UFRRJ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

Uma Proposta Metodológica Para o Ensino de Gráficos de Funções Trigonométricas

Edhana das Graças Ferreira

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

EDHANA DAS GRAÇAS FERREIRA

Sob a Orientação da Professora

Eulina Coutinho Silva do Nascimento

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ

Agosto, 2017

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F383p

Ferreira, Edhana das Graças, 1981-
Uma Proposta Metodológica Para o Ensino de Gráficos de Funções Trigonométricas / Edhana das Graças Ferreira. - 2017.
90 f.: il.

Orientadora: Eulina Coutinho Silva do Nascimento.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, 2017.

1. Gráficos de Funções Trigonométricas. 2. Estudos Dirigidos. 3. Tecnologia. I. Nascimento, Eulina Coutinho Silva do, 1961-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Programa de Pós Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

EDHANA DAS GRAÇAS FERREIRA

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no Curso de Pós-Graduação em Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 31/08/2017

____
Eulina Coutinho Silva do Nascimento. Dr.ª UFRRJ
(Orientadora)

____
André Luiz Martins Pereira. Dr. UFRRJ

____
Agnaldo da Conceição Esquincalha. Dr. UERJ

Dedico este trabalho a meus pais e minhas irmãs, sem cujo suporte, esta dissertação, assim como a conclusão deste mestrado, não teriam sido possíveis.

AGRADECIMENTOS

Como não poderia deixar de ser, meu primeiro e principal agradecimento é a Deus, por ter me dado resistência e paciência para enfrentar mais este desafio.

Agradeço aos meus pais e às minhas irmãs, por terem sido sempre uma família presente e amorosa em minha vida, e que me incentivam a sempre seguir estudando e aprimorando minha formação.

Aos queridos professores Adalto Gomes da Silva, Euza de Souza Nunes e Nadir Borges de Freitas, em reconhecimento aos que foram muito mais do que professores, que foram e são tão importantes para mim.

Às amigas Luciane Barboza de Souza e Viviane Tais Nascimento Ferreira, pela ajuda, pela torcida, pela amizade, pela paciência em ouvir minhas dúvidas e reclamações e me encorajar a permanecer firma e serena.

A CAPES, pelo auxílio financeiro concedido através de bolsa durante a realização do mestrado possibilitando que houvesse mais tempo disponível para dedicação aos estudos.

Aos colegas da turma do Profmat 2015, em especial aos colegas Alexander Pires da Silva e Sérgio Dias da Silva, pela ajuda, por todas as orientações, pelo bom humor, pelo companheirismo e sábias palavras nos momentos certos.

À professora Rachel Bergman Fonte, pela inspiração na escolha do tema desta dissertação, e uma inspiração para o tipo de profissional que um dia pretendo ser.

À minha orientadora, Eulina Coutinho Silva do Nascimento, pelo incentivo, pelo apoio, por acreditar em minha capacidade, pela competência e por todo auxílio na conclusão dessa dissertação.

RESUMO

FERREIRA, E. G. **Uma Proposta Metodológica Para o Ensino de Gráficos de Funções Trigonométricas**. 2017. 90p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2017.

Este trabalho tem como objetivo propor uma metodologia que auxilie os professores no ensino de gráficos de funções trigonométricas a partir do desenvolvimento de estudos dirigidos com atividades envolvendo o uso de tecnologia, neste caso o *software Graphmatica.* É realizada uma revisão bibliográfica sobre a evolução histórica da Trigonometria, o uso de tecnologia e dos estudos dirigidos na educação. Em seguida, são analisados os capítulos referentes às funções trigonométricas nos livros didáticos propostos no guia mais recente, o PNLD 2015. A utilização da tecnologia é proposta como uma alternativa ao método tradicional de ensino e visa aumentar o interesse dos alunos por se tratar de algo muito presente em seu cotidiano cada vez mais dominado por computadores, *tablets* e *smartphones*. A partir das representações gráficas das funções básicas seno, cosseno e tangente, busca-se a análise de particularidades das famílias de funções, como domínio, imagem e período, através de atividades direcionadas até a generalização dessas especificidades com as mudanças de parâmetros, bem como das transformações gráficas ocorridas. É realizada uma exposição dos resultados qualitativos da aplicação do material em pesquisa realizada em uma turma de primeira série do ensino médio, que em aspectos gerais foram considerados positivos.

Palavras-chave: Tecnologia. Estudo Dirigido. Representação Gráfica. Funções Trigonométricas. *Graphmatica.*

ABSTRACT

FERREIRA, E. G. **A Methodological Proposal for the Teaching of Graphs of Trigonometric Functions**. 2017. 90p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2017.

This work aims to propose a methodology that helps teachers on the teaching of graphs of trigonometric functions from the development of studies directed with activities involving the use of technology, in this case the software Graphmatica. It is made a bibliographical review on the historical evolution of Trigonometry, the use of technology and the studies directed in education. Then, are analyzed the chapters on trigonometric functions in the textbooks proposed in the most recent guide, the PNLD 2015. The use of technology is proposed as an alternative to the traditional method of teaching and aims to increase the interest of students as it is something very present in their daily life increasingly dominated by computers, tablets and smartphones. From the graphical representations of the basic functions sine, cosine and tangent, seek the analysis of particularities of the families of functions, such as domain, image and period, through directed activities until the generalization of these specificities with the parameters changes, as well as the graphical transformations that occurred. It is held an exposition of the qualitative results of the application of the material in research conducted in a first year class in high school, which in general aspects were considered positive.

Keywords: Technology. Directed Study. Graphic representation. Trigonometric Functions. Graphmatica.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O tema da dissertação é uma proposta metodológica para o ensino de gráfico de funções trigonométricas através de estudos dirigidos e do agrupamento das funções em “famílias”, voltado para aplicação em um público alvo da primeira série do ensino médio. Para a análise gráfica pode ser utilizado qualquer *software* de construção gráfica, porém para esta pesquisa foi utilizado o *Graphmatica*, por ser livre, já estar disponível na unidade escolar onde aconteceu a experiência e ser de fácil manipulação.

Pretende-se verificar se é possível elaborar uma proposta em forma de estudo dirigido de apoio sobre trigonometria, diferente do livro didático, para auxiliar a compreensão gráfica de funções trigonométricas. Além de verificar como estão sendo abordados os conteúdos de Trigonometria nos livros do PNLD 2015, especialmente no que diz respeito à representação gráfica.

A proposta de identificar as correlações entre representações gráficas e algébricas de funções trigonométricas, utilizando o *software Graphmatica*, pode converter-se em uma atividade significativa, por permitir uma reprodução visual de uma função matemática de forma praticamente instantânea, e permitir, por exemplo, a visualização de soluções de problemas.

De certo modo, a inquietação por encontrar um meio de tornar o conteúdo significativo para os discentes, levou a busca de alternativas que permitissem certo grau de independência na construção do conhecimento e, nesse sentido, justifica-se a escolha pelos estudos dirigidos. Ao mesmo tempo em que as atividades apontam um rumo a ser seguido, permitem que os alunos cheguem a suas conclusões e formas de expressá-las.

Pode-se observar que, no currículo básico proposto para a elaboração de aulas da Rede Estadual de Ensino do Rio de Janeiro para a primeira série do ensino médio, no campo geométrico, espera-se que a habilidade desenvolvida pelos alunos seja “identificar gráficos de funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente” (RIO DE JANEIRO, 2011, p. 16).

Apenas identificar gráficos das funções trigonométricas seria ignorar uma série de habilidades muito úteis ao desenvolvimento de um conhecimento básico de toda uma teoria que envolve as funções trigonométricas, como por exemplo, desenvolver a percepção de que o gráfico contém características muito relevantes de fenômenos naturais.

Por diversas vezes, em materiais didáticos, apresentam-se situações em que o gráfico da função já se encontra esboçado e a solução para alguma questão está visualmente representada, porém ainda recorre-se a álgebra para buscar uma solução, principalmente quando a questão envolve números não inteiros.

Utilizar questões onde o gráfico da função trigonométrica é apresentado e pedir aos alunos que encontrem a expressão algébrica da função representada no plano cartesiano, ou pedir apenas que identifiquem um parâmetro, configura-se como um desafio que pode instigar a curiosidade. E, neste sentido, a utilização do *software* é uma contribuição significativa.

Sendo assim, o objetivo geral é propor uma sequência de atividades alternativa ao livro didático, para estudo de gráficos de funções trigonométricas através do uso do *software Graphmatica* que evidenciem os movimentos dentro das "famílias" dessas funções.

Para atingir esses objetivos, pesquisou-se e estudou-se o funcionamento do *software Graphmatica*; diferenciou-se as características dos gráficos das famílias de funções trigonométricas, analisou-se a forma como os livros didáticos do PNLD, Programa Nacional do Livro Didático, BRASIL (2015) apresentam a construção dos gráficos de funções trigonométricas e elaborou-se uma sequência de atividades para a construção gráfica de funções trigonométricas utilizando o *software Graphmatica*.

A proposta metodológica que trata a dissertação tem o anseio de estudar e disponibilizar um material que possa ser utilizado no estudo de gráficos de funções trigonométricas, dando um tratamento visual a algo que parte de uma expressão algébrica. Partindo da ideia de que o que se "descobre" é mais facilmente assimilado, esperamos que ao perceber o que muda no comportamento do gráfico com a mudança de um parâmetro essa descoberta propicie um aprendizado sólido.

Foi realizada inicialmente uma análise teórica das particularidades de cada família de funções trigonométricas a partir da construção gráfica dessas funções, e de como essa construção é realizada nos livros didáticos, bem como uma análise do funcionamento do *software Graphmatica*.

Inicialmente pretendia-se tão somente elaborar os estudos dirigidos e disponibilizá-los neste trabalho como uma proposta metodológica, porém tendo os mesmos em mãos e havendo a disponibilidade de turma para aplicação, optou-se por fazê-lo e ter, desta forma, um olhar mais concreto sobre os resultados possíveis.

A abordagem da pesquisa é qualitativa, referente a uma experiência realizada com uma turma da primeira série do ensino médio de uma escola da rede estadual do município de Seropédica no quarto bimestre do ano letivo de 2016, que contou com seis alunos, público bem reduzido, e por este motivo possível de ser acompanhado de modo mais próximo e individual. A experiência conta com a utilização do *software Graphmatica* e de estudos dirigidos.

No capítulo 2 discorreu-se sobre os aspectos teóricos que fundamentaram a elaboração da experiência, desde um breve relato histórico do desenvolvimento do estudo da trigonometria, passando pela utilização de estudos dirigidos como proposta metodológica e finalmente chegando às contribuições do uso da tecnologia em educação matemática.

No capítulo 3 fez-se uma análise sobre a forma como os livros didáticos de matemática propostos no PNLD 2015 abordaram a trigonometria, principalmente no que se refere à construção gráfica.

O quarto capítulo contém informações básicas sobre o *software Graphmatica,* escolhido para o desenvolvimento das atividades, como instruções básicas sobre os comandos e exemplos de utilização do mesmo na resolução de questões pertinentes a educação básica.

A elaboração dos estudos dirigidos e descrição da aplicação são tratadas no quinto e último capítulo juntamente com uma avaliação qualitativa dos resultados, e, em seguida, as considerações finais.

2 EMBASAMENTO TEÓRICO

Neste primeiro capítulo são tratadas três vertentes teóricas utilizadas na concepção da pesquisa: um breve relato histórico do desenvolvimento da Trigonometria, a utilização de estudos dirigidos no processo ensino-aprendizagem e o uso de tecnologia na educação, em especial na educação matemática, e na formação de professores.

O breve relato histórico visa situar o estudo da Trigonometria ao longo dos séculos, citando as contribuições de diversas civilizações e as contribuições individuais de alguns expoentes da matemática e áreas afins que desenvolveram seus estudos possibilitando inicialmente uma análise de fenômenos naturais até a generalização de suas descobertas para fenômenos periódicos.

A opção pela utilização de estudos dirigidos como recurso didático se apóia na construção do saber pelo próprio aluno enquanto ser independente e responsável por seu desenvolvimento, sob orientação de um professor atuando como incentivador e motivador.

Já a utilização da tecnologia em sala de aula, particularmente através do computador, aponta para uma necessidade crescente da inserção de métodos modernos de apoio ao processo de aprendizagem, prevista em documentos oficiais norteadores da educação e amplamente analisado por estudiosos da área.

2.1 Trigonometria: Um Breve Histórico da Origem

Apesar de não ser possível apontar uma única civilização como a responsável pela descoberta das relações trigonométricas, segundo Bortoli (2012, p. 27), vários povos contribuíram para o desenvolvimento da Trigonometria ao longo dos tempos, dentre eles: egípcios, gregos, romanos, babilônios, judeus e árabes. Bortoli (2012, p.38) afirma ainda que “a evolução da Trigonometria e sua existência deve-se à ligação com a astronomia e a geografia”.

Segundo Costa (2003, s.p.) existem indícios na China antiga (cerca de 1110 a.C.) da utilização de uma trigonometria básica para cálculo de medidas e da utilização da ideia de ângulo, muito embora não haja registros de como eram feitas as medições.

Eves (2004, p. 202) afirma que alguns problemas presentes já no papiro de Rhind envolviam questões trigonométricas. O autor cita como maiores expoentes no desenvolvimento da Trigonometria, os gregos, Hiparco que viveu aproximadamente em 140 a.C., Menelau por volta de 100 d.C. e Ptolomeu que viveu por volta de 150 d.C.

Costa (2003, s.p.) cita as origens da trigonometria no Egito e na Babilônia a partir da razão entre as medidas de lados de triângulos semelhantes ainda em 1650 a.C., possivelmente em cálculos envolvendo a construção de pirâmides, além de cálculos envolvendo a associação de comprimento de sombras lançadas por uma vara vertical.

O interesse pelos estudos sobre astronomia influenciou o desenvolvimento de conceitos trigonométricos. Atribui-se aos gregos a nomenclatura de *gnômon* ao relógio de sol vindo dos babilônios. Tratava-se de uma vareta sempre do mesmo tamanho, fixada ao solo em um ângulo de 90°, o comprimento da sombra projetada dava a ideia da duração do ano e lateralmente a duração do dia. (COSTA, 2003, s.p)

Deve-se aos gregos o surgimento de grandes matemáticos e astrônomos estudiosos do assunto, como por exemplo, Thales e Pitágoras. Entretanto, é atribuído a Hiparco de Nicéia o título de “Pai da Trigonometria”, tendo sido o mesmo a considerar a divisão do círculo em 360 partes iguais, denominadas graus. (EVES, 2004, p. 202)

Conforme afirmado por Eves (2004, p. 204) seguindo-se a Hiparco temos Menelau de Alexandria, tendo sido autor de seis livros sobre cordas em um círculo dos quais três sobre trigonometria esférica resistiram em uma versão árabe. Após Menelau, surge Cláudio Ptolomeu, responsável na Antiguidade por uma das obras mais importantes da história da Trigonometria, o *Almagesto* (“a maior” do árabe “*Al magest*”), baseado no trabalho de Hiparco. Trata-se de uma coletânea de treze livros considerada um marco no estudo da Astronomia, continha tabelas trigonométricas, possibilitando quantificar aspectos astronômicos apenas observáveis.

Voltando a Costa (2003, s.p.) ainda nos primeiros séculos da era cristã, acredita-se que foi a trigonometria de Hiparco que chegou a Índia, onde foi elaborado um conjunto de textos ligados a astronomia, dos quais o *Surya* relacionava a metade da corda à metade do ângulo central correspondente em um círculo. Isto tornou possível a visualização do triângulo retângulo na circunferência, sendo chamado *jiva* a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

Costa (2003, s.p.) afirma que seguindo-se aos hindus, foi a vez dos árabes contribuírem para o desenvolvimento da trigonometria, em meados do século IX. Um dos principais estudiosos árabes conhecido como Al Battani foi responsável por levar a trigonometria hindu aos árabes, sendo sua a ideia de considerar o círculo de raio unitário e demonstrar que a relação conhecida hoje como seno, é verdadeira para qualquer triângulo retângulo. Também entre os árabes o estudo da trigonometria estava ligado a estudos de astronomia.

Quanto à origem da palavra "seno":

> "[...] a tradução latina da palavra árabe *jaib*, que significa *dobra*, bolso ou prega de uma vestimenta. [...]. Trata-se de uma tradução defeituosa, que infelizmente durou até hoje. A palavra árabe adequada, a que deveria ter sido traduzida seria *jiba*, em vez de *jaib*. *Jiba* significa a corda de um arco [...] em árabe, como em hebraico, é freqüente escreverem-se apenas as consoantes das palavras, o leitor se encarrega de completar as vogais. Além de "jiba" e "jaib" terem as mesmas consoantes, a primeira destas palavras era pouco comum pois tinha sido trazida da Índia e pertencia ao idioma sânscrito." (LIMA, 1991, p. 187)

Entretanto, o próprio autor evidencia que existem outras hipóteses para a origem do vocábulo. Em decorrência disso, a palavra cosseno deriva do seno do arco complementar. E a utilização do termo tangente ("tocar"), procede do fato de ser o segmento da reta compreendido ente o raio e um prolongamento do outro lado de um ângulo, esse segmento "toca" o ciclo. (LIMA, 1991, p. 188)

Ainda segundo Costa (2003, s.p.), a partir de então podemos destacar como contribuições importantes: um século de traduções dos estudos árabes na Europa (por volta do século XII); aplicação da trigonometria árabe na Agrimensura, por Fibonacci (século XII); noções de funções trigonométricas para o estudo de fenômenos naturais na Escola de Filosofia Natural do Merton College de Oxford e na

Escola de Paris e desenvolvimento da representação gráfica das funções por Nicole Oresme (século XIV); consolidação da noção de função por Galileu e Descartes influenciados por Oresme (séculos XVI e XVII); estudo de trigonometria com ênfase em análise realizado por Viète (século XVI); adoção do raio unitário e definição de função aplicada a número e não a ângulo, por Euler dando a trigonometria o formato atual (século XVIII).

Podemos perceber que através da passagem dos séculos as distintas civilizações se ocuparam desenvolvendo todo o suporte teórico e prático necessário para o estudo da trigonometria. A história da trigonometria, bem como da matemática de forma geral, pode se converter em uma ferramenta interessante para elucidação da utilidade e relevância de seu desenvolvimento.

2.2 Estudos Dirigidos Como Proposta Metodológica

Podemos definir o estudo dirigido como um recurso didático em que “o professor solicita ao aluno uma determinada tarefa, fornecendo-lhe instruções de como realizá-la.” (CINEL, 2003, p. 31)

Este modelo de instrumento didático também possui a prerrogativa de poder ser aplicado em várias etapas do período educacional, desde o ensino fundamental até o ensino superior, respeitando-se seus graus de entendimento e níveis de predisposição em seguir as orientações. Mesmo durante o período de aulas de determinado conteúdo, é possível propor a utilização dos estudos dirigidos de forma inicial, como uma espécie de diagnóstico ou de preparação de uma aula expositiva, durante a exposição dos conteúdos para assimilação dos mesmos, ou como tarefa final de fixação ou avaliação.

Neste sentido, o estudo dirigido permite que o próprio aluno tenha certo grau de independência no seu processo de desenvolvimento dentro do conteúdo estudado, permitindo que haja respeito ao tempo individual de aprendizagem de cada indivíduo, uma vez que cada um pode avançar quando se sentir preparado para tal.

No caso de haver uma escolha pela realização do estudo em grupos, a interação entre os participantes de cada grupo e entre os grupos representa ainda uma nova fonte de avanço, possibilitando a troca de informações e questionamentos que gradativamente levem à assimilação dos conceitos presentes em cada atividade proposta.

É de extrema relevância que na elaboração das atividades, as instruções sejam redigidas de acordo com o nível de compreensão do grupo em questão, devem também ser claras e diretas, possibilitando que os alunos sejam capazes de desenvolvê-las. Além disso, a aplicação desse recurso didático parte de um estímulo que pode ser proporcionado por um texto, ou uma aula diferenciada com apresentação de algum material que seja diferente do usual.

Há algumas etapas que podem ser consideradas para a aplicação dos estudos dirigidos, a primeira delas refere-se ao estímulo citado anteriormente, a segunda etapa é aplicação propriamente dita dos estudos, onde são realizadas as atividades, a terceira etapa refere-se a uma síntese dos resultados obtidos, possivelmente com alguma generalização, e por fim o momento da avaliação.

O tempo de realização das atividades pode variar, considerando-se dentre outros fatores, a quantidade e o tipo de atividades propostas, a motivação dos alunos, a necessidade de esclarecimentos por parte do professor, podendo mesmo ser estendido por várias aulas, dependendo dos objetivos a serem atingidos.

De modo geral, um estudo dirigido tem como objetivos principais proporcionar ao aluno a possibilidade de aprender por si mesmo, tornar possível ao professor identificar as diferenças presentes dentro do grupo de indivíduos de uma mesma turma e a fixação dos conteúdos. (CINEL, 2003, p. 31)

Segundo Cinel (2003, p. 31) esse tipo de instrumento metodológico situa o professor como participante do processo, que ajuda os alunos a aprenderem sem necessariamente ensinar, permitindo-lhes um sólido desenvolvimento cognitivo e capacidade de analisar e buscar soluções ao que for apresentado.

Existe a possibilidade de o estudo dirigido ser realizado pelo aluno em casa ou em sala de aula, sendo o professor o responsável pelo fornecer elementos que possibilitem a execução das atividades, esclarecendo qual é o objetivo, ou objetivos, finais.

Em ambos os casos, o momento da avaliação dos resultados é uma excelente oportunidade de troca de conhecimentos. É importante avaliar os acertos, porém a avaliação do processo é mais ainda, já que possibilita ao professor entender a sequência lógica que guiou o aluno e permite auxiliá-lo a corrigir os possíveis equívocos. É até mesmo possível que em um debate sobre essa sequência lógica o próprio aluno avalie se o seu raciocínio está ou não correto.

O erro não deve ser tratado de forma negativa, pois mesmo uma resposta incorreta pode ser parte de um entendimento incompleto de determinada passagem, identificar esses pontos pode servir como incentivo para serem realizadas revisões e para se ter mais atenção na conclusão das atividades.

São vários os tipos de tarefas que podem estar contidas em um estudo dirigido, dentre elas podemos citar: a leitura e interpretação de textos, execução de experiências, assistir a vídeos e/ou imagens, resolver problemas, utilizar *softwares* para chegar a conclusões etc.

O material a ser utilizado (livros, computador, material impresso etc.) precisa estar disponível para que a atividade aconteça de forma natural e sem maiores problemas. Também é desejável que a relação entre o professor e os alunos seja franca, com uma postura acessível do professor que facilite a participação e o questionamento sempre que necessário para uma melhor compreensão.

A utilização de estudos dirigidos traz como benefícios para o processo de aprendizagem a possibilidade de consolidar os conhecimentos adquiridos ao aliar a explicação do professor à realização de tarefas que seguem uma sequência crescente de dificuldade. Permite ainda o desenvolvimento de estratégias individuais na busca de respostas, desenvolvendo hábitos de investigação e exame de situações. (LIBÂNEO, 1994, p. 163-164)

Ainda segundo Libâneo (1994, p. 164) os papéis desenvolvidos por professores e por alunos são bem definidos. Cabe aos professores elaborar as atividades adequadas ao nível de escolaridade e entendimento do grupo, assegurar os materiais necessários, acompanhar o desenvolvimento do processo, individualmente se necessário, auxiliando no prosseguimento e respondendo a questionamentos e realizar a avaliação aproveitando os acertos e erros na socialização das informações.

O autor considera como pré-requisito básico no que se refere aos alunos, que saibam como seguir as instruções do estudo dirigido e receber as orientações do professor, utilizar os recursos para resolver as atividades e que tenham atitudes positivas de convivência em grupo ao solicitar auxílio dos demais colegas e/ou do professor.

Por todas as características apresentadas, o estudo dirigido pode ser considerado um instrumento perfeitamente adequado ao tipo de pesquisa a que se propõe este trabalho por se tratar de um material de aplicação relativamente simples, e que possibilita a chegada a resultados satisfatórios de aprendizagem, que é o que se espera.

2.3 Tecnologia em Educação Matemática

Aqui é tratado o embasamento teórico utilizado referente à tecnologia aliada à educação matemática, mais especificamente no que se refere à utilização de tecnologia na representação gráfica das funções. Ainda neste contexto, são considerados documentos oficiais norteadores da educação no país, como PCN, Diretrizes Curriculares Nacionais e Orientações Curriculares para o Ensino Médio.

Os documentos oficiais que norteiam os caminhos da educação no país recomendam enfaticamente o desenvolvimento de habilidades e competências investigativas e de análise de informações. Os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) sugerem o uso de tecnologias da informação e comunicação a fim de enriquecer o processo de aprendizagem, dar significado aos saberes e enfatizam ainda a importância do desenvolvimento de habilidades de tratamento das informações obtidas, para tomada de decisões. (BRASIL, 1997)

Professores que não estejam aptos a utilizar em aulas os mais variados recursos computacionais disponíveis perdem cada vez mais oportunidades de usar essa ferramenta que ocupa um tempo precioso no cotidiano dos indivíduos de forma geral nos dias atuais.

Estar preparado para lidar na prática com a tecnologia na educação, como instrumento facilitador da aprendizagem não é suficiente, é necessário se ter consciência de que esta utilização abre espaço para uma série de questionamentos a respeito da utilidade desse tipo de conhecimento no futuro profissional e pessoal de cada indivíduo.

Segundo Palis:

> Ainda hoje, o conhecimento pedagógico do conteúdo de muitos professores de matemática não inclui uma integração consistente de modernas tecnologias digitais. A tecnologia avança, mas o desenvolvimento de estratégias para uma efetiva integração de tecnologia não ocorreu com a mesma velocidade. (PALIS, 2010, p. 437)

Ao se preparar para o uso da tecnologia em sala de aula há que se atentar para o fato de que essa preparação/formação deverá ser contínua, pois a todo o momento surgem atualizações e novos tipos de ferramentas, a velocidade das mudanças é grande e corre-se o risco de se ficar ultrapassado muito rapidamente.

Existe a necessidade de que se haja autonomia na escolha da tecnologia a ser utilizada, a que seja mais adequada ao objetivo a ser alcançado em cada etapa. É também preciso considerar que utilizar algum equipamento para a simples exibição de um conteúdo que poderia ser registrado no quadro, como por exemplo, utilizar um projetor de slides, não é nada além de expor a sua mesma aula, sem novidade.

A história recente de popularização dos avanços tecnológicos, causada pelo aumento dos níveis de produção e redução de custos, criou uma geração de alunos, crianças e adolescentes, que tem a sua disposição equipamentos como *smartphones*, *tablets* e *notebooks*, mas que não lidam regularmente com essas ferramentas para fins educacionais.

É evidente a inclusão dos mais variados tipos de equipamentos que transmitem informação e mídias em diversos formatos, porém a escola ocupa papel de destaque em se tratando de incluir essas novas tecnologias para fins de aprendizado no cotidiano dos alunos e adequá-las às diversas situações que surgem, visto que é dentro dela que a socialização das informações ocorre democraticamente.

Valente (1993, s.p.) associa quatro elementos básicos para a implementação do uso de informática no processo educativo, são eles: o computador, o *software*, o professor que possua a formação necessária e o aluno. Estes quatro elementos constituem a base sobre a qual o processo se sustenta.

O autor afirma ainda que apesar de toda a utilidade dos computadores não há de se questionar o papel do professor, visto que ele atua em diversas funções e possui a capacidade de ser flexível e perceber que nem todos aprendem da mesma forma e no mesmo ritmo.

Para Gravina e Santarosa (1998, p. 2), se o que se espera é uma mudança nos modelos educacionais que são seguidos, é preciso sermos cautelosos e não utilizarmos indiscriminadamente a informática, para que não se corra o risco de confundir a atratividade visual dessa utilização com uma aula inovadora, quando na realidade permanecemos fazendo o mesmo.

No que diz respeito ao ensino de matemática, o potencial da utilização de diversos tipos de tecnologia é bem vasto. Podemos utilizar vídeos e filmes para apresentar a história da matemática de modo mais dinâmico, utilizar *softwares* de construções gráficas, planilhas eletrônicas para cálculos diversos, calculadoras para verificações e aproximações e mais uma série de outras aplicações.

Dentro deste contexto, optamos por realizar um estudo envolvendo a construção gráfica de funções já que elas têm papel importante por ser possível fazer uma leitura de fenômenos que ocorrem obedecendo a suas leis, há vários exemplos de fenômenos modelados por todo tipo de funções, especialmente funções trigonométricas em se tratando de fenômenos periódicos.

Softwares de construções gráficas utilizados para fins educacionais, como o *Graphmatica*, o Geogebra, o *Winplot*, o *Matlab*, o *Maple* e vários outros estão disponíveis na internet para download, alguns deles de forma gratuita. Existem também sites onde é possível gerar online o gráfico de uma função qualquer a partir de sua representação algébrica.

Em comum, todos eles permitem a visualização instantânea da representação gráfica das funções e a partir dela o acesso ao conhecimento de particularidades e propriedades pertinentes a cada função, podendo auxiliar na investigação da resolução de problemas.

Respondendo ao questionamento sobre qual seria o melhor *software* para estudo de um ou outro conteúdo, Bittar afirma que:

> Esse *melhor software* não existe, pois tudo dependerá das atividades realizadas com o material escolhido. Um *software*, considerado *a priori* bom pelas possibilidades que oferece, pode ser usado de forma a não contribuir com a construção do conhecimento. (BITTAR, 2006, p. 3)

O *software* de construção gráfica escolhido para a elaboração da pesquisa, o *Graphmatica*, admite a visualização de vários gráficos na mesma tela, este recurso permite a comparação e a exploração de características comuns aos gráficos dentro da mesma família. Sendo possível identificar translações, dilatações e contrações verticais e horizontais, relacionado-as a mudanças nos parâmetros. Desse modo, gradativamente, é possível ao aluno construir o entendimento da forma de um gráfico a partir do gráfico da função básica da mesma família (GRAVINA; SANTAROSA, 1998, p. 19-20).

3 ANÁLISE DE LIVROS DO PNLD 2015 - FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

O presente capítulo aborda a forma como as funções trigonométricas são tratadas nos livros didáticos utilizados na rede pública nacional, mais especificamente na construção dos gráficos dessas funções e suas particularidades. Os principais itens analisados consideram o uso da tecnologia como ferramenta no processo de aprendizagem e a relação entre a mudança de parâmetros e as alterações decorrentes dessa modificação no gráfico da função básica de cada família de funções.

O momento da escolha do livro didático é uma oportunidade para que a equipe de professores de uma mesma disciplina possa se reunir e tratar, em linhas gerais, qual papel será atribuído a esse material. Os critérios de escolha podem oscilar por uma opção mais tradicional com definições formais e rígidas ou pode-se optar por escolher uma coleção com uma visão mais contemporânea e com questões mais atuais.

Essa escolha deve ser coerente com os objetivos propostos no Projeto Político Pedagógico de cada instituição, que preveem as habilidades a serem desenvolvidas pelos discentes. É importante garantir a formação para a cidadania em uma atualidade cuja presença da tecnologia e a exigência por capacidade de raciocínio lógico é cada vez mais esperada.

O Guia de Livros Didáticos do Programa Nacional do Livro Didático de 2015, Brasil, (2015) para o ensino médio apresenta seis coleções de livros didáticos de matemática aprovadas pelo MEC para o triênio 2015-2016-2017, posteriormente escolhidos e adotados pelos professores.

O conteúdo de funções trigonométricas consta nos primeiros capítulos do volume 2 de cada coleção aprovada, porém, de acordo com o currículo mínimo a ser seguido na rede pública estadual do Rio de Janeiro, este conteúdo está previsto para a fase final da primeira série do Ensino Médio. Essa diferença consiste em uma dificuldade de organização na distribuição desses livros ao longo do ano letivo.

Seguem as análises dos capítulos sobre funções trigonométricas nas coleções consideradas, dando-se ênfase à construção gráfica.

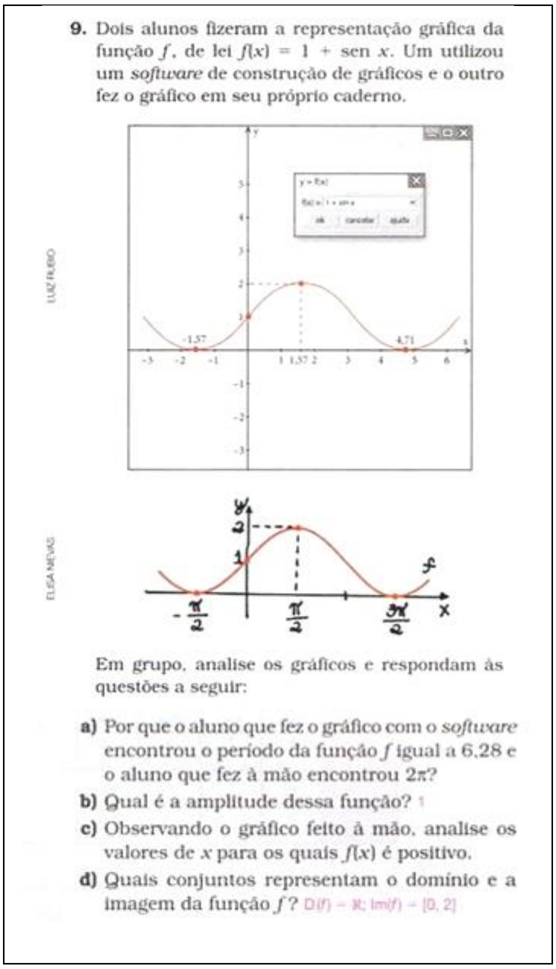
3.1 Coleção “Conexões Com a Matemática”

A coleção Conexões Com a Matemática, de Fábio Martins de Leonardo, Leonardo (2013), apresenta as funções trigonométricas em seu segundo capítulo por 35 páginas.

O gráfico da função seno $(f(x) = \operatorname{sen} x)$ é apresentado a partir de uma tabela e marcação de pontos no plano cartesiano, utilizando os valores de x para os quais os valores da função já foram previamente estabelecidos. As características principais da função (periodicidade, imagem, crescimento e decrescimento) são descritas, porém sem nenhuma observação de que, com a mudança de parâmetros, essas características podem ser alteradas.

Nos exercícios propostos, apresenta uma única questão em que consta uma representação gráfica através de um *software* e o gráfico da mesma função como tendo sido feito a mão por um aluno, e é solicitado que, em grupos, sejam respondidas perguntas sobre aparentes “diferenças” entre os gráficos. A única diferença visual para os dois gráficos é a de que o *software* utilizou escala numérica aproximando π para 3,14 e na representação do aluno determinou na reta os múltiplos de π.

Figura 1 Exercício Sobre Representação Gráfica



9. Dois alunos fizeram a representação gráfica da função f, de lei $f(x) = 1 + \text{sen } x$. Um utilizou um *software* de construção de gráficos e o outro fez o gráfico em seu próprio caderno.

Em grupo, analise os gráficos e respondam às questões a seguir:

a) Por que o aluno que fez o gráfico com o *software* encontrou o período da função f igual a 6,28 e o aluno que fez à mão encontrou 2π?

b) Qual é a amplitude dessa função? 1

c) Observando o gráfico feito à mão, analise os valores de x para os quais $f(x)$ é positivo.

d) Quais conjuntos representam o domínio e a imagem da função f? $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [0, 2]$

Fonte: Leonardo, 2013, p. 48

A mudança de parâmetro é abordada em outra questão, porém sem utilização de *software*, propõe-se a construção de gráficos $(g(x) = \text{sen}\, x \ \ e \ f(x) = 2.\text{sen}\, x)$ utilizando tabelas numéricas e a generalização para $f(x) = k.\text{sen}\, x, \ \ k \in \mathbb{R}_+^*$, considerando-se para tal a amplitude da função.

Figura 2 Exercício Sobre Mudança de Parâmetros

11. Considere uma função do tipo $f(x) = k \cdot \text{sen } x$. Vamos determinar como a presença do parâmetro k, $k \in \mathbb{R}_+^*$, modifica o gráfico de $g(x) = \text{sen } x$. Para isso, utilizamos como exemplo a função $f(x) = 2 \cdot \text{sen } x$.

Você pode resolver com um colega os itens a seguir.

a) Crie uma tabela com três linhas, intituladas: x, $\text{sen } x$ e $2 \cdot \text{sen } x$. Complete a tabela considerando os valores de x variando no intervalo $[0, 2\pi]$.

b) Em um sistema de eixos cartesianos, construa o gráfico da função $g(x) = \text{sen } x$.

c) No mesmo sistema, construa o gráfico da função $f(x) = 2 \cdot \text{sen } x$. Ver resolução no Guia do professor.

d) Compare a amplitude da função g com a amplitude da função f. O que você observa?

e) Faça o mesmo para $h(x) = 3 \cdot \text{sen } x$. Como você generalizaria o resultado do item **d** para funções do tipo $i(x) = k \cdot \text{sen } x$ em que $k \in \mathbb{R}_+^*$?

Fonte: Leonardo, 2013, p. 48

O gráfico da função cosseno segue exatamente a mesma sequência de apresentação utilizada para a função seno, até no que diz respeito aos exercícios. Para a função tangente a sequência permanece, o que confere um método bem definido e lógico na apresentação dos conteúdos, porém é inserida a noção de assíntotas, completamente pertinente a esta etapa, evidenciando as diferenças entre as funções e as características específicas de cada uma delas, sendo assim um aspecto positivo desta parte da obra.

O capítulo segue com os gráficos das funções inversas das funções seno, cosseno e tangente, utilizando o fato de que funções inversas são simétricas em relação à bissetriz do 1° e do 3° quadrantes, abordagem interessante já que remete à utilização de conhecimentos prévios, reforçando a ideia de continuidade e ligação entre os conteúdos.

Após essa exposição inicial, o livro aborda transformações a partir das funções fundamentais, ainda utilizando tabelas para a construção dos gráficos e não um *software* de construção gráfica. Apresenta as translações “para cima” e “para baixo”, “para a esquerda” e “para a direita”. Já as contrações e expansões em relação aos eixos são tratadas, respectivamente através de amplitude e período das funções. Abordagem bem positiva dentro da exposição dos conceitos, visto que a partir de uma função mais simples é possível chegar a gráficos de funções mais elaboradas.

Ao final do capítulo são citados alguns exemplos de aplicações das funções trigonométricas utilizadas em modelagem matemática e sugeridas pesquisas de fenômenos periódicos.

De modo geral, o conteúdo é tratado de forma muito extensa, o que pode ser cansativo para os alunos e "[...] não se esclarece que as funções trigonométricas são modelos abstratos que expressam as oscilações nos fenômenos reais apenas de modo aproximado". (BRASIL, 2015, p. 26).

De fato, há muito texto e a linguagem excessivamente formal em alguns trechos pode não ser a mais adequada, principalmente levando-se em consideração o nível de ensino e ao público a que se destina. Porém, há que se salientar aspectos positivos do capítulo, como a boa quantidade de exercícios resolvidos e propostos e uma seção de autoavaliação. Há também sugestões de estudo de conteúdo referente a questões em que o aluno não tenha obtido sucesso, possibilitando certo grau de independência no processo de aprendizagem.

3.2 Coleção "Matemática: Contexto e Aplicações"

A coleção Matemática: Contexto e Aplicações, de Luiz Roberto Dante, Dante (2013), apresenta as funções trigonométricas em seu terceiro capítulo por 20 páginas.

Assim como na primeira coleção, o gráfico da função seno é apresentado através da marcação de pontos no plano cartesiano a partir de uma tabela relacionando valores do domínio cujo seno é conhecido. As características da função são apresentadas como observações. O mesmo acontecendo com a função cosseno logo em seguida.

A alteração do período e da imagem das funções provocada pela mudança de parâmetros é analisada utilizando-se fórmulas, sem que seja feita nesse momento uma correlação quanto aos efeitos dessa alteração nos gráficos.

Chama atenção o fato de não haver um estudo da função tangente, logo após a apresentação das funções seno e cosseno, são propostos alguns exercícios teóricos e é apresentado um exemplo de aplicação de funções trigonométricas em uma modelagem matemática do estudo das marés.

A falta do estudo da função tangente representa a perda do estudo de uma série de particularidades que a diferenciam das funções seno e cosseno, como domínio, imagem e período.

Dentro do capítulo existe uma seção intitulada “Matemática e Tecnologia” dedicada especificamente à utilização de *software* de construção gráfica, aqui considerando o Geogebra. Nesta seção há um tutorial que ensina desde a instalação do *software* até sua utilização e uma série de atividades que permitem ao aluno visualizar o movimento do gráfico através da mudança dos parâmetros, e possibilitando a aquisição de conhecimento de forma praticamente autônoma

Relacionando esta seção com o capítulo como um todo, novamente a função tangente foi desconsiderada. De acordo com as propostas, parece ser esperado que o aluno consiga de forma autônoma visualizar e colocar em palavras as descobertas das características gráficas das famílias de funções básicas. Como as expressões “translação”, “contração” e “expansão” não foram citadas, é complexo acreditar que chegariam a elas, mas se conseguirem expressar de alguma forma, mesmo que não matematicamente exata é um avanço.

O Guia de Livros Didáticos (BRASIL, 2015, p. 34), faz a mesma observação sobre a coleção anterior, no que diz respeito às funções trigonométricas, por não ser explicitado que essas funções são modelos importantes, mas se tratam de aproximações dos fenômenos naturais.

A obra possui linguagem clara e objetiva, sem excesso de texto e com muitas ilustrações do ciclo trigonométrico em cores que facilitam a diferenciação dos arcos, além de uma quantidade razoável de exercícios resolvidos e propostos.

3.3 Coleção “Matemática – Paiva”

A coleção Matemática - Paiva, de Manoel Rodrigues Paiva, Vol. 2, editora Moderna, 2ª edição, Paiva (2013), apresenta as funções trigonométricas em seu sexto capítulo por 20 páginas.

Nesta coleção, o autor inicia apresentando o gráfico da função seno sem utilização de tabela de valores, mas colocando o ciclo trigonométrico ao lado do plano cartesiano e utilizando projeções dos pontos do ciclo no plano cartesiano, visualmente, essa escolha deixa bem clara a característica curva do gráfico.

Quando se utiliza a tabela e a marcação de pontos no plano cartesiano corre-se o risco de o aluno ao “ligar os pontos” utilizar segmentos de reta e, dessa forma, reforçar uma ideia equivocada quanto ao formato do gráfico. Neste sentido, essa apresentação diferenciada do gráfico é muito positiva.

A seguir são apresentadas as características da função e exercícios teóricos resolvidos de construção gráfica. Nestes exemplos, recorre-se à utilização das tabelas, e, por haver a mudança de parâmetros nesses exemplos, justifica-se esse formato.

O gráfico da função cosseno também não é apresentado utilizando tabela, mas utilizando a relação entre seno e cosseno, $\cos x = \operatorname{sen}\,(\frac{\pi}{2} - x)$, e desta forma, partindo do gráfico da função seno chega-se ao gráfico da função cosseno e suas características, o que é uma abordagem muito interessante. Seguem-se mais exercícios resolvidos e o estudo por meio de fórmula do período das famílias de funções dessas funções.

A seção seguinte relaciona essas funções básicas a fenômenos periódicos como, por exemplo, o movimento de pêndulos, movimento das marés, propagação de ondas etc.

A apresentação do gráfico da função tangente volta a ser feita utilizando o ciclo trigonométrico ao lado de um plano cartesiano e a projeção dos valores das tangentes dos ângulos nesse plano. As características da função tangente aparecem usando a referência do gráfico.

Apesar da apresentação diferenciada dos gráficos, não foram feitas correlações sobre a mudança de parâmetros e o formato final dos gráficos dentro das famílias de funções. Essa parte da construção baseou-se exclusivamente no uso de tabelas.

Outro fator também não considerado foi a utilização da tecnologia, nenhuma indicação de *software*, ou sugestão de pesquisa nesse sentido. Desta forma, o estudo gráfico desse tipo de funções deixa de utilizar uma importante ferramenta disponível e tão presente no cotidiano dos alunos.

3.4 Coleção “Matemática: Ciências e Aplicações”

A coleção Matemática: Ciência e Aplicações, dos autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Mauro Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze Silveira de Almeida, Vol. 2, editora Saraiva, 7ª edição, Iezzi et. al. (2013), apresenta as funções trigonométricas em seu quarto capítulo por 23 páginas.

O capítulo inicia-se com uma questão sobre o movimento das marés, classificando-o como um movimento periódico e introduzindo desta forma o assunto das funções trigonométricas.

Diferentemente das demais coleções analisadas até o momento, nesta coleção são apresentadas inicialmente as características da função seno, como período, imagem e periodicidade antes da construção do gráfico que é deduzido a partir destas características, sem utilização de tabela e nem de projeções do ciclo trigonométrico.

O Guia de Livros Didáticos afirma que “há casos em que, sem justificativa, os gráficos de funções são obtidos com base apenas em alguns poucos pontos do plano cartesiano”. (BRASIL, 2015, p. 53) Isto é perfeitamente verificado neste capítulo.

O uso da tabela surge nos exemplos que se seguem, já com questões teóricas de mudança de parâmetros. Novamente, determinar o período de uma função seno aparece como uma propriedade calculada através de fórmula. Os exercícios propostos não consideram a construção dos gráficos, apenas cálculos numéricos dessas funções e a dedução das características a partir da expressão algébrica.

O exemplo de aplicação sugerida em Iezzi et. al. (2013, p. 60) diz respeito ao movimento de passageiros em uma roda gigante e considera a linha de raciocínio seguida na exibição do conteúdo, cálculos numéricos e utilização de fórmulas, sem levar em consideração o aspecto gráfico da questão.

A função cosseno é apresentada de modo análogo, com exposição das características da função no ciclo trigonométrico e posterior exibição do gráfico, exemplos teóricos e fórmulas. Para esta função, o exemplo de aplicação refere-se ao fenômeno das marés, porém desta vez o gráfico é utilizado ainda que apenas de modo ilustrativo.

A função tangente segue com estudo das características antes da construção gráfica, mas apesar de neste caso o ciclo trigonométrico ter sido representado ao lado do plano cartesiano com os valores das tangentes explicitados, não fica clara a projeção de valores.

De modo geral, observa-se que nesta coleção, no capítulo de funções trigonométricas, a contextualização foi pouco observada e a utilização da tecnologia para a construção gráfica foi absolutamente negligenciada. A opção por uma abordagem com muito texto, poucas e pequenas imagens torna a leitura até certo ponto cansativa.

Também não foram explicitadas as relações entre os gráficos dentro da mesma família de funções por meio de translações, contrações e expansões ao longo dos eixos, talvez, pela escolha de um tratamento matematicamente rigoroso.

A sequência rígida de teoria, exemplos puramente conceituais e exercícios propostos também sem contextualização, não sugerem uma busca independente por parte do aluno de construção individual de conhecimento e carece de significado de utilização prática.

Nesta obra, parece ter sido feita a escolha de manter o estudo das funções trigonométricas em um campo mais teórico de exposição de conceitos e cálculos numéricos, que uma vez dominados podem ser utilizados para aprofundamento no tema.

3.5 Coleção “Matemática – Ensino Médio”

A coleção Matemática – Ensino Médio, de Kátia Cristina Stocco Smole, Maria Ignez de Souza Vieira Diniz, Smole e Diniz (2013), apresenta as funções trigonométricas em seu segundo capítulo por 32 páginas.

A coleção segue um caminho diferente das demais no capítulo referente às funções trigonométricas. No início é feito um estudo bem extenso e detalhado das funções seno, cosseno e tangente, e suas características, sem menção dos gráficos.

São considerados valores numéricos para arcos notáveis, congruências, periodicidade, crescimento, paridade, domínio e imagem das funções seno e cosseno. Os exemplos e exercícios resolvidos e propostos são puramente teóricos, sem contextualização.

A contextualização fica por conta da seção “Para Saber Mais”, em que são apresentadas questões de aplicações, contudo a resolução considera a lei dos senos e a lei dos cossenos, assim como os exercícios que se seguem, parecem meio fora de ordem nesta posição.

A seguir, volta-se ao detalhamento das funções, agora considerando a função tangente. Nota-se ainda um excesso de texto e minúcias e todas as demais características da apresentação das funções seno e cosseno.

Apenas na sétima seção, após exposição bem detalhada dos conceitos, é abordada a construção dos gráficos das funções trigonométricas, utilizando uma tabela de valores para ângulos notáveis e a marcação de pontos no plano cartesiano, neste sentido não há uma diferenciação importante quanto à apresentação dos gráficos nas outras coleções consideradas.

Entretanto na seção “Para Saber Mais”, que aparece logo em seguida, há uma sugestão da utilização de *software* para estudo desses gráficos por meio de translações para a função seno. Em um comentário direcionado aos professores indica-se o *winplot*. Na seção “Conexão” aparece mais um exemplo de aplicação das funções trigonométricas considerando-se ondas sonoras. Esta seção incentiva a utilização de tecnologia para o aprofundamento dos estudos.

De forma geral, a autonomia dos alunos não é estimulada através de exercícios de investigação, onde os mesmos possam deduzir informações ao invés de aceitar o que aparece representado por fórmulas, apesar de a introdução do capítulo conter um texto sobre uma possível utilização no cotidiano relacionando a inclinação de pista em competições ciclísticas.

A coleção apresenta uma boa quantidade de exercícios resolvidos e propostos distribuídos ao longo do capítulo, bem como ilustrações e gráficos.

3.6 Coleção “Novo Olhar: Matemática”

A coleção Novo Olhar: Matemática, do autor Joamir Souza, Souza (2013), apresenta as funções trigonométricas em seu primeiro capítulo por 36 páginas.

Há uma breve descrição da evolução histórica do estudo da Trigonometria e do interesse na representação gráfica desse tipo de função, além de exemplos de campos de aplicação para o conteúdo. O gráfico da função seno é apresentado a partir de tabela e com posterior descrição de suas características, o mesmo ocorrendo para a função cosseno.

As atividades resolvidas e propostas nessa seção são todas teóricas, e em apenas um item da última questão solicita que o aluno esboce gráficos e cita a informação de o gráfico da função cosseno é uma translação do gráfico da função seno.

Neste ponto, há uma seção em que são exibidas características de funções aqui chamadas “funções do tipo trigonométricas” ($f(x) = a + b.\text{sen}\ (cx + d)\ \ e\ g(x) = a + b.\cos\ (cx + d)$). As mudanças no gráfico da função original são exibidas graficamente e numericamente calculadas a partir de fórmulas utilizando os parâmetros.

O capítulo é entremeado de caixas informativas com exemplos de possíveis aplicações e observações pertinentes a contextualização, história da matemática e breves revisões de conteúdos anteriores relacionados.

Nesta coleção também não consta o estudo da função tangente, o Guia de Livros Didáticos (BRASIL, 2015, p. 69) aprova esta distinção na medida em que classifica a escolha como elogiável, limitando-se a um estudo detalhado apenas das funções seno e cosseno.

Porém, não realizar o estudo da função tangente é perder uma série de informações e aplicações possíveis para uma função que apesar de forte ligação com as demais funções trigonométricas, possui suas particularidades que em muito a diferencia das demais. E mais, pode-se questionar qual o critério utilizado para a omissão desta ou daquela função.

Ao final do capítulo são propostos muitos exercícios teóricos e de aplicação e vários textos com sugestões de trabalhos mais aprofundados sobre o tema utilizando contextos interdisciplinares como a duração de um dia, processo de respiração e ondas sonoras. Os desafios propostos nessas atividades de investigação podem servir para despertar o interesse por um estudo mais completo do tema.

Entende-se que por se tratar de um conteúdo realmente muito extenso e cheio de minúcias, seria muito complexo relacionar todas as definições, características, fórmulas e representações trigonométricas possíveis, porém, uma ferramenta de visualização tecnológica poderia ser de grande utilidade e, neste capítulo, não foi sugerida.

4 *SOFTWARE GRAPHMATICA*

A proposta deste capítulo é discorrer sobre o *software Graphmatica*, seus principais comandos e funcionalidades, além de possíveis contribuições tanto para a aplicação dos Estudos Dirigidos sugeridos neste trabalho como para o processo de aprendizagem de uma forma geral no que diz respeito à educação básica.

Por ser um *software* livre e já estar disponível na escola, no equipamento a ser utilizado no desenvolvimento das atividades, além da aparente simplicidade na execução, a escolha pela *Graphmatica* ocorreu de modo natural e prática, já que não seriam necessários grandes preparativos.

Não é a intenção fazer um estudo aprofundado do *software* ou esgotar todas as possibilidades, mas tão somente possibilitar uma visão do que foi utilizado na aplicação deste trabalho, demonstrando a praticidade e facilidade das operações e permitindo a reprodução do mesmo em outras situações.

Existe a disposição dos usuários de *softwares* educacionais grande variedade de tipos de programas e aplicativos de construção gráfica, sendo um deles o *Graphmatica*, que possui as vantagens de ser de fácil manipulação, possuir uma interface simples e sem excesso de informações, não sendo necessário muito conhecimento prévio, e não precisar de muita memória disponível no equipamento para ser executado.

Segundo Machado,

> O *Graphmatica* foi desenvolvido por Keith Hertzer, quando trabalhava na empresa kSoft. Hertzer é graduado em Engenharia Elétrica e Ciência da Computação pela Universidade de Berkeley. O programa [...] permite o desenho de funções, comportando “gráficos cartesianos, polares, trigonométricos, diferenciáveis”, podendo ser usado no estudo de funções no Ensino Médio, bem como ferramenta para o Cálculo nas Universidades. O desenho sobreposto de várias funções permite um estudo comparativo na tela do computador que demandaria um considerável tempo caso fosse necessários desenhar as funções em papéis milimetrados. (MACHADO, 2011, p. 53)

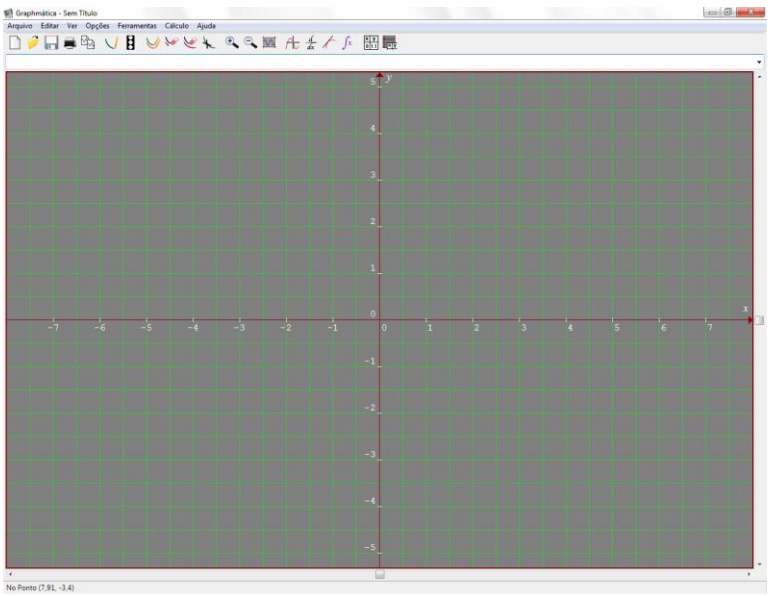
O *software* trabalha em duas dimensões e é possível representar graficamente várias funções na mesma tela e de vários tipos diferentes, é possível também obter resoluções gráficas de sistemas lineares ou não-lineares de duas variáveis, de equações e de inequações no $\mathbb{R}^2$, bastando para isso a correta interpretação das informações geradas. Trabalha também com derivadas e integrais possibilitando sua utilização em nível superior. Para a construção de gráficos de funções trigonométricas possui ainda as opções de representação da variável em graus ou em radianos

Permite a visualização de zeros, mínimos e máximos, se existirem, crescimentos e decrescimentos, representa gráficos em intervalos predeterminados do domínio, reconhece o domínio de uma equação que é digitada, permite a plotagem de vários gráficos de uma mesma família de funções utilizando um painel de variáveis, e possui mais uma série de recursos.

A seguir serão abordados aspectos básicos do *software Graphmatica*, como um tutorial básico dos comandos e funcionamento dos ícones, referenciado em fragmentos revistos e adaptados do Guia do Usuário, Néri (2007).

Pode-se acessar o *software* através de um ícone na área de trabalho ou a partir do menu Iniciar. Abaixo do título na tela inicial temos a barra de menu, a barra de botões de comando, a área de digitação da função e a área do gráfico.

Figura 3 Tela Inicial do Graphmatica



Fonte: Print de tela feito pela autora

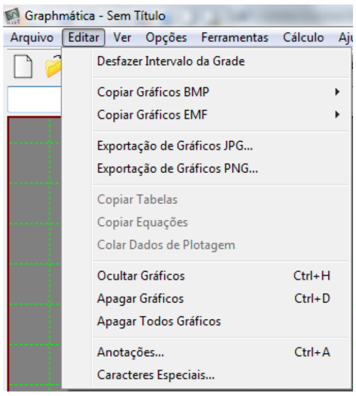
A barra de menus apresenta a opção “Arquivo” que possui os comandos básicos presentes na maioria dos *softwares* de qualquer área, como a os comandos que permitem abrir um arquivo novo, abrir outros arquivos já existentes, salvar o trabalho, configurar página e imprimir.

Na opção “Editar” já existem comandos específicos para o trabalho com os gráficos. São elas:

- ✓ Desfazer Intervalo de Grade: permite desfazer a última operação de ampliação ou redução de escala de visualização;
- ✓ Copiar Gráficos BMP: permite copiar á área do gráfico para área de transferência no formato BMP em preto ou colorido;
- ✓ Copiar Gráficos EMF: permite copiar a área do gráfico para área de transferência no formato EMF em preto ou colorido;
- ✓ Copiar Tabelas: permite copiar o texto na tabela de pontos para área de transferência;
- ✓ Copiar Equações: permite copiar as equações da lista de equações para área de transferência;
- ✓ Colar Dados da Regressão: permite colar uma tabela de valores x e y no Editor de Regressão;
- ✓ Esconder Gráfico: permite esconder, sem apagar, o gráfico selecionado;
- ✓ Apagar Gráfico: permite apagar o gráfico selecionado da Lista de Equações;
- ✓ Apagar Todos os Gráficos: permite apagar todas as equações da lista de Equações;
- ✓ Anotações: permite adicionar anotações ao gráfico;
- ✓ Caracteres Especiais: permite a inserção de caracteres como, por exemplo, letras gregas e radicais.

Esse grupo de comandos facilita a manipulação das informações e são os primeiros a conferir ao *software* a característica de ser ferramenta de construção e manipulação gráfica e permitem a exportação de informações em vários formatos para outros *softwares* de edição.

Figura 4 Barra de Menu: Editar



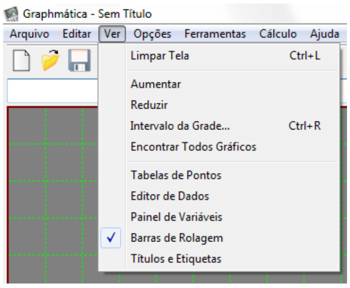
Fonte: Print de tela feito pela autora

Na opção “Ver” tem-se os seguintes comandos:

- ✓ Limpar Tela: remove todos os gráficos;
- ✓ Ampliação: amplia a visualização;
- ✓ Redução: reduz a visualização;
- ✓ Intervalo da Grade: altera o intervalo utilizado pelos eixos coordenados;
- ✓ Encontrar Todos Gráficos: ajusta os intervalos para visualização de todos os gráficos;
- ✓ Tabelas de Pontos: ativa ou desativa a visualização da tabela de coordenadas;
- ✓ Editor de Dados: exibe ou esconde o editor de dados, permitindo a inserção de um conjunto de pontos para vê-los em um gráfico;
- ✓ Painel de Variáveis: exibe o painel de constantes para edição;
- ✓ Barra de Rolagem: exibe e esconde as barras de rolamento para navegação no plano;
- ✓ Títulos e Etiquetas: exibe títulos e etiquetas nos eixos para edição.

Nesta opção, são considerados aspectos de visualização de tela e dos gráficos contidos nelas. É permitida a visualização de vários gráficos simultaneamente, facilitando a comparação entre eles e o estudo das diferenças, bem como serve de auxílio na visualização do comportamento dos gráficos próximo a assíntotas, e características de domínio e imagem. A visualização da tabela de pontos e edição de dados permitem a construção gráfica a partir de tabelas de pontos, modo de construção gráfica presente em muitos livros didáticos.

Figura 3 Barra de Menu: Ver



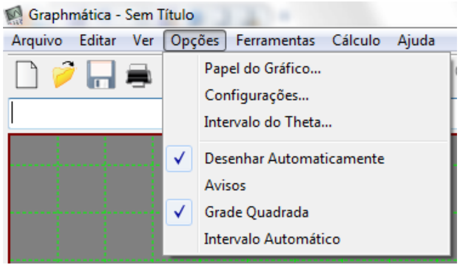
Fonte: Print de tela feito pela autora

O item “Opções” tem os seguintes comandos:

- ✓ Papel do Gráfico: permite alterar o papel de fundo do gráfico, incluindo cores, e outras propriedades como a mudança de coordenadas entre retangulares, trigonométricas, polares e logarítmicas;
- ✓ Configurações: abre o painel de controle de configurações globais;
- ✓ Intervalo do Theta: permite o ajuste do intervalo de theta para gráficos em coordenadas polares;
- ✓ Desenhar automaticamente: ativa e desativa o desenho automático;
- ✓ Avisos: ativa e desativa mensagens de erros simples, como divisão por zero;
- ✓ Grade quadrada: ativa a opção da grade quadrada;
- ✓ Intervalo Automático: ajusta o eixo y para mostrar todo o gráfico.

Este item tem papel importante para a aplicação dos Estudos Dirigidos propostos neste trabalho, já que permite a nele existe a opção de utilização de papel do gráfico com coordenadas trigonométricas. Nada impede a utilização de coordenadas retangulares, porém as aproximações que existiriam talvez poluísse demasiadamente a imagem e como muitos livros didáticos utilizam as coordenadas trigonométricas, a correlação é imediata.

Figura 5 Barra de Menu: Opções



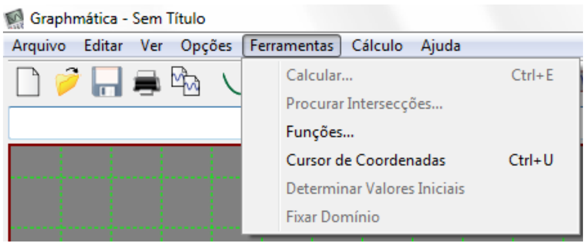
Fonte: Print de tela feito pela autora

No item “Ferramentas” temos os seguintes comandos:

- ✓ Calcular: calcula as coordenadas de um ponto em um gráfico;
- ✓ Procurar Intersecções: determina coordenadas de intersecções entre duas curvas;
- ✓ Funções: editar funções definidas pelo usuário e que podem ser usadas em diversas equações;
- ✓ Cursor de Coordenadas: permite utilizar o mouse para seleção de um ponto e conhecer suas coordenadas;
- ✓ Determinar Valores Iniciais: permite utilizar o mouse para selecionar um valor inicial para uma equação diferencial;
- ✓ Fixar Domínio: permite utilizar o mouse para selecionar o domínio de uma função.

As ferramentas aqui presentes permitem encontrar informações de gráficos já exibidos, como por exemplo, permite o cálculo da imagem para valores específicos do domínio, caso seja necessário para resolução de alguma questão. Outro exemplo interessante deste grupo de comandos é permitir a resolução de sistemas de equações ao encontrar as intersecções entre curvas.

Figura 6 Barra de Menu: Ferramentas



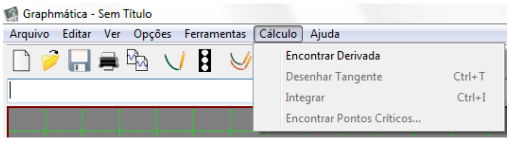
Fonte: Print de tela feito pela autora

No item “Cálculo” tem-se os seguintes comandos:

- ✓ Encontrar Derivada: determina e desenha o gráfico da derivada da função;
- ✓ Desenhar Tangente: determina a inclinação e desenha a reta tangente de uma função em um ponto selecionado;
- ✓ Integrar: calcula a integração numérica para determinar a área abaixo do gráfico de uma função;
- ✓ Encontrar Pontos Críticos: encontra pontos críticos da função.

Este item mescla comandos referentes a derivadas e integrais, conteúdos mais comumente utilizados em matemática de nível superior e comandos que podem ser utilizados no estudo de funções a nível médio e que revelam informações muito relevantes para o estudo dessas funções, através da localização dos pontos críticos.

Figura 7 Barra de Menu: Cálculo



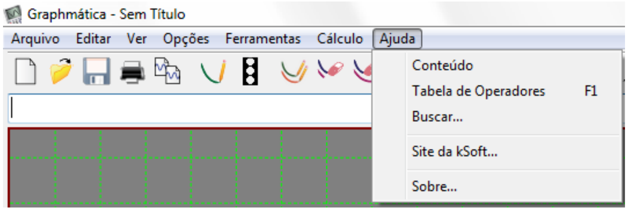
Fonte: Print de tela feito pela autora

No item “Ajuda” temos os seguintes comandos:

- ✓ Conteúdo: mostra o arquivo de ajuda;
- ✓ Tabela de operadores: exibe uma tabela de operadores que podem ser usados pelo *Graphmatica*;
- ✓ Buscar: busca um tópico no arquivo de ajuda;
- ✓ Site da kSoft: Direciona para o site http://www.*Graphmatica*.com/;
- ✓ Sobre: exibe os créditos do programa.

A principal importância deste item é auxiliar o usuário nas siglas e linguagem utilizada para que o *software* reconheça as informações inseridas, como são muitas as funções que podem ter seus gráficos representados, convém consultar a tabela de operadores sempre que houver dúvida ou quando surgir mensagem de erro.

Figura 8 Barra de Menu: Ajuda



Fonte: Print de tela feito pela autora

Na barra de botões de comando, temos em ordem da esquerda para a direita os seguintes itens:

- ✓ Nova Grade: abre uma nova tela de plotagem em branco;
- ✓ Abrir: abre um arquivo do *Graphmatica* pré-existente;
- ✓ Salvar: salva um arquivo do *Graphmatica*;
- ✓ Imprimir: imprime o gráfico visualizado;
- ✓ Copiar Gráfico: copia a grade para a área de transferência;
- ✓ Desenhar Gráfico: desenha o gráfico de uma função ou da função selecionada, equivale a pressionar *enter*;
- ✓ Pausa: ativado só quando se está desenhando;
- ✓ Redesenhar Tudo: desenha todos os gráficos da lista de funções;
- ✓ Limpar Tela: esconde todos os gráficos da tela;
- ✓ Esconder Gráfico: esconde o gráfico selecionado, mas não apaga da lista de funções;
- ✓ Apagar Gráfico: apaga o gráfico da tela e da lista de funções;
- ✓ Aumentar: aumenta a área de plotagem;
- ✓ Reduzir: diminui a área de plotagem;
- ✓ Grade Padrão: retorna a grade padrão;
- ✓ Cursor de Coordenadas: ativa o cursor de coordenadas, permitindo encontrar as coordenadas numéricas de qualquer ponto de um gráfico usando o mouse;
- ✓ Encontrar Derivada: desenha a derivada da função selecionada;
- ✓ Desenhar Tangente: desenha a reta tangente a um ponto em um gráfico e calcula sua inclinação;
- ✓ Integrar: determina o valor numérico da integração para determinar a área entre o gráfico da função e o eixo das abscissas;

- ✓ Tabela de Pontos Ativa: ativa e desativa a visualização da tabela de coordenadas;
- ✓ Editor de Dados de Plotagem: ativa e desativa a visualização da tabela Dados Para Plotar, que permite introduzir um conjunto de coordenadas de pontos e visualizá-los em um gráfico.

Esta barra de botões de comando apresenta atalhos para alguns dos principais e mais utilizados comandos já descritos, simplificando e agilizando a utilização do *software.*

Figura 9 Barra de Botões de Comandos

Fonte: Print de tela feito pela autora

Para se visualizar o gráfico, basta escrever uma função ou equação no campo logo abaixo da barra de botões de comando em sua forma cartesiana, paramétrica ou polar. Além dos operadores das quatro operações básicas (+ , - , * , /), o *software* reconhece ainda muitos outros dentre os quais destacam-se:

- ✓ ^ - Potenciação;
- ✓ [ ] ou ( ) - utilizados dentro das expressões estabelecem operações;
- ✓ ; - Separa as partes independentes de uma equação paramétrica;
- ✓ ‘ - insere comentário;
- ✓ {m , n} - especifica o domínio que vai do valor numérico de m ao valor numérico de n, por exemplo {2, } especifica o domínio como valores que vão de 2 até o infinito.

Esses são apenas alguns dos principais símbolos utilizados e que são necessários para a correta inserção dos dados. Todas estas considerações evidenciam que por mais que seja um *software* simples, é necessário um estudo prévio, mesmo que breve, das suas funcionalidades.

Parte das funções suportadas podem ser inseridas utilizando-se:

- ✓ abs: módulo;
- ✓ sin: seno;

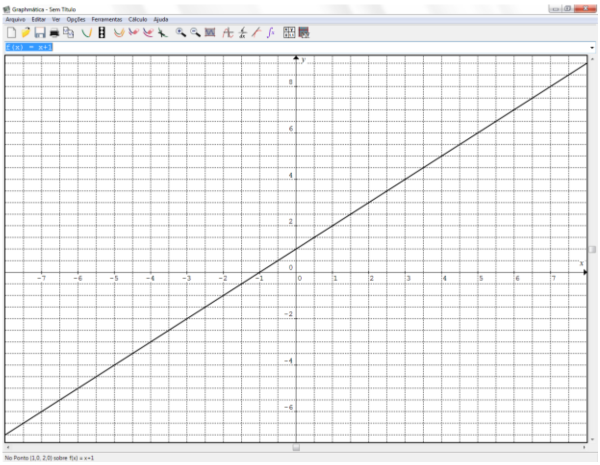
- ✓ cos: cosseno;
- ✓ asin: arcoseno;
- ✓ acos: arco cosseno;
- ✓ asec: arco secante;
- ✓ tan: tangente;
- ✓ atan: arco tangente;
- ✓ cot: cotangente;
- ✓ csc: cosecante;
- ✓ acot: arco cotangente;
- ✓ acsc: arco cosecante;
- ✓ sec: secante;
- ✓ exp: potência de base e;
- ✓ ln: logaritmo neperiano;
- ✓ log: logaritmo na base 10;
- ✓ sqrt: Raiz quadrada.

As variáveis suportadas são x e y para coordenadas retangulares, r e t para coordenadas polares (o t entra como θ) e x e y como funções de t nas funções paramétricas.

Como ilustração, serão apresentados agora alguns exemplos simples de gráficos gerados no *software* e algumas funcionalidades do *Graphmatica* que considerou-se interessantes para um trabalho com representações gráficas de diferentes tipos.

Inserindo a função $f(x) = x + 1$, obtemos a seguinte representação gráfica:

Figura 10 Gráfico da Função $f(x) = x + 1$

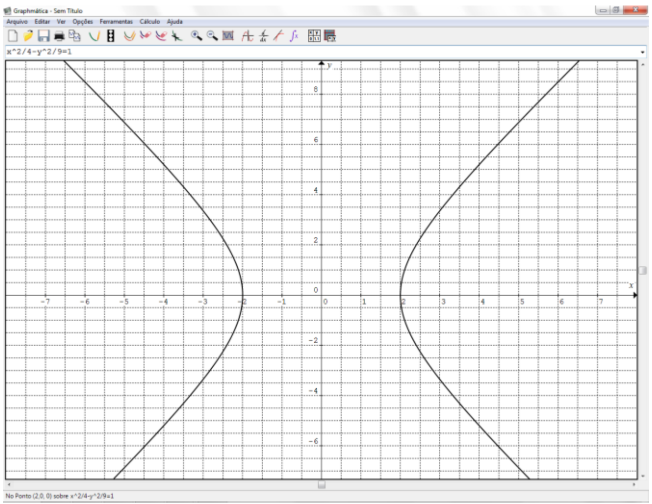


Fonte: Print de tela feito pela autora

Ao posicionar o ponteiro do mouse em um ponto sobre o gráfico é possível observar na parte inferior da tela os valores numéricos das coordenadas.

Inserindo a equação da hipérbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, na linguagem do *software* x^2/4-y^2/9=1, obtemos o gráfico:

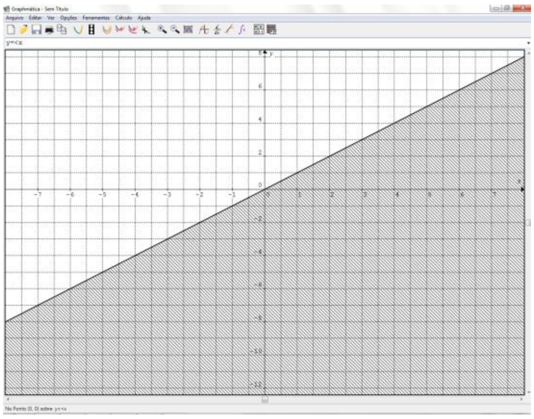
Figura 11 Gráfico da Hipérbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$



Fonte: Print de tela feito pela autora

Inserindo a inequação $y \leq x$, na linguagem do *software* y=<x, tem-se a resolução gráfica representada pela região destacada do plano:

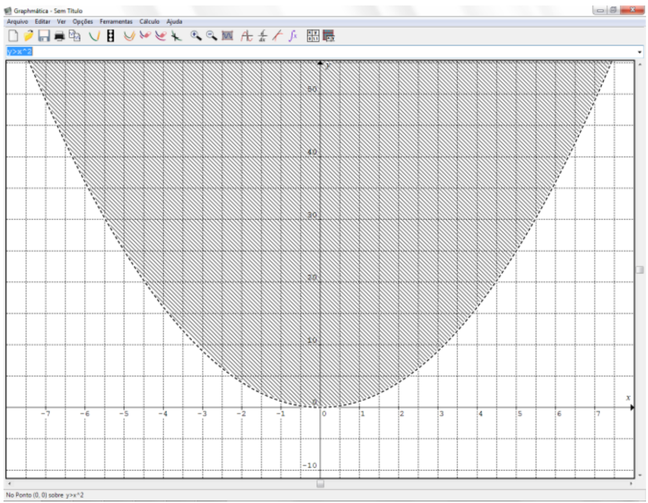
Figura 12 Resolução Gráfica de $y \leq x$



Fonte: Print de tela feito pela autora

Para as inequações com < ou >, a linha sólida aparece tracejada, como na inequação $y > x^2$, na linguagem do *software* y>x^2, representada graficamente na seguinte figura:

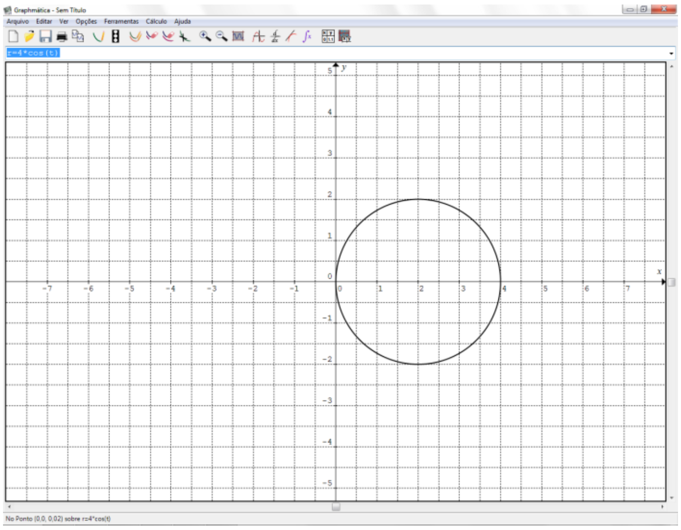
Figura 13 Resolução Gráfica de $y > x^2$



Fonte: Print de tela feito pela autora

Para gráficos utilizando coordenadas polares, pode-se citar como exemplo $r = 4.\cos(t)$, cujo gráfico é uma circunferência.

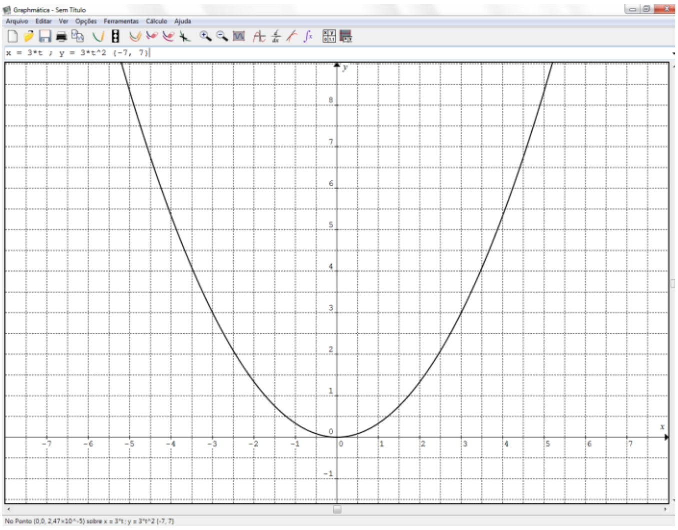
Figura 14 Gráfico de $r = 4.\cos(t)$



Fonte: Print de tela feito pela autora

Funções paramétricas, com x e y em função de t, separa-se as representações de $x(t)$ e $y(t)$ com ponto e vírgula (;) e em seguida o domínio de t entre chaves. Pode-se apresentar o exemplo da função $\begin{cases} x(t) = 3.t \\ y(t) = 3.t^2 \end{cases}$, $-7 \leq t \leq 7$, que, na linguagem do *software*, se escreve x = 3*t ; y = 3*t^2 {-7, 7}.

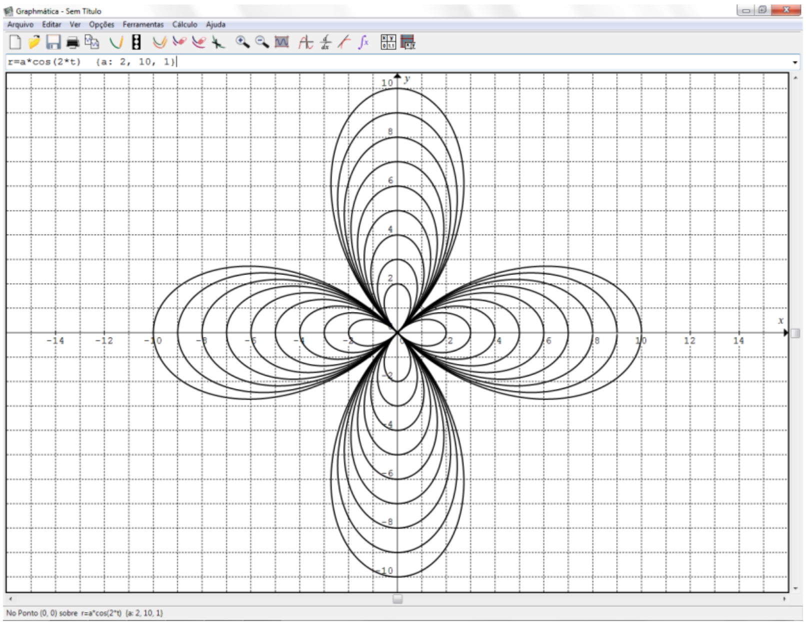
Figura 15 Gráfico de $x(t) = 3.t$; $y(t) = 3.t^2$, $-7 \leq t \leq 7$



Fonte: Print de tela feito pela autora

Para o gráfico de família de funções utilizou-se um exemplo coordenadas polares e um parâmetro *a*. Para visualizar os gráficos da família $r = a.\cos(2.t)$, com o parâmetro a variando de 2 até 10, com incremento de 1, na linguagem do *software* se escreve: r=a*cos (2*t) {a: 2, 10, 1}.

Figura 16 Gráfico de $r = a.\cos(2.t)$, $a \epsilon \mathbb{N}, 2 \leq a \leq 10$



Fonte: Print de tela feito pela autora

Existem ainda muitas outras funcionalidades no *software*, como por exemplo, gerar o gráfico de solução de uma equação diferencial, mas não é a intenção esgotar todas as possibilidades, apenas apresentar aquelas que podem ser úteis no desenvolvimento da proposta metodológica e outras mais gerais e de simples aplicação no nível básico de ensino.

5 CONSTRUÇÃO E APLICAÇÃO DOS ESTUDOS DIRIGIDOS

De acordo com Libâneo, o método de trabalho independente, é aquele no qual o aluno realiza atividades sozinho, porém, sob orientação mesmo que indireta, do professor, “[...] pode ser adotado em qualquer momento da sequência da unidade didática ou aula, como tarefa preparatória, tarefa de assimilação do conteúdo ou como tarefa de elaboração pessoal.” (LIBÂNEO, 1994, p. 163).

A alternativa escolhida foi aplicar os estudos dirigidos após aula expositiva do conteúdo referente a funções trigonométricas, nos limitamos a preparar estudos dirigidos sobre representações gráficas das famílias de funções trigonométricas básicas: seno, cosseno e tangente, a fim de possibilitar um período de assimilação do conteúdo estudado.

Como a pesquisa possui a característica de ser qualitativa, na maior parte das questões optou-se por aquelas com respostas discursivas. Os estudos dirigidos foram elaborados de forma a abordar como a mudança de parâmetros altera o formato e a localização do gráfico no plano cartesiano.

Optou-se por um relato de experiência como metodologia da pesquisa para que fosse possível verificar, qualitativamente, possíveis benefícios da proposta. A aplicação dos estudos dirigidos foi realizada em uma turma de primeira série do ensino médio da rede estadual de ensino no município de Seropédica, com os seis alunos da turma.

O conteúdo foi aplicado na turma do modo tradicional, através de aula expositiva e utilizando o livro adotado pela unidade escolar, o volume 2 da coleção Matemática: Ciência e Aplicações. Apesar de ter sido distribuído para a 2ª série do ensino médio, havia uma reserva técnica que pode ser entregue aos alunos da 1ª série, o que permitiu ganhar tempo.

Por se tratar de uma turma com baixo quantitativo de alunos, foi possível acompanhar muito de perto o desenvolvimento individual de cada um, observando as dúvidas e dificuldades na resolução dos exercícios propostos. Ainda nessa fase de aplicação de conteúdos foram explicados os conceitos básicos das transformações geométricas no plano.

Após o período de aplicação dos conteúdos e resolução de exercícios, passamos para a fase de sensibilização e motivação para a aplicação das atividades e apresentação do *software*.

Havia a possibilidade de apresentar as orientações sobre como funciona o *software* por escrito, porém a apresentação de modo verbal foi a utilizada e aliada a ela, foi usado um projetor de dados que possibilitou que a turma visualizasse o que estava sendo dito.

Foram esboçados gráficos de várias funções afins, quadráticas e exponenciais enquanto se explicava o funcionamento dos comandos. Esse momento possibilitou inclusive uma espécie de revisão geral dos conteúdos do ano letivo. Os alunos puderam perceber como é grande a diferença do tempo utilizado para representar os gráficos no *software* e na lousa, e também a diferença na qualidade do desenho, visto que as retas e curvas não ficam tão nítidas quando feitas por um professor sem grande habilidade para o desenho.

Chegou-se assim ao momento de aplicação dos estudos dirigidos.

5.1 Estudo Dirigido – Função Seno

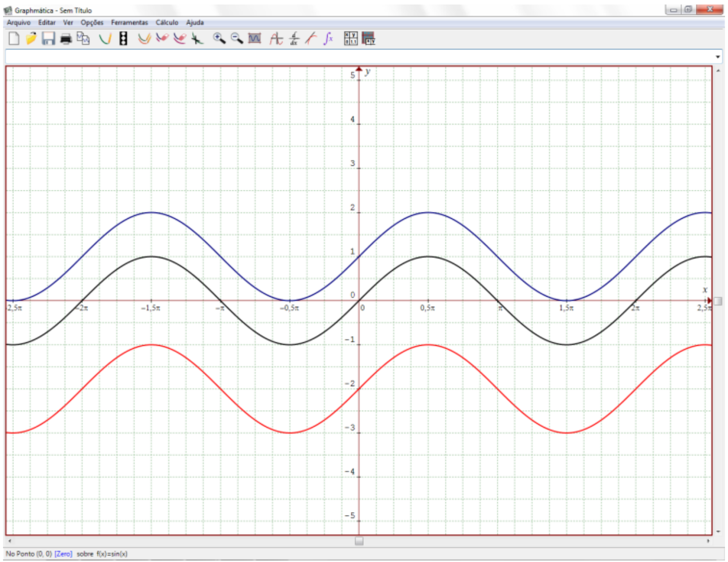
Durante a aplicação do primeiro estudo dirigido, houve certo estranhamento inicial, visto que não é prática comum para o grupo em questão, porém existem já sinais de interesse e comprometimento por parte dos alunos. Não foi estipulado um tempo máximo para realização de todas as atividades, optou-se por seguir o ritmo do grupo, porém havia a expectativa de um estudo dirigido a cada dois tempos de aula, ou seja, dois períodos de cinquenta minutos.

A primeira atividade desse estudo dirigido consiste em analisar pontos do gráfico da função básica $f(x) = sen\, x$ e da relação do gráfico desta função com os gráficos das funções $g(x) = 1 + sen\, x$ e $h(x) = -2 + sen\, x$, considerando as imagens para valores comuns do domínio.

Atividade 1: Utilizando o *software Graphmatica*, esboce os gráficos das funções:$f(x) = sen\ x, g(x) = 1 + sen\ x\ e\ h(x) = -2 + sen\ x$.

Na tela inicial do Graphmatica, optou-se por utilizar o papel do gráfico como trigonométrico que exibe domínio em função de π, em fundo branco com gráficos plotados em linhas coloridas, para facilitar a diferenciação entre eles.

Figura 17 Gráficos de $f(x) = sen\ x, g(x) = 1 + sen\ x\ e\ h(x) = -2 + sen\ x$



Fonte: Print de tela feito pela autora

A partir dos gráficos foi solicitado que preenchessem uma tabela escolhendo valores convenientes de x e as imagens das três funções para cada valor escolhido e respondessem a alguns itens sobre as imagens, as relações entre os gráficos, imagens e períodos das funções.

Preencheram a tabela de modo bem rápido e sem maiores problemas, visto que já realizavam tarefa semelhante ao construir os gráficos em seus cadernos, aqui só realizaram a atividade na ordem inversa, geralmente preenchiam a tabela e depois marcavam os pares ordenados no plano cartesiano para posterior construção dos gráficos.

De modo geral é como é apresentada nos livros didáticos também, primeiro a tabela e então o gráfico, porém essa alteração da ordem não foi um empecilho, pelo contrário, consideraram mais fácil assim. A ideia nesse ponto era que percebessem que ao somar uma unidade à função básica, as imagens aumentavam também uma unidade e ao retirar duas unidades da função básica, as imagens também reduziam em uma unidade.

Pode parecer uma observação óbvia, mas foi a partir dela que introduziu-se a relação entre as imagens e a alteração sofrida pelo gráfico da função básica $f(x) = sen\, x$.

Outro item pede que escrevam com as próprias palavras, visualmente o que ocorre com os gráficos das funções da Atividade 1, $g(x)$ e $h(x)$, tomando como referência o gráfico de $f(x)$. As dúvidas aqui se referiam muito mais à forma como poderiam responder do que necessariamente sobre alguma noção matemática, queriam saber se podiam escrever que o gráfico “subiu” ou “desceu”, ou somente que “mudou de posição”. Como era um item sobre percepção pessoal foi permitido que utilizassem as expressões que quisessem.

A seguir, deveriam utilizar os conceitos de transformações gráficas a partir de mudança de parâmetros para determinar que tomando o gráfico da função $f(x)$, o gráfico de $g(x)$ é uma translação vertical para cima de uma unidade e que o gráfico de $h(x)$ é uma translação vertical de duas unidades para baixo. Em sua maioria, conseguiram enxergar a translação vertical, porém sem maiores detalhes.

Como já havia sido trabalhado sobre como determinar imagem, domínio e raízes de funções a partir de seus gráficos ao longo do ano letivo, não tiveram dificuldade em definir as imagens das funções, e no que se refere ao período das funções também não houve dúvidas.

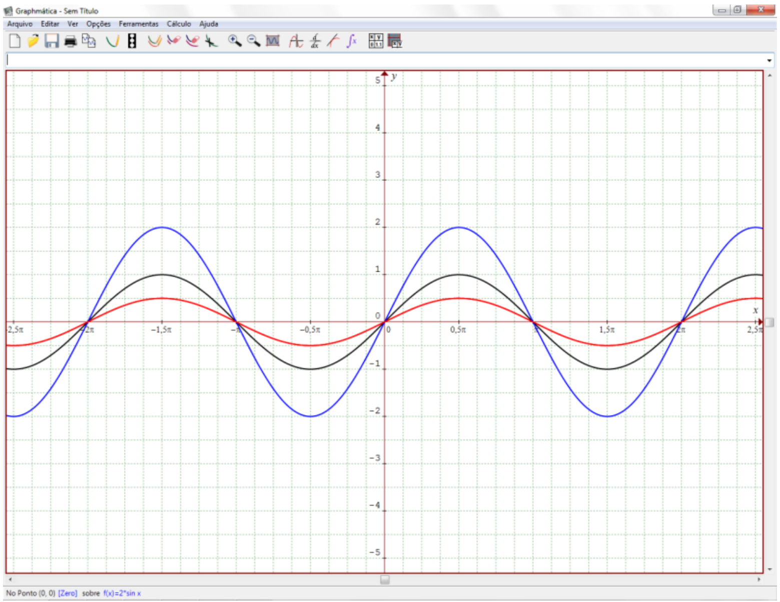
Os dois últimos itens da primeira atividade sugeriam uma generalização para funções do tipo $f(x) = a + sen\, x$, com $a \in \mathbb{R}$, sobre o que se pode dizer a respeito de suas imagens e períodos. Nesse momento foi preciso um tempo maior para que pensassem a respeito e fizessem algumas considerações, dessa vez já não quiseram saber se podiam escrever com suas palavras, assumiram que sim.

Após alguns minutos de conversa entre eles e de perguntar se era possível em algum caso dizer que nada mudou chegaram a conclusão acertada de que a imagem de $f(x) = a + sen\, x$, com $a \in \mathbb{R}$, é o intervalo $[-1 + a, 1 + a]$ e que para este tipo de função o período permanece igual a 2π.

E, além disso, mesmo não tendo sido perguntado, chegaram à conclusão de que ao somar um valor constante à função básica $f(x) = sen\, x$, se essa constante for positiva, o gráfico da função sofre um deslocamento para cima no valor da constante e se a constante for negativa, o gráfico da função sofre um deslocamento para baixo no valor absoluto da constante.

Atividade 2: Utilizando o *software*, esboce os gráficos das funções: $f(x) = sen\, x,\ g(x) = 2. sen\, x\ e\ h(x) = \frac{1}{2}. sen\, x.$

Figura 18 Gráficos de $f(x) = sen\, x,\ g(x) = 2. sen\, x\ e\ h(x) = \frac{1}{2}. sen\, x$



Fonte: Print de tela feito pela autora

Seguiu-se a mesma sequência de itens da primeira atividade solicitando primeiro que preenchessem uma tabela de valores contendo valores escolhidos para x e suas respectivas imagens.

Observando a tabela perceberam mais rapidamente que as imagens de $g(x)$ são duas vezes maiores, ou seja, o dobro das imagens de $f(x)$ e que as imagens de $h(x)$ são metade das imagens de $f(x)$ para os mesmos valores do domínio.

O item seguinte, seguindo a mesma estrutura da atividade 1, pedia que escrevessem o que era possível observar sobre os gráficos das funções da atividade

2, $g(x)$ e $h(x)$, em relação ao gráfico da função $f(x)$, obteve-se resposta com as expressões “encolheu” ou “esticou”. Embora não reflitam fielmente o comportamento dos gráficos, essas expressões ajudam a entender a forma como os alunos entenderam o que estavam visualizando.

Ao tentar usar os conceitos de transformações gráficas para nomear as alterações houve quem ainda achasse se tratar de uma translação, porém os próprios colegas de turma trataram de esclarecer que não eram translações, visto que os gráficos pareciam “distorcidos”. Chegaram então à classificação do gráfico de $g(x)$ como uma expansão vertical e o de $h(x)$ como uma contração vertical, ambos referentes ao gráfico de $f(x)$.

Novamente conseguiram responder as questões sobre imagem e período das três funções sem dificuldade.

Para responder aos dois últimos itens dessa segunda atividade precisaram discutir um pouco mais sobre uma generalização para o imagens e períodos de funções do tipo $f(x) = a.sen\,x$, com $a \in \mathbb{R}$. Para determinar o período consideraram que continuaria sendo 2π, e a imagem agora seria o intervalo $[-a, a]$.

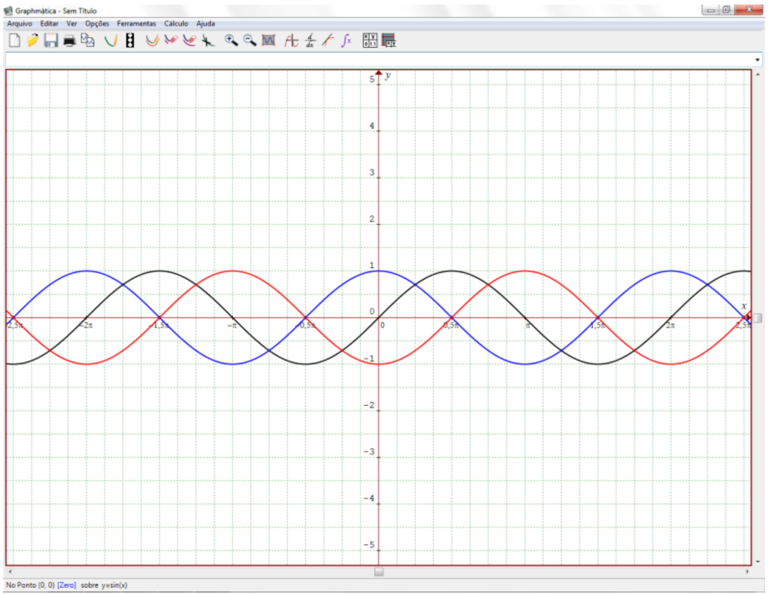
Neste ponto foram questionados verbalmente sobre o caso de a assumir um valor negativo, já que $a \in \mathbb{R}$, fizeram alguns esboços com o *software* e pensando melhor sobre os detalhes preferiram separar as imagens em três tipos: $[-a, a]$ para valores positivos de a, $[a, -a]$ para valores negativos de a e, no caso de a igual a zero, teríamos a função constante com imagem 0.

E mais, analisando os esboços que fizeram considerando diversos valores para o parâmetro a, conseguiram concluir que no caso de o parâmetro possuir um valor real entre 0 e 1, o gráfico seria uma contração do gráfico da função $f(x) = sen\,x$, e que, no caso do parâmetro ser um valor maior do que 1, tratar-se-ia de uma expansão.

Não se entrou aqui na questão do parâmetro negativo para determinar a transformação sofrida pelo gráfico já que preferiu-se dar ênfase a translações, expansões e contrações, para não estender demasiadamente o estudo, embora pudesse ter enriquecido a discussão falar sobre as reflexões.

Atividade 3: Utilizando o *software*, esboce os gráficos das funções: $f(x) = sen\,x,\ g(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) e\ h(x) = sen\,(x - \frac{\pi}{2})$.

Figura 19 Gráficos de $f(x) = sen\,x,\ g(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) e\ h(x) = sen\,(x - \frac{\pi}{2})$



Fonte: Print de tela feito pela autora

Após preencher uma tabela com valores de *x* e suas imagens relativas às três funções, notaram que as imagens se repetiam, porém fora de ordem. E observando as representações gráficas, classificaram o gráfico de $g(x)$ como sendo uma translação, dessa vez, horizontal, porém houve dúvida se essa translação seria à direita ou à esquerda, visto que, deslocando o gráfico de $f(x)$ para ambos os lados é possível chegar a uma sobreposição.

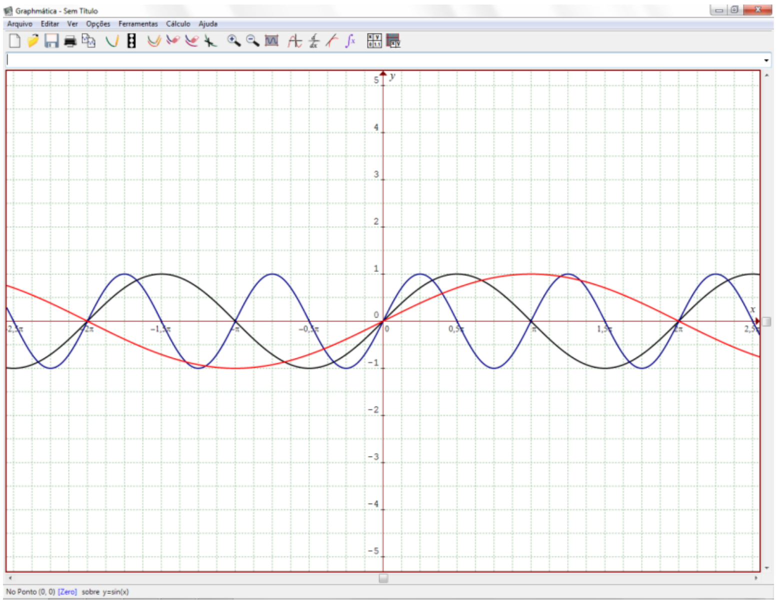
Questionados a respeito de quanto seria o deslocamento se fosse uma translação à direita ou à esquerda, responderam que o gráfico de $f(x)$ necessitaria de um deslocamento mínimo de $3\pi/2$ para a direita e $\pi/2$ para a esquerda para se obter o gráfico de $g(x)$. Observaram então que a melhor classificação para o gráfico de $g(x)$ é uma translação horizontal a esquerda do gráfico de $f(x)$ e, seguindo o mesmo raciocínio, o gráfico de $h(x)$ é uma translação horizontal à direita do gráfico de $f(x)$.

Nos itens seguintes, determinaram imagem e período para as três funções a partir dos gráficos esboçados. E, generalizando, para funções do tipo $f(x) =$

$sen\ (x + a)$, com $a \in \mathbb{R}$, a imagem como sendo o intervalo real $[-1,1]$ e período igual a 2π independentemente do valor do parâmetro.

Atividade 4: Utilizando o *software*, esboce os gráficos das funções:$f(x) = sen\ x,\ \ g(x) = sen\ (2.x) e\ h(x) = sen\ (\frac{1}{2}.x)$.

Figura 20 Gráficos de $f(x) = sen\ x,\ \ g(x) = sen\ (2.x) e\ h(x) = sen\ (\frac{1}{2}.x)$



Fonte: Print de tela feito pela autora

Até este momento, ao preencher a tabela inicial de valores, todos optaram por escolher os valores habituais em radianos para *x* (0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$ e 2π). Chamou a atenção o fato de as imagens de $g(x)$ para esses valores de domínio serem todas iguais, reafirmando que, talvez, a construção gráfica a partir apenas de tabelas, sem levar em consideração outros fatores, não seja o ideal.

Quanto às transformações gráficas associadas, por eliminação visualmente já descartaram as translações, e descartaram também os movimentos verticais. A partir daí, classificaram corretamente o gráfico da função $g(x)$ como sendo uma contração horizontal e o gráfico da função $h(x)$ como sendo uma expansão horizontal, ambas referentes ao gráfico de $f(x)$.

Verificaram que o conjunto imagem das três funções permaneceu inalterado como o intervalo real $[-1, 1]$, mas que os períodos são diferentes, permanecendo 2π para a função básica $f(x)$, e passando a ser π para a função $g(x)$ e 4π para a função $h(x)$.

Generalizando o que se pode dizer sobre as imagens e períodos de funções do tipo $f(x) = sen\,(ax)$, com $a \in \mathbb{R}$, identificaram que o conjunto imagem é o intervalo real $[-1,1]$, e consideraram que o período seria igual a $2\pi/a$. Não consideraram a possibilidade de o parâmetro a assumir valores negativos ou ser igual a zero, houve necessidade então de nova intervenção em forma de questionamento: “e se o a for negativo ou igual a zero?”.

Nesse caso de a, de acordo com a expressão, o período teria um valor negativo. Para considerar essa possibilidade, decidiram separar a questão em dois casos: período $2\pi/a$ para valores positivos e $-2\pi/a$ para valores negativos do parâmetro a. No caso de a igual a zero, teríamos uma função constante de imagem igual a 0.

Novamente não foi mencionada a questão da transformação gráfica associada ao parâmetro negativo.

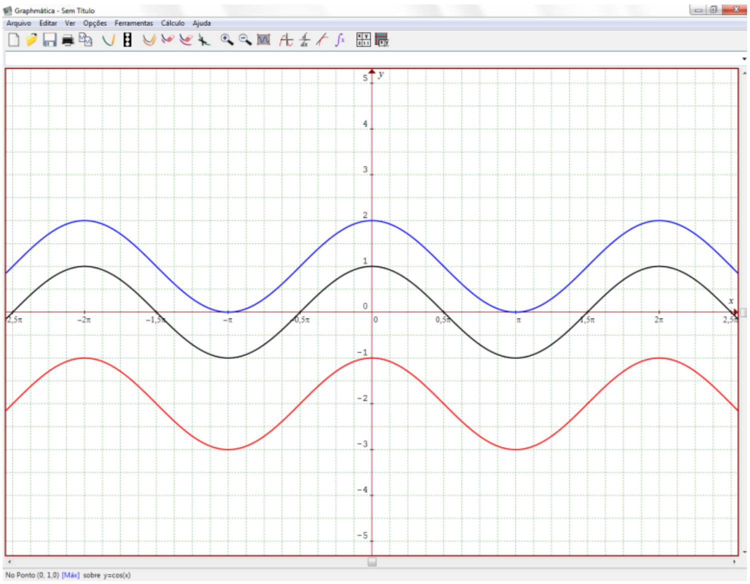
Embora no início da aplicação deste primeiro estudo dirigido, os alunos tenham feito várias perguntas, foi possível perceber que a conclusão foi bem tranquila e realizada de forma mais segura e independente. Foi utilizado um período total de dois tempos de aula de cinquenta minutos cada, confirmando a expectativa inicial para o tempo de conclusão.

5.2 Estudo Dirigido – Função Cosseno

A aplicação do segundo estudo dirigido, dessa vez referente à função cosseno teve início já na aula seguinte, com atividades semelhantes às do primeiro estudo dirigido, considerando-se agora como função básica $f(x) = cos\ x$.

Atividade 1: Utilizando o *software Graphmatica*, esboce os gráficos das funções: $f(x) = cos\ x, g(x) = 1 + cos\ x\ e\ h(x) = -2 + cos\ x$.

Figura 21 Gráficos de $f(x) = \cos x\,, g(x) = 1 + \cos x\ e\ h(x) = -2 + \cos x$



Fonte: Print de tela feito pela autora

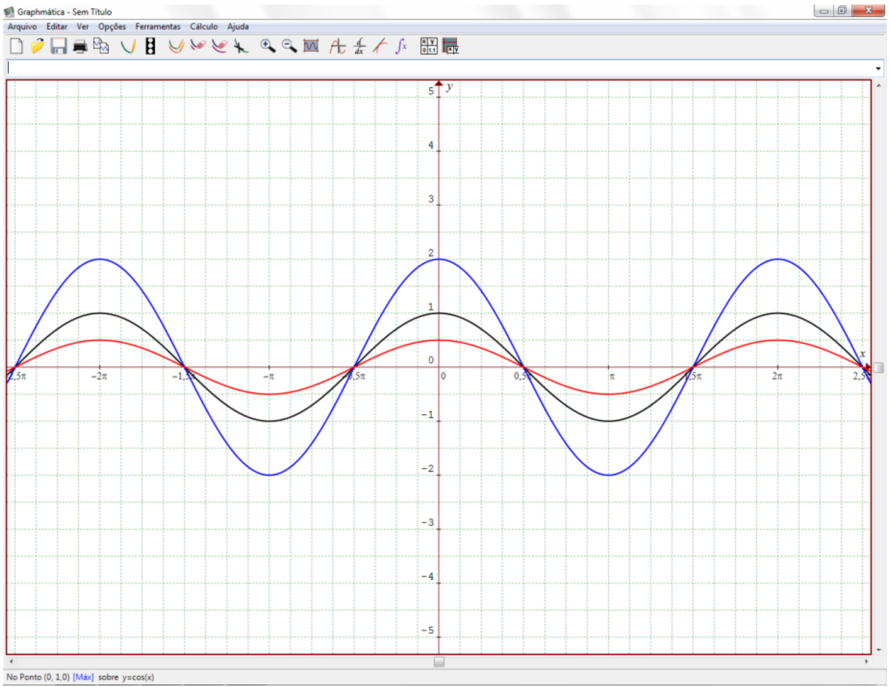
Como já sabiam o que era esperado, iniciaram a atividade preenchendo a tabela com as imagens dos valores escolhidos do domínio e muito tranquilamente já identificaram, em suas palavras, quais as transformações gráficas ocorridas. Associaram o gráfico de $g(x)$ como sendo uma translação vertical para cima e $h(x)$ como sendo uma translação vertical para baixo, ambas referentes ao gráfico da função $f(x)$.

Ressalta-se aqui um detalhe, como já sabiam com muita clareza que se tratavam de translações verticais para cima e para baixo, quiseram acrescentar a informação de quantas unidades são essas translações. A seguir, definiram os conjuntos imagem e os períodos das três funções propostas corretamente.

Ao generalizar conjunto imagem e período para as funções do tipo $f(x) = a + \cos x$, com $a \in \mathbb{R}$, perceberam que valia o mesmo que para as funções do tipo $f(x) = a + sen\ x$, portanto, imagem sendo o intervalo $[-1 + a\,, 1 + a]$ e período igual a 2π.

Atividade 2: Utilizando o *software*, esboce os gráficos das funções: $f(x) = cos\ x,\ g(x) = 2.cos\ x\ e\ h(x) = \frac{1}{2}.cos\ x$.

Figura 22 Gráficos de $f(x) = \cos x\,,\ g(x) = 2.\cos x\ e\ h(x) = \frac{1}{2}.\cos x$



Fonte: Print de tela feito pela autora

Para estas três funções, novamente por meio da tabela, perceberam que as imagens de $g(x)$ e de $h(x)$ são, respectivamente, o dobro e a metade das imagens de $f(x)$ para os mesmos valores do domínio, e associaram essa informação a "altura" dos gráficos. Introduzimos aqui o conceito de "amplitude" como informação complementar.

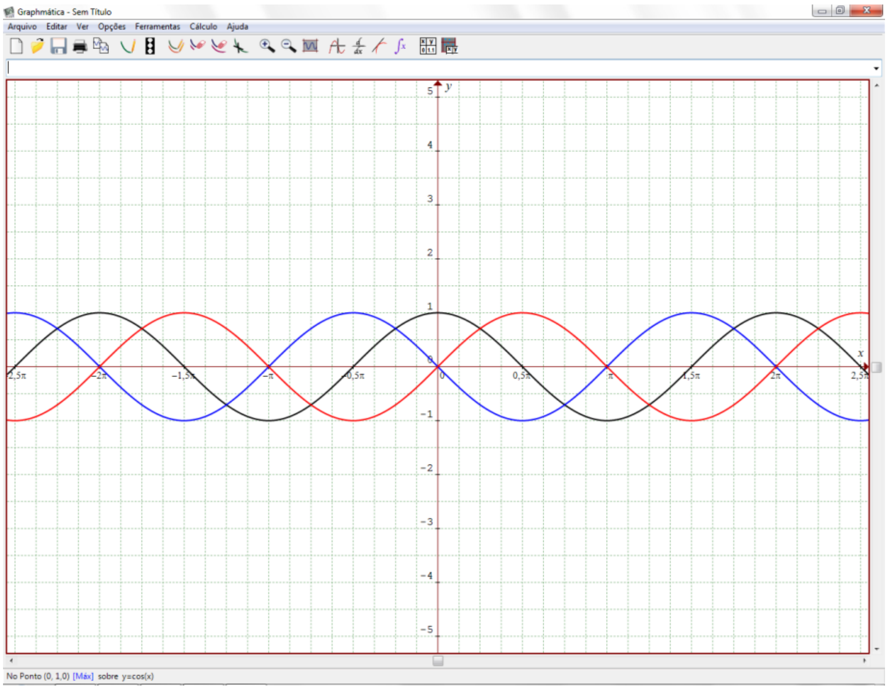
Relacionando o estudo dirigido com o anterior, identificaram a contração e a expansão vertical facilmente. A seguir determinaram período e imagem das funções propostas.

Generalizando período e imagem das funções do tipo $f(x) = a.\cos x$, com $a \in \mathbb{R}$, já o fizeram de modo mais independente do *software*, não foram precisos testes com valores aleatórios para x. Analisando os gráficos desta atividade, perceberam que os períodos permanecem constantes iguais a 2π e as imagens variam de $[-a, a]$. Como já sabiam que deveriam considerar valores negativos de a, repetiram a separação já realizada para as funções do tipo $f(x) = a.sen\ x$, com $a \in \mathbb{R}$: $[-a, a]$

para a positivo, $[a, -a]$ para a negativo e, para a igual a zero, teríamos a função constante com imagem 0.

Atividade 3: Utilizando o *software*, esboce os gráficos das funções: $f(x) = cos\ x,\ g(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ e $h(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Figura 23 Gráficos de $f(x) = \cos x$, $g(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ e $h(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$



Fonte: Print de tela feito pela autora

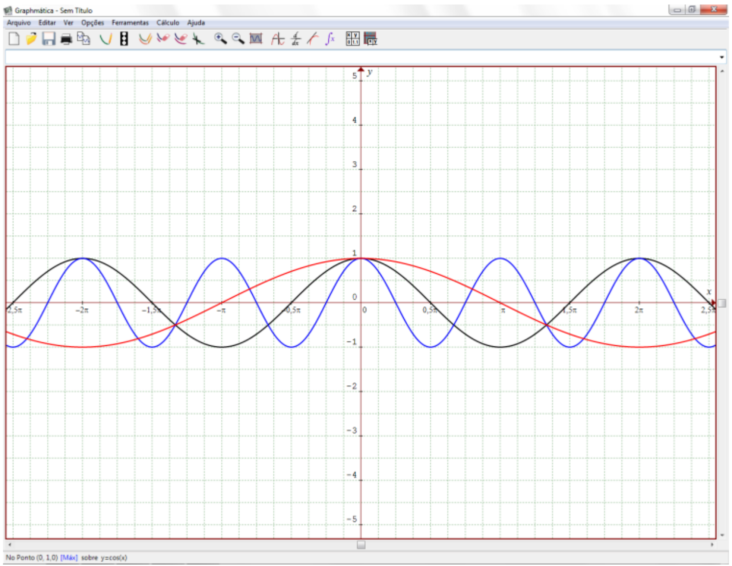
Classificaram corretamente os gráficos de $g(x)$ e de $h(x)$ como translações horizontais do gráfico da função básica $f(x) = \cos x$, e desta vez não houve dúvida quanto ao lado para o qual seria cada translação. Visto que aos valores do domínio é somado ou subtraído $\pi/2$, consideraram $g(x)$ uma translação horizontal de $\pi/2$ para a esquerda e $h(x)$ uma translação horizontal de $\pi/2$ para a direita.

A essa altura do trabalho desenvolveram as atividades desse segundo estudo dirigido com certa rapidez e desenvoltura, sem serem necessárias muitas intervenções.

Para os próximos itens, notaram que adicionar ou subtrair valores de um determinado valor do domínio apenas desloca lateralmente o gráfico da função, não alterando, portanto, a imagem e o período das funções propostas que permanecem sendo o intervalo real $[-1,1]$ e 2π, respectivamente. O mesmo podendo ser dito, de modo geral, para funções do tipo $f(x) = sen\ (x + a)$, com $a \in \mathbb{R}$, cujo parâmetro a não altera imagem ou período da função.

Atividade 4: Utilizando o *software*, esboce os gráficos das funções: $f(x) = cos\ x,\ g(x) = cos\ (2.x)\ e\ h(x) = cos\ \left(\frac{1}{2}.x\right)$.

Figura 24 Gráficos de $f(x) = \cos x\ ,\ g(x) = \cos\ (2.x)\ e\ h(x) = cos\ (\frac{1}{2}.x)$



Fonte: Print de tela feito pela autora

Nesta última atividade do segundo estudo dirigido, após preencherem a tabela inicial relacionando valores do domínio e suas respectivas imagens para as três funções propostas. Identificaram as transformações gráficas ocorridas a partir do gráfico da função $f(x)$, associando corretamente o gráfico da função $g(x)$ com uma contração horizontal e o gráfico da função $h(x)$ com uma expansão também horizontal.

No que diz respeito ao conjunto imagem de cada função proposta verificaram que permaneceram como o intervalo real $[-1,1]$, o que não ocorre com os períodos que variaram entre 2π para a função $f(x)$, π para a função $g(x)$ e 4π para a função $h(x)$.

No último item, sobre generalização de conjunto imagem e período de funções do tipo $f(x) = cos\ (ax)$, com $a \in \mathbb{R}$, foi apontado como conjunto imagem o intervalo real $[-1{,}1]$ independentemente do parâmetro a, e como período o resultado da expressão $2\pi/a$ quando a for um número real maior do que zero e $-2\pi/a$ quando a for menor do que zero. Lembrando ainda do caso em que a sendo igual a zero, teríamos a função de imagem constante igual a 0.

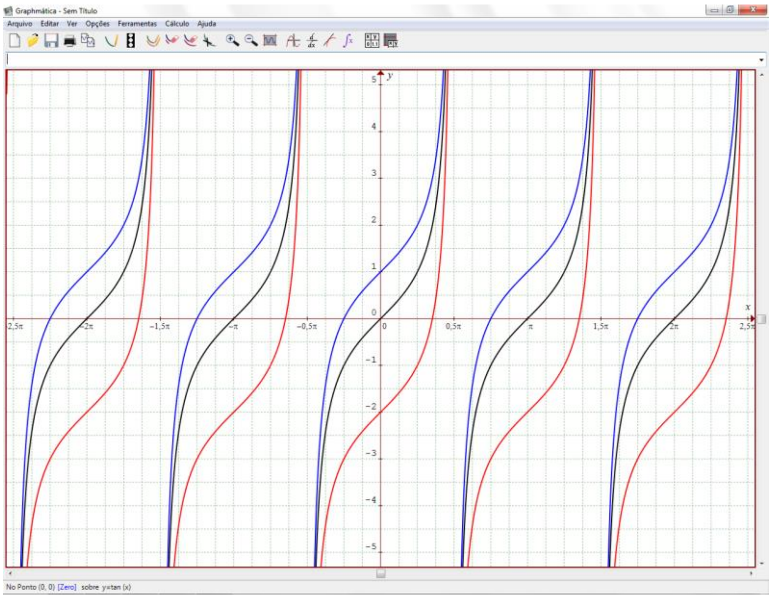
Esses resultados ainda levaram em consideração os resultados obtidos no primeiro estudo dirigido sobre a função seno. De modo geral, conseguiram relacionar os dois estudos dirigidos e responder a esse segundo com um nível bem maior de autonomia.

5.3 Estudo Dirigido – Função Tangente

Neste terceiro e último estudo dirigido a ser aplicado, agora sobre a função tangente, apesar de ter sido construído dentro dos mesmos moldes dos outros, inicialmente espera-se que haja alguma dificuldade já que não será mais possível relacionar as particularidades deste tipo de função tão diretamente com as anteriores.

Atividade 1: Utilizando o *software*, esboce os gráficos das funções: $f(x) = tg\ x,\ g(x) = 1 + tg\ x\ e\ h(x) = -2 + tg\ x.$

Figura 25 Gráficos de $f(x) = tg\ x,\ \ g(x) = 1 + tg\ x\ e\ h(x) = -2 + tg\ x$



Fonte: Print de tela feito pela autora

Já no primeiro item desta atividade, que solicitava preencherem uma tabela com valores do domínio e suas respectivas imagens pelas funções propostas, já puderam perceber que existiriam diferenças quanto às demais. Para alguns dos valores escolhidos (ainda $0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2\ e\ 2\pi$, em radianos) as imagens simplesmente não existem, ou seja, alguns destes valores estão fora do domínio.

Escolhendo valores do domínio cuja visualização das imagens não gerasse dúvida ($-2\pi,\ -\pi,\ 0,\ \pi\ e\ 2\pi$, em radianos), encontraram todas as imagens para $f(x)$ iguais a 0, todas as imagens para $g(x)$ iguais a 1 e todas as imagens para $h(x)$ iguais a -2, o que sugeriria três funções constantes, mas visualmente sabiam não se tratarem de funções constantes.

Decidiram alterar novamente os valores escolhidos. Surge então outra questão, nem todos os valores das imagens são racionais, e, portanto, não são tão fáceis de serem visualizadas no gráfico. Optaram então por utilizar alguns dos valores que conseguiam visualizar no gráfico e outros cujos resultados para tangente eram conhecidos ($0,\ \pi/4,\ 3\pi/4,\ \pi\ e\ 5\pi/4$, em radianos).

Sabiam previamente que o valor da tangente de $\pi/4$ e de $5\pi/4$ é 1, e que a tangente de $3\pi/4$ é igual a -1. Após essas considerações preencheram a tabela sem maiores complicações. Foi possível perceber que também para a função tangente, ao somar uma unidade à função básica $f(x) = tg\, x$, o gráfico sobe uma unidade, sendo, portanto uma translação vertical para cima de uma unidade e retirando duas unidades da função básica o gráfico desce duas unidades, sendo uma translação vertical de duas unidades para baixo.

Como as funções do tipo tangente têm todas elas conjunto imagem igual ao conjunto dos números reais, houve uma mudança neste ponto, não eram mais questionados imagem e período das funções, mas domínio e período, visto que, dependendo dos parâmetros, o domínio seria alterado e não o conjunto imagem.

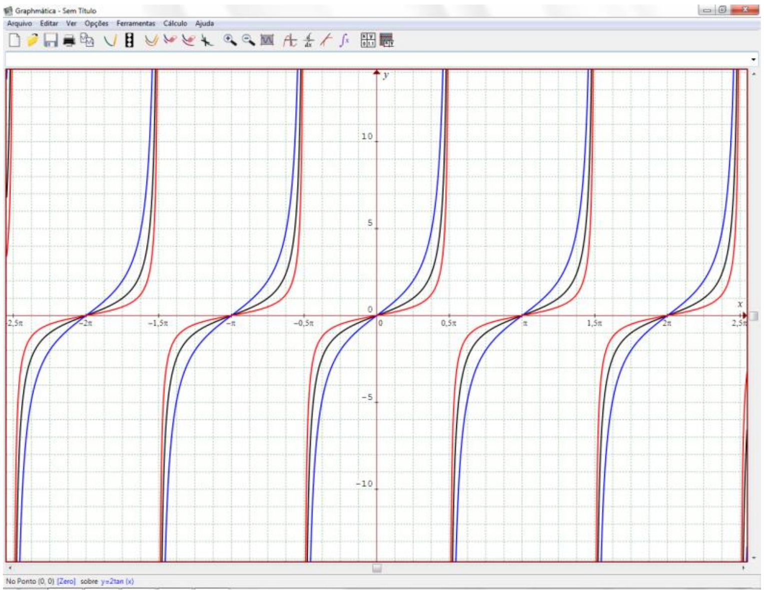
Houve diferença aqui na forma de escrever o domínio das funções, houve resposta por extenso, como "domínio de f é o conjunto dos números reais diferentes de "$\pi/2 + k\pi$", ou "$x \in \mathbb{R} - \{0, \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots\}$" e ainda "$Dom\,(f) = \{x \in \mathbb{R}/x \neq \pi/2 + k\pi,\ com\, k \in \mathbb{Z}\}$". Mas, de modo geral, perceberam que o domínio para as três funções é o mesmo, assim como o período π.

Para a generalização de domínio e período de funções do tipo $f(x) = a + tg\, x$, com $a \in \mathbb{R}$, admitiram período igual a π, independente do parâmetro e, após discutirem em grupo qual seria a representação "mais correta", optaram por representar o domínio como $\{x \in \mathbb{R}/x \neq \pi/2 + k\pi,\ com\, k \in \mathbb{Z}\}$. De fato, essa representação do domínio é a mais elegante, matematicamente, o que não invalida as demais respostas.

Apesar de não ter sido uma questão proposta, incluíram a informação de que o conjunto imagem para este tipo de função é o conjunto dos números reais.

Atividade 2: Utilizando o *software*, esboce os gráficos das funções: $f(x) = tg\, x,\ g(x) = 2.tg\, x\ e\ h(x) = \frac{1}{2}.tg\, x$.

Figura 26 Gráficos de $f(x) = tg\ x,\ g(x) = 2.tg\ x\ e\ h(x) = \frac{1}{2}.tg\ x$



Fonte: Print de tela feito pela autora

Seguiram aqui a estratégia de escolher os valores $0,\ \pi/4,\ 3\pi/4,\ \pi\ e\ 5\pi/4$, em radianos, para preencher a tabela de valores do domínio e suas imagens, e os valores já conhecidos para suas tangentes.

E, a partir da tabela, verificaram que considerando os mesmos valores do domínio, as imagens de $g(x)$ são o dobro e as de $h(x)$ são metade das imagens de $f(x)$. Sendo o gráfico de $g(x)$ uma expansão vertical e o de $h(x)$ uma contração vertical do gráfico da função $f(x)$.

Levando em consideração apenas o aspecto visual, tiveram dúvida para concluir se as transformações seriam verticais ou horizontais. Porém, como os parâmetros estão multiplicando o valor da tangente, portanto da imagem, e não o valor do domínio, relacionando com os estudos dirigidos das funções seno e cosseno, definiram as transformações como verticais.

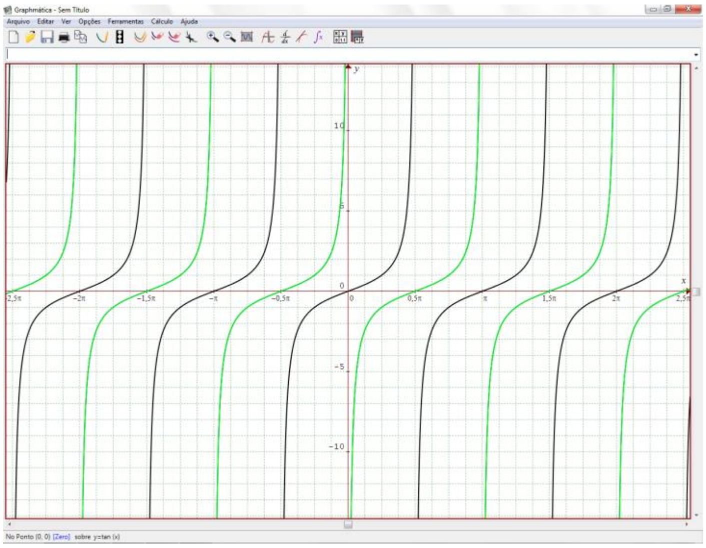
Como já haviam discutido o formato de resposta para o domínio da função tangente na atividade anterior, determinaram o domínio como sendo $\{x \in \mathbb{R}/x \neq \pi/2 + k.\pi,\ \ com\ k \in \mathbb{Z}\}$, para as três funções propostas e período igual a π.

Para as funções do tipo $f(x) = a.tg\ x$, com $a \in \mathbb{R}$, entenderam que não haveria alteração para domínio e período, permanecendo respectivamente $\{x \in$

$\mathbb{R}/x \neq \pi/2 + k\pi, \; com\; k \in \mathbb{Z}\}$, e π, para qualquer valor do parâmetro a diferente de zero.

Atividade 3: Utilizando o *software*, esboce os gráficos das funções: $f(x) = tg\,x,\; g(x) = tg\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\; e\; h(x) = tg\,(x - \frac{\pi}{2})$.

Figura 27 Gráficos de $f(x) = tg\,x,\; g(x) = tg\left(x + \frac{\pi}{2}\right) e\; h(x) = tg\,(x - \frac{\pi}{2})$



Fonte: Print de tela feito pela autora

Nesta atividade aparece outra novidade, ao esboçar os gráficos de $g(x)$ e de $h(x)$ há uma sobreposição dos mesmos. Além disso, não é mais possível escolher o mesmo conjunto de valores do domínio ($0,\; \pi/4\,,\; 3\pi/4\,,\; \pi\; e\; 5\pi/4$, em radianos) para preenchimento da tabela, pois alguns desses valores estão fora do domínio de $g(x)$ e de $h(x)$. A escolha dessa vez, decidida em grupo, foi o conjunto formado por $\pi/4\,,\; 3\pi/4\,,\; 5\pi/4\; e\; 7\pi/4$, em radianos.

Como os gráficos de $g(x)$ e de $h(x)$ ficaram sobrepostos, acharam que ambos teriam a mesma classificação quanto à transformação gráfica, seriam translações horizontais do gráfico de $f(x)$, o que são de fato. Mas ao definir o lado para o qual ocorre a translação houve a necessidade de se recorrer a uma análise das expressões algébricas das funções.

Chegando a conclusão de que como na função $g(x)$ está sendo somado $\pi/2$ aos valores de x, então se trata de uma translação horizontal para a esquerda de $\pi/2$ unidades do gráfico de $f(x)$, e analogamente, $h(x)$ é uma translação horizontal para a direita de $\pi/2$ unidades do gráfico de $f(x)$.

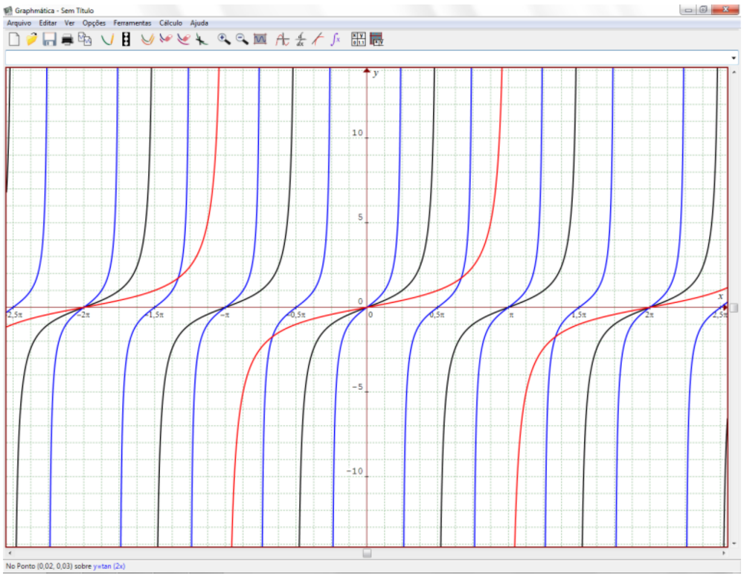
Determinaram corretamente o domínio de $f(x)$ como sendo $\{x \in \mathbb{R}/x \neq \pi/2 + k.\pi,\ com\ k \in \mathbb{Z}\}$ e o domínio para as funções $g(x)$ e $h(x)$ como sendo $\{x \in \mathbb{R}/x \neq \pi + k.\pi, com\ k \in \mathbb{Z}\}$, e para as três funções período igual a π. Poderiam ter considerado a forma mais compacta $\{x \in \mathbb{R}/x \neq k.\pi, com\ k \in \mathbb{Z}\}$ para domínio de $g(x)$ e $h(x)$, porém questionados sobre o porquê da resposta, disseram estar seguindo o padrão para o domínio de $f(x)$, excluindo um valor fora do domínio somado a todos os múltiplos de π.

No último item da atividade solicitou-se uma generalização para domínio e período de funções do tipo $f(x) = tg\ (x + a)$, com $a \in \mathbb{R}$. Quanto ao período nenhuma dúvida, sempre igual a π. Quanto ao domínio, voltaram a fazer testes com valores aleatórios para o parâmetro a, sem chegar a uma conclusão na forma de escrever a generalização.

Foram necessárias instruções adicionais para organização das ideias, solicitou-se que limpassem todos os gráficos da tela, e, um a um, fossem esboçados gráficos com diferentes valores para o parâmetro e determinados seus domínios. Iniciando com o parâmetro igual a 0, depois $\pi/2$, π e assim por diante, puderam perceber então que os valores fora do domínio variavam de acordo com o parâmetro. Assim, o domínio para funções do tipo $f(x) = tg\ (x + a)$, com $a \in \mathbb{R}$, foi definido como $\{x \in \mathbb{R}/x \neq (\pi/2 - a) + k.\pi,\ com\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Atividade 4: Utilizando o *software*, esboce os gráficos das funções: $f(x) = tg\ x,\ g(x) = tg\ (2.x)\ e\ h(x) = tg\ (\frac{1}{2}.x)$.

Figura 28 Gráficos de $f(x) = tg\ x,\ \ g(x) = tg\ (2.x)\ e\ h(x) = tg\ (\frac{1}{2}.x)$



Fonte: Print de tela feito pela autora

Para esta última atividade, novamente tiveram que analisar os valores do domínio que poderiam utilizar para as três funções propostas, de modo que as imagens existissem. Levaram mais tempo para realizar esta escolha, e optaram pelos valores $0,\ \pi/6,\ 2\pi/3\ \ e\ \ 2\,\pi$, em radianos, recorrendo a técnicas de redução de quadrante e regras de sinais para atribuição dos valores de imagem.

Classificaram o gráfico da função $g(x)$ como uma contração horizontal do gráfico da função $f(x)$, visto que o parâmetro é um número maior do que 1 e está multiplicando o valor de x, e não o valor de $f(x)$. Analogamente, o gráfico da função $h(x)$, foi classificado como uma expansão horizontal também referente ao gráfico da função $f(x)$.

Para a função $f(x)$, já tinham das atividades anteriores domínio igual a $\{x \in \mathbb{R}/x\ \neq\ \pi/2 + k\pi,\ \ com\ k \in \mathbb{Z}\}$ e período igual a π, para a função $g(x)$ determinaram visualmente através do gráfico período igual a $\pi/2$, e equivocadamente para o domínio $\{x \in \mathbb{R}/x\ \neq\ \pi/4 + k\pi,\ \ com\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Houve necessidade então de nova intervenção, foi solicitado que utilizassem os valores $0, 1, 2$ e 3, para a constante k e verificassem se coincidiam com os valores fora do domínio da função. A partir da realização desta tarefa perceberam que, apesar de as constantes propostas gerarem valores fora do domínio, outros valores também fora do domínio estavam sendo desconsiderados.

Questionados novamente se a mudança no período da função tangente não estaria relacionada também a uma mudança no domínio, perceberam que sim, que os valores fora do domínio variavam com os múltiplos do período e desta forma o domínio da função $g(x)$ é $\{x \in \mathbb{R}/x \neq \pi/4 + k.\pi/2, \ com\, k \in \mathbb{Z}\}$, sendo o $\pi/4$ um valor fora do domínio e $\pi/2$ o período da função.

Para a função $h(x)$ através do gráfico visualizaram o período igual a 2π e, seguindo a lógica anterior, domínio igual a $\{x \in \mathbb{R}/x \neq \pi + k.2\pi, com\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Para a generalização de domínio e período de funções do tipo $f(x) = tg\ (ax)$, com $a \in \mathbb{R}$, identificaram o período como sendo o resultado da expressão π/a, relembrados sobre a possibilidade de o parâmetro assumir valores negativos, corrigiram para: π/a no caso de a positivo e $-\pi/a$ no caso de a negativo, e no caso de a igual a zero, a função constante nula.

Seguindo para a generalização do domínio precisavam primeiro de uma expressão para um valor fora do domínio da função, e analisando os períodos estudados até o momento consideraram à expressão $\pi/(2.a)$, chegando então ao domínio$\{x \in \mathbb{R}/x \neq \pi/(2.a) + kp, com\, k \in \mathbb{Z}\}$, sendo p o período da função.

Obviamente, todas estas considerações levaram um tempo para serem amadurecidas e atingirem este resultado final. Para este estudo dirigido dois tempos de aula foram insuficientes, foi preciso utilizar um tempo maior, cerca de quatro tempos de aula.

Ao final do trabalho a pesquisadora reuniu-se em com o grupo para verificar o que os alunos acharam das atividades, e suas considerações sobre a diferente abordagem dos conteúdos. De forma unânime, aprovaram a proposta, afirmando terem achado interessante “descobrir” as informações ao invés de decorarem uma série de fórmulas e regras, apesar de em alguns momentos terem recorrido a regras previamente estudadas.

Como o grupo era relativamente pequeno e não seria realizada uma análise quantitativa, esta reunião foi informal, em sala de aula, quando se conversou sobre as impressões pessoais de cada um. Questionados sobre o que acharam da experiência, as respostas a essas perguntas continham expressões do tipo: “foi legal”, “podia ser mais aula assim” e “deu pra entender melhor os gráficos”.

Quanto às críticas e sugestões, propuseram que houvesse mais tempo para realizar as tarefas e uma forma virtual de registro das respostas, sem utilização de papel e caneta, o que faz muito sentido, dada a natureza tecnológica da proposta.

Baseado no que foi dito nesta reunião avaliando não só o material escrito, mas também todo o processo de elaboração das respostas, as respostas em si das atividades propostas, com todas as dúvidas e avanços, resultados muito bons nas avaliações e nas notas bimestrais dos participantes, com médias superiores a oito pontos em uma escala de zero a dez, no quarto bimestre de 2016, considerou-se satisfatório o desenvolvimento das atividades.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa visou demonstrar um exemplo de utilização de tecnologia no processo de aprendizagem de representações gráficas, fazendo uso de estudos dirigidos voltados para o ensino de gráficos de funções trigonométricas agrupados em famílias, através de transformações gráficas a partir de funções básicas e da mudança de parâmetros. O emprego de recursos computacionais permite destacar características importantes das representações gráficas.

A análise dos livros didáticos de matemática do PNLD (2015) nos capítulos referentes às funções trigonométricas, evidenciou características das obras no que se refere à construção gráfica e ao uso de tecnologia nessas construções. De modo geral, as obras seguem uma linha de construção através do uso de tabelas e marcação de pontos no plano cartesiano para justificar o formato dos gráficos, e, em sua maioria, sugerem o uso de *software* de construção gráfica para aprofundamento do tema em seções específicas.

A não utilização da tecnologia não impede, de forma alguma, a aprendizagem dos conceitos visto que nem sempre estiveram disponíveis ao longo da história do sistema educacional, logo, não considera-se seu uso obrigatório, apesar de ser considerada uma rica ferramenta.

A intenção da pesquisa foi disponibilizar um material simples e prático que possa ser aplicado em turmas da primeira série de ensino médio com qualquer quantitativo de alunos e que não requer muito material. Se houver uma sala de informática disponível, ótimo, mas se não houver, basta um projetor de dados com o *software* instalado.

O *software* Graphmatica permitiu uma praticidade e agilidade no esboço dos gráficos, que não seriam possíveis caso tivessem sido feitos sem um recurso tecnológico qualquer. Além de ser uma ferramenta com forte apelo visual pelo fato de exibir vários gráficos de uma vez, em várias cores diferentes, possuir uma interface simples e clara e ser de fácil manuseio, permitindo a visualização simultânea de diversas características dos gráficos esboçados.

A aplicação das atividades permitiu aos alunos envolvidos na pesquisa desenvolverem estratégias para analisar e responder as questões propostas por meios próprios, com intervenções em forma de questionamentos pertinentes apenas quando necessário. Diferentemente de uma aula tradicional, os alunos ficaram responsáveis pelo ritmo de desenvolvimento do trabalho, e por decidir o formato dos resultados obtidos.

A mesma metodologia pode ser utilizada no estudo de gráficos dos mais variados tipos de funções, como por exemplo, funções afins, quadráticas, exponenciais e logarítmicas. Porém, optou-se pelo trabalho envolvendo funções trigonométricas por se tratar de um conteúdo em que, nem sempre, temos bons resultados de aprendizagem, apesar de possuírem vários exemplos aplicações e contextualizações.

Partiu-se da ideia que os professores precisam procurar constantemente por métodos diferenciados que produzam bons resultados na obtenção de conhecimento por parte dos discentes, que sirvam de incentivo e motivação para o estudo de modo geral, e em específico, neste caso, para o estudo de gráficos de funções trigonométricas e suas características.

O papel do professor nesta proposta é o de acompanhar o desenvolvimento dos alunos, fazendo intervenções, se e quando necessárias ao longo de todo o processo, mesmo sem corrigir possíveis erros diretamente, mas fazendo questionamentos e propondo atividades extra que os levem a perceber corretamente quais os resultados esperados.

O material consistindo em três estudos dirigidos para as funções seno, cosseno e tangente e envolvendo transformações gráficas (translações, expansões e contrações horizontais e verticais). Contando com quatro atividades em cada um, envolvendo questões de verificação e generalização de características como domínio, imagem e período das funções levando-se em consideração a mudança de parâmetros.

É fato que seria possível ainda ter elaborado questões sobre reflexões dos gráficos em torno dos eixos cartesianos e a forma como essas reflexões podem ser percebidas a partir da representação algébrica das funções, além de construir estudos dirigidos para as funções secante, cossecante e cotangente, porém tornaria o estudo muito extenso.

Convém recordar que não se trata de uma proposta fechada e finalizada, alterações ou acréscimos que contribuam para uma melhor assimilação dos conteúdos serão sempre bem recebidas e fazem parte da evolução da prática docente.

REFERÊNCIAS

BITTAR, M. Possibilidade e dificuldades da incorporação do uso de *softwares* na aprendizagem da matemática. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), 3, 2006, Águas de Lindóia, São Paulo. **Anais eletrônicos...** G06 - Educação Matemática novas tecnologias e educação a distância. Disponível em: <http://tecmat-ufpr.pbworks.com/f/R0182-1.pdf>. Acesso em: 01 de dezembro de 2016.

BORTOLLI, G. **Um Olhar Histórico nas Aulas de Trigonometria: Possibilidades de Uma Prática Pedagógica Investigativa**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário Univates, Lajeado, 2012. Disponível em: <https://www.univates.br/bdu/handle/10737/281>. Acesso em 20 dez. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Guia de Livros Didáticos: PNLD 2015: Matemática: Ensino Médio.** Brasília, DF: Secretaria de Educação Básica, 2015. 108 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF, 1997.

CINEL, N. C. B. Estudo dirigido. **Revista do Professor**, Porto Alegre, 19 (73): 31-35, Jan./mar. 2003. Disponível em: <www.portal.educacao.salvador.ba.gov.br/site/documentos/.../estudo%20dirigido.pdf>. Acesso em: 01 de dezembro de 2016.

COSTA, N. M. L. A História da Trigonometria. **Revista da SBEM**, ano 10, São Paulo, n° 13, p. 60-69, março, 2003. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf >. Acesso em: 01 de dezembro de 2016.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. Vol. 2. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 3 ed. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. **A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados**. IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998. Disponível em: <http://lsm.dei.uc.pt/ribie/docfiles/txt200342413933117.PDF>. Acessado em: 20 dez. 2014.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D. M., PÉRIGO, R., ALMEIDA, N. S. **Matemática: Ciências e Aplicações**. Vol. 2. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

LEONARDO, F. M. **Conexões Com a Matemática**. Vol. 2. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

LIBÂNEO, J.C. **Didática**. 2ª ed. São Paulo: Cortez; 1994.

MACHADO, C. P. **Investigando o Uso de *Softwares* Educacionais Como Apoio ao Ensino de Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do S, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <http://repositorio.pucrs.br/dspace/handle/10923/3075?locale=pt_BR>. Acesso em 01 dez. 2016.

NÉRI, I. C. **Guia do Usuário do *Graphmatica* versão 2003p**. São Paulo 2007. http://www.*Graphmatica*.com/user/GuiaDoUsuario-Graphmaticav2003p.pdf. Acesso em 01 dez. 2016.

PAIVA, M. R.**Matemática Paiva**. Vol. 2. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PALIS, G. R. **O conhecimento tecnológico, pedagógico e do conteúdo do professor de Matemática**. Educação Matemática Pesquisa, v. 12, n. 3, p. 432-51, 2010. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4288/3695>. Acesso em: 01 de dezembro de 2016.

RIO DE JANEIRO. Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro. **Currículo Mínimo de Matemática**. 2011a. Rio de Janeiro, 17 de janeiro de 2011. Disponível em: <http://conexaoescola.rj.gov.br/curriculo-basico/matemática>. Acesso em: 01 de dezembro de 2016.

SMOLE, K. S., DINIZ, M. I. **Matemática: Ensino Médio**. Vol. 2. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

SOUZA, J. R. **Novo Olhar: Matemática**. Vol. 2. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.

VALENTE, J. A. (1993a). **Diferentes Usos do Computador na Educação**. Em Aberto, Brasília, ano 12, n.57, jan./mar. 1993. Disponível em: <http://emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/view/1876>. Acesso em: 01 de dezembro de 2016.

APÊNDICE A - ESTUDO DIRIGIDO: FUNÇÃO SENO

1) Utilizando o *software Graphmatica*, esboce os gráficos das funções:

$$f(x) = sen\, x,\ g(x) = 1 + sen\, x \text{ e } h(x) = -2 + sen\, x$$

a) Preencha a tabela a seguir escolhendo valores para x e encontrando pontos $(x, f(x))$, $(x, g(x))$ e $(x, h(x))$ pertencentes aos três gráficos traçados:

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$

b) Considere agora o gráfico de $f(x) = sen\, x$ como referencial e responda:

✓ O que se observa sobre as imagens de $g(x) = 1 + sen\, x$ e $h(x) = -2 + sen\, x$ em relação às imagens da função f?

____

____

✓ O que ocorreu com os gráficos de g e h em relação ao gráfico de f?

____

____

O gráfico de g é ____

____

O gráfico de h é ____

____

c) Determine $Im\ (f)$: ____________________________

d) Determine $Im\ (g)$: ____________________________

e) Determine $Im\ (h)$: ____________________________

f) Determine o período de f: ______________________

g) Determine o período de g: ______________________

h) Determine o período de h: ______________________

i) O que se pode dizer sobre a imagem de funções do tipo $f(x) = a + sen\,x$? ($a \in \mathbb{R}$)

____

____

j) O que se pode dizer sobre o período de funções do tipo $f(x) = a + sen\,x$? ($a \in \mathbb{R}$)

____

____

2) Utilizando o *software*, esboce os gráficos das funções:

$$f(x) = sen\,x, \quad g(x) = 2.sen\,x \text{ e } h(x) = \frac{1}{2}.sen\,x$$

a) Preencha a tabela abaixo escolhendo valores para x e encontrando pontos $(x, f(x))$, $(x\,,\ g(x))$ e $(x\,,\ h(x))$ pertencentes aos três gráficos traçados:

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$

b) Considere agora o gráfico de $f(x) = sen\,x$ como referencial e responda:

✓ O que se observa sobre as imagens de $g(x) = 2.sen\,x$ e $h(x) = \frac{1}{2}.sen\,x$ em relação às imagens da função f?

____

____

✓ O que ocorreu com os gráficos de g e h em relação ao gráfico de f?

____

____

O gráfico de g é ____

____

O gráfico de h é ____

____

c) Determine $Im\ (f)$: ______________________________

d) Determine $Im\ (g)$: ______________________________

e) Determine $Im\ (h)$: ______________________________

f) Determine o período de f: ______________________

g) Determine o período de g: ______________________

h) Determine o período de h: ______________________

i) O que se pode dizer sobre a imagem de funções do tipo $f(x) = a.sen\ x$? $(a \in \mathbb{R})$

____

____

j) O que se pode dizer sobre o período de funções do tipo $f(x) = a.sen\ x$? $(a \in \mathbb{R})$

____

____

3) Utilizando o *software*, esboce os gráficos das funções:

$$f(x) = sen\,x, \quad g(x) = sen(x + \frac{\pi}{2}) \ \text{ e } \ h(x) = sen(x + \frac{\pi}{2})$$

a) Preencha a tabela abaixo escolhendo valores para x e encontrando pontos $(x, f(x))$, $(x\ ,\ g(x))$ e $(x\ ,\ h(x))$ pertencentes aos três gráficos traçados:

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$

b) Considere agora o gráfico de $f(x) = sen\,x$ como referencial e responda:

✓ O que ocorreu com os gráficos de g e h em relação ao gráfico de f?

____

____

O gráfico de g é ____

____

O gráfico de h é ____

____

c) Determine $Im\ (f)$: ______________________________

d) Determine $Im\ (g)$: ______________________________

e) Determine $Im\ (h)$: ______________________________

f) Determine o período de f: _______________________

g) Determine o período de g: _______________________

h) Determine o período de h: _______________________

i) O que se pode dizer sobre a imagem de funções do tipo $f(x) = sen\ (x + a)$? ($a \in \mathbb{R}$)____

____

j) O que se pode dizer sobre o período de funções do tipo $f(x) = sen\ (x + a)$? ($a \in \mathbb{R}$)____

____

4) Utilizando o *software*, esboce os gráficos das funções:

$$f(x) = sen\, x,\ \ g(x) = sen(2.x)\ \text{ e }\ h(x) = sen(\tfrac{1}{2}.x)$$

a) Preencha a tabela abaixo escolhendo valores para x e encontrando pontos (x, $f(x)$), (x , $g(x)$) e (x , $h(x)$) pertencentes aos três gráficos traçados:

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$

b) Considere agora o gráfico de $f(x) = sen\,x$ como referencial e responda:

✓ O que ocorreu com os gráficos de g e h em relação ao gráfico de f?

____

____

O gráfico de g é ____

____

O gráfico de h é ____

____

c) Determine $Im\ (f)$: ______________________________

d) Determine $Im\ (g)$: ______________________________

e) Determine $Im\ (h)$: ______________________________

f) Determine o período de f: ________________________

g) Determine o período de g: ________________________

h) Determine o período de h: ________________________

i) O que se pode dizer sobre a imagem de funções do tipo $f(x) = sen\ (a.x)$? $(a \in \mathbb{R})$

____

____

j) O que se pode dizer sobre o período de funções do tipo $f(x) = sen\ (a.x)$? $(a \in \mathbb{R})$

____

____

APÊNDICE B - ESTUDO DIRIGIDO: FUNÇÃO COSSENO

1) Utilizando o *software Graphmatica*, esboce os gráficos das funções:

$$f(x) = \cos x,\ \ g(x) = 1 + \cos x \quad \text{e} \quad h(x) = -2 + \cos x$$

a) Preencha a tabela a seguir escolhendo valores para x e encontrando pontos $\big(x,\ f(x)\big)$, $\big(x,\ g(x)\big)$ e $(x,\ h(x))$ pertencentes aos três gráficos traçados:

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$

b) Considere agora o gráfico de $f(x) = \cos x$ como referencial e responda:

✓ O que se observa sobre as imagens de $g(x) = 1 + cos\,x$ e $h(x) = -2 + cos\,x$ em relação às imagens da função f?

____

____

✓ O que ocorreu com os gráficos de g e h em relação ao gráfico de f?

____

____

O gráfico de g é ____

____

O gráfico de h é ____

____

c) Determine $Im\ (f)$: ______________________________

d) Determine $Im\ (g)$: ______________________________

e) Determine $Im\ (h)$: ______________________________

f) Determine o período de f: ______________________

g) Determine o período de g: ______________________

h) Determine o período de h: ______________________

i) O que se pode dizer sobre a imagem de funções do tipo $f(x) = a + cos\ x$? $(a \in \mathbb{R})$

____

____

j) O que se pode dizer sobre o período de funções do tipo $f(x) = a + cos\ x$? $(a \in \mathbb{R})$

____

____

2) Utilizando o *software*, esboce os gráficos das funções:

$$f(x) = cos\ x,\ \ g(x) = 2.cos\ x \text{ e } h(x) = \frac{1}{2}.cos\ x$$

a) Preencha a tabela abaixo escolhendo valores para x e encontrando pontos $(x\,, f(x))$, $(x\,, g(x))$ e $(x\,, h(x))$ pertencentes aos três gráficos traçados:

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$

b) Considere agora o gráfico de $f(x) = cos\ x$ como referencial e responda:

✓ O que se observa sobre as imagens de $g(x) = 2.cos\ x$ e $h(x) = \frac{1}{2}.cos\ x$ em relação às imagens da função f?

____

____

✓ O que ocorreu com os gráficos de g e h em relação ao gráfico de f?

____

____

O gráfico de g é ____

____

O gráfico de h é ____

____

c) Determine $Im\ (f)$: ______________________________

d) Determine $Im\ (g)$: ______________________________

e) Determine $Im\ (h)$: ______________________________

f) Determine o período de f: _______________________

g) Determine o período de g: _______________________

h) Determine o período de h: _______________________

i) O que se pode dizer sobre a imagem de funções do tipo $f(x) = a.cos\ x$? $(a \in \mathbb{R})$

____

____

j) O que se pode dizer sobre o período de funções do tipo $f(x) = a.cos\ x$? $(a \in \mathbb{R})$

____

____

3) Utilizando o *software*, esboce os gráficos das funções:

$$f(x) = cos\, x, \quad g(x) = cos(x + \frac{\pi}{2}) \quad \text{e} \quad h(x) = cos(x + \frac{\pi}{2})$$

a) Preencha a tabela abaixo escolhendo valores para x e encontrando pontos $(x, f(x))$, $(x, g(x))$ e $(x, h(x))$ pertencentes aos três gráficos traçados:

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$

b) Considere agora o gráfico de $f(x) = cos\, x$ como referencial e responda:

✓ O que ocorreu com os gráficos de g e h em relação ao gráfico de f?

____

____

O gráfico de g é ____

____

O gráfico de h é ____

____

c) Determine $Im\ (f)$: ___________________________

d) Determine $Im\ (g)$: ___________________________

e) Determine $Im\ (h)$: ___________________________

f) Determine o período de f: _____________________

g) Determine o período de g: _____________________

h) Determine o período de h: _____________________

i) O que se pode dizer sobre a imagem de funções do tipo $f(x) = cos(x + a)$? $(a \in \mathbb{R})$____

____

j) O que se pode dizer sobre o período de funções do tipo $f(x) = cos(x + a)$? $(a \in \mathbb{R})$____

____

4) Utilizando o *software*, esboce os gráficos das funções:

$$f(x) = cos\, x, \quad g(x) = cos(2.x) \quad \text{e} \quad h(x) = cos(\tfrac{1}{2}.x)$$

a) Preencha a tabela abaixo escolhendo valores para x e encontrando pontos $(x, f(x))$, $(x, g(x))$ e $(x, h(x))$ pertencentes aos três gráficos traçados:

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$

b) Considere agora o gráfico de $f(x) = cos\,x$ como referencial e responda:

✓ O que ocorreu com os gráficos de g e h em relação ao gráfico de f?

____

____

O gráfico de g é ____

____

O gráfico de h é ____

____

c) Determine $Im\ (f)$: ______________________________

d) Determine $Im\ (g)$: ______________________________

e) Determine $Im\ (h)$: ______________________________

f) Determine o período de f: _______________________

g) Determine o período de g: _______________________

h) Determine o período de h: _______________________

i) O que se pode dizer sobre a imagem de funções do tipo $f(x) = cos\ (a.x)$? $(a \in \mathbb{R})$

____

____

j) O que se pode dizer sobre o período de funções do tipo $f(x) = cos\ (a.x)$? $(a \in \mathbb{R})$

____

____

APÊNDICE C - ESTUDO DIRIGIDO: FUNÇÃO TANGENTE

1) Utilizando o *software Graphmatica*, esboce os gráficos das funções:

$$f(x) = tg\,x, \quad g(x) = 1 + tg\,x \quad \text{e} \quad h(x) = -2 + tg\,x$$

a) Preencha a tabela a seguir escolhendo valores para x e encontrando pontos $(x\,, f(x))$, $(x\,, g(x))$ e $(x\,, h(x))$pertencentes aos três gráficos traçados:

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$

b) Considere agora o gráfico de $f(x) = tg\,x$ como referencial e responda:

✓ O que se observa sobre as imagens de $g(x) = 1 + tg\,x$ e $h(x) = -2 + tg\,x$ em relação às imagens dafunção f?

____

____

✓ O que ocorreu com os gráficos de g e h em relação ao gráfico de f?

____

____

O gráfico de g é ____

____

O gráfico de h é ____

____

c) Determine $Dom\ (f)$: ______________________________

d) Determine $Dom\ (g)$: ______________________________

e) Determine $Dom\ (h)$: ______________________________

f) Determine o período de f: ________________________

g) Determine o período de g: ________________________

h) Determine o período de h: ________________________

i) O que se pode dizer sobre o domínio de funções do tipo $f(x) = a + tg\ x$? $(a \in \mathbb{R})$

____

____

j) O que se pode dizer sobre o período de funções do tipo $f(x) = a + tg\ x$? $(a \in \mathbb{R})$

____

____

2) Utilizando o *software*, esboce os gráficos das funções:

$$f(x) = tgx,\ \ g(x) = 2.tg\ x \ \text{ e } \ h(x) = \frac{1}{2}.tg\ x$$

a) Preencha a tabela a seguir escolhendo valores para x e encontrando pontos $\big(x\ ,f(x)\big)$, $\big(x\ ,g(x)\big)$ e $(x\ ,\ h(x))$ pertencentes aos três gráficos traçados:

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$

b) Considere agora o gráfico de $f(x) = tg\ x$ como referencial e responda:

✓ O que se observa sobre as imagens de $g(x) = 2.tg\ x$ e $h(x) = \frac{1}{2}.tg\ x$ em relação às imagens da função f?

____

____

✓ O que ocorreu com os gráficos de g e h em relação ao gráfico de f?

____

____

O gráfico de g é ____

____

O gráfico de h é ____

____

c) Determine $Dom\ (f)$: ____________________________

d) Determine $Dom\ (g)$: ____________________________

e) Determine $Dom\ (h)$: ____________________________

f) Determine o período de f: ________________________

g) Determine o período de g: ______________________

h) Determine o período de h: ______________________

i) O que se pode dizer sobre o domínio de funções do tipo $f(x) = a.tg\ x$? $(a \in \mathbb{R})$

____

____

j) O que se pode dizer sobre o período de funções do tipo $f(x) = a.tg\ x$? $(a \in \mathbb{R})$

____

____

3) Utilizando o *software*, esboce os gráficos das funções:

$$f(x) = tg\ x,\ \ g(x) = tg\ (x + \tfrac{\pi}{2}) \quad \text{e} \quad h(x) = tg\ (x - \tfrac{\pi}{2})$$

a) Preencha a tabela a seguir escolhendo valores para x e encontrando pontos $(x\ , f(x))$, $(x\ , g(x))$ e $(x\ , h(x))$pertencentes aos três gráficos traçados:

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$

b) Considere agora o gráfico de $\mathrm{f(x) = tg\,x}$ como referencial e responda:

✓ O que ocorreu com os gráficos de g e h em relação ao gráfico de f?

____

____

O gráfico de g é ____

____

O gráfico de h é ____

____

c) Determine $Dom\ (f)$: ______________________

d) Determine $Dom\ (g)$: ______________________

e) Determine $Dom\ (h)$: ______________________

f) Determine o período de f: ___________________

g) Determine o período de g: ___________________

h) Determine o período de h: ___________________

i) O que se pode dizer sobre o domínio de funções do tipo $f(x) = tg\ (x + a)$? $(a \in \mathbb{R})$____

____

j) O que se pode dizer sobre o período de funções do tipo $f(x) = tg\ (x + a)$? $(a \in \mathbb{R})$

____

____

4) Utilizando o *software*, esboce os gráficos das funções:

$$f(x) = tg\ x,\ \ g(x) = tg(2x) \ \text{ e } \ h(x) = tg(\tfrac{1}{2}.x)$$

a) Preencha a tabela a seguir escolhendo valores para x e encontrando pontos $(x\ , f(x))$, $(x\ , g(x))$ e $(x\ , h(x))$ pertencentes aos três gráficos traçados:

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$

b) Considere agora o gráfico de $f(x) = tg\ x$ como referencial e responda:

✓ O que ocorreu com os gráficos de g e h em relação ao gráfico de f?

____

____

O gráfico de g é ____

____

O gráfico de h é ____

____

c) Determine $Dom\ (f)$: ___________________________

d) Determine $Dom\ (g)$: ___________________________

e) Determine $Dom\ (h)$: ___________________________

f) Determine o período de f: ______________________

g) Determine o período de g: ______________________

h) Determine o período de h: ______________________

i) O que se pode dizer sobre o domínio de funções do tipo $f(x) = tg\ (a.x)$? $(a \in \mathbb{R})$

____

____

j) O que se pode dizer sobre o período de funções do tipo $f(x) = tg\ (a.x)$? $(a \in \mathbb{R})$

____

____