



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ANTONIO EDILSON CARDOSO PORTELA

NOÇÕES DE GEOMETRIA PROJETIVA

FORTALEZA

2017

ANTONIO EDILSON CARDOSO PORTELA

NOÇÕES DE GEOMETRIA PROJETIVA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino da Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- P877n Portela, Antonio Edilson Cardoso.
Noções de Geometria Projetiva / Antonio Edilson Cardoso Portela. – 2017.
59 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.
1. Geometria Projetiva. 2. Geometria Euclidiana. 3. Geometria Elíptica. 4. Axiomas de Hilbert. 5. Espaço Tridimensional. I. Título.

CDD 510

ANTONIO EDILSON CARDOSO PORTELA

NOÇÕES DE GEOMETRIA PROJETIVA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino da Matemática.

Aprovada em: 25/08/2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Frederico Vale Girão
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

A Deus, fonte de esperança.

A minha Família, o meu alicerce.

A todas as pessoas que acreditam no meu potencial.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida, por ser uma fonte inesgotável de esperança.

Agradeço a meus pais, Manoel Francisco Cardoso e Terezinha Moreira Portela Cardoso, que deram uma base de vida honesta e batalhadora, meus irmãos que sempre me apoiaram e em especial ao meu irmão Antonio Cardoso Portela que nunca faltou com palavras incentivando-me a concluir este mestrado.

Agradeço a minha noiva, Francisca Brandão de Araújo, por todo apoio e compreensão nos momentos de ausência dedicando-me ao mestrado, por estar sempre ao meu lado acreditando que juntos podemos ser melhor.

Agradeço a meus colegas de trabalho e à coordenação da EEM Prof. Luis Felipe da cidade de Sobral – CE, pelo apoio e compreensão. Em especial, ao meu diretor, Francisco Francinaldo Farrapo Frota, que sempre vem expressando confiança no meu potencial e dando-me apoio ao fazer este mestrado.

Agradeço, imensamente, ao meu orientador Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo, pela confiança, disposição e paciência comigo durante a elaboração desta dissertação e pelas suas aulas ministradas na disciplina Números e Funções Reais, mostrando compromisso e sabedoria durante a condução das mesmas. E aos professores participantes da banca.

Agradeço aos meus colegas de turma do PROFMAT. Em especial, João Rodrigues de Sousa Filho, pelos favores e estudos juntos, a Francisco das Chagas Alves Brito, pela companhia nas viagens à Universidade.

Agradeço a CAPES por ter disponibilizado apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram de certa forma, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho.

“Os que buscam o justo caminho da verdade não devem ocupar-se com nenhum objeto a respeito do qual não possam ter uma certeza igual à das demonstrações da aritmética e da Geometria.” (René Descartes)

RESUMO

Neste trabalho, inicialmente, apresenta-se alguns resultados da Álgebra Linear, em especial o estudo do Espaço Vetorial \mathbb{R}^n , que passa a ser, juntamente com a Geometria Analítica, a linguagem empregada nos capítulos que se seguem. Apresentamos um estudo de um ponto de vista axiomático, sob a ótica dos axiomas de Hilbert e elaboramos modelos de planos para as Geometrias Euclidiana, Elíptica e Projetiva. É verificada a validade dos axiomas de Incidência e Ordem para a Geometria Euclidiana. No \mathbb{R}^3 , é feita uma abordagem do estudo de plano e da esfera unitária, destacando a reta elíptica obtida pela interseção destes conjuntos, passando assim a fazer uma abordagem da Geometria Elíptica. Com os conceitos e definições estudadas no Espaço Vetorial \mathbb{R}^n , Espaço tridimensional e nas Geometrias Euclidiana e Elíptica, abordaremos o estudo da Geometria Projetiva, demonstrando proposições e verificando os seus axiomas.

Palavras-chaves: Geometria Projetiva. Geometria Euclidiana. Geometria Elíptica. Axiomas de Hilbert. Espaço tridimensional.

ABSTRACT

In this work, initially, some results of Linear Algebra are presented, in particular the study of the Vector Space \mathbb{R}^n , which becomes, together with Analytical Geometry, the language used in the chapters that follow. We present a study from an axiomatic point of view, from the perspectives of Hilbert's axioms and we elaborate models of planes for the Euclidean, Elliptic and Projective Geometries. The validity of the Incidence and Order axioms for Euclidean Geometry is verified. In \mathbb{R}^3 , an approach is made to the study of the plane and the unitary sphere, highlighting the elliptical line obtained by the intersection of these sets, thus making an approach to the Elliptic Geometry. With the concepts and definitions studied in the Vector Space \mathbb{R}^n , Three-dimensional Space and in the Euclidean and Elliptic Geometries we will approach the study of Projective Geometry, demonstrating propositions and verifying its axioms.

Keywords: Projective Geometry. Euclidean Geometry. Elliptic Geometry. Hilbert's axioms. Three-dimensional space.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 4.1 – Vetor v paralelo à reta l | 30 |
| Figura 4.2 - $\overrightarrow{qp} \perp \eta \Leftrightarrow q \in \Gamma$ | 32 |
| Figura 4.3 – Plano determinado por três pontos não colineares | 34 |
| Figura 4.4 – Reta determinada pela interseção de dois planos distintos | 34 |
| Figura 4.5 – Esfera Unitária Canônica | 37 |
| Figura 5.1 - $l = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta$ | 40 |
| Figura 5.2 – Interseção de duas retas Elípticas..... | 47 |
| Figura 6.1 – Retas que se interseptam | 48 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|-----------------------|-------------------------------------|
| α | Alfa |
| β | Beta |
| γ | Gama |
| ε | Épsilon |
| η | Eta |
| θ | Teta |
| λ | Lambda |
| ν | Ni |
| ψ | Psi |
| Γ | Gama |
| \in | Pertence |
| \cap | Interseção |
| \subset | Está contido |
| \overline{AB} | Segmento de reta |
| \overrightarrow{AB} | Vetor |
| \mathbb{R}^n | Espaço vetorial |
| \mathbb{R} | Conjunto dos Números Reais |
| \mathbb{R}^2 | Espaço Euclidiano |
| \mathbb{R}^3 | Espaço Euclidiano Tridimensional |
| \mathbb{S}^2 | Esfera Unitária Canônica |
| \mathbb{RP}^2 | Plano Projetivo |
| \mathbb{RP}^{2*} | Plano Projetivo Dual |
| \bar{v} | Ponto Projetivo |
| \mathbb{H}_{e_3} | Hemisfério Norte da Esfera Unitária |
| \forall | Para todo |
| \exists | Existe |
| \Leftrightarrow | Se, e somente se |
| l_θ | Reta elíptica |
| $l_{\bar{\eta}}$ | Reta projetiva |
| ■ | Final da Prova |

SUMÁRIO

| | | |
|------------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 13 |
| 2 | O ESPAÇO VETORIAL \mathbb{R}^n | 14 |
| 3 | GEOMETRIA EUCLIDIANA | 25 |
| 3.1 | Axiomas da Geometria Euclidiana Plana | 25 |
| 3.2 | Um Modelo para o Plano Euclidiano (Geometria Euclidiana) | 26 |
| 4 | ESPAÇO EUCLIDIANO TRIDIMENSIONAL | 30 |
| 4.1 | Um Modelo para o espaço Euclidiano | 30 |
| 4.2 | Equação da reta em \mathbb{R}^3 | 30 |
| 4.3 | Equação do plano | 32 |
| 4.4 | Esfera em \mathbb{R}^3 | 36 |
| 5 | GEOMETRIA ELÍPTICA | 38 |
| 5.1 | Axiomas da Geometria Elíptica | 38 |
| 5.2 | Um Modelo para o Plano Elíptico (Geometria Elíptica) | 39 |
| 5.3 | Distância elíptica | 40 |
| 6 | GEOMETRIA PROJETIVA | 48 |
| 6.1 | Axiomas da Geometria Projetiva | 49 |
| 6.2 | Um Modelo para o Plano Projetivo \mathbb{RP}^2 (Geometria Projetiva) | 49 |
| 6.3 | Relação entre S^2 e \mathbb{RP}^2 | 50 |
| 6.4 | Retas projetivas | 52 |
| 6.5 | Plano projetivo dual | 53 |
| 7 | CONCLUSÃO | 58 |
| | REFERÊNCIAS | 59 |

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Euclidiana forma a base do conhecimento geométrico que aprendemos na nossa Educação básica. Mas nem sempre conseguimos com ela desvendar soluções para problemas que percebemos no nosso dia a dia. Por exemplo, ao olharmos ao longo de uma ferrovia em linha reta, temos a sensação de que seus trilhos se intersectam em um ponto muito distante. Mas, de fato, seus trilhos são paralelos em toda sua extensão. Também podemos perceber situações como estas em fotografias ou pinturas. Estas situações nos passam a sensação de que necessitamos pensar em uma geometria sem retas paralelas. Isto é, Geometria não Euclidiana, que denominamos de Geometria Projetiva.

Este trabalho procura apresentar noções da Geometria Projetiva através de conhecimentos já consagrados da Geometria Euclidiana, Geometria Analítica, Geometria Elíptica e Álgebra Linear.

No segundo capítulo, estudamos algumas definições e resultados importantes do estudo do Espaço Vetorial \mathbb{R}^n . Apresentamos demonstrações para a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e para a Fórmula de Lagrange. Além disso, destacamos algumas propriedades do Produto Interno, Produto Vetorial e norma de um vetor. No terceiro capítulo, destacamos o estudo da Geometria Euclidiana, verificando a validade dos grupos de axiomas de Incidência e ordem. No quarto e no quinto capítulo, faremos uma abordagem das definições do Espaço Euclidiano Tridimensional e da Geometria Elíptica, as quais serão importantes no entendimento e desenvolvimento da teoria apresentada na última seção.

No último capítulo, abordaremos noções da Geometria Projetiva, passando pela verificação dos axiomas de incidência, elaboração de um modelo de plano, denominado \mathbb{RP}^2 (plano projetivo), exploramos suas relações com o plano Elíptico, estudamos os principais subconjuntos do \mathbb{RP}^2 e realizamos demonstrações de forma analítica de algumas proposições importantes da Geometria Projetiva.

2 O ESPAÇO VETORIAL \mathbb{R}^n

Para este estudo, vamos apresentar inicialmente os principais conceitos da Álgebra Linear, abordaremos a linguagem vetorial que será empregada mais adiante no estudo da Geometria Projetiva. Posicionaremos mais precisamente ao estudo do espaço vetorial real \mathbb{R}^n .

Definição 2.1. Espaço Vetorial Real \mathbb{R}^n é um conjunto formado por as n-uplas ordenadas $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ de números reais, cujos elementos são chamados de vetores e denotados por $v = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, no qual estão definidas as operações:

- Adição

Para cada par de vetores $v = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $w = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ de \mathbb{R}^n corresponde um novo vetor $v + w$ de \mathbb{R}^n , em que

$$v + w = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n);$$

- Multiplicação por um número real (multiplicação por um escalar)

Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ e para cada $v = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ corresponde um novo vetor $\lambda \cdot v$ de \mathbb{R}^n , em que

$$\lambda \cdot v = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \lambda \cdot x_3, \dots, \lambda \cdot x_n).$$

Essas duas operações equipam \mathbb{R}^n com a estrutura de espaço vetorial sobre \mathbb{R} .

Os números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são chamados as coordenadas do vetor v . O vetor $o = (0, 0, 0, \dots, 0)$ é denominado vetor nulo de \mathbb{R}^n . O espaço vetorial \mathbb{R}^n apresenta uma linguagem peculiar, como por exemplo, multiplicar um vetor de \mathbb{R}^n por $\lambda \in \mathbb{R}$, onde λ é chamado de *escalar*.

Dados dois vetores $v = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $w = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ de \mathbb{R}^n , temos por definição, que a igualdade vetorial $v = w$ significa as n igualdades numéricas $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3, \dots, x_n = y_n$. Dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ são colineares quando existe um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v = \lambda w$, neste caso diz-se que o vetor v é múltiplo do vetor w .

No decorrer do texto trabalhamos com os conjuntos \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 que são chamados de plano euclidiano e espaço euclidiano tridimensional, respectivamente. Para \mathbb{R}^2 , seus elementos são pares ordenados e indicados na forma $v = (x, y)$, já para \mathbb{R}^3 , seus elementos são triplas ordenadas e indicadas na forma $v = (x, y, z)$.

Um subconjunto não vazio Γ de \mathbb{R}^n , que satisfaz as operações definidas acima, será chamado de *subespaço vetorial* de \mathbb{R}^n . Como por exemplo, temos o subconjunto W de \mathbb{R}^2 formado pelos os vetores da forma $(x, 2x)$ com $x \in \mathbb{R}$. Isto é, dados $v = (x, 2x)$ e $w = (y, 2y) \in W$, temos que $v + w = (x + y, 2x + 2y) = (x + y, 2(x + y))$ é elemento de W e para a escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, temos $\lambda v = \lambda(x, 2x) = (\lambda x, 2\lambda x)$ que também é um elemento de W . Logo, W é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^2 . Neste exemplo temos que W é uma reta do plano euclidiano \mathbb{R}^2 , que passa pela origem $O = (0, 0)$.

Os subconjuntos $\{0\}$ (constituído apenas do vetor nulo) e o próprio \mathbb{R}^n são chamados de *subespaços triviais* do espaço vetorial \mathbb{R}^n . Os subespaços vetoriais Γ de \mathbb{R}^n que são diferentes de $\{0\}$ e de \mathbb{R}^n são chamados de *subespaços próprios*. Cada subespaço vetorial é também um espaço vetorial.

Um vetor v de \mathbb{R}^n , se escreve como *combinação linear* dos vetores $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ de \mathbb{R}^n se existirem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ tais que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots + \lambda_n v_n$$

Por exemplo, no espaço euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 , o vetor $v = (1, 1, 5)$ é uma combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 0)$ e $v_3 = (3, 1, -2)$, ou seja, $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ com $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -2$.

Seja $U = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$ um conjunto formado por k vetores de \mathbb{R}^n , o conjunto obtido por todos os vetores que são combinações lineares dos vetores de U será indicado por W e dizemos que U gera W que também é subconjunto de \mathbb{R}^n ou que W é gerado por U , indicando W por $[[v_1, v_2, v_3, \dots, v_k]] \subset \mathbb{R}^n$. Ou melhor,

$$[[v_1, v_2, v_3, \dots, v_k]] = \{w \in \mathbb{R}^n; w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k, \lambda_i \in \mathbb{R}\}.$$

W é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n .

Seja $U = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$ um conjunto de vetores de \mathbb{R}^n , dizemos que os vetores de U são *linearmente independentes LI* se a equação $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots + \lambda_k v_k = 0$ que se resulta em um sistema linear homogêneo (que sempre tem solução), tiver somente a solução trivial $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_k = 0$, caso o sistema contenha uma outra solução além da trivial, os vetores são chamados *linearmente dependentes LD*.

Se um dado subespaço vetorial W de \mathbb{R}^n é gerado por $U = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$ e U é linearmente independente então dizemos que U é uma *base* de W , e W terá *dimensão* k , pois, sua base é formada por k elementos. Para o \mathbb{R}^n , chamamos o subconjunto $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n , com $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, \dots, 0)$, \dots , $e_k = (0, 0, 0, \dots, 1)$, de *base canônica*.

No \mathbb{R}^3 , para que um subconjunto U forme uma base, é necessário que o determinante da matriz quadrada M , cujas colunas são formadas pelas coordenadas dos vetores de U , seja diferente de zero ($\det(M) \neq 0$).

Sejam $v = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $u = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ dois vetores de \mathbb{R}^n . A aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle v, u \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_n y_n,$$

é chamada de *produto interno canônico* ou *produto escalar* do \mathbb{R}^n .

Vejamos as principais propriedades básicas do *produto interno* em \mathbb{R}^n .

Proposição 2.2. *O produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ possui as seguintes propriedades para quaisquer vetores v, u e $w \in \mathbb{R}^n$ e qualquer escalar $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$P_1 \quad \langle v, v \rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle v, v \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0, \quad (\text{positiva definida})$$

$$P_2 \quad \langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle, \quad (\text{simétrica})$$

$$P_3 \quad \langle v + w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle, \quad (\text{aditividade})$$

$$P_4 \quad \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle, \quad (\text{linearidade})$$

Demonstração:

Sejam $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $u = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ vetores de \mathbb{R}^n e $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$P_1: \langle v, v \rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle v, v \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0, \quad (\text{positiva definida})$$

Para $\langle v, v \rangle \geq 0$, temos $\langle v, v \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$.

Agora, $\langle v, v \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0$, façamos:

$$\langle v, v \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0, \text{ logo } v = 0.$$

P_2 : $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$, (*simétrica*)

Temos: $\langle v, w \rangle = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n = \langle w, v \rangle$. Portanto, $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ para todo v e $w \in \mathbb{R}^n$.

P_3 $\langle v + w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle$, (*aditividade*)

$$\begin{aligned} \text{Façamos: } \langle v + w, u \rangle &= (x_1 + w_1)y_1 + (x_2 + w_2)y_2 + \dots + (x_n + w_n)y_n \\ &= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) + (w_1 y_1 + w_2 y_2 + \dots + w_n y_n) \\ &= \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle. \end{aligned}$$

P_4 : $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$, (*linearidade*)

$$\begin{aligned} \text{Veja que, } \langle \lambda v, w \rangle &= \lambda x_1 w_1 + \lambda x_2 w_2 + \dots + \lambda x_n w_n, \\ &= \lambda(x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n) \\ &= \lambda \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$. ■

Em \mathbb{R}^n estabelecemos os conceitos de medida de comprimento e medida de ângulo, definindo assim uma função *norma* associada ao produto interno:

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty), \quad \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

O valor dessa função em um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ será chamado *norma* de v . O vetor que tem $\|v\| = 1$ será chamado de *vetor unitário*.

A proposição seguinte apresenta algumas afirmações sobre a medida de comprimento de vetores.

Proposição 2.3. *Para quaisquer vetores $v, u \in \mathbb{R}^n$ e escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ valem as afirmações:*

$$A_1 \quad \|v\| \geq 0 \quad e \quad \|v\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0, \quad (\text{positiva definida});$$

$$A_2 \quad \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \quad \text{onde } |\lambda| \text{ indica o valor absoluto de um número real ;}$$

$$A_3 \quad \|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|. \quad (\text{desigualdade triangular})$$

Demonstração:

Sejam $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $u = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vetores de \mathbb{R}^n e $\lambda \in \mathbb{R}$.

A_1 $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$, (positiva definida);

Temos, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \geq 0$. Logo, $\|v\| \geq 0$.

Sabemos que

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0,$$

Logo, $v = 0$. Por outro lado, se $v = 0$ então $\|v\| = 0$.

A_2 $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$, onde $|\lambda|$ indica o *valor absoluto* de um número real ;

$$\begin{aligned} \text{Temos, } \|\lambda v\| &= \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2 + \dots + \lambda^2 x_n^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} \\ &= |\lambda| \|v\|. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.

Para a demonstração da afirmação A_3 , se aplica a importante desigualdade abaixo, associada ao produto interno.

Teorema 2.4. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Para quaisquer vetores $v, u \in \mathbb{R}^n$ vale a desigualdade $|\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \|u\|$ e a igualdade ocorre se, e somente se, v e u são vetores colineares.

A_3 $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$. (desigualdade triangular)

Demonstração:

Dados $v, u \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} \|v + u\|^2 &= \langle v + u, v + u \rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\langle v, u \rangle + \|u\|^2 \end{aligned}$$

da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos:

$$|\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \|u\|$$

Assim,

$$\|v + u\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\| \|u\| + \|u\|^2 = (\|v\| + \|u\|)^2$$

Daí,

$$\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|.$$

■

Da desigualdade de *Cauchy-Schwarz*, podemos definir medida de ângulos. Usando a informação da trigonometria que dado $t \in [-1, 1]$ existe um único $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\cos \theta = t$, podemos garantir a existência de um único ângulo $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos \theta = \frac{\langle v, u \rangle}{\|v\| \|u\|}$$

com v e u dois vetores não nulos de \mathbb{R}^n . Logo, para quaisquer dois vetores não nulos v e $u \in \mathbb{R}^n$ podemos determinar a medida do ângulo entre eles. Com isso podemos escrever uma fórmula que relaciona produto interno, norma (comprimento) e medida do ângulo

$$\langle v, u \rangle = \|v\| \|u\| \cos \theta$$

com $\theta \in [0, \pi]$.

Dados u e v em \mathbb{R}^n , dizemos que u e v são *ortogonais* quando o produto interno entre eles for nulo, $\langle v, u \rangle = 0$. O vetor nulo é ortogonal aos demais vetores.

Um exemplo de vetores ortogonais, são os vetores do subespaço vetorial $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 3y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, que são ortogonais ao vetor $\eta = (2, -3, 1)$ do \mathbb{R}^3 formado pelo coeficientes da equação. Explicitamente, $\Gamma = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \langle v, \eta \rangle = 0\}$, neste caso o vetor η é chamado de *vetor normal* ao subespaço vetorial Γ .

O espaço vetorial \mathbb{R}^3 admite uma operação especial entre dois vetores chamada de *produto vetorial*. Dados dois vetores linearmente independentes v e u de \mathbb{R}^3 , o *produto vetorial* de v por u , indicado por $v \times u$, resulta em um terceiro vetor w de \mathbb{R}^3 que é ortogonal a v e u . Para qualquer vetor $w \in \mathbb{R}^3$ vale a identidade

$$\langle w, v \times u \rangle = \det [w \ v \ u].$$

O produto vetorial de dois vetores $v = (x_1, x_2, x_3)$ e $u = (y_1, y_2, y_3)$ de \mathbb{R}^3 pode ser calculado pelo algoritmo

$$v \times u = \left(\det \begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \right).$$

Por exemplo, para calcular o produto vetorial de $v = (5, 3, -1)$ e $u = (1, 4, 2)$, façamos:

$$v \times u = \left(\det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

e portanto, $v \times u = (10, -11, 17)$.

Proposição 2.5. (Fórmula de Lagrange) Para quaisquer dois vetores v e u do \mathbb{R}^3 vale a identidade

$$\|v \times u\|^2 = \|v\|^2 \|u\|^2 - \langle v, u \rangle^2.$$

Em particular, se $\theta(v, u)$ é a medida do ângulo entre os vetores v e u , então

$$\|v \times u\| = \|v\| \|u\| \operatorname{sen} \theta(v, u)$$

onde $\operatorname{sen} \theta(v, u)$ é o seno do ângulo entre os vetores.

Demonstração:

Sejam $v = (x_1, x_2, x_3)$ e $u = (y_1, y_2, y_3)$ vetores de \mathbb{R}^3 . O produto vetorial entre v e u é:

$$v \times u = \left(\det \begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$v \times u = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|v \times u\|^2 &= \langle v \times u, v \times u \rangle \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo o cálculo de $\|v\|^2 \|u\|^2$, obtemos:

$$\|v\|^2 \|u\|^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

e também $\langle v, u \rangle^2 = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2$.

Dos cálculos acima, tem-se que

$$\|v \times u\|^2 = \|v\|^2 \|u\|^2 - \langle v, u \rangle^2.$$

Se $\theta(v, u)$ é a medida do ângulo entre os vetores v e u , então

$$\langle v, u \rangle = \|v\| \|u\| \cos \theta(v, u).$$

Substituindo a última equação na penúltima, tem-se

$$\begin{aligned} \|v \times u\|^2 &= \|v\|^2 \|u\|^2 - (\|v\| \|u\| \cos \theta(v, u))^2 \\ &= \|v\|^2 \|u\|^2 (1 - \cos^2 \theta(v, u)) \\ &= \|v\|^2 \|u\|^2 \sin^2 \theta(v, u). \end{aligned}$$

Temos $\sin \theta(v, u) \geq 0$ com $\theta(v, u) \in [0, \pi]$, além disso, temos $\|v \times u\| \geq 0$ e $\|v\| \|u\| \geq 0$. Assim, fazendo a extração da raiz quadrada em ambos os lados da equação acima, temos:

$$\|v \times u\| = \|v\| \|u\| \sin \theta(v, u).$$

■

Proposição 2.6. *Sejam $v = (x_1, x_2, x_3)$, $u = (y_1, y_2, y_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ vetores de \mathbb{R}^3 , então*

$$\text{III. } (v \times u) \times w = \langle v, w \rangle u - \langle u, w \rangle v.$$

$$\text{IV. } \langle v \times u, u \times w \rangle = \det \begin{bmatrix} \langle v, u \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle u, u \rangle & \langle u, w \rangle \end{bmatrix} = \langle v, u \rangle \cdot \langle u, w \rangle - \langle u, u \rangle \cdot \langle v, w \rangle.$$

$$\text{V. } \langle v, u \times w \rangle = \langle w, v \times u \rangle = \langle u, w \times v \rangle.$$

Demonstração:

$$\text{I. } (v \times u) \times w = \langle v, w \rangle u - \langle u, w \rangle v.$$

Temos:

$$\begin{aligned} v \times u &= \left(\det \begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1). \\ &= (a, b, c) \end{aligned}$$

Agora, fazendo

$$(v \times u) \times w = \left(\det \begin{bmatrix} b & c \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} a & c \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} a & b \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \right)$$

Realizando as operações acima obtemos $(v \times u) \times w = (X, Y, Z)$, onde

$$X = (x_3y_1 - x_1y_3)w_3 - (x_1y_2 - x_2y_1)w_2$$

$$Y = (x_1y_2 - x_2y_1)w_1 - (x_2y_3 - x_3y_2)w_3$$

$$Z = (x_2y_3 - x_3y_2)w_2 - (x_3y_1 - x_1y_3)w_1.$$

Agora fazendo $\langle v, w \rangle u - \langle u, w \rangle v = (X', Y', Z')$, obteremos:

$$(X', Y', Z') = (x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) - (y_1w_1 + y_2w_2 + y_3w_3) \cdot (x_1, x_2, x_3)$$

Fazendo o desenvolvimento na equação acima obtemos as igualdades

$$X = X', Y = Y' \text{ e } Z = Z'.$$

Logo, $(v \times u) \times w = \langle v, w \rangle u - \langle u, w \rangle v$.

$$\text{II. } \langle v \times u, u \times w \rangle = \det \begin{bmatrix} \langle v, u \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle u, u \rangle & \langle u, w \rangle \end{bmatrix} = \langle v, u \rangle \cdot \langle u, w \rangle - \langle u, u \rangle \cdot \langle v, w \rangle.$$

Chamando $r = \langle v, u \rangle \cdot \langle u, w \rangle - \langle u, u \rangle \cdot \langle v, w \rangle$ e fazendo as operações, obtemos:

$$r = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \cdot (y_1w_1 + y_2w_2 + y_3w_3) - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \cdot (x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3)$$

$$\begin{aligned} &= x_1y_1^2w_1 + x_1y_1y_2w_2 + x_1y_1y_3w_3 + x_2y_2y_1w_1 + x_2y_2^2w_2 + x_2y_2y_3w_3 + x_3y_3y_1w_1 + \\ &\quad + x_3y_3y_2w_2 + x_3y_3^2w_3 - y_1^2x_1w_1 - y_1^2x_2w_2 - y_1^2x_3w_3 - y_2^2x_1w_1 - y_2^2x_2w_2 - \\ &\quad - y_2^2x_3w_3 - y_3^2x_1w_1 - y_3^2x_2w_2 - y_3^2x_3w_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x_1y_1y_2w_2 + x_1y_1y_3w_3 + x_2y_2y_1w_1 + x_2y_2y_3w_3 + x_3y_3y_1w_1 + x_3y_3y_2w_2 - \\ &\quad y_1^2x_2w_2 - y_1^2x_3w_3 - y_2^2x_1w_1 - y_2^2x_3w_3 - y_3^2x_1w_1 - y_3^2x_2w_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (x_2y_3 - x_3y_2) \cdot (y_2w_3 - y_3w_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) \cdot (y_3w_1 - y_1w_3) + \\ &\quad (x_1y_2 - x_2y_1) \cdot (y_1w_2 - y_2w_1) \end{aligned}$$

$$= \langle (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1), (y_2w_3 - y_3w_2, y_3w_1 - y_1w_3, y_1w_2 - y_2w_1) \rangle$$

$$= \langle v \times u, u \times w \rangle.$$

$$\text{III. } \langle v, u \times w \rangle = \langle w, v \times u \rangle = \langle u, w \times v \rangle.$$

Usando as propriedades de determinante que permutar duas colunas o determinante altera de sinal, ao efetuar duas trocas na ordem das colunas, o determinante volta para seu valor original.

Empregando a definição de produto interno, produto vetorial e a observação anterior, temos:

$$\langle v, u \times w \rangle = \det[v, u, w] = \det[w, v, u] = \langle w, v \times u \rangle$$

Da mesma forma

$$\langle v, u \times w \rangle = \det[v, u, w] = \det[u, w, v] = \langle u, w \times v \rangle$$

Portanto, $\langle v, u \times w \rangle = \langle w, v \times u \rangle = \langle u, w \times v \rangle$.

■

Sejam \mathbb{R}^m , \mathbb{R}^n espaços vetoriais. Uma função $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita uma *transformação linear* de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^n quando possui as seguintes propriedades:

$$(i) T(v + u) = T(v) + T(u), \text{ para todo } v \text{ e } u \in \mathbb{R}^m;$$

$$(ii) T(\lambda v) = \lambda T(v), \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^m \text{ e para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Um exemplo de transformação linear é a função $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x, y)$. Pois, dados $v = (x_1, x_2, x_3)$ e $u = (y_1, y_2, y_3)$ em \mathbb{R}^3 , temos:

$$\begin{aligned} f(v+u) &= f(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \\ &= (x_1+y_1, x_2+y_2) \\ &= (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \\ &= f(v) + f(u) \end{aligned}$$

E também para todo $v = (x_1, x_2, x_3)$ em \mathbb{R}^3 e todo λ em \mathbb{R} , vale ;

$$\begin{aligned} f(\lambda v) &= f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2) \\ &= \lambda(x_1, x_2) \\ &= \lambda f(v). \end{aligned}$$

Este exemplo mostra que o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 é projetado no plano cartesiano \mathbb{R}^2 através da transformação linear f .

Numa transformação linear $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, destacamos dois importantes subconjuntos, um no domínio e o outro no contradomínio, são eles: o *núcleo*, denotado por

$$Nuc(T) = \{v \in \mathbb{R}^m; T(v) = 0\}$$

e o conjunto *Imagem* denotado por

$$Im(T) = \{w \in \mathbb{R}^n; w = T(v) \text{ para algum } v \in \mathbb{R}^m\}.$$

Demonstra-se que o núcleo e o conjunto imagem de uma transformação linear são subespaço do domínio e do contradomínio, respectivamente.

Seja $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Se \mathbb{R}^m for gerado pelo conjunto $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\}$ de vetores, então a $Im(T)$ é gerada pelo conjunto $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3), \dots, T(v_m)\}$.

Ainda sobre os subespaços núcleo e imagem temos as informações:

- (i) T é injetora $\Leftrightarrow Nuc(T) = \{0\}$
- (ii) T é sobrejetora $\Leftrightarrow Im(T) = \mathbb{R}^n$.

3 GEOMETRIA EUCLIDIANA

Para o estudo da Geometria Euclidiana plana necessitamos construir um modelo que fixa um conjunto aritmético específico, denominado *plano* \mathbb{R}^2 , atribuindo significado aos termos indefinidos e que todos os axiomas de Hilbert (1862 – 1943) sejam válidos. O \mathbb{R}^2 , é o modelo canônico do plano Euclidiano. Para a construção e realização de operações no \mathbb{R}^2 empregamos a linguagem da Álgebra Linear.

3.1 Axiomas da Geometria Euclidiana Plana

Estudaremos os axiomas da Geometria Euclidiana conforme o modelo axiomático de Hilbert. São eles:

- I. Termos indefinidos
 - Ponto, Reta, Plano, Pertence, Está Entre e Congruência.
- II. Axiomas de Incidência
 - I_1 - Dois pontos distintos determinam uma única reta.
 - I_2 - Existem pelo menos dois pontos sobre uma reta.
 - I_3 - Existem pelo menos três pontos euclidianos que não estão numa mesma reta e todos estão sobre o mesmo plano.
- III. Axiomas de Ordem
 - O_1 - Se um ponto B está entre A e C , então os três pontos pertencem a uma mesma reta e B está entre C e A .
 - O_2 - Para quaisquer dois pontos distintos A e C , existe pelo menos um ponto B pertencente ao segmento de reta \overline{AC} , tal que B está entre A e C .
 - O_3 - Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois.
 - O_4 - Sejam A , B e C três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja l uma reta do plano que não contém algum dos três pontos. Então, se l interseca o segmento \overline{AB} , ela também interseca o segmento \overline{AC} ou o segmento \overline{BC} .
- IV. Axiomas de Congruência
- V. Axiomas das Paralelas

Seja l uma reta e p um ponto não pertencente a l . então existe no máximo uma reta no plano que passa por p e não intercepta l .

VI. Axiomas de Continuidade

3.2 Um Modelo para o Plano Euclidiano (Geometria Euclidiana)

Para a elaboração de um modelo para o Plano Euclidiano, denominamos:

- \mathbb{R}^2 Representa o plano Euclidiano e seus elementos chamaremos de pontos.
- Em \mathbb{R}^2 , um hiperplano será chamada de reta.

No \mathbb{R}^2 , indicaremos uma reta por $l_\eta(p)$, onde p é um ponto da reta e η é vetor normal a reta satisfazendo a equação

$$l_\eta(p) : \langle v - p, \eta \rangle = 0$$

Se tomarmos um múltiplo não nulo de η , digamos $\lambda\eta$ com $\lambda \neq 0$, como vetor normal, teremos que as retas são iguais como conjuntos, $l_{\lambda\eta}(p) = l_\eta(p)$, pois se $p \in l_{\lambda\eta}(p)$ temos $\langle v - p, \lambda\eta \rangle = 0$, daí $\lambda\langle v - p, \eta \rangle = 0$, como $\lambda \neq 0$ assim temos que $\langle v - p, \eta \rangle = 0$, ou seja, $p \in l_\eta(p)$, logo, $l_{\lambda\eta}(p) = l_\eta(p)$.

Temos um caso particular de retas, que são as retas que contém a origem $o = (0, 0)$. Para sua notação usamos apenas o símbolo l_η omitindo assim o ponto o . Sua expressão algébrica é a equação linear homogênea:

$$l_\eta : \eta_1 x + \eta_2 y = 0, \text{ onde } \eta = (\eta_1, \eta_2) \text{ e } v = (x, y).$$

A reta l_η é um exemplo de subespaço vetorial próprio de \mathbb{R}^2 de dimensão 1.

Com as definições apresentadas acima, disponibilizamos para o \mathbb{R}^2 um modelo aritmético que nos proporciona verificar que o grupo de axiomas de incidência em \mathbb{R}^2 é satisfeito.

I_1 - DOIS PONTOS DISTINTOS DETERMINAM UMA ÚNICA RETA

Consideramos $p = (p_1, p_2)$ e $q = (q_1, q_2)$ dois pontos distintos de \mathbb{R}^2 . Seja $q - p = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$ um vetor não nulo, tomando o vetor $\eta = (-q_2 + p_2, q_1 - p_1)$ e a reta $l_\eta(p) : \langle v - p, \eta \rangle = 0$, assim temos que as coordenadas dos pontos p e q satisfazem a equação $l_\eta(p)$. Portanto, os pontos determinam a reta $l_\eta(p)$.

Agora, para provarmos a unicidade da reta, suponhamos, por absurdo, que exista uma outra reta $l_\nu(p)$ que contenha os dois pontos, daí temos que $\{p, q\} \subset l_\nu(p) \cap l_\eta(p)$. Por hipótese, ν não é múltiplo de η , caso contrário, teríamos que $l_\eta(p) = l_\nu(p)$. Daí, temos que η e ν são linearmente independentes. Assim, obtemos que $\det [\eta, \nu] \neq 0$, onde $[\eta, \nu]$ é a matriz 2×2 cujas colunas são as coordenadas dos vetores η e ν , que são vetores normais as retas $l_\eta(p)$ e $l_\nu(p)$, respectivamente. Fazendo para $v = (x, y)$, a equação das duas retas nos levam ao sistema

$$\begin{cases} \langle v - p, \eta \rangle = 0 \\ \langle v - p, \nu \rangle = 0 \end{cases}$$

Para este sistema a solução é única, pois quando o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero ($\det [\eta, \nu] \neq 0$) a regra de Cramer garante a existência de solução única. Mas, por outro lado a solução do sistema é formada por dois pares ordenados, que são as coordenadas de p e q . Temos uma contradição. Portanto, é única a reta determinada pelos dois pontos considerados.

I_2 - EXISTEM PELO MENOS DOIS PONTOS SOBRE UMA RETA

Para sua verificação consideremos a reta $l_\eta(p) = \{v \in \mathbb{R}^2; \langle v - p, \eta \rangle = 0\}$ com vetor normal $\eta = (\eta_1, \eta_2)$. O vetor $\eta^\perp = (-\eta_2, \eta_1)$ é ortogonal a η e podemos chamar de vetor direção da reta $l_\eta(p)$. Assim, temos que os pontos não nulos da forma $q = p + \lambda\eta^\perp$, $\lambda \in \mathbb{R}$ pertence à reta. Vejamos,

$$\langle q - p, \eta \rangle = \langle p + \lambda\eta^\perp - p, \eta \rangle = \lambda\langle \eta^\perp, \eta \rangle = 0$$

Portanto, toda reta de \mathbb{R}^2 contém pelo menos dois pontos.

I_3 - EXISTEM PELO MENOS TRÊS PONTOS EUCLIDIANOS QUE NÃO ESTÃO NUMA MESMA RETA E TODOS ESTÃO SOBRE O MESMO PLANO

Faremos sua prova considerando a reta $l_\eta(p) = \{v \in \mathbb{R}^2; \langle v - p, \eta \rangle = 0\}$ e o ponto $q = p + \lambda\eta^\perp \in l_\eta(p)$, como foi mostrado em I_2 . Agora, seja o ponto $x = p + c\eta$, com $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$ e $\langle x - p, \eta \rangle = \langle p + c\eta - p, \eta \rangle = c\langle \eta, \eta \rangle \neq 0$. Logo, x não pertence à reta $l_\eta(p)$. Portanto, os pontos p, q e x não pertencem à mesma reta, mas todos estão no mesmo plano, o \mathbb{R}^2 .

Faremos a demonstração dos axiomas de ordem usando as definições a seguir: Considere o vetor $\eta = (\eta_1, \eta_2)$. Seja f a função $f: \mathbb{R} \rightarrow l_\eta(p)$ definida por $f(t) = p + t\eta^\perp$ onde $\eta^\perp = (-\eta_2, \eta_1)$. A função f é biunívoca.

Na função f , um ponto $q = f(t_1)$ está entre $p = f(t_0)$ e $r = f(t_2)$ se, e somente se, $t_0 < t_1 < t_2$.

Em \mathbb{R}^2 , um segmento da reta $l_\eta(p)$, de extremidades $A = f(t_1)$ e $B = f(t_2)$ é o conjunto

$$\overline{AB} = \{f(t) \in l_\eta(p); t_1 \leq t \leq t_2\}.$$

Agora, demonstraremos o grupo de axiomas de ordem.

O_1 - SE UM PONTO B ESTÁ ENTRE A E C , ENTÃO OS TRÊS PONTOS PERTENCEM A UMA MESMA RETA E B ESTÁ ENTRE C E A .

Dois pontos distintos A e C de \mathbb{R}^2 determinam uma única reta $l_\eta(p)$. Daí, considerando a função definida acima. Se o ponto B está entre A e C , então

$$\exists t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \text{ com } t_0 < t_1 < t_2 \text{ tais que } f(t_0) = A, f(t_1) = B \text{ e } f(t_2) = C.$$

Logo, B pertence à reta $l_\eta(p)$ e, portanto, os três pontos pertencem à mesma reta.

Agora para mostrar que o ponto B está entre C e A , vamos considerar o vetor $-\eta^\perp$ e a função $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow l_\eta(p)$ definida por $\bar{f}(t) = p + t(-\eta^\perp)$. Podemos ver que

$$\bar{f}(t) = p - t(\eta^\perp) = f(-t)$$

Assim, as imagens de $-t_0, -t_1$ e $-t_2$ pela função \bar{f} , satisfazem

$$\bar{f}(-t_0) = p - t_0(-\eta^\perp) = p + t_0\eta^\perp = f(t_0) = A;$$

$$\bar{f}(-t_1) = p - t_1(-\eta^\perp) = p + t_1\eta^\perp = f(t_1) = B;$$

$$\bar{f}(-t_2) = p - t_2(-\eta^\perp) = p + t_2\eta^\perp = f(t_2) = C.$$

De $t_0 < t_1 < t_2$, temos $-t_2 < -t_1 < -t_0$, daí temos que $\bar{f}(-t_1)$ está entre $\bar{f}(-t_2)$ e $\bar{f}(-t_0)$ e, portanto B está entre C e A .

O_2 - PARA QUAISQUER DOIS PONTOS DISTINTOS A E C , EXISTE PELO MENOS UM PONTO B PERTENCENTE AO SEGMENTO DE RETA \overline{AC} , TAL QUE B ESTÁ ENTRE A E C .

Dois pontos distintos A e C de \mathbb{R}^2 determinam uma única reta, digamos a reta $l_\eta(p)$. Assim, podemos afirmar que existe $t_0, t_2 \in \mathbb{R}$ distintos tais que $A = f(t_0)$ e $C = f(t_2)$. Se $t_0, t_2 \in \mathbb{R}$ distintos, então existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $t_0 < t_1 < t_2$. Seja $B = f(t_1)$, temos que $B \in \overline{AC}$, com $\overline{AC} = \{f(t) \in l_\eta(p); t \in [t_0, t_2]\}$. Portanto, B está entre A e C .

O_3 - SE TRÊS PONTOS DISTINTOS ESTÃO SOBRE UMA MESMA RETA, NÃO MAIS QUE UM PONTO ESTÁ ENTRE OS OUTROS DOIS.

Sejam $A = f(t_0)$, $B = f(t_1)$ e $C = f(t_2)$ três pontos da reta $l_\eta(p)$, onde $f(t) = p + t\eta^\perp$ com $t \in \mathbb{R}$. Suponhamos que B está entre A e C , ou seja, $t_0 < t_1 < t_2$. Agora se supormos que A está entre B e C , teremos $t_1 < t_0 < t_2$ e, conseqüentemente, teremos que $t_0 + t_1 < t_0 + t_1 < t_2 + t_2$, o que é um absurdo, pois $t_0 + t_1 = t_0 + t_1$. Da mesma forma, suponhamos que C está entre A e B , obtendo $t_0 < t_2 < t_1$, conseqüentemente, teremos que $t_0 + t_0 < t_1 + t_2 < t_1 + t_2$, o que é um absurdo, pois $t_2 + t_1 = t_2 + t_1$. Portanto, apenas um ponto (B) está entre os outros dois (A e C).

O_4 - SEJAM A, B E C TRÊS PONTOS QUE NÃO ESTÃO SOBRE UMA MESMA RETA E SEJA l UMA RETA DO PLANO QUE NÃO CONTÉM ALGUM DOS TRÊS PONTOS. ENTÃO, SE l INTERSETA O SEGMENTO \overline{AB} , ELA TAMBÉM INTERSETA O SEGMENTO \overline{AC} OU O SEGMENTO \overline{BC} .

Como a reta l não contém os pontos A e B , e interseca o segmento \overline{AB} , logo, A e B estão em lados opostos de l . Como $C \notin l$, assim, C está do mesmo lado de A em relação a l ou do mesmo lado de B em relação a l . Se A e C estão do mesmo lado de l , então B e C estão em lados opostos de l . Isto é, a reta l interseca o segmento \overline{BC} e não interseca \overline{AC} . Se B e C estão do mesmo lado de l , então A e C estão em lados opostos de l e, portanto l interseca o segmento \overline{AC} .

4 ESPAÇO EUCLIDIANO TRIDIMENSIONAL

Neste capítulo, faremos um estudo caracterizando analiticamente os pontos de uma reta no espaço por meio de suas equações paramétricas. Da mesma forma, exploraremos o estudo do plano em \mathbb{R}^3 , destacando um dos axiomas da geometria Euclidiana espacial que diz que “dados três pontos não colineares, existe um e apenas um plano que os contem”.

Abordaremos o estudo da esfera aplicando produto interno.

4.1 Um Modelo para o espaço Euclidiano

- Chamaremos \mathbb{R}^3 de espaço e seus elementos de pontos.
- Um hiperplano em \mathbb{R}^3 será chamado de plano.

Uma operação executável no \mathbb{R}^3 é a *produto vetorial*, esta operação é usada para encontrar um vetor perpendicular a dois vetores dados. Já foi apresentado no capítulo 2 deste trabalho um algoritmo para o cálculo do produto vetorial.

4.2 Equação da reta em \mathbb{R}^3

Definição 4.1. Dizemos que um vetor $v \neq 0$ é paralelo à reta l , ou é um vetor direção da reta l , quando, para quaisquer dois pontos A e B de l , o vetor \overrightarrow{AB} é múltiplo de v .

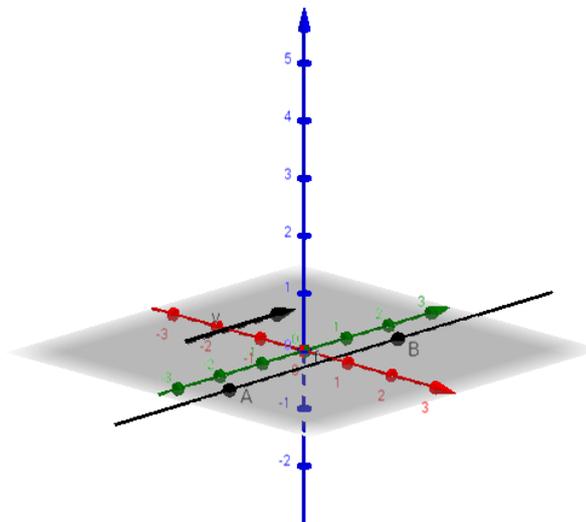


Figura 0.1 – Vetor v paralelo à reta l

Assim, um ponto $p = (x, y, z)$ pertence a reta l que passa por $q = (a, b, c)$ e é paralela ao vetor $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{qp} = \lambda v,$$

Ou seja,

$$p = q + \lambda v.$$

Em termos de coordenadas, as equações paramétricas da reta l são:

$$(x, y, z) = (a + \lambda\alpha, b + \lambda\beta, c + \lambda\gamma)$$

ou seja,

$$l: \begin{cases} x = a + \lambda\alpha \\ y = b + \lambda\beta; \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = c + \lambda\gamma \end{cases}$$

Exemplo 4.2. Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $p = (3, -1, 4)$ e tem vetor direção $v = (-1, 2, 3)$.

Solução: Tal reta é o conjunto $l = \{(3, -1, 4) + \lambda(-1, 2, 3)\}$, ou seja, $l = \{(3 - \lambda, -1 + 2\lambda, 4 + 3\lambda)\}$. Assim, a reta l é um subconjunto do \mathbb{R}^3 formado pelas triplas ordenadas da forma $(3 - \lambda, -1 + 2\lambda, 4 + 3\lambda)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Em termo de equações paramétricas, sua equação fica:

$$l: \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases}$$

Exemplo 4.3. Verifique se o ponto $p = (1, 1, 1)$ pertence a reta r que passa pelo ponto $m = (1, 1, -1)$ e é paralela ao vetor $v = (1, 2 - 1)$.

Solução: As equações paramétricas associadas à reta são:

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

Assim, o ponto $p = (1, 1, 1)$ pertence a reta r se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1, 1, 1) = (1 + \lambda, 1 + 2\lambda, -1 - \lambda),$$

Daí, temos as três identidades

$$1 + \lambda = 1, \quad 1 + 2\lambda = 1 \quad \text{e} \quad -1 - \lambda = 1.$$

Das duas primeiras, obtemos $\lambda = 0$ e da última, $\lambda = 2$, que é uma contradição. Portanto, $p \notin r$.

4.3 Equação do plano

Para determinar a *equação cartesiana* do plano no espaço, aplicaremos a noção de produto interno.

Seja $\Gamma_\eta(p)$ o plano que passa pelo ponto p e é normal ao vetor η . Então

$$q \in \Gamma \Leftrightarrow \overrightarrow{qp} \perp \eta \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{qp}, \eta \rangle = 0$$

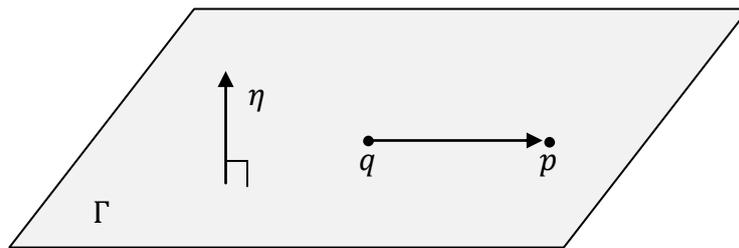


Figura 0.2 - $\overrightarrow{qp} \perp \eta \Leftrightarrow q \in \Gamma$

Assim, escrevendo em termos de coordenadas, $q = (x, y, z)$, $p = (a, b, c)$ e $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, temos na última condição:

$$\langle \overrightarrow{qp}, \eta \rangle = 0$$

$$\langle (x - a, y - b, z - c), (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \rangle = 0$$

$$\eta_1(x - a) + \eta_2(y - b) + \eta_3(z - c) = 0$$

$$\eta_1x + \eta_2y + \eta_3z - (\eta_1a + \eta_2b + \eta_3c) = 0.$$

Agora, fazendo $k = -(\eta_1a + \eta_2b + \eta_3c)$, temos a *equação cartesiana* do plano:

$$\Gamma_\eta(p) : \eta_1x + \eta_2y + \eta_3z + k = 0.$$

Adotaremos uma notação especial para o plano que contém a origem. Usaremos apenas a notação Γ_η em vez de $\Gamma_\eta(o)$. Para este caso particular, a equação do plano é a equação homogênea da forma:

$$\Gamma_\eta : \eta_1x + \eta_2y + \eta_3z = 0.$$

Temos que, Γ_η é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 de dimensão dois.

Exemplo 4.4. Determinar a equação cartesiana do plano Γ que passa pelo ponto $p = (1, 1, 2)$ e é normal ao vetor $\eta = (1, 2, -3)$.

Solução: Sabemos que $\eta = (1, 2, -3) \perp \Gamma$, daí, temos: $\Gamma_\eta(p) : 1x + 2y + (-3)z + k = 0$, onde $k = -(1(1) + 2(1) + (-3)(2)) = 3$. Portanto, $\Gamma_\eta(p) : x + 2y - 3z + 3 = 0$ é a equação do plano.

Exemplo 4.5. (Plano determinado por três pontos não colineares)

Dados três pontos distintos de \mathbb{R}^3 , digamos $a = (1, 2, 1)$, $b = (3, 1, 0)$ e $c = (4, 0, 2)$. Verificamos primeiro se eles são não colineares, ou seja, verificamos se o determinante $\det [a \ b \ c]$ é diferente de zero. Façamos:

$$\det [a \ b \ c] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -14 \neq 0.$$

Logo, os pontos considerados formam um triângulo, isto é, são não colineares.

Agora, obtendo os vetores,

$$\begin{cases} u = b - a = (2, -1, -1) \\ v = c - a = (3, -2, 1). \end{cases}$$

Esses vetores são paralelos ao plano procurado. Pelo produto vetorial encontramos o vetor normal ao plano, o vetor:

$$\eta = u \times v = \left(\det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \right) = (-3, -5, -1)$$

Daí, a equação do plano é dada por:

$$\Gamma_\eta(a) : 3x + 5y + z = 14$$

Podemos verificar que as coordenadas dos pontos a, b e c satisfazem a equação acima. Portanto, eles pertencem ao plano $\Gamma_\eta(a)$. A figura 4.3 apresenta o plano.

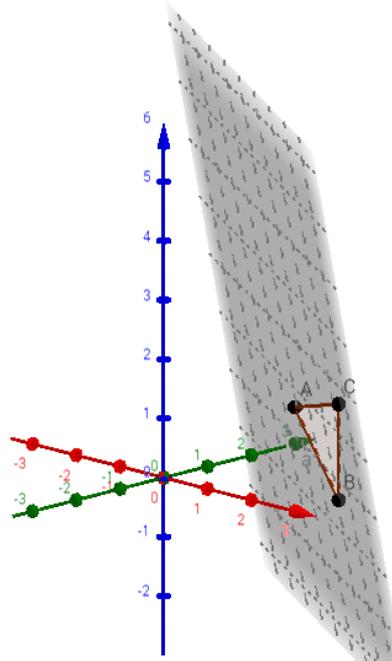


Figura 0.3 – Plano determinado por três pontos não colineares

Em \mathbb{R}^3 , a interseção de dois planos não paralelos determina uma reta. Seja r a reta obtida pela interseção dos planos $\Gamma_\eta(a)$ e $\Gamma_\nu(b)$. Os vetores normais $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ e $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ aos planos $\Gamma_\eta(a)$ e $\Gamma_\nu(b)$, respectivamente, são não colineares. Assim, r pode ser representado pelo sistema:

$$r: \begin{cases} \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z + k_1 = 0 \\ \nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z + k_2 = 0 \end{cases}$$

Se os dois planos contém a origem, então o sistema linear acima é homogêneo, $k_1 = k_2 = 0$. Nesse caso, r é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 , e o vetor direção de r pode ser o vetor $\eta \times \nu$.

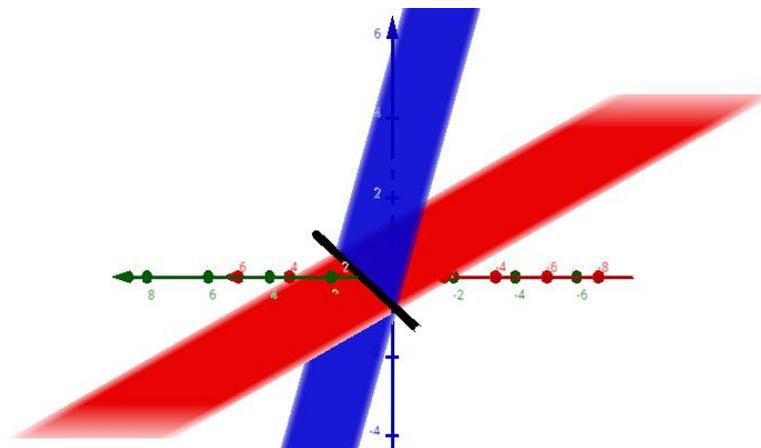


Figura 0.4 – Reta determinada pela interseção de dois planos distintos

Proposição 4.6. *Se Γ_η e Γ_ν são dois planos distintos do \mathbb{R}^3 contendo a origem, então a interseção dos planos é uma reta Euclidiana do \mathbb{R}^3 contendo a origem e formada pelos múltiplos do vetor $u = \eta \times \nu$.*

Demonstrações:

Para os dois planos, temos

$$\Gamma_\eta = \{x \in \mathbb{R}^3; \langle x, \eta \rangle = 0\}, \text{ e}$$

$$\Gamma_\nu = \{y \in \mathbb{R}^3; \langle y, \nu \rangle = 0\}.$$

Daí, obteremos que

$$\Gamma_\eta \cap \Gamma_\nu = \{z \in \mathbb{R}^3; \langle z, \eta \rangle = 0 \text{ e } \langle z, \nu \rangle = 0\}.$$

Assim, chegamos que

$$\Gamma_\eta \cap \Gamma_\nu = \{\lambda(\eta \times \nu), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Do capítulo 1, temos que

$$\langle \eta, \eta \times \nu \rangle = 0 = \langle \nu, \eta \times \nu \rangle.$$

Logo,

$$\langle \eta, \lambda(\eta \times \nu) \rangle = \lambda \langle \eta, \eta \times \nu \rangle = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Daí, o vetor

$$\lambda(\eta \times \nu) \in \Gamma_\eta, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Da mesma forma, temos

$$\langle \nu, \lambda(\eta \times \nu) \rangle = \lambda \langle \nu, \eta \times \nu \rangle = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\lambda(\eta \times \nu) \in \Gamma_\eta \cap \Gamma_\nu, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, sabemos que

$$z \in \Gamma_\eta \cap \Gamma_\nu \implies \langle z, \eta \rangle = \langle z, \nu \rangle = 0$$

Da proposição 2.6, temos que

$$(\eta \times v) \times z = \langle \eta, z \rangle v + \langle v, z \rangle \eta = 0$$

Assim, segue que os vetores $(\eta \times v)$ e z são L.D. desta forma existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$z = \lambda(\eta \times v).$$

■

4.4 Esfera em \mathbb{R}^3

Para uso futuro, estudaremos algumas noções sobre a esfera em \mathbb{R}^3 . Aplicando os conceitos de norma e produto interno de vetores no espaço, faremos o estudo da esfera.

Definição 4.7. A normal ou comprimento do vetor $v = \overrightarrow{ab}$ do espaço é o número

$$\|v\| = d(a, b) = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Definição 4.8. A esfera \mathcal{E} de centro O e raio $r > 0$ é o conjunto formado por todos os pontos $P \in \mathbb{R}^3$ cuja distância ao centro O é igual a r :

$$\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid d(P, O) = r\}$$

Daí, em termos de coordenadas dos pontos $O = (a, b, c)$ e $P = (x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 , obtemos a seguinte equação para a esfera:

$$d(P, O) = r$$

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} = r$$

Daí, elevando ambos os membros da equação ao quadrado, obtemos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Exemplo 4.9. Mostre, completando os quadrados, que a equação de segundo grau

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 1,$$

representa uma esfera \mathcal{E} . Determine o centro e o raio de \mathcal{E} .

Solução: Completando os quadrados na equação, temos:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z &= 1 \\
 \Leftrightarrow (x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) + (z^2 - 6z) &= 1 \\
 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 - 6z + 9) &= 1 + 1 + 4 + 9 \\
 \Leftrightarrow (x^2 - 1) + (y^2 + 2) + (z^2 - 2) &= 15.
 \end{aligned}$$

Portanto, a equação representa a esfera \mathcal{E} de centro $C = (1, -2, 3)$ e raio $r = \sqrt{15}$.

A esfera que tem centro na origem apresenta a seguinte equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

A esfera em \mathbb{R}^3 com centro na origem, $o = (0,0,0)$, e raio $r = 1$ é denotada por \mathbb{S}^2 e é chamada de *esfera unitária canônica*. Sendo

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

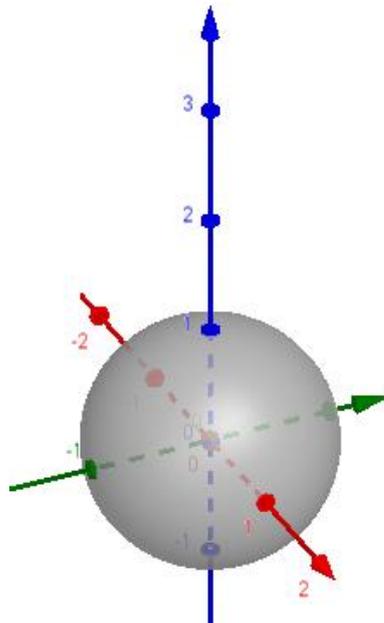


Figura 0.5 – Esfera Unitária Canônica

5 GEOMETRIA ELÍPTICA

A Geometria Elíptica é conhecida também como *Geometria Esférica* que apresenta a *esfera unitária canônica* \mathbb{S}^2 como um modelo de “plano”. Nesta Geometria, as retas são os grandes *círculos unitários* de \mathbb{S}^2 . A interseção entre quaisquer duas *retas elípticas* distintas acontece em dois pontos, daí o nome *Geometria Elíptica Dupla*.

Diferente da Geometria Euclidiana, na Geometria Elíptica não existe o axioma de ordem e não tem veracidade para o quinto postulado de Euclides. Pois, dado uma reta l e um ponto P não pertencente à reta l , não existe reta paralela a l passando por P . Logo, é uma geometria que não existem retas paralelas.

Dois pontos distintos de um círculo divide-o em dois segmentos de círculo, assim um segmento de reta elíptica com extremidades P e Q fica bem determinado quando indicamos o seu interior. A região denominada ângulo no plano Euclidiano terá como correspondente na Geometria Elíptica uma região denominada *lua*.

5.1 Axiomas da Geometria Elíptica

I. Termos indefinidos

Ponto, reta, plano, pertence e congruência.

II. Axiomas de Incidência

I_1 - Para cada dois pontos distintos existe uma reta que os contém.

I_2 - Toda reta contém pelo menos dois pontos.

I_3 - Existem pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta e todos os pontos estão o mesmo plano.

III. Axiomas de ordem (não existem)

IV. Axiomas de congruência

C_1 - Se P e Q são dois pontos numa reta l_η e P' é um outro ponto de uma reta $l_{\eta'}$, não necessariamente distinta da anterior, então é sempre possível encontrar um ponto B' em $l_{\eta'}$ tais que os segmentos \overline{PQ} e $\overline{P'Q'}$ são congruentes.

C_2 - Se um segmento $\overline{P'Q'}$ e um segmento $\overline{P''Q''}$ são congruentes a um mesmo segmento \overline{PQ} então os segmentos $\overline{P'Q'}$ e $\overline{P''Q''}$ são congruentes entre si.

C_3 - Sobre uma reta l_η , sejam \overline{PQ} e \overline{QR} dois segmento da mesma que, exceto por Q não têm pontos em comum. Além disto, sobre uma outra ou a mesma reta $l_{\eta'}$, sejam $\overline{P'Q'}$ e $\overline{Q'R'}$

dois segmentos que, exceto por Q' não têm pontos em comum. Neste caso, se $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$ e $\overline{QR} = \overline{Q'R'}$, então $\overline{PR} = \overline{P'R'}$.

C_4 - Se $L_{\eta v}$ é uma lua e se $l_{v'}$ é uma reta elíptica, então existem duas retas elípticas $l_{\eta'}$ e $l_{v''}$ tais que $L_{\eta v} = L_{\eta'v'} = L_{-v'v''}$. Além disto, cada lua é congruente a si mesma.

C_5 - Se para dois triângulos Δ_{uvw} e $\Delta_{u'v'w'}$ temos

$$\overline{uv} = \overline{u'v'}, \overline{uw} = \overline{u'w'} \text{ e } L_{\eta v} = L_{\eta'v'}, \text{ com}$$

$\eta = u \times v, v = w \times u$ e $\eta' = u' \times v', v' = w' \times u'$, então Δ_{uvw} é congruente à $\Delta_{u'v'w'}$.

V. Axioma das paralelas

Seja l_η uma reta e P um ponto não pertencente a l_η . Então toda reta que passa por P intersesta l_η .

VI. Axiomas de continuidade

Existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta menos um dos seus pontos.

5.2 Um Modelo para o Plano Elíptico (Geometria Elíptica)

Para a elaboração de um modelo para o Plano Elíptico, denominamos:

- Chamaremos a esfera unitária canônica \mathbb{S}^2 em \mathbb{R}^3 de Plano Elíptico e seus elementos de pontos Elípticos.
- Em \mathbb{S}^2 , um grande círculo será chamado de reta Elíptica.

Um subconjunto $l \subset \mathbb{S}^2$ é um grande círculo se $l = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta$, com Γ_η um plano que incide na origem e tem vetor normal η . Assim, para ficar claro qual vetor normal está sendo usado para definir l denotamos por $l = l_\eta$. A figura abaixo mostra um exemplo de uma reta elíptica (*círculo unitário*) obtida pela interseção do plano Γ_η com a esfera \mathbb{S}^2 .

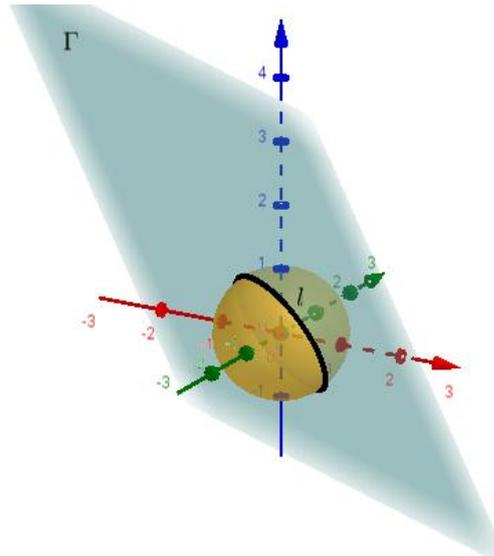


Figura 0.1 - $l = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta$

Assim, uma reta elíptica é um subconjunto do plano elíptico formado pelos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfaz as equações:

$$l_\eta: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z = 0 \end{cases}$$

5.3 Distância elíptica

Exploraremos o estudo do conjunto $\mathbb{S}^2 = \{v \in \mathbb{R}^3; \|v\| = 1\}$ equipado com uma função distância. Dados u, v em \mathbb{S}^2 , a medida do ângulo entre estes dois vetores unitários é indicado por $\theta(u, v) \in [0, \pi]$. Chamaremos de *distância elíptica* entre dois vetores $u, v \in \mathbb{S}^2$ a seguinte aplicação:

$$d: \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ definida por } d(u, v) = \theta(u, v).$$

No primeiro capítulo temos os resultados:

$$\cos \theta(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|},$$

e também que

$$\text{sen } \theta(u, v) = \frac{\|u \times v\|}{\|u\| \|v\|}.$$

Como u e v são dois vetores unitários, daí nos resultados acima fica:

$$\cos \theta(u, v) = \langle u, v \rangle \quad \text{e} \quad \text{sen } \theta(u, v) = \|u \times v\|.$$

Proposição 5.1. Se $\theta(u, v) = d(u, v)$, então

$$0 \leq d(u, v) \leq \pi \quad \text{e} \quad d(u, v) = \pi \Leftrightarrow v = -u.$$

Demonstração:

Para a desigualdade podemos partir direto da definição, pois $d(u, v) = \theta(u, v) \in [0, \pi]$. Assim, temos que $0 \leq d(u, v) \leq \pi$.

Verificamos agora, $d(u, v) = \pi \Leftrightarrow v = -u$.

(\Rightarrow) Partindo de $d(u, v) = \pi$, obtemos

$$\|u \times v\| = \text{sen } \theta(u, v) = \text{sen } \pi = 0,$$

temos também que

$$\langle u, v \rangle = \cos \theta(u, v) = \cos \pi = -1.$$

Sabemos que $\|u \times v\| = 0 \Leftrightarrow v$ e u são linearmente dependentes, ou seja, $v = \lambda u$.

Logo,

$$\langle u, v \rangle = \langle u, \lambda u \rangle = \lambda \langle u, u \rangle = -1 \Rightarrow \lambda \|u\|^2 = -1 \Rightarrow \lambda = -1.$$

Portanto, $v = -u$.

(\Leftarrow) Reciprocamente, se $v = -u$, então

$$\cos \theta(u, v) = \cos \theta(u, -u) = \langle u, -u \rangle = -1 \langle u, u \rangle = -1 \|u\|^2 = -1.$$

Assim, $\cos \theta(u, v) = -1$ com $\theta(u, v) \in [0, \pi]$, logo, $\theta(u, v) = \pi$. Portanto, $d(u, v) = \pi$.

Proposição 5.2. A distância elíptica d , satisfaz:

$$D_1- d(u, v) \geq 0 \text{ e } d(u, v) = 0 \text{ se, e só se, } u = v; \text{ (positiva definida)}$$

$$D_2- \theta(u, v) = d(v, u); \text{ (simetria)}$$

$$D_3- d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w); \text{ (desigualdade triangular).}$$

Ou seja, d é uma função distância em \mathbb{S}^2 .

Demonstração:

Dados $u, v, w \in \mathbb{S}^2$, quaisquer.

$$D_1- d(u, v) \geq 0 \text{ e } d(u, v) = 0 \text{ se, e só se, } u = v; \text{ (positiva definida)}$$

Da definição $d(v, u) = \theta(u, v) \in [0, \pi]$ temos que $d(u, v) \geq 0$.

(\Rightarrow) Para $d(v, u) = \theta(u, v) = 0$ temos

$$\|u \times v\| = \text{sen } \theta(u, v) = \text{sen } 0 = 0$$

Assim, $\|u \times v\| = 0$. Isto só acontece quando $u = \lambda v$.

Temos também, que

$$\langle u, v \rangle = \cos \theta(u, v) = \cos 0 = 1$$

Daí, podemos afirmar que

$$\langle u, v \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle = 1 \Rightarrow \lambda \|v\|^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

Portanto, $u = v$.

(\Rightarrow) Reciprocamente, se $u = v$ então

$$\cos \theta(u, v) = \cos \theta(v, v) = \langle u, v \rangle = \|v\|^2 = 1.$$

Como $\theta(u, v) \in [0, \pi]$ e $\cos \theta(u, v) = 1$, então $\theta(u, v) = 0 = d(v, u)$.

D₂- $\theta(u, v) = d(v, u)$; (*simetria*)

Pela propriedade comutativa do produto interno temos

$$\cos \theta(u, v) = \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle = \cos \theta(v, u)$$

Como $\theta(u, v) \in [0, \pi]$ e $\cos \theta(u, v) = \cos \theta(v, u)$, então $\theta(u, v) = \theta(v, u)$, assim,

$$d(u, v) = \theta(u, v) = \theta(v, u) = d(v, u).$$

D₃- $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$; (*desigualdade triangular*).

Faremos a demonstração considerando dois casos, vejamos:

Caso 1: $\pi \leq \theta(u, v) + \theta(v, w)$

Sabemos que $\theta(u, w) \in [0, \pi]$, assim temos neste caso que

$$\theta(u, w) \leq \pi \leq \theta(u, v) + \theta(v, w), \text{ portanto, } d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w).$$

Caso 2: $\theta(u, v) + \theta(v, w) \leq \pi$. A função $\cos: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é decrescente.

Agora, se provarmos a desigualdade: $\cos(\theta(u, v) + \theta(v, w)) \leq \cos \theta(u, w)$, teremos como consequência a desigualdade: $\theta(u, w) \leq \theta(u, v) + \theta(v, w)$.

Fazendo

$$\cos(\theta(u, v) + \theta(v, w)) = \cos \theta(u, v) \cos \theta(v, w) - \text{sen } \theta(u, v) \text{sen } \theta(v, w). \text{ Temos}$$

$$\cos (\theta(u, v) + \theta(v, w)) = \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \|u \times v\| \|v \times w\|.$$

Pela a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$|\langle u \times v, v \times w \rangle| \leq \|u \times v\| \|v \times w\|,$$

Assim,

$$-\|u \times v\| \|v \times w\| \leq \langle u \times v, v \times w \rangle \leq \|u \times v\| \|v \times w\|,$$

Logo,

$$\|u \times v\| \|v \times w\| \geq -\langle u \times v, v \times w \rangle \geq -\|u \times v\| \|v \times w\|.$$

Daí, somando $\langle u, v \rangle \langle v, w \rangle$ em ambos os lados da inequação anterior, fica:

$$\langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \langle u \times v, v \times w \rangle \geq \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \|u \times v\| \|v \times w\|.$$

Assim, teremos que

$$\cos (\theta(u, v) + \theta(v, w)) \leq \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \langle u \times v, v \times w \rangle$$

Agora, utilizando o item II da proposição 2.6, temos

$$\begin{aligned} \cos (\theta(u, v) + \theta(v, w)) &\leq \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - [\langle u \times v \rangle \langle v, w \rangle - \langle u, w \rangle \langle v, v \rangle] \\ &= \langle u, v \rangle \langle v, w \rangle - \langle u \times v \rangle \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle \langle v, v \rangle \\ &= \langle u, w \rangle \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

Sabemos que $\langle v, v \rangle = \|v\|^2 = 1$ e que $\langle u, w \rangle = \cos \theta(u, w)$, assim obtemos o resultado desejado,

$$\cos (\theta(u, v) + \theta(v, w)) \leq \cos \theta(u, w).$$

Diante das definições apresentadas acima, agora já podemos verificar o grupo de axiomas de Incidência da Geometria Elíptica. Inicialmente, apresentamos a seguinte definição e em seguida uma proposição, para depois verificar o grupo de axiomas de incidência.

Definição 5.3. Dizemos que $v \in \mathbb{S}^2$ e uma reta elíptica $l_\eta \subset \mathbb{S}^2$ são incidentes se $v \in l_\eta$.

Proposição 5.4. (Critério de Incidência) Sejam um vetor $v \in \mathbb{S}^2$ e um grande círculo $l_\eta \subset \mathbb{S}^2$, então v e l_η são incidentes se, e somente se, $\langle v, \eta \rangle = 0$.

Demonstração:

(\Rightarrow) Se v e l_η são incidentes, então $v \in l_\eta = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta$. Assim, $v \in \Gamma_\eta = \{w \in \mathbb{R}^3; \langle w, \eta \rangle = 0\}$, daí segue que $\langle v, \eta \rangle = 0$.

(\Leftarrow) Reciprocamente, se $\langle v, \eta \rangle = 0$, então $v \in \Gamma_\eta = \{w \in \mathbb{R}^3; \langle w, \eta \rangle = 0\}$, como $v \in \mathbb{S}^2$, segue que $v \in l_\eta = \mathbb{S}^2 \cap \Gamma_\eta$. Portanto, v e l_η são incidentes.

Verificamos agora a validade dos axiomas de incidência,

I_1 - PARA CADA DOIS PONTOS DISTINTOS EXISTE UMA RETA QUE OS CONTÉM.

Sejam v e $u \in \mathbb{S}^2$ dois pontos diferentes. O produto vetorial $\eta = u \times v$ é diferente do vetor nulo se, e somente se, $u \neq -v$. Se este for o caso, consideramos o plano Γ_η e a reta elíptica $l_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$. Como $\langle v, \eta \rangle = 0 = \langle u, \eta \rangle$, segue pelo critério de incidência que v e u pertencem à reta l_η , logo, existe uma reta determinada por v e u . A reta l_η é única, pois só existe um plano contendo v e u e a origem.

Para $u = -v$, devemos considerar um vetor qualquer $\eta \in \mathbb{R}^3$ tal que $\langle u, \eta \rangle = 0$. De $u = -v$, segue que $\langle v, \eta \rangle = 0$. Portanto, pela condição de incidência, $v, u \in l_\eta$. Assim, não existe uma única reta passando por v e u , pois existem infinitos planos contendo a origem, $v = -u$ e u , com os três pontos colineares em \mathbb{R}^3 .

I_2 - TODA RETA CONTÉM PELO MENOS DOIS PONTOS.

Seja a reta elíptica l_η com $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, então a equação

$$\langle (x, y, z), \eta \rangle = \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z = 0,$$

tem infinitas soluções. Fazendo $v \neq 0$ e $u \neq 0$ dois pontos quaisquer do conjunto solução, com v diferente de um múltiplo de u , então temos:

$$\left\langle \frac{v}{\|v\|}, \eta \right\rangle = \frac{1}{\|v\|} \langle v, \eta \rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{u}{\|u\|}, \eta \right\rangle = \frac{1}{\|u\|} \langle u, \eta \rangle = 0.$$

E que

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1 = \left\| \frac{u}{\|u\|} \right\|$$

Portanto, $\frac{v}{\|v\|}$ e $\frac{u}{\|u\|}$ são dois pontos distintos de l_η .

Proposição 5.5. (Equação de colinearidade para três pontos) *Se $u, v, w \in \mathbb{S}^2$, então u, v, w são colineares se, e somente se, $\det[u, v, w] = 0$.*

Demonstração:

Vamos dividir a demonstração em três casos.

Caso 1: Seja u, v, w não todos distintos. Sem perda de generalidade vamos supor que $u = v$. Já estudamos que dois pontos distintos determinam uma reta, daí, podemos afirmar que u, v e w são colineares, já que $u = v$. De outra forma, já é sabido que se duas linhas ou duas colunas de uma matriz forem iguais o seu determinante é igual à zero, assim $\det[u, v, w] = 0$. Portanto, não há o que provar.

Caso 2: Vamos considerar agora u, v, w distintos, tal que $v = -w$. Daí, temos u e w colineares, ou seja, existe reta elíptica l_η com $u, w \in l_\eta$. Pelo critério de incidência (Proposição 5.4) temos:

$$\begin{aligned} w \in l_\eta \Rightarrow \langle w, \eta \rangle = 0 &\Rightarrow -\langle w, \eta \rangle = 0 \\ \Rightarrow \langle -w, \eta \rangle = 0 &\Rightarrow \langle v, \eta \rangle = 0 \\ \Rightarrow v \in l_\eta. \end{aligned}$$

Logo, u, v, w são colineares.

Temos também que $\det[u, v, w] = 0$, pois, a Matriz apresenta duas linhas proporcionais. Portanto, neste caso nada há provar.

Caso 3: Vamos considerar agora u, v, w distintos, com $v \neq -w$. Por definição, u, v e w são colineares se, e somente se, existe uma reta $l_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$ tal que $v, u, w \in l_\eta$.

De $v \neq -w$, temos que existe uma única reta elíptica incidindo em v e w . Tal reta é dada por $l_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$ com $\eta = v \times w$.

Agora, os pontos $u, v, w \in l_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$ se, e somente se, $u, v, w \in \Gamma_\eta$ com $\eta = v \times w$.

Portanto, u, v e w são colineares em \mathbb{S}^2 se, e somente se,

$$\langle u, \eta \rangle = \langle v, \eta \rangle = \langle w, \eta \rangle = 0.$$

Temos que $\langle v, \eta \rangle = \langle v, v \times w \rangle = 0$ e $\langle w, \eta \rangle = \langle w, v \times w \rangle = 0$, assim u, v e w são colineares se, e somente se, $\langle u, \eta \rangle = 0$. De $\langle u, \eta \rangle = \langle u, v \times w \rangle = \det[u, v, w]$, temos que u, v, w são colineares se, e somente se, $\det[u, v, w] = 0$.

I_3 - EXISTEM PELO MENOS TRÊS PONTOS QUE NÃO ESTÃO SOBRE UMA MESMA RETA E TODOS OS PONTOS ESTÃO O MESMO PLANO.

Como estamos trabalhando com pontos do plano elíptico \mathbb{S}^2 , para a demonstração deste axioma, basta mostrar que “Existe pelo menos três pontos não colineares”. Veja, que da proposição anterior, temos que se $u, v, w \in \mathbb{S}^2$ e $\det[u, v, w] \neq 0$ então u, v e w não são pontos de uma mesma reta elíptica.

Proposição 5.6. (Concorrência de duas retas) *Duas retas elípticas distintas, digamos l_η e l_ν , sempre se intersectam em dois pontos distintos, a saber:*

$$u_1 = \frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \eta \times \nu \quad \text{e} \quad u_2 = -\frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \eta \times \nu$$

Demonstração:

Consideramos as retas $l_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$ e $l_\nu = \Gamma_\nu \cap \mathbb{S}^2$.

Veja que a interseção entre l_η e l_ν , é dada por:

$$l_\eta \cap l_\nu = \Gamma_\eta \cap \Gamma_\nu \cap \mathbb{S}^2,$$

Temos pela proposição 4.6 que

$$\Gamma_\eta \cap \Gamma_\nu = \{\lambda(\eta \times \nu); \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Sabemos que os vetores de \mathbb{S}^2 são unitários. Assim, dado um vetor w pertencente a

$$l_\eta \cap l_\nu = \Gamma_\eta \cap \Gamma_\nu \cap \mathbb{S}^2,$$

Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $w = \lambda(\eta \times \nu)$, com $\|w\| = 1$.

Daí, obteremos que

$$1 = \|w\| = \|\lambda(\eta \times \nu)\| = |\lambda| \|\eta \times \nu\|.$$

Logo, $|\lambda| = \frac{1}{\|\eta \times \nu\|}$, isto é, $\lambda = \frac{1}{\|\eta \times \nu\|}$ ou $\lambda = -\frac{1}{\|\eta \times \nu\|}$.

Portanto, os únicos dois pontos de concorrência entre l_η e l_ν são:

$$u_1 = \frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \eta \times \nu \quad \text{e} \quad u_2 = -\frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \eta \times \nu$$

■

A figura 5.2 apresenta uma ilustração da interseção entre as retas elípticas l_η e l_ν no ponto u_1 e no seu antípoda u_2 do plano elíptico.

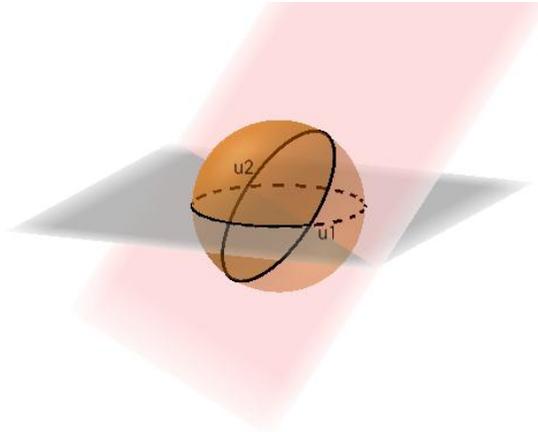


Figura 0.2 – Interseção de duas retas Elípticas

Para o axioma das paralelas, sua veracidade segue da proposição 5.6, pois, Se l_η é uma reta e P um ponto não pertencente a l_η . Então toda reta que passa por P intersecta l_η .

Como foi visto na proposição anterior a interseção acontece sempre em dois pontos antipodais.

6 GEOMETRIA PROJETIVA

Na geometria euclidiana é apresentado um postulado (postulado das paralelas) garantindo a existência de retas que não se intersectam. Neste caso, diz-se que elas são paralelas. Este postulado não está em conformidade com a realidade que temos visualmente.

Diante de uma longa ferrovia, temos que seus trilhos são dispostos paralelamente, mas se olharmos ao longo desta ferrovia nossa visão nos diz que há em um ponto muito distante (chamado ponto de fuga) a interseção dos trilhos. Conforme figura abaixo:



Figura 0.1 – Retas que se intersectam

A partir daí surge um novo modelo de geometria bidimensional sem retas paralelas, a Geometria Projetiva, que teve início com o Matemático Pappus nascido em Alexandria (400 a.C.), que descobriu algumas proposições não métricas, como o famoso teorema que carrega o seu nome: o Teorema de Pappus. Mas que de fato foi durante o Renascimento, com a intenção de dar realismo às artes e repassar de forma fiel às imagens obtida pela visão humana, introduzindo a noção de profundidade, que a Geometria Projetiva ganhou espaços nas artes e tornou-se um campo de conhecimento.

A nova Geometria trata do mundo que vemos, assim é assumida a existência de um ponto no horizonte em que as retas paralelas se intersectaram.

Nos tópicos seguintes apresentamos os axiomas da Geometria Projetiva, modelo de plano projetivo e caracterizamos analiticamente um modelo de abordagem dessa área de conhecimento.

6.1 Axiomas da Geometria Projetiva

I. Termos Indefinidos

Ponto, reta, plano, pertence.

II. Axiomas de Incidência

I_1 - Quaisquer duas retas são incidentes com pelo menos um ponto.

I_2 - Para cada dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.

I_3 - Duas retas distintas sempre se encontram em um único ponto.

III. Axiomas de Ordem (Não existem)

IV. Axiomas de congruências (Não existem)

V. Axiomas das paralelas

Seja l uma reta e A um ponto não em l . então toda reta que incide em A intersecta l .

VI. Axiomas de continuidade

Existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta menos um dos seus pontos.

6.2 Um Modelo para o Plano Projetivo \mathbb{RP}^2 (Geometria Projetiva)

Inicialmente, vamos considerar o conjunto $\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$, que é o \mathbb{R}^3 retirado o vetor nulo. Assim, $\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$ é um subconjunto do \mathbb{R}^3 . Neste caso, diremos que o conjunto $\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$ é o \mathbb{R}^3 perfurado na origem. A partir deste conjunto construiremos o chamado plano projetivo.

Usaremos as mesmas terminologias ou notações usadas para subconjuntos contidos em \mathbb{R}^3 . Um plano Γ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$ é um plano perfurado na origem se ele contiver a origem. Caso contrário, será igual a um plano do \mathbb{R}^3 . Da mesma forma, uma “reta” em $\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$ pode ou não ser perfurada, caso incida ou não na origem. Podemos chamar o conjunto $\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$ de subconjunto dos vetores não nulos de \mathbb{R}^3 .

Definição 6.1. O plano projetivo \mathbb{RP}^2 , será o conjunto quociente obtido de $\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$, com a seguinte relação de equivalência:

$$v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tal que } v = \lambda w.$$

Um elemento em $\mathbb{RP}^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}) / \sim$, é chamado de ponto projetivo.

Um ponto de \mathbb{RP}^2 (classe de equivalência) será representado por uma letra minúscula com uma barra sobreposta, por exemplo, \bar{v} , onde v é um vetor não nulo de \mathbb{R}^3 . Um ponto projetivo \bar{v} é um subconjunto de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, formado pelo conjunto dos múltiplos não nulos de v . Assim, temos

$$\bar{v} = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \lambda \neq 0\}$$

Portanto, um ponto projetivo \bar{v} é uma reta perfurada em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Para cada classe \bar{v} podemos escolher um representante que tenha norma igual a 1, isto é, esteja em uma esfera unitária.

A aplicação projeção é a função definida por

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{RP}^2 \\ v &\mapsto \psi(v) = \bar{v} \end{aligned}$$

Seja $v = (x, y, z)$ um ponto de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, a classe de equivalência associada a v , ou melhor, a sua imagem pela aplicação projeção ψ , é representada por $\psi(v) = \bar{v}$ com $\bar{v} = (x : y : z)$, tal tripla recebe o nome de *coordenadas homogêneas* de \bar{v} .

6.3 Relação entre \mathbb{S}^2 e \mathbb{RP}^2

Para estudar a relação entre \mathbb{S}^2 e \mathbb{RP}^2 , vamos considerar um ponto $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$, com $\bar{v} = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, daí podemos afirmar que o plano elíptico intersesta a classe \bar{v} em dois pontos distintos e diametralmente opostos, a saber

$$u = \frac{1}{\|v\|} v \quad \text{e} \quad -u = -\frac{1}{\|v\|} v$$

tais pontos são unitários, vejamos:

$$\|u\| = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1, \quad \text{e}$$

$$\|-u\| = \|(-1) \cdot u\| = |-1| \cdot \|u\| = 1.$$

Ainda podemos observar que, se

$$w \in \mathbb{S}^2 \cap \bar{v}$$

então

$$w = \lambda v; \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{e} \quad \|w\| = 1$$

Assim, pela afirmação A_2 da proposição 2.3 segue que

$$1 = \|w\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$$

Daí, as únicas possibilidades para λ , são $\lambda = \frac{1}{\|v\|}$ e $\lambda = -\frac{1}{\|v\|}$.

Portanto, $w = \frac{1}{\|v\|}v$ ou $w = -\frac{1}{\|v\|}v$.

Observação 6.2. Se v é um vetor de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $\overline{\lambda v} = \overline{\lambda v}$.

Vejam os:

$$\overline{\lambda v} = \{k(\lambda v), k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \{(k\lambda)v, k\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \{hv, h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \overline{v}$$

Da observação anterior temos $\overline{u} = \overline{-u} = \overline{v}$, daí, podemos dizer que cada ponto $\overline{v} \in \mathbb{RP}^2$ contém dois representantes u e $-u$ da esfera unitária \mathbb{S}^2 .

A partir das considerações apresentadas acima, podemos considerar a restrição da função ψ ao plano elíptico \mathbb{S}^2 , a restrição

$$\begin{aligned} \psi_0: \mathbb{S}^2 &\rightarrow \mathbb{RP}^2 \\ v &\mapsto \overline{v} \end{aligned}$$

A função ψ_0 é sobrejetiva, pois,

$$\forall \overline{v} \in \mathbb{RP}^2, \exists \{u = \frac{1}{\|v\|}v, -u = -\frac{1}{\|v\|}v\} \in \mathbb{S}^2$$

tal que

$$\psi_0(u) = \psi_0(-u) = \overline{v}.$$

Assim, podemos construir um novo modelo para o plano projetivo, considerando a seguinte relação de equivalência em \mathbb{S}^2 , temos:

Dados $u, v \in \mathbb{S}^2$, a relação de equivalência

$$u \sim v \Leftrightarrow u = v \text{ ou } u = -v \text{ e}$$

$$\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2 / \sim$$

Assim, um ponto $\overline{v} \in \mathbb{RP}^2$ pode ser representado por $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{S}^2$ com $u_3 \geq 0$. Isto é, u pertence ao hemisfério norte da esfera unitária canônica,

$$\mathbb{H}_{e_3} = \{u \in \mathbb{S}^2; \langle u, e_3 \rangle \geq 0\}$$

Tomando a restrição da aplicação projeção ψ_0 a \mathbb{H}_{e_3} , temos:

$$\begin{aligned} \psi_{0|\mathbb{H}_{e_3}}: \mathbb{H}_{e_3} &\rightarrow \mathbb{RP}^2 \\ v &\mapsto \bar{v} \end{aligned}$$

A aplicação $\psi_{0|\mathbb{H}_{e_3}}$ é sobrejetiva, pois,

$$\forall \bar{v} \in \mathbb{RP}^2, \exists \begin{cases} u = \frac{v}{\|v\|} \in \mathbb{S}^2, & \text{se } u_3 > 0 \\ u, -u \in \mathbb{S}^2, & \text{se } u_3 = 0 \end{cases},$$

Tal que

$$\psi_{0|\mathbb{H}_{e_3}}\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \bar{v} \text{ e } \psi_{0|\mathbb{H}_{e_3}}\left(-\frac{v}{\|v\|}\right) = \bar{v}.$$

Considere a reta elíptica $r_{e_3} \subset \mathbb{S}^2$, onde

$$r_{e_3} = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{S}^2; u_3 = 0\},$$

Temos que a imagem de r_{e_3} pela aplicação ψ_0 é chamada de *pontos ideais* e denotada por I_∞ . Observe que o conjunto $\mathbb{H}_{e_3} - r_{e_3}$ é projetado biunivocamente sobre $\mathbb{RP}^2 - I_\infty$ pela aplicação ψ_0 .

6.4 Retas projetivas

Para o estudo das retas projetivas vamos usar a função projetiva $\psi_0: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ juntamente com os conceitos definidos em \mathbb{S}^2 .

Definição 6.3. Um subconjunto $r \subset \mathbb{RP}^2$ é uma reta projetiva se r for à imagem de uma reta elíptica pela projeção $\psi_0: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$.

No capítulo anterior, estudamos que uma reta elíptica l_η é o resultado da interseção de um plano Γ_η com o plano elíptico \mathbb{S}^2 . Denominamos uma reta projetiva obtida da imagem de l_η pela projeção $\psi_0: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$, por $l_{\bar{\eta}}$. assim,

$$l_{\bar{\eta}} = \psi_0(l_\eta).$$

Temos também uma definição através de planos sem um ponto.

Definição 6.4. Um subconjunto $r \subset \mathbb{RP}^2$ é uma reta projetiva se r for à imagem de um plano Γ pela projeção $\psi: \mathbb{R}^3 \setminus \{o\} \rightarrow \mathbb{RP}^2$.

Já estudamos que a equação de um plano $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ que contém a origem $O = (0,0,0)$ é determinada pelo seu vetor normal $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ com $\eta \neq O$. E sua representação é Γ_η com a seguinte equação linear:

$$\Gamma_\eta : \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z = 0.$$

O plano com vetor normal $\lambda\eta$ com $\lambda \neq 0$ é igual ao plano Γ_η , isto é, todo elemento da classe

$$\bar{\eta} = \{\lambda\eta, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

determina o mesmo plano Γ_η .

Exemplo 6.5. O vetor $\bar{e}_3 = (0:0:1) \in \mathbb{RP}^2$ nos dá a reta projetiva $l_{\bar{e}_3}$ formada pelos pontos ideais I_∞ e obtida pela projeção da l_{e_3} , onde l_{e_3} é a reta elíptica obtida pela interseção do plano xy com a esfera unitária.

6.5 Plano projetivo dual

Temos que cada ponto projetivo $\bar{\eta} \in \mathbb{RP}^2$ determina uma única reta projetiva $l_{\bar{\eta}}$ e cada reta projetiva $l_{\bar{\eta}} \subset \mathbb{RP}^2$ determina um único ponto projetivo (sua normal).

Denominamos *plano projetivo dual* como sendo o conjunto de todas as retas projetivas e denotamos por:

$$\mathbb{RP}^{2*} = \{l_{\bar{\eta}}, \bar{\eta} \in \mathbb{RP}^2\}$$

Assim, temos que $\mathbb{RP}^{2*} \subset \mathcal{P}(\mathbb{RP}^2)$, onde $\mathcal{P}(\mathbb{RP}^2)$ é o conjunto das partes de \mathbb{RP}^2 .

Existe uma correspondência biunívoca entre \mathbb{RP}^{2*} e \mathbb{RP}^2 , dada por

$$l_{\bar{\eta}} \leftrightarrow \bar{\eta}.$$

Logo, existem tantas retas projetivas quantos pontos projetivos.

Em resumo, já temos conhecimento do Plano Projetivo, ponto e reta projetiva. Com isso, temos artifícios para a verificação dos axiomas de incidência da Geometria Projetiva.

I_1 - QUAISQUER DUAS RETAS SÃO INCIDENTES COM PELO MENOS UM PONTO.

Para sua verificação necessitamos da seguinte proposição:

Proposição 6.6. (Condição de incidência) Dada uma reta projetiva $l_{\bar{\eta}} \in \mathbb{RP}^{2*}$ e um ponto projetivo $\bar{v} \in \mathbb{RP}^2$. Então, $l_{\bar{\eta}}$ e \bar{v} são incidentes se, e somente se, $\langle v, \eta \rangle = 0$.

Demonstração:

(\Rightarrow) Se \bar{v} e $l_{\bar{\eta}}$ são incidentes, então $\bar{v} \in l_{\bar{\eta}} = \psi_0(l_{\eta})$. Assim, $\bar{v} = \psi_0\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$ com $\frac{v}{\|v\|} \in l_{\eta} = \Gamma_{\eta} \cap \mathbb{S}^2$. Daí $\frac{v}{\|v\|} \in \Gamma_{\eta}$, isto é, $v \in \Gamma_{\eta}$, daí segue que $\langle v, \eta \rangle = 0$.

(\Leftarrow) Por outro lado, se $\langle v, \eta \rangle = 0$, então $v \in \Gamma_{\eta}$. Como Γ_{η} passa pela origem, segue que $\frac{v}{\|v\|} \in \Gamma_{\eta}$. Daí, temos que $\frac{v}{\|v\|} \in l_{\eta} = \Gamma_{\eta} \cap \mathbb{S}^2$, e pela aplicação projeção temos $\psi_0\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \bar{v}$, como $\bar{v} \in l_{\bar{\eta}} = \psi_0(l_{\eta})$. Portanto, \bar{v} e $l_{\bar{\eta}}$ são incidentes.

Dadas $l_{\bar{\eta}}, l_{\bar{v}} \in \mathbb{RP}^{2*}$. Existem $l_{\eta}, l_{\nu} \in \mathbb{S}^2$ tal que $\psi_0(l_{\eta}) = l_{\bar{\eta}}$ e $\psi_0(l_{\nu}) = l_{\bar{v}}$. Pela proposição 5.6, as retas elípticas l_{η} e l_{ν} concorrem em dois pontos, a saber:

$$u_1 = \frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \eta \times \nu \quad \text{e} \quad u_2 = -\frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \eta \times \nu.$$

Temos $\langle u_1, \eta \rangle = 0 = \langle u_1, \nu \rangle$ e $\langle u_2, \eta \rangle = 0 = \langle u_2, \nu \rangle$, assim $u_1, u_2 \in \Gamma_{\eta} \cap \Gamma_{\nu}$ e pela aplicação projeção $\psi_0(l_{\eta}) = l_{\bar{\eta}}$ e $\psi_0(l_{\nu}) = l_{\bar{v}}$. Assim $\psi_0\left(\frac{\eta \times \nu}{\|\eta \times \nu\|}\right) = \frac{\overline{\eta \times \nu}}{\|\eta \times \nu\|} \in l_{\bar{\eta}} \cap l_{\bar{v}}$.

Portanto, $l_{\bar{\eta}} \cap l_{\bar{v}} = \overline{\eta \times \nu}$.

■

I_2 - PARA CADA DOIS PONTOS DISTINTOS EXISTE UMA ÚNICA RETA QUE OS CONTÉM.

Sua validade será registrada pela proposição:

Proposição 6.7: (Equação de uma reta por dois pontos) *Por dois pontos projetivos distintos $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{RP}^2$ incide uma única reta projetiva, a saber,*

$$l_{\frac{\bar{v}}{\|v\|} \times \frac{\bar{w}}{\|w\|}} \in \mathbb{RP}^{2*}.$$

Demonstração:

Dados dois pontos distintos $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{RP}^2$. Tomando os respectivos representantes $\frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \in \mathbb{S}^2$ das classes \bar{v} e \bar{w} .

Temos $\frac{v}{\|v\|} \neq \pm \frac{w}{\|w\|}$, caso contrário teríamos $v = \lambda w$, com $\lambda = \pm \frac{\|v\|}{\|w\|} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

isto é, $\bar{v} = \bar{w}$.

Pelo produto vetorial, obtemos o vetor não nulo $\eta = \frac{v}{\|v\|} \times \frac{w}{\|w\|}$, e podemos destacar o plano Γ_η .

Usado produto interno, temos que

$$\langle v, \eta \rangle = \|v\| \left\langle \frac{v}{\|v\|}, \eta \right\rangle = 0 = \|w\| \left\langle \frac{w}{\|w\|}, \eta \right\rangle = \langle w, \eta \rangle,$$

logo, $v, w \in \Gamma_\eta$. Como Γ_η é o único plano de \mathbb{R}^3 contendo a origem e os pontos v e w . Assim, obteremos a reta elíptica l_η ,

$$l_\eta = \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2$$

Como $\frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \in \Gamma_\eta \cap \mathbb{S}^2 = l_\eta$, e $\psi_0\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \bar{v}$, $\psi_0\left(\frac{w}{\|w\|}\right) = \bar{w}$. Pela aplicação projeção, $\psi_0(l_\eta) = l_{\bar{\eta}}$. Logo \bar{v} e $\bar{w} \in l_{\bar{\eta}}$.

(Unicidade): Suponha que exista outra reta projetiva $l_{\bar{\theta}} \in \mathbb{R}\mathbb{P}^{2*}$ incidindo em \bar{v} e \bar{w} .

Assim, pela definição 6.3, existe uma reta elíptica l_θ , com $l_\theta = \Gamma_\theta \cap \mathbb{S}^2$ tal que $\psi_0(l_\theta) = l_{\bar{\theta}}$.

Os pontos $\frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|}$ pertencem a \mathbb{S}^2 , pois são unitários e como

$$\begin{cases} \left\langle \frac{v}{\|v\|}, \theta \right\rangle = 0 \\ \left\langle \frac{w}{\|w\|}, \theta \right\rangle = 0 \end{cases}$$

Logo, pertencem ao plano Γ_θ . E desta forma, $\frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \in l_\theta = \Gamma_\theta \cap \mathbb{S}^2$.

Portanto, $\theta \neq 0$ e $\theta \in \overline{\frac{v}{\|v\|} \times \frac{w}{\|w\|}}$. assim existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$\theta = \lambda \left(\frac{v}{\|v\|} \times \frac{w}{\|w\|} \right).$$

$$\text{Assim, } \bar{\theta} = \overline{\left(\frac{v}{\|v\|} \times \frac{w}{\|w\|} \right)} = \bar{\eta}$$

E assim temos que $l_{\bar{\eta}} = l_{\bar{\theta}}$. ■

I_3 - DUAS RETAS DISTINTAS SEMPRE SE ENCONTRAM EM UM ÚNICO PONTO.

A validade deste axioma será mostrada pela seguinte proposição:

Proposição 6.8. (Concorrência de duas retas projetivas)

Duas retas projetivas distintas $l_{\bar{\eta}}$ e $l_{\bar{\nu}}$ concorrem num único ponto, a saber,

$$\bar{\nu} = \overline{\eta \times \nu} \in \mathbb{RP}^2.$$

Demonstração:

Se $l_{\bar{\eta}}$ e $l_{\bar{\nu}}$ são duas retas projetivas então pela definição 6.3 existe uma reta elíptica $l_{\eta} = \Gamma_{\eta} \cap \mathbb{S}^2$ tal que $\psi_0(l_{\eta}) = l_{\bar{\eta}}$. De forma análoga, também existe a reta elíptica $l_{\nu} = \Gamma_{\nu} \cap \mathbb{S}^2$ tal que $\psi_0(l_{\nu}) = l_{\bar{\nu}}$.

Observe que $\frac{\eta}{\|\eta\|}, \frac{\nu}{\|\nu\|} \in \mathbb{S}^2$ e que $\frac{\eta}{\|\eta\|} \neq \pm \frac{\nu}{\|\nu\|}$, pois caso contrário teríamos $\eta = \lambda\nu$, com $\lambda = \pm \frac{\|\eta\|}{\|\nu\|} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, isto é, $\eta \in \bar{\nu}$ e resultaria em $l_{\bar{\eta}} = l_{\bar{\nu}}$.

Considere o vetor $v = \eta \times \nu$. Temos que

$$\begin{cases} \langle \eta, v \rangle = 0 \\ \langle \nu, v \rangle = 0 \end{cases}$$

Assim, o vetor $v = (\eta \times \nu) \in \Gamma_{\eta} \cap \Gamma_{\nu}$. Daí, temos que

$$\frac{\eta \times \nu}{\|\eta \times \nu\|} \in \Gamma_{\eta} \cap \Gamma_{\nu} \cap \mathbb{S}^2, \text{ ou seja, } \frac{\eta \times \nu}{\|\eta \times \nu\|} \in l_{\eta} \cap l_{\nu} \cap \mathbb{S}^2$$

Pela aplicação projeção, temos $\psi_0\left(\frac{\eta \times \nu}{\|\eta \times \nu\|}\right) = \overline{\eta \times \nu}$. Pois,

$$\overline{\eta \times \nu} = \lambda(\eta \times \nu), \quad \lambda = \pm \frac{1}{\|\eta \times \nu\|} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Assim, $\overline{\eta \times \nu} = \psi_0\left(\frac{\eta \times \nu}{\|\eta \times \nu\|}\right) \in \psi_0(l_{\eta} \cap l_{\nu}) = l_{\bar{\eta}} \cap l_{\bar{\nu}}$

Portanto, $\bar{\nu} = \overline{\eta \times \nu} \in l_{\bar{\eta}} \cap l_{\bar{\nu}}$.

(Unicidade) Suponha que exista o ponto \bar{w} tal que $\bar{w} \in l_{\bar{\eta}} \cap l_{\bar{\nu}}$.

Assim, temos que existe $\left\{\frac{w}{\|w\|}, -\frac{w}{\|w\|}\right\} \in \mathbb{S}^2$ tal que $\psi_0\left(-\frac{w}{\|w\|}\right) = \psi_0\left(\frac{w}{\|w\|}\right) = \bar{w}$.

Segue da proposição 6.7 e 6.8 que

$$\frac{w}{\|w\|} \in l_{\eta} \cap l_{\nu} = \left\{-\frac{\eta \times \nu}{\|\eta \times \nu\|}, \frac{\eta \times \nu}{\|\eta \times \nu\|}\right\}$$

Logo, $w = \lambda (\eta \times v)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Portanto, $\bar{w} = \overline{\left(\frac{w}{\|w\|}\right)} = \overline{\eta \times v}$.

■

A validade do *Axioma das Paralelas* é consequente da proposição acima,

“Seja $l_{\bar{\eta}}$ uma reta projetiva e \bar{w} um ponto projetivo não pertencente a $l_{\bar{\eta}}$, então toda reta que passa por \bar{w} intersectará $l_{\bar{\eta}}$ ”.

Conforme a proposição 6.8 se a reta $l_{\bar{\eta}}$ passa pelo ponto $\bar{w} \notin l_{\bar{\eta}}$, então $l_{\bar{\eta}}$ intersectará a reta projetiva $l_{\bar{\eta}}$ em $\overline{\eta \times v}$.

Definição 6.9. Diz-se que três pontos $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{RP}^2$ são colineares se existe uma reta projetiva incidindo sobre os mesmos.

Proposição 6.10. (Equação de colinearidade para três pontos)

Três pontos quaisquer $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{RP}^2$ são colineares se, e somente se, $\det[u, v, w] = 0$.

Demonstração:

Dados $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{RP}^2$. Da definição 6.9 temos que $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ são colineares se, e somente se, existe uma reta $l_{\bar{\eta}} \in \mathbb{RP}^2$ tal que $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in l_{\bar{\eta}}$.

Pela condição de incidência dada pela proposição 6.6, temos

$$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in l_{\bar{\eta}} = \psi_0(l_{\eta})$$

$$\Leftrightarrow \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \in l_{\eta}$$

$$\Leftrightarrow \det \left[\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\|u\|} \cdot \frac{1}{\|v\|} \cdot \frac{1}{\|w\|} \cdot \det[u, v, w] = 0$$

$$\Leftrightarrow \det[u, v, w] = 0.$$

■

7 CONCLUSÃO

Nesta dissertação realizamos um apanhado de conhecimentos da Álgebra Linear, Geometria Euclidiana, Elíptica e Espaço Euclidiano Tridimensional para um embasamento das noções da Geometria Projetiva. Os principais conhecimentos são apontados com referências aos axiomas de Hilbert e propriedades da Geometria Euclidiana, mostrando assim uma possível aplicabilidade no Ensino Médio.

Os conteúdos reunidos neste trabalho concedem a professores e estudantes universitários, material que propicie aperfeiçoamento próprio e uma forma de consulta para a elaboração de aulas. Como exemplo de conteúdo para tal ação, destaco a parte da axiomatização da Geometria Euclidiana, Elíptica ou Projetiva.

Estudamos as Geometrias abordadas neste trabalho de forma analítica, passando pelo rigor demonstrativo, o que, de fato, contribui bastante para a formalização de um conhecimento preciso.

Vimos que a Geometria Elíptica tem como modelo de plano a esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e que sua interseção com um plano que contém a origem determina uma reta elíptica. Vimos também que não existem retas paralelas. Duas retas distintas sempre se intersectam em dois pontos, sendo um o antípoda do outro. Já no estudo da Geometria Projetiva, vimos que duas retas projetivas sempre se intersectam e a interseção é dada por apenas um ponto.

Por fim, esperamos que este trabalho contribua para a propagação de uma Geometria não Euclidiana, que é apresentada de forma consistente, proporcionando o enriquecimento do conhecimento matemático.

REFERÊNCIAS

BARROS, Abdênago; ANDRADE, Plácido. **Introdução à Geometria Projetiva**. Textos Universitários, Rio de Janeiro: SBM, 2010.

SÉRGIO, Luis Cunha Maltez. **Geometria Projetiva: Matemática e Arte**. 2015.56 f. Dissertação (mestrado PROFMAT), Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015. Disponível em: < https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=1020> . Acesso em: 15 mai. 2017.

ANDRADE, Andrea Ferreira Faccioni de. **Um Estudo da Geometria Projetiva Elíptica**. Dissertação (mestrado), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/134030/000857275.pdf?sequence=1>>. Acesso em 11 jun. 2017.

DELGADO Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica**. 1ª edição. Coleção PROF-MAT, SBM, 2013.

LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. Coleção Matemática Universitária. 2ª edição. Rio de Janeiro. SBM, 1996.

HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ, Cecília S. **Introdução à Álgebra Linear**. 2ª edição Coleção. Rio de Janeiro. SBM, 2016.