Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares: Aplicações na Engenharia e Economia

Gabriela Baptistella Peres Levorato

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Carina Alves

2017

512.5 Levorato, Gabriela Baptistella Peres
L555m Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares: Aplicações na Engenharia e Economia/ Gabriela Baptistella Peres Levorato- Rio Claro: [s.n.], 2017.
65 f.: il., figs., gráfs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientadora: Carina Alves

1. Álgebra Linear. 2. Matrizes. 3. Determinante. 4. Sistemas Lineares. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Gabriela Baptistella Peres Levorato
Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares: Aplicações na Engenharia e Economia

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Carina Alves
Orientadora

Profa. Dra. Eliris Cristina Rizziolli
Departamento de Matemática, UNESP - Rio Claro

Profa. Dra. Cristiane Alexandra Lázaro
Departamento de Matemática, UNESP - Bauru

Rio Claro, 18 de Agosto de 2017

Aos meus pais.

Agradecimentos

Ao bom Deus, pelo dom da vida e por ter me permitido concluir esse trabalho.

À minha mãe Roseni, que sempre vibrou mais que eu mesma pelas minhas conquistas e me incentivou a cada dia.

Ao meu pai Arlindo, pelo seu amor e admiração.

Aos meus irmãos, Gabriel e Rafael, por serem dois anjos em minha vida.

Ao meu amigo, companheiro e marido Fábio, por toda sua compreensão, carinho, apoio e incentivo nessa grande jornada.

Aos meus avós, Paulo e Dalva, por serem exemplos de paz, amor e afeto.

Aos primos Paula, Miguel, Marina e Isabela por me acolherem como hóspede em Rio Claro quando precisei.

Aos amigos de turma, Juliana, Luiz, Rogério e Tássia, pelos grupos de estudo e amizade.

A todos os amigos e familiares que torceram e me incentivaram em cada dificuldade.

Aos professores deste curso e em especial à minha orientadora, Professora Doutora Carina Alves, por todo o conhecimento compartilhado, paciência e dedicação.

Ao Departamento de Matemática da Unesp de Rio Claro, pela iniciativa desafiadora de promover o PROFMAT no campus de Rio Claro.

A CAPES pelo apoio financeiro.

O único lugar onde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário.

Albert Einstein.

Resumo

O presente trabalho mostra a importância da Álgebra Linear e em particular da Teoria de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares para resolver problemas práticos e contextualizados. Mostramos aplicações em circuitos elétricos, no balanceamento de equações químicas, nos modelos aberto e fechado de Leontief, e no funcionamento do GPS. Ainda, foi aplicado um plano de aula para os alunos do segundo ano do Ensino Médio e apresentamos sugestões de exercícios de vestibulares sobre os tópicos estudados, para serem abordados em sala de aula.

Palavras-chave: Álgebra Linear, Matrizes, Determinante, Sistemas Lineares.

Abstract

The present work shows the importance of Linear Algebra and in particular of Matrix Theory, Determinants and Linear Systems to solve practical and contextualized problems. We show applications in electrical circuits, in the balancing of chemical equations, in the open and closed models of Leontief, and in the operation of GPS. Also, a lesson plan was applied to the students of the second year of high school and we presented suggestions of exercises of vestibular about the topics studied, to be approached in the classroom.

Keywords: Linear Algebra, Matrices, Determinant, Linear Systems.

Sumário

Introdução

A matemática é uma ciência que não se limita a um ambiente restrito, sem aplicação ou finalidade, ela é ampla em sua magnitude e todas as outras ciências estão diretamente relacionadas a ela. A importância da Álgebra Linear tem crescido nas últimas décadas, os modelos matemáticos lineares assumiram um importante papel juntamente com o desenvolvimento da informática e como seria de se esperar, esse desenvolvimento estimulou um notável crescimento de interesse em Álgebra Linear.

Inúmeras aplicações foram sendo consolidadas ao longo dos séculos, desde os primeiros indícios do surgimento dos Sistemas Lineares, Determinantes e Matrizes, até os dias atuais, onde é possível constatar a consagração da Ciência Matemática, que engloba a Álgebra Linear.

A transição da matemática desenvolvida no Ensino Médio para a do ensino universitário apresenta uma série de dificuldades para os alunos. A introdução de ideias abstratas implica numa mudança profunda de como o aluno deve mudar sua forma de raciocinar. Considerando a forma de abordagem apresentada em livros didáticos de assuntos específicos do Ensino Médio, em especial, Matrizes, Sistemas Lineares e Determinante, há a necessidade de apresentar de forma simples, aplicações desses conceitos. Desta forma, o objetivo deste trabalho é realizar um estudo sobre tópicos da Álgebra Linear, como Matrizes, Determinantes, Sistemas Lineares e mostrar a interdisciplinaridade e aplicações desses tópicos, que auxiliam em alguns cursos como o de Química, Física, Engenharia e Economia.

Esse trabalho foi dividido em três partes: na primeira parte foi feita uma fundamentação teórica dos temas supracitados, na segunda parte apresentamos algumas aplicações e na terceira parte propostas de aulas para o Ensino Médio.

Mais especificamente, o presente trabalho está estruturado como segue.

No Capítulo 1, apresentamos conceitos e propriedades envolvendo Matrizes como, adição e multiplicação, matrizes especiais, matriz transposta e matriz inversa.

No Capítulo 2, fizemos um estudo de Sistemas Lineares sobre o corpo dos números reais.

No Capítulo 3, apresentamos a teoria de Determinantes, incluindo suas aplicações em sistemas lineares (regra de Cramer) e no cálculo da matriz inversa.

No Capítulo 4, são apresentadas duas aplicações onde se faz necessário o uso de Sistemas Lineares: uma aplicação na engenharia elétrica, onde abordamos os circuitos elétricos e uma aplicação na engenharia química, onde abordamos o balanceamento de equações químicas. Para tanto, apresentamos definições de alguns conceitos físicos e químicos para uma melhor compreensão das aplicações que abordamos aqui. É apresentado também uma aplicação onde se faz necessário o uso de Matrizes: em um sistema econômico de Leontief, e finalmente apresentamos uma aplicação de Determinante no funcionamento do GPS. Um professor de Matemática do Ensino Médio ou um aluno de graduação em Ciências Exatas, encontrará aqui exemplos com aplicações de conceitos vistos na disciplina de Álgebra Linear.

No Capítulo 5, abordamos um plano de aula que foi aplicado aos alunos do segundo ano do Ensino Médio e também foi feita uma análise das resoluções apresentadas pelos alunos. Posteriormente, apresentamos sugestões de exercícios envolvendo situações reais e cuja soluções se dão a partir dos temas estudados e por fim, apresentamos exercícios de vestibulares, o que justifica que é necessário uma aprendizagem significativa da temática deste trabalho.

Espera-se contribuir com o ensino de Álgebra Linear nas áreas afins da matemática, de modo que as aplicações expostas aqui sejam utilizadas e que inspirem a elaboração de outros projetos, não apenas no conteúdo de sistemas lineares, sua representação e solução matricial mas também em outros, onde seja possível discutir a contribuição da matemática na solução de problemas reais.

1 Matrizes

Historicamente, há indícios que os chineses, por volta de 2500 a.C., já desenvolviam alguns tipos de problemas com cálculos efetuados sobre uma tabela, mas foi o Matemático inglês James Joseph Sylvester (1814-1897) que deu o nome de Matrizes para esses cálculos. Sylvester viveu na idade áurea da Matemática e desenvolveu um importante papel nos avanços científicos. O estudo de Matrizes está ligado à Matemática, Física e também abrange o campo da Computação.

Neste capítulo apresentamos as principais definições e propriedades envolvendo matrizes. Posteriormente faremos o uso de matrizes em problemas práticos na Economia, Física e Química.

As principais referências para o desenvolvimento deste capítulo foram [1] e [2].

1.1 Definições

Definição 1.1. *Sejam $m \geq 1$ e $n \geq 1$ dois números inteiros. Uma matriz $m \times n$ é um agrupamento retangular de números com m linhas e n colunas, formando uma tabela que se indica do seguinte modo:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Notações: Indicaremos por A uma matriz $m \times n$ com $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$. O elemento que ocupa a linha i e a coluna j da matriz A é denotado por (a_{ij}).

Cada matriz será representada por uma letra maiúscula do nosso alfabeto.

As m sequências horizontais são chamadas de *linhas* da matriz, enquanto as n sequências verticais são chamadas de *colunas* da matriz.

Exemplo 1.2. A matriz A abaixo é uma matriz 3×2. Logo $A \in M_{3\times 2}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Definição 1.3. *(Igualdade de Matrizes). Duas matrizes* $A = (a_{ij})$ *e* $B = (b_{ij})$*, de ordem* $m \times n$ *são iguais se, e somente se,* $a_{ij} = b_{ij}$ *(i=1,2,...,m ; j=1,2,...,n), para todo par* (i, j) *em que* $i = 1, ..., m$ *e* $j = 1, ..., n$.

Exemplo 1.4. $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & t \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 5 \\ t = 6 \end{cases}$

Exemplo 1.5. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

1.2 Matrizes Especiais

Definição 1.6. *(Matriz linha). Uma matriz que possui apenas uma linha, ou seja, uma matriz de ordem* $1 \times n$*:*

$$M_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix},$$

é chamada de matriz linha.

Definição 1.7. *(Matriz coluna). Uma matriz que possui apenas uma coluna, ou seja, uma matriz de ordem* $m \times 1$*:*

$$M_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},$$

é chamada de matriz coluna.

Definição 1.8. *(Matriz quadrada). Uma matriz que tem o mesmo número de linhas e colunas é chamada de matriz quadrada. Usaremos a notação* M_n *e a chamaremos de matriz quadrada de ordem* n*:*

$$M_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Definição 1.9. *(Diagonal principal). Seja* $A = (a_{ij})$ *uma matriz quadrada* $n \times n$*. Os elementos* a_{ij} *em que* $i = j$*, com* $i, j = 1, ..., n$ *são os elementos da diagonal principal.*

Definição 1.10. *(Matriz triangular superior). Uma matriz quadrada, em que os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, ou seja, os elementos* a_{ij} *em que,* $i > j$*, são nulos:*

$$M_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

é chamada de matriz triangular superior.

Definição 1.11. *(Matriz triangular inferior). Uma matriz quadrada, em que os elementos acima da diagonal principal são nulos, ou seja, os elementos* a_{ij} *em que,* $i < j$*, são nulos:*

$$M_n = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

é chamada de matriz triangular inferior.

Definição 1.12. *(Matriz Diagonal). Uma matriz quadrada, em que os elementos acima e abaixo da diagonal principal são nulos:*

$$M_n = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

é chamada de matriz diagonal.

Definição 1.13. *(Matriz identidade). A matriz identidade é denotada por* I_n*, onde* n *é a sua ordem, e é uma matriz quadrada* (a_{ij}) *em que os elementos* a_{ij} *da diagonal principal* $(i = j)$ *são iguais a 1 e os elementos* a_{ij} *com* $i \neq j$ *são iguais a 0, com* $i, j = 1, ..., n$*:*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.14. $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Definição 1.15. *(Matriz nula). Uma matriz em que todos os elementos são iguais a zero:*

$$O_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

é chamada de matriz nula.

1.3 Operações com Matrizes

1.3.1 Adição

Dadas as matrizes $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$ e $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}$ chamamos de soma da matriz A com a matriz B e indicamos por $A + B$, a matriz $m \times n$, cujo termo geral é $a_{ij} + b_{ij}$, ou seja:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & ... & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & ... & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & :::: & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & ... & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Exemplo 1.16. Se A= $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} 8 & 11 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ então A+B= $\begin{bmatrix} 7 & 13 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Exemplo 1.17. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ m & n+1 & p \\ x & y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-a & -b & -c \\ -m & -n & -p \\ -x & -y & -z+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Definição 1.18. *(Matriz oposta). Dada uma matriz $A = (a_{ij})$, a matriz $B = (b_{ij})$, em que $b_{ij} = -a_{ij}$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$, é chamada oposta de A, e indicamos por -A.*

Definição 1.19. *A diferença entre a matriz A e a matriz B, indicada por $A - B$ é a soma de A com -B $(A + (-B))$.*

Proposição 1.20. *Sejam $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$ matrizes de ordem $m \times n$. Então as propriedades abaixo são válidas:*
P1) Comutatividade: $A + B = B + A$.
P2) Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$.
P3) $A + 0 = A$.
P4) $A + (-A) = 0$.

Demonstração: $P1$) Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, então $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B + A$.

$P2$) Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$ então $(A + B) + C = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}) = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})) = (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij}) = A + (B + C)$.

$P3$) Sejam $A = (a_{ij})$ e $0 = (0_{ij})$ então $A + 0 = (a_{ij} + 0_{ij}) = (a_{ij} + 0) = (a_{ij}) = A$

$P4$) Sejam $A = (a_{ij})$, $-A = (-a_{ij})$ e $B = A + (-A)$, com $B = (b_{ij})$ então $b_{ij} = a_{ij} + (-a_{ij}) \Rightarrow b_{ij} = a_{ij} - a_{ij} \Rightarrow b_{ij} = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow A + (-A) = 0$. ■

1.3.2 Multiplicação de um Número por uma Matriz

Definição 1.21. *Dada uma matriz real $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$, e um número real t, o produto de t por A é a matriz real de ordem $m \times n$ dada por:*

$$tA = \begin{bmatrix} ta_{11} & \dots & ta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ta_{m1} & \dots & ta_{mn} \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Exemplo 1.22. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 10 & 8 & -4 \end{bmatrix}$. Então $-5A = \begin{bmatrix} -35 & 10 & -15 \\ -50 & -40 & 20 \end{bmatrix}$.

Proposição 1.23. *Sejam as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes de ordem $m \times n$ e α e β números reais. Então as propriedades abaixo são válidas:*

$P1$) $(\alpha\beta)$A$= \alpha(\beta$ A)
$P2$) $(\alpha + \beta)$ A$= \alpha$ A $+ \beta$ A
$P3$) α(A + B) $= \alpha$ A $+ \alpha$ B
$P4$) 1A=A

Demonstração: $P1$) Seja $A = (a_{ij})$. Então $(\alpha\beta)$A $= \alpha\beta(a_{ij}) = \alpha\beta a_{ij} = \alpha(\beta a_{ij}) = \alpha(\beta A)$.

$P2$) Seja $A = (a_{ij})$. Então $(\alpha + \beta)$A $= ((\alpha + \beta)a_{ij}) = (\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) + (\beta a_{ij}) = \alpha$ A $+ \beta$ A.

$P3$) Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$. Então α(A + B) $= \alpha(a_{ij} + b_{ij}) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij} = \alpha A + \alpha B$.

$P4$) Seja $A = (a_{ij})$. Então $1A = 1a_{ij} = a_{ij} = A$. ■

1.3.3 Multiplicação de Matrizes

Definição 1.24. *Sejam $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$ e $B = (b_{jk})$ de ordem $n \times p$. Chama-se produto de A por B (indica-se AB) a matriz $C = (c_{ik})$ de ordem $m \times p$, onde*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Exemplo 1.25. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \; e \; B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Então

$$AB = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 2\cdot 4 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 & 2\cdot 5 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 3 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & 0\cdot 4 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 & 0\cdot 5 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{1.6}$$

Proposição 1.26. *(Propriedades da Multiplicação de Matrizes) Sejam $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$ e $B = (b_{jk})$ de ordem $n \times p$ as seguintes propriedades são válidas:*
P1) Se $C = (c_{ks})$ de ordem $p \times q$ então A(BC)=(AB)C.
P2) Se $C = (c_{jk})$ de ordem $n \times p$ então A(B+C)=AB+AC.
P3) Se $C = (c_{jk})$ de ordem $n \times p$ então (A+B)C=AC+BC.
P4) $I_m \times A = A$.

Demonstração: $P1$) O termo geral de A(BC) é dado por:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{ks}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{ks}.$$

ao passo que o termo geral de (AB)C é dado por:

$$\sum_{k=1}^{p} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}) c_{ks} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{ks} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{ks}.$$

$P2$)

$$A(B+C) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk} = AB + AC.$$

$P3$)

$$(A+B)C = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{jk}) c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk} + \sum_{j=1}^{n} b_{jk} c_{jk} = AC + BC.$$

$P4$) Seja $I = (\lambda_{ij})$ e $A = (a_{jk})$

$$I = \begin{cases} \lambda_{ij} = 1, i = j \\ \lambda_{ij} = 0, i \neq j \end{cases}$$

$I_m \times A = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} a_{jk} = \lambda_{i1} a_{1k} + \lambda_{i2} a_{2k} + \cdots + \lambda_{ii} a_{ik} + \cdots + \lambda_{im} a_{mk} = a_{ik} = a_{jk} = A$
Então, $I_m \times A = A$ ■

Observações: 1) Sejam $A = (a_{ij}) \, \epsilon \, M_{m\times n}$ e $B = (b_{jk}) \, \epsilon \, M_{n\times p}$. Podemos multiplicar A por B, mas não podemos multiplicar B por A.
2) Se A e B forem matrizes quadradas de ordem n, então podemos fazer os produtos AB e BA, mas AB e BA não serão necessariamente iguais. Quando $AB = BA$ dizemos que as matrizes A e B comutam.

1.4 Matriz Transposta

Definição 1.27. *Dada uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$, chama-se transposta da matriz A, e indica-se por A^t a matriz $n \times m$ em que $A^t = (\overline{a}_{ij})$, $A^t \in M_{n\times m}$ onde $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ (i=1,..., m; j= 1,..., n).*

Exemplo 1.28. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. A transposta de A é $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Proposição 1.29. *(Propriedades da matriz transposta) Sejam as matrizes $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $A^t = (\overline{a}_{ji})$ e $B^t = (\overline{b}_{ji})$. Valem as seguintes propriedades:*
P1) $(A + B)^t = A^t + B^t$.
P2) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
P3) $(A^t)^t = A$.
P4) $(AB)^t = B^t A^t$.

Demonstração: $P1$) Chamaremos a matriz C = A+B, $C = (c_{ij})$ e $C^t = (\overline{c}_{ji})$. Por definição, $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$, $b_{ij} = \overline{b}_{ji}$, $c_{ij} = \overline{c}_{ji}$ e $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Logo, $\overline{c}_{ji} = c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = \overline{a}_{ji} + \overline{b}_{ji}$. Portanto, $\overline{c}_{ji} = \overline{a}_{ji} + \overline{b}_{ji}$. Como $\overline{c}_{ji} = \overline{a}_{ji} + \overline{b}_{ji}$, $\forall i, j$, então $C^t = A^t + B^t \Rightarrow (A + B)^t = A^t + B^t$.

$P2$) Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $A^t = (\overline{a}_{ji})_{n\times m}$. Como $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$, $\forall i, j$, então $(\lambda A)^t = \lambda A^t$, $\lambda \epsilon R$.

$P3$) Sejam $A = (a_{ij})$, $A^t = (\overline{a}_{ji})$ e $(A^t)^t = D = (d_{ij})$. Quero mostrar que $d_{ij} = a_{ij}$. Como D é a transposta da matriz A^t, então $\overline{a}_{ji} = d_{ij}$ (1). Mas, A^t é transposta de A, então, $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ (2). De (1) e (2) temos que $d_{ij} = a_{ij}$. Logo, $D = A \Rightarrow (A^t)^t = A$.

$P4$) Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $A^t = (\overline{a}_{ji})$ e $B^t = (\overline{b}_{ji})$. Chamaremos de $E = AB = (e_{ij})$ e $F = B^t A^t = (f_{ji})$ e $E^t = (\overline{e}_{ji})$. Queremos mostrar que $\overline{e}_{ji} = f_{ji}$. Se E^t é a transposta de E, então $e_{ij} = \overline{e}_{ji}$.
Como $\overline{e}_{ji} = e_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ji} \overline{b}_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \overline{b}_{ji} \overline{a}_{ji} = f_{ji}$. Portanto, $\overline{e}_{ji} = f_{ji} \Rightarrow (AB)^t = B^t A^t$. ■

Definição 1.30. *Uma matriz quadrada A diz-se simétrica se $A^t = A$.*

Exemplo 1.31. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$. A transposta de A será $A^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$. A matriz A é simétrica, pois $A = A^t$.

Definição 1.32. *Uma matriz quadrada A diz-se antissimétrica se $A^t = -A$.*

Exemplo 1.33. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -5 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. A transposta de A será $A^t = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. A matriz A é anti-simétrica, pois $A^t = -A$.

1.5 Matriz Inversa

Definição 1.34. *Uma matriz A de ordem n se diz inversível se, e somente se, existe uma matriz B, também de ordem n, de modo que*

$$AB = BA = I_n.$$

Esta matriz B, caso exista, é única e chama-se inversa de A, e indica-se por A^{-1}.

Proposição 1.35. *(Propriedades da matriz inversa) Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $A^t = (\overline{a}_{ji})$ e $B^t = (\overline{b}_{ji})$ valem as seguintes propriedades:*
P1) $I = I^{-1}$.
P2) Se a matriz A admite inversa A^{-1}, então sua transposta A^t também admite uma inversa $(A^t)^{-1}$ e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
P3) Se as matrizes A e B, de mesma ordem, admitem inversas A^{-1} e B^{-1}, então o produto AB também admite inversa, e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
P4) Se A é inversível, então A^{-1} também é, e vale a seguinte igualdade: $(A^{-1})^{-1} = A$.

Demonstração: $P1$) Seja B a inversa de I, ou seja, $B = I^{-1}$.
$BI = I \Leftrightarrow B = I \Leftrightarrow I^{-1} = I$.
$P2$) Sabemos que $AA^{-1} = I$ e $I = I^t$
$(A^t)^t((A^{-1})^t)^t = I \Leftrightarrow (A^t(A^{-1})^t = I^t \Leftrightarrow A^t(A^{-1})^t = I$.
Então a matriz $(A^{-1})^t$ é a matriz inversa A^t.
Logo, $(A^t)^{-1}$=$(A^{-1})^t$
$P3$) $(AB)(AB)^{-1} = I \Leftrightarrow A^{-1}(AB)(AB)^{-1} = A^{-1}I \Leftrightarrow (A^{-1}A)B(AB)^{-1} = A^{-1}I \Leftrightarrow IB(AB)^{-1} = A^{-1}I \Leftrightarrow B(AB)^{-1} = A^{-1}I \Leftrightarrow B^{-1}B(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}I \Leftrightarrow I(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}I \Leftrightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
$P4$) Sabemos que $AA^{-1} = I$ e $I = I^{-1}$
$AA^{-1} = I \Leftrightarrow (AA^{-1})^{-1} = I^{-1} \Leftrightarrow (A^{-1})(A^{-1})^{-1} = I^{-1} \Leftrightarrow A(A^{-1})(A^{-1})^{-1} = AI \Leftrightarrow I(A^{-1})^{-1} = AI \Leftrightarrow (A^{-1})^{-1} = A$. ■

Para determinar a inversa de uma matriz, caso ela exista, podem ser usadas as operações da próxima definição.

Definição 1.36. *Dada uma matriz A, entendemos por operações elementares com as linhas de A, uma qualquer das seguintes alternativas:*

(I) Permutar duas linhas de A;

(II) Multiplicar uma linha de A por um número diferente de zero.

(III) Somar a uma linha de A uma outra linha de A multiplicada por um número.

Quando obtemos uma matriz A' através de alguma dessas operações, dizemos que A' é equivalente a A, e escreve-se $A' \sim A$.

Exemplo 1.37. Vamos verificar se a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ é inversível e determinar A^{-1}, caso ela exista.

O objetivo é transformar a matriz A na matriz I_2 por meio das operações elementares citadas acima, e com as mesmas operações transformaremos a matriz I_2 em A^{-1}, então reuniremos A e I_2 numa mesma matriz:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \to L_2 = -3L_1 + L_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -3 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to L_1 = \tfrac{2}{11}L_2 + L_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 11 & -3 & 1 \end{array}\right) \to L_2 = \tfrac{L_2}{11} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{11} & \frac{1}{11} \end{array}\right)$$

Portanto, a matriz inversa A^{-1} é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{-3}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}.$$

2 Sistemas Lineares

Documentos históricos comprovam que o estudo de sistemas lineares desenvolveu-se, com maior intensidade nas civilizações orientais, como a babilônica e a chinesa. Esse estudo foi se aprofundando no século XVII, a partir de um artigo do alemão Gottfrield W. Leibniz (1646-1716), que estabeleceu condições para associar o sistema de equações lineares a um determinante, contando com a colaboração do suíço Gabriel Cramer(1704-1752), que resolveu um sistema de equações em um caso particular. Já o alemão Carl Jacobi(1804-1851) fez a leitura dessa teoria que é estudada hoje.

Neste capítulo faremos um estudo de equação linear e sistema linear sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$. Usaremos esses conceitos no Capítulo 4, quando abordaremos problemas sobre circuitos elétricos, balanceamento de equações químicas e funcionamento do GPS. As principais referências para o desenvolvimento deste capítulo foram [1], [2] e [3].

2.1 Equação Linear

Uma equação algébrica linear nas variáveis x_1, x_2 e x_3 é

$$x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 10. \tag{2.1}$$

Para resolver esta equação temos que determinar todos os valores reais para x_1, x_2 e x_3 que tornam verdadeira a igualdade. Explicitando x_1 em relação a x_2 e x_3 na Equação (2.1), obtemos $x_1 = 10 - 3x_2 + 4x_3$. Basta substituirmos em $x_1 = 10 - 3x_2 + 4x_3$ para quaisquer x_2 e x_3 reais obteremos uma solução. Nesse exemplo temos uma infinidade de soluções, onde podemos variar livremente x_2 e x_3.

De modo geral, dados os números reais $a_1, \ldots, a_n$ e b, uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{2.2}$$

é chamada de *equação algébrica linear* nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$. As variáveis também são chamadas de incógnitas por serem valores a serem determinados para valer a igualdade. Os números reais a_i são chamados de coeficientes e b é o termo independente da Equação (2.2)

Uma matriz coluna real $\begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{bmatrix}^t$ é solução de (2.2) quando

$$a_1y_1 + \cdots + a_ny_n = b.$$

Diz-se ainda que a $n - upla$ de números reais $(y_1, \dots, y_n)$ satisfaz a Equação (2.2).

Uma equação

$$0x_1 + \cdots + 0x_n = b$$

em que todos os coeficientes são nulos é *degenerada.* Se b for igual a zero, então toda matriz coluna $\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^t$ é solução. Se b for diferente de zero, a equação degenerada não possui solução.

As equações não degeneradas com duas ou mais variáveis possuem infinitas soluções. Uma equação não degenerada com uma única variável possui uma única solução.

Exemplo 2.1. Para todo l real, a matriz coluna $\begin{bmatrix} 3 & -2l & l] \end{bmatrix}^t$ é solução de $4x_1+8x_2 = 12$ que, portanto, possui infinitas soluções. A variável l que aparece neste exemplo é chamada de *parâmetro.*

O conjunto de todas as soluções de uma equação é chamado *conjunto solução* ou *solução geral.* Cada elemento deste conjunto é, evidentemente, uma solução e, quando for conveniente, será chamado de *solução particular.*

Exemplo 2.2. Para determinar a solução geral de $x_1 + 8x_2 - 9x_3 = 2$, basta explicitar x_1 para obter $x_1 = 2 - 8x_2 + 9x_3$. A solução geral é o conjunto de matrizes coluna

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 8x_2 + 9x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A equação

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

é denominada de *equação homogênea.* Ela está associada à equação não homogênea (2.2) e, por esse motivo, é chamada de *equação homogênea associada* à equação não homogênea

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b.$$

O uso de matrizes pode simplificar a notação. Sendo $a = [a_1, \dots, a_n]^t$ a matriz dos coeficientes e $x = [x_1, \dots, x_n]^t$ a matriz das variáveis, a equação acima pode ser colocada na forma

$$a^tx = b.$$

Exemplo 2.3. Consideremos novamente a equação do Exemplo 2.2, $x_1+8x_2-9x_3 = 2$, cuja solução geral é

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 8x_2 + 9x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

É interessante observar que $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$ é solução da equação e que tanto $\begin{bmatrix} 11 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$ quanto $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^t$ são soluções da equação homogênea associada.

O Exemplo 2.3 apresenta um fato geral.

Se $y_1, \ldots, y_n$ forem soluções da equação homogênea $a^t x = 0$, então

$$c_1 y_1 + \cdots + c_p y_p$$

continua sendo solução, para qualquer escolha dos números reais $c_1, \ldots, c_n$. Esta soma é chamada de *combinação linear* das matrizes $y_1, \ldots, y_p$.

Se um conjunto $y_1, \ldots, y_p$ de soluções da equação homogênea for tal que toda solução da equação homogênea é uma combinação linear dos seus elementos, diremos que ele é um *conjunto gerador* das soluções da equação homogênea.

Exemplo 2.4. Explicitando x_1 na equação $x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0$, obtemos $x_1 = -4x_2 + 3x_3$, cuja solução geral é

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_2 + 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$ e $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$ formam um conjunto gerador de soluções para a equação dada.

Se z_0 for uma solução da equação não homogênea $a^t x = b$ e y for uma solução da equação homogênea $Ax = 0$, então $z_0 + y$ é solução da equação não homogênea. Além disso, se z_1 for outra solução de $Ax = b$, então existe uma solução u de $Ax = 0$ tal que $z_1 = z_0 + u$. Esta outra solução u é exatamente $z_1 - z_0$.

2.1.1 Sistemas Lineares

Dados os números reais a_{ij} e b_i, com $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, o sistema de equações

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad \vdots \qquad\quad = \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

é chamado de *sistema de equações algébricas lineares* com m equações e n incógnitas. Os números a_{ij} são denominados coeficientes do sistema, b_i são os termos constantes e x_j são as incógnitas ou variáveis do sistema.

Exemplo 2.5. Dado o sistema abaixo, encontremos os valores de x_1 e x_2 que tornam verdadeiras as duas igualdades do sistema.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 10 \\ x_1 + x_2 = 15 \end{cases} \tag{2.3}$$

Explicitando x_1 na segunda equação do sistema (2.3) teremos $x_1 = 15 - x_2$ e substituindo na primeira equação do sistema (2.3) teremos que $4(15 - x_2) - x_2 = 10 \Rightarrow 60 - 4x_2 - x_2 = 10 \Rightarrow 60 - 5x_2 = 10 \Rightarrow 50 = 5x_2 \Rightarrow x_2 = 10$. Assim, $x_1 = 5$. Portanto, os valores de x_1 e x_2 que tornam verdadeiras as duas igualdades do sistema são $x_1 = 5$ e $x_2 = 10$.

De modo análogo à equações lineares, podemos simplificar a notação de sistemas lineares usando matrizes. Se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} \ e \ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

denomina-se A de **matriz dos coeficientes**, x de matriz das incógnitas e b de matriz dos termos constantes do sistema. Na forma matricial, o sistema do exemplo 2.5 se reduz a

$$Ax = b.$$

A matriz $[A|b]$ obtida acrescentando-se à matriz A uma coluna final com os elementos de b, é chamada de *matriz aumentada* do sistema linear.

Um vetor coluna real z tal que $az = b$ é chamado solução do sistema $Ax = b$. Isto significa que z é uma solução de cada equação do sistema. Um sistema como este pode ter ou não uma solução.

Exemplo 2.6. O sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix}$$

não admite solução, pois não existem x_1 e x_2 que tornam verdadeira a segunda equação.

Exemplo 2.7. O sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 2 \end{bmatrix}$$

possui uma única solução $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Para obtê-la, basta observar que, da segunda equação, $x_2 = 2$ e, da primeira, $4x_1 + 5x_2 = 14$. Como $x_2 = 2$, devemos ter $x_1 = 1$.

Exemplo 2.8. O sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

possui infinitas soluções. Explicitando x_1 na primeira equação segue que $x_1 = 10 - 5x_2$. Substituindo esta expressão na segunda obtêm-se $2(10 - 5x_2) + 10x_2 = 20$ que se simplifica em $20 = 20$, ou seja, é sempre verdadeira. Logo, qualquer matriz coluna $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 10 - 5x_2 & x_2 \end{bmatrix}^t$ é uma solução do sistema. A variável x_2 pode variar livremente nos reais.

Definição 2.9. *O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado de conjunto solução ou solução geral do sistema. Este conjunto pode ser vazio, ter um único elemento ou possuir infinitos elementos. O sistema de equações que não possui solução é chamado de impossível. Quando possui uma única solução é possível determinado e, quando possui infinitas soluções, é chamado de possível indeterminado.*

O sistema de equações $Ax = 0$ é chamado de homogêneo. Quando $b \neq 0$, o sistema de equações $Ax = b$ é chamado de não homogêneo. Um sistema está intimamente ligado ao outro e, por esta razão, $Ax = 0$ é chamado de sistema homogêneo de equações associado ao sistema $Ax = b$.

A equação homogênea $Ax = 0$ possui sempre a solução *trivial* $x = 0$. Entretanto, quando o sistema homogêneo $Ax = 0$ possui uma solução v não trivial, ela possuirá infinitas soluções pois cv será solução para qualquer número real c.

2.1.2 Sistemas Escalonados

Sejam

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\quad = \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

um sistema de equações lineares com coeficientes a_{ij} e b_j em $\mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$, e incógnitas $x_1, \cdots, x_n$. Resolver esse sistema é encontrar n elementos $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1n}\lambda_n = b_1 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\quad = \vdots \\ a_{m1}\lambda_1 + \ldots + a_{mn}\lambda_n = b_n \end{cases}$$

Uma possível estratégia para resolver esse sistema é por meio do processo de escalonamento. Após efetuarmos certas operações nestas equações, chegaremos em um outro sistema que seja mais fácil resolver e que tenha o mesmo conjunto de soluções.

As operações usadas são as seguintes:

1) Troca de posições de duas equações;

2) Multiplicação de uma equação por um escalar não nulo;

3) Substituição de uma equação pela soma desta equação com alguma outra.

Essas operações são chamadas de *operações elementares*.

Dizemos que dois sistemas de equações a n incógnitas são *equivalentes* se tiverem as mesmas soluções.

Definição 2.10. *Um sistema linear*

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\vdots \qquad\qquad = \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Será chamado de escalonado se existirem $1 \leq l_1 < l_2 < \cdots < l_m \leq n$ *tais que* $a_i li \neq 0$*, para cada* $i = 1, \cdots, m$ *e* $a_{ij} = 0$ *se* $1 \leq j < l_i$*.*

Exemplo 2.11. Considere o sistema linear, formado por três equações e três incógnitas:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = -5 \\ -4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases} \tag{2.4}$$

Chamaremos a primeira equação do sistema (2.4) de L_1, a segunda equação de L_2 e a terceira equação de L_3. Fazendo $L_2 = 3L_1 + L_2$, teremos:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 0x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 16 \\ -4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases} \tag{2.5}$$

Agora, fazendo $L_3 = 4L_1 + L_3$, teremos:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 0x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 16 \\ 0x_1 + 5x_2 + 17x_3 = 34 \end{cases} \tag{2.6}$$

Agora, fazendo $L_3 = 5L_2 - 7L_3$, teremos:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 0x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 16 \\ 0x_1 + 0x_2 + 79x_3 = 158 \end{cases} \tag{2.7}$$

Este último sistema esta na forma escalonada. Observe que, da terceira equação do sistema (2.7) chegamos que $x_3 = 2$, da segunda equação chegamos que $x_2 = 0$ e da primeira equação chegamos que $x_1 = 1$. Não é difícil verificar que as soluções do sistema inicial e deste último sistema são as mesmas.

Proposição 2.12. *Todo sistema linear* S *é equivalente a um sistema escalonado.*

Demonstração: Sem perder a generalidade podemos supor:

$$S : \begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \qquad\qquad\vdots \qquad\qquad = \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

Para cada $\alpha_{i1} \neq 0$ $(i = 2, 3, \cdots, m)$ multipliquemos por $(-\alpha_{i1})$ a primeira equação e somemos o resultado à i-ésima equação. Com algumas permutações convenientes de equações (se for o caso) obteremos um sistema S_1 do seguinte tipo:

$$S_1 : \begin{cases} x_1 + \cdots + \alpha_{1r_1}x_{r_1} + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \gamma_{2r_1}x_{r_1} + \cdots + \gamma_{2n}x_n = \beta_2' \\ \vdots \qquad = \vdots \\ \gamma_{mr_1}x_{r_1} + \cdots + \gamma_{mn}x_n = \beta_m' \end{cases}$$

onde $\gamma_{2r_1} \neq 0$ e $r_1 \geq 2$, que é equivalente a S.

Dividindo a segunda equação de S_1 por γ_{2r_1} obtemos um sistema S_2, ainda equivalente a S_1, com o qual começamos a repetir o raciocínio feito até aqui, porém a partir da sua segunda equação. Evidentemente, depois de aplicar um certo número finito de vezes esse raciocínio chegaremos a um sistema escalonado equivalente a S. ■

Exemplo 2.13. Escalonemos o sistema:

$$S : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + 6y + 3z = 3 \end{cases}$$

Fazendo, $L_2 = L_1 - L_2$ e $L_3 = L_1 - L_3$ obtemos o sistema $S_1 \sim S$:

$$S_1 : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y - z = -1 \\ -5y - 2z = -2 \end{cases}$$

Fazendo, $L_3 = 5L_2 + 2L_3$, obtemos o sistema $S_2 \sim S_1 \sim S$

$$S_2 : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y - z = -1 \\ -9z = -9 \end{cases}$$

Este último sistema está na forma escalonada. Chegamos em $z = 1$, $y = 0$ e $x = 0$. Então a terna ordenada, $(0, 0, 1)$ é solução do sistema.

3 Determinantes

O uso de Determinantes teve início com um trabalho de Gottfries Wilhelm Leibniz (1646-1716), ligado também ao uso de sistemas lineares. O francês Étienne Bézout (1730-1783) foi quem estabeleceu o processo dos sinais dos termos de um determinante. O termo Determinante, como vemos hoje, surgiu em 1812, em um trabalho sobre o assunto realizado por Augustin Louis Cauchy (1789-1857).

Neste capítulo faremos um estudo de Determinantes e suas aplicações em Matrizes e Sistemas Lineares, pois simplificam e sistematizam algumas resoluções. Usaremos também esses conceitos no Capítulo 4, quando abordaremos problemas sobre o funcionamento de um GPS. A principal referência para o desenvolvimento deste capítulo foi [6].

3.1 Permutação

Definição 3.1. *Chama-se permutação uma aplicação biunívoca σ do conjunto $N_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ sobre si mesmo.*

Notação: Denotamos a permutação σ por:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Exemplo 3.2. Se $n = 3$, existem $3! = 6$ permutações de $N_3 = \{1, 2, 3\}$, a saber,
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

Definição 3.3. *Consideremos a permutação $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{bmatrix}$ de N_n. Seja r o número de pares ordenados (i, j) com $1 \leq i < j \leq n$ tais que $\sigma(i) > \sigma(j)$. Chama-se sinal da permutação σ o número inteiro representado por $sgn(\sigma)$, que é:*

- *$sgn(\sigma) = 1$, se r é par*
- *$sgn(\sigma) = -1$, se r é ímpar*

Diz que uma permutação σ é par se $sgn(\sigma) = 1$ e ímpar se $sgn(\sigma) = -1$.

Exemplo 3.4. Seja $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Os pares (i, j) com $1 \leq i < j \leq 3$ e $\sigma(j) > \sigma(i)$ são $(1, 2)$ e $(1, 3)$; logo $r = 2$ e $sgn(\sigma) = 1$.

3.2 Determinante

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz real de ordem n. O determinante da matriz A de ordem n é o número real

$$det(A) = \sum_{\sigma} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

onde σ percorre todas as permutações de N_n=$\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$.

Exemplo 3.5. Se $A = (a_{11})$, então N_1 tem somente uma permutação, a permutação identidade, que é par. Assim $det(A) = a_{11}$.

Exemplo 3.6. Seja A=$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. As permutações do conjunto $\{1,\ 2\}$ e seus sinais são id $= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (sinal 1) e $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (sinal -1). Logo, $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Definição 3.7. *Assim, podemos obter o det(A) formando o produto dos coeficientes da diagonal da esquerda para a direita no diagrama a seguir e subtraindo disto o produto dos coeficientes da diagonal da direita para a esquerda.*

$$\begin{tikzcd} a_{11} \arrow[dr] & a_{12} \arrow[dl] \\ a_{21} & a_{23} \end{tikzcd}$$

Exemplo 3.8. Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, então, $det(A) = (2) \cdot (5) - (-3) \cdot (4) = 22$.

Definição 3.9. *Sendo A uma matriz de ordem* 3×3, *podemos obter det(A) como se segue. Repita a primeira e a segunda colunas de A como mostrado abaixo. Forme a soma dos produtos dos coeficientes sobre as diagonais da esquerda para a direita e subtraia disto os produtos dos coeficientes sobre as diagonais da direita para a esquerda (verifique a regra na Figura 3.1).*

Então, para calcular det(A) escrevemos os seis termos:

$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

Exemplo 3.10. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Determine $det(A)$.

Solução: Pela definição 3.9, $det(A) = (2)(6)(2) + (3)(7)(1) + (4)(5)(1) - (3)(5)(2) - (2)(7)(1) - (4)(6)(1) = -3$.

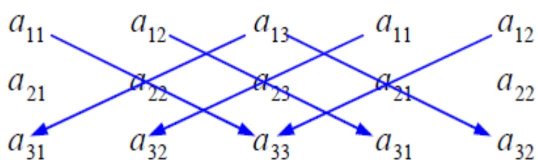

Figura 3.1: Regra da Definição 3.9

Corolário 3.11. *O determinante da matriz identidade é igual a 1.*

Proposição 3.12. *(Propriedades dos Determinantes).*
P1) Se uma linha ou uma coluna de uma matriz quadrada for nula, seu determinante é zero.
P2) Se duas linhas ou duas colunas de uma matriz quadrada forem iguais, seu determinante é zero.
P3) O determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta.
P4) Sejam A e B matrizes de ordem n. Então, $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$.
P5) Se A for uma matriz quadrada inversível, $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.

Demonstração: $P1$) Quando a linha i for nula, $a_{i\sigma(i)} = 0$ para toda permutação σ e assim, $det(A) = 0$. Uma coluna nula em uma matriz é uma linha nula em sua transposta. Assim, $det(A^t) = 0$ e, portanto, $det(A) = 0$.
$P2$) Se duas linhas da matriz A são iguais, ao trocar uma linha pela outra, a matriz A permanece inalterada e seu determinante troca de sinal. Logo, $det(A) = -det(A)$, o que resulta em $det(A) = 0$.
$P3$) Seja uma matriz $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ji})$ sua transposta, então $a_{ij} = b_{ji}$. Assim:

$$det(A) = \sum_{\sigma} sign(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma} sign(\sigma) b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n} = det(B).$$

$P4$) Se A for inversível, $A = E_1 E_2 \cdots E_k$, onde $E_1, E_2, \cdots, E_k$ são matrizes elementares. Assim $det(AB) = det(E_1 E_2 \cdots E_k B) = det(E_1) det(E_2) \cdots det(E_k) det(B) = det(A) det(B)$. Se A ou B for singular, AB é singular e $det(AB) = 0$ e $det(A)det(B) = 0$.
$P5$) Se A é invertível, temos que $A \cdot A^{-1} = I$, como $det(I) = 1$, $det(A)det(A^{-1}) = 1$, e portanto, $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.

■

O próximo teorema mostra como o determinante de uma matriz é afetado pelas operações elementares de linha e coluna.

Teorema 3.13. *Suponha B obtido de A por uma operação elementar de linha (coluna).*
(a) Permutando-se duas linhas (colunas) de A, então $det(B) = -det(A)$.

(b) Multiplicando-se uma linha (coluna) de A por um escalar β, então $det(B) = \beta det(A)$.
(c) Somando-se a uma linha (coluna) um múltiplo de outra linha (coluna), então $det(B) = det(A)$.

Demonstração: (a) Demonstramos o teorema para o caso em que se permutam duas colunas. Seja μ a transposição que permuta os dois números correspondentes às duas colunas de A que são permutadas. Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, então $b_{ij} = a_{i\mu(j)}$. Logo, para qualquer permutação σ, $b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}\cdots b_{n\sigma(n)} = a_{1\mu\sigma(1)}a_{2\mu\sigma(2)}\cdots a_{n\mu\sigma(n)}$. Assim,
$det(B) = \sum_{\sigma\in S_n}(sn\sigma)b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}\cdots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in S_n}(sn\sigma)a_{1\mu\sigma(1)}a_{2\mu\sigma(2)}\cdots a_{n\mu\sigma(n)}$

Como a transposição μ é uma permutação ímpar, sn μ σ = sn $\mu \cdot$ sn σ = -sn σ. Assim sn σ = - sn μ σ, e $det(B) = -\sum_{\sigma\in S_n} a_{1\mu\sigma(1)}a_{2\mu\sigma(2)}\cdots a_{n\mu\sigma(n)}$.

Mas, quando σ percorre todos os elementos de S_n, $\mu\sigma$ também percorre todos os elementos de S_n; logo det(B) = - det(A).
(b) Se a j-ésima linha de A é multiplicada por β, então todo termo de det(A) é multiplicado por β e assim det(B) = β det(A). Isto é,
$det(B) = \sum_\sigma(sg\sigma)a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots(\beta a_{ji_j})\cdots a_{ni_n} = \beta\sum_\sigma(sn\sigma)a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} = \beta det(A)$.
(c) Suponhamos que se some à j-ésima linha de A c vezes a k-ésima linha.
$detB = \sum_\sigma(sn\sigma)a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots(ca_{ki_k}+a_{ji_j})\cdots a_{ni_n} = c\sum_\sigma(sn\sigma)a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ki_k}\cdots a_{ni_n}+ \sum_\sigma(sn\sigma)a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ji_j}\cdots a_{ni_n}$.

A primeira soma é o determinante de uma matriz cujas k-ésima e j-ésima linhas são idênticas, logo, pela propriedade P_2, a soma é zero. A segunda soma é o determinante de A. Assim $det(B) = c\cdot 0 + det(A) = det(A)$. ■

Proposição 3.14. *Se B é equivalente por linhas a uma matriz quadrada A, então det(B) = 0 se, e somente se, det(A) = 0.*

Demonstração: Pelo Teorema 3.13, o efeito de uma operação por linhas é mudar o sinal do determinante ou multiplicar o determinante por um escalar não nulo. Portanto, det(B) = 0 se, e somente se, det(A) = 0. ■

Teorema 3.15. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então, as proposições seguintes são equivalentes:*
(i) A é invertível, isto é, A tem uma inversa A^{-1}.
(ii) AX = 0 tem apenas a solução zero.
(iii) O determinante de A não é zero, ou seja, det(A) $\neq$ 0.

Demonstração: A prova se faz pelo algoritmo Gaussiano. Se A é invertível, é equivalente por linhas a I. Mas $det(I) \neq 0$; logo, pela proposição 3.14, $det(A) \neq 0$. Se A não é invertível, é equivalente por linhas a uma matriz com uma linha zero; logo, $det(A) = 0$. Assim (i) e (iii) se equivalem.

Se $AX = 0$ tem apenas a solução $X = 0$, então A é equivalente por linhas a I e A é invertível. Reciprocamente, se A é invertível com inversa A^{-1}, então

$$X = IX = (A_{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}0 = 0$$

é a única solução de $AX = 0$. Assim, (i) e (ii) são equivalentes. ■

3.3 Cofator

Definição 3.16. *Chama-se cofator do elemento a_{ij} da matriz A, o número real Δ_{ij}. A submatriz A_{ij} de ordem $n-1$ é uma matriz obtida de A pela supressão da linha i-ésima e da coluna j-ésina, multiplicado por $(-1)^{i+j}$. Dessa forma o cofator de a_{ij} é dado por:*

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij}).$$

Exemplo 3.17. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Assim, $A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ e $det(A_{12}) = 8 - 42 = -34$,

$A_{23} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ e $det(A_{23}) = 3 + 7 = 21$ e

$A_{31} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $det(A_{31}) = -6 - 10 = -16$,

Além disso,

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} det(A_{12}) = (-1)(-34) = 34,$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3} det(A_{23}) = (-1)(10) = -10,$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} det(A_{31}) = (1)(-16) = -16.$$

Se imaginarmos o sinal $(-1)^{i+j}$ como estando na posição (i, j) de uma matriz $n \times n$, então os sinais $+$ e - formam um quadro em que se alternam, partindo de $+$ na posição $(1, 1)$. Os quadros para $n = 3$ e $n = 4$ são os seguintes:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

Definição 3.18. *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n e seja A_{ij} o cofator do elemento a_{ij}. Chama-se adjunta de A a matriz transposta da matriz de cofatores de A:*

$$adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.19. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. Os cofatores dos nove elementos de A são:

$A_{11} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ e $det(A_{11}) = -18$;

$A_{21} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ e $det(A_{21}) = -11$;

$A_{31} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ e $det(A_{31}) = -10$;

$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ e $det(A_{12}) = 2$;

$A_{22} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ e $det(A_{22}) = 14$;

$A_{32} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $det(A_{32}) = -4$;

$A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $det(A_{13}) = 4$;

$A_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $det(A_{23}) = 5$;

$A_{33} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ e $det(A_{33}) = -8$.

A transposta da matriz de cofatores é a adjunta de A:

$$adjA = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.20. *O determinante da matriz $A = (a_{ij})$ é igual à soma dos produtos obtidos pela multiplicação dos elementos de qualquer linha (coluna) por seus respectivos cofatores:*

$$det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (1)$$

$$det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (2)$$

Demonstração: Demonstraremos o caso (1). O caso (2) demonstra-se de modo análogo.

Cada termo em $det(A)$ contém um e um só elemento da i-ésima linha $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ de A. Logo, podemos escrever $det(A)$ na forma

$det(A) = a_{i1}A^*_{i1} + a_{i2}A^*_{i2} + \cdots + a_{in}A^*_{in}$.

(Note que A^*_{ij} é uma soma de termos que não envolvem nenhum elemento da i-ésima linha de A.) Assim, o teorema estará demonstrado se mostrarmos que

$$A^*_{ij} = A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij}),$$

onde M_{ij} é a matriz obtida omitindo-se a linha e a coluna que contém A_{ij}. Historicamente a expressão A^*_{ij} foi definida como o cofator de a_{ij}: assim, o teorema reduz-se a mostrar a equivalência das duas definições de cofator.)

Consideremos primeiro o caso em que $i = n$, $j = n$. Então, a soma dos termos de $det(A)$ que contém a_{nn} é

$$a_{nn}A^*_{nn} = a_{nn} \sum_{\sigma} (sn\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n-1,\sigma(n-1)}$$

onde a soma estende-se por todas as permutações $\sigma \neq S_n$ para os quais $\sigma(n) = n$. Todavia, isto é, equivalente a somar sobre todas as permutações de $[1, \cdots, n-1]$. Assim, $A^*_{nn} = det(M_{nn}) = (-1)^{n+n} det(M_{nn})$.

Consideremos agora i e j quaisquer. Permutamos a i-ésima linha com cada linha sucessiva até a última, e permutamos a j-ésima coluna com cada coluna sucessiva até a última. Note-se que o determinante $det(M_{ij})$ não é afetado, porque as posições relativas das outras linhas e colunas não são afetadas por essas permutas. Entretanto, o "sinal"de $det(A)$ e de A^*_{ij} é mudado $n-1$ e $n+1$ vezes. Consequentemente,

$$A^*_{ij} = (-1)^{n-i+n-j} det(M_{ij}) = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

.

■

Teorema 3.21. *Sejam $A = (a_{ij})$ e B a matriz de A subtraindo-se a i-ésima linha de A pelo vetor linha $(b_{i1}, \cdots, b_{in})$. Então, $det(B) = b_{i1}A_{i1} + b_{i2}A_{i2} + \cdots + b_{in}A_{in}$.*

Além disso, para $j \neq i$,

$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0$ *e* $a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \cdots + a_{nj}A_{ni} = 0$.

Demonstração: Seja $B = (b_{ij})$. Pelo Teorema 3.20

$$det(B) = b_{i1}B_{i1} + b_{i2}B_{i2} + \cdots + b_{in}B_{in}$$

Como B_{ij} não depende da i-ésima linha de B, $b_{ij} = a_{ij}$ para $j = 1, \cdots, n$. Logo, $det(B) = b_{i1}A_{i1} + b_{i2}A_{i2} + \cdots + b_{in}A_{in}$.

Suponhamos agora A' obtida de A pela substituição da i-ésima linha pela j-ésima coluna de A. Como A' tem duas linhas idênticas, $det(A') = 0$. Assim, pelo resultado acima,

$det(A') = a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + b_{jn}A_{in} = 0$ Usando $det(A') = det(A)$, obtemos também $a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \cdots + b_{nj}A_{ni} = 0$ ■

3.4 Obtenção da Matriz Inversa por Determinante

Teorema 3.22. *Para qualquer matriz quadrada A, $A \cdot (adjA) = (adjA) \cdot A = det(A) \cdot I$ onde I é a matriz identidade. Assim se $det(A) \neq 0$,*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adjA.$$

Demonstração: Sejam $A = (a_{ij})$ e $A \cdot (adjA) = (b_{ij})$. A i-ésima linha de A é

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \quad (1)$$

Como $adjA$ é a transposta da matriz dos cofatores, a j-ésima coluna da $adjA$ é a transposta dos cofatores da j-ésima linha de A: Isto é,

$$(A_{j1}, A_{j2}, \cdots, A_{jn})^T \quad (2)$$

Mas b_{ij}, o elemento de ordem ij em $A \cdot (adjA)$, obtém-se multiplicando (1) e (2):

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$$

Pelo Teorema 3.20 e Teorema 3.21,

$$b_{ij} = \begin{cases} det(A) & se \;\; i = j \\ 0 & se \;\; i \neq j \end{cases}$$

Consequentemente, $A \cdot (adjA)$ é a matriz diagonal em cada elemento diagonal $det(A)$. Em outras palavras, $A \cdot (adjA) = AI$. Analogamente, $(adjA) \cdot A = det(A)I$. Logo,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adjA.$$

■

Exemplo 3.23. Considere a matriz do Exemplo 3.19 para a qual $det(A) = -46$. Temos:

$$A(adjA) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -46 & 0 & 0 \\ 0 & -46 & 0 \\ 0 & 0 & -46 \end{bmatrix} =$$

$$-46 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -46I = det(A)I$$

Além disso, pelo Teorema 3.22,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adjA = \begin{bmatrix} \frac{-18}{(-46)} & \frac{-11}{(-46)} & \frac{-10}{(-46)} \\ \frac{2}{(-46)} & \frac{14}{(-46)} & \frac{-4}{(-46)} \\ \frac{4}{(-46)} & \frac{5}{-46} & \frac{-8}{(-46)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{23} & \frac{11}{46} & \frac{5}{23} \\ \frac{-1}{23} & \frac{-7}{23} & \frac{2}{23} \\ \frac{-2}{23} & \frac{-5}{46} & \frac{4}{23} \end{bmatrix}$$

3.5 Aplicação de Determinantes em Sistemas Lineares - Regra de Cramer

Nesta seção veremos um teorema que fornece uma fórmula para a solução de certos sistemas de n equações e n incógnitas. Essa fórmula, conhecida como *Regra de Cramer*, é de interesse para fins computacionais, mas é útil para estudar as propriedades matemáticas de uma solução sem precisar resolver o sistema.

Consideremos um sistema de n equações lineares e n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad = \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$Ax = b$$

Temos que, $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^t$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix}^t$ e (a_{ij}) é a matriz (quadrada) de coeficientes.

Seja A_i a matriz obtida de A substituindo-se a i-ésima coluna de A pelo vetor coluna B. Seja $D = det(A)$ e $N_i = det(A_i)$, para $i = 1, 2, \cdots, n$. Segue a relação fundamental entre determinantes e a solução do sistema acima.

Teorema 3.24. *O sistema acima tem solução única se, e somente se, $D \neq 0$. Em tal caso, a solução (única) é dada por*

$$x_1 = \frac{N_1}{D}, \quad x_2 = \frac{N_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{N_n}{D}.$$

Demonstração: Pelos resultados anteriores, $Ax = b$ tem solução única se e somente se A é invertível, e A é invertível se e somente se $D = det(A) \neq 0$.

Seja $D \neq 0$. Pelo Teorema 3.22, $A^{-1} = (\frac{1}{D})(adjA)$. Multiplicando $Ax = b$ por A^{-1} obtemos

$x = A^{-1}Ax = (\frac{1}{D})(adjA)b \quad (1)$

Note-se que a i-ésima linha de $(\frac{1}{D})(adjA)$ é $(\frac{1}{D})(A_{1i}, A_{2i}, \cdots, A_{ni})$.

Se $b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^t$ então, por (1),

$x_i = (\frac{1}{D})(b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \cdots + b_nA_{ni})$

Entretanto, tal como no Teorema 3.22, $b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \cdots + b_nA_{ni} = N_i$, o determinante da matriz obtida substituindo a i-ésima coluna de A pelo vetor b. Assim, $x_i = (\frac{1}{D})N_i$. ■

O Teorema 3.24 é conhecido como "regra de Cramer"para resolução de sistemas de equações lineares. Observamos que o teorema se refere apenas a um sistema com o mesmo número de equações e de incógnitas, e que só dá a solução quando $D \neq 0$.

Exemplo 3.25. Resolva, utilizando determinantes: $\begin{cases} 2x+3y+3z=18 \\ 3x+2y+5z=23 \\ 5x+4y+2z=27 \end{cases}$.

Calcule primeiro o determinante D da matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $D = 31$.

Como $D \neq 0$, o sistema tem solução única. Para calcular N_x, N_y, N_z, substitua os coeficientes de x, y, z na matriz de coeficientes pelos termos constantes:

$A_x = \begin{bmatrix} 18 & 3 & 3 \\ 23 & 2 & 5 \\ 27 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $N_x = 93$.

$A_y = \begin{bmatrix} 2 & 18 & 3 \\ 3 & 23 & 5 \\ 5 & 27 & 2 \end{bmatrix}$ e $N_y = 62$.

$A_z = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 18 \\ 3 & 2 & 23 \\ 5 & 4 & 27 \end{bmatrix}$ e $N_z = 62$.

Assim, a solução única é $x = \dfrac{N_x}{D} = \dfrac{93}{31} = 3$, $y = \dfrac{N_y}{D} = \dfrac{62}{31} = 2$ e $z = \dfrac{N_z}{D} = \dfrac{62}{31} = 2$.

4 Aplicações Envolvendo Matrizes, Determinante e Sistemas Lineares

Neste capítulo mostraremos algumas aplicações da Álgebra Linear envolvendo Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares, que são utilizadas na Engenharia, na Química, na Física, na Economia, na utilização do GPS, entre outros.

4.1 Circuitos Elétricos

Nesta sessão, apresentamos a aplicação de Sistemas Lineares na Física, para calcular corrente elétrica. Para isso usaremos os conceitos e resultados do Capítulo 2. As principais referências utilizadas para o desenvolvimento desta seção foram [1], [3], [5] e [7].

4.1.1 Breve Introdução aos Circuitos Elétricos

Inicialmente apresentamos alguns conceitos relacionados a circuitos elétricos.

Um circuito elétrico é constituído por um (ou mais) gerador, fios condutores e um (ou mais) resistor.

Definição 4.1. *O Gerador é o aparelho que fornece energia (ver Figura 4.1). Exemplo: pilhas, baterias.*

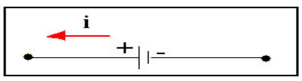

Figura 4.1: Representação de um gerador

Definição 4.2. *O Resistor pode ser usado para controlar a corrente elétrica em um circuito ou para transformar energia elétrica em energia térmica (calor) (ver Figura 4.2).*

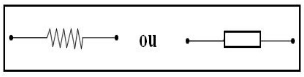

Figura 4.2: Representação de um resistor

Associação de Resistores: Podemos associar os resistores em série, em paralelo ou mista (combinação de associação em série e em paralelo).

Definição 4.3. *(Associação em série) Os resistores estão ligados um após o outro, de modo que a corrente elétrica é a mesma e a tensão é dividida proporcionalmente.*

Definição 4.4. *(Associação em paralelo) Nessa ligação todos os elementos se encontram paralelo com a fonte de energia, a tensão é a mesma em todos os pontos do circuito e a corrente se alterna de acordo com a resistência.*

4.1.2 Leis de Kirchhoff e Lei de Ohm

Uma série de leis se aplicam em circuitos elétricos. Destacaremos aqui duas delas: as Leis de Kirchhoff e a Lei de Ohm.

Em um circuito elétrico completo, onde não é possível substituir ramificações por trechos equivalentes (circuito multimalhas), devem ser usadas equações específicas, conhecidas como as Leis de Kirchhoff. Essas leis são utilizadas para determinar a intensidade da corrente elétrica em cada parte do circuito. Vamos caracterizar as componentes de um circuito multimalhas:

1) Nó é um ponto onde três (ou mais) condutores estão ligados.

2) Malha é um trecho entre dois nós.

3) Ramo é qualquer caminho de condutor fechado.

Leis de Kirchhoff:

A1) Em cada nó, a soma das correntes de dentro é igual à soma das correntes de fora do nó.

A2) Em um ciclo fechado, a diferença de potencial total é igual a zero.

Ao se usar as Leis de Kirchhoff na resolução de circuitos elétricos, obtém-se um sistema de equações lineares.

Lei de Ohm:

A lei de Ohm foi descoberta pelo físico Georg Simon Ohm, que relaciona três grandezas elétricas:

1) V=tensão elétrica, unidade Volt (V é a letra que representa a unidade).

2) I=corrente elétrica, unidade ampère (A é a letra que representa a unidade).

3) R=resistência elétrica, unidade ohm (Ω é a letra grega que representa a unidade).

A fórmula da Lei de Ohm é:

$$V = I \times R.$$

Exemplo 4.5. Vamos utilizar sistemas lineares para determinar as correntes elétricas i_1, i_2 e i_3 do circuito elétrico, representado na Figura 4.3.

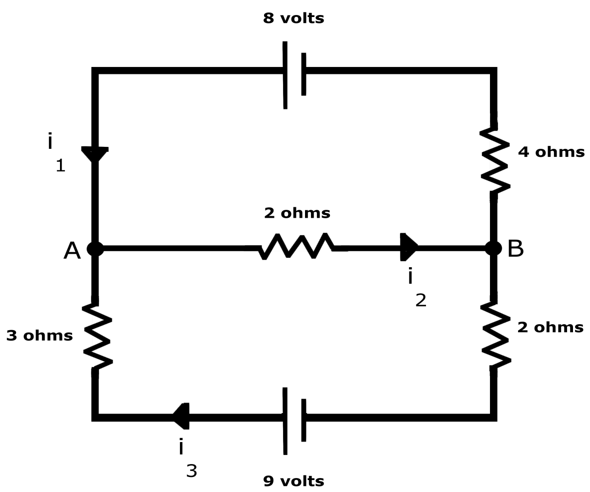

Figura 4.3: Circuito elétrico.

Da primeira Lei de Kirchhoff obtemos:

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0$$
$$-i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

Da Segunda Lei de Kirchhoff obtemos:

$$4i_1 + 2i_2 = 8$$
$$2i_2 + 5i_3 = 9$$

Com isso, formamos o sistema linear:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ -i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ 4i_1 + 2i_2 = 8 \\ 2i_2 + 5i_3 = 9 \end{cases} \tag{4.1}$$

Escalonando esse sistema, obtemos:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ -6i_2 + 4i_3 = -8 \\ 19i_3 = 19 \end{cases} \tag{4.2}$$

Assim, vemos que $i_1 = 1A, i_2 = 2A$ e $i_3 = 1A$.

Exemplo 4.6. Vamos determinar as correntes elétricas i_1, i_2 e i_3 no circuito elétrico abaixo:

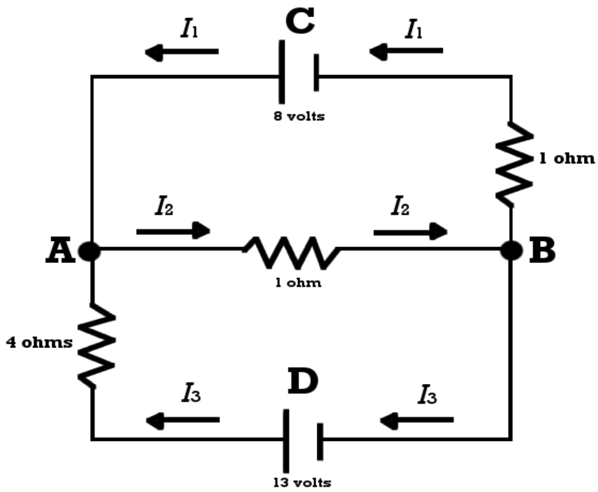

Figura 4.4: Circuito elétrico.

Da primeira Lei de Kirchhoff temos:

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0$$
$$-i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

Da Segunda Lei de Kirchhoff obtemos:

$$i_1 + i_2 = 8$$
$$i_2 + 4i_3 = 13$$

Com isso, formamos o sistema linear:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ -i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ i_1 + i_2 = 8 \\ i_2 + 4i_3 = 13 \end{cases} \tag{4.3}$$

Escalonando esse sistema, obtemos:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ i_2 + 4i_3 = 13 \\ 9i_3 = 18 \end{cases} \tag{4.4}$$

Assim, vemos que $i_1 = 3A, i_2 = 5A$ e $i_3 = 2A$.

4.2 Modelos Econômicos de Leontief

Nesta seção, vamos abordar os Modelos Econômicos do economista Russo Wassily Leontief, que em 1973 ganhou o Prêmio Nobel pelo seu trabalho em modelagem econômica, onde utiliza métodos matriciais para estudar as relações em diferentes setores da economia. A principal referência utilizada para o desenvolvimento desta seção foi [3].

4.2.1 O Modelo Fechado (de input-output) de Leontief

Esse modelo é constituído de um número finito de n indústrias e cada indústria produz uma quantidade fixa de um produto ou serviço que é usado pelas n indústrias. O objetivo desse modelo é determinar um preço para cada produto de tal forma que o total de gastos se iguala ao total recebido. Tal estrutura de preços representa um equilíbrio para a economia.

Exemplo 4.7. Três proprietários de casas, um pedreiro, um serralheiro e um pintor, pretendem fazer concertos em suas casas. Eles concordam em trabalhar um total de dez dias cada, de acordo com a tabela dada.

	Pedreiro	Serralheiro	Pintor
Casa do Pedreiro	5	4	2
Casa do Serralheiro	3	4	2
Casa do Pintor	2	2	6

Os trabalhadores precisam declarar e pagar um ao outro um salário diário. Seus salários diários, são aproximadamente de R$100,00, mas eles concordam em ajustar esses salários de modo que o total pago por cada um seja igual ao total recebido. Vamos determinar o salário de cada um.

Chamaremos de x_1 o salário do pedreiro, de x_2 o salário do serralheiro e de x_3 o salário do pintor. Para satisfazer a condição de equilíbrio, em que o total gasto seja igual ao total recebido para cada um dos proprietários no período de dez dias, temos:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10x_1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 10x_3 \end{cases} \sim \begin{cases} -5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

Fazendo $L_2 = 3L_1 + 5L_2$, temos:

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0x_1 - 18x_2 + 16x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Fazendo $L_3 = 2L_1 + 5L_3$, temos:

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0x_1 - 18x_2 + 16x_3 = 0 \\ 0x_1 + 18x_2 - 16x_3 = 0 \end{cases}$$

Fazendo $L_3 = L_3 + L_2$, temos:

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0x_1 - 18x_2 + 16x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 - 0x_3 = 0 \end{cases}$$

Chamando $x_3 = \beta$, temos que $x_2 = \frac{8\beta}{9}$ e $x_1 = \frac{10\beta}{9}$, onde β pode ser um valor qualquer real.

Note que o sistema de equações tem infinitas soluções dadas por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

onde t é uma constante qualquer em que os proprietários podem escolher de acordo com sua conveniência. Nesse exemplo como o salário de cada um é aproximadamente R\$100,00, então escolhe-se $t = 10$. Então o salário do pedreiro será de R\$100,00, o salário do serralheiro será de R\$80,00 e o salário do pintor será de R\$90,00.

4.2.2 O Modelo Aberto (de produção) de Leontief

Ao contrário do modelo fechado, em que os produtos das n indústrias são distribuídos somente entre as próprias indústrias, o modelo aberto tenta satisfazer uma demanda externa para os produtos. Uma parte dessa produção pode ser distribuída entre as próprias indústrias, mas deve haver algum excesso para satisfazer a demanda externa.

Nesse modelo, os preços é que são fixados e o objetivo é determinar os níveis de produção das indústrias para satisfazer a demanda externa.

Para um melhor entendimento do próximo exemplo apresentamos algumas considerações sobre o modelo aberto de Leontief.

Vamos denotar por:
x: um vetor-produção
x_i: valor monetário da produção total da i-ésima indústria
$d = [d_i]$: o vetor-demanda
d_i: valor necessário para a i-ésima indústria satisfazer a demanda externa
$C = [c_{ij}]$: a matriz de consumo quadrada
c_{ij}: valor monetário da produção da i-ésima indústria que é necessária para a j-ésima indústria produzir uma unidade do valor monetário de seu próprio produto.

O vetor Cx é denominado vetor demanda intermediária da economia. Uma vez atendida a demanda intermediária, a porção da produção que resta para satisfazer as necessidades da demanda externa é $x - Cx$. Assim, se o vetor demanda externa for d, então x deve satisfazer a equação:

$$\begin{aligned} x - Cx = d \Rightarrow \\ \Rightarrow (I - C)x = d \end{aligned} \tag{4.6}$$

A matriz $I - C$ é denominada matriz de Leontief e (4.6) é denominada equação de Leontief.

Exemplo 4.8. Duas oficinas de concerto de veículos, uma que trata da parte mecânica (M) e outra de lataria (L), utilizam uma os serviços da outra. Para cada $R\$$ 1,00 de negócios que M faz, M utiliza $R\$$ 0,50 de seus próprios serviços e $R\$$ 0,25 dos serviços de L e, para cada $R\$$ 1,00 de negócios que L faz, L utiliza $R\$$ 0,10 de seus próprios serviços e $R\$$ 0,25 dos serviços de M.

(a) Construa uma matriz de consumo para essa economia.

(b) Quais valores de M e L devem ser produzidos para essa economia gerar negócios de $R\$$ 7.000,00 de serviços mecânicos e $R\$$ 14.000,00 de serviços de lataria?

Resolução:
(a) A matriz consumo será

$$C = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,1 \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

(b) A matriz $I - C$ será

$$I - C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,25 \\ -0,25 & 0,9 \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Para calcular os valores de M e L que devem ser produzidos para essa economia gerar uma demanda de $R\$$ 7.000,00 de serviços mecânicos e $R\$$ 14.000,00 de serviços de lataria, utilizamos $(I - C)x = d$, onde x_1 representa M e x_2 representa L, isto é,

$$\begin{bmatrix} 0,5 & -0,25 \\ -0,25 & 0,9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7000 \\ 14000 \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Resolvendo o sistema abaixo

$$\begin{cases} 0,5x_1 - 0,25x_2 = 7000 \\ -0,25x_1 + 0,9x_2 = 14000 \end{cases} \tag{4.10}$$

obtemos $x_1 = 12.645$ e $x_2 = 22.581$. Então, M= $R\$12645{,}00$ e L= $R\$22581{,}00$.

4.3 Aplicações em Química

Nesta seção apresentamos uma aplicação de sistemas lineares dentro da Química, mais especificamente em balanceamento químico. As principais referências para o desenvolvimento desta seção foram [3] e [4].

4.3.1 Balanceamento de Equações Químicas

Um composto químico é representado simbolicamente por sua fórmula química. Por exemplo, a água é representada por H_2O (2 átomos de hidrogênio para cada átomo de oxigênio).

As equações químicas mostram as transformações que ocorrem durante as reações químicas. Por exemplo, a equação

$$Zn + S \rightarrow ZnS$$

descreve uma reação na qual o zinco (Zn) reage com o enxofre (S) para produzir o sulfeto de zinco (ZnS).

As substâncias do lado esquerdo da seta são os reagentes e as substâncias do lado direito da seta, os produtos. Uma equação está balanceada quando contém o mesmo número de átomos de cada elemento em ambos os lados da seta.

Exemplo 4.9. A equação

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

está balanceada, indicando que dois mols de moléculas de hidrogênio se combinam com um mol de molécula de oxigênio para formar dois mols moléculas de água.

Para balancear uma equação escrevemos primeiro a equação não balanceada e depois ajustamos os coeficientes estequiométricos que precedem as fórmulas. Podemos balancear as equações químicas mais simples por inspeção, por tentativa e erro. Para isso examinamos a equação e ajustamos os coeficientes até que números iguais de cada elemento estejam presentes nos reagentes e produtos.

O processo de balanceamento de equações químicas na verdade envolve a resolução de um sistema de equações lineares homogêneo, e assim podemos evitar muitas tentativas e erros.

Exemplo 4.10. A combustão de amônia (NH_3) em oxigênio produz nitrogênio (N_2) e água (H_2O). Vamos encontrar uma equação química balanceada para essa reação.

Primeiro escrevemos a equação e colocamos incógnitas nos coeficientes para realizarmos o balanceamento.

$$xNH_3 + yO_2 \to wN_2 + zH_2O$$

Comparando o número de átomos de nitrogênio, hidrogênio e oxigênio nos reagentes e nos produtos, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\text{Nitrogênio: } x = 2w$$
$$\text{Hidrogênio: } 3x = 2z$$
$$\text{Oxigênio: } 2y = z$$

Reescrevendo o sistema teremos:

$$\begin{cases} x - 2w = 0 \\ 3x - 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

Esse é um sistema onde o número de incógnitas é maior que o número de equações, então ele tem infinitas soluções. Chamando $z = \beta$, teremos que $y = \frac{\beta}{2}$, $x = \frac{2\beta}{3}$ e $w = \frac{\beta}{3}$.

Precisamos achar a menor solução inteira para a equação ficar balanceada, para isso calculamos o mínimo múltiplo comum entre os denominadores, nesse caso, 6, então $\beta = 6$. Assim, chegaremos que $x = 4, y = 3, w = 2$ e $z = 6$.

A equação balanceada ficará assim:

$$4NH_3 + 3O_2 \to 2N_2 + 6H_2O$$

Exemplo 4.11. Vamos descrever a equação equilibrada para a reação química abaixo:

$$C_3H_8 + O_2 \to CO_2 + H_2O$$

Sejam x, y, z e w inteiros positivos que equilibram a equação

$$xC_3H_8 + yO_2 \to zCO_2 + wH_2O$$

Igualando o número de átomos de cada tipo de ambos os lados, resulta

$$\text{Hidrogênio: } 8x = 2w$$
$$\text{Carbono: } 3x = z$$
$$\text{Oxigênio: } 2y = 2z + w,$$

e obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 8x + 0y + 0z - 2w = 0 \\ 3x + 0y - z + 0w = 0 \\ 0x + 2y - 2z - w = 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

Escalonando esse sistema obtemos:

$$\begin{cases} 8x + 0y + 0z - 2w = 0 \\ 0x + 2y - 2z - w = 0 \\ 0x + 0y + 8z - 6w = 0, \end{cases} \tag{4.13}$$

donde obtemos que $z = \frac{3w}{4}$, $y = \frac{5w}{4}$ e $x = \frac{w}{4}$. Então a solução geral desse sistema é $(\frac{w}{4}, \frac{5w}{4}, \frac{3w}{4}, w)$.

Para obtermos os menores valores inteiros positivos que equilibram a equação, calculamos o mínimo múltiplo comum entre os denominadores, nesse caso, 4. Então,

$$x = 1, y = 5, z = 3 \ \ e \ \ w = 4$$

A equação balanceada ficará

$$C_3H_8 + 5O_2 \rightarrow 3CO_2 + 4H_2O$$

4.4 Aplicação no Funcionamento do GPS

Uma das aplicações de Sistemas Lineares e Determinantes, junto com outras áreas da Matemática, é no funcionamento de um GPS, um aparelho muito usado nos dias atuais. As principais referências para o desenvolvimento desta seção foram [8] e [10].

Alguns fatos sobre o GPS

A humanidade tem desenvolvido sistemas cada vez mais complexos e precisos para determinar a localização exata de um indivíduo ou algo sobre a Terra. O sistema de Posicionamento Global GPS (Global Positioning System) foi terminado em Julho de 1995 pelo Departamento de Defesa dos EUA, e seu uso foi autorizado pelo público geral. O sistema consiste de uma parte espacial (os satélites), uma parte de controle (as estações terrestres de gerenciamento) e uma parte do usuário. Em 2005, o sistema consistia de 32 satélites, onde 24 deles estariam em funcionamento, e o restante ficavam prontos para entrar em ação em caso de falha. Os satélites estão posicionados a 20.200km da superfície da Terra, em seis planos orbitais.

Figura 4.5: Posições dos satélites e suas órbitas

Os satélites completam uma órbita a cada 12 horas e cada satélite tem 28° de visualização sobre a Terra. Isso garante que qualquer ponto da superfície terrestre, em qualquer instante, seja visualizado por pelo menos quatro satélites. Todos os vinte e quatro satélites são controlados pelas estações terrestres de gerenciamento. Existe uma "estação master", localizada no Colorado (Estados Unidos), que com o auxílio de cinco estações de gerenciamento espalhadas pelo planeta, monitoram o desempenho total do sistema, corrigindo as posições dos satélites e reprogramando o sistema com o padrão necessário. Após o processamento de todos esses dados, as correções e sinais de controle são transferidas de volta para os satélites.

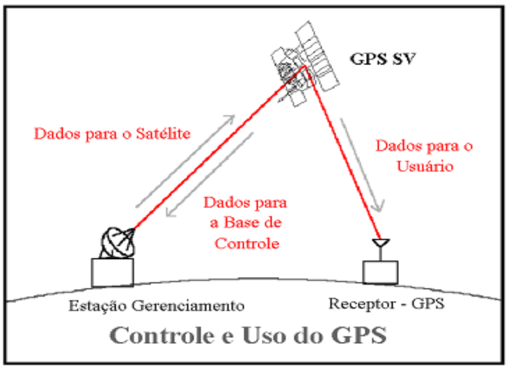

Figura 4.6: Esquema de transmissão do GPS.

Quando se adquire um GPS, na verdade se adquire um dispositivo (que chamamos de receptor) que recebe os sinais GPS e usa a informação neles para calcular sua localização. Cada um dos satélites do GPS transmite por rádio um padrão fixado que é recebido por um receptor na Terra (parte do usuário) funcionando como um cronômetro.

Cada satélite é programado para emitir o que se chama efeméride, que informa a sua posição exata, naquele instante, em relação a um sistema ortogonal de coordenadas. Esta posição é rastreada e conferida pelas estações terrestres de gerenciamento e a unidade receptora processa estes sinais. Com a posição do satélite e a distância calculada obtém-se a equação geral da superfície esférica imaginária. Coletando-se sinais emitidos por quatro satélites, o receptor determina a posição do usuário calculando-a como intersecção das quatro superfícies esféricas obtidas.

A localização é dada, não em coordenadas cartesianas, mas por meio das coordenadas geográficas (latitude, longitude) e a elevação. A precisão do tempo é essencial na operação do GPS. Um erro de um micro segundo (10^{-6} segundos) no registro do lapso de tempo desde a transmissão até a sua recepção, resulta num erro de 300 metros. Unidades receptoras do GPS extremamente precisas podem determinar sua posição a menos de um metro.

A navegação é a principal função do GPS, que pode ser usado em aeronaves, navios, veículos e por indivíduos que usam o receptor portátil.

A teoria por trás do GPS

Assumindo que os relógios do receptor e de todos os satélites estão perfeitamente sincronizados, o receptor calcula sua posição por triangulação.

O receptor mede o tempo (t_1) que leva para o sinal obtido pelo satélite P_1 chegar. O sinal viaja à velocidade da luz (v) e a distância (d_1) do receptor ao satélite é $d_1 = vt_1$. O conjunto de pontos situados à distância d_1 do satélite P_1 formam uma esfera S_1 de centro P_1 e raio d_1, então o receptor está em S_1. Consideremos tais pontos em um sistema de coordenadas cartesianas. Seja (x, y, z) a posição desconhecida do receptor e (x_1, y_1, z_1) a posição conhecida do satélite P_1. Então, (x, y, z) deve satisfazer a equação da esfera S_1:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = d_1^2 = v^2 t_1^2. \tag{4.14}$$

As informações acima ainda não são suficientes para determinar a posição precisa do receptor. O receptor grava, ainda, o sinal de outro satélite P_2 que leva um tempo t_2 e determina a distância do receptor ao satélite que é $d_2 = vt_2$. Como acima, o receptor deve estar na esfera S_2 de raio d_2, centrada em (x_2, y_2, z_2):

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = d_2^2 = v^2 t_2^2. \tag{4.15}$$

Como a intersecção de duas esferas é uma circunferência, reduziremos as informações, mas ainda não são suficientes para determinar uma posição exata do receptor nessa circunferência.

Para calcular essa posição exata, necessita capturar e processar o sinal recebido de um terceiro satélite P_3. O receptor mede o tempo t_3 para o sinal chegar e calcula sua distância $d_3 = vt_3$. O receptor está em alguma esfera S_3 de raio d_3 e centro (x_3, y_3, z_3):

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = d_3^2 = v^2 t_3^2. \tag{4.16}$$

Agora, o receptor estará na intersecção da circunferência e da esfera S_3. Sabemos que uma circunferência e uma esfera se interceptam em dois pontos, mas os satélites foram posicionados de forma que uma das soluções seja completamente irreal, estando bem longe da superfície da Terra.

Para determinar esses dois pontos, basta encontrar as duas soluções do sistema formado pelas equações (4.14), (4.15) e (4.16), e depois eliminando a solução irreal, o receptor determina sua posição precisa:

$$\begin{cases} (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=d_1^2 & =v^2t_1^2 \\ (x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2=d_2^2 & =v^2t_2^2 \\ (x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3)^2=d_3^2 & =v^2t_3^2 \end{cases}$$

O Sistema de equações acima é quadrático, não linear, vamos realizar operações elementares nele e transformá-lo em um sistema linear. Substituiremos a primeira linha pela subtração de (4.14) pela (4.16) e a segunda linha pela subtração de (4.15) pela (4.16), e manteremos a terceira linha, formando o sistema:

$$\begin{cases} 2(x_3-x_1)x+2(y_3-y_1)y+2(z_3-z_1)z=C_1 \\ 2(x_3-x_2)x+2(y_3-y_2)y+2(z_3-z_2)z=C_2 \\ \qquad (x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3)^2=d_3^2 \quad =v^2t_3^2 \end{cases}$$

onde,

$$C_1=v^2(t_1^2-t_3^2)+(x_3^2-x_1^2)+(y_3^2-y_1^2)+(z_3^2-z_1^2),$$
$$C_2=v^2(t_2^2-t_3^2)+(x_3^2-x_2^2)+(y_3^2-y_2^2)+(z_3^2-z_2^2).$$

Como os satélites foram posicionados de forma que nunca três satélites serão colineares, esta propriedade garante que pelo menos um dos determinantes 2×2 abaixo é diferente de zero.

$$\begin{vmatrix} (x_3-x_1) & (y_3-y_1) \\ (x_3-x_2) & (y_3-y_2) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} (x_3-x_1) & (z_3-z_1) \\ (x_3-x_2) & (z_3-z_2) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} (y_3-y_1) & (z_3-z_1) \\ (y_3-y_2) & (z_3-z_2) \end{vmatrix}.$$

Suponha que o primeiro determinante seja diferente de zero. Usando a regra de Cramer e as duas primeiras equações do sistema acima, teremos soluções para x e y em função de z.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} C_1-2(z_3-z_1)z & 2(y_3-y_1) \\ C_2-2(z_3-z_2)z & 2(y_3-y_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(x_3-x_1) & 2(y_3-y_1) \\ 2(x_3-x_2) & 2(y_3-y_2) \end{vmatrix}} \qquad e$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2(x_3-x_1) & C_1-2(z_3-z_1)z \\ 2(x_3-x_2) & C_2-2(z_3-z_2)z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(x_3-x_1) & 2(y_3-y_1) \\ 2(x_3-x_2) & 2(y_3-y_2) \end{vmatrix}}.$$

Substituindo esses dois valores na terceira equação do sistema acima, obteremos uma equação quadrática em z, a qual podemos resolver e encontrar duas soluções: z' e z''. Substituindo z pelos valores de z' e z'' nas duas equações acima encontraremos x', x'', y' e y''.

As coordenadas geográficas de um ponto do espaço.

Escolhendo os eixos de nosso sistema de coordenadas, a origem O será o centro da Terra, o eixo z positivo orientado na posição Norte; os eixos x e y ficam no plano equatorial, sendo o eixo x positivo passando pelo ponto de longitude 0°, e o eixo y positivo passando pelo ponto de longitude 90° oeste.

Dado um ponto $P = (x, y, z)$ do espaço, sejam θ e φ as medidas dos ângulos assinalados na Figura 4.7.

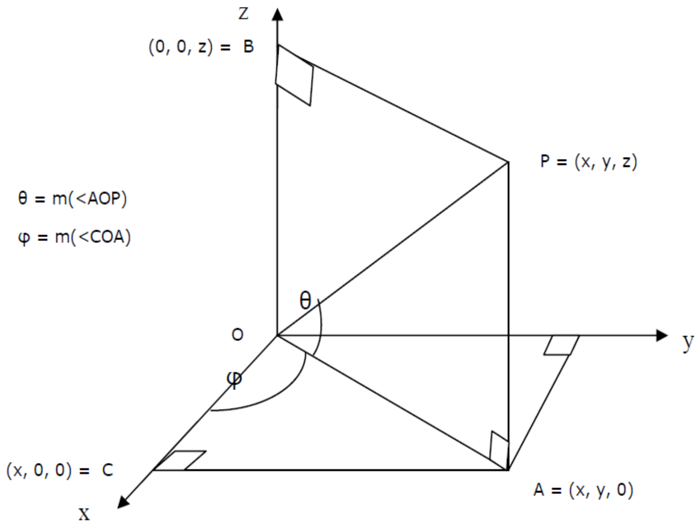

Figura 4.7: Coordenadas Cartesianas

O valor de θ corresponde à latitude do ponto P, o valor de φ corresponde à longitude do ponto P, e a diferença entre $OP = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e o raio da Terra é a altitude de P.

Como o raio da Terra é aproximadamente 6365km, uma solução (x, y, z) é considerada aceitável se $x^2 + y^2 + z^2 \approx (6365 \pm 50)^2$. A incerteza de 50km permite uma janela de altitude para montanhas e aviões.

A latitude, a longitude e a altitude são chamadas de **coordenadas gráficas** do ponto P. Vejamos como relacioná-las com as coordenadas cartesianas de P.

No triângulo retângulo OPB da Figura 4.7, temos:

$cos(90 - \theta) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ e como $cos(90 - \theta) = sen\theta$, temos que:

$$sen\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Essa expressão atribui a θ um único valor entre 0 e 90 quando $z > 0$ e um único valor entre -90 e 0 quando $z < 0$.

Por outro lado, no triângulo retângulo OAC temos:

$$sen\varphi = \frac{AC}{OA} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad e \quad cos\varphi = \frac{OC}{OA} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Essas duas expressões definem um único φ entre 0 e 180 quando $y > 0$ e um único valor de φ entre -180 e 0 quando $y < 0$.

4.4.1 Uma Situação Real

O exemplo abaixo, extraído da referência [8], retrata uma situação real em que um usuário do GPS é detectado por quatro satélites. A tabela indica as efemérides (em metros) de cada satélite tomadas em relação ao nosso fixado sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

	x	y	z
Satélite 1	$1,877191188 \times 10^6$	$-1,064608026 \times 10^7$	$2,428036099 \times 10^7$
Satélite 2	$1,098145713 \times 10^7$	$-1,308719098 \times 10^7$	$2,036005484 \times 10^7$
Satélite 3	$2,459587359 \times 10^7$	$-4,336916128 \times 10^6$	$9,090267461 \times 10^6$
Satélite 4	$3,855818937 \times 10^6$	$7,251740720 \times 10^6$	$2,527733606 \times 10^7$

O receptor GPS registra os seguintes lapsos de tempo (em segundos) entre a transmissão e a recepção do sinal de cada satélite.

t_1 do Satélite 1	t_2 do Satélite 2	t_3 do Satélite 3	t_4 do Satélite 4
0,08251731391	0,07718558331	0,06890629029	0,07815826940

As informações transmitidas no sistema GPS envolvem dez ou mais dígitos, por uma questão de precisão. Por isso é indispensável a utilização de calculadoras ou software com capacidade de resolver sistemas lineares com coeficientes dessa ordem. Outra alternativa, é trabalhar com um número menor de dígitos e utilizar a notação científica, com isso abriremos mão da precisão.

Como citado anteriormente, o raio das esferas é o tempo multiplicado pela velocidade da luz que é de $2,99792458 \times 10^8 m/s$.

Escrevendo as equações reduzidas, temos:

$S_1 : (x - 1,8 \times 10^6)^2 + (y + 10,7 \times 10^6)^2 + (z - 24,2 \times 10^6)^2 = 611,9 \times 10^{12}$
$S_2 : (x - 10,9 \times 10^6)^2 + (y + 13,0 \times 10^6)^2 + (z - 20,3 \times 10^6)^2 = 535,4 \times 10^{12}$
$S_3 : (x - 24,5 \times 10^6)^2 + (y + 4,3 \times 10^6)^2 + (z - 9,0 \times 10^6)^2 = 426,7 \times 10^{12}$
$S_4 : (x - 3,8 \times 10^6)^2 + (y - 7,2 \times 10^6)^2 + (z - 25,2 \times 10^6)^2 = 549,0 \times 10^{12}$

Podemos utilizar operações elementares para substituir três dessas equações quadráticas por equações lineares.

Para isto, subtraímos a primeira equação de cada uma das três últimas, resultando em:

$$\begin{cases} (x-1,8\times 10^6)^2+(y+10,7\times 10^6)^2+(z-24,2\times 10^6)^2 = 611,9\times 10^{12} \\ 18,2x-4,88y-7,84z = 76,52\times 10^6 \\ 45,43x+12,61y-30,38z = 185,23\times 10^6 \\ 3,95x+35,79y+1,99z = 62,95\times 10^6 \end{cases}$$

No sistema acima, a regra de Cramer, aplicada às três últimas equações, permite-nos determinar os valores de x, y e z.

Considere as matrizes:

A= $\begin{bmatrix} 18,2 & -4,88 & -7,84 \\ 45,43 & 12,61 & -30,38 \\ 3,95 & 35,79 & 1,99 \end{bmatrix}$, $det(A) = 8915,49$.

$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 76,52\times 10^6 & -4,88 & -7,84 \\ 185,23\times 10^6 & 12,61 & -30,38 \\ 62,95\times 10^6 & 35,79 & 1,99 \end{bmatrix}$, $det(\Delta_1) = 50500,85\times 10^6$.

$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 18,2 & 76,52\times 10^6 & -7,84 \\ 45,43 & 185,23\times 10^6 & -30,38 \\ 3,95 & 62,95\times 10^6 & 1,99 \end{bmatrix}$, $det(\Delta_2) = 8729,62\times 10^6$.

$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 18,2 & -4,88 & 76,52\times 10^6 \\ 45,43 & 12,61 & 185,23\times 10^6 \\ 3,95 & 35,79 & 62,95\times 10^6 \end{bmatrix}$, $det(\Delta_3) = 24783,3\times 10^6$.

Então temos que:

$$x = \frac{det(\Delta_1)}{det(A)} = 0,566\times 10^7$$

$$y = \frac{det(\Delta_2)}{det(A)} = 0,0979\times 10^7$$

$$z = \frac{det(\Delta_3)}{det(A)} = 0,277\times 10^7$$

Com isso chegaremos a latitude $\theta = 26°$ Norte, longitude $\varphi = 10°$ Leste e altitude de 919,71 metros.

Consultando um atlas geográfico ou um globo terrestre, identificamos a posição desse usuário do GPS como sendo da cidade de Djanet, localizada nos Montes Tássali, na fronteira entre Argélia e Líbia.

5 Experiências no Ensino Médio

Neste capítulo abordaremos um plano de aula aplicado no Ensino Médio utilizando os conceitos de soma e multiplicação de matrizes. Abordaremos ainda algumas sugestões de problemas contextualizados para se trabalhar matrizes, sistemas lineares e determinantes, e alguns exercícios extraídos de vestibulares sobre esses assuntos, evidenciando a importância do aprendizado significativo desses conteúdos.

5.1 Plano de Aula

Nesta seção apresentaremos um plano de aula o qual foi aplicado por mim, em uma escola pública da rede estadual para uma turma de 22 alunos do segundo ano do Ensino Médio. Essa abordagem evidencia o aspecto motivacional ao trabalhar com matrizes, uma vez que os alunos estarão contextualizando a aprendizagem com situações reais de seu cotidiano.

Primeiramente foram apresentadas aos alunos as definições formais de matriz, matrizes especiais e operações envolvendo matrizes. Este conteúdo foi abordado no Capítulo 1 desta dissertação e o professor poderá usá-lo como referência. Foram utilizadas aproximadamente 3 aulas de 50 minutos. Percebeu-se que os alunos tiveram dificuldades em entender o processo de multiplicação de matrizes.

A principal pergunta feita pelos alunos foi sobre a aplicabilidade do conteúdo apresentado. Assim, para que os alunos pudessem contextualizar o tema, foi aplicado a cada um dos alunos a sequência de atividades apresentadas abaixo.

Questão 1-) As tabelas abaixo representam as vendas, em uma concessionária, de dois veículos 0km, modelos A e B, de acordo com o tipo de combustível, durante os dois primeiros meses de um ano:

Janeiro			
Combustível	Flex	Gasolina	Álcool
Modelo A	4453	1985	415
Modelo B	2693	1378	289

Fevereiro			
Combustível	Flex	Gasolina	Álcool
Modelo A	5893	2031	531
Modelo B	3412	1597	402

Determine, por meio de uma matriz, o total de vendas de cada tipo de veículo no primeiro bimestre desse ano.

Resolução: Espera-se que o aluno identifique que é um problema de soma de matrizes. Identificando a tabela de Janeiro como uma matriz M_1 e a tabela de fevereiro como uma matriz M_2, e efetuando a soma dessas duas matrizes:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 4453 & 1985 & 415 \\ 2693 & 1378 & 289 \end{bmatrix}$$

e

$$M_2 = \begin{bmatrix} 5893 & 2031 & 531 \\ 3412 & 1597 & 402 \end{bmatrix}$$

Fazendo $M_1 + M_2$, obteremos a resposta:

$$R = \begin{bmatrix} 10346 & 4016 & 946 \\ 6105 & 2975 & 691 \end{bmatrix},$$

onde, a primeira linha representa o modelo A, a segunda linha representa o modelo B, a primeira coluna representa Flex, a segunda coluna representa Gasolina e a terceira coluna representa Álcool.

Questão 2-) Durante as Olimpíadas, realizadas em Londres em 2012, o grupo C do futebol masculino era formado por quatro países: Brasil, Egito, Bielorrússia e Nova Zelândia. Observe os resultados (número de vitórias, empates e derrotas) de cada um, registrados na Tabela 5.1. Pelo regulamento das Olimpíadas, cada resultado (vitória, empate ou derrota) tem pontuação correspondente (3 pontos, 1 ponto e 0 ponto), que está registrado na Tabela 5.2. Determine o total de pontos dos países participantes por meio de uma matriz.

Tabela 5.1: Resultados

	Vitórias	Empates	Derrotas
Brasil	3	0	0
Egito	1	1	1
Bielorrússia	1	0	2
Nova Zelândia	0	1	2

Resolução: Espera-se que o aluno identifique que é um problema de multiplicação de matrizes. Identificando a Tabela 5.1 como uma matriz M_1 de ordem (4×3) e a

Tabela 5.2: Pontuação correspondente

	Número de pontos
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

Tabela 5.2 como uma matriz M_2 de ordem (3×1), e efetuamos a multiplicação entre essas duas matrizes:

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde a primeira linha representa os pontos do Brasil, a segunda linha os pontos do Egito, a terceira linha os pontos da Bielorrússia e a quarta linha os pontos da Nova Zelândia.

Questão 3-)(ENEM-2012) Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4×4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

	1º Bim	2º Bim	3º Bim	4º Bim
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por:

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Resolução: Da tabela extraímos uma matriz 4×4. Para calcularmos a média aritmética entre 4 notas, somamos as 4 e dividimos por 4, ou multiplicamos por $\frac{1}{4}$. Então ficaríamos entre as alternativas b e e. Pela definição de multiplicação de matrizes a multiplicação de uma matriz 4×4 tem que ser feita por uma matriz 4×1 e não 1×4. Portanto, a alternativa correta é a letra e.

Com essas atividades os alunos puderam aprimorar as habilidades relacionadas à adição e multiplicação de matrizes, uma vez que eles já tinham conhecimentos prévios sobre este conteúdo.

As Figuras 5.1, 5.2 e 5.3 são registros dos erros cometidos na primeira questão. Percebe-se que houve dificuldade em representar a resposta por meio de uma matriz, erro nos cálculos e o erro mais grave foi fazer a diferença entre as matrizes ao invés de somá-las. Dentre os 22 alunos, 16 acertaram completamente a questão e somente 1 aluno errou totalmente.

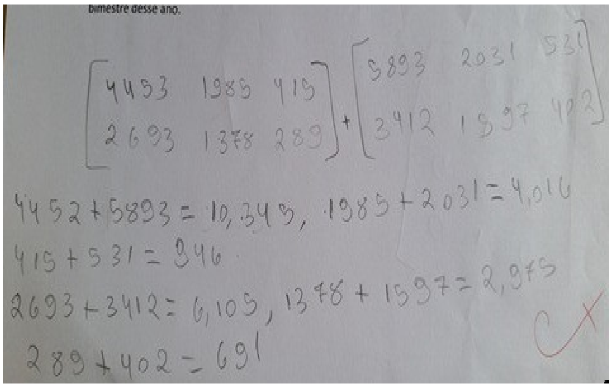

Figura 5.1: Erro cometido na Questão 1.

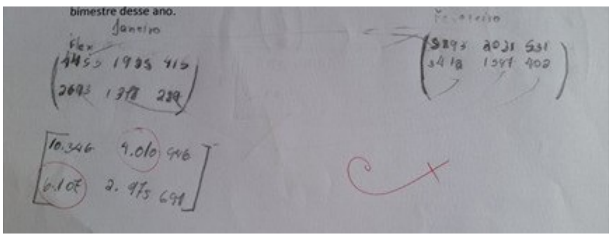

Figura 5.2: Erro cometido na Questão 1.

As Figuras 5.4, 5.5 e 5.6 são registros dos erros cometidos na segunda questão. Houve dificuldade no conceito de multiplicação de matrizes, alguns alunos erraram os cálculos ou não resolveram a questão, houve erro na representação da matriz resposta

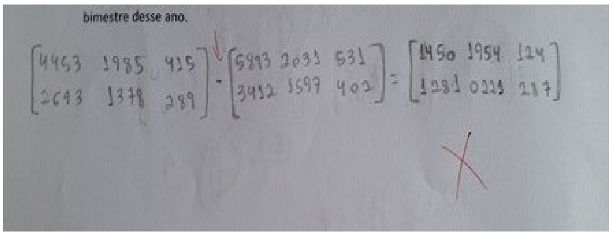

Figura 5.3: Erro cometido na Questão 1.

que deveria ser uma matriz 4×1 e não 1×4. Dentre os 22 alunos, 8 acertaram completamente a questão e 11 erraram completamente.

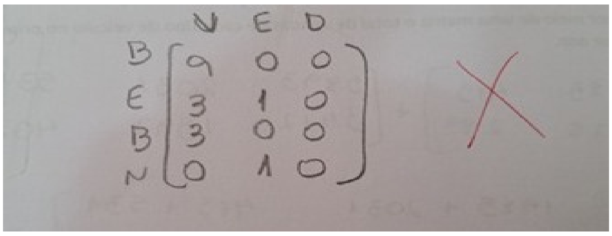

Figura 5.4: Erro cometido na Questão 2.

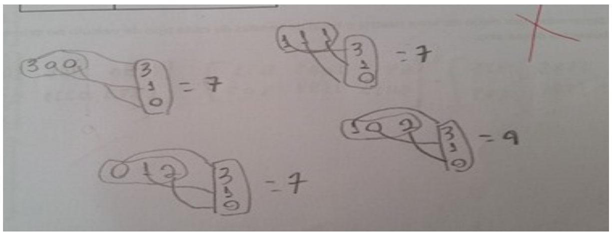

Figura 5.5: Erro cometido na Questão 2.

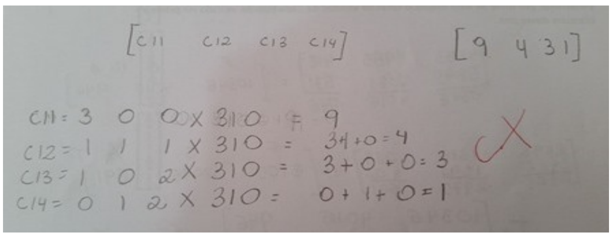

Figura 5.6: Erro cometido na Questão 2.

A Figura 5.7 é um registro dos erros cometidos na terceira questão. Apesar da observação colocada na folha de questões para deixar os cálculos registrados, nenhum aluno registrou os cálculos nesta questão. Dentre os 22 alunos, 12 acertaram completamente a questão e 10 erraram completamente.

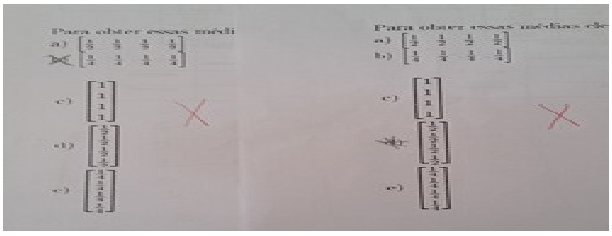

Figura 5.7: Erro cometido na Questão 3.

Apesar de 54,5% dos alunos terem assinalado a resposta correta, os dados da questão acima ainda são preocupantes, pois um total de 45,5% optou por outras alternativas.

A partir destas atividades pode-se concluir que os alunos apresentam dificuldades no que concerne ao produto entre matrizes.

Os alunos confundem o produto entre matrizes, porque muitos não analisam o número de linhas e colunas das matrizes – para verificar se há ou não possibilidade de resolver a operação – nem os artifícios para multiplicar os elementos das linhas e colunas (elementos da 1ª linha da matriz A com os elementos da 1ª coluna da matriz B, e assim sucessivamente).

Com relação a questão de múltipla escolha, como os alunos não deixaram o cálculo registrado, não é possível concluir que os 12 alunos que acertaram realmente sabiam resolver a questão, ou apenas tiveram sorte na escolha da alternativa. Com isso, optar por aplicar uma prova de múltipla escolha pode não ser uma boa alternativa para avaliar a aprendizagem dos alunos. A aprendizagem é um processo cognitivo, inerente ao ser humano, mas não observável diretamente. Para avaliá-la é necessário que se tenha visibilidade. Daí está a importância de realizar avaliações em que os alunos possam manifestar seus conhecimentos e habilidades para que seja possível avaliar de forma adequada a aprendizagem dos alunos.

Como conclusão geral das atividades apresentadas, constatou-se que os alunos apresentaram dificuldades no tema e para sanar as dúvidas foram dedicadas mais aulas no estudo de matrizes, abordando outros exemplos práticos.

É claro que, para que isso ocorra, o professor deve avaliar a realidade da sala de aula para que ele se certifique de qual seria a melhor decisão a ser tomada. Além disso, é necessário um estudo mais profundo no que concerne ao ensino de matrizes para que este se torne ainda mais agradável e eficaz.

A expectativa é que as atividades propostas e as demais aulas dedicadas à contextualização das operações de matrizes no cotidiano, tenham permitido ao aluno um melhor entendimento do assunto e tenham motivado o aluno a procurar e estudar outras aplicações relacionadas ao tema.

5.1.1 Sugestões de Exercícios Contextualizados

Nessa seção apresentaremos mais alguns exercícios (sequências didáticas) para aplicar em sala de aula, contextualizando o ensino de Matrizes.

Esse objeto de aprendizagem apresentado a seguir, foi retirado da referência [9] e adaptado. A situação foi desenvolvida tendo como contexto, situações que ocorrem dentro de um shopping center.

O aluno, na interação com o objeto, faz o papel de um cliente de determinada loja do shopping center. Criaram-se essa situação em que ocorre o estudo de produto de matrizes: um quiosque de venda de bombons.

A situação é descrita por uma vendedora que oferece três tipos de bombons e, que podem ser vendidos em quatro tipos de kits: um com quatro bombons, outro com seis, o terceiro com oito e o quarto com dez bombons.

A interação proposta para o estudo de produto de matrizes, nessa situação, é que o aluno é quem forma o kit desejado. O produto de matrizes ocorrerá por intermédio da tabela do tipo de kit de bombons versus espécies de bombons e, espécies de bombons versus valor e peso. A tabela espécies de bombons versus valor e peso será apresentada ao aluno, quando o mesmo tiver escolhido o kit.

O aluno escolherá um kit, tendo escolhido o kit, o mesmo tem a possibilidade de escolher entre três tipos de bombons (ao leite, branco e diet). Os kits não escolhidos serão preenchidos pelo aluno com a quantidade "zero" na tabela.

A tabela contendo espécies de bombons versus valor e peso é dada, então o aluno preenche a tabela do tipo de kit de bombons versus espécies de bombons, efetua a multiplicação das duas matrizes obtendo como resultado uma matriz contendo o tipo de kit de bombom versus valor e peso.

Em um exercício como esse, cada aluno terá uma construído uma tabela diferente, chegando em resultados diferentes.

Exemplo 5.1. Simulando a escolha de um aluno, teremos:

Kits	Ao Leite	Branco	Diet
Kit 1	5	0	1
Kit 2	0	2	1
Kit 3	1	0	1
Kit 4	0	1	1

A Tabela 5.3, espécies de bombons versus valor e peso, é dada no exercício:

Fazendo a multiplicação dessas matrizes, obteremos:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,00 & 25 \\ 1,50 & 20 \\ 2,00 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,00 & 140 \\ 5,00 & 55 \\ 3,00 & 40 \\ 3,50 & 35 \end{bmatrix}$$

Tabela 5.3: espécie de bombons versus valor e peso

Bombons	Valor por unidade	Peso por unidade
Ao Leite	R$1,00	25g
Branco	R$1,50	20g
Diet	R$2,00	15g

A tabela resposta desse problema seria:

Kits	Valor por unidade	Peso por unidade
Kit 1	R$7,00	140g
Kit 2	R$5,00	55g
Kit 3	R$3,00	40g
Kit 4	R$3,50	35g

Exemplo 5.2. Uma empresa especializada em calçados é formada por três lojas A, B e C. Realizado um estudo de vendas de três modelos de sapatos nos meses de Novembro e Dezembro de 2016 nessas lojas, foram obtidos os resultados representados nas seguintes tabelas:

Tabela 5.4: Vendas do mês de Novembro/2016

	Loja A	Loja B	Loja C
Modelo 1	100	98	105
Modelo 2	150	120	121
Modelo 3	89	93	99

Quanto cada loja vendeu de cada modelo nesses dois meses? Qual loja vendeu mais o modelo A? Qual loja vendeu mais o modelo B?

Resolução: As tabelas 5.4 e 5.5 podem ser representadas pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 98 & 105 \\ 150 & 120 & 121 \\ 89 & 93 & 99 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 130 & 110 & 133 \\ 148 & 120 & 100 \\ 100 & 80 & 100 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

Para se obter quanto cada loja vendeu de cada modelo nesses dois meses, faremos a soma dessas matrizes, obtendo a matriz resposta R.

$$R = A + B = \begin{bmatrix} 230 & 208 & 238 \\ 298 & 240 & 221 \\ 189 & 173 & 199 \end{bmatrix}.$$

Analisando a matriz R, vemos que a loja A vendeu mais o modelo 2 e a loja B vendeu mais os modelos 1 e 3.

Tabela 5.5: Vendas do mês de Dezembro/2016

	Loja A	Loja B	Loja C
Modelo 1	130	110	133
Modelo 2	148	120	100
Modelo 3	100	80	100

Exemplo 5.3. O Campeonato Brasileiro começou no dia 13 de Maio de 2017. A regra para classificação dos times é pela quantidade de pontos obtidos ao longo do campeonato. São três pontos a cada vitória, um ponto a cada empate e zero ponto a cada derrota. Na 11ª rodada, a tabela obtida é a Figura 5.8. Determine a pontuação dos quatro primeiros colocados no campeonato.


TABELA

CLASSIFICAÇÃO			P	J	V	E	D
1	Corinthians	0 ■		11	9	2	0
2	Grêmio	0 ■		11	7	1	3
3	Flamengo	0 ■		11	5	5	1
4	Palmeiras	0 ■		11	6	1	4

Figura 5.8: Classificação - 11a. rodada do Campeonato Brasileiro

Resolução: Extraindo uma matriz $A_{4\times 3}$ da tabela, sendo a primeira coluna o número de vitórias, a segunda coluna o número de empates e a terceira coluna o número de derrotas, temos: $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Obtendo a matriz $B_{3\times 1}$ da pontuação de cada jogo, temos, 3 pontos a cada vitória, 1 ponto a cada empate e 0 ponto a cada derrota, teremos: $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Para chegarmos na pontuação de cada time, precisamos multiplicar as matrizes $A_{4\times 3}$ por $B_{3\times 1}$:

$$AB = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 22 \\ 20 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Concluímos então que o primeiro colocado tem 29 pontos, o segundo colocado 22 pontos, o terceiro colocado 20 pontos e o quarto colocado 19 pontos.

Esse é um exercício de uma situação real, a tabela foi retirada do seguinte site com último acesso em 05 de Julho de 2017:

`http://globoesporte.globo.com/futebol/brasileirao-serie-a/`

5.2 Exercícios Extraídos de Vestibulares

Nesta seção apresentaremos exemplos de alguns exercícios envolvendo matrizes e sistemas lineares que foram cobrados em vestibulares.

Exemplo 5.4. (FUVEST) Dadas as matrizes:
1) $A = (a_{ij})_{4\times 7}$, definida por $a_{ij} = i - j$
2) $B = (b_{ij})_{7\times 9}$, definida por $b_{ij} = i$
3) $C = (c_{ij})$; $C = AB$
O elemento C_{63} é:
a) -112
b) -18
c) -9
d) 112
e) não existe
Resolução: Na multiplicação da matriz $A_{4\times 7}$ pela matriz $B_{7\times 9}$, obtemos uma matriz $C_{4\times 9}$, que é uma matriz de 4 linhas e 9 colunas. Portanto o elemento C_{63} não existe, pois seria um elemento da sexta linha, a qual não existe, logo a alternativa correta é a letra *e*.

Exemplo 5.5. (UFLA) Dadas as seguintes matrizes
A= $\begin{bmatrix} x+y & x-y \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.
Os valores de x e y, de modo que $A^2 = B$, são:
a) $x = 1$, $y = 0$
b) $x = 0$, $y = 1$
c) $x = y = 1$
d) $x = y = \frac{1}{2}$
e) $x = y = 0$
Resolução: Fazendo a multiplicação entre a matriz A pela própria matriz A acima, obtemos a matriz A^2 e igualando com a matriz B, temos:

$$\begin{bmatrix} x^2 + 2xy + y^2 + x - y & x^2 - y^2 + x - y \\ x + y + 1 & x - y + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Com isso, obtemos o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x+y+1=2 \\ x-y+1=1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, chegaremos em $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$, logo a alternativa correta é a letra d.

Exemplo 5.6. (ITA-2006) Em uma mesa de uma lanchonete, o consumo de 3 sanduíches, 7 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$31,50. Em outra mesa, o consumo de 4 sanduíches, 10 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$42,00. Então, o consumo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta totaliza o valor de:
a) R$17,50
b) R$16,50
c) R$12,50
d) R$10,50
e) R$9,50
Resolução: Chamando x de sanduíche, y de 1 xícara de café e z de 1 pedaço de torta, montamos o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} 3x+7y+z=31,50 & (I) \\ 4x+10y+z=42,00 & (II) \end{cases}$$

Fazendo a linha (I) multiplicada por 3 e a linha (II) multiplicada por 2, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 9x+21y+3z=94,50 & (III) \\ 8x+20y+2z=84,00 & (IV) \end{cases}$$

Subtraindo a linha (IV) da linha (III), obtemos:

$$x+y+z=10,50.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra d.

O próximo exemplo, é um exercício da matéria de química, o qual na resolução se usa Sistemas Lineares.

Exemplo 5.7. (FUVEST-2016) Uma dieta de emagrecimento atribui a cada alimento um certo número de pontos, que equivale ao valor calórico do alimento ao ser ingerido. Assim, por exemplo, as combinações abaixo somam, cada uma, 85 pontos:

* 4 colheres de arroz + 2 colheres de azeite + 1 fatia de queijo branco.
* 1 colher de arroz + 1 bife + 2 fatias de queijo branco.
* 4 colheres de arroz + 1 colher de bife + 2 fatias de queijo branco.

Note e adote:

	1 colher de arroz	1 colher de azeite	1 bife
Massa de alimento (g)	20	5	100
% de umidade + macronutriente minoritário + micronutrientes	75	0	60
% de macronutriente majoritário	25	100	40

São macronutrientes as proteínas, os carboidratos e os lipídeos.

* 4 colheres de arroz + 1 bife

Com base nas informações fornecidas, e na composição nutricional dos alimentos, considere as seguintes informações:

I. A pontuação de um bife de 100g é de 45.

II. O macronutriente presente em maior quantidade no arroz são os carboidratos.

III. Para uma mesma massa de lipídeo de origem vegetal e de carboidrato, $\dfrac{\text{número de pontos do lipídeo}}{\text{número de pontos do carboidrato}}$ é 1,5.

É correto o que se afirma em

a) I, apenas.

b) II, apenas.

c) I e II, apenas.

d) II e III, apenas.

e) I, II e III.

Resolução: Para resolver esse exercício, precisamos encontrar a pontuação de cada alimento. Chamamos de x: 20 g de arroz; y: 5 g de azeite; z: 1 fatia de queijo e w: 1 bife. E sabendo que as combinações citadas somam 85 pontos, formamos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 85 \\ x + w + 2z = 85 \\ 4x + y + 2z = 85 \\ 4x + w = 85 \end{cases}$$

Da relação entre a primeira linha e a terceira linha, segue que:

$$4x + 2y + z = 4x + y + 2z \iff y = z.$$

Logo, o azeite e o queijo apresentam o mesmo valor energético. Da relação entre a segunda linha e a quarta linha, segue que:

$$x + w + 2z = 4x + w \iff z = \frac{3x}{2}.$$

Substituindo na primeira linha:

$$4x + 2 \cdot \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} = 85 \iff \frac{17}{2}x = 85 \iff x = 10.$$

Calculando a pontuação do bife (w), segue:

$$4x + w = 85 \iff 4 \cdot 10 + w = 85 \iff 40 + w = 85 \iff w = 45.$$

Calculando as pontuações do queijo (z) e do azeite (y)

$$z = \frac{3 \cdot 10}{2} = 15 = y.$$

Então temos que:
I - CORRETA. A pontuação de 1 bife de 100 g é 45.
II - CORRETA. O macronutriente presente no arroz é o carboidrato.
III - CORRETA. Uma colher de arroz possui $0,25 \cdot 20g = 5g$. Isso vale 10 pontos. A mesma quantidade de lipídeos está presente em uma colher de azeite e vale 15 pontos. Portanto, $\frac{15}{10} = 1,5$.

Logo, a alternativa correta é a letra e.

Referências

[1] LEON, S. J. *Álgebra Linear com Aplicações*, 4a. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2004.

[2] CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*, 6a. ed. São Paulo: Editora Atual, 2003, 352p.

[3] ANTON , H.; RORRES. C. *Álgebra linear com aplicações*, 10a. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. 786p.

[4] BRADY, J. E., HUMISTON, G. E. *Química geral*, Editora LTC, 1981, 572p.

[5] POOLE, D. *Álgebra Linear*, 4a. ed. São Paulo: Editora Thomson, 2013, 718p.

[6] LIPSCHUTZ, S. LIPSON, M. *Álgebra Linear* , Coleção Schaum, 4a. ed. Editora Bookman, 2011, 206p.

[7] GUSSOW, M. *Eletricidade Básica*, Coleção Schaum, 4a. ed. Editora Artmed, 656p.

[8] ALVES, S. *A Matemática do GPS*, Revista do Professor de Matemática, vol. 59, 2006.

[9] SOUZA, P. A.; LOPES, A. M.A.; AZEVEDO, C.L.V.R *O Estudo de Produto de Matrizes por meio de um Objeto de Aprendizagem*, XI ENEM- Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba, 18 a 21 de julho de 2013.

[10] ROUSSEAU, C.; SAINT-AUBIN,Y. *Matemática e Atualidade -Volume 1*, Coleção PROFMAT, 1a. ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2015, 326p.