UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

PAULO ROBERTO FIGUEIREDO PAMPHYLIO

A ABORDAGEM DA MODELAGEM MATEMÁTICA EM SITUAÇÕES-PROBLEMA ENVOLVENDO FUNÇÕES AFINS E QUADRÁTICAS NO ENSINO FUNDAMENTAL II

Macapá – AP
2017

PAULO ROBERTO FIGUEIREDO PAMPHYLIO

A ABORDAGEM DA MODELAGEM MATEMÁTICA EM SITUAÇÕES-PROBLEMA ENVOLVENDO FUNÇÕES AFINS E QUADRÁTICAS NO ENSINO FUNDAMENTAL II

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Amapá, como parte das exigências do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT -, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco.

Macapá – AP

2017

PAULO ROBERTO FIGUEIREDO PAMPHYLIO

A ABORDAGEM DA MODELAGEM MATEMÁTICA EM SITUAÇÕES-PROBLEMA ENVOLVENDO FUNÇÕES AFINS E QUADRÁTICAS NO ENSINO FUNDAMENTAL II

Data da Aprovação: ________ de __________________de _________

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco

Orientador - UNIFAP

Profº Dr. Erasmo Senger

UNIFAP

Profº Dr. José Walter Cárdenas Sotil

UNIFAP

Profº Ms. Carlos Alexandre Santana Oliveira

IFAP

Dedico esta dissertação às minhas riquezas: esposa Ângela Vaz e filha Leticia Pamphylio. E aos demais familiares, em especial, ao meu pai Manoel Leandro Pamphylio e minha mãe Dulcelina Figueiredo Pamphylio (*in memoriam*)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por sua infinita misericórdia, pelo dom da vida e de todos os milagres diários que tem me concedido. Aos meus pais e familiares por serem meu alicerce forte e porto seguro. Ao meu orientador Prof. Dr Guzmán Eulálio Isla Chamilco, pelo conhecimento compartilhado. Aos amigos e colegas de curso, em especial ao Prof Ms Marcelo Tadeu Uchôa Pinto, pelo apoio e incentivo.

A Matemática é o alfabeto que Deus usou para escrever o Universo.

- Galileu Galilei.

RESUMO

A Matemática é uma área de conhecimento complexa. A apreensão dos saberes que regem essa ciência por parte dos alunos em sala de aula pode ser um processo nada fácil. Nessa perspectiva, a Modelagem Matemática é um mecanismo que pode ser facilmente associado a alguns conteúdos que compõe o currículo da disciplina a fim de facilitar o processo de ensino-aprendizagem. Assim, neste trabalho, será implementada uma discussão acerca de como a Modelagem Matemática pode ser trabalhada em consonância com o estudo de funções afins e quadráticas, bem como será apresentada uma proposta de como aplicar Modelagem Matemática em funções, com o objetivo de aproximar a Matemática formal da Matemática cotidiana e, com isso, aproximar o aluno da sua realidade. Para tanto, foi realizada uma profunda pesquisa bibliográfica em acervos de autores renomados na área de Modelagem Matemática, Funções e Ensino-Aprendizagem de Matemática, o que possibilitou a formação de um consistente alicerce teórico para o desenvolvimento desta pesquisa. Por fim, verificou-se a significância da abordagem de Modelagem Matemática associada aos conteúdos do currículo do Ensino Fundamental II, em especial ao conteúdo de funções afins e quadráticas, na condição de mecanismo matemático capaz de desenvolver habilidades ímpares nos discentes, como a abstração e o raciocínio lógico.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, funções afins e quadráticas, ensino-aprendizagem.

ABSTRACT

Mathematics is a complex area of knowledge. The apprehension of the knowledge that governs this science from the students in the classroom can be an easy process. In this perspective, mathematical modeling is a mechanism that can be easily associated with some content that composes the curriculum of the discipline in order to facilitate the teaching-learning process. Thus, in this work, a discussion will be implemented about how mathematical modeling can be worked in consonance with the study of related and quadratic functions, as well as a proposal of how to apply mathematical modeling in functions, with the aim of approaching mathematics Of everyday mathematics and thereby bring the student closer to his reality. For that, a deep bibliographical research was carried out in collections of renowned authors in the area of Mathematical Modeling, Functions and Teaching-Learning of Mathematics, which made possible the formation of a theoretical foundation for the development of this research. Finally, we verified the significance of the mathematical modeling approach associated to the contents of the curriculum of Elementary School II, especially to the content of related and quadratic functions, as a mathematical mechanism capable of developing unique abilities in students, such as abstraction and Logical reasoning.

Keywords: Mathematical modeling, related and quadratic functions, teaching-learning.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na condição de uma ciência regida de saberes essenciais para a articulação de habilidades intelectuais, lógicas e cognitivas dos indivíduos, a Matemática constitui-se como primordial para o entendimento do cotidiano da sociedade. Um problema evidente no processo de ensino-aprendizagem dessa ciência é a associação inconveniente com a qual ela é, muitas vezes, trabalhada em sala de aula, o que leva o aluno a relacioná-la unicamente com a realização de atividades avaliativas, como provas e simulados, deixando de enfatizar a conexão da Matemática com o dia-a-dia de cada sujeito.

Nessa perspectiva, é interessante buscar uma ligação e explanação maior da Matemática formal com a Matemática do cotidiano, a fim de criar pontes entre o conhecimento científico e a realidade do aluno. Dessa forma, este trabalho pretende abordar os conhecimentos da Modelagem Matemática envolvidos com as funções afins e quadráticas na resolução de situações-problema que estão inseridas no cotidiano dos sujeitos. Para tanto, tomar-se-á como alicerce teórico e metodológico obras de autores renomados na área de Modelagem Matemática, funções afins e quadráticas e prática pedagógica em Matemática.

Com o intuito de demonstrar a intrínseca relação entre a Matemática e o cotidiano dos alunos, optou-se pelo desenvolvimento de atividades que pudessem expressar, por meio da Modelagem Matemática na resolução de problemas correlatados com funções afins e quadráticas, a dependência que o ser humano possui quanto ao conhecimento matemático demandado para a compreensão das ocorrências do seu dia-a-dia.

A compreensão de fenômenos que podem ser mensurados a partir de funções afins e quadráticas é primordial, uma vez que elas descrevem uma série de situações da sociedade, como a variação do preço de um determinado produto, a evolução de uma determinada área plantada de vegetais no decorrer dos anos, a relação entre a variação da altura de uma pessoa em função do comprimento do seu úmero, as trajetórias balísticas, dentre diversos outros fenômenos.

Nesse processo, o conhecimento acerca da Modelagem Matemática, isto é, de uma metodologia de ensino que visa à obtenção de um determinado modelo que seja capaz de responder com suficiência uma situação-problema que esteja imbrincada à realidade do aluno e, que ao mesmo tempo, sirva de sustentação para outras teorias e aplicações. Na verdade, um modelo matemático é um agrupamento substancial de equações e elementos matemáticos, articulado para equiparar-se a um dado fenômeno, o qual pode ter uma vertente biológica, física, química, social ou, até mesmo, psicológica.

Nesse sentido, o centro do discurso pedagógico tem um consenso global no que faz menção à importância da contextualização que deve fazer parte do processo de ensino-aprendizagem em Matemática, de forma a fazer com que os docentes sempre busquem maneiras de relacionar o conteúdo teórico matemático com as suas aplicações práticas, a fim de carregar esse conhecimento científico para o cotidiano dos alunos.

Nessa perspectiva, a presente pesquisa bibliográfica foi realizada com o objetivo de discutir sobre meios que sejam capazes de aprimorar a abstração e o raciocínio lógico dos alunos, tendo em vista que a Modelagem Matemática requer um significativo grau de atenção e de conhecimento do discente. Nesse cenário, observa-se que a abordagem dessa metodologia da modelagem em funções afins e quadráticas possibilita, acima das perspectivas, aproximar o aluno da sua realidade por meio da contextualização, a qual se caracteriza por ser fundamental para a efetivação do ensino-aprendizagem. Vale salientar que este trabalho constitui-se apenas de uma discussão com apresentação de propostas de atividades de sala de aula sobre como a Modelagem Matemática pode favorecer o estudo de funções, em virtude de aproximar o aprendente da sua própria realidade.

Assim, este trabalho foi desenvolvido em quatro capítulos: no intitulado A IMPORTÂNCIA DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO NO ENSINO FUNDAMENTAL II, é feita uma contextualização histórica da Matemática contemporânea, da sua significância e uma análise dos benefícios decorrentes do estudo da Matemática para os alunos do Ensino Fundamental II, embasando-se, especialmente, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de Matemática; no capítulo ASPECTOS DA MODELAGEM MATEMÁTICA, realiza-se um estudo sobre esse mecanismo essencial para o entendimento e descrição de fenômenos que cercam a sociedade; no capítulo seguinte, O ESTUDO DE FUNÇÕES AFINS E QUADRÁTICAS, faz-se uma exploração da exposição e apreensão desses conteúdos em sala de aula, enfocando recursos que sejam capazes de aperfeiçoar a compreensão desses assuntos por parte dos alunos; e, por fim, em A PRÁTICA PEDAGÓGICA: CONTEXTUALIZANDO A MATEMÁTICA PARA A RESOLUÇÃO DE

PROBLEMAS, discute-se a importância da criação de um contexto a fim de relacionar a Matemática teórica com a cotidiana para a resolução de situações-problema, com o uso da Modelagem Matemática.

2 A IMPORTÂNCIA DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO NO ENSINO FUNDAMENTAL II

A Matemática é uma área do conhecimento que gera dois vieses perceptivos distintos diante do contexto educacional. O primeiro relaciona-se à importância dessa disciplina, haja vista a sua conexão com o mundo e os fenômenos presenciados pela sociedade. O segundo, por sua vez, envolve o desagrado visualizado frequentemente no tocante à aprendizagem dos saberes matemáticos, a qual, alcançou o seu mais baixo nível, conforme Druck (2003)

> "Resultados tão desastrosos mostram muito mais do que a má formação de uma geração de professores e estudantes: evidenciam o pouco valor dado ao conhecimento matemático e a ignorância em que se encontra a esmagadora maioria da população no que tange à Matemática. [...] Se medidas urgentes não forem tomadas, a situação tenderá a se agravar: Há décadas estamos construindo uma sociedade de indivíduos que, ignorando o que é Matemática, se mostram incapazes de cobrar das escolas o seu ensino correto ou mesmo apenas constatar as deficiências mais elementares nesse ensino."

A averiguação da importância da Matemática em diversos setores da sociedade está fortemente imbricada à intensa conexão que ela tem com o cotidiano das pessoas, configurando-se como uma ferramenta capaz de auxiliar na resolução de situações-problema, caracterizando-se como essencial para a edificação dos saberes de outras áreas do conhecimento. Igualmente, esse componente curricular, apresenta grande caráter sugestivo na formação intelectual dos sujeitos, assim como na construção do raciocínio dedutivo e da capacidade cognitiva.

No que faz menção ao aborrecimento evidenciado na dificuldade do estabelecimento efetivo e consistente do processo de ensino-aprendizagem em Matemática, é válido mencionar como causas os problemas de cunho metodológicos, os quais, muitas vezes, constituem-se de procedimentos mecânicos e repetitivos, que valorizam a memorização em detrimento da verdadeira apreensão dos conteúdos estudados. Assim, é notória a urgente necessidade de rever metas, métodos e desmistificar o ensino tradicional, a fim de aproximar a Matemática teórica vista em sala de aula com a Matemática cotidiana que cerca o dia-a-dia dos discentes.

2.1 OS PRINCÍPIOS DA MATEMÁTICA

Segundo os PCNs para Matemática, essa disciplina, no viés do Ensino Fundamental, é regida por princípios, a partir dos quais se pode mensurar a importância desse componente curricular para o desenvolvimento dos sujeitos: “A Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar.” (BRASIL, 1997, p.19).

Além disso, Brasil (1997, p.19-20) menciona que:

> — A Matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente.
> — A atividade Matemática escolar não é “olhar para coisas prontas e definitivas”, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade.
> — No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a “falar” e a “escrever” sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados.
> — A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos.
> — A seleção e organização de conteúdos não deve ter como critério único a lógica interna da Matemática. Deve-se levar em conta sua relevância social e a contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno. Trata-se de um processo permanente de construção.
> — O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo.
> — Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade Matemática.
> — A avaliação é parte do processo de ensino e aprendizagem. Ela incide sobre uma grande variedade de aspectos relativos ao desempenho dos

> alunos, como aquisição de conceitos, domínio de procedimentos e desenvolvimento de atitudes. Mas também devem ser avaliados aspectos como seleção e dimensionamento dos conteúdos, práticas pedagógicas, condições em que se processa o trabalho escolar e as próprias formas de avaliação.

Para que todos esses princípios delineados acima fossem empregados para a Matemática, houve o vasto processo histórico que contribuiu para a consistência e compreensão dos saberes matemáticos, proporcionando a adequação desse componente curricular à realidade dos sujeitos-aprendentes, os quais estão inseridos em diversos setores sociais que demandam esse conhecimento, o qual se faz indispensável para o entendimento da sociedade e dos seus fenômenos.

2.2 CONTEXTO HISTÓRICO DA MATEMÁTICA

A área do saber científico denominado de Matemática originou-se na Idade Antiga para contemplar necessidades cotidianas da sociedade. Porém, com o passar nos anos, transformou-se em um grande complexo de diversas e longas disciplinas. Assim como as outras ciências, a Matemática repercute nas compreensões e instruções sociais, além de servir como um elemento potencialmente significativo no que diz respeito ao entendimento do mundo e dos fenômenos que nele acontecem.

Para entender como ocorreu o estabelecimento desses princípios elencados e como a Matemática fez-se tão essencial para a humanidade, a ponto de ser tratada como componente curricular nas instituições de ensino, vale rever uma linha do tempo da Matemática contemporânea no cenário brasileiro, a fim de desvendar os processos históricos de construção dessa ciência.

Encontramos nos PCNs que, nas décadas de 60/70, o ensino de Matemática, em diferentes países, foi influenciado por um movimento que ficou conhecido como Matemática Moderna (BRASIL, 1997, p.20). Esse movimento caracterizava-se por sua formalidade e rigorosidade em um ensino que prezava pela abordagem da Teoria dos Conjuntos e da Álgebra no ensino básico, o que exigia, conforme Kline (1976), a exploração de abstração em Matemática Elementar, o que acabava confundindo a mente dos alunos e causando neles aversão à disciplina, principalmente em se tratando de estudantes do Ensino Fundamental.

Nesse sentido, havia uma preocupação grandiosa com a simbologia Matemática, com a aproximação da Matemática escolar e a que regia o mundo científico e das tecnologias e dos pesquisadores, esquecendo a Matemática cotidiana. O Movimento da Matemática Moderna buscava fazer com que as pessoas inseridas na sociedade pudessem acompanhar e compreender o desenvolvimento tecnológico que necessita do saber matemático.

No cenário brasileiro, a Matemática Moderna difundiu-se, especialmente, por meio dos livros didáticos, apresentando uma grande influência. Esse movimento começou a declinar a partir da averiguação de inadequações dos seus ideais e das imperfeições oriundas do seu processo de instauração (BRASIL, 1997).

Não obstante, por volta da década de 80, foi lançado um documento nos Estados Unidos intitulado “Agenda para Ação”, o qual menciona a resolução de problemas como o centro das atenções no ensino da Matemática. Ainda, ele vislumbrava as perspectivas culturais na apreensão da Matemática, enfatizando a necessidade de novas discussões em torno da transmissão de conhecimentos dessa disciplina.

Os pensamentos visualizados nessa Agenda instigaram reformas voltadas para o modo de ensino da Matemática, as quais aconteceram até meados da década de 90, defendendo ferramentas que fomentassem o (a):

> • direcionamento do ensino fundamental para a aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão e não apenas voltadas para a preparação de estudos posteriores;
> • importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento;
> • ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas;
> • importância de se trabalhar com um amplo espectro de conteúdos, incluindo-se, já no ensino fundamental, elementos de estatística, probabilidade e combinatória, para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos;
> • necessidade de levar os alunos a compreenderem a importância do uso da tecnologia e a acompanharem sua permanente renovação. (BRASIL, 1997, p.21)

No Brasil, esses ideais têm sido debatidos e alguns deles constituem-se em propostas educacionais elaboradas por secretarias municipais e estaduais de educação, haja vista o reflexo dessas idéias em experiências vividas e presenciadas no contexto da educação brasileira. Contudo, ainda é evidente a persistência da abordagem de conjuntos em séries iniciantes, além da presença notável da álgebra nos anos finais, sustentando a desvinculação da Matemática com o cotidiano e com as situações presenciadas pelos indivíduos, assim como a construção precoce de conceitos que necessitam de um elevado grau de reflexão.

Nessa linha de raciocínio,

> Resultados obtidos nos testes de rendimento em Matemática, aplicados em 1993 pelo Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica (SAEB), indicavam que, na primeira série do ensino fundamental, 67,7% dos alunos acertavam pelo menos metade dos testes. Esse índice caía para 17,9% na terceira série, tornava a cair para 3,1%, na quinta série, e subia para 5,9% na sétima série.
>
> Em 1995, numa avaliação que abrangeu alunos de quartas e oitavas séries do primeiro grau, os percentuais de acerto por série/grau e por processo cognitivo em Matemática evidenciaram, além de um baixo desempenho global, que as maiores dificuldades são encontradas em questões relacionadas à aplicação de conceitos e à resolução de problemas. (BRASIL, 1997, p.21)

Uma parcela dos obstáculos relacionados ao ensino da Matemática está ligada à formação do professor, tanto no que diz respeito à fase inicial, de graduação, quanto no que faz menção à formação continuada, em cursos de pós-graduação e aperfeiçoamento. Pelos problemas averiguados nos processos formativos dos docentes, as aulas tendem a se basear nos livros didáticos, os quais, muitas vezes, não são suficientemente capazes de contribuir para uma aprendizagem significativa. Nesse sentido, a carência de qualificação desses profissionais da educação, a presença de metodologias de ensino ultrapassadas, assim como limitações relacionadas a situações de trabalho, funcionam, como diria Drummond, como pedras no meio do caminho para a implementação de propostas inovadoras.

Dessa forma, o ensinamento,

> [...] de conceitos, idéias e métodos sob a perspectiva de resolução de problemas ainda são bastante desconhecidas; outras vezes a resolução de problemas tem sido incorporada como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagens de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução conhecidas pelos alunos. (BRASIL, 1997, p.22).

As sugestões obstinadamente feitas na perspectiva de que conteúdos são pontes para o amadurecimento de pensamentos elementares (como as de proporcionalidade, equivalência, etc.) e devem ser escolhidos considerando sua potencialidade quer para instrumentação para a vida, quer para o desenvolvimento do raciocínio, nem sempre são visualizadas.

No que concerne à armação dos conteúdos, é presumível notar uma maneira muito nivelada de fazê-lo. Trata-se de uma estruturação alicerçada pela noção de pré-requisito, cujo único preceito é a conceituação da armação lógica da Matemática, "que desconsidera em parte as possibilidades de aprendizagem dos alunos. Nessa visão, a aprendizagem ocorre como se os conteúdos se articulassem como elos de uma corrente, encarados cada um como pré-requisito para o que vai sucedê-lo." (BRASIL, 1997, p.22).

O que acontece é que, em boa parte das vezes, o conhecimento prévio dos alunos é tratado com descaso ou é tido como não importante. Muitos profissionais da educação desvalorizam os saberes adquiridos pelos sujeitos-aprendentes, os quais são desenvolvidos a partir de experiências do cotidiano. Nessa perspectiva, a escola, de forma equivocada, acaba trabalhando de maneira metódica, descontextualizada, distanciando o conhecimento matemático teórico com o prático.

É importante mencionar o entendimento incorreto dado ao termo cotidiano, o que presumiria a abordagem de temáticas e conteúdos unicamente vinculados ao dia a dia do indivíduo. Se assim o fosse, muitos assuntos da Matemática, que são de extrema importância, seriam tratados com indiferença, pois, equivocadamente, não possuiria uma ligação imediata visível com a realidade do aluno, o que contrariaria a eficiência que se busca no processo de ensino-aprendizagem.

Abordada em diversas perspectivas como uma peça-chave no processo de ensino e de apreensão da Matemática, em decorrência da sua possibilidade de mostrar como se deu a criação de conceitos e técnicas desse ramo do saber científico, a História da Matemática, similarmente, tem se caracterizado como um tema específico, um elemento a mais a ser inserido no conjunto de conteúdos, que, na maioria das vezes, não transpassa a mera exposição de acontecimentos e biografias de matemáticos reconhecidos pelas suas descobertas.

O aconselhamento acerca da utilização de recursos didáticos, inserindo determinados materiais no contexto da sala de aula que venham a contribuir com a melhoria da transmissão e reflexão mediante as informações, é uma proposta presente em grande parte dos manuais curriculares. Contudo, há um caminho a ser percorrido para que a teoria seja posta em prática, pois ainda é perceptível uma falta de clareza no que faz menção à função dos recursos didáticos diante do processo de ensino-aprendizagem, assim como da conformação dos seus usos.

Destarte, fica nítido, portanto, que existem muitos obstáculos - tanto novos quanto antigos - a serem enfrentados, o que empreende uma ação conjunta no tocante à "operacionalização efetiva das intenções anunciadas nas diretrizes curriculares dos anos 80 e início dos 90, e a inclusão de novos elementos à pauta de discussões." (BRASIL, 1997, p.23).

2.3 O CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Mesmo com um entendimento raso da Matemática, é possível averiguar determinadas características que fazem parte dessa ciência, as quais se podem mensurar: a precisão, o rigor lógico, a abstração, a feição irrefutável de suas conclusões, assim como o grande campo de suas aplicações práticas.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997, p.23),

> A abstração Matemática revela-se no tratamento de relações quantitativas e de formas espaciais, destacando-as das demais propriedades dos objetos. A Matemática move-se quase exclusivamente no campo dos conceitos abstratos e de suas inter-relações. Para demonstrar suas afirmações, o matemático emprega apenas raciocínios e cálculos.
>
> É certo que os matemáticos também fazem constante uso de modelos e analogias físicas e recorrem a exemplos bem concretos, na descoberta de teoremas e métodos. Mas os teoremas matemáticos são rigorosamente demonstrados por um raciocínio lógico.
>
> Os resultados matemáticos distinguem-se pela sua precisão e os raciocínios desenvolvem-se num alto grau de minuciosidade, que os torna incontestáveis e convincentes.

A potencialidade da Matemática está, por sua vez, no seu caráter transformador e penetrante, pois, apesar de seu viés abstracionista, seus conceitos e conhecimentos originam-se na realidade dos sujeitos e encontram diversas aplicações práticas em vários setores da sociedade, como na indústria, no comércio, na educação, assim como em ciências como a Química, a Física, a Engenharia, as quais têm a Matemática como primordial para a construção e articulação das suas ideias.

Em seu nascimento, a Matemática edificou-se a partir de um conjunto de normas isoladas, oriundas da experimentação e totalmente imbricadas ao dia-a-dia das pessoas. Nesse sentido, ela não era um grupamento logicamente unido.

O nascimento da Geometria e da Aritmética se deu a partir de definições e temáticas que se interconectavam. Provavelmente, em decorrência disso, tenha se difundido o pensamento de que a Matemática é a área do conhecimento científico que trata das quantidades e do espaço, visto que teve origem na necessidade de se contar, de se calcular, de se medir, de se organizar os espaços e as suas formas.

> O desenvolvimento da Geometria e o aparecimento da Álgebra marcaram uma ruptura com os aspectos puramente pragmáticos da Matemática e impulsionaram a sistematização dos conhecimentos matemáticos, gerando novos campos: Geometria Analítica, Geometria Projetiva, Álgebra Linear, entre outros. O estudo das grandezas variáveis deu origem ao conceito de função e fez surgir, em decorrência, um novo ramo: a Análise Matemática. (BRASIL, 1997, p.24).

Nessa perspectiva, a Matemática constitui-se, assim, na ciência que se volta para o estudo das relações, ligações de dependência quantitativa entre os diversos tipos de grandezas, concentrando um grande rol de teorias, padrões, mecanismos de análise, métodos de pesquisa próprios, além de formas específicas de coletar e interpretar informações.

Apesar de as pesquisas na área da Matemática se mostrarem, por vezes relacionadas à Matemática pura, por outras à Matemática dita aplicada, sabe-se que elas estão concomitantemente conectadas. Sendo assim, os novos conhecimentos adquiridos pelos matemáticos puros refletem, a posteriori, em uma aplicação fundamental para o cotidiano da sociedade, bem como fenômenos particulares culminam em saberes matemáticos teóricos.

O conhecimento matemático é originário de um processo que requer a imaginação, um processo do qual fazem parte os contra-exemplos, as uniões, os erros, os acertos, as sugestões. Todavia, ele é exposto fora de contexto, atemporal, uma vez que é preocupação do matemático informar resultados e não o meio pelo qual os fez produzir.

Diante disso, a Matemática articula-se por meio de um processo entre diversos aspectos contrários: “o concreto e o abstrato, o particular e o geral, o formal e o informal, o finito e o infinito, o discreto e o contínuo. Curioso notar que tais conflitos encontram-se também no âmbito do ensino dessa disciplina." (BRASIL, 1997, p.24).

2.4 A MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

A Matemática contempla uma vasta área de ligações, regularidades e coerências que estimulam a investigação e fomentam as capacidades de generalizar, de projetar, de prever e de abstrair, promovendo a construção do raciocínio e do pensamento crítico, participativo e reflexivo. É parte integrante da vida de todos os indivíduos as técnicas Matemática envolvidas com a contagem, a comparação e a operação com quantidades. Ainda, nos cálculos de salários, de pagamentos e de consumo, na coordenação de atividades como a agricultura e a pesca. Tudo isso demonstra a imensa aplicação que a Matemática no contexto global.

Nesse cenário de possibilidades de aplicação, "tanto ligados às ciências da natureza como às ciências sociais e por estar presente na composição musical, na coreografia, na arte e nos esportes" (BRASIL, 1997, p.25), o potencial do conhecimento matemático deve ser examinado, indagado, observado, aproveitado, da maneira mais completa no âmbito do Ensino Fundamental.

Apesar de determinados saberes funcionarem como premissas para conhecimentos posteriores a serem apreendidos, é importante que se escolha um caminho a fim de que o aluno, realmente, interiorize os ensinamentos abordados em sala de aula. Por exemplo, é comum os docentes de Matemática ensinarem, de primeira instância, os numerais cardinais de zero a dez, para somente depois explicarem os números menores que cem e, em seguida, os menores que mil e assim sucessivamente. Também, observa-se que muitos educadores retratam a simbologia dos números racionais para, a posteriori, abordarem os decimais, assim como trabalham a ideia de semelhança de triângulos para, em seguida, desenvolverem os conhecimentos dos alunos mediante o Teorema de Pitágoras.

> Por vezes, essa concepção linear faz com que, ao se definir qual será o elo inicial da cadeia, tomem-se os chamados fundamentos como ponto de partida. É o que ocorre, por exemplo, quando se privilegiam as noções de "ponto, reta e plano" como referência inicial para o ensino de Geometria ou quando se tomam os "conjuntos" como base para a aprendizagem de

> números e operações, o que não é, necessariamente, o caminho mais adequado. (BRASIL, 1997, p.22)

Para esse fim, é preciso que a Matemática cumpra, na condição de área do saber indispensável para a formação psíquico-cognitiva, intelectual e racional dos sujeitos, seu papel de ciência transformadora, agindo na formação do pensamento, na otimização lógica para nortear caminhos mais práticos para a resolução de situações-problema, as quais fazem parte das suas vidas e das atividades que desempenham frente à sociedade na qual estão inseridos.

2.5 A PARTICIPAÇÃO DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO CIDADÃ

A função que a Matemática tem diante da formação cidadã brasileira é o alicerce principal dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática. Isto é, a Matemática proporciona a inclusão dos sujeitos no mercado de trabalho, nas relações socioculturais, enfim, em diversos setores da sociedade brasileira.

A multiplicidade de culturas, ou seja, a miscigenação evidenciada na sociedade brasileira origina vários modos de se viver distintos, assim como diversos tipos de vieses de valores, crenças e saberes. Tudo isso se apresenta para a educação Matemática como um desafio envolvente.

> Os alunos trazem para a escola conhecimentos, ideias e intuições, construídos através das experiências que vivenciam em seu grupo sociocultural. Eles chegam à sala de aula com diferenciadas ferramentas básicas para, por exemplo, classificar, ordenar, quantificar e medir. Além disso, aprendem a atuar de acordo com os recursos, dependências e restrições de seu meio [...] todo aluno brasileiro faz parte de uma sociedade em que se fala a mesma língua, se utiliza o mesmo sistema de numeração, o mesmo sistema de medidas, o mesmo sistema monetário; além disso, recebe informações veiculadas por meio de mídias abrangentes, que se utilizam de linguagens e recursos gráficos comuns, independentemente das características particulares dos grupos receptores. (BRASIL, 1997, p.25).

Dessa forma, o currículo de Matemática deve buscar a valorização da diversidade cultural e social, evitando o confronto e choques culturais depreciativos, assim como deve instigar o estudante, a fim de que ele se torne um sujeito crítico, participativo e reflexivo diante da sociedade no qual está inserido, atuando, dessa forma, como transformador do seu próprio espaço e do espaço social coletivo.

O entendimento e a tomada de posições frente a questões sociopolíticas também dependem da compreensão de informações significativamente complexas, grande parte das vezes contrárias, as quais contemplam dados estatísticos e índices publicados pelos veículos comunicativos. Isto é, para que ocorra o exercício da cidadania, é preciso ter o entendimento sobre o cálculo, o raciocínio, a medição, a argumentação, o tratamento de informações por meio da estatística, dentre várias outras habilidades.

O mundo do trabalho exige indivíduos suficientemente capacitados para fazer o uso de tecnologias cada vez mais complexas e labirínticas, além de necessitar da compreensão de linguagens de máquinas, a fim de auxiliar na manipulação dos recursos tecnológicos tão importantes para a aceleração da produção demandada para suprir os anseios da sociedade globalizada.

Para isso, a transmissão e a apreensão do conhecimento matemático contribuirão na medida em que for profundamente explorado, o que pode ser feito com métodos e mecanismos de ensino que privilegiem o desenvolvimento de estratégias, a argumentação, o debate, a criação do senso crítico e reflexivo, a criatividade, o trabalho em equipe, o poder da iniciativa, a autonomia, todos decorrentes da autoconfiança baseada nos conhecimentos adquiridos.

2.6 A IMPORTÂNCIA DA FORMAÇÃO CONTINUADA DO PROFESSOR

A pesquisa no ramo do saber matemático no Brasil é conhecida nacional e internacionalmente em decorrência da sua elevada qualidade científico-acadêmica. Porém, há um ponto contraditório, que é o do ensino da Matemática nas instituições educacionais no país, as quais deixam muito a desejar. De acordo com sensos nacionais e internacionais, os estudantes brasileiros apresentaram, nos últimos anos, um fraco desempenho no componente curricular da Matemática. Em consequência disso, o ensino da Matemática apresenta-se como um dos grandes empecilhos no que diz respeito à qualidade plena da educação brasileira.

Os desafios da educação Matemática são numerosos, a contar da carência de professores, os quais, muitas vezes, são despreparados para lidar com as dificuldades de ensino, muitos apresentam metodologias inadequadas para suprir os anseios de aprendizagem dos discentes, ocasionando repulsa dos alunos pela disciplina. Nessa perspectiva, vários pesquisadores da educação visam explorar essas problemáticas no ensino da Matemática, a fim de identificar elementos que sejam capazes de solucioná-los, para proporcionar uma educação com informações capazes de suprir os anseios dos discentes no processo de ensino-aprendizagem.

Tido como peça indispensável nesse processo de ensino-aprendizagem, o professor é um elemento que urge ser analisado, uma vez que suas abordagens, estilo de vida, concepções religiosas e culturais, dentre outros fatores, estão intimamente relacionados com a aprendizagem do educando.

Lorenzato (2004) discorre com mais profundidade acerca dessa análise e afirma que a graduação não consegue ensinar como ser um professor, o que costumeiramente acontece é por meio das experiências com seus mestres que o futuro docente vai aprender como ser um professor. Assim, é essencial que se conheça como esses profissionais da educação atuam e de que forma estão envolvidos com a aprendizagem dos estudantes.

Muitos estudos apontam que os cursos de formação continuada para professores podem mostra-se peças fundamentais para o cumprimento dessa função, a partir do instante em que se apropriam desses ambientes para compreender e conhecer as concepções, crenças e práticas dos docentes e, além disso, mostrar o que deve ser feito para contribuir com um processo de ensino-aprendizagem mais significativo.

Nesse cenário, a formação continuada para professores de Matemática tem o intuito de promover espaços para debates entre os docentes, os quais podem compartilhar informações, conhecimentos, experiências e diversos meios que os auxiliem em sala de aula. Ademais, é possível a realização de uma verificação conjunta de suas crenças, por meio dos seus discursos, de suas palavras, assim como das suas possíveis flexibilidades acerca do entendimento de conceitos, além de promover a constituição de grupos de estudo e de pesquisa.

A linha de pesquisa da Educação Matemática é ramo a ser pesquisado que pode ser compreendido como área profissional e científica, cujo intuito principal é o de analisar e instigar modificações para o âmbito do ensino de Matemática, visto que a Matemática aparece no cenário educacional como uma vilã no que se refere à qualidade do ensino.

Como o objetivo de melhor entender os complexos aspectos relacionados com o ensino da Matemática, Fiorentini & Lorenzato (2006) retratam a diferença entre a formação de um matemático e de um educador matemático.

> O profissional matemático tende a conceber a Matemática como um fim em si mesma e quando este profissional chega à sala de aula tende a priorizar os conteúdos formais e uma prática voltada para formação de novos pesquisadores. Em contrapartida, o educador matemático tende a conceber a Matemática como um meio ou instrumento importante à formação intelectual do educando, ou seja, o educador matemático tende a minimizar a dicotomia que existe entre educação e Matemática. (DUARTE e MESQUITA, 2009, p.2).

Conforme ainda Lorenzato (2003) complementa essa ideia apontando dois mitos relacionados à educação, os quais se mostram prejudiciais à aprendizagem dos educandos.

> O primeiro é acreditar "conhecer o conteúdo é condição necessária e suficiente para saber ensiná-lo." O segundo decorre da crença de que "quem sabe o mais, sabe o menos", isto é, se o professor estudou no curso de licenciatura em Matemática, assuntos tais como matriz, integrais, equação e geometria diferencial, então está apto a ensinar Matemática no Ensino Médio ou Fundamental. (LORENZATO, 2003)

É bem verdade que os conteúdos são elementares para um curso de licenciatura em Matemática, porém, apenas entender o conteúdo não é suficiente para transmiti-lo. Ensinar requer muito mais do educador. Segundo Paulo Freire, em seu livro Pedagogia da Autonomia (1996), ensinar requer pesquisa, respeito aos conhecimentos dos aprendentes, comprometimento, bom senso, consciência do inacabado, corporeificação da palavra pelo exemplo, isto é, não basta apenas dar exemplos de como ser mais e melhor, faz-se necessário ser exemplo, uma vez que os estudantes visualizam o professor como a figura na qual eles podem se espelhar. Contudo, a noção e percepção de que o professor é uma figura-chave na aprendizagem dos estudantes é uma ideia pouco vigorada.

De acordo com Duarte & Mesquita (2009, p.3),

> Até mesmo os órgãos responsáveis pelo ensino não tem se preocupado em saber se o professor realmente está apto para enfrentar as diversas situações de uma sala aula. E o que se tem visto, é profissional de várias áreas do conhecimento assumindo salas de aulas sem preparação alguma. A situação é ainda mais grave quando se observa a grande carência de profissionais para suprir a demanda nacional. Segundo o presidente da CAPES, Divo Ristoff, nos últimos 15 anos, as universidades formaram 110 mil professores de Matemática, mas apenas 43 mil estão no magistério. Além disso, os professores em exercício apresentam em média uma faixa etária de 40 anos, fato indicativo de que as pessoas que se formam não estão seguindo a carreira de magistério. Ai se encontra o ponto chave deste discurso, os professores que estão em exercícios passaram pela faculdade

> a pelo menos 20 anos atrás, a sociedade mudou, os alunos mudaram, mas a escola continua a mesma. Em contrapartida suas necessidades e funções mudaram.

Nesse plano de fundo, a formação continuada dos professores configura-se como um meio em que os professores em atividade possam se atualizar, a fim de oferecer ao aluno contemporâneo, atualizado e tecnológico os benefícios de um processo de ensino inovador. Com uma formação contínua, o educador tem a capacidade de evoluir e melhorar as suas habilidades, ampliando suas perspectivas de atuação, flexibilizando seus pensamentos, fomentando a quebra de paradigmas, dentre diversas outras vantagens. “Este é o profissional que a sociedade atual busca apesar de poucas instituições de ensino estarem comprometidas com este tipo de formação.” (DUARTE e MESQUITA, 2009, p.4).

3 ASPECTOS DA MODELAGEM MATEMÁTICA

O processo de Modelagem Matemática configura-se como um método de ensino capaz de conseguir desenvolver um modelo matemático suficiente para representar ou proporcionar soluções para determinados problemas que são vistos no cotidiano do estudante. Conforme Bassanezi (2002, p.174), “um modelo matemático é um conjunto consistente de equações ou estruturas Matemáticas, elaborado para corresponder a algum fenômeno – este pode ser físico, biológico, social ou psicológico”.

Nesse plano de fundo, a Modelagem Matemática está a cada dia que passa recebendo mais seguidores, isto é, docentes com elevado grau de modernização e criatividade, habilitados para integrar a realidade do discente aos saberes da Matemática, por meio da criação de modelos condizentes com o mundo real.

Cheballard *et al*. (2001) compreendem que boa parcela dos conhecimentos matemáticos podem ser atribuídos à Modelagem Matemática. De acordo com eles, um elemento importante no processo científico e intelectual matemático está fortemente imbricado à articulação de um modelo matemático do mundo real, a partir do qual é possível de se obter dados para serem investigados, a fim de responder algum questionamento levantado.

Nessa perspectiva, Bassanezi (2002, p.18) refere-se ao emprego da Matemática relacionada à modelagem:

> O objetivo fundamental do “uso” de Matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a Matemática pode ser vista como instrumento intelectual capaz de sintetizar idéias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camuflados num emaranhado de variáveis de menor importância.

3.1 HISTÓRICO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Por volta de 1980, conforme os pressupostos de Bassanezi (2002), a Modelagem Matemática, de início, foi operada na área de BioMatemática. Nesse período, os estudos envolviam modelos de crescimento de processos cancerígenos. A seguir, realizou-se uma experiência com a modelagem, com turma regular de

Engenharia de Alimentos, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, obtendo-se resultados satisfatórios.

Segundo Viecili (2006, p.23),

> Na educação brasileira, [...] a Modelagem Matemática teve início com os cursos de especialização para professores, em 1983, na Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Guarapuava – FAFIG, hoje Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO. A modelagem começou a ganhar adeptos, pois a preocupação da maioria dos professores era buscar novas práticas para o ensino de Matemática – metodologias que partissem de situações vivenciadas pelo aluno do ensino Fundamental e Médio, no seu dia-a-dia. No entanto, acresce o autor, os primeiros trabalhos enfocando a modelagem como uma alternativa para o ensino de Matemática só começaram a ser elaborados sob forma de dissertações e artigos a partir de 1987.

No presente, em decorrência dos modernos e inovadores softwares de computadores, cálculos altamente complexos - que antes levariam horas para serem feitos - são realizados em questão de segundos. Muitas das tarefas do dia-a-dia passarem a ser realizadas por máquinas. Com o progresso do ramo da informática, a comunicação passou a ser facilitada, a conexão entre povos de regiões extremas passou a ser realidade, as informações chegam em tempo real nas televisões, o que demonstra uma revolução no modo de vida da população global.

Com o fenômeno da informática, aconteceu um processo de distanciamento das pessoas com relação à Matemática, o que levou a uma depreciação dos saberes matemáticos, pois muitos sujeitos não veem tanta necessidade de fazerem cálculos e resolver problemas, ou decorar fórmulas, manualmente já que possuem os computadores para realizarem esses serviços. Um aspecto importante a ser ressaltado faz menção ao poder proveniente do saber matemático. Conforme Barbosa (1999), a Matemática pode auxiliar como ferramenta de moderação social: no fim das contas, os números conduzem o universo; escolhas são feitas com base em fórmulas, em cálculos, em estatísticas; planejamentos de Estado são realizados com a colaboração da Matemática.

“Nesse sentido, muito se questiona a função da Matemática na formação dos alunos. Qual educador que nunca foi questionado pelo seu aluno: ‘Para que serve mesmo este conteúdo que estamos vendo?’.” (VIECILI, 2006, p.24). Possivelmente, a Modelagem Matemática possa consistir em uma solução para esse questionamento, pois ela visa entender e interpretar os variados fenômenos e situações que ocorrem no cotidiano social. A Modelagem propicia facilidade no processo de interpretação dos conceitos e conteúdos matemáticos. É de fundamental relevância descrever esses acontecimentos, averiguá-los e entende-los, fomentando debates críticos e reflexivos diante desses fenômenos que cercam a vida em sociedade. A Modelagem Matemática configura-se como uma representação do mundo real transpassando para uma interpretação potencialmente significativa do mesmo.

3.2 A MODELAGEM MATEMÁTICA NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

É desejável que durante a Modelagem, ocorra a aprendizagem de conceitos e técnicas do conteúdo que está sendo estudado. Assim o objeto de estudo pode contribuir como agente motivador da aprendizagem e dar suporte para a sua ocorrência. Nesse sentido, encontramos em D'Ambrosio (1986) um forte argumento, que vem corroborar esta expectativa:

> [...] o ponto de vista que me parece de fundamental importância e que representa o verdadeiro espírito da Matemática é a capacidade de modelar situações reais, codificá-las adequadamente, de maneira a permitir a utilização das técnicas e resultados conhecidos em outro contexto, novo, isto é, a transferência de aprendizado resultante de uma certa situação para a situação nova é um ponto crucial do que se poderia chamar aprendizado da Matemática, e talvez o objetivo maior do seu ensino (D'AMBROSIO, 1986, p.44).

Assume-se a Modelagem Matemática como um mecanismo de ensino e de aprendizagem pelo reconhecimento acerca do fato de que o seu emprego no âmbito da escola possibilita o desenvolvimento de diversos aspectos importantes, inclusive mencionados pela Educação Matemática, nos sujeitos.

Nessa linha de raciocínio, considera-se a Modelagem Matemática como sendo uma representação, com o auxílio da Matemática, de uma dada situação-problema real, demonstrando o desenvolvimento de uma atividade conforme um ciclo de modelagem, no qual a determinação do tema a ser tratado tem a participação de todos os sujeitos relacionados nesse processo.

3.3 ETAPAS DA MODELAGEM MATEMÁTICA

O procedimento de um modelador envolve várias etapas que ocorrem na prática. As etapas que apresentamos aqui são possíveis de serem encontradas na literatura. Há muita similaridade entre elas. Algumas são mais sucintas, outras mais detalhadas, mas todas são representações simplificadas e explicativas do processo de Modelagem Matemática.

Segundo Bassanezi (2002, p.27-31), são cinco as etapas da Modelagem Matemática:

a) Experimentação:

Nesta fase se faz a obtenção dos dados e o estudo inicial do assunto que envolve o problema.

b) Abstração:

Esta fase tem como objetivo a criação dos modelos matemáticos. Nesse sentido, é feita a seleção de variáveis, isto é, definir claramente quais são as variáveis que vão agir sobre o sistema, bem como dando ênfase na criação dos problemas teóricos que se pretende resolver, formulando hipóteses.

Em um próximo passo é feita a eliminação de variáveis menos importantes, de forma a deixar o problema matemático tratável, chamado de simplificação. Os fenômenos tratados na Matemática geralmente são muito complexos quando considerados todos os seus detalhes.

c) Resolução:

Obtenção do modelo matemático com a tradução da linguagem natural das hipóteses para uma linguagem Matemática coerente, mais “natural”.

d) Validação:

Aceitação ou rejeição do modelo de acordo com o grau de aproximação com o objeto de estudo. E analisado se o modelo proposto serve para resolver o problema e fazer previsões de novas situações.

e) Modificação:

Reelaboração ou reformulação do modelo, caso este não tenha sido validado na etapa anterior.

Criação de novas hipóteses, caso necessário, o que implicará numa reformulação do modelo.

3.4 A ABORDAGEM DA MODELAGEM MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

De forma geral o ambiente a que nossos estudantes estão habituados é característico das aulas discursivas e expositivas, com pouco espaço para interação (ALMEIDA, 2002a; FERRUZZI, 2003). Desse modo, é adequado que a integração das atividades de Modelagem Matemática em sala de aula seja um processo gradativo, permitindo ao estudante a familiarização com o ambiente em tal perspectiva. Com a expressão “processo gradativo”, queremos dizer que a participação dos estudantes em termos de grau de envolvimento na atividade deve aumentar no decorrer do processo em foco.

Os estudantes devem perceber desde o princípio a importância e a utilidade do processo de modelagem. Então é sugerido que as atividades de ensino ponderem três diferentes momentos (ALMEIDA, 2002a, 2002b).

De primeira instância, é sugerido o desenvolvimento de um trabalho de modelagem que fora de antemão já articulado. Assim, ele deve abranger todas as fases do processo, além de que se deve optar por um assunto não tão complexo, a fim de que os alunos realmente apreendam o ensinamento de forma efetiva.

Em segundo, o docente deve propor aos alunos uma situação-problema já determinada, junto com um grupo de informações, afim de que os alunos participem do processo, com a colaboração na construção de hipóteses, a partir de dedução de do modelo empregado e a sua futura corrobação.

Em um terceiro instante, os discentes são estimulados a comandarem o processo de modelagem baseado em uma situação-problema por eles selecionada, com a devida assistência do professor.

4 O ESTUDO DE FUNÇÕES AFINS E QUADRÁTICAS

Nesta seção daremos um breve histórico da importância das funções, conhecer seu conceito, o qual tem bastante praticidade no cotidiano das pessoas.

4.1 EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO ATRAVÉS DO TEMPO

Historicamente, a construção do conceito de função deu-se muito lenta, demorando alguns séculos para chegar à forma na qual se encontra hodiernamente nos livros de Matemática da atualidade.

Embora não haja consenso acerca da época em que se nasceu a noção de função, sabe-se que esta teve início na tentativa de compreender e descrever os fenômenos naturais ou questões de ordem práticas.

Conforme Youschkevith (1976 *apud* ZUFFI, 2001), a edificação da ideia de função contempla três momentos: a Antiguidade, período em que são observadas algumas situações de dependência entre duas quantidades, sem destacar ainda as ideias gerais de quantidades variáveis e de funções. O segundo momentos corresponde à Idade Média, em que visualiza-se as ideias de função expressas por meio da Geometria e da Mecânica, em que cada caso concreto de dependência entre duas quantidades eram expostas por meio de um gráfico ou por uma descrição verbal. E, por fim, o período Moderno, no qual começam a prevalecer expressões analíticas de funções, sendo, no final do século XVII, o momento mais intenso no desenvolvimento da noção de função, aproximando da que atualmente conhecemos.

Segundo Zuffi (2001), na Grécia Antiga, a noção de função aparece em estudos ligados a fenômenos naturais, como por exemplo, entre os pitagóricos que estudavam a interdependência quantitativa de diferentes quantidades físicas. Nesta época, cada problema era tratado de maneira particular o que exigia uma nova análise, não havendo preocupação com generalizações.

De acordo com Boyer (1974), no período Alexandrino, em estudos da astronomia, foi desenvolvida uma trigonometria completa de cordas e calculadas tabelas de quantidades que são similares às atuais tabelas de seno. Já entre registros babilônicos, cerca de 2000 anos a.C., evidências de relações funcionais estão presentes nas tabelas sexagesimais de quadrados, cubos, raízes, multiplicações, entre outras.

Apesar destas manifestações, não há registros de que os povos antigos tenham criado uma noção geral de quantidade variável ou de função.

Durante a Idade Média, a noção de função amadurecia gradativamente na chamada filosofia natural, principalmente em relação aos fenômenos físicos. Nesta época a noção de função aparece numa forma mais genérica.

Segundo Boyer (1974, p. 193), Nicole Oresme (1323-1382), matemático francês, desenvolveu a teoria das latitudes e longitudes para descrever os diferentes graus de intensidade das variáveis velocidade e tempo relacionados durante o movimento de um corpo que se desloca com aceleração constante. Oresme contribuiu de maneira significativa para o desenvolvimento do conceito de função e foi o precursor na representação gráfica de uma função.

Em Zuffi (2001), Galileu Galilei (1564-1642), em seus estudos sobre o movimento de corpos em queda a partir do repouso, introduziu o aspecto quantitativo nas representações gráficas, expressando relações funcionais através da relação entre causas e efeitos e em linguagem de proporção. Para a autora, a partir dos estudos realizados no campo algébrico, o desenvolvimento da noção de função foi então impulsionado. François Viète (1540-1603), ao propor a representação simbólica de uma quantidade desconhecida, possibilitou exprimir relações através de fórmulas algébricas. No entanto, seu maior interesse estava em obter a solução de problemas específicos, onde não havia a ideia de relacionar duas grandezas que variam.

De acordo com Eves (2004), coube a Descartes (1696-1750), em seus estudos sobre equações indeterminadas, introduzir a ideia de que uma equação em x e y é uma forma de expressar uma relação de dependência entre quantidades. Nesta época, as curvas eram o principal objeto de estudo na Matemática. Alguns fenômenos passaram a ser representados por curvas e estas passaram a ser expressas por equações.

Segundo Boyer (1974), Isaac Newton (1642-1727) utilizou o termo “fluentes” para apresentar alguma relação entre variáveis. E, em 1673, Leibniz utiliza a palavra “função” em seu manuscrito intitulado “Methodus tangentium inversa, seu de fonctionibus” para se referir à quantidade variando ponto a ponto de uma curva. Alguns anos mais tarde, em 1698, Jean Bernoulli utiliza a palavra “função” ao se referir a quantidades que dependem de uma variável e propõe a primeira definição explícita de uma função como expressão analítica, sem estabelecer, no entanto, o modo de construir uma função a partir da variável independente.

Leonhard Euler, no século XVIII, foi o primeiro a tratar o cálculo como uma teoria das funções. A definição de função proposta por ele, distingue quantidades variáveis das quantidades constantes, no entanto, não explicita o que seria uma "expressão analítica", termo presente em sua definição. Passado algum tempo, Euler propõe uma nova definição onde estende seu conceito de função:

> Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que, se as outras mudam, estas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar estas quantidades de funções destas últimas. Esta denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, de qualquer maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas de funções de x. (EULER apud ROQUE, PITOMBEIRA, 2012, p. 232-233).

Euler também define função contínua e função descontínua, no entanto seu entendimento de continuidade é bem diferente do que temos hoje. Para ele, uma função seria contínua se, ao longo de todo seu domínio, fosse representada apenas por uma expressão analítica. Mais tarde, Cauchy propõe um exemplo que contrapõe esta definição.

Segundo Kleiner (1989), Louis Lagrange (1736-1813), em seus estudos sobre funções, desenvolveu a notação atual para derivadas de várias ordens de uma função. Em sua definição de funções, propõe que estas representam uma combinação de operações distintas sobre quantidades conhecidas a fim de se obter os valores de quantidades desconhecidas.

Durante todo o século XVIII, observamos uma despreocupação em formalizar o conceito de função. Mas, no século seguinte, a fundamentação rigorosa da Análise passou a fazer parte dos trabalhos de vários matemáticos da época.

De acordo com Zuffi (2001), o matemático francês Augustin Cauchy (1789-1857) estudou e aprofundou a concepção de função, desenvolvendo uma teoria sobre variáveis complexas. No entanto, sua definição para funções ainda era imprecisa.

Das definições para funções propostas naquela época, a que mais se aproxima da aceita atualmente foi apresentada, em 1837, por Peter Gustav Lejeune

Dirichlet:

> […] se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo, que sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x. (BOYER,1974, p. 405)

Ainda era necessário estabelecer o conceito de “conjunto” e de “números reais”, mas faltava pouco para que o conceito de função fosse definitivamente estabelecido.

Durante o ano de 1872, muitos avanços foram feitos em relação à noção de número real e de conjunto infinito. Entre os matemáticos colaboradores estavam Bernhard Bolzano (1781-1848), Karl Weierstrass (1815-1897) e Julius Dedekind (1831-1916). O matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932), além de sua contribuição à noção de número, propôs reduzir o conceito de função ao conceito de relação unívoca (SIERPINSKA apud ZUFFI, 2001, p. 14).

Em meados do século XX, um grupo de matemáticos franceses, entre eles André Weil e Jean Dieudonné, que adotou o pseudônimo de Nicolas Bourbaki, publicou vários trabalhos apresentando a Matemática moderna, que teve como consequência a redefinição de conceitos básicos na linguagem de conjuntos. Em 1939, em uma de suas publicações, este grupo propõe a seguinte definição de função:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. A relação entre uma variável x de E e uma variável y de F, é chamada de uma relação funcional em y se, para todo $x \in E$, existe um único $y \in F$ que está associado, na relação dada, com x. Damos o nome de função para a operação que, de alguma forma, associa a cada elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que é associado a x pela relação estabelecida; diz-se que y é o valor da função relativo ao elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional dada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função. (KLEINER, 1989, p. 18, tradução própria).

Este breve panorama histórico nos mostra como foi complexo o caminho percorrido pelos matemáticos em relação ao desenvolvimento histórico do conceito de função. De acordo com Zuffi (2001), os problemas que ocuparam os matemáticos no decorrer dos tempos exerceram forte influência na elaboração do conceito de função. No início, quando as preocupações eram descrever e compreender os fenômenos naturais, identificamos a dependência entre variáveis de uma maneira qualitativa; posteriormente, evidenciamos o aparecimento das representações gráficas e descrições verbais; mais tarde, com o desenvolvimento da Matemática moderna, surgem as funções sendo representadas como expressões analíticas e, finalmente, como uma relação entre conjuntos.

A autora também destaca que, entre os professores do ensino médio, a linguagem Matemática utilizada para expressar suas próprias concepções sobre o conceito de função apresenta visões coincidentes com os momentos históricos detalhados anteriormente. Assim, na formalização do conceito de função estão muito presentes as ideias apresentadas nas definições de Dirichlet e Bourbaki e, no tratamento informal, ou exemplos e resoluções de problemas, as ideias se assemelham à definição de Euler.

4.2 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS

Para exemplificar a maneira como se apresenta a definição de função em alguns livros didáticos, incluímos, na sequência, as definições propostas por três livros, sendo o primeiro Conceitos fundamentais da Matemática, de Bento de Jesus Caraça (1989); o segundo A Matemática do Ensino Médio, de Elon L. Lima, Paulo C. P. de Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto C. Morgado (2006); e, por último, Um Curso de Cálculo, de Hamilton Luiz Guidorizzi (2001). Estes livros, geralmente, são fontes de estudo de vários estudantes de cursos de graduação e também referência para professores de Matemática.

Caraça (1989) propõe a definição de função através de uma série de reflexões lógicas a respeito da utilização de instrumentos matemáticos, a fim de investigar fenômenos naturais que de algum modo evidenciam uma relação de dependência. Além disso, procura um modo de quantificar as variações qualitativas destes fenômenos. Resumidamente, o autor explica como surgiu a necessidade de criar um instrumento matemático que estudasse a variação de quantidade, ou seja, a lei quantitativa, cuja essência fosse a correspondência entre dois conjuntos.

Segundo o autor, o conceito de função apareceu no campo matemático para servir de instrumento próprio para o estudo destas leis. Em seguida, propõe a definição de função como uma correspondência de conjuntos: “Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se $y = f(x)$, se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido x → y. A x chama-se variável independente, a y variável dependente." (1989, p. 129).

O livro traz ainda uma representação analítica e geométrica para função. A primeira representação consiste "em dar um conjunto de operações de modo tal que, por meio delas, se possa fazer corresponder a cada valor de a de x um valor b de y." (1989, p. 130). Para a representação geométrica, considera um sistema de referência cartesiano e uma curva qualquer de modo que esta não seja intersectada em mais de um ponto por uma reta traçada paralela ao eixo vertical. Desta forma, a correspondência é unívoca no sentido x → y, o que significa que, para cada a de x, encontramos somente um b de y. (1989, p. 133-134).

O segundo livro analisado propõe a seguinte definição para função:

> Dados os conjuntos X, Y, uma função f: X→ Y (lê-se: "uma função de X e Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento x ∈ X um elemento y = f(x) ∈ Y. O conjunto X chama-se o domínio e Y é o contradomínio da função f. Para cada x ∈ X, o elemento f(x) ∈ Y chama-se imagem de x pela função f, ou valor assumido pela função f no ponto x ∈ X. Escreve-se x → f(x) para indicar que f transforma (ou leva) x em f(x). (LIMA, et al., 2006, p. 38)

Observamos que a definição acima apresenta a relação de correspondência entre conjuntos, a necessidade de uma lei que defina como associar os elementos destes conjuntos, os conceitos de domínio, contradomínio e imagem e, implicitamente, a noção de variável.

Na sequência, os autores fazem algumas recomendações em relação à linguagem Matemática adequada no trato de funções e destacam que uma função é constituída de três partes: domínio, contradomínio e a lei de correspondência x → f(x), sendo que as duas primeiras podem ficar subentendidas ao definirmos "a função f".

Guidorizzi (2001, p. 26), em seu livro de cálculo, define função como sendo uma terna (A, B, a → b), "onde A e B são dois conjuntos e a → b uma regra que nos permite associar a cada elemento a de A um único b de B.". Define o domínio da função como sendo o conjunto A, o contradomínio como sendo o conjunto B e explicita a relação entre os conjuntos como sendo unívoca de A para B.

Em relação a representação gráfica, o autor define como sendo um subconjunto do conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais e, tomando o plano de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico da função pode ser considerado como o lugar geométrico descrito pelos pontos (x, f(x)), onde x pertence ao domínio da função. Em seguida, o autor apresenta exemplos que envolvem diferentes formas de representar relações funcionais, como tabelas, gráficos e expressões algébricas.

Ao apresentar o conteúdo matemático em sala de aula, é muito provável que os professores do ensino fundamental utilizem como referência os livros didáticos da educação básica adotados por seus alunos. Partindo deste pressuposto e acreditando que um fator a interferir na aprendizagem do conceito de função é a maneira como este é apresentado aos alunos, faremos uma breve descrição e alguns comentários sobre as definições de função apresentadas por dois dos livros didáticos mais solicitados pelos professores brasileiros ao Ministério da Educação no ano de 2014.

Em livros didáticos de Matemática, como '*Contextos e Aplicações*', do autor Luiz Roberto Dante (2011), inicia o estudo de funções com uma breve descrição da importância do estudo de funções em outras áreas do conhecimento e de alguns aspectos do seu desenvolvimento histórico. Depois, explora intuitivamente a noção de função através de alguns problemas matemáticos e, então, apresenta a noção de função por meio de conjuntos: "Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$." (DANTE, 2011, p. 75).

Após definir uma função, o autor apresenta a notação $f: A \to B$, evidenciando que a função f transforma x de A em y de B, escrevendo então $y = f(x)$. Na sequência, apresenta os conceitos de domínio, contradomínio e imagem através de conjuntos.

Outro livro analisado, '*Matemática: ciência e aplicações*', de Gelson Iezzi [et al], (2010), também propõe a introdução do estudo de funções através da resolução de problemas, os quais envolvem questões de Física, Biologia e outros temas próximos ao cotidiano do aluno. Logo depois, introduzem a noção de função como relação entre conjuntos e a definem do seguinte modo: "Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$ recebe o nome de função de A em B." (IEZZI et al, 2010, p. 47).

Num segundo momento, o livro apresenta a notação $f: A \to B$, onde f representa um conjunto de pares ordenados (x, y) que caracteriza uma função de A em B. Depois, traz a definição de funções por fórmulas e apresenta o conceito de domínio, contradomínio e imagem por meio de conjuntos.

A abordagem utilizada nos livros analisados, ao introduzir o estudo de funções é feita através de problemas contextualizados com aspectos interdisciplinares, evidenciando a variação e a dependência entre grandezas, o que poderá facilitar a compreensão do que é uma função. Entretanto, no momento de definir formalmente uma função, os autores a fazem por meio de conjuntos e esta abordagem nos parece totalmente desvinculada da anterior, como se não se tratasse do mesmo conceito. Esta observação pode indicar um possível obstáculo na aprendizagem deste conceito por parte dos estudantes.

4.3 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO AFIM E QUADRÁTICA

Chama-se **função afim** qualquer função f de R em R dada por uma lei da forma $f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais dados e $a \neq 0$. Na função $f(x) = ax + b$, o número a é chamado de coeficiente de x e o número b é chamado termo constante. O gráfico de uma função afim é uma reta não perpendicular ao eixo Ox. São casos particulares de função afim as funções linear e constante.

Uma função definida por $f: R \rightarrow R$ chama-se linear quando existe uma constante $a \in R$ tal que $f(x) = ax$ para todo $x \in R$. O gráfico da função linear é uma reta, não perpendicular ao eixo Ox e que cruza a origem do plano cartesiano.

Por sua vez, uma função definida por $f: R \rightarrow R$ chama-se constante quando existe uma constante b R tal que $f(x) = b$ para todo $x \in R$. O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ou coincidente ao eixo Ox q que cruza o eixo Oy no ponto de ordenada b.

Cada coeficiente numérico de uma função caracteriza um elemento do gráfico dessa função. Por exemplo, a é denominado coeficiente angular de uma reta e é igual à tangente do ângulo que a reta faz com o eixo x. Quando $a > 0$, a função é crescente, quando $a < 0$, a função é decrescente. Já b é a ordenada do ponto em que o gráfico de f cruza o eixo das ordenadas, ou seja, $b = f(0)$.

No que diz respeito à **função quadrática**, temos que qualquer função f de R em R dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$ é uma função quadrática. O gráfico de uma função polinomial do 2º grau, $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma curva chamada parábola.

Ao construir o gráfico de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, notaremos sempre que:

- se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima;
- se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Chama-se zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, a 0, os números reais x tais que $f(x) = 0$. Então, as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as soluções da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais são dadas pela conhecida fórmula de Bháskara.

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado discriminante, a saber:

- quando Δ é positivo, há duas raízes reais e distintas;
- quando Δ é zero, há só uma raiz real (para ser mais preciso, há duas raízes iguais);
- quando Δ é negativo, não há raiz real.

Quando $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto de mínimo V, já quando $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto de máximo V. Em qualquer caso, as coordenadas de V são $(-b/2a, -\Delta/4a)$.

4.4 ALGUNS ASPECTOS E PROPOSTAS PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

Considerando a importância do ensino de funções na educação básica, vários estudiosos e pesquisadores realizam trabalhos a fim de compreender quais são as variáveis que determinam o sucesso ou o fracasso no seu processo de ensino e aprendizagem, sendo um dos tópicos de maior interesse o próprio conceito de função.

A partir de uma breve revisão teórica, encontramos pesquisas que verificam que tanto alunos como professores apresentam dificuldades em lidar com o conceito de função. Zuffi e Pacca (2000) descrevem, em sua pesquisa, duas possibilidades de abordar a significação deste conceito. A primeira expressa de maneira formal, onde o conceito de função é apresentado através da relação entre conjuntos. A outra maneira é vinculada à ideia de correspondência entre variáveis, mais ligada ao contexto prático.

Segundo Brito e Almeida (2005), para que o aluno tenha uma compreensão significativa do conceito de função, é necessário abordar tanto sua definição intuitiva, de forma contextualizada e evidenciando seu aspecto variacional, como sua definição formal.

Sierpinska (1992 apud TRINDADE e MORETTI, 2000) identificou alguns obstáculos epistemológicos enfrentados pelos alunos em relação ao estudo de funções. Entre estes, os autores destacam o fato dos alunos considerarem que uma função deva ter, necessariamente, uma descrição analítica. Este fato pode evidenciar um ensino que possivelmente tenha priorizado a representação algébrica no estudo de funções.

Podemos representar funções através da relação entre dois conjuntos mediante diagrama de flechas, tabelas, gráficos, algebricamente ou através da representação verbal. Sierpinska, destaca que os professores devem possibilitar aos alunos o contato com estas várias formas de representar funções e articulá-las permanentemente.

Isso vem de acordo com a teoria de Duval (2012), na qual a apreensão dos conceitos matemáticos está relacionada à noção de representação. Para ele, é necessário que o indivíduo tenha contato com diferentes formas de representar um mesmo objeto de estudo e transitar por elas.

Para Trindade e Moretti (2000), além da transição entre as diversas formas de representar uma função, o professor deve explorar a representação verbal de funções.

> Os alunos devem ser estimulados a descreverem em linguagem corrente a lei que rege um fenômeno e a apresentarem argumentos que justifiquem a validade da lei para qualquer caso, para então representá-la em linguagem algébrica ou geométrica. [...] A utilização da linguagem oral e escrita auxilia o aluno a organizar o próprio raciocínio, a fazer a passagem de uma forma de representação para a outra e explicitação das noções de variável, dependência, regularidade e generalizações. (TRINDADE e MORETTI, 2000, p. 43-44).

Quanto à representação gráfica, os mesmos autores chamam atenção para seu grande potencial para o aprendizado do conceito de função, e além disso destacam que alguns aspectos são melhor explorados por este tipo de representação. Comumente, na prática em sala de aula, os alunos, a partir da representação algébrica de uma função, constroem uma tabela de valores e finalmente traçam, no plano cartesiano, o gráfico da função. No entanto, a passagem inversa deste processo não é explorada.

As tabelas constituem um ótimo instrumento para o estudo das relações funcionais, uma vez que seus valores podem iniciar a investigação de dependência entre as variáveis, possibilitando a elaboração de hipóteses sobre seu comportamento, sua representação gráfica e algébrica.

Brito e Almeida (2005) sugerem, ao introduzir o estudo de funções, que este seja feito através de situações que evidenciem seu caráter dinâmico, que permitam ao aluno compreender o conceito de variável, expressar a relação de dependência entre duas variáveis e identificar entre elas a variável dependente e independente.

A fim de garantir a aprendizagem do conceito de função, dos diferentes tipos de função e dos conceitos que se relacionam com o estudo de funções, surgiram nos últimos anos algumas propostas metodológicas. Das propostas atualmente defendidas por especialistas e pesquisadores, destacamos a Modelagem Matemática, a resolução de problemas e a utilização de recursos tecnológicos.

Na Modelagem Matemática, as atividades são constituídas por um conjunto de ações, desenvolvidas a partir de uma situação-problema, onde os alunos permanecem ativamente envolvidos durante todo o processo. Brito e Almeida (2005), a partir de uma pesquisa com alunos do ensino médio, desenvolveram situações de modelagem para o ensino de funções. Segundo os autores, os estudantes perceberam o valor instrumental da Matemática e construíram uma visão dinâmica do conceito de função, percebendo-o no seu aspecto variacional, como relação entre variáveis e não somente como um conjunto de pares ordenados.

A resolução de problemas possibilita aos alunos dedicarem-se, de maneira independente, na busca de ideias e estratégias para alcançar a solução adequada. Cândido (2000), ao pesquisar sobre a resolução de problemas relacionado ao estudo de funções, afirma que esta metodologia levou os alunos a pensar sobre as situações a partir de seus próprios conhecimentos e possibilitou sua participação na construção do conceito de função de maneira significativa e contextualizada.

Souza e Silva (2006) pesquisaram a contribuição da informática no ensino de funções e destacam que os computadores, além de facilitar o esboço de gráficos funcionais, possibilitaram maior escolha das funções a serem trabalhadas. Além disso, os autores afirmam que a utilização de softwares incentivou os alunos a descrever os fatos observados, estimulando a representação verbal, a comparação direta dos gráficos com os resultados algébricos e interações mais intensas e afetivas entre aluno-aluno e aluno-professor.

5 A PRÁTICA PEDAGÓGICA: CONTEXTUALIZANDO A MATEMÁTICA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

No currículo escolar, a Matemática é vista como componente essencial para o desenvolvimento pleno da cidadania. Sua aplicabilidade em várias áreas do conhecimento, a presença no cotidiano e sua importância na formação das capacidades intelectuais dos estudantes, são algumas das justificativas para seu ensino em todos os níveis da educação básica. No entanto, a grande maioria dos alunos não compartilha deste mesmo sentimento em relação à Matemática, que é vista por eles como uma disciplina difícil e de conteúdos, muitas vezes, incompreensíveis, o que pode ser confirmado pelos baixos índices de rendimento apresentados em várias avaliações a nível nacional.

Esta realidade fez surgir inúmeras pesquisas e trabalhos relacionados ao ensino e aprendizagem da Matemática. Como resultado destes estudos, surgiram várias propostas pedagógicas que se opõem ao ensino tradicional, o qual enfatiza a transmissão do saber já construído e onde o aluno é um mero espectador.

O desenvolvimento do construtivismo, iniciado pelas teorias estruturalistas de aprendizagem de Piaget, e a tendência sociointeracionista, baseada nas teorias de Lev Vigotsky, reforçam a ideia de que a aprendizagem do aluno deva ser um processo de construção do conhecimento pela interação social.

Além das reformulações curriculares propostas nos últimos anos, passou-se a discutir e considerar o processo pelo qual o aluno aprende. Neste sentido, aspectos psicológicos e as formas de comunicação passaram a desempenhar papéis importantes na definição das metodologias de ensino, visando à aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Vários fatores interferem no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Portanto, alguns aspectos devem ser observados no momento do planejamento e execução de uma proposta pedagógica.

5.1 TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA E CONTEXTUALIZAÇÃO DO SABER

Quando um determinado saber científico, criado através da evolução da própria ciência, é selecionado para transformar-se em saber escolar, passa por uma série de transformações, a fim de adequar-se a uma linguagem mais acessível ao nível escolar. Esse processo recebe o nome de transposição didática, termo usado, pela primeira vez, em 1975, por Michel Verret e que na década de 1980 foi inserido em um contexto mais específico pelo matemático Yves Chevallard.

Entende-se por saber científico aquele associado à produção acadêmica, apresentado através de artigos, teses, livros e relatórios, e saber escolar aquele vinculado ao ensino básico, ou seja, o conjunto de conteúdos presentes no currículo escolar que se apresenta basicamente através dos livros didáticos.

Para Pais (2012) o estudo da transposição didática permite visualizar suas fontes de “influências que contribuem na redefinição de aspectos conceituais e também na reformulação de sua forma de apresentação”. (PAIS, 2002, p. 19).

A dinâmica da transposição didática acontece, segundo a definição de Chevallard, através de dois momentos. O primeiro transforma o saber científico em saber a ensinar e o segundo transforma o saber a ensinar em saber ensinado. No primeiro momento, o saber passa por influências de agentes do processo educativo como cientistas, pesquisadores, especialistas, professores, políticos e autores de livros. Já no segundo momento, observa-se uma maior influência do meio escolar, no qual o professor e os alunos estão inseridos.

Desta forma, pode-se dizer que o saber ensinado está longe de ser tal qual se apresenta o saber científico e tampouco deve ser concebido como uma mera simplificação deste.

É o professor quem adapta o saber escolar em saber ensinado. Assim, de posse do saber, o professor, a partir de seu conhecimento sobre o assunto, define a melhor forma de apresentá-lo ao aluno, levando em consideração seus objetivos em ensinar tal conteúdo e sua importância no currículo escolar.

Acredita-se que o conhecimento do professor em relação aos conteúdos matemáticos, tanto no que diz respeito a seu contexto histórico como sua importância científica, são fundamentais para a elaboração de sua ação pedagógica. Além disso, a postura crítica e questionadora deve acompanhar o professor, não somente durante a elaboração de suas aulas, mas também nos momentos das avaliações.

A fim de contribuir na estruturação de uma educação mais significativa e que proporcione a aprendizagem efetiva dos conteúdos matemáticos, encontra-se, no contexto da análise da transposição didática, a noção de contextualização do saber.

Segundo Pais (2002, p. 32), é da prática do matemático apresentar o saber de modo generalizado, eliminando as condições contextuais de sua pesquisa. O professor, no entanto, “deve recontextualizar o conteúdo, tentando relacioná-lo a uma situação que seja mais compreensível para o aluno”.

Micotti (1999) também alerta para o fato de que o elevado nível de abstração, a linguagem simbólica e o rigor do raciocínio com que o saber matemático é comunicado nos livros, podem oferecer dificuldades à compreensão dos conceitos matemáticos por parte dos estudantes.

A respeito disso, a autora destaca que

> O saber matemático compreende o domínio do sistema de representação e também das regras que regem ações abstratas. A leitura (compreensão) de escritas Matemáticas requer o conhecimento do sistema de notação. Sem este conhecimento, torna-se difícil ligar as expressões simbólicas com os seus significados. (MICOTTI, 1999, p. 163).

Observa-se, de acordo com a autora, que em muitos momentos a compreensão dos saberes matemáticos é baseada em raciocínios que exigem instrumentos cognitivos refinados. Entende-se, desta forma, que é imprescindível que o professor compreenda as formas como o aluno se apropria do saber para, a partir daí, traçar suas estratégias de ensino.

Acredita-se que o aluno terá maiores condições de apropriar-se dos saberes matemáticos quando for estimulado a pensar e fazer inferências sobre o objeto de estudo, ou seja, quando ele participar ativamente do processo de construção do conhecimento. Neste sentido, é importante, sempre que possível, possibilitar em sala de aula situações envolventes, desafiadoras e significativas para o aluno.

Na busca por estas situações que favoreçam, antes de mais nada, a aprendizagem dos conceitos matemáticos, visualiza-se na contextualização do saber uma ótima alternativa.

Muitos professores e estudiosos defendem a contextualização do saber matemático, considerando esta como uma das mais importantes noções pedagógicas da atualidade. No entanto, deve-se ter o cuidado de não reduzir a contextualização do ensino a uma única referência, ou então acreditar que todos os conteúdos matemáticos relevantes devam estar presentes no cotidiano do aluno ou ter uma aplicação prática. O aluno também deve perceber a importância de certos conceitos para o desenvolvimento da Matemática como ciência. Muitos conceitos matemáticos tem razão de existir na própria Matemática e mostrar estas possíveis conexões entre os conteúdos matemáticos também é uma forma de contextualizar.

Para Fonseca (1995), um aspecto importante em relação à contextualização do saber é a falsa ideia de que esta prática nega a importância da compreensão e exclui a necessidade de técnicas. A contextualização busca possibilitar uma melhor compreensão dos conteúdos estudados, permitindo ao aluno a utilização das técnicas e instrumentos matemáticos de modo significativo e não mecanicamente como é comum ocorrer no ensino tradicional.

Entende-se, também, que o ensino da Matemática deve contemplar situações contextualizadas e significativas ao introduzir um novo conteúdo e, na sequência de seu estudo, possibilitar uma gradativa formalização dos conceitos matemáticos.

Para Moysés (1997), o ensino contextualizado da Matemática deve privilegiar situações em que a significação dos conceitos matemáticos seja construída mediante um processo de interação social, de trocas de experiências. A autora ainda destaca que, no processo de aprendizagem, a contextualização do conhecimento permite que o aluno tenha um raciocínio contínuo ao resolver um problema matemático, além de estar mais apto a transferir para novas situações o conhecimento que foi construído na prática.

A contextualização poderá contribuir no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, uma vez que

> […] ajuda a desenvolver no aluno a capacidade de relacionar o apreendido com o observado e a teoria com suas consequências e aplicações práticas. Ajuda também a articular a Matemática com temas atuais da ciência e da tecnologia, bem como fazer conexões dentro da própria Matemática. (DANTE, 2005, p. 7)

Contudo, entende-se que contextualizar é favorecer, em sala de aula, um ambiente em que o aluno seja estimulado a resolver problemas que tenham sentido para ele, e que de algum modo seus conhecimentos prévios possam ser mobilizados na busca por soluções e na geração de novos saberes.

5.2 FORMAÇÃO DOS CONCEITOS E A LINGUAGEM MATEMÁTICA

Pesquisas realizadas por Lev Vygotsky (apud OLIVEIRA, 1999) sugerem que o desenvolvimento psicológico do ser humano está diretamente ligado às relações interpessoais e socioculturais do indivíduo. Principalmente a partir das relações pessoais é que o indivíduo começa a construir conceitos e dar significado a tudo aquilo que o rodeia.

Desde que nasce, o seres humanos desenvolvem suas capacidades psicológicas, que os possibilitarão pensar, imaginar, analisar, comparar, memorizar e relacionar os fatos. É claro que este processo de desenvolvimento não é algo que se finda, que tenha um ponto de chegada, mas sim um processo contínuo, pois o ser humano é inacabado e está sempre em transformação no que se refere a sua habilidade psicológica e intelectual.

Para Oliveira (1999), a construção de significados é extremamente importante para o aprendizado e, consequentemente, para o desenvolvimento mental do aluno. Como afirma Vygotsky, o desenvolvimento do indivíduo é baseado no aprendizado. Quando um sujeito relaciona-se com outro e com o mundo, está trocando experiências e informações, podendo aprender algo novo e, desta forma, construir conceitos e significados, desenvolvendo suas capacidades psicológicas, tornando-as cada vez mais complexas.

Para Vygostky (2001), existe uma diferença entre o desenvolvimento dos conceitos espontâneos e científicos. Os primeiros são aprendidos de maneira informal, pela interação social do dia a dia. Já os conceitos científicos são aqueles aprendidos de forma sistemática e intencional.

Isto posto, temos que o processo de ensino e aprendizado que ocorre no âmbito escolar propicia o desenvolvimento dos conceitos científicos. A respeito disso, Vygotsky afirma que “Os conceitos científicos, com seu sistema hierárquico de inter-relações, parecem ser o meio em que primeiro se desenvolvem a consciência e o domínio do objeto, sendo mais tarde transferidos para outros conceitos e outras áreas do pensamento.” (VYGOTSKY, 2001, p. 92).

Considerando, então, o fato de que o desenvolvimento do aluno é baseado no seu aprendizado e que este está intimamente ligado às relações interpessoais, podemos dizer que a linguagem e a metodologia utilizadas em sala de aula são dois aspectos importantes na formação dos conceitos científicos. Além disso, Moysés (1997) ainda destaca a necessidade de relacionar os conceitos científicos com seus conceitos espontâneos.

O ensino tradicional da Matemática tende a priorizar, em excesso, a memorização de fórmulas, regras, definições, teoremas e demonstrações. Esta prática não proporciona compreensão conceitual, visto que são voltados, na maioria das vezes, à reprodução de modelos pré-estabelecidos (PAIS, 2002).

Segundo Miguel (2006), a formação de conceitos matemáticos deve considerar, como teses importantes da ação pedagógica, as perspectivas de: contextualização, onde são valorizados aspectos socioculturais; historialização, evidenciando a evolução das ideias Matemáticas e mostrando a Matemática como um processo de construção; e enredamento, onde as ideias são organizadas em articulação com as diversas áreas do conhecimento.

Pais (2002) também destaca que um dos principais obstáculos didáticos enfrentados no ensino da Matemática, refere-se à forma simplificada e formal como os conteúdos são apresentados nos livros didáticos. Seguindo as ideias do autor, o ensino da Matemática deve priorizar a construção e a compreensão dos conceitos, proporcionando atividades significativas e possibilitando aos alunos fazer indagações, observações, comparações e constatações sobre o objeto em estudo para, finalmente, chegar às definições formais.

A Matemática possui uma linguagem específica, baseada na utilização de símbolos que visam facilitar a comunicação de ideias e conhecimento matemático. No entanto, em sala de aula, o uso excessivo de simbologia e formalismo matemático rigoroso, que muitas vezes não é familiar aos alunos, pode comprometer a aprendizagem de conceitos ou até mesmo impedir qualquer compreensão dos mesmos (ZUCHI, 2004).

A Teoria Vygotskyana, considera que a linguagem humana surgiu como um sistema simbólico de mediação das relações pessoais. Essa linguagem passou a auxiliar a comunicação e a relação entre o homem e seu objeto de conhecimento, tendo duas funções: a de relação social e de pensamento generalizante. Desta maneira, a linguagem humana tem também a função de classificar um objeto ou situação em relação aos seus atributos, numa determinada categoria conceitual, favorecendo, assim, a abstração.

Mediante tais considerações, percebe-se a importância da linguagem e da metodologia utilizadas em sala de aula para a formação dos conceitos científicos do aluno. De acordo com Zuchi (2004), o professor, ao comunicar-se com os alunos, deve fazer uso de uma linguagem significativa, a fim de promover a compreensão dos conceitos e mostrar que o uso de símbolos tem por finalidade facilitar a comunicação do conhecimento matemático.

5.3 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A resolução de problemas é uma tendência no ensino da Matemática e sua importância é indiscutível, uma vez que se trata de uma especificidade desta área do conhecimento. A própria evolução da Matemática sempre teve como pano de fundo a busca de soluções para problemas.

Muitos atribuem o sucesso do indivíduo no campo matemático à sua capacidade de raciocinar e pensar adequadamente. Comumente se acredita que o aluno que desenvolve estas capacidades está mais apto a compreender e resolver problemas matemáticos.

Um dos objetivos ao abordar conceitos matemáticos a partir da resolução de problemas é contribuir para o desenvolvimento intelectual do aluno. De acordo com Pozo (1998) “[...] quando um aluno ou qualquer pessoa enfrenta uma tarefa do tipo que denominamos problema, precisa colocar em ação uma ampla série de habilidades e conhecimentos” (POZO, 1998, p. 19).

Na década de sessenta, George Polya começava a investigar sistematicamente o ensino através da resolução de problemas e a partir daí esta tendência se estabeleceu enquanto campo de pesquisa na Educação Matemática. Atualmente, esta prática é bastante difundida no Brasil em todos os níveis da Educação Básica e várias pesquisas legitimam sua importância no processo de ensino e aprendizagem.

Onuchic enfatiza que

> Quando os professores ensinam Matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar Matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente. (1999, p. 208)

Observamos nas palavras da autora influências do construtivismo e a relação existente entre a compreensão da Matemática e a capacidade de resolver problemas, na qual uma depende da outra.

A autora defende ainda que

> [...] o ponto de partida das atividades Matemáticas não é a definição mas o problema; […] que a Resolução de Problemas não é uma atividade para ser

> desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem. (ONUCHIC, 1999, p. 215).

Os PCNs também sugerem que a resolução de problemas seja o ponto de partida do trabalho docente aliado à contextualização do saber.

A metodologia de resolver problemas prevê muito mais que apenas levar o aluno a encontrar soluções. O importante, neste processo, é o caminho percorrido até se chegar a solução de um problema, pois é neste momento que muitos conceitos matemáticos poderão ser explorados e novos saberes constituídos.

De acordo com Schroeder e Lester (1989 apud ONUCHIC, 1999), podemos abordar a resolução de problemas a partir de três diferentes concepções: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar Matemática através da resolução de problemas.

A primeira concepção baseia-se no modelo proposto por Polya (1995), que descreve um conjunto de quatro fases interligadas no processo de resolução de problemas matemáticos. Neste modelo, primeiramente é preciso compreender o problema, depois criar um plano, na sequência executar o plano e finalmente examinar a solução obtida.

Ao ensinar a resolver problemas, o principal objetivo é fazer com que os alunos sejam capazes de mobilizar seus saberes para encontrar soluções. Neste caso, o conteúdo matemático é ensinado para esse fim.

Na última concepção, os problemas são vistos como o primeiro passo para se aprender Matemática. O problema é considerado “como um elemento formador de um processo de construção do conhecimento matemático, ou seja, essa metodologia vem a contribuir na formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem abstrata.” (LEÃO, BISOGNIN, 2009, p. 30).

De acordo com Onuchic, ensinar Matemática mediante a resolução de problemas é a abordagem mais adequada com os objetivos e recomendações dos PCNs, uma vez que:

> […] conceitos e habilidades Matemáticas são aprendidos no contexto de resolução de problemas. O desenvolvimento de processos de pensamento de alto nível deve ser promovido através de experiências em resolução de problemas, e o trabalho de ensino de Matemática deve acontecer numa atmosfera de investigação orientada em resolução de problemas. (1999, p. 207-208)

Além disso, nesta abordagem o aluno não só aprende resolvendo problemas como aprende a Matemática para resolvê-los.

5.4 PROPOSTA DE ENSINO ENVOLVENDO MODELAGEM COM FUNÇÃO AFIM

Constantemente temos que tomar uma decisão entre adquirir o produto A ou o produto B, como decidir de maneira correta, escolhendo o “melhor” ou o “ mais vantajoso financeiramente”? Ou será que dá para ser o melhor e o mais vantajoso financeiramente?

5.4.1 Conteúdos matemáticos necessários como pré-requisito: função afim.

Objetivos:

- ✓ Identificar as variáveis envolvidas na situação problema.
- ✓ Levantar hipóteses e elaborar propostas para solucionar o problema.
- ✓ Compartilhar conhecimentos e responsabilidades.
- ✓ Realizar pesquisas sobre do tema.
- ✓ Identificar as vantagens e desvantagens de cada plano.
- ✓ Aplicar a ideia de função afim, para encontrar o modelo desejado.
- ✓ Desenvolver a criatividade do aluno por meio de uma situação real.

Procedimentos didáticos:

- ✓ Roda de conversa.
- ✓ Trabalho em grupo.
- ✓ Pesquisas.

5.4.2 Resolução:

Esta atividade deve ser iniciada com uma conversa com os alunos sobre as escolhas que temos que fazer constantemente, desde a escolha de uma roupa para vir à escola, do meio de transporte a ser utilizado, dentre tantas outras que fazemos diariamente. Neste momento devem ser levantadas situações do cotidiano em que são necessários alguns cuidados na hora de decidir, como por exemplo, no custo financeiro de uma escolha.

Para esta atividade será apresentada aos alunos a situação-problema a seguir:

Taísa resolveu ir morar sozinha e quer contratar um plano de telefonia fixa, para isto, fez uma pesquisa de preços para escolher o plano que melhor se encaixa para ela neste momento. Ela está indecisa entre os planos A e B, veja as condições dos planos abaixo:

Plano A:

- ✓ Taxa fixa mensal de R$ 29,90
- ✓ Ligações de fixo para fixo na cidade R$ 0,00
- ✓ Ligações de fixo para móvel da mesma operadora R$ 0,60 por minutos.

Plano B:

- ✓ Taxa fixa mensal de R$ 49,90
- ✓ Ligações de fixo para fixo na cidade R$ 0,00
- ✓ Ligações de fixo para móvel da mesma operadora R$ 0,20 por minutos.

Como ela pode decidir qual deverá ser contratado?

Depois de apresentar o problema é feita uma discussão sobre o que deve ser levado em consideração para a contratação do plano, neste momento surgem as hipóteses: o que tem a taxa fixa mais barata, aquele que posso falar mais tempo e pagar menos, aquele que cobra o menor valor da ligação por minuto, o tempo de uso de telefone fixo para fixo, o tempo de uso de telefone fixo para móvel.

Espera-se que os alunos tenham a iniciativa de calcular o custo para alguns valores e comparar os resultados e verificar que o custo total depende do valor fixo e do tempo de ligação de fixo para móvel.

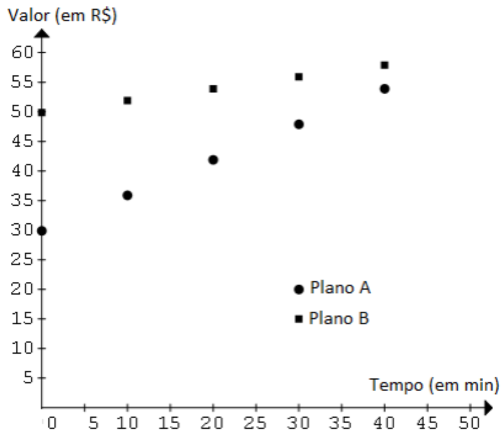
Tabela 1: Cálculos de custo dos planos A e B.

Tempo de ligação de fixo para móvel (em min)	Plano A (R$)	Plano B (R$)
10	29,90 + 10 . 0,60 = 35,90	49,90 + 10 . 0,20 = 51,90
20	29,90 + 20 . 0,60 = 41,90	49,90 + 20 . 0,20 = 53,90
30	29,90 + 30 . 0,60 = 47,90	49,90 + 30 . 0,20 = 55,90
40	29,90 + 40 . 0,60 = 53,90	49,90 + 40 . 0,20 = 57,90

Fonte: Autoria própria, 2017.

Com tais dados somos instigados a dispô-los de modo a construir uma representação gráfica que possa estabelecer a relação entre tempo de ligação e o custo total do plano.

Gráfico 1: Custo (em R$) x Tempo (em min) dos planos A e B.



Fonte: Autoria própria, adaptado em 2017.

Observando o gráfico 1, temos a impressão que os pontos de cada plano (A ou B) estão alinhados, então esses dados podem ser escritos na forma de uma função afim.

Neste momento, provavelmente os alunos já tiveram o contato com funções e poderão determinar as funções que regem cada plano por meio de sistemas de equações lineares, caso seja necessário o professor deverá fazer uma revisão desse conteúdo.

A expressão geral de uma função afim é $f(x) = ax + b$. Neste exemplo, consideraremos $f(x) = C(t)$, onde C é o custo total do plano em função do tempo. Sendo assim, utilizaremos a expressão $C(t) = \mathrm{at} + \mathrm{b}$, adotaremos dois pontos quaisquer de cada uma das retas que representam os planos A e B, para construirmos um sistema de equações lineares de modo a encontrar os valores de a e b para cada caso.

Plano A

Considere os pontos da Tabela 1: (10; 35,9) e (20; 41,9), substituindo seus valores em $C(t)$ teremos:

35,9 = 10a + b

41,9 = 20a + b

Resolvendo o sistema encontraremos:

a = 0,6

b = 29,9

E, portanto, a função procurada é dada por C_A (t) = 0,6t + 29,9, onde t representa o tempo (em minutos) e C o custo total (em reais).

Plano B

Considere os pontos da Tabela 1: (10; 51,9) e (20; 53,9), substituindo seus valores em $C(t)$ teremos:

51,9 = 10a + b

53,9 = 20a + b

Resolvendo o sistema encontraremos:

a = 0,2

b = 49,9

E, portanto, a função procurada é dada por C_B (t) = 0,2t + 49,9, onde t representa o tempo (em minutos) e C o custo total (em reais).

Para responder a pergunta inicial do problema (Qual é o melhor plano?), devemos levar em conta o tempo de utilização de fixo para móvel, isto depende de cada consumidor, então podemos inicialmente determinar o tempo (em minutos) no qual os dois planos tenham o mesmo custo total, para isto devemos resolver esta equação:

C_A = C_B

0,6t + 29,9 = 0,2t + 49,9

0,4t = 20

t = 50

Logo, o tempo em que os dois planos têm o mesmo custo total é de 50 minutos, portanto para uma pessoa que for realizar ligações de fixo para móvel por um tempo inferior a 50 minutos o plano A é mais vantajoso e para a pessoa que for realizar ligações de fixo para móvel por um tempo superior a 50 minutos o plano B é mais vantajoso.

5.4.3 Outra maneira de resolver o problema

Uma outra forma de resolução possível seria estimular o raciocínio logico dos alunos ao indagar as seguintes situações: Analisando primeiramente o plano A, quanto a pessoa pagaria se falasse apenas 1 minuto em ligação de fixo para móvel? E se falasse por 2 minutos? E assim sucessivamente ate chegar a um numero qualquer, indeterminado de minutos em ligações de fixo para móvel. Em seguida, fazendo as mesmas perguntas em relação ao plano B. Dessa forma, levando os alunos a raciocinarem, podendo organizar os possíveis achados em uma tabela simples, conforme apresentado na tabela 2.

Tabela 2: Cálculos de custo dos planos A e B.

Tempo de ligação de fixo para móvel (em min)	Plano A (R$)	Plano B (R$)
1	29,90 + 1 . 0,60 = 31,50	49,90 + 1 . 0,20 = 51,10
2	29,90 + 2 . 0,60 = 32,10	49,90 + 2 . 0,20 = 51,30
3	29,90 + 3 . 0,60 = 32,70	49,90 + 3 . 0,20 = 51,50
4	29,90 + 4 . 0,60 = 33,30	49,90 + 4 . 0,20 = 51,70
T	29,90 + t . 0,60	49,90 + t . 0,20

Fonte: Autoria própria, 2017.

Sabendo que a expressão geral de uma função afim é $f(x) = a\mathrm{x} + b$. Neste exemplo, consideraremos novamente $f(x) = C(t)$, onde C é o custo total do plano em função do tempo. Sendo assim, utilizaremos a expressão $C(t) = \mathrm{at} + \mathrm{b}$. E, portanto, as funções procuradas são dadas por $C_A\ (t)$ = 0,6t + 29,90 e $C_\mathrm{B}\ (t)$ = 0,2t + 49,90, respectivamente, onde t representa o tempo (em minutos) e C o custo total (em reais).

Lembrando que a pergunta inicial do problema é “Qual é o melhor plano?”, levaremos novamente em conta o tempo de utilização de fixo para móvel, sabendo que isto dependerá de cada consumidor, logo podemos inicialmente determinar o tempo (em minutos) no qual os dois planos tenham o mesmo custo total, para isto devemos resolver esta equação:

$C_A = C_B$

$0{,}6t + 29{,}9 = 0{,}2t + 49{,}9$

$0{,}4t = 20$

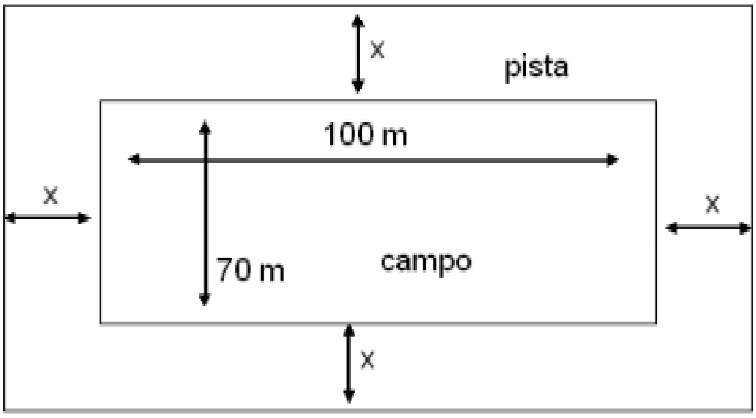
$t = 50$

Assim, o tempo em que os dois planos têm o mesmo custo total é de 50 minutos, portanto para uma pessoa que for realizar ligações de fixo para móvel por um tempo inferior a 50 minutos o plano A é mais vantajoso e para a pessoa que for realizar ligações de fixo para móvel por um tempo superior a 50 minutos o plano B é mais vantajoso.

5.5 PROPOSTA DE ENSINO ENVOLVENDO MODELAGEM COM FUNÇÃO QUADRÁTICA

No primeiro dia de aula, para contextualizar funções quadráticas, por exemplo, o professor pode apresentar para a turma uma situação para cálculo da área de um terreno retangular limitado por uma cerca. Neste terreno seria construído um campo de futebol medindo 100 metros de comprimento por 70 metros de largura. A cerca que limita o campo de futebol inicialmente estaria a alguns metros do campo, deixando uma pista entre eles. A área que se quer encontrar é a área do terreno limitado pela cerca. Em seguida, pode-se propor aos alunos que encontrem uma lei de formação que expresse a área do terreno limitado pela cerca, que agora estaria a x metros do campo, conforme mostra a figura 01.

Figura 01: Campo de Futebol.



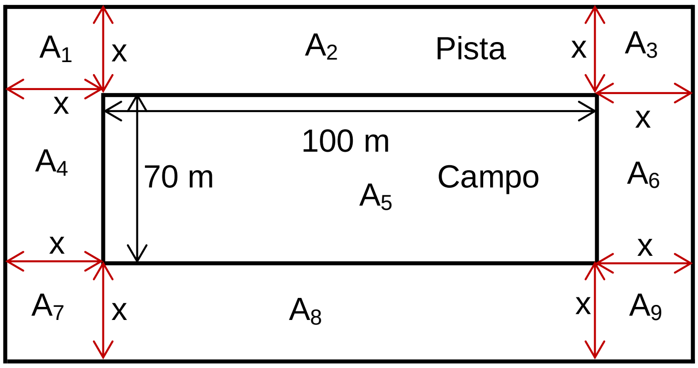
Fonte: Adaptado de Iezzi *et al.* (2004, p.99).

5.5.1 Resolução

A resolução da situação-problema em questão pode ser resolvida de diferentes maneiras. No entanto, a título de exemplo, serão demostras duas formas de utilizar a modelagem na resolução de uma função quadrática.

Assim, inicialmente, traçam-se retas, prolongando os lados do campo até o limite da cerca, tanto na largura, quanto no comprimento, subdividindo a figura 01 em áreas menores, conforme pode-se verificar na figura 02.

Figura 02: Campo de Futebol.



Fonte: Adaptado de Iezzi *et al.* (2004, p.99).

Para calcular a área total delimitada pela cerca, observamos que ao traçarmos os prolongamentos, criou-se outras figuras planas, tais como quadrados (A_1, A_3, A_7 e A_9) e retângulos (A_2, A_4, A_6 e A_8), além da área já delimitada pelo campo de futebol (retângulo A_5) apresentada pelo enunciado.

Observando as áreas das figuras criadas a partir dos prolongamentos, sabendo que a área do quadrado e do retângulo é representada pela expressão "A = b . h" (onde, A'= área, b= base, h= altura), iniciaremos o calculo das áreas dos quadrados de lado x ($A_1 = A_3 = A_7 = A_9 = x.x = x^2$), em seguida o calculo das áreas dos retângulos A_2 e A_8, de lados 100m e x (A_2=A_8=100.x= 100x), dos retângulos A_4 e A_6 de lados 70m e x (A_4=A_6=70.x= 70x) e, finalmente a área do campo retangular A_5 de lados 100m e 70m (A_5= 100.70=7 000 m^2).

Para encontrarmos a área total (**A**) do terreno limitado pela cerca, basta somar todas as áreas, sendo:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_9$$

Utilizando as expressões para o calculo destas áreas, temos:

$A = x^2 + 100x + x^2 + 70X + 7\ 000 + 70x + x^2 + 100x + x^2$

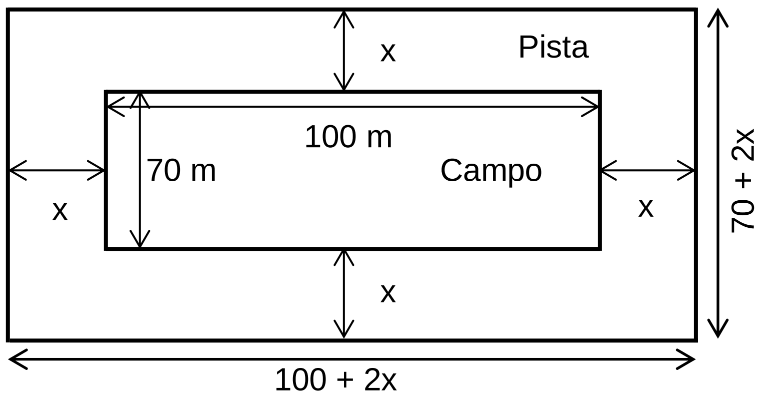
Assim, encontraremos a lei de formação que expresse a área do terreno limitado pela cerca:

$A = 4x^2 + 340x + 7\ 000$

No entanto, para encontrarmos a função que a determina, podemos representa-la por $f(x) = 4x^2 + 340x + 7\ 000$.

5.5.2 Outra maneira de resolver o problema

Figura 03: Campo de Futebol.



Fonte: Adaptado de Iezzi *et al.* (2004, p.99).

Podemos propor outra maneira de encontrar solução para a situação problema. Sabendo que trata-se de um retângulo, logo, para saber a área total da região limitada pela cerca , basta multiplicar os valores do comprimento pela largura, conforme observa-se na figura 03. Podemos afirmar que o comprimento é x + 100 + x = 100 + 2x e a largura é x + 70 + x = 70 + 2x. Então encontraremos a lei de formação que expressa a área do terreno limitado pela cerca em A = (100 + 2x) . (70 + 2x), aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, temos:

A = 100.70 + 100.2x + 2x.70 + 2x.2x, desenvolvendo as multiplicações:

$A = 7\ 000 + 200x + 140x + 4x^2$, em seguida, somando os semelhantes:

$A = 4x^2 + 340x + 7\ 000$

Assim, obtém-se a função que corresponde à área total da região limitada pela cerca, $f(x) = 4x^2 + 340x + 7\ 000$.

5.5.3 Avaliação da Atividade de Modelagem

Com a avaliação da atividade de modelagem, faz-se o uso da terceira etapa de modelagem. Espera-se que essa atividade proporcione nos alunos a capacidade de interpretar e solucionar problemas, operacionalização com problemas numéricos, desenvolvimento do espírito comunitário, devido ao trabalho em grupos. Espera-se, também que os alunos possam aprender melhor a Matemática e a sua importância no cotidiano deles.

5.5.4 Análise da Ação Pedagógica

O professor tem um papel de suma importância ao avaliar os progressos do alunado no decorrer do ano letivo, no sentido de atingir os objetivos de ensino. A avaliação é um processo necessário ao professor para verificar a aprendizagem e as dificuldades que, a partir da avaliação, devem ser superadas para que o processo de ensino-aprendizagem seja adequado as necessidades do aluno.

Sabemos que o processo de avaliação sempre esteve presente no cotidiano escolar, para melhor esclarecer esse processo Mediano *et al.* (1994, p.133) afirma que:

> A avaliação é um processo presente em todos os aspectos da vida escolar: professores avaliam alunos, alunos avaliam professores, diretor avalia seus professores e estes o diretor, pais avaliam professores e escola. Entretanto, só a avaliação do aluno pelo professor parece ser um aspecto formalmente reconhecido na vida da escola. (MEDIANO *et al.*, 1994, p. 133)

Com isso, os professores devem estar em constante observação quanto a realização das atividades propostas, observando alguns pontos importantes, como: o conhecimento que o aluno possui dos anos anteriores, a capacidade de receber e realizar tarefas, organização das ideias de forma verbal ou escrita, sua interação com os demais alunos, ou seja, capacidade de trabalhar em grupos, etc. Então, o professor deve usar o bom senso ao avaliar seus alunos e não usar a avaliação como um método de exclusão ou de punição.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por todas as questões observadas no decorrer desta Dissertação, fica nítida, portanto, a importância da Matemática enquanto ciência que cerca o cotidiano social, bem como se verificou a significância da abordagem da Modelagem Matemática no estudo de funções afins e quadráticas em sala de aula, como mola precursora do processo de aproximação do aluno com a Matemática.

Percebe-se que a educação do país pode ter solução, restando aos professores serem criativos e inovadores e que sempre estejam em contato com novas práticas para ensinar os mais variados conteúdos. Principalmente, é preciso que os professores trabalhem com amor. Nessa perspectiva, é necessária uma reforma nesse modelo de educação atual, caso contrário o sucateamento das escolas públicas aumentará cada vez mais. Para que isto não ocorra, é necessário que o governo invista mais na educação pública do país, melhorando a qualidade do ensino tanto na formação do professor quanto na melhoria das condições de trabalho aos professores, principalmente aumentando os cursos de formação continuada, proporcionando os incentivos para que os profissionais sintam-se motivados a investir em seu próprio aperfeiçoamento. Assim, ter-se-ão profissionais que sempre estarão em contato com as mudanças nas metodologias de ensino, suas aulas certamente serão mais dinâmicas e voltadas para o cotidiano dos alunos, possibilitando o desenvolvimento do conhecimento e a formação do cidadão.

Enquanto profissionais da educação, os professores têm de utilizar de métodos educacionais que tragam aos alunos maior habilidade de desenvolver seu senso crítico, de argumentar e de resolver situação-problema. Pois a educação necessita de profissionais competentes e que obtenham facilidade em propor uma metodologia que seja adequada ao desenvolvimento da aprendizagem dos alunos. Com aulas mais atrativas, o interesse dos alunos às aulas irá aumentar, facilitando o desenvolvimento do ensino-aprendizagem, contribuindo assim para a formação do cidadão.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1997. 142p.

DRUCK, S. **Artigo: O drama do ensino da Matemática.** Folha de S. Paulo, [sinapse] online, 2003. Acesso em 15 de novembro de 2016. Disponível em: < http://www1.folha.uol.com.br/folha/sinapse/ult1063u343.shtml>.

KLINE, M. **O fracasso da Matemática moderna.** São Paulo: IBRASA, 1976.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia.** São Paulo: Contexto, 2002

CHEVALLARD, Y; BOSCH, M. e GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.** Tradução: Daisy Vaz de Moraes, Por to Alegre: Artmed, 2001.

BARBOSA, J. C. **O que pensam os professores sobre Modelagem Matemática?** Zetetike. Campinas, v.7, n.11, p.67-85, 1999.

ZUFFI, E. M. **Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função**. Educação Matemática em Revista, São Paulo, n. 9/10, p.10-16, abr. 2001.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza Furtado Gomide. São Paulo: E. Blücher, 1974. 488 p.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 2004. 844 p

KLEINER, I. **Evolution of the function concept: A brief survey**. The College Mathematics Journal, v. 20, n. 4, sept.1989.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. 9. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1989. p. 125-152.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo.** 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1. p. 26-37.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do ensino médio.** Coleção do professor de Matemática. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1. 237 p.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2011. v. 1. p. 70- 109.

____. **Matemática: manual do professor**. São Paulo: Ática, 2005. v. 1. p. 3-12.

IEZZI, G. et al**. Matemática: ciência e aplicações**. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. v. 1. p. 44- 69.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. **Sobre funções e linguagem Matemática de professores do ensino médio.** Zetetiké, Campinas: UNICAMP, v. 8, n. 13/14, p. 7-28, jan./dez. 2000.

BRITO, D. dos S.; ALMEIDA, L. M. W. de. **O conceito de função em situações de Modelagem Matemática.** Zetetiké, Campinas: UNICAMP, v. 13, n. 23, p. 63-85, jan./jun. 2005.

TRINDADE, J. A. de O.; MORETTI, M. T. **Uma relação entre teoria histórico-cultural e a epistemologia histórico-crítica no ensino de função: mediação**. Zetetiké, Campinas: UNICAMP, v.8, n. 13/14, p. 29-49, jan./dez. 2000.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** Tradução: Méricles Trindade Moretti. Revemat, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

CÂNDIDO, S. L. **Uma experiência sobre o ensino e a aprendizagem de funções**. Educação Matemática em Revista, São Paulo, n. 8, p. 47-56, jun. 2000.

SOUZA, A. R. de; SILVA, G. A. da. **Desenvolvimento e análise de uma metodologia para o ensino de funções quadráticas utilizando os softwares 'parábola' e 'oficina de funções'.** Zetetiké, Campinas: UNICAMP, v. 14, n. 25, p. 107-131, jan./jun. 2006.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. 128 p.

MICOTTI, M. C. de O. **O ensino e as propostas pedagógicas.** In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 153-167.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática.** Campinas: Papirus, 1997. 176 p.

FONSECA, M. C. F. R. **Por que ensinar Matemática.** Presença Pedagógica, Belo Horizonte, v. 1, n. 6, mar./abr. 1995.

OLIVEIRA, M. K. de. **Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento um processo sóciohistórico**. 4. ed. São Paulo: Scipione, 1999. 112 p.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem.** Edição eletrônica: Ed. Ridendo Castigat Mores, 2001. 159 p.

MIGUEL, J. C. **O processo de formação de conceitos em Matemática: implicações pedagógicas**. São paulo: UNESP, 2006.

POZO, J. I. (Org). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.** Tradução: Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998. p. 9-65.

ONUCHIC, L. de la R. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas.** In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199-217.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196 p.

LEÃO, A. S. G.; BISOGNIN, V. **Construção do conceito de função no ensino fundamental por meio da metodologia da resolução de problemas**. Educação Matemática em Revista – R.S., n. 10, v. 1, p. 27-35, 2009.

MEDIANO, Zélia D. et al. **Rumo a uma nova didática**. 6. ed. – Petrópolis: VOZES, 1994.