_2 = \rho(\cos(2\pi - \theta_1) + i\sin(2\pi - \theta_1)) = \rho(\cos\theta_1 + i(-\sin\theta_1)) = \rho(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1).$$

A forma trigonométrica permite calcular as raízes n-ésimas ($n \in \{2, 3, 4, \cdots\}$) de um número complexo, como ensinaram Euler e De Moivre:

$$\sqrt[n]{z}_{(k)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right),$$

em que $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$.

Em particular, para $n = 3$,

$\sqrt[3]{z}_{(k)} = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\cdot k\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\cdot k\right)\right)$, de forma que

$\sqrt[3]{z}_{(0)} = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)$,

$\sqrt[3]{z}_{(1)} = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$, e

$\sqrt[3]{z}_{(2)} = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)\right)$.

Extraindo as raízes cúbicas de dois complexos conjugados teremos, portanto,

$\sqrt[3]{z}_{(k)} = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right)\right)$ e

$\sqrt[3]{\overline{z}}_{(k)} = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right)\right)$,

para $k \in \{0, 1, 2\}$. Somando esses pares de raízes cúbicas, temos

$\sqrt[3]{z}_{(k)} + \sqrt[3]{\overline{z}}_{(k)} = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right)$.

A fórmula de Cardano, quando aplicada à equação $y^3 + py + q = 0$, cujas três raízes são reais e distintas, leva à solução

$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$, em que $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$.

Essa solução pode ser escrita na forma

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \left(\sqrt{-D}\right)i} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \left(\sqrt{-D}\right)i}.$$

As expressões que aparecem dentro dessas raízes cúbicas são, portanto, números complexos conjugados, já que tanto $-\frac{q}{2}$ quanto $\sqrt{-D}$ são números reais.

Pelo que vimos acima, essa soma deve ser

$y_k = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right)$, com $k \in \{0, 1, 2\}$ e

$\rho = \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{-D}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$ e

$$\theta = \arccos\left(\frac{-\dfrac{q}{2}}{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\right).$$

Uma vez calculados ρ e θ, as raízes serão, portanto,

$$y_1 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \qquad y_2 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right) \text{ e } \qquad y_3 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right).$$

Notemos que $\sqrt[3]{\rho} = \sqrt[3]{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[6]{\left(-\frac{p}{3}\right)^3} = \sqrt{-\dfrac{p}{3}}.$

Se olharmos atentamente para esse resultado, perceberemos que é o mesmo obtido por Viète, por meio da substituição $y = k\cos\theta$ na cúbica reduzida, uma conquista admirável, uma vez que Viète se antecipou a Euler em cerca de dois séculos, embora tenha chegado a este resultado, compreensivelmente, não da forma rigorosa e dedutiva empreendida por Euler.

Pelo que foi exposto acima, o cálculo das raízes da cúbica reduzida no caso $D < 0$ depende, basicamente, do valor de $\cos(\theta/3)$. Já que o valor do $\cos\theta$ é conhecido, será que é possível expressar $\cos(\theta/3)$ em função de $\cos\theta$, por um caminho puramente algébrico? Vejamos como isso pode ser feito.

Já mencionamos, anteriormente, que vem da Trigonometria a seguinte relação:

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Fazendo $\alpha = \dfrac{\theta}{3}$, segue que

$$\cos\theta = \cos\left(3\cdot\frac{\theta}{3}\right) = 4\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \text{ donde } \cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{3}{4}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{\cos\theta}{4} = 0.$$

Esta é uma cúbica reduzida na incógnita $\cos\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$, com $p = -\dfrac{3}{4}$ e $q = -\dfrac{\cos\theta}{4}$.

Desde que $D = \left(-\dfrac{\cos\theta}{8}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{4}\right)^3 = -\left(\dfrac{\sin\theta}{8}\right)^2 \leqslant 0,$

temos que, exceto nos casos em que $\cos\theta = 1$ ou $\cos\theta = -1$, não podemos determinar $\cos(\theta/3)$ em função de $\cos\theta$ por meios puramente algébricos, sendo necessário recorrer aos métodos do Cálculo Diferencial para calcular $\cos(\theta/3)$.

2.11 A solução de Ferrari para a quártica

Nesta secção faremos o estudo da equação polinomial do 4º grau. De início demonstraremos como transformar a quártica geral na sua forma reduzida e em seguida apresentaremos a solução desta última, descoberta por Ferrari.

Consideremos a equação polinomial geral do 4º grau, também conhecida como quártica:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

em que a, b, c, d, e e são constantes reais e $a \neq 0$. Como foi feito para a determinação de uma solução da equação cúbica, faremos a mudança de variável $x = y + \delta$, com δ a ser determinado de forma conveniente. Assim,

$$a(y+\delta)^4 + b(y+\delta)^3 + c(y+\delta)^2 + d(y+\delta) + e = 0.$$

Desenvolvendo os produtos e reagrupando adequadamente, obtemos a equação

$$ay^4 + \underbrace{(4a\delta + b)}_{b'}y^3 + \underbrace{(6a\delta^2 + 3b\delta + c)}_{c'}y^2 + \underbrace{(4a\delta^3 + 3b\delta^2 + 2c\delta + d)}_{d'}y +$$
$$+ \underbrace{a\delta^4 + b\delta^3 + c\delta^2 + d\delta + e}_{e'} = 0.$$

Tomaremos δ de forma que que $b' = 0$, ou seja, $\delta = -\dfrac{b}{4a}$. Substituindo este valor na equação acima, obtemos a equação

$$ay^4 + \left(-\frac{3b^2}{8a} + c\right)y^2 + \left(\frac{b^3}{8a^2} - \frac{bc}{2a} + d\right)y + \left(-\frac{3b^4}{256a^3} + \frac{b^2c}{16a^2} - \frac{bd}{4a} + e\right) = 0.$$

Multiplicando toda a equação por $\dfrac{1}{a}$, segue que

$$y^4 + \underbrace{\left[-\frac{3}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)\right]}_{p}y^2 + \underbrace{\left[\frac{1}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{d}{a}\right)\right]}_{q}y +$$
$$+ \underbrace{\left[-\frac{3}{256}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \frac{1}{16}\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{d}{a}\right) + \left(\frac{e}{a}\right)\right]}_{r} = 0,$$

que está na forma reduzida $y^4 + py^2 + qy + r = 0$.

A ideia de Ferrari foi a de reagrupar adequadamente os termos em ambos os lados da quártica reduzida, de modo a obter trinômios quadrados perfeitos em cada um dos lados. Se isso fosse possível, bastaria extrair as raízes quadradas de ambos os membros e, com isso, recair-se-ia num par de equações quadráticas. Esse elegante argumento de fato funcionou, como mostraremos abaixo.

Da expressão $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ segue que $y^4 + py^2 + r = -qy$ e somando $\alpha y + \beta$ a ambos os membros (onde α e β serão determinados a posteriori) encontramos que

$$y^4 + (p+\alpha)y^2 + (r+\beta) = \alpha y^2 - qy + \beta.$$

A fim de esses trinômios sejam quadrados perfeitos, é necessário e suficiente que os respectivos discriminantes sejam iguais a zero, ou seja

$$(p+\alpha)^2 - 4(r+\beta) = 0 \tag{2.13}$$

e

$$q^2 - 4\alpha\beta = 0. \tag{2.14}$$

De $q^2 - 4\alpha\beta = 0$ segue que $\beta = \dfrac{q^2}{4\alpha}$. Sustituindo β por $\dfrac{q^2}{4\alpha}$, na equação (2.13), concluímos que $p^2 + 2p\alpha + \alpha^2 - 4r - \dfrac{q^2}{\alpha} = 0$, e rearrumando em função de α, temos que

$$\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0.$$

Esta última equação é uma cúbica na incógnita α. Como já sabemos resolver as cúbicas, podemos achar α. Encontrando α, poderíamos calcular β, mas isso não é necessário. Pode parecer estranho não precisar conhecer o valor de β, mas isso fica claro quando escrevemos os trinômios na sua forma fatorada:

$$\left(y^2 + \frac{p+\alpha}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\alpha}\left(y - \frac{q}{2\alpha}\right)\right)^2.$$

Notemos que β não aparece nas formas fatoradas dos trinômios.

Extraindo as raízes quadradas de ambos os membros, segue que

$$y^2 + \frac{p+\alpha}{2} = \pm\sqrt{\alpha}\left(y - \frac{q}{2\alpha}\right).$$

Assim temos um par de equações quadráticas:

$$y^2 - \sqrt{\alpha}y + \left(\frac{p+\alpha}{2} + \frac{q\sqrt{\alpha}}{2\alpha}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad y^2 + \sqrt{\alpha}y + \left(\frac{p+\alpha}{2} - \frac{q\sqrt{\alpha}}{2\alpha}\right) = 0.$$

Embora seja tentador buscar combinar as equações acima a fim de obter relações mais simples entre as variáveis envolvidas, não podemos fazê-lo, já que ocorre **ou** uma situação **ou** outra. Nesse caso o "ou" é exclusivo.

Cada uma das equações quadráticas acima fornece duas raízes da quártica reduzida. Assim, ao resolver as duas equações quadráticas obtemos as 4 raízes da quártica reduzida. Para calcular as raízes da quártica original, basta lembrar que $x = y - \dfrac{b}{4a}$.

O método empregado por Ferrari nos mostra que existe um caminho estritamente algébrico que leva às raízes da quártica. No entanto, como ele depende da solução de uma cúbica, pode ser que a cúbica em questão não seja passível de solução algébrica (casus irreducibilis), e desse modo, também não teríamos como resolver algebricamente a quártica associada.

Segue abaixo um resumo da solução de Ferrari para $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$:

1. Transformar a quártica geral numa quártica reduzida ($y^4 + py^2 + qy + r = 0$), fazendo $x = y - \dfrac{b}{4a}$;
2. Resolver a cúbica associada: $\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0$;
3. Resolver as equações quadráticas:

$$y^2 - \sqrt{\alpha}y + \left(\frac{p+\alpha}{2} + \frac{q\sqrt{\alpha}}{2\alpha}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad y^2 + \sqrt{\alpha}y + \left(\frac{p+\alpha}{2} - \frac{q\sqrt{\alpha}}{2\alpha}\right) = 0;$$

4. Calcular as raízes da quártica geral: $x = y - \dfrac{b}{4a}$.

Não resta dúvida de que se trata de um método bastante trabalhoso, mas nada que um computador não possa resolver numa fração de segundo.

2.12 Exemplos numéricos de quárticas

Aqui daremos exemplos aplicativos da ideia de Ferrari desenvolvida na secção anterior.

Exemplo 1

Consideremos a equação $x^4 - 6x^3 - 31x^2 + 204x - 252 = 0$. Comparando-a com a forma geral $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ e usando as fórmulas obtidas para δ, p, q e r segue que

$$\delta = \frac{3}{2}, \qquad p = -\frac{89}{2}, \qquad q = 84 \qquad \text{e} \qquad r = -\frac{495}{16}.$$

Logo, a cúbica relacionada é $\alpha^3 - 89\alpha^2 + 2104\alpha - 7056 = 0$, que é uma cúbica do tipo $D < 0$.

Resolvendo-a pelo método de Viète (**secção 2.8**), encontramos as seguintes soluções:

$\alpha_1 = 49$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 36$.

Se escolhermos $\alpha = \alpha_1 = 49$, as equações quadráticas associadas serão:

$y^2 + 7y - \dfrac{15}{4} = 0$ cujas raízes são $y_1 = \dfrac{1}{2}$ e $y_2 = -\dfrac{15}{2}$

e

$y^2 - 7y + \dfrac{33}{4} = 0$ cujas raízes são $y_3 = \dfrac{11}{2}$ e $y_4 = \dfrac{3}{2}$.

Assim, como $x = y + \delta$, temos que:

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2, \qquad x_2 = -\frac{15}{2} + \frac{3}{2} = -6,$$

$$x_3 = \frac{11}{2} + \frac{3}{2} = 7 \qquad \text{e} \qquad x_4 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3.$$

Caso tivéssemos escolhido $\alpha = 4$ ou $\alpha = 36$, obteríamos as mesmas raízes, o que mostra a independência do resultado em relação à escolha de α.

Exemplo 2

Trabalhemos agora com a equação $x^4 - 14x^3 + 79x^2 - 234x + 338 = 0$. Temos que

$$\delta = \frac{7}{2}, \qquad p = -\frac{11}{2}, \qquad q = -24 \quad \text{e} \quad r = -\frac{585}{16}.$$

A cúbica relacionada é $\alpha^3 + 11\alpha^2 - 116\alpha - 576 = 0$, uma cúbica do tipo $D < 0$.

Mais uma vez, resolvendo-a pelo método de Viète, obtemos

$\alpha_1 = 9$, $\alpha_2 = -16$, e $\alpha_3 = -4$.

Escolhendo $\alpha = \alpha_1 = 9$, as equações quadráticas associadas serão:

$$y^2 + 3y - \frac{43}{4} = 0 \quad \text{cujas raízes são} \quad y_1 = -\frac{3}{2} + 3i \quad \text{e} \quad y_2 = -\frac{3}{2} - 3i,$$

e

$$y^2 - 3y + \frac{33}{4} = 0 \quad \text{cujas raízes são} \quad y_3 = \frac{3}{2} + i \quad \text{e} \quad y_4 = \frac{3}{2} - i.$$

Assim, como $x = y + \delta$, temos que

$$x_1 = -\frac{3}{2} + 3i + \frac{7}{2} = 2 + 3i, \qquad x_2 = -\frac{3}{2} - 3i + \frac{7}{2} = 2 - 3i,$$

$$x_3 = \frac{3}{2} + i + \frac{7}{2} = 5 + i \qquad \text{e} \qquad x_4 = \frac{3}{2} - i + \frac{7}{2} = 5 - i.$$

Será que poderíamos escolher outro valor para α, mesmo sabendo que as outras opções são números negativos?

Bem, a questão é que nas equações quadráticas associadas, α aparece sob uma raiz quadrada e, se escolhêssemos α negativo, os coeficientes das quadráticas tornar-se-iam números complexos. Se prosseguíssemos por este caminho, em dado momento seria necessário extrair uma raiz quadrada de um número complexo, que embora não seja algebricamente impossível, requer exaustivos cálculos, que inclusive possuem muitas ramificações. Desse modo, escolher um α negativo, embora seja um procedimento legítimo, tornaria as contas demasiada e desnecessariamente complicadas.

Portanto, sempre que pudermos, escolheremos um valor positivo para α.

Exemplo 3

Agora consideremos a equação $16x^4 - 48x^3 - 195x^2 + 214x - 195 = 0$. Neste caso, temos que

$$\delta = \frac{3}{4}, \qquad p = -\frac{249}{16}, \qquad q = -\frac{265}{32} \quad \text{e} \quad r = -\frac{1275}{128}.$$

A equação cúbica relacionada será

$\alpha^3 - \dfrac{249}{8}\alpha^2 + \dfrac{72201}{256}\alpha - \dfrac{70225}{1024} = 0.$ Esta é uma cúbica do tipo $D > 0$.

Resolvendo-a pela fórmula de Cardano (seções 2.1 e 2.4), encontramos as raízes

$\alpha_1 = \dfrac{1}{4}$, $\alpha_2 = \dfrac{247}{16} + 6i$ e $\alpha_3 = \dfrac{247}{16} - 6i$.

Escolhendo $\alpha = \alpha_1 = \dfrac{1}{4}$, as equações quadráticas associadas serão:

$y^2 + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{5}{8} = 0$ cujas raízes são $y_1 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}i$ e $y_2 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}i$,
e
$y^2 - \dfrac{1}{2}y - \dfrac{255}{16} = 0$ cujas raízes são $y_3 = \dfrac{17}{4}$ e $y_4 = -\dfrac{15}{4}$.

Assim, como $x = y + \delta$, temos que:

$x_1 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}i + \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}i$, $\quad x_2 = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4}i + \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}i$,

$x_3 = \dfrac{17}{4} + \dfrac{3}{4} = 5$ e $\quad x_4 = -\dfrac{15}{4} + \dfrac{3}{4} = -3$.

2.13 Uma resolução alternativa para a quártica

Na seção **2.9** foi mostrada a maneira como o matemático Carlos G.T.A. Moreira deduziu a fórmula resolutiva da cúbica. Naquela oportunidade, lançando mão de uma ideia parecida, ele também achou um interessante caminho para solucionar a quártica, que ora apresentamos, de maneira resumida.

Consideremos a equação do 3º grau

$$x^3 - Sx^2 + S_d x - P = 0. \tag{2.15}$$

Sejam x_1, x_2 e x_3 as suas raízes. Das relações de Girard segue que

$$x_1 + x_2 + x_3 = S, \qquad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = S_d \quad \text{e} \quad x_1x_2x_3 = P.$$

Seguindo ideia semelhante à realizada naquela secção, vamos supor que

$$y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, segue que

$y^2 = \underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{S} + 2(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3})$ e assim,

$\dfrac{y^2 - S}{2} = \sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}$.

Elevando, mais uma vez, ambos os membros ao quadrado, obtemos

$\left(\dfrac{y^2 - S}{2}\right)^2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 2(\sqrt{x_1x_1x_2x_3} + \sqrt{x_1x_2x_2x_3} + \sqrt{x_1x_2x_3x_3})$. Logo,

$\left(\dfrac{y^2 - S}{2}\right)^2 = x_1x_2x + x_1x_3 + x_2x_3 + 2\sqrt{x_1x_2x_3}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3})$ e usando as relações de Girard, concluímos que

$\left(\dfrac{y^2 - S}{2}\right)^2 = S_d + 2\sqrt{P}y$, ou seja

$$\boxed{y^4 - 2Sy^2 - 8\sqrt{P}y + S^2 - 4S_d = 0}\,. \tag{2.16}$$

Dada a equação quártica geral $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, já vimos que, por meio da substituição $x = y - \dfrac{b}{4a}$, podemos transformá-la numa quártica reduzida

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0.$$

A equação (2.16) e a quártica reduzida têm a mesma estrutura. Logo, podemos identificar seus coeficientes de forma que

$$\boxed{S = -\frac{p}{2}}\,, \qquad \boxed{P = \left(\frac{q}{8}\right)^2} \quad \text{e} \quad \boxed{S_d = \frac{p^2 - 4r}{16}}\,.$$

Assim, a cúbica (2.15) pode ser escrita como

$$x^3 + \frac{p}{2}x^2 + \left(\frac{p^2 - 4r}{16}\right)x - \left(\frac{q}{8}\right)^2 = 0.$$

Ora, ao resolver a cúbica acima, cujas raízes são x_1, x_2 e x_3, é imediato que também resolveremos a quártica reduzida $y^4+py^2+qy+r = 0$, cuja solução é $y = \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}$. As soluções da quártica geral serão encontradas, é claro, por meio da relação $x = y - \dfrac{b}{4a}$.

Dessa maneira, podemos definir um roteiro prático para resolver quárticas por meio desta técnica:

1. Transformar a quártica geral, $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, na quártica reduzida, $y^4 + py^2 + qy + r = 0$;
2. Resolver a cúbica associada:
$$x^3 + \frac{p}{2}x^2 + \left(\frac{p^2 - 4r}{16}\right)x - \left(\frac{q}{8}\right)^2 = 0;$$
3. Escrever as soluções da quártica reduzida: $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$;
4. Calcular as soluções da quártica geral.

Uma observação pertinente é a de que cada uma das raízes quadradas de

$$y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$$

pode assumir dois valores complexos. Assim, teríamos um total de $2 \times 2 \times 2 = 8$ soluções para a quártica, o que vai de encontro ao que diz o Teorema Fundamental da Álgebra, segundo o qual uma equação polinomial de grau n, com coeficientes reais, tem exatamente

n raízes reais ou complexas. No entanto, não há nenhuma incoerência aqui. Vejamos por quê.

Vimos, na demonstração acima, que $\sqrt{P} = -\dfrac{q}{8}$.

$$\sqrt{P} = -\frac{q}{8} \Leftrightarrow \sqrt{x_1x_2x_3} = -\frac{q}{8} \Leftrightarrow \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\sqrt{x_3} = -\frac{q}{8}.$$

Assim, para cada uma das quatro possibilidades de $\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}$, existe apenas uma possibilidade para $\sqrt{x_3}$, a fim de satisfazer $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\sqrt{x_3} = -q/8$. Logo, os quatro produtos possíveis fornecem as quatro raízes da cúbica reduzida.

O autor desta técnica descobriu mais tarde que o grande Euler, na sua obra *"Elements of Algebra"*, desenvolveu basicamente a mesma solução para as equações quárticas.

Vejamos alguns exemplos da aplicação desta técnica.

Exemplo 1

Consideremos a equação $x^4 - 2x^3 - 145x^2 - 358x + 504 = 0$.

Fazendo $x = y + \dfrac{1}{2}$, ela toma a forma $y^4 - \dfrac{292}{2}y^2 - 504y + \dfrac{4617}{16} = 0$.

A equação cúbica associada será $x^3 - \dfrac{293}{4}x^2 + \dfrac{5077}{4}x - 3969 = 0$, uma cúbica do tipo $D < 0$, cujas raízes são $x_1 = 4$, $x_2 = 49$ e $x_3 = \dfrac{81}{4}$.

Assim, as soluções da quártica reduzida serão determinadas por

$$y = \sqrt{4} + \sqrt{49} + \sqrt{\frac{81}{4}}.$$

Lembrando que devemos ter $\sqrt{y_1}\sqrt{y_2}\sqrt{y_3} = -\dfrac{q}{8}$, segue que $\sqrt{y_1}\sqrt{y_2}\sqrt{y_3} > 0$, já que $-\dfrac{q}{8} = +63$.

Assim, as quatro raízes da quártica reduzida serão

$$y_1 = (+2) + (+7) + \left(+\frac{9}{2}\right) = \frac{27}{2},\ \ y_2 = (+2) + (-7) + \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{19}{2},$$

$$y_3 = (-2) + (+7) + \left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ e } \ y_4 = (-2) + (-7) + \left(+\frac{9}{2}\right) = -\frac{9}{2}.$$

Finalmente, calculamos as raízes da quártica original:

$$x_1 = -\frac{27}{2} + \frac{1}{2} = 14, \qquad x_2 = -\frac{19}{2} + \frac{1}{2} = -9,$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{e} \qquad x_4 = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = -4.$$

Exemplo 2

Resolveremos agora a equação $x^4 - 22x^3 + 226x^2 - 462x + 905 = 0$.

Fazendo $x = y + \frac{11}{2}$, ela toma a forma $y^4 - \frac{89}{2}y^2 + 693y + \frac{39285}{16} = 0$.

A cúbica associada é $x^3 - \frac{89}{4}x^2 - \frac{7841}{16}x - \frac{480249}{64} = 0$, uma cúbica do tipo $D < 0$, cujas raízes são

$x_1 = -\frac{121}{4}$, $x_2 = -\frac{49}{4}$ e $x_3 = \frac{81}{4}$.

Assim, as soluções da quártica reduzida serão determinadas por

$y = \sqrt{-\frac{121}{4}} + \sqrt{-\frac{49}{4}} + \sqrt{\frac{81}{4}}$.

Lembrando que devemos ter $\sqrt{y_1}\sqrt{y_2}\sqrt{y_3} = -\frac{q}{8}$, segue que $\sqrt{y_1}\sqrt{y_2}\sqrt{y_3} < 0$, já que $-\frac{q}{8} = -\frac{693}{8}$.

Dessa forma, as quatro raízes da quártica reduzida serão

$$y_1 = \left(+\frac{11}{2}i\right) + \left(+\frac{7}{2}i\right) + \left(+\frac{9}{2}\right) = 9i + \frac{9}{2},$$

$$y_2 = \left(+\frac{11}{2}i\right) + \left(-\frac{7}{2}i\right) + \left(-\frac{9}{2}\right) = 2i - \frac{9}{2},$$

$$y_3 = \left(-\frac{11}{2}i\right) + \left(+\frac{7}{2}i\right) + \left(-\frac{9}{2}\right) = -2i - \frac{9}{2} \text{ e}$$

$$y_4 = \left(-\frac{11}{2}i\right) + \left(-\frac{7}{2}i\right) + \left(+\frac{9}{2}\right) = -9i + \frac{9}{2}.$$

Finalmente, calculamos as raízes da quártica original:

$$x_1 = 9i + \frac{9}{2} + \frac{11}{2} = 9i + 10 = 10 + 9i, \qquad x_2 = 2i - \frac{9}{2} + \frac{11}{2} = 2i + 1 = 1 + 2i,$$

$$x_3 = -2i - \frac{9}{2} + \frac{11}{2} = -2i + 1 = 1 - 2i \quad \text{e} \qquad x_4 = -9i + \frac{9}{2} + \frac{11}{2} = -9i + 10 = 10 - 9i.$$

Exemplo 3

Determinemos as soluções de $x^4 - 7x^3 + 40x^2 + 262x - 296 = 0$.

Fazendo $x = y + \frac{7}{4}$ esta equação toma a forma $y^4 + \frac{173}{8}y^2 + \frac{2873}{8}y + \frac{65757}{256} = 0$.

A equação cúbica associada é $x^3 + \frac{173}{16}x^2 - \frac{8957}{256}x - \frac{8254129}{4096} = 0$, uma cúbica do tipo $D > 0$, cujas raízes são

$x_1 = \frac{169}{16}$, $\quad x_2 = -\frac{171}{16} + \frac{35}{4}i$ e $\;x_3 = -\frac{171}{16} - \frac{35}{4}i$.

Assim, as soluções da quártica reduzida serão determinadas por

$$y = \sqrt{\frac{169}{16}} + \sqrt{-\frac{171}{16} + \frac{35}{4}i} + \sqrt{-\frac{171}{16} - \frac{35}{4}i}.$$

Aqui deparamo-nos com uma dificuldade extra: será preciso calcular as raízes quadradas de números complexos. Como já mencionado, esse cálculo é viável por meios algébricos, mas é um tanto exaustivo. Ele requer a determinação das raízes reais de uma equação biquadrada. Para não alongar demais o exemplo, omitiremos tal cálculo, apresentando tão somente o resultado.

Lembrando que devemos ter $\sqrt{y_1}\sqrt{y_2}\sqrt{y_3} = -\dfrac{q}{8}$, segue que $\sqrt{y_1}\sqrt{y_2}\sqrt{y_3} < 0$, já que $-\dfrac{q}{8} = -\dfrac{2873}{64}$.

As duas raízes quadradas de $-\dfrac{171}{16} + \dfrac{35}{4}i$ são $\dfrac{5}{4} + \dfrac{7}{2}i$ e $-\dfrac{5}{4} - \dfrac{7}{2}i$.

As duas raízes quadradas de $-\dfrac{171}{16} - \dfrac{35}{4}i$ são $\dfrac{5}{4} - \dfrac{7}{2}i$ e $-\dfrac{5}{4} + \dfrac{7}{2}i$.

Portanto, as quatro raízes da quártica reduzida serão:

$$y_1 = \left(\frac{5}{4} + \frac{7}{2}i\right) + \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{2}i\right) + \left(-\frac{13}{4}\right) = -\frac{3}{4},$$

$$y_2 = \left(\frac{5}{4} + \frac{7}{2}i\right) + \left(-\frac{5}{4} + \frac{7}{2}i\right) + \left(+\frac{13}{4}\right) = 7i + \frac{13}{4},$$

$$y_3 = \left(-\frac{5}{4} - \frac{7}{2}i\right) + \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{2}i\right) + \left(+\frac{13}{4}\right) = -7i + \frac{13}{4} \text{ e}$$

$$y_4 = \left(-\frac{5}{4} - \frac{7}{2}i\right) + \left(-\frac{5}{4} + \frac{7}{2}i\right) + \left(-\frac{13}{4}\right) = -\frac{23}{4}.$$

Finalmente, calculamos as raízes da quártica original:

$$x_1 = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = 1, \qquad x_2 = 7i + \frac{13}{4} + \frac{7}{4} = 5 + 7i,$$

$$x_3 = -7i + \frac{13}{4} + \frac{7}{4} = 5 - 7i \quad \text{e} \qquad x_4 = -\frac{23}{4} + \frac{7}{4} = -4.$$

2.14 O método de Newton-Raphson

Muitas vezes estamos interessados em encontrar as raízes de um determinado polinômio, não sendo relevante conhecer a maneira exata como essas raízes estão relacionadas com os coeficientes. Dizendo de outra maneira, se o problema é tão somente determinar as raízes de um dado polinômio, a existência ou não de uma fórmula fechada que as calcule passa a ser um problema de menor importância. Felizmente, não dependemos apenas das fórmulas para se chegar às soluções das equações algébricas em geral. Se não houvesse alternativas estaríamos bem encrencados, pois, como vimos no Capítulo 1, não existem, por exemplo, fórmulas resolutivas para as equações polinomiais gerais de grau maior que quatro.

A Análise Numérica é a área da Matemática que se ocupa, entre outras coisas, de descobrir algoritmos que permitem não apenas achar as soluções numéricas de equações, mas também mensurar o quão exatas são essas soluções. Em geral, os métodos utilizados consistem em aproximações sucessivas que, a cada iteração, são reintroduzidas no algoritmo, que produz então um valor ainda mais exato, sendo possível calcular com precisão quantas casas decimais corretas o resultado possui.

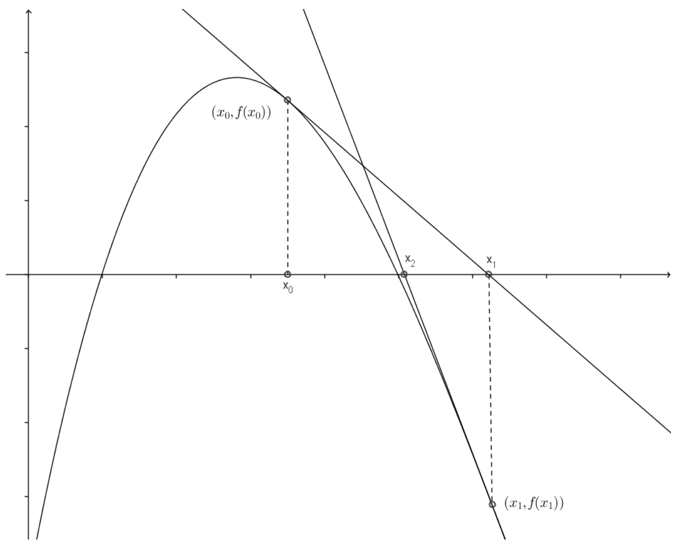
Um dos métodos mais utilizados para se determinar as raízes de equações algébricas é o chamado método de Newton-Raphson, em homenagem ao seu criador, o grande gênio da Física e da Matemática, ***Sir* Isaac Newton** (1642 – 1727). O método foi mais tarde aperfeiçoado pelo matemático **Joseph Raphson** (1648 – 1715).

Seja uma função $f : I \to \mathbb{R}$, contínua e diferenciável num intervalo $K \subset I$. Escolhendo um ponto $x_0 \in K$, determinamos o ponto $(x_0, f(x_0))$. Em seguida calculamos, por meio da derivada primeira, a equação da reta r que tangencia o gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$. Por fim, encontramos a abscissa do ponto de intersecção entre r e o eixo x. Esse valor, x_1, é submetido então ao mesmo processo, gerando um outro, x_2, e assim por diante. Nos cursos de Cálculo Numérico prova-se que essa sequência de números tende a uma raiz da função f, desde que a escolha do valor inicial, x_0, esteja suficientemente próxima dessa raiz. Talvez a maior virtude do Método de Newton seja a rapidez com que a sequência de aproximações converge para uma raiz da função considerada. A convergência estará garantida se escolhermos x_0 em um intervalo fechado $[a, b]$ que cumpra as seguintes condições:

- $[a, b]$ possui apenas um zero de $f(x)$;
- $f(x)$ é diferenciável em todo intervalo $[a, b]$;
- $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$;
- Nem $f'(x)$ nem $f''(x)$ mudam de sinal em $]a, b[$.

Uma possível desvantagem dessa técnica é que ela só é capaz de encontrar raízes reais. No caso de uma equação polinomial de grau par com todas as raízes complexas, por exemplo, o método não converge para nenhum valor, mas mesmo isso é logo constatado.

Agora,vamos ao método.



Primeiro determinamos a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ e declividade $f'(x_0) \neq 0$:

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Para calcular a abscissa do ponto em que esta reta intercepta o eixo x, devemos fazer $y = 0$, ou seja

$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$, donde

$x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Submetendo x_1 ao mesmo processo, obtemos x_2, e assim por diante, de modo que teremos a seguinte recorrência:

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

Podemos, em princípio, aplicar o método de Newton a qualquer função contínua e diferenciável. Neste trabalho, entretanto, aplicaremos o método apenas às funções polinomiais de 3º e 4º graus.

Para o caso específico das funções cúbicas reais, é possível demonstrar que o ponto $x_0 = -b/3a$ está entre duas raízes da função, logo pode ser um bom ponto de partida.

Vejamos alguns exemplos de aplicação dessas fórmulas.

Exemplo 1

Determinar, por Newton-Raphson, uma raiz da equação $x^3 - 39x^2 + 38x + 2520 = 0$.

O problema equivale a determinar um zero da função $f(x) = x^3 - 39x^2 + 38x + 2520$.

Escolhendo $x_0 = -\dfrac{b}{3a} = -\left(\dfrac{-39}{3 \cdot 1}\right) = 13$ e aplicando a fórmula de recorrência

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 + 39x_i^2 + 38x_i + 2520}{3x_i^2 - 78x_i + 38}$$

obtemos os dados abaixo tabulados:

i	x_i	$f(x_i)$
0	13	-1380
1	10,057569296375	-25,475266215297
2	10,000066466527	-0,029378244744
3	10,000000000090	-0,000000039759
4	10,000000000000	0,000000000000
5	10,000000000000	0,000000000000

Quando x está muito próximo de 10, y está muito próximo de zero. Calculando $f(10)$, de fato encontramos $f(10) = 0$. Portanto, 10 é uma raiz da equação.

Exemplo 2

Achar uma raiz da equação $x^4+7x^3-7x^2-43x+42=0$ por meio de Newton-Raphson.

Devemos encontrar o x para o qual a função $f(x)=x^4+7x^3-7x^2-43x+42$ se anula.

Tabulando os valores obtidos pela recorrência

$$x_{i+1}=x_i-\frac{x_i^4+7x_i^3-7x_i^2-43x_i+42}{4x_i^3+21x_i^2-14x_i-43}$$

com $x_0=3$ temos

i	x_i	$f(x_i)$
0	3	120
1	2,433962264151	31,900716825755
2	2,130171935246	6,890849370630
3	2,0174504190820	0,803315171129
4	2,000385066932	0,017336761127
5	2,000000194249	0,000008741204
6	2,000000000000	0,000000000002
7	2,000000000000	0,000000000000
8	2,000000000000	0,000000000000

Parece que 2 é uma raiz. Testando este valor na função, de fato concluímos que $f(2)=0$.

Logo, 2 é uma raiz desta quártica.

Agora vejamos como o método se comporta quando aplicado a uma função que não possui nenhum zero real.

Exemplo 3

Achar uma raiz da equação $x^4-6x^3+23x^2-50x+50=0$ por meio de Newton-Raphson.

Devemos encontrar o x para o qual a função $f(x)=x^4-6x^3+23x^2-50x+50$ se anula.

Tabulando os valores obtidos pela recorrência

$$x_{i+1}=x_i-\frac{x_i^4-6x_i^3+23x_i^2-50x_i+50}{4x_i^3-18x_i^2+46x_i-50}$$

com $x_0=5$ obtemos

i	x_i	$f(x_i)$
0	5	250
1	3,913043478261	81,479304319238
2	3,046705951147	27,638791671783
3	2,282953349391	11,498313256106
4	0,975727479236	18,443415029335
5	1,970647392102	9,950722279030
6	-5,349769239023	2713,518708153510
7	-3,443796349586	880,671994626046
8	-1,939042546597	291,309721504242
9	-0,704868738250	99,018847056292
10	0,362513813997	34,628312368304

Notemos que, neste caso, o método, de início, parece que vai convergir, se bem que muito lentamente se comparado aos exemplos anteriores, mas logo depois desanda. Em particular, na passagem do passo 5 para o 6 há uma discrepância com relação ao que vinha acontecendo até então. Esse comportamento se repete nos passos seguintes, nunca convergindo para nenhum valor e nem poderia, já que a função em questão não possui raízes reais.

Capítulo 3

Alguns resultados relacionados às equações cúbicas e quárticas

É natural que, a certa altura da vida, todo jovem estudante que se interessa por Matemática tenha a curiosidade de deduzir as fórmulas resolutivas das equações polinomiais de graus cada vez maiores. Em geral, logo eles se apercebem de que a simples adição de uma nova potência da incógnita tem o efeito de complicar terrivelmente a resolução dessas equações. Conta-se que o extraordinário **Srinivasa Ramanujan** (1887 – 1920) conseguiu resolver, aos 14 anos, as equações polinomiais gerais do 3º e 4º graus, e que só parou quando, após reiteradas tentativas, fracassou ao buscar resolver a quíntica, pois ainda não sabia da impossibilidade de resolvê-la por radicais.

A seguir apresentamos o resultado de nossa busca pessoal pela resolução da cúbica, que tinha por objetivo encontrar uma fórmula que fosse imune às limitações da fórmula de Cardano, ou seja, que permitisse calcular as raízes de uma cúbica real (três raízes reais e distintas) sem que fosse necessário recorrer à radiciação de números complexos. Infelizmente, a fórmula obtida também não é capaz de contornar o chamado "casus irreducibilis", que tanto atormentou Cardano, e que continua a fazer vítimas ainda nos dias atuais. Na verdade, hoje já se sabe sob quais condições precisas uma cúbica não é solúvel por radicais: quando possui três raízes reais, distintas e irracionais, mas isso, por si só, não garante que, nos casos em que é solúvel, números complexos não sejam necessários. De qualquer forma, segue abaixo nossa humilde contribuição. Também foram incluídos alguns pequenos resultados encontrados fortuitamente quando das nossas incursões pelo mundo das equações cúbicas e quárticas.

3.1 Minha resolução para a cúbica

Consideremos a equação

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Suponhamos que o polinômio à esquerda da igualdade possa ser escrito na forma de um cubo perfeito, ou seja

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (Ax + B)^3.$$

Dessa igualdade decorre que:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = A^3x^3 + 3A^2Bx^2 + 3AB^2x + B^3.$$

A fim de que os polinômios em cada lado da igualdade sejam idênticos, é necessário e suficiente que os coeficientes de cada potência da incógnita também o sejam. Então

$$\begin{cases} A^3 = a & \text{(I)} \\ 3A^2B = b & \text{(II)} \\ 3AB^2 = c & \text{(III)} \\ B^3 = d & \text{(IV)}. \end{cases}$$

As equações (I) e (IV) determinam os valores de A e B de forma inequívoca:

$$A = \sqrt[3]{a} \qquad \text{e} \qquad B = \sqrt[3]{d}.$$

O sistema formado pelas equações (II) e (III) deve também ser satisfeito:

$$\begin{cases} 3A^2B = b \\ 3AB^2 = c. \end{cases}$$

Desse sistema obtemos que

$$\boxed{A^3 = \frac{b^2}{3c}} \qquad \text{e} \qquad \boxed{B^3 = \frac{c^2}{3b}}.$$

Como $A^3 = a$ e $B^3 = d$, segue que

$$\boxed{b^2 = 3ac} \qquad \text{e} \qquad \boxed{c^2 = 3bd}.$$

Assim, a fim de que o polinômio ax^3+bx^2+cx+d possa ser escrito na forma $(Ax+B)^3$, as duas condições acima devem ser satisfeitas.

Mostraremos que se apenas uma dessas condições for verdadeira, podemos fazer com que a outra também o seja, bastando, para isso, somar um termo conveniente a ambos os lados da equação.

Suponhamos que, na equação cúbica geral

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

valha a relação $b^2 = 3ac$. Então podemos somar ao termo independente, d, uma constante conveniente, a fim de tornar $c^2 = 3b\overline{d}$, em que $\overline{d} = d + \delta$:

$ax^3 + bx^2 + cx + d + \delta = \delta$, tal que $c^2 = 3b(d + \delta)$.

Tomemos $\delta = \dfrac{c^2}{3b} - d$.

Assim, a equação toma a forma $\quad ax^3 + bx^2 + cx + \dfrac{c^2}{3b} = \dfrac{c^2}{3b} - d$.

Como estamos supondo que $b^2 = 3ac$, segue que $\dfrac{c^2}{3b} = \dfrac{\dfrac{b^4}{9a^2}}{3b} = \dfrac{b^3}{27a^2}$.

Uma vez que $b^2 = 3ac$ e $c^2 = 3b\overline{d}$, com $\overline{d} = \dfrac{b^3}{27a^2}$, temos que o polinômio da esquerda é agora um cubo perfeito. Logo, podemos escrever

$$\left(\sqrt[3]{a}x + \sqrt[3]{\frac{b^3}{27a^2}}\right)^3 = \frac{b^3}{27a^2} - d.$$

Simplificando as expressões entre parênteses e à direita da igualdade, obtemos

$$(3ax + b)^3 = b^3 - 27a^2d.$$

Logo, $x = \dfrac{-b + \sqrt[3]{b^3 - 27a^2d}}{3a}$.

Assim, dada a cúbica

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

em que a, b, c e d são constantes reais ($a \neq 0$), e tais que $b^2 = 3ac$, o valor de x é dado por:

$$\boxed{x = \frac{-b + \sqrt[3]{b^3 - 27a^2d}}{3a}}. \tag{3.1}$$

Suponhamos agora que, na cúbica geral, valha $c^2 = 3bd$.

Podemos somar um termo conveniente ao termo ax^3, de modo a tornar $b^2 = 3a'c$, em que $a' = a + \delta$. De fato, de

$(a + \delta)x^3 + bx^2 + cx + d = \delta x^3$, vemos que basta tomar $\delta = \dfrac{b^2}{3c} - a$.

Assim, a equação acima toma a forma

$$\left(a + \frac{b^2}{3c} - a\right)x^3 + bx^2 + cx + d = \left(\frac{b^2}{3c} - a\right)x^3.$$

Como estamos supondo que $c^2 = 3bd$, segue que $\dfrac{b^2}{3c} = \dfrac{\left(\dfrac{c^2}{3d}\right)^2}{3c} = \dfrac{\dfrac{c^4}{9d^2}}{3c} = \dfrac{c^3}{27d^2}$,

e dessa maneira

$$\frac{c^3}{27d^2}x^3 + bx^2 + cx + d = \left(\frac{c^3}{27d^2} - a\right)x^3.$$

Como o polinômio à esquerda da igualdade agora é um cubo perfeito, podemos escrever

$$\left(\sqrt[3]{\frac{c^3}{27d^2}} \cdot x + \sqrt[3]{d}\right)^3 = \left(\frac{c^3 - 27ad^2}{27d^2}\right)x^3,$$

e agindo de modo análogo ao caso anterior, verificamos que $(cx + 3d)^3 = (c^3 - 27ad^2)x^3$.

Logo, $x = \dfrac{3d}{\sqrt[3]{c^3 - 27ad^2} - c}$.

Dessa maneira, dada a cúbica

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

em que a, b, c e d são constantes reais ($a \neq 0$), e tais que $c^2 = 3bd$, o valor de x é dado por:

$$\boxed{x = \frac{3d}{\sqrt[3]{c^3 - 27ad^2} - c}}. \tag{3.2}$$

As fórmulas (3.1) e (3.2) bem que poderiam ser chamadas de fórmulas “fracas”, pois só se aplicam a cúbicas muito específicas: aquelas em que $b^2 = 3ac$ ou $c^2 = 3bd$.

O que fazer se nenhuma dessas condições é cumprida? A ideia é realizar uma mudança de variável $x = y + \delta$ de forma que a nova equação satisfaça uma das duas condições ($b^2 = 3ac$ ou $c^2 = 3bd$).

Consideremos então a cúbica geral

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ e façamos a substituição $x = y + \delta$. Pelo que vimos na **secção 2.1**, essa substituição redunda na equação

$$ay^3 + b'y^2 + c'y + d' = 0,$$

onde $b' = 3a\delta + b, \qquad c' = 3a\delta^2 + 2b\delta + c \quad \text{e} \quad d' = a\delta^3 + b\delta^2 + c\delta + d.$

Inicialmente busquemos um δ tal que tenhamos $(b')^2 = 3ac'$. Se conseguirmos isso, poderemos aplicar a fórmula (3.1) e resolver a equação em y. No entanto,

$(3a\delta + b)^2 = 3a(3a\delta^2 + 2b\delta + c)$ se, e somente se, $b^2 = 3ac$.

O que isso significa? Significa que seja qual for o δ, o valor de $(b')^2 - 3ac'$ será o mesmo de $b^2 - 3ac$. Dizendo de outra maneira, $b^2 - 3ac$ é invariante sob a transformação $x = y + \delta$.

Este é um resultado ruim. Nenhuma substituição da forma $x = y + \delta$ é capaz de tornar $(b')^2 - 3ac' = 0$. Consequentemente, não podemos aplicar a fórmula (3.1).

Resta-nos agora tentar descobrir se é possível calcular um δ tal que a substituição $x = y + \delta$ torne $(c')^2 = 3b'd'$, ou seja,

$$(3a\delta^2 + 2b\delta + c)^2 - 3(3a\delta + b)(a\delta^3 + b\delta^2 + c\delta + d) = 0.$$

Efetuando as operações e rearrumando os termos, obtemos

$$\underbrace{(b^2 - 3ac)}_{a_T}\delta^2 + \underbrace{(bc - 9ad)}_{b_T}\delta + \underbrace{(c^2 - 3bd)}_{c_T} = 0.$$

Esta é uma equação quadrática em δ. Seja $\Delta_T = b_T^2 - 4a_T c_T$ o seu discriminante.

Se $\Delta_T \geqslant 0$ então existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $(c')^2 = 3b'd'$.

Suponhamos que de fato isto ocorre. Calculando o δ, obtemos b', c' e d'.

Então a equação $ay^3 + b'y^2 + c'y + d' = 0$ é tal que $(c')^2 = 3b'd'$. Logo, ela pode ser resolvida pela fórmula (3.2)

$$y = \frac{3d'}{\sqrt[3]{(c')^3 - 27a(d')^2} - c'}\ .$$

Essa fórmula de fato calcula y, mas ela ainda pode ser refinada, utilizando o fato de que $(c')^2 = 3b'd'$.

Disso decorre que

$$y = \frac{3d'}{\sqrt[3]{(c')^3 - 27a \cdot \left(\dfrac{(c')^2}{3b'}\right)^2} - c'} = \frac{c'}{b'\left(\sqrt[3]{\dfrac{(b')^2 - 3ac'}{(b')^2}} - 1\right)}\ .$$

Desde que $a_T' = (b')^2 - 3a'c' = b^2 - 3ac = a_T$, a fórmula acima pode ser escrita como

$$\boxed{y = \frac{c'}{\sqrt[3]{a_T b'} - b'}}\ .$$

Como $x = y + \delta$, segue que

$$\boxed{x = \frac{c'}{\sqrt[3]{a_T b'} - b'} + \delta}\ . \qquad (3.3)$$

Infelizmente, quando $\Delta_T < 0$ os coeficientes b' e c' tornam-se números complexos, e o denominador da fórmula acaba redundando no cálculo de uma raiz cúbica de um número complexo, um processo algebricamente inviável.

A título de exemplo, apliquemos essa fórmula à equação resolvida por Fibonacci no século XIII:

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0.$$

$a_T = b^2 - 3ac = -26, \qquad b_T = bc - 9ad = 200, \qquad c_T = c^2 - 3bd = 220$ e

$\Delta_T = b_T^2 - 4a_T c_T = 62880.$

Temos assim dois valores para δ:

$\delta_1 \approx 8,66843939035615 \quad \text{e} \quad \delta_2 \approx -0,97613169804845.$

Escolhamos $\delta = \delta_1 \approx 8,66843939035615$. Dessa forma,

$b' = 3a\delta + b \approx 28,00531817106840, \qquad c' = 3a\delta^2 + 2b\delta + c \approx 270,09928195425900,$

$a_T b' \approx -728,138272447779 \qquad \text{e} \qquad \sqrt[3]{a_T b'} - b' \approx -37,00177056894680.$

Consequentemente,

$$y = \frac{c'}{\sqrt[3]{a_T b'} - b'} \approx \frac{270,09928195425900}{-37,00177056894680} \approx -7,29963128253477.$$

Finalmente, calculamos o valor de x:

$x = y + \delta \approx -7,29963128253477 + 8,66843939035615 \approx 1,36880810782137.$

Essa, é claro, é a mesma resposta encontrada por Fibonacci, na verdade um pouco mais precisa. A fórmula funciona!

Vejamos um outro exemplo, agora com raiz racional.

Consideremos a equação $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$. Então,

$a_T = b^2 - 3ac = 1, \qquad b_T = bc - 9ad = 14, \qquad c_T = c^2 - 3bd = -26 \;$ e

$\Delta_T = b_T^2 - 4a_Tc_T = 300$. Assim,

$\delta_1 \approx 1,66025403784439 \quad \text{e} \quad \delta_2 \approx -15,66025403784440.$

Escolhamos $\delta = \delta_2 \approx -15,66025403784440$. Dessa forma,

$b' = 3a\delta + b \approx -51,9807621135332, \qquad c' = 3a\delta^2 + 2b\delta + c \approx 900,333209967908,$

$a_T b' \approx -51,9807621135332 \qquad \text{e} \qquad \sqrt[3]{a_T b'} - b' \approx 48,2487113059643.$

Logo, $y = \dfrac{c'}{\sqrt[3]{a_T b'} - b'} \approx \dfrac{900,333209967908}{48,2487113059643} \approx 18,66025403784440.$

Finalmente, calculamos o valor de x:

$x = y + \delta \approx 18,66025403784440 - 15,66025403784440 \approx 3,00000000000000.$

Esse número está muito próximo de 3. De fato, substituindo x por 3 na equação, concluímos que 3 é raiz.

Agora, para finalizar, exibiremos um exemplo que mostra que a fórmula (3.3) continua válida mesmo quando $\Delta_T < 0$. Consideremos a equação

$x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0$. Então,

$a_T = b^2 - 3ac = 13, \qquad b_T = bc - 9ad = -72, \qquad c_T = c^2 - 3bd = 108 \;$ e

$\Delta_T = b_T^2 - 4a_Tc_T = -432.$

Temos, nesse caso, dois valores complexos para δ:

$\delta_1 \approx 2,769230769 + 0,799408065i \quad$ e $\quad \delta_2 \approx 2,769230769 - 0,799408065i.$

Escolhamos $\delta = \delta_1 \approx 2,769230769 + 0,799408065i$. Dessa forma,

$b' = 3a\delta + b \approx -2,692307692 + 2,398224195i,$

$c' = 3a\delta^2 + 2b\delta + c \approx -3,834319527 - 4,304504966i,$

$a_Tb' \approx -35 + 31,17691454i.$

Para calcular $\sqrt[3]{a_Tb'}$, aplicamos a fórmula de Euler vista na **secção 2.10**. De acordo com aquela fórmula, existem três raízes cúbicas de a_Tb'. Usemos a primeira delas (aquela que se obtém fazendo-se $k = 0$). Então,

$\sqrt[3]{a_Tb'} \approx 2,5 + 2,598076211i$, donde $\sqrt[3]{a_Tb'} - b' \approx 5,192307692 + 0,199852016i.$

Logo, $y = \dfrac{c'}{\sqrt[3]{a_Tb'} - b'} \approx \dfrac{-3,834319527 - 4,304504966i}{5,192307692 + 0,199852016i} \approx -0,769230769 - 0,799408065i.$

Por fim, calculamos o valor de x:

$x = y + \delta \approx -0,769230769 - 0,799408065i + 2,769230769 + 0,799408065i \approx 2,000000000000.$

Esse número está muito próximo de 2. De fato, substituindo x por 2 na equação, concluímos que 2 é raiz.

Caso tivéssemos escolhido outros valores para $\sqrt[3]{a_Tb'}$ (para $k = 1$ e $k = 2$), obteríamos as outras raízes reais desta cúbica ($x = 6$ e $x = 3$), como o leitor interessado pode verificar.

3.2 Influência de δ sobre Δ_T

O valor de Δ_T, como vimos, é calculado a partir dos coeficientes originais a, b, c e d. Então ocorreu-me a seguinte ideia: seria possível transformar a cúbica original, mediante uma substituição do tipo $x = y + \delta_1$, de modo que na nova equação tivéssemos $\Delta_T \geqslant 0$? Em caso positivo, faríamos uma nova substituição, $y = z + \delta_2$ e aplicaríamos a técnica exposta na secção anterior, que seria bem sucedida, já que estaríamos partindo de uma equação do tipo $\Delta_T \geqslant 0$.

Vejamos o que ocorre. $\Delta_T = b_T^2 - 4a_Ttc_T = (bc - 9ad)^2 - 4(b^2 - 3ac)(c^2 - 3bd)$.

Sob a transformação $x = y + \delta$, temos que

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \longrightarrow ay^3 + b'y^2 + c'y + d' = 0,$$

em que

$b' = 3a\delta + b, \qquad c' = 3a\delta^2 + 2b\delta + c, \quad$ e $\qquad d' = a\delta^3 + b\delta^2 + c\delta + d.$

Assim,

$$\Delta_T' = (b_T')^2 - 4a_T'c_T' = (b'c' - 9a'd')^2 - 4\Big((b')^2 - 3a'c' \Big) \Big((c')^2 - 3b'd' \Big).$$

$$\begin{array}{rcl}
(b_T')^2 & = & \Big[(3a\delta + b)(3a\delta^2 + 2b\delta + c) - 9a(a\delta^3 + b\delta^2 + c\delta + d) \Big]^2 \\
& = & \Big[2a_T\delta + b_T \Big]^2 \\
& = & 4a_T^2\delta^2 + 4a_Tb_T\delta + b_T^2.
\end{array}$$

Já vimos que $a_T' = ((b')^2 - 3a'c') = b^2 - 3ac = a_T$.

Logo,

$$\begin{array}{rcl}
-4a_T'c_T' & = & -4a_Tc_T' \\
& = & -4a_T \Big[(3a\delta^2 + 2b\delta + c)^2 - 3(3a\delta + b)(a\delta^3 + b\delta^2 + c\delta + d) \Big] \\
& = & -4a_T(a_T\delta^2 + b_T\delta + c_T) \\
& = & -4a_T^2\delta^2 - 4a_Tb_T\delta - 4a_Tc_T.
\end{array}$$

Temos, então, que:

$$\Delta_T' = (b_T')^2 - 4a_T'c_T' = 4a_T^2\delta^2 + 4a_Tb_T\delta + b_T^2 - 4a_T^2\delta^2 - 4a_Tb_T\delta - 4a_Tc_T = b_T^2 - 4a_Tc_T = \Delta_T.$$

Ou seja, Δ_T é invariante sob a transformação $x = y + \delta$. Para esse tipo de transformação, nenhum valor de δ é capaz de mudar o valor de Δ_T.

Esse resultado é, de certa forma, desapontador, pois significa que, dada uma cúbica na incógnita x do tipo $\Delta_T < 0$, todas as outras infinitas cúbicas que podemos obter mediante uma transformação do tipo $x = y + \delta$, $\delta \in \mathbb{R}$, também são do tipo $\Delta_T < 0$, já que Δ_T permanece inalterado.

3.3 Relação entre D e Δ_T

Observando empiricamente o comportamento de Δ_T, verificamos que ele se anula quando temos pelo menos duas raízes reais iguais, que é positivo sempre que a equação tem duas raízes complexas conjugadas e uma raiz real e que torna-se negativo quando as três raízes da equação são reais e distintas. Exatamente como o $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ da fórmula de Cardano.

De fato, estes dois "discriminantes" estão relacionados, como é demonstrado abaixo. Por um lado,

$$\begin{array}{rcl}
\Delta_T & = & b_T^2 - 4a_Tc_T \\
& = & (bc - 9ad)^2 - 4(b^2 - 3ac)(c^2 - 3bd) \\
& = & 3(-b^2c^2 - 18abcd + 27a^2d^2 + 4b^3d + 4ac^3).
\end{array}$$

E, por outro,

$$
\begin{aligned}
D &= \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{27}\cdot p^3 + \frac{1}{4}\cdot q^2 \\
&= \frac{1}{27}\cdot\left[\frac{c^3}{a^3} - 3\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{b^2}{3a^2}\right) + 3\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{b^4}{9a^4} - \frac{b^6}{27a^6}\right] \\
&\quad + \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{4b^6}{729a^6} + \frac{b^2c^2}{9a^4} + \frac{d^2}{a^2} - 2\cdot\frac{2b^4c}{81a^5} + +2\cdot\frac{2b^3d}{27a^4} - 2\cdot\frac{bcd}{3a^3}\right].
\end{aligned}
$$

Após laboriosos cálculos, chegamos à conclusão que

$$
D = \frac{1}{27a^4}\left[\frac{-b^2c^2 - 18abcd + 27a^2d^2 + 4b^3d + 4ac^3}{4}\right] = \frac{1}{27a^4}\left(\frac{\frac{\Delta_T}{3}}{4}\right) = \frac{\Delta_T}{324a^4}.
$$

Ou seja,

$$
\boxed{\Delta_T = 324a^4D}\ .
$$

Como $324a^4 > 0$, segue que D e Δ_T têm sempre o mesmo sinal. Em particular, $D = 0 \Leftrightarrow \Delta_T = 0$.

Uma consequência dessa relação é que, como o coeficiente a não é afetado pelas transformações do tipo $x = y + \delta$, e como o valor de Δ_T não varia sob estas transformações, segue que o valor de D também não varia.

3.4 Determinação da raiz dupla das cúbicas do tipo $D = 0$

Nesta secção determinaremos uma expressão que calcula a raiz dupla de uma cúbica do tipo $D = 0$.

Seja a cúbica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, em que a, b, c e d são constantes reais e $a \neq 0$ e sejam x_1, x_2 e x_3 as suas raízes, todas diferentes de zero.

Das relações de Girard, sabemos que:

$$
x_1+x_2+x_3 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = \frac{c}{a} \qquad \text{e} \qquad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.
$$

Suponhamos que duas destas raízes sejam iguais, por exemplo, $x_1 = x_2$. Nesta condição, $D = 0$, e as equações acima tomam a forma

$$
\boxed{2x_1 + x_3 = -\frac{b}{a}} \quad (3.4) \qquad \boxed{x_1^2 + 2x_1x_3 = \frac{c}{a}} \quad (3.5) \qquad \boxed{x_1^2x_3 = -\frac{d}{a}} \quad (3.6)
$$

De (3.6), temos $x_3 = -\dfrac{d}{ax_1^2}$. Substituindo, na equação (3.4), x_3 por $-\dfrac{d}{ax_1^2}$, segue que

$$\boxed{2ax_1^3 + bx_1^2 - d = 0}\ . \tag{3.7}$$

Sendo x_1 uma das raízes da cúbica original, segue que $ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = 0$.

Multiplicando esta última por 2, obtemos $2ax_1^3 + 2bx_1^2 + 2cx_1 + 2d = 0$ que pode ser escrita como

$$2ax_1^3 + bx_1^2 + bx_1^2 + 2cx_1 + 2d = 0. \tag{3.8}$$

Da equação (3.7), $2ax_1^3 + bx_1^2 = d$. Assim, a equação (3.8) pode ser escrita como

$$\boxed{bx_1^2 + 2cx_1 + 3d = 0}\ . \tag{3.9}$$

A equação $ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d = 0$ pode ser escrita como $2ax_1^3+bx_1^2-d-ax_1^3+cx_1+2d = 0$. Observe que, pondo a equação nessa forma, os três primeiros termos coincidem com o lado esquerdo da equação (3.7). Logo, podemos escrever:

$$\boxed{ax_1^3 - cx_1 - 2d = 0}\ . \tag{3.10}$$

Nesta última equação, isolando d temos $d = \dfrac{ax_1^3 - cx_1}{2}$, e substituindo d por essa expressão na equação (3.9) segue que

$$bx_1^2 + 2cx_1 + 3 \cdot \frac{ax_1^3 - cx_1}{2} = 0, \text{ donde } \quad 3ax_1^3 + 2bx_1^2 + cx_1 = 0.$$

Como estamos supondo que todas as raízes são diferentes de zero, podemos dividir toda a equação por x_1, obtendo

$$\boxed{3ax_1^2 + 2bx_1 + c = 0}\ . \tag{3.11}$$

Finalmente, isolando x_1^2 na equação (3.11) e substituindo na (3.9), temos

$$b \cdot \left(-\frac{2bx_1 + c}{3a}\right) + 2cx_1 + 3d = 0\ ,$$

donde se conclui que

$$x_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{bc - 9ad}{b^2 - 3ac} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{b_T}{a_T}\ .$$

Portanto, quando $D = 0$, a raiz dupla da equação polinomial do 3º grau é dada por:

$$\boxed{x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{bc - 9ad}{b^2 - 3ac}}\ .$$

Notemos que, quando $D = 0$, o valor de δ que transforma a equação cúbica original numa outra em que $(c')^2 = 3b'd'$ (mediante uma substituição do tipo $x = y + \delta$) é também uma raiz da equação de partida. Desse fato poderíamos obter outras relações, mas todas elas só se aplicam ao caso $D = 0$. Lembremos que D não é influenciado por δ.

3.5 Equação dos quadrados das raízes de uma cúbica

Nesta secção determinaremso a equação cúbica cujas raízes são os quadrados das raízes de uma cúbica conhecida.

Consideremos a cúbica geral $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (*)$, em que a, b, c e d são constantes reais e $a \neq 0$, e sejam x_1, x_2 e x_3 as suas raízes.

Das relações de Girard, sabemos que:

$S = x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}$,

$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}$ e

$P = x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}$.

Consideremos $a'y^3 + b'y^2 + c'y + d' = 0$ a equação do 3º grau cujas raízes sejam os quadrados das raízes da equação $(*)$, ou seja x_1^2, x_2^2 e x_3^2.

Assim,

$S^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\left(\dfrac{c}{a}\right)$

e daí

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S^2 - 2\left(\dfrac{c}{a}\right) = \left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\dfrac{c}{a}\right)$. Logo, $\boxed{\dfrac{b'}{a'} = -\dfrac{b^2-2ac}{a^2}}$. Da mesma forma,

$(S_2)^2 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)$, e daí $\left(\dfrac{c}{a}\right)^2 = \dfrac{c'}{a'} + 2\left(-\dfrac{d}{a}\right)\left(-\dfrac{b}{a}\right)$. Então,

$\boxed{\dfrac{c'}{a'} = \dfrac{c^2-2bd}{a^2}}$. Por fim, de $\left(-\dfrac{d}{a}\right) = x_1x_2x_3$ segue que $\boxed{\dfrac{d'}{a'} = -\dfrac{d^2}{a^2}}$.

Dividindo a equação $a'y^3 + b'y^2 + c'y + d' = 0$ por $a' \neq 0$ e usando os resultados destacados acima, temos que

$$y^3 + \left(-\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)y^2 + \left(\frac{c^2-2bd}{a^2}\right)y + \left(-\frac{d^2}{a^2}\right) = 0.$$

Multiplicando esta última por a^2, obtemos

$$\boxed{a^2y^3 - (b^2-2ac)y^2 + (c^2-2bd)y - d^2 = 0}\ .$$

Esta é a equação cúbica cujas raízes são os quadrados das raízes da equação

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Consequentemente, é válido escrever

$$a^2x^6 - (b^2 - 2ac)x^4 + (c^2 - 2bd)x^2 - d^2 = 0.$$

3.6 Equação dos quadrados das raízes de uma quártica

Esta secção é semelhante à anterior, agora aplicada às equações quárticas.

Seja a equação

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0\ (**),$$

em que a, b, c, d e $e \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, sendo x_1, x_2, x_3 e x_4 as suas raízes.

Das relações de Girard, decorre que

$S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a}$,

$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{c}{a}$,

$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{d}{a}$ e

$P = x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{e}{a}$.

Consideremos agora a equação $a'y^4 + b'y^3 + c'y^2 + d'y + e' = 0$, cujas raízes são os quadrados das raízes da equação $(**)$. Então

$$\begin{aligned} S^2 &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) \\ &= \sum_{i=1}^{4} x_i^2 + 2S_2. \text{ Assim, } \left(-\frac{b}{a}\right)^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 + 2\left(\frac{c}{a}\right) \text{ e, consequentemente } \boxed{\frac{b'}{a'} = -\frac{b^2 - 2ac}{a^2}}. \end{aligned}$$

Da mesma forma, com um pouco mais de trabalho, verificamos que

$$\begin{aligned} (S_2)^2 &= \Big(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4\Big)^2 \\ &= \sum_{i \neq j} x_i^2x_j^2 + 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) + 2x_1x_2x_4(x_1 + x_2 + x_4) + 2x_1x_3x_4(x_1 + x_3 + x_4) + \\ &\quad + 2x_2x_3x_4(x_2 + x_3 + x_4) + 6x_1x_2x_3x_4, \text{ com } i, j \in \{1, 2, 3, 4\}. \text{ Logo,} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_2^2 &= \sum_{i\neq j} x_i^2x_j^2 + 2\left(\frac{e}{ax_4}\right)\left(-\frac{b}{a}-x_4\right)+2\left(\frac{e}{ax_3}\right)\left(-\frac{b}{a}-x_3\right)+2\left(\frac{e}{ax_2}\right)\left(-\frac{b}{a}-x_2\right)+\\
&\quad -2\left(\frac{e}{ax_1}\right)\left(\frac{b}{a}+x_1\right)+6\left(\frac{e}{a}\right)\\
&= \sum_{i\neq j} x_i^2x_j^2 - \frac{2be}{a^2}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)-8\left(\frac{e}{a}\right)+6\left(\frac{e}{a}\right)\\
&= \sum_{i\neq j} x_i^2x_j^2 - \frac{2be}{a^2}\left(\frac{x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4}\right)-2\left(\frac{e}{a}\right)\\
&= \sum_{i\neq j} x_i^2x_j^2 + \frac{2bd}{a^2}-2\left(\frac{e}{a}\right).\ \text{Portanto,}
\end{aligned}
$$

$\sum_{i\neq j} x_i^2x_j^2 = (S_2)^2 - \frac{2bd}{a^2} + 2\cdot\frac{e}{a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 - \frac{2bd}{a^2}+2\cdot\frac{e}{a}$ implica que $\boxed{\frac{c'}{a'}=\frac{c^2-2bd+2ae}{a^2}}$.

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
(S_3)^2 &= \Big(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4\Big)^2\\
&= \sum_{\substack{i\neq j, i\neq k\\ j\neq k}} x_i^2x_j^2x_k^2 + 2x_1x_2x_3x_4(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_4+x_3x_4),\ \text{com } i,j,k\in\{1,2,3,4\}\\
&= \sum_{\substack{i\neq j, i\neq k\\ j\neq k}} x_i^2x_j^2x_k^2 + 2\left(\frac{e}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)\ \text{e daí concluímos que}\ \sum_{\substack{i\neq j, i\neq k\\ j\neq k}} x_i^2x_j^2x_k^2 = \left(-\frac{d}{a}\right)^2-\frac{2ce}{a^2},
\end{aligned}
$$

donde $\boxed{\frac{d'}{a'}=-\frac{d^2-2ce}{a^2}}$.

É imediato que de $P^2 = x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2 = \left(\frac{e}{a}\right)^2$ segue que $\boxed{\frac{e'}{a'}=\frac{e^2}{a^2}}$.

Dividindo toda a equação $a'y^4+b'y^3+c'y^2+d'y+e'=0$ por a' e substituindo pelas expressões acima destacadas, temos que

$$
y^4+\left(-\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)y^3+\left(\frac{c^2-2bd+2ae}{a^2}\right)y^2+\left(-\frac{d^2-2ce}{a^2}\right)y+\frac{e^2}{a^2}=0.
$$

Finalmente, multiplicando esta última equação por a^2, vem

$$
\boxed{a^2y^4-(b^2-2ac)y^3+(c^2-2bd+2ae)y^2-(d^2-2ce)y+e^2=0}.
$$

Esta é a quártica cujas raízes são os quadrados das raízes de

$$
ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0.
$$

Logo, podemos escrever

$$
a^2x^8-(b^2-2ac)x^6+(c^2-2bd+2ae)x^4-(d^2-2ce)x^2+e^2=0.
$$

Conclusão

As equações polinomiais, hoje em dia, já não recebem a mesma atenção de outrora, e sua importância, embora não seja pequena, não se compara à das equações diferenciais, por exemplo. Ainda assim, elas continuam presentes no nosso cotidiano, em variados graus. Em particular, é no ambiente escolar que muitos problemas elementares, quando formulados em linguagem matemática, redundam em equações polinomiais a uma variável, daí a importância de se estudar essas equações e de saber como resolvê-las.

Ao apresentar o contexto histórico da resolução das cúbicas e quárticas, evidenciamos o caráter humano da Matemática, mostrando que ela é construída por pessoas como você e eu, e que, ao contrário do que muitos pensam, não é uma ciência fria e distante da experiência humana. Além disso, a emocionante narrativa da busca pelas soluções dessas equações, com as histórias incríveis de pessoas como Tartaglia e Cardano, serve como motivação para o estudo introdutório dos números complexos. Embora tenhamos abordado apenas superficialmente o relato da resolução da quíntica, que traz em seu bojo as extraordinárias e comoventes crônicas de gênios como Abel e Galois, acreditamos que nosso enfoque tenha sido suficiente para despertar a curiosidade no leitor interessado, de certa forma convidando-o a um aprofundamento no tema, o que lhe dará um vislumbre das razões que levaram à invenção de uma teoria tão abstrata como a Teoria de Galois, a qual foi o produto final da busca pela resolução das equações polinomiais.

Expusemos em linguagem simples a maneira de resolver as equações do 3º e 4º graus, e com isso acreditamos ter ajudado a preencher uma lacuna no ensino deste tópico na atualidade. Dizemos isso por experiência própria pois, nos tempos de estudante secundarista, sentimos extrema dificuldade em encontrar algum material que tratasse da resolução dessas equações, e foi uma satisfação elaborar este trabalho que poderá se prestar ao papel de mais uma fonte de pesquisa acerca do assunto.

Por fim, fizemos nossa humilde contribuição ao oferecer uma nova fórmula capaz de resolver as equações cúbicas por meio de operações algébricas elementares. Um pequeníssimo bloco na enorme e magnífica edificação que é a Matemática. Consideramo-nos, por ora, satisfeitos com os resultados alcançados por esta dissertação, e esperamos voltar a estas equações futuramente, quiçá com um novo método que possa finalmente contornar o caso irredutível das cúbicas reais ou com novas abordagens que solucionem a quártica. Afinal, nunca é demais descobrir novos caminhos, mesmo em assuntos que já são velhos conhecidos dos matemáticos.

Referências Bibliográficas

[1] BELLOS, Alex. *Alex no país dos números:* uma viagem ao mundo maravilhoso da Matemática. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.

[2] BERLINGOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. *A Matemática através dos tempos:* um guia fácil e prático para professores e entusiastas - Edição ampliada. São Paulo: Blucher, 2008.

[3] CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria e números complexos.* Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1993.

[4] GARBI, Gilberto Geraldo. *O romance das equações algébricas*, São Paulo: Livraria da Física, 2007.

[5] GARBI, Gilberto Geraldo. *A rainha das ciências:* um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

[6] GUEDJ, Denis. *O Teorema do Papagaio:* um thriller da história da Matemática. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

[7] KATHIB, Ahmed Sameer El. *Matemática, Da Vinci e Paciolo:* a história da Matemática e sua ligação com dois mestres do Renascimento. São Paulo: All Print, 2008.

[8] LIVIO, Mario. *A equação que ninguém conseguia resolver:* como um gênio da Matemática descobriu a linguagem da simetria. Rio de Janeiro: Record, 2008.

[9] MLODINOW, Leonard. *O andar do bêbado:* como o acaso determina nossas vidas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

[10] RIPOLL, Jaime Bruck; RIPOLL, Cydara Cavedon; SILVEIRA, José Francisco Porto da. *Números racionais, reais e complexos.* Porto Alegre: UFRGS, 2006.

[11] RUDIN, Walter. *Real and Complex Analysis.* Singapore: McGraw Hill Book Co, 1987.

[12] SINGH, Simon. *O livro dos códigos:* do antigo Egito à criptografia quântica. Rio de Janeiro: Record, 2005.

[13] STEIN, James D. *Como a Matemática explica o mundo:* o poder dos números no cotidiano. Rio de Janeiro: Campus, 2008.

[14] STEWART, Ian. *Uma história da simetria na Matemática.* Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

Páginas Web Consultadas

1. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cardan.html
2. http://www.robertnowlan.com/pdfs/Cardano,%20Girolamo.pdf
3. http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm25/cardano.htm
4. http://it.wikipedia.org/wiki/Girolamo_Cardano
5. http://www.nndb.com/people/528/000107207/
6. http://www.invata-mate.info/portugheza/historyDetail.htm?id=Cardan
7. http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/renascenca/cardano.htm
8. http://plus.maths.org/content/news-world-maths-eventful-life-lodovico-ferrari
9. http://www.gutenberg.org/files/19600/19600-h/19600-h.htm
10. http://ezerinfsk.webnode.sk/biographies/italy/gerolamo-cardano/
11. http://en.wikipedia.org/wiki/Ars_Magna_(Gerolamo_Cardano)
12. http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/renascenca/arsmagna.htm
13. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bombelli.html
14. http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n05/n05_Artigo01.pdf
15. http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/76/12%20Ulicio%20Pinto.pdf?sequence=1
16. http://www.mspc.eng.br/matm/calc_complexa01.shtml
17. http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2010/05/o-metodo-de-viete-para-equacoes-cubicas.html
18. http://www.math.vt.edu/people/brown/doc/fibo_number.pdf
19. http://pt.wikipedia.org/wiki/Ajuda:Guia_de_edi%C3%A7%C3%A3o/F%C3%B3rmulas_TeX

20. http://en.wikipedia.org/wiki/Wang_Xiaotong

21. https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/cubic.html

22. http://demonstrations.wolfram.com/CubicEquation/

23. http://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_function#General_formula_of_roots

24. http://www.profcardy.com/calculadoras/aplicativos.php?calc=9

25. http://legauss.blogspot.com.br/2010/01/uma-demonstracao-algebrica-para-o.html

26. http://latexbr.blogspot.com.br/2011/07/inserindo-figuras-no-latex.html

27. http://w3.impa.br/~gugu/equacoes.pdf

28. http://problemasteoremas.wordpress.com/2011/06/29/gervasio-gurgel-bastos-sobre-raizes-reais-da-cubica-real/

29. http://www.gyplan.com/pt/eqcubic_pt.html

30. http://www.arturekert.org/Site/Varia_files/NewCardano.pdf

31. http://www.igm.mat.br/mpd/complexos/mpd_nc_ra.htm

32. http://klein.sbm.org.br/wp-content/uploads/2012/11/Cardano4dez-2.pdf

33. http://aprendolatex.wordpress.com/2007/05/17/links-em-latex/

34. http://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Newton

Todas as páginas foram acessadas em 14/03/2013.

Softwares Utilizados

1. Texmaker 3.5.2;
2. Geogebra 4.2.24.0;
3. Microsoft Excel 2010;
4. Microsoft Word 2010;
5. Paint.NET v3.5.10;
6. Google Chrome Versão 25.0.1364.172 m.