



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**ELVIS SILVA OLIVEIRA**

**OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS: IMPOSSIBILIDADE DA  
SOLUÇÃO COM RÉGUA E COMPASSO E SOLUÇÕES  
ALTERNATIVAS**

**FORTALEZA  
2017**

ELVIS SILVA OLIVEIRA

OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS: IMPOSSIBILIDADE DA SOLUÇÃO  
COM RÉGUA E COMPASSO E SOLUÇÕES ALTERNATIVAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Romildo José da Silva.

Coorientador: Prof. Dr. Ângelo Papa Neto.

FORTALEZA  
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

O46t Oliveira, Elvis Silva.  
Os três problemas clássicos: impossibilidade da solução com régua e compasso e soluções alternativas /  
Elvis Silva Oliveira. – 2017.  
62 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de  
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2017.

Orientação: Prof. Dr. Romildo José da Silva.

Coorientação: Prof. Dr. Ângelo Papa Neto.

1. Problemas clássicos. 2. Curvas. 3. Soluções alternativas. I. Título.

CDD 510

---

ELVIS SILVA OLIVEIRA

OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS: IMPOSSIBILIDADE DA SOLUÇÃO  
COM RÉGUA E COMPASSO E SOLUÇÕES ALTERNATIVAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 21/08/2017

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Romildo José da Silva (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Ângelo Papa Neto (Co-orientador)  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

---

Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

A todos os colegas do PROFMAT,  
em especial aos colegas Felipe Costa,  
Nílbio e Iarli, pelo companheirismo  
durante o curso.

# Agradecimentos

À minha mãe.

À minha irmã, Kelly.

Ao Prof. Dr. Romildo José da Silva.

Ao Prof. Dr. Ângelo Papa Neto.

“O importante não é o destino, mas sim a jornada”.

Autor desconhecido

“A imaginação é mais importante que o conhecimento.”

Albert Einstein

## RESUMO

Este trabalho é sobre os três problemas clássicos da Geometria Grega: a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo. Com o auxílio de alguns resultados da teoria dos corpos mostramos que tais problemas não podem ser resolvidos com o uso apenas de régua não graduada e compasso. Apresentamos as curvas conchóide, cissóide e quadratriz (também chamada de trissectriz) junto com suas equações. Por fim, fazemos a exposição de soluções alternativas para os três problemas clássicos e destacamos como alguma das curvas apresentadas anteriormente pode auxiliar tais soluções.

**Palavras-chave:** Problemas clássicos. Curvas. Soluções alternativas.

## **ABSTRACT**

This work is about the three classical problems of Greek Geometry: the doubling of the cube, the trisection of the angle and the squaring of the circle. With the aid of some results from the theory of fields we show that such problems can not be solved by the use of only a non-graduated ruler and compass. We present the conchoid, cissoidd and quadratrix curves (also called trisectors) along with their equations. Finally, we present alternative solutions to the three classic problems and highlight how some of the curves previously presented can help such solutions.

**Keywords:** Classical problems. Curves. Alternative solutions.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	12
<b>2</b>	<b>OS TRÊS PROBLEMAS E A IMPOSSIBILIDADE DAS SOLUÇÃO COM RÉGUA E COMPASSO</b> .....	13
<b>2.1</b>	<b>Os três problemas clássicos</b> .....	13
2.1.1	A duplicação do cubo.....	13
2.1.2	A trissecção do ângulo.....	13
2.1.3	A quadratura do círculo.....	14
<b>2.2</b>	<b>A impossibilidade da solução usando apenas régua e compasso</b> .....	14
2.2.1	A impossibilidade da duplicação do cubo.....	21
2.2.2	A impossibilidade da trissecção do ângulo.....	21
2.2.3	A impossibilidade da quadratura do círculo.....	23
<b>3</b>	<b>ALGUMAS CURVAS</b> .....	24
<b>3.1</b>	<b>Conchóide</b> .....	24
3.1.1	Equações paramétricas da conchóide.....	25
3.1.2	Alguns exemplos de conchóides.....	27
<b>3.2</b>	<b>Cissóide</b> .....	29
3.2.1	Equações paramétricas da cissóide.....	30
3.2.2	Alguns exemplos de cissóides.....	32
<b>3.3</b>	<b>A Espiral de Arquimedes</b> .....	34
3.3.1	Equação polar da espiral de Arquimedes.....	35
<b>3.4</b>	<b>A trissectriz de Hípias</b> .....	36
<b>4</b>	<b>USANDO AS CURVAS PARA RESOLVER OS PROBLEMAS</b> .....	39
<b>4.1</b>	<b>Soluções para o problema da duplicação do cubo</b> .....	39
4.1.1	A solução de Menaecmus (380 a.C – 320 a.C).....	40
4.1.2	A cissóide de Diocles.....	41
4.1.3	A conchóide de Nicomedes.....	46
<b>4.2</b>	<b>Soluções para o problema da trissecção do ângulo</b> .....	48
4.2.1	Usando a conchóide de Nicomedes.....	48
4.2.2	Usando a espiral de Arquimedes.....	51
4.2.3	Outra solução proposta por Arquimedes.....	53
4.2.4	A trissectriz de Hípias.....	55
<b>4.3</b>	<b>A quadratriz e a quadratura do círculo</b> .....	57

<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>61</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>62</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os matemáticos gregos da antiguidade tinham uma motivação quase que puramente intelectual e não priorizavam uma utilidade prática para os assuntos que estudavam. A busca de métodos de construções geométricas em que as ferramentas utilizadas eram apenas régua não graduada e compasso é fruto dessa atitude. Eles queriam fazer construções com um mínimo possível de meios.

O presente trabalho é sobre três problemas para os quais as ferramentas dos matemáticos gregos são insuficientes. São eles: a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo, conhecidos como os três problemas clássicos. Começamos dando a definição de número construtível, a qual juntamente com o teorema da torre de corpos e alguns resultados da teoria dos corpos (que vamos admitir já conhecidos do leitor) vai nos permitir justificar a insuficiência da régua e do compasso na solução dos três problemas.

Em seguida apresentamos curvas que serão utilizadas posteriormente nas soluções alternativas para cada um dos três problemas. São elas: a conchóide, a cissóide e a quadratriz, que também é conhecida como trissectriz, por ser usada na solução alternativa do problema da trissecção do ângulo. Mostramos também como o matemático grego Menaecmus usou parábolas para duplicar o cubo.

Finalmente detalhamos algumas soluções alternativas para os problemas clássicos chamando a atenção para o auxílio que as curvas estudadas anteriormente podem oferecer a cada uma delas.

## **2 OS TRÊS PROBLEMAS E A IMPOSSIBILIDADE DAS SOLUÇÃO COM RÉGUA E COMPASSO**

Os três problemas clássicos da matemática grega, a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo, desempenharam um papel muito importante no desenvolvimento da Matemática. A busca pela solução de tais problemas usando apenas régua e compasso durou mais de dois mil anos, até que no século XIX provou-se não ser possível resolvê-los apenas com tais instrumentos. Enquanto isso, a busca de soluções alternativas fez com que novos conhecimentos fossem adquiridos, como o descobrimento das cônicas.

### **2.1 Os três problemas clássicos.**

A seguir, forneceremos uma breve descrição dos três problemas clássicos gregos. Nosso trabalho está centrado nesses três problemas. Mostraremos primeiro que não é possível resolvê-los usando as ferramentas mais simples: a régua e o compasso. Depois obteremos soluções utilizando recursos auxiliares. Essa abordagem inverte a ordem histórica, pois soluções “alternativas” foram obtidas bem antes de se demonstrar a impossibilidade de solução com régua e compasso.

#### **2.1.1 A duplicação do cubo.**

No século V a.C, Péricles morreu da peste que matou um quarto da população de Atenas. Impressionados pela catástrofe, os atenienses enviaram uma delegação ao oráculo de Apolo na ilha de Delos para perguntar como poderiam se livrar da peste. Diz-se que o oráculo respondeu que o altar de Apolo, que tinha a forma de um cubo, deveria ser duplicado. Os atenienses prontamente dobraram as dimensões do altar, mas a peste continuou. Obviamente, o volume do altar fora multiplicado por oito e não por dois. Essa é a lenda da origem do problema da duplicação do cubo. O problema consiste em construir com régua e compasso um cubo cujo volume é duas vezes o volume do um cubo dado.

#### **2.1.2 A trissecção do ângulo.**

Este problema consiste em dividir um ângulo dado em três ângulos iguais, usando apenas régua e compasso. Sabemos que a solução é possível, com régua e compasso, em alguns casos particulares, como o caso em que o ângulo a ser dividido é reto. Mas o problema

de dividir um ângulo **arbitrário** em três partes iguais é bem mais difícil e, como veremos, não pode ser resolvido usando-se apenas régua e compasso.

### 2.1.3 A quadratura do círculo.

O problema da quadratura do círculo consiste em construir com régua e compasso um quadrado de área igual à área de um círculo dado. Este problema tem raízes místicas: o círculo está tradicionalmente associado ao celestial, enquanto o quadrado está associado ao terrestre. Assim, o significado místico da quadratura do círculo é que “ele contém o segredo da transformação das formas celestes em formas terrestres” (CAMPBELL, J., O Herói de Mil Faces, Ed. Pensamento, São Paulo, 2007, p.46). Isso pode parecer ser algo desconectado do assunto puramente matemático, mas devemos lembrar que este é um problema que surgiu em uma época em que ciência, filosofia e religião eram uma coisa só. Uma manifestação religiosa onde persiste esta relação entre quadrado e círculo é a peregrinação a Meca, cidade sagrada do Islamismo, onde se faz o ritual da circunvolução em torno da Caaba, um dos santuários mais antigos do mundo, que tem a forma de um cubo ligeiramente irregular. O peregrino deve dar sete voltas em torno da Caaba, três correndo e quatro caminhando. O número sete corresponde às sete esferas celestes (veja BURCKHARDT, T., A Arte Sagrada no Oriente e no Ocidente, Ed. Attar, São Paulo, 2004, p.43).

## 2.2 A impossibilidade da solução usando apenas régua e compasso.

Vamos dar algumas definições e demonstrar alguns resultados que, juntamente com resultados da teoria dos corpos que vamos assumir conhecidos pelo leitor, irão nos permitir concluir que os três problemas clássicos não admitem solução com uso apenas de régua e compasso.

Sejam  $P$  e  $Q$  pontos no plano. Vamos denotar o segmento de reta com extremidades  $P$  e  $Q$  por  $PQ$  e seu comprimento por  $\overline{PQ}$ . Uma régua é um instrumento que nos permite desenhar a reta que passa por  $P$  e  $Q$ . Tal reta será denotada por  $R(P, Q)$ . Um compasso é um instrumento que nos permite desenhar um círculo centrado em  $P$  passando por  $Q$ . Tal círculo será denotado por  $C(P, Q)$ .

Podemos estabelecer um sistema de coordenadas em um plano dado. Primeiro escolhemos dois pontos distintos,  $A$  e  $A'$ . Chamemos a reta que eles determinam de *eixo*  $X$ . Usando o compasso, desenhamos  $C(A, A')$  (círculo centrado em  $A$  passando por  $A'$ ) e

$C(A', A)$  (círculo centrado em  $A'$  passando por  $A$ ). Tais círculos se intersectam em dois pontos  $Q_1$  e  $Q_2$ . Chamemos de *eixo Y* a reta que eles determinam. Esta reta intersecta o *eixo X* em um ponto  $O$ , chamando *origem*. Definindo  $\overline{OA} = 1$ , construímos um sistema de coordenadas no plano, o que nos permite identificar um ponto do plano com um par ordenado. Em particular, temos  $A = (1,0)$  e  $A' = (-1,0)$ .

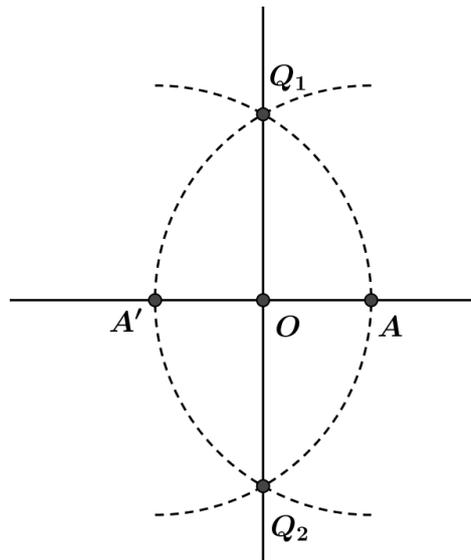


Figura 2.1

**Definição 2.2.1:** Sejam  $E, F, G$  e  $H$  pontos (não necessariamente distintos) no plano. Um ponto  $Z$  é dito *construtível a partir de*  $E, F, G$  e  $H$  se ocorre algum dos itens abaixo:

- (i)  $Z \in R(E, F) \cap R(G, H)$ , com  $R(E, F) \neq R(G, H)$
- (ii)  $Z \in R(E, F) \cap C(G, H)$
- (iii)  $Z \in C(E, F) \cap C(G, H)$ , com  $C(E, F) \neq C(G, H)$

Um ponto  $Z$  é dito *construtível* se  $Z = A$ , ou  $Z = A'$  ou se existe uma sequência de pontos  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , com  $Z = P_n$ , em que, para todo  $j \geq 1$ , o ponto  $P_{j+1}$  é construtível a partir de pontos do conjunto  $\{A, A', P_1, P_2, \dots, P_n\}$ .

Por exemplo, os pontos  $Q_1$  e  $Q_2$  da figura 1.1 são construtíveis, pois ambos pertencem a  $C(A, A') \cap C(A', A)$ , ou seja, são construtíveis a partir dos pontos anteriores  $A$  e  $A'$ . A origem  $O$  também é um ponto construtível, pois é construtível a partir de pontos do conjunto  $\{A, A', Q_1, Q_2\}$ , uma vez que  $O \in R(A, A') \cap R(Q_1, Q_2)$ .

**Definição 2.2.2:** Um número complexo  $z = x + iy$  é construtível se o ponto  $(x, y)$  é construtível.

Por exemplo, na figura 1.1 temos  $Q_1 = (0, \sqrt{3})$ . Então, o número  $z = i\sqrt{3}$  é construtível. Também são construtíveis os números  $z = -1$  e  $z = 1$ .

**Lema 2.2.1.** Um número complexo  $z = x + iy$  é construtível se, e somente se, a parte real  $x$  e a parte imaginária  $y$  são números construtíveis.

*Demonstração:*

Suponhamos que  $z$  é construtível. Por definição, temos que o ponto  $(x, y)$  é construtível. Traçando a reta paralela ao eixo  $Y$  passando por  $(x, y)$  marcamos o ponto  $(x, 0)$  onde tal reta intercepta o eixo  $X$ . Assim, o ponto  $(x, 0)$  é construtível e  $x$  é um número construtível, por definição. Analogamente, construímos o ponto  $P(0, y)$  como a interseção com o eixo  $Y$  da paralela ao eixo  $X$  passando por  $(x, y)$ . O ponto  $(y, 0)$  está na interseção de  $C(O, P)$  com o eixo  $X$ . Logo,  $(y, 0)$  é um ponto construtível e  $y$  é um número construtível.

Suponhamos agora que  $x$  e  $y$  são números construtíveis. Por definição,  $P(y, 0)$  e  $Q(x, 0)$  são pontos construtíveis. O ponto  $(0, y)$  está na interseção de  $C(O, P)$  com o eixo  $Y$ . Assim,  $(0, y)$  é um ponto construtível. Agora, traçando a vertical por  $(x, 0)$  e a horizontal por  $(0, y)$ , temos que o ponto  $(x, y)$  é a interseção de tais retas. Assim,  $(x, y)$  é construtível e  $z = x + iy$  é um número construtível. ■

**Lema 2.2.2:** Seja  $F$  um subcorpo de  $\mathbb{C}$  que contém  $i$  e é fechado para a conjugação complexa. Sejam  $z = a + ib$ ,  $w = c + id$ ,  $P = (a, b)$  e  $Q = (c, d)$ . É verdade que:

(i) Se  $a + ib \in F$ , então  $a \in F$  e  $b \in F$ .

(ii) Se a equação de  $R(P, Q)$  é  $y = mx + q$ , onde  $m, q \in \mathbb{R}$ , então  $m, q \in F$ .

(iii) Se a equação de  $C(P, Q)$  é  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , onde  $a, b, r \in \mathbb{R}$ , então  $r^2 \in F$ .

*Demonstração:*

(i) Seja  $z = a + ib \in F$ . Por hipótese,  $\bar{z} = a - ib \in F$ . Segue que  $a = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \in F$

e  $b = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \in F$ .

(ii) Para  $R(P, Q)$  ter equação como na hipótese, ela deve ser não vertical. Tal reta tem inclinação

$$m = \frac{d - b}{c - a} \in F,$$

pois  $a, b, c, d \in F$  (por (i)). Podemos escrever sua equação como

$$y - b = m(x - a).$$

Assim,  $(mx + q) - b = m(x - a)$  e  $q = -ma + b \in F$ .

(iii) O círculo  $C(P, Q)$  tem raio  $r = \overline{PQ}$ . Como  $Q \in C(P, Q)$ , temos que

$$r^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2 \in F. \quad \blacksquare$$

**Lema 2.2.3.** Seja  $F$  um subcorpo de  $\mathbb{C}$  que contém  $i$  e é fechado para a conjugação complexa. Sejam  $M, N, P, Q$  pontos com coordenadas em  $F$ , e  $\alpha = u + iv \in \mathbb{C}$ . Se

$$\alpha \in R(M, N) \cap R(P, Q), \text{ com } R(M, N) \neq R(P, Q)$$

ou

$$\alpha \in R(M, N) \cap C(P, Q)$$

ou

$$\alpha \in C(M, N) \cap C(P, Q), \text{ com } C(M, N) \neq C(P, Q),$$

então  $[F(\alpha):F] \leq 2$ .

*Demonstração:*

Suponhamos que  $\alpha \in R(M, N) \cap R(P, Q)$ , com  $R(M, N) \neq R(P, Q)$ , e que ambas as retas não são verticais. Sejam  $y = mx + b$  e  $y = nx + c$  as equações de  $R(M, N)$  e  $R(P, Q)$ , respectivamente. Pelo Lema 2.2.2, temos que  $m, b, n, c \in F$ . Temos também que  $u$  e  $v$  são as soluções do sistema de equações lineares formado pelas equações de  $R(M, N)$  e  $R(P, Q)$ , soluções estas que são obtidas por meio apenas de operações elementares sobre os coeficientes  $m, b, n, c$ , o que faz com que  $u, v \in F$ . Como  $i \in F$ , segue que  $\alpha = u + iv \in F$  e  $F(\alpha) = F$ . Portanto,  $[F(\alpha):F] = 1$ .

Vamos admitir agora que uma das retas, por exemplo  $R(M, N)$ , é vertical. Se as coordenadas de  $M$  são  $(a, b)$ , a equação de  $R(M, N)$  é  $y = a \in F$ . Assim,  $u = a$  e  $v = nu + c \in F$ . Portanto,  $\alpha = u + iv \in F$  e concluímos que  $[F(\alpha):F] = 1$ .

Olhemos agora o caso em que  $\alpha \in R(M, N) \cap C(P, Q)$ . Sejam  $y = mx + b$  a equação de  $R(M, N)$  e  $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$  a equação de  $C(P, Q)$ , onde  $(c, d)$  são as coordenadas de  $P$  e  $r = \overline{PQ}$ . Pelo Lema 2.2.2,  $m, b, r^2 \in F$ . Temos que  $(u - c)^2 + (v - d)^2 = r^2$  e  $v = mu + b$ . Segue que

$$(u - c)^2 + (mu + b - d)^2 = r^2$$

de maneira que  $u$  é raiz de um polinômio do 2º grau com coeficientes em  $F$ . Assim, o polinômio mínimo de  $u$  sobre  $F$  tem grau menor do que 3. Concluimos que  $[F(u):F] \leq 2$ . Como  $v = mu + b$ , com  $m, b \in F$ , temos que  $v \in F(u)$  e  $\alpha = u + iv \in F(u)$ . Então,  $F(\alpha) \subset F(u)$ . Olhando  $F(\alpha)$  e  $F(u)$  como espaços vetoriais sobre o corpo  $F$ , vemos que a dimensão de  $F(\alpha)$  deve ser menor do que ou igual à dimensão de  $F(u)$ , pois  $F(\alpha)$  é subespaço de  $F(u)$ . Então,  $[F(\alpha):F] \leq 2$ . Se a reta  $R(M, N)$  é vertical sua equação é  $y = a$ , então  $u = a \in F$ . De  $(u - c)^2 + (v - d)^2 = r^2$  concluimos que  $v$  é raiz de um polinômio do 2º grau com coeficientes em  $F$ . Assim,  $[F(v):F] \leq 2$ . Como  $\alpha \in F(v)$ , segue que  $[F(\alpha):F] \leq 2$ .

Por fim, suponhamos que  $\alpha \in C(M, N) \cap C(P, Q)$ . Sejam

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \text{ e } (x - c)^2 + (y - d)^2 = s^2$$

as equações de  $C(M, N)$  e  $C(P, Q)$ , respectivamente, onde  $r = \overline{MN}$ ,  $s = \overline{PQ}$ ,  $(a, b)$  são as coordenadas de  $M$  e  $(c, d)$  são as coordenadas de  $P$ . Pelo Lema 2.2.2, temos que  $r^2, s^2 \in F$ . Como  $\alpha$  está nos dois círculos, podemos escrever  $(u - a)^2 + (v - b)^2 = r^2$  e  $(u - c)^2 + (v - d)^2 = s^2$ . Expandindo ambas as equações obtemos

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - 2au - 2bv + a^2 + b^2 - r^2 &= 0 \text{ e} \\ u^2 + v^2 - 2cu - 2dv + c^2 + d^2 - s^2 &= 0 \end{aligned}$$

Subtraindo uma equação da outra, ficamos com uma equação da forma  $tu + t'v + t'' = 0$ , com  $t, t', t'' \in F$ . Usando esta equação com a de um dos círculos, caímos no caso anterior em que  $\alpha$  está na interseção de um círculo com uma reta cuja equação tem coeficientes em  $F$ . ■

**Teorema 2.2.1.** Se um número complexo  $z$  é construtível, então existe uma torre de corpos

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n,$$

onde  $z \in K_n$  e  $[K_{j+1}:K_j] \leq 2$ .

*Demonstração:*

Se  $z$  é construtível, existe uma sequência de pontos  $1, -1, z_1, \dots, z_n = z$  em que cada  $z_j$  pode ser obtido a partir de pontos do conjunto  $\{1, -1, z_1, \dots, z_{j-1}\}$ . Podemos assumir que  $z_1 = i$ , uma vez que tal número é construtível. Vamos definir

$$K_j = \mathbb{Q}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \dots, z_j, \bar{z}_j).$$

Temos então a torre de corpos

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n.$$

O elemento  $z_{j+1}$  pode ser obtido a partir de elementos de  $K_j$ , ou seja, existem pontos  $E, F, G, H \in K_j$  de modo que ocorre alguma das opções abaixo:

$$z_{j+1} \in R(E, F) \cap R(G, H), \text{ com } R(E, F) \neq R(G, H)$$

ou

$$z_{j+1} \in R(E, F) \cap C(G, H)$$

ou

$$z_{j+1} \in C(E, F) \cap C(G, H), \text{ com } C(M, N) \neq C(P, Q)$$

Vamos mostrar agora, por indução sobre  $j \geq 1$ , que  $K_j$  é fechado para a conjugação complexa. Mostremos primeiro que  $K_1$  é fechado para a conjugação complexa.

Temos que  $K_1 = \mathbb{Q}(i, -i) = (\mathbb{Q}(i))(-i)$ . Um elemento  $\alpha \in K_1$  pode ser escrito como

$$\alpha = a_0 + a_1(-i) + \cdots + a_n(-i)^n,$$

para algum inteiro não negativo  $n$  e com  $a_s \in \mathbb{Q}(i), 0 \leq s \leq n, s \in \mathbb{Z}$ . Então,

$$\bar{\alpha} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 i + \cdots + \bar{a}_n i^n.$$

Os elementos de  $\mathbb{Q}(i)$  são da forma  $a + ib$ , com  $a, b \in \mathbb{Q}$ , o que implica que seus conjugados também pertencem a  $\mathbb{Q}(i)$ . Assim,  $\bar{a}_s \in K_1$  para todo  $s$  e  $\bar{\alpha} \in K_1$ .

Suponhamos agora que  $K_j$  é fechado para a conjugação complexa. Temos que

$$K_{j+1} = K_j(z_{j+1}, \bar{z}_{j+1}) = (K_j(z_{j+1}))(\bar{z}_{j+1}).$$

Dado  $\alpha \in K_{j+1}$ , podemos escrever

$$\alpha = a_0 + a_1 \bar{z}_{j+1} + \cdots + a_n (\bar{z}_{j+1})^n,$$

para algum inteiro não negativo  $n$  e com  $a_s \in K_j(z_{j+1})$ . Assim,

$$\bar{\alpha} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 z_{j+1} + \cdots + \bar{a}_n (z_{j+1})^n.$$

Olhemos para os coeficientes  $a_s$  de  $\alpha$ . Cada  $a_s$  pode ser escrito como

$$a_s = b_0 + b_1 z_{j+1} + \cdots + b_m (z_{j+1})^m,$$

onde  $m$  é inteiro não negativo e  $b_l \in K_j, 0 \leq l \leq m, l \in \mathbb{Z}$ . Dessa forma temos

$$\bar{a}_s = \bar{b}_0 + \bar{b}_1 \bar{z}_{j+1} + \cdots + \bar{b}_m (\bar{z}_{j+1})^m.$$

Por hipótese de indução,  $K_j$  é fechado para a conjugação complexa, então  $\bar{b}_l \in K_j \subset K_{j+1}$ . E já que  $\bar{z}_{j+1} \in K_{j+1}$ , concluímos que  $\bar{a}_s \in K_{j+1}$ . Portanto,

$$\bar{\alpha} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 z_{j+1} + \cdots + \bar{a}_n (z_{j+1})^n \in K_{j+1}.$$

Então, cada  $K_j$  é fechado para a conjugação complexa. Pelo Lema 2.2.3 temos que

$$[K_{j+1}:K_j] \leq 2.$$

Isso encerra a demonstração. ■

**Corolário 2.2.1** Se um número complexo  $z$  é construtível, então  $[\mathbb{Q}(z):\mathbb{Q}]$  é uma potência de 2.

*Demonstração:*

Seja  $z$  um número complexo construtível. Pelo Teorema 2.2.1 existe uma torre de corpos

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n,$$

com  $z \in K_n$ . Então,

$$[K_n:\mathbb{Q}] = [K_n:K_{n-1}] \cdot [K_{n-1}:K_{n-2}] \cdot [K_{n-2}:K_{n-3}] \cdot \cdots \cdot [K_1:\mathbb{Q}].$$

Como  $[K_{j+1}:K_j] \leq 2$  para todo  $j$  inteiro não negativo e  $0 \leq j \leq n$ , temos que  $[K_n:\mathbb{Q}]$  é uma potência de 2, digamos  $2^i$ , para algum inteiro não negativo  $i$ . Temos também que  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(z) \subset K_n$ . Assim,

$$2^i = [K_n:\mathbb{Q}] = [K_n:\mathbb{Q}(z)] \cdot [\mathbb{Q}(z):\mathbb{Q}].$$

Portanto,  $[\mathbb{Q}(z):\mathbb{Q}]$  é um divisor de  $2^i$ , ou seja,  $[\mathbb{Q}(z):\mathbb{Q}]$  é uma potência de 2. ■

### 2.2.1 A impossibilidade da duplicação do cubo.

Dado um cubo de aresta  $a$ , um cubo cujo volume é o dobro tem aresta  $b = a\sqrt[3]{2}$ . O número  $\sqrt[3]{2}$  é raiz do polinômio  $x^3 - 2$ , que é irredutível sobre os racionais. Realmente, se tal polinômio fosse redutível ele teria um fator do primeiro grau que forneceria uma raiz racional. Os candidatos a raízes racionais são  $-2, -1, 1$  e  $2$ . Mas tais números não são raízes

Portanto,  $x^3 - 2$  é o polinômio mínimo de  $\sqrt[3]{2}$  sobre  $\mathbb{Q}$ . Logo,  $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$ , que não é uma potência de 2. Pelo corolário 2.2.1,  $\sqrt[3]{2}$  não é construtível e o problema da duplicação do cubo não admite solução com o uso apenas de régua e compasso.

### 2.2.2 A impossibilidade da trisseção do ângulo.

Consideremos um ponto  $A$  no círculo unitário centrado em  $O(0,0)$  de modo que a medida do ângulo  $A\hat{O}B$  (de  $B$  para  $A$  no sentido anti-horário) seja um valor arbitrário  $\theta$ , como  $0 \leq \theta \leq 360^\circ$  e  $B(1,0)$ , como na figura abaixo.

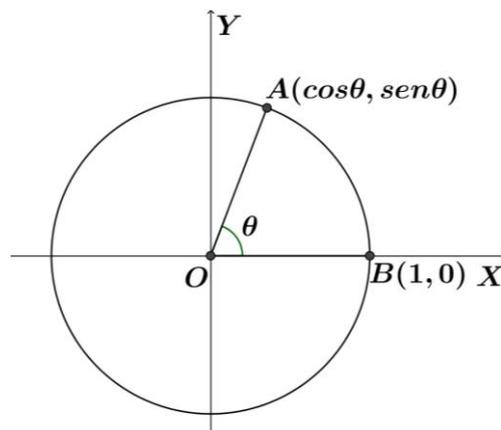


Figura 2.2

Dessa forma, o ponto  $A$  tem coordenadas  $(\cos\theta, \sin\theta)$ . Se pudermos trisseccionar, com apenas régua e compasso, o ângulo  $A\hat{O}B$ , poderemos construir o ponto

$$\left(\cos\frac{\theta}{3}, \sin\frac{\theta}{3}\right),$$

o qual, pela definição 2.2.2, nos dirá que o número complexo

$$z = \cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}$$

é construtível. Daqui, pelo lema 2.2.1, concluiremos que o número  $\cos \frac{\theta}{3}$  é construtível. Assim, dado um ângulo de medida  $\theta$ , se  $\cos \frac{\theta}{3}$  não for construtível, então não poderemos trissecionar tal ângulo usando apenas régua e compasso.

A identidade trigonométrica

$$\cos \theta = 4 \cos^3 \frac{\theta}{3} - 3 \cos \frac{\theta}{3}$$

nos diz que  $\cos \frac{\theta}{3}$  é raiz do polinômio  $4x^3 - 3x - \cos \theta$ . Vamos mostrar agora que existem infinitos valores para  $\cos \theta$  para os quais o polinômio é irredutível. Olhemos para os casos em que

$$\cos \theta = \frac{1}{p},$$

com  $p > 2$  primo. Suponhamos que o polinômio seja redutível em  $\mathbb{Q}$ . Devido à existência de um fator do primeiro grau, tal polinômio apresenta uma raiz racional  $r$ . Digamos que

$$r = \frac{m}{n},$$

onde  $\text{mdc}(m, n) = 1$ . Substituindo  $r$  no polinômio, obtemos

$$p \cdot t = n^3,$$

onde  $t = 4m^3 - 3mn^2$ . Temos que  $p$  divide  $n^3$ . Como  $p$  é primo,  $p$  divide  $n$  e portanto  $p^3$  divide  $n^3$ . Suponhamos agora que  $\text{mdc}(p^3, t) = d > 1$ . Segue que  $d = p, d = p^2$  ou  $d = p^3$ . Em qualquer de tais casos temos que  $p$  divide  $t$ . Como  $p$  divide  $n^2$  (já que divide  $n$ ), a relação  $t = 4m^3 - 3mn^2$  nos diz que  $p$  divide  $4m^3$ . Mas aí  $p$  deve dividir 4, pois, se dividisse  $m^3$ , dividiria  $m$ , contrariando o fato de que  $\text{mdc}(m, n) = 1$ . Porém,  $p$  dividir 4 é um absurdo, já que  $p$  é um número primo maior do que 2. Assim, nossa suposição  $d > 1$  está errada e devemos ter  $\text{mdc}(p^3, t) = d = 1$ . Mas concluímos antes que  $p^3$  divide  $p \cdot t = n^3$ . Daqui segue que  $p^3$  divide  $p$ , que é outro absurdo. Assim, o polinômio não possui raízes racionais e é irredutível em  $\mathbb{Q}$ .

Então, para cada  $\theta$  tal que  $\cos \theta = \frac{1}{p}$ , com  $p > 2$  primo, temos que

$4x^3 - 3x - \cos \theta$  é o polinômio mínimo de  $\cos \frac{\theta}{3}$  sobre  $\mathbb{Q}$ . Logo,

$$\left[ \mathbb{Q} \left( \cos \frac{\theta}{3} \right) : \mathbb{Q} \right] = 3,$$

que não é uma potência de 2. O corolário 2.2.1 garante que  $\cos \frac{\theta}{3}$  não é um número construtível e, como foi dito anteriormente, não poderemos trisseccionar um ângulo que tem medida  $\theta$ . Portanto, não existe um método para trisseccionar um ângulo arbitrário com o uso somente de régua e compasso.

### 2.2.3 A impossibilidade da quadratura do círculo.

Dado um círculo de raio  $r$ , um quadrado com área igual à área de tal círculo tem lado  $l = r\sqrt{\pi}$ . Em 1882 o matemático alemão Carl Louis Ferdinand Von Lindemann (1852 – 1939) publicou um trabalho mostrando que  $\pi$  é um número transcendente sobre os racionais, ou seja, não é raiz de polinômio algum com coeficientes racionais. Como consequência,  $\sqrt{\pi}$  também é transcendente. Realmente, se  $\sqrt{\pi}$  fosse algébrico sobre  $\mathbb{Q}$ , teríamos

$$\sum_{i=0}^n a_i (\sqrt{\pi})^i = 0,$$

com  $a_i \in \mathbb{Q}$  para todo  $i$ , e  $n$  um inteiro não negativo. Vamos supor que  $n$  é par (se necessário fazendo  $a_n = 0$ ). Podemos então escrever

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i (\sqrt{\pi})^i &= \sum_{k=0}^{n/2} a_{2k} (\sqrt{\pi})^{2k} + \sum_{k=0}^{(n-2)/2} a_{2k+1} (\sqrt{\pi})^{2k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n/2} a_{2k} \pi^k + \sum_{k=0}^{(n-2)/2} a_{2k+1} \pi^k \sqrt{\pi} = 0 \Rightarrow \\ &\sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{(n-2)/2} a_{2k+1} \pi^k = - \sum_{k=0}^{n/2} a_{2k} \pi^k. \end{aligned}$$

Daqui, elevando ambos os membros ao quadrado, vemos que  $\pi$  seria raiz de um polinômio com coeficientes racionais, contradizendo o resultado de Lindemann. Então, não podemos ter  $[\mathbb{Q}(\sqrt{\pi}) : \mathbb{Q}]$  igual a uma potência de 2, pois  $\sqrt{\pi}$  não possui polinômio mínimo sobre  $\mathbb{Q}$ , ou seja, a extensão  $\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})/\mathbb{Q}$  transcendente e  $[\mathbb{Q}(\sqrt{\pi}) : \mathbb{Q}]$  é infinito. Logo, pelo corolário 1.2.1,  $\sqrt{\pi}$  não é um número construtível. Assim, o problema da quadratura do círculo não pode ser resolvido com o uso apenas de régua e compasso.

### 3 ALGUMAS CURVAS

Definiremos neste capítulo algumas curvas e daremos suas equações paramétricas. As curvas definidas aqui serão utilizadas no capítulo 3 para resolver os problemas da duplicação do cubo, da triseção do ângulo e da quadratura do círculo.

#### 3.1 Conchóide

Curva descoberta por Nicomedes no século III a.C. Sejam  $M$  um ponto fixo,  $c$  uma curva dada que não contém  $M$  e  $Q$  um ponto qualquer de  $c$ . Consideremos a reta  $l$  que passa por  $M$  e  $Q$ . Escolhendo uma constante positiva  $k$  ficam determinados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  em  $l$  (aqui, com  $Q$  entre  $M$  e  $P_1$ ) de modo que

$$\overline{P_1Q} = \overline{QP_2} = k$$

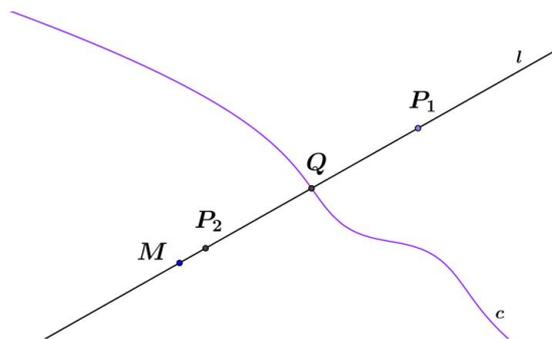


Figura 3.1

Fazendo  $Q$  percorrer  $c$ , o lugar geométrico dos pontos  $P_1$  e  $P_2$  é a *conchóide* da curva  $c$  com respeito a  $M$ .

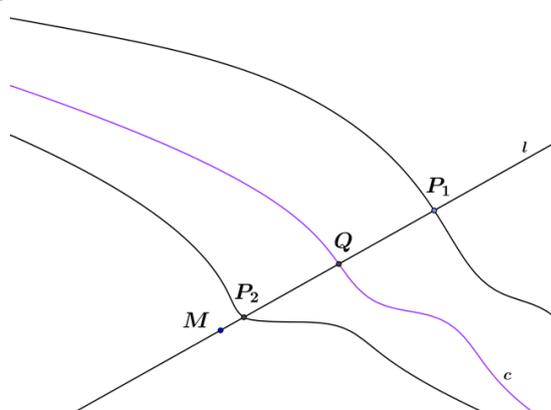


Figura 3.2

Podemos notar que a *conchóide* possui dois ramos, um mais próximo do ponto  $M$  e outro mais distante (este gerado pelo ponto de  $l$  que deixa  $Q$  entre si e o ponto  $M$ ). Dizemos que  $M$  é o *pólo* e  $k$  é o *módulo* da *conchóide*.

### 3.1.1 Equações paramétricas da conchóide

Sejam

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

as equações paramétricas da curva  $c$ , onde  $t, f(t)$  e  $g(t)$  são reais. Assim, o ponto genérico  $Q$  de  $c$  tem coordenadas  $(f(t), g(t))$ . Olhemos para o ponto  $P(x, y)$  da reta  $l$  de modo que  $Q$  esteja entre  $M$  e  $P$  e  $\overline{QM} = k$ . Ao fazermos  $Q$  percorrer a curva  $c$  (variando o parâmetro  $t$ ), o ponto  $P$  vai gerar o ramo da *conchóide* mais distante de  $M$ . Na figura abaixo, representamos  $c$  e  $l$  em um sistema de coordenadas cartesianas com origem em  $O$ , em que  $M$  tem coordenadas  $(x_0, y_0)$ .

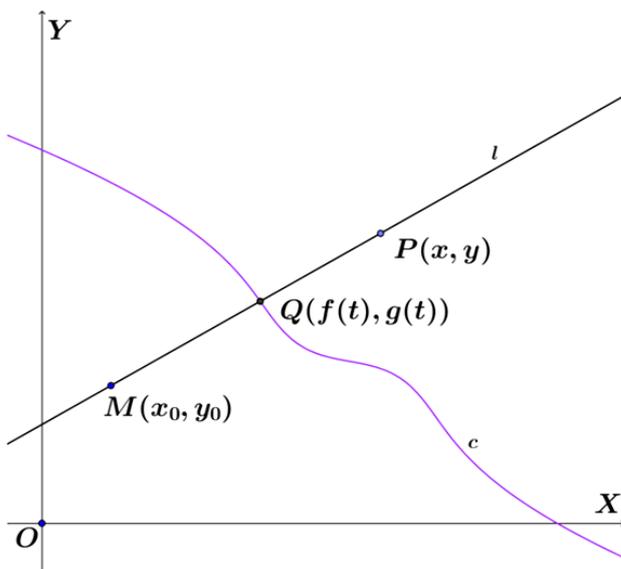


Figura 3.3(a)

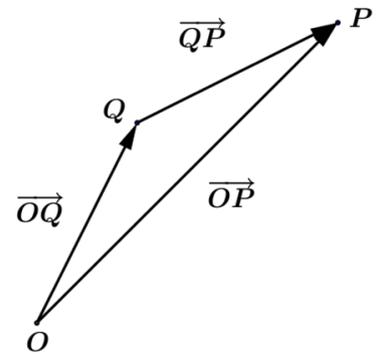


Figura 3.3(b)

Queremos que  $|\overrightarrow{QP}| = k$ . Como o vetor

$$\frac{\overrightarrow{MQ}}{|\overrightarrow{MQ}|}$$

é unitário e tem mesma direção e sentido do vetor  $\overrightarrow{QP}$ , temos que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QP} &= k \cdot \frac{\overrightarrow{MQ}}{|\overrightarrow{MQ}|} \Rightarrow \overrightarrow{QP} = k \cdot \frac{(f(t), g(t)) - (x_0, y_0)}{|(f(t), g(t)) - (x_0, y_0)|} \Rightarrow \\ \overrightarrow{QP} &= \frac{(k \cdot (f(t) - x_0), k \cdot (g(t) - y_0))}{\sqrt{(f(t) - x_0)^2 + (g(t) - y_0)^2}}\end{aligned}$$

Além disso,  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$ . Então,

$$(x, y) = (f(t), g(t)) + \frac{(k \cdot (f(t) - x_0), k \cdot (g(t) - y_0))}{\sqrt{(f(t) - x_0)^2 + (g(t) - y_0)^2}}$$

Daqui, obtemos as seguintes equações paramétricas para o ramo da *conchóide* mais distante de  $M$ .

$$\begin{cases} x = f(t) + \frac{k \cdot (f(t) - x_0)}{\sqrt{(f(t) - x_0)^2 + (g(t) - y_0)^2}} \\ y = g(t) + \frac{k \cdot (g(t) - y_0)}{\sqrt{(f(t) - x_0)^2 + (g(t) - y_0)^2}} \end{cases}$$

Para obtermos as equações paramétricas do outro ramo da *conchóide* (o mais próximo do pólo) devemos considerar o ponto  $P(x, y)$  em  $l$  de forma que  $Q$  não esteja entre  $M$  e  $P$ .

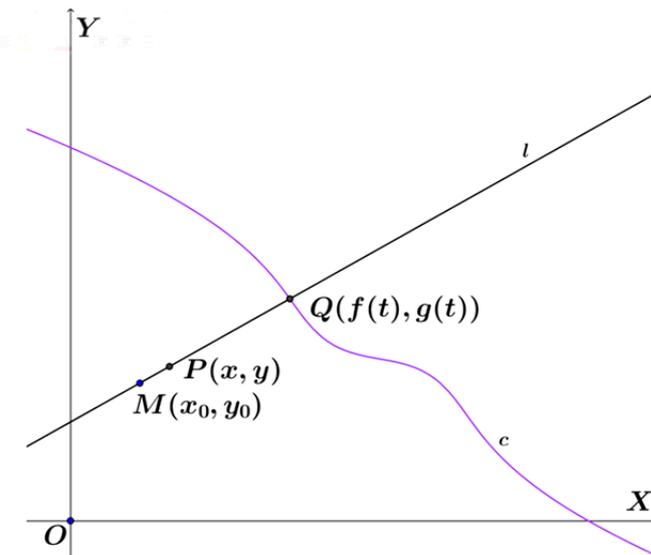


Figura 3.4(a)

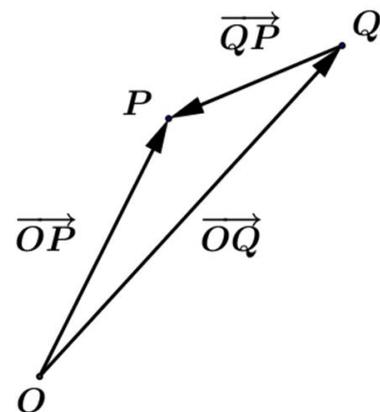


Figura 3.4(b)

Aqui, temos que

$$\overrightarrow{QP} = -k \cdot \frac{\overrightarrow{MQ}}{|\overrightarrow{MQ}|}$$

Daqui, um processo totalmente análogo ao anterior vai nos dar as seguintes equações paramétricas para o outro ramo da *conchóide* :

$$\begin{cases} x = f(t) - \frac{k \cdot (f(t) - x_0)}{\sqrt{(f(t) - x_0)^2 + (g(t) - y_0)^2}} \\ y = g(t) - \frac{k \cdot (g(t) - y_0)}{\sqrt{(f(t) - x_0)^2 + (g(t) - y_0)^2}} \end{cases}$$

### 3.1.2 Alguns exemplos de conchóides

#### Exemplo 1:

Sejam a reta  $r: y = 1$ , o ponto  $M(0,0)$  e  $k = 2$ . As equações paramétricas de  $r$  são

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases}$$

em que  $t$  é um parâmetro real .

Sendo  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $f(t) = t$  e  $g(t) = 1$ , a *conchóide* da reta  $r$ , com pólo  $M$  e módulo  $k = 2$  tem as seguintes equações paramétricas para o seu ramo mais distante de  $M$  (na figura 2.5, o ramo acima de  $r$ )

$$\begin{cases} x = t + \frac{2t}{\sqrt{t^2 + 1}} \\ y = 1 + \frac{2}{\sqrt{t^2 + 1}} \end{cases}$$

As equações paramétricas do ramo mais próximo do pólo (na figura 2.5, ramo abaixo de  $r$ ) são

$$\begin{cases} x = t - \frac{2t}{\sqrt{t^2 + 1}} \\ y = 1 - \frac{2}{\sqrt{t^2 + 1}} \end{cases}$$

Na figura seguinte temos o desenho da *conchóide*.

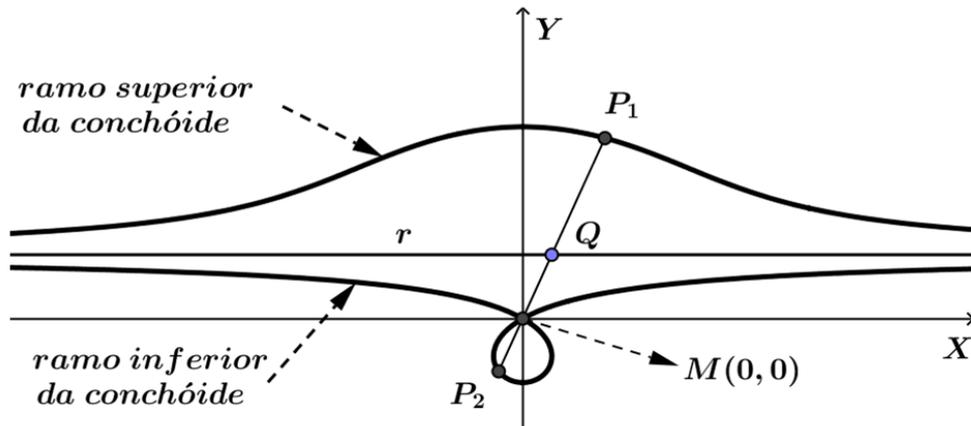


Figura 3.5

Aqui, temos que  $\overline{P_1Q} = \overline{QP_2} = 2$ .

### Exemplo 2:

Consideremos agora a circunferência  $c: x^2 + (y - 3)^2 = 2$ , o ponto  $M = (0,0)$  e  $k = 2$ .

A circunferência tem centro  $(0,3)$ , raio 2 e as seguintes equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2 \cdot \cos t \\ y = 3 + 2 \cdot \sin t \end{cases}$$

com  $t \in [0, 2\pi]$ .

Assim, sendo  $x_0 = 0, y_0 = 0, f(t) = 2 \cdot \cos t$  e  $g(t) = 3 + 2 \cdot \sin t$ , temos que as equações paramétricas para o ramo mais distante de  $M$  da *conchóide* de  $c$  com pólo  $M$  e módulo 2 são

$$\begin{cases} x = 2 \cdot \cos t + \frac{4 \cdot \cos t}{\sqrt{4 \cdot \cos^2 t + (3 + 2 \cdot \sin t)^2}} \\ y = 3 + 2 \cdot \sin t + \frac{6 + 4 \cdot \sin t}{\sqrt{4 \cdot \cos^2 t + (3 + 2 \cdot \sin t)^2}} \end{cases}$$

Para o ramo mais próximo a  $M$  temos

$$\begin{cases} x = 2 \cdot \text{cost} - \frac{4 \cdot \text{cost}}{\sqrt{4 \cdot \text{cos}^2 t + (3 + 2 \cdot \text{sent})^2}} \\ y = 3 + 2 \cdot \text{sent} - \frac{6 + 4 \cdot \text{sent}}{\sqrt{4 \cdot \text{cos}^2 t + (3 + 2 \cdot \text{sent})^2}} \end{cases}$$

Representamos a *conchóide* na figura 3.6 abaixo.

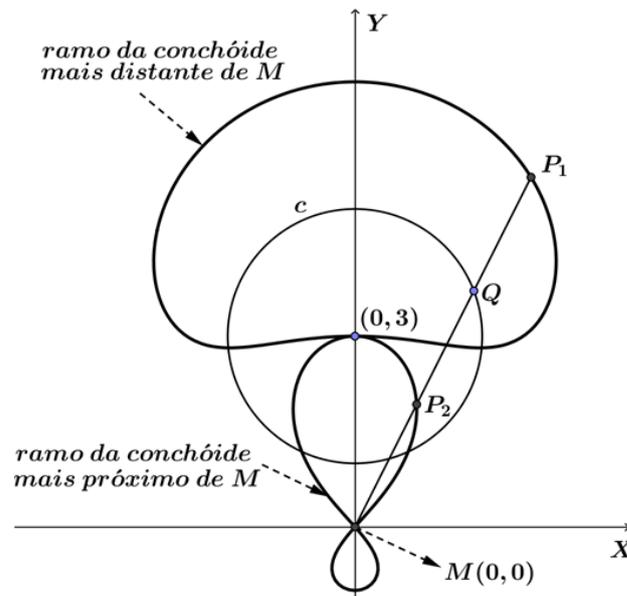


Figura 3.6

Aqui,  $\overline{QP_1} = \overline{QP_2} = 2$ .

### 3.2 Cissóide

Essa curva foi descoberta pelo matemático grego Diocles (240 aC – 180 aC) no século II a.C. Sejam  $Q_1$  um ponto qualquer de  $c_1$  e  $r$  a reta que passa por  $O$  e  $Q_1$ . Chamemos de  $Q_2$  a interseção de  $r$  com a curva  $c_2$ . Marquemos em  $r$  o ponto  $P$  cuja distância a  $O$  é igual à distância entre  $Q_1$  e  $Q_2$  de maneira que o sentido de  $O$  para  $P$  seja o mesmo que de  $Q_1$  para  $Q_2$ , ou seja,  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{Q_1Q_2}$ .

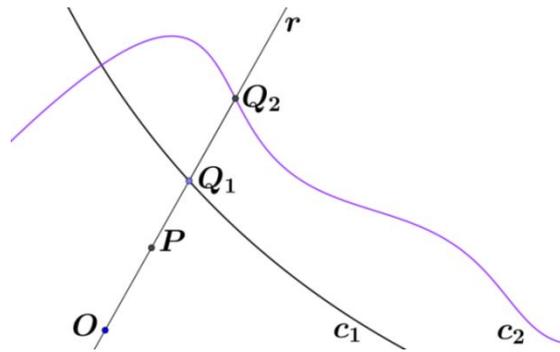


Figura 3.7

Fazendo o ponto  $Q_1$  percorrer a curva  $c_1$ , o ponto  $P$  descreve a *cissóide* de  $c_1$  com respeito a  $c_2$  e  $O$ .

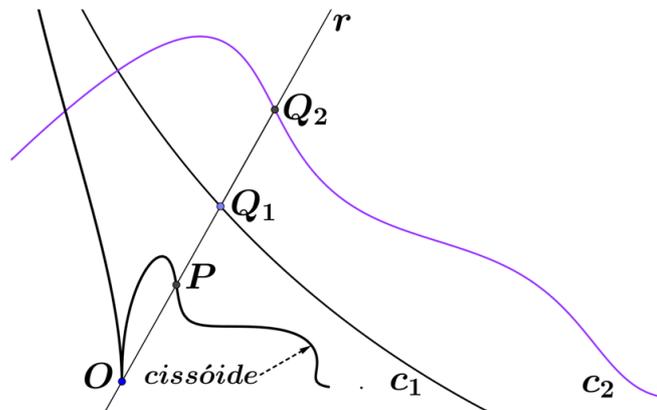


Figura 3.8

### 3.2.1 Equações paramétricas da cissóide.

Sejam

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \end{cases}$$

as equações paramétricas da curva  $c_1$ , em que  $t$  é um parâmetro real. Sendo  $O(x_0, y_0)$ , a reta  $r$  tem  $\overrightarrow{OP}$  como vetor diretor. Como

$$\overrightarrow{OP} = (f_1(t), g_1(t)) - (x_0, y_0) = (f_1(t) - x_0, g_1(t) - y_0),$$

a equação vetorial de  $r$  é:

$$(x, y) = v \cdot (f_1(t) - x_0, g_1(t) - y_0) + (f_1(t), g_1(t)),$$

em que  $v$  é uma variável real independente de  $t$ . Daqui obtemos as seguintes equações paramétricas de  $r$  em função do parâmetro  $v$ :

$$\begin{cases} x = v \cdot (f_1(t) - x_0) + f_1(t) \\ y = v \cdot (g_1(t) - y_0) + g_1(t) \end{cases}$$

Consideremos as equações paramétricas de  $c_2$ :

$$\begin{cases} x = f_2(u) \\ y = g_2(u) \end{cases}$$

com parâmetro real  $u$ .

Para determinarmos o valor de  $u$  que gera o ponto  $Q_2$  (interseção de  $r$  com  $c_2$ ) devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} v \cdot (f_1(t) - x_0) + f_1(t) = f_2(u) \\ v \cdot (g_1(t) - y_0) + g_1(t) = g_2(u) \end{cases}$$

Daqui, temos que

$$\begin{cases} v \cdot (f_1(t) - x_0) = f_2(u) - f_1(t) \\ v \cdot (g_1(t) - y_0) = g_2(u) - g_1(t) \end{cases}$$

E dividindo ambas as equações membro a membro depois de fazer  $f_1(t) - x_0 = \Delta x$  e  $g_1(t) - y_0 = \Delta y$ , obtemos

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f_2(u) - f_1(t)}{g_2(u) - g_1(t)} \Rightarrow g_2(u)\Delta x - f_2(u)\Delta y = g_1(t)\Delta x - f_1(t)\Delta y$$

Se a última equação acima tiver uma solução  $u = \varphi(t)$ , poderemos escrever as coordenadas  $(x, y)$  de  $Q_2$  como:

$$\begin{cases} x = f_2(\varphi(t)) \\ y = g_2(\varphi(t)) \end{cases}$$

Estamos querendo determinar um ponto  $P(x, y)$  na reta  $r$  de maneira que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{Q_1Q_2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}(x, y) - (x_0, y_0) &= (f_2(\varphi(t)), g_2(\varphi(t))) - (f_1(t), g_1(t)) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x - x_0, y - y_0) &= (f_2(\varphi(t)) - f_1(t), g_2(\varphi(t)) - g_1(t))\end{aligned}$$

Daqui, tiramos as seguintes equações paramétricas da *cissóide* em função do parâmetro  $t$ :

$$\begin{cases} x = x_0 + f_2(\varphi(t)) - f_1(t) \\ y = y_0 + g_2(\varphi(t)) - g_1(t) \end{cases}$$

### 3.2.2 Alguns exemplos de cissóides

#### Exemplo 1

Sejam  $c_1: y = -\frac{x^2}{4}$ ,  $c_2: y = 1$  e  $O = (0, -1)$ . Temos que as equações paramétricas de  $c_1$ , (onde  $t$  é real) são:

$$\begin{cases} f_1(t) = t \\ g_1(t) = -\frac{t^2}{4} \end{cases}$$

As equações paramétricas de  $c_2$  (sendo  $u$  um parâmetro real) são:

$$\begin{cases} f_2(u) = u \\ g_2(u) = 1 \end{cases}$$

De

$$g_2(u)\Delta x - f_2(u)\Delta y = g_1(t)\Delta x - f_1(t)\Delta y,$$

em que  $\Delta x = f_1(t) - x_0 = t$  e  $\Delta y = g_1(t) - y_0 = -\frac{t^2}{4} + 1$  (já que  $(x_0, y_0) = (0, -1)$ ), obtemos

$$1 \cdot t - u \cdot \left(-\frac{t^2}{4} + 1\right) = -\frac{t^2}{4} \cdot t - t \cdot \left(-\frac{t^2}{4} + 1\right).$$

Esta equação nos dá  $u = \varphi(t) = \frac{8t}{4-t^2}$ , com  $t \neq \pm 2$ . Então,

$$f_2(\varphi(t)) = \varphi(t) = \frac{8t}{4-t^2}$$

e

$$g_2(\varphi(t)) = 1.$$

Assim, a cissóide de  $c_1$  com respeito a  $c_2$  e  $O$ , tem as seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 0 + \frac{8t}{4-t^2} - t = \frac{4t+t^3}{4-t^2} \\ y = -1 + 1 - \left(-\frac{t^2}{4}\right) = \frac{t^2}{4}, \end{cases}$$

com  $t \neq \pm 2$ . Representamos a cissóide, que apresenta três ramos, na figura 2.9.

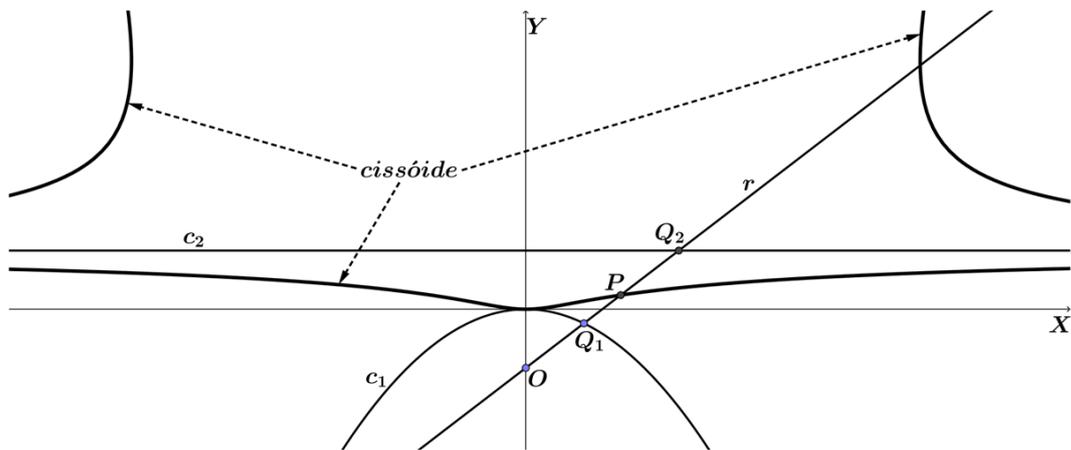


Figura 3.9

### Exemplo 2

Consideremos agora que  $c_1$  é a elipse de equação  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ,  $c_2$  é novamente a reta de equação  $y = 1$  e  $O = (0,0)$ . As equações paramétricas da elipse são

$$\begin{cases} f_1(t) = 2\cos t \\ g_1(t) = \sin t, \end{cases}$$

com  $t$  real e  $0 \leq t < 2\pi$ . As equações paramétricas de  $c_2$  são as mesmas do exemplo anterior. Fazendo  $\Delta x = f_1(t) = 2\cos t$  e  $\Delta y = \sin t$  (uma vez que  $x_0 = y_0 = 0$ ), temos

$$g_2(u)\Delta x - f_2(u)\Delta y = g_1(t)\Delta x - f_1(t)\Delta y \Rightarrow$$

$$1 \cdot 2\cos t - u \cdot \sin t = (\sin t) \cdot 2\cos t - (2\cos t) \cdot \sin t.$$

Daqui, encontramos  $u = \varphi(t) = 2\cot t$ . Aqui temos  $0 < t < 2\pi$  e  $t \neq \pi$ . Temos que  $f_2(\varphi(t)) = \varphi(t) = 2\cot t$  e  $g_2(\varphi(t)) = 1$ . Portanto, as equações paramétricas da cissóide de  $c_1$  com respeito a  $c_2$  e  $O$  são

$$\begin{cases} x = 2\cot g(t) - 2\cos t \\ y = 1 - \sin t. \end{cases}$$

Esta cissóide apresenta dois ramos e esta representada na figura 2.10.

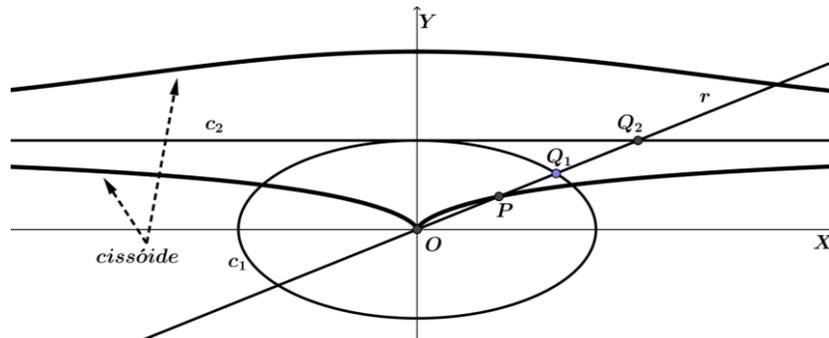


Figura 3.10

### 3.3 A Espiral de Arquimedes

Afigura abaixo representa uma semi-reta  $\overrightarrow{OA}$  e um ponto  $P$  sobre a mesma.

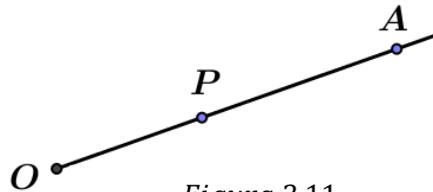


Figura 3.11

Se o ponto  $P$  se movimentar com velocidade constante sobre tal semi-reta (se afastando de  $O$ ) enquanto a semi-reta gira em torno de  $O$  com velocidade angular constante, o lugar geométrico de  $P$  é a *espiral de Arquimedes*.

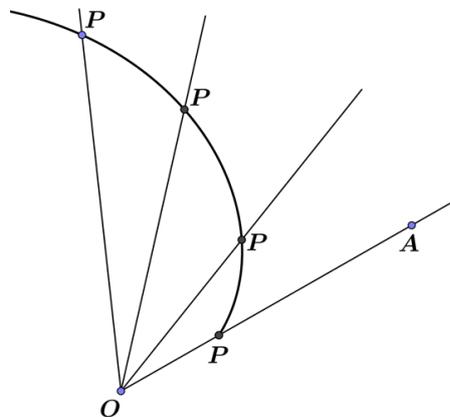


Figura 3.12

### 3.3.1 Equação polar da espiral de Arquimedes.

Consideremos o ponto  $O$  na origem do sistema de coordenadas cartesianas, o ponto  $A$  estando inicialmente no primeiro quadrante e que a semi-reta  $\overrightarrow{OA}$  gira no sentido anti-horário. Sejam  $a$  a distância entre  $P$  e  $O$  e  $\theta_0$  a medida em radianos do ângulo que o semi-eixo positivo  $X$  forma com a semi-reta  $\overrightarrow{OA}$  (medido do semi-eixo positivo  $X$  para  $\overrightarrow{OA}$  no sentido anti-horário) no instante inicial. Depois de decorrido um tempo  $t$ , o ponto  $P$  estará a uma distância  $r$  de  $O$  e a semi-reta  $\overrightarrow{OA}$  estará formando um ângulo  $\theta$  com o semi-eixo positivo  $X$ .

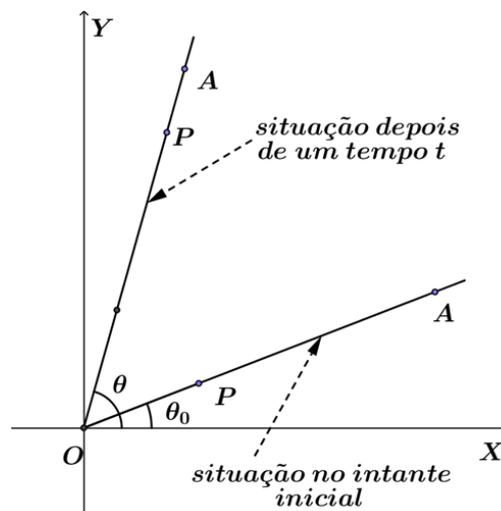


Figura 3.13

Seja  $v$  a velocidade com que o ponto  $P$  se desloca sobre a semi-reta e  $v'$  a velocidade angular com que esta gira, temos

$$v = \frac{r-a}{t} \text{ e } v' = \frac{\theta - \theta_0}{t}.$$

Então,

$$t = \frac{r-a}{v} \text{ e } t = \frac{\theta - \theta_0}{v'}$$

Logo,

$$\frac{r-a}{v} = \frac{\theta - \theta_0}{v'} \Rightarrow r - a = \frac{v}{v'} (\theta - \theta_0).$$

Fazendo  $b = \frac{v}{v'}$ , obtemos a equação polar da *espiral de Arquimedes*:

$$r = a + b(\theta - \theta_0)$$

Veamos, por exemplo, a espiral que será utilizada no capítulo 3 para resolver o problema da trissecção do ângulo. Nela,  $a = 0$ ,  $b = 1$  e  $\theta_0 = 0$ . O valor  $b = 1$  significa que a velocidade com que o ponto  $P$  se movimenta na semi-reta é numericamente igual à velocidade angular com que esta gira em torno de  $O$ . Para tais valores de  $a$ ,  $b$  e  $\theta_0$  temos a seguinte equação polar da espiral

$$r = \theta,$$

cuja representação está na figura 2.14 abaixo.

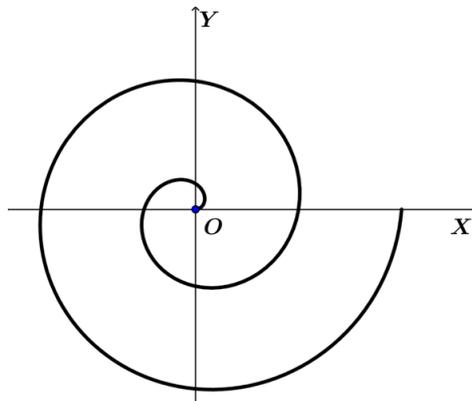


Figura 3.14

A equação polar dessa espiral nos diz que o raio que liga um ponto  $P$  qualquer dela à origem do sistema tem comprimento numericamente igual à medida em radianos do ângulo que tal raio faz com o semi-eixo positivo  $X$ , medido a partir do instante inicial no sentido anti-horário. Esse será o fato principal utilizado no capítulo 3 para a trissecção do ângulo.

### 3.4 A trissectriz de Hípias

A *trissectriz* (também chamada de *quadratriz*) é uma curva descoberta pelo matemático grego Hípias de Élis no final do século V a.C. Esta curva resolve os problemas da trissecção do ângulo e da quadratura do círculo. Descreveremos a seguir como ela é construída.

No quadrado  $ABCD$  da figura abaixo, suponhamos que o lado  $DC$  desce paralelamente ao lado  $AB$  com velocidade constante e que, ao mesmo tempo, o lado  $AD$  gira

em torno do ponto  $A$  com velocidade angular constante, de maneira que ambos os lados móveis coincidam com o lado  $AB$  ao mesmo tempo. O lugar geométrico dos pontos de interseção destes dois lados móveis é a *trissectriz* de Hípias.

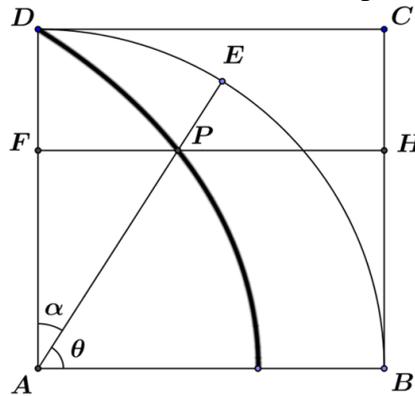


Figura 3.15

Aqui, vale observar que o tempo  $t$  necessário para que o lado  $DC$  atinja a posição do segmento  $FH$  da figura é o mesmo que o lado  $AD$  leva para atingir a posição do segmento  $AE$  da figura. Sejam  $T$  o tempo gasto para que os lados  $DC$  e  $AD$  coincidam com  $AB$ ,  $\alpha$  a medida em radianos do ângulo  $D\hat{A}E$  e  $\theta$  a medida em radianos do ângulo  $B\hat{A}E$ . A distância percorrida em um movimento com velocidade constante é proporcional ao tempo gasto para percorrê-la e no movimento circular com velocidade angular constante, o ângulo percorrido também é proporcional ao tempo gasto para percorrê-lo. Assim, temos que

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} = \frac{t}{T}$$

e

$$\frac{\alpha}{\frac{\pi}{2}} = \frac{t}{T}$$

Portanto,

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} = \frac{\alpha}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \frac{\overline{AD} - \overline{DF}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AD}} = \frac{\theta}{\frac{\pi}{2}}$$

Esta última igualdade será essencial no capítulo 3 onde será descrito como usar a *trissectriz* para resolver os problemas da trissecção do ângulo e da quadratura do círculo.

## 4 USANDO AS CURVAS PARA RESOLVER OS PROBLEMAS

Vamos ver neste capítulo como as curvas estudadas no capítulo 2 podem ser usadas na solução dos três problemas clássicos.

### 4.1 Soluções para o problema da duplicação do cubo.

Os gregos sabiam resolver um problema semelhante, porém muito mais simples, que era a duplicação do quadrado, ou seja, dado um quadrado de lado  $a$ , obter a lado do quadrado de área  $2a^2$ . No diálogo de Platão, Mênon, Sócrates faz um escravo chegar a um método para duplicar o quadrado.

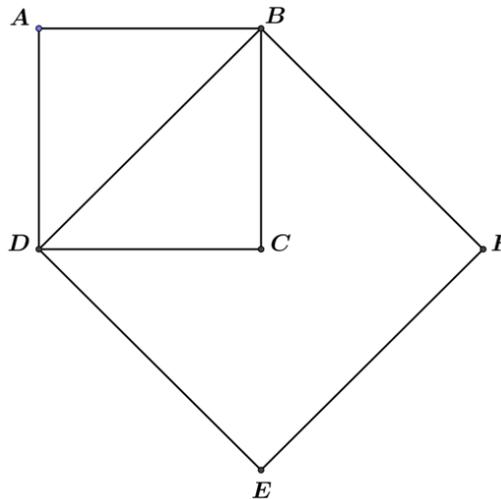


Figura 4.1

Consideremos um quadrado  $ABCD$  da figura 3.1. Traçamos a diagonal  $BD$ . O quadrado  $BDEF$  tem o dobro da área do quadrado  $ABCD$ . De fato, no triângulo retângulo  $BCD$  temos que  $\overline{BD}^2 = 2\overline{BC}^2$ . Daqui vemos que:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{2\overline{BC}}$$

Portanto, dado um quadrado de lado  $a$ , resolver o problema de achar o lado do quadrado de área  $2a^2$  é encontrar a média proporcional entre  $a$  e  $2a$ , ou seja, é encontrar um número  $x$  tal que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{2a}$$

Hipócrates de Quios (470 a.C- 410 a.C) reduziu o problema da duplicação do cubo a algo parecido com o que foi feito para a duplicação do quadrado. Para obtermos a aresta do cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo de aresta  $a$ , devemos achar duas médias proporcionais  $x$  e  $y$  entre  $a$  e  $2a$ . De outra maneira,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Estas igualdades fornecem:

$$x^2 = ay \quad (I) \quad \text{e} \quad xy = 2a^2 \quad (II)$$

Multiplicando (I) por  $x$ , temos:

$$x^3 = axy.$$

Agora, usando (II), obtemos:

$$x^3 = 2a^3$$

Assim,  $x$  é a medida da aresta do cubo duplicado.

Com a redução do problema a achar duas médias proporcionais entre a medida aresta do cubo e seu dobro, procurou-se meios de construção dessas médias.

#### 4.1.1 A solução de Menaecmus (380 a.C – 320 a.C)

Aparentemente, a procura por curvas que pudessem fornecer duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta dados fez com que Menaecmus descobrisse as seções cônicas. Ele usou parábolas para fornecer uma resolução gráfica para o problema. Para encontrar as duas médias proporcionais entre dois segmentos de comprimentos  $a$  e  $b$ , Menaecmus considerou duas parábolas de equações  $x^2 = ay$  e  $y^2 = bx$  (na linguagem de hoje). O ponto de interseção  $(x, y)$  destas curvas diferente da origem satisfaz as igualdades:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

No caso da duplicação do cubo de aresta  $a$  fazemos  $b = 2a$ .

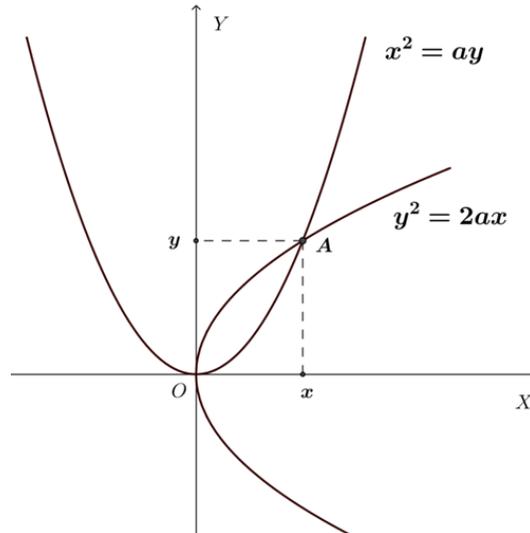


Figura 4.2

A abscissa  $x$  do ponto  $A$  nos dá o valor da aresta do cubo duplicado, pois  $x^3 = 2a^3$ . Estas parábolas podem ser traçadas ponto por ponto com régua e compasso. Assim, temos uma solução gráfica para o problema da duplicação do cubo.

#### 4.1.2 A cissóide de Diocles.

No século dois antes de Cristo, Diocles descobriu uma curva que lhe permitiu resolver o problema da duplicação do cubo.

Consideremos no plano cartesiano um círculo  $c$  de centro no ponto  $A = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$  e raio  $\frac{1}{2}$  e a reta vertical  $t$  de equação  $x = 1$  tangente ao círculo no ponto  $I(1,0)$ . Diocles construiu a cissóide de  $c$  e  $t$  com respeito à origem  $O = (0,0)$ .

Cada ponto  $M$  do círculo, exceto o ponto  $O$ , gera um segmento  $OM_1$ , onde  $M_1$  é o ponto de interseção da reta  $OM$  com a reta  $t$ . Assim, todo ponto  $M$  do círculo está associado a um ponto  $M_2$  do segmento  $OM_1$  tal que

$$\overline{OM_2} = \overline{MM_1}.$$

Quando  $M$  percorre o círculo  $c$ ,  $M_2$  descreve uma curva  $d$  chamada de *Cissóide de Diocles*.

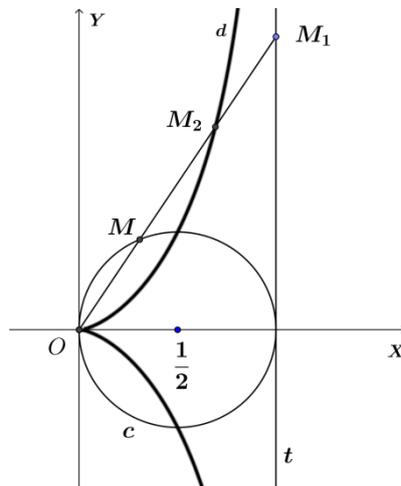


Figura 4.3

Uma vez que cada ponto da curva é interseção de uma reta e um círculo, podemos concluir que esta curva  $d$  pode ser construída ponto por ponto com régua e compasso.

Considerando um sistema de coordenadas polares com pólo em  $O$  e eixo polar igual ao semi-eixo  $X$  no sentido positivo e fazendo  $r = \overline{OM}$  (figura abaixo), onde  $M$  é um ponto genérico do círculo, temos que:

$$\frac{r}{1} = \cos\theta$$

Então, a equação polar do círculo  $c$  é  $r = \cos\theta$ .

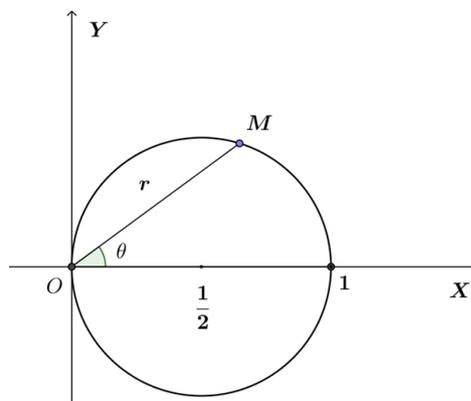


Figura 4.4

De acordo com a figura 3.5 temos:  $\cos\theta = \frac{1}{r}$ . Assim, a equação polar da reta  $t$  é

$$r = \frac{1}{\cos\theta}.$$

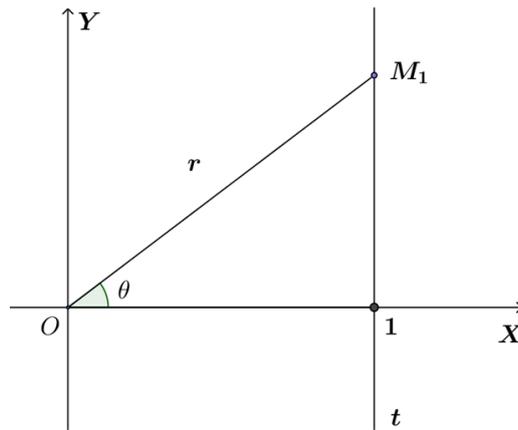


Figura 4.5

De acordo com a figura 3.3 temos que :

$$\overline{MM_1} = \overline{OM_1} - \overline{OM}$$

Mas  $\overline{MM_1} = \overline{OM_2}$ . Então:

$$\overline{OM_2} = \overline{OM_1} - \overline{OM}$$

Fazendo agora  $r = \overline{OM_2}$  obtemos a equação polar da cissóide  $d$ :

$$r = \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta \Rightarrow r = \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos\theta}.$$

Sendo  $(x, y)$  as coordenadas cartesianas do ponto genérico  $M_2$  da curva  $d$ , então,

$$x = r\cos\theta \text{ e } y = r\text{sen}\theta$$

Assim,  $x = \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos\theta} \cdot \cos\theta \Rightarrow x = \text{sen}^2\theta$  e  $y^2 = r^2 \cdot \text{sen}^2\theta$ . Como  $x^2 + y^2 = r^2$ ,

obtemos a equação cartesiana de  $d$ :

$$y^2 = (x^2 + y^2) \cdot x \text{ ou } (x^2 + y^2) \cdot x - y^2 = 0$$

Seja o ponto  $U$  do eixo  $Y$  de coordenadas  $(0,2)$ . Seja  $I = (1,0)$ . A reta  $IU$  tem equação cartesiana  $y = 2 \cdot (1 - x)$ . Chamemos de  $P(x_0, y_0)$  o ponto de interseção desta reta com a cissóide  $d$ .

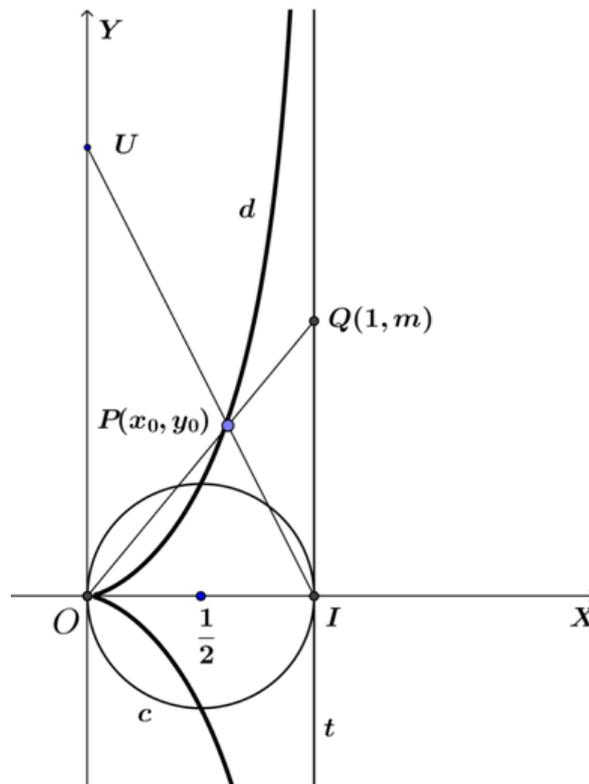


Figura 4.6

Temos então o sistema

$$\begin{cases} y_0 = 2 \cdot (1 - x_0) \\ x_0 \cdot (x_0^2 + y_0^2) - y_0 = 0 \end{cases}$$

A segunda equação fornece

$$\begin{aligned} x_0^3 + x_0 \cdot y_0^2 - y_0^2 &= 0 \Rightarrow x_0^3 + y_0^2 \cdot (x_0 - 1) = 0 \Rightarrow \\ y_0^2 \cdot (1 - x_0) &= x_0^3. \end{aligned}$$

Substituindo  $1 - x_0 = \frac{y_0}{2}$  (da primeira equação) na última igualdade acima, obtemos:

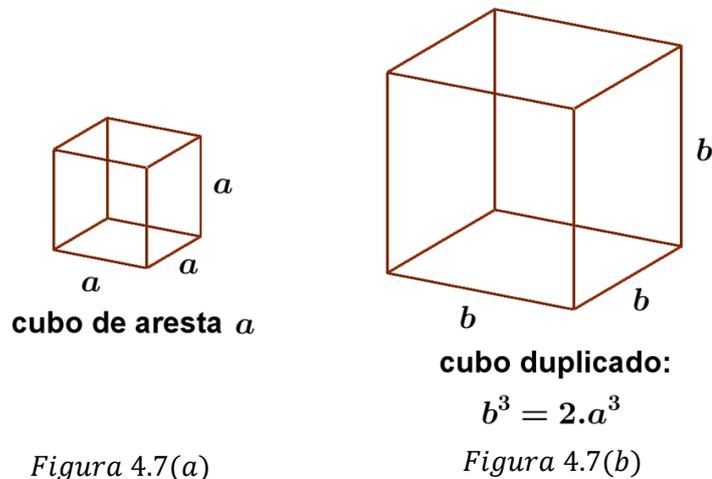
$$y_0^2 \cdot \frac{y_0}{2} = x_0^3 \Rightarrow y_0^3 = 2 \cdot x_0^3 \Rightarrow y_0 = \sqrt[3]{2} \cdot x_0$$

A equação da reta  $OP$  é  $y = \sqrt[3]{2} \cdot x$ . Se  $Q = (1, m)$  é o ponto onde a reta  $OP$  corta a reta  $r$ , encontramos a ordenada de  $Q$  fazendo  $x = 1$  na equação da reta  $OP$ :

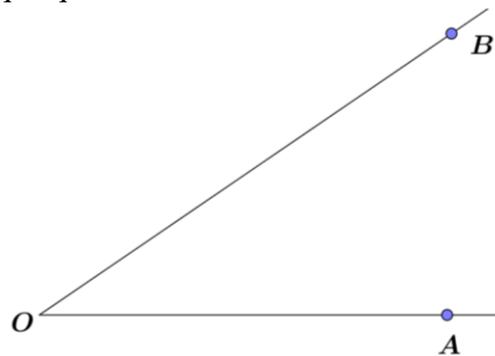
$$m = \sqrt[3]{2} \cdot 1 \Rightarrow m = \sqrt[3]{2}$$

Assim, a construção de Diocles lhe permitiu encontrar um segmento de comprimento  $\sqrt[3]{2}$ . Isto resolve o problema da duplicação do cubo. De fato, dado um cubo com aresta de comprimento  $a$ , o cubo duplicado terá volume  $2 \cdot a^3$  e aresta  $b = \sqrt[3]{2} \cdot a$ . Lembrando que os gregos tratavam os números como segmentos de reta, a aresta do cubo duplicado é o produto

do segmento obtido pela construção de Diocles pela aresta do cubo original. E os gregos sabiam como multiplicar dois segmentos.

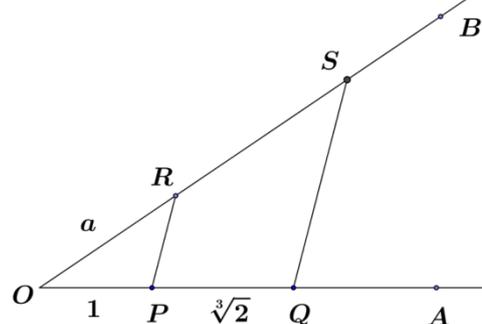


Vamos ver como isto pode ser feito. Consideremos as semi-retas da figura abaixo formando um ângulo qualquer entre si.



*Figura 4.8*

Marcamos os pontos  $P$  e  $Q$  na semi-reta  $OA$  (com  $P$  entre  $O$  e  $Q$ ) de modo que  $\overline{OP} = 1$  e  $\overline{PQ} = \sqrt[3]{2}$ . Marcamos o ponto  $R$  na semi-reta  $OB$  de modo que  $\overline{OR} = a$ . Ligamos o ponto  $P$  com o ponto  $R$  e traçamos uma paralela ao segmento  $PR$  passando pelo ponto  $Q$ . Seja  $S$  o ponto de interseção dessa paralela com a semi-reta  $OB$ .



*Figura 4.9*

Pelo Teorema de Tales (figura 3.9), temos o seguinte:

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} \Rightarrow \frac{\overline{RS}}{a} = \frac{\sqrt[3]{2}}{1} \Rightarrow \overline{RS} = a \cdot \sqrt[3]{2}$$

Portanto, o segmento  $RS$  é a aresta  $b$  do cubo duplicado.

#### 4.1.3 A conchóide de Nicomedes.

Uma outra curva que pode ser utilizada para a obtenção de um segmento de comprimento  $\sqrt[3]{2}$  (e, portanto, para resolver o problema da duplicação do cubo) é a *conchóide de Nicomedes*.

Suponhamos que já sabemos onde fica o ponto  $A$  do eixo  $X$  de abscissa  $-\sqrt[3]{2}$ . Marcamos o ponto  $B$ , também no eixo  $X$ , de abscissa 2 o ponto  $C$  de coordenadas  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Pelo ponto  $O(0,0)$  de plano cartesiano traçamos uma paralela ao segmento  $BC$ . Seja  $D$  a interseção desta reta com o segmento  $BC$ .

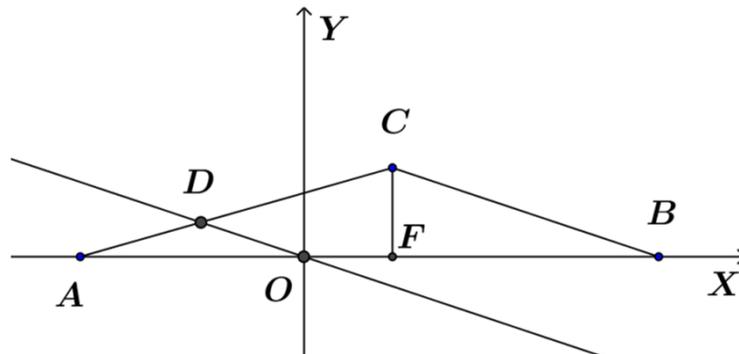


Figura 4.10

Usando  $\alpha = \sqrt[3]{2}$ , podemos escrever  $AO = \alpha$  e  $AB = \alpha + 2$ . Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \frac{\overline{AO}}{\overline{AB}} \quad (I)$$

Sendo  $F$  o pé da perpendicular ao eixo  $X$  passando por  $C$ , o teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo  $ACF$  nos dá:

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AF}^2 + \overline{CF}^2 \Rightarrow \overline{AC}^2 = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ \overline{AC}^2 &= \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Como  $\alpha^3 = 2$ , temos:

$$\begin{aligned}\alpha^2 \cdot \left( \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{2} \right) &= \alpha^4 + \alpha^3 + \frac{\alpha^2}{2} = \alpha^3 \cdot \alpha + \alpha^3 + \frac{\alpha^2}{2} = \\ &= 2 \cdot \alpha + 2 + \frac{\alpha^2}{2} = \frac{4 \cdot \alpha + 4 + \alpha^2}{2} = \frac{(\alpha + 2)^2}{2}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\overline{AC} \cdot \alpha = \alpha \cdot \sqrt{\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha^2 \cdot \left( \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{2} \right)} = \sqrt{\frac{(\alpha + 2)^2}{2}} = \frac{\alpha + 2}{\sqrt{2}}.$$

. Então,

$$\overline{AC} = \frac{\alpha + 2}{\alpha \cdot \sqrt{2}}.$$

Substituindo esta última expressão em (I), obtemos:

$$\overline{AD} = \frac{\alpha + 2}{\alpha \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + 2} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De posse deste valor de  $AD$  podemos marcar corretamente o ponto  $A$ , o que na verdade ainda não sabemos. Usando a *conchóide de Nicomedes* podemos fazer isto.

Primeiramente marcamos os pontos  $B$  e  $C$  e depois traçamos a reta  $r$ , paralela à reta  $BC$  passando por  $O = (0,0)$ .

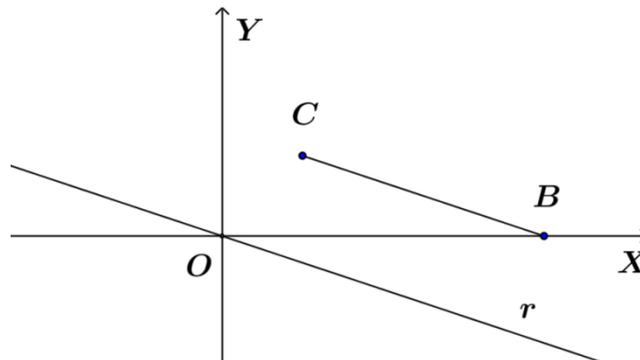


Figura 4.11

Agora traçamos a *conchóide* da reta  $r$  com pólo no ponto  $C$  e módulo  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Esta *conchóide* pode ser construída ponto por ponto com régua e compasso, visto que o número  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  é construtível. Sendo  $A$  o ponto de interseção da *conchóide* com o eixo  $X$ , traçamos o segmento  $AC$ . Chamando de  $D$  o ponto de interseção deste segmento com reta  $r$ , temos que  $\overline{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .



Sejam  $r$  a reta perpendicular à reta  $OB$  passando por  $A$ , e  $s$  a paralela a  $OB$  passando por  $A$ . Marquemos sobre a reta  $s$  o ponto  $C$  tal que  $\overline{CD} = 2\overline{OA}$ , onde  $D$  é a interseção do segmento  $OC$  com a reta  $r$ , como na figura 4.14.

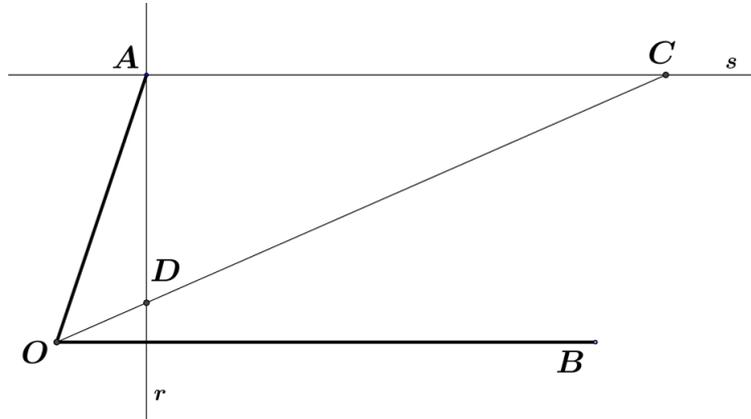


Figura 4.14

Se  $E$  o ponto médio do segmento  $CD$ , temos que o triângulo retângulo  $ADC$  é circunscrito por um círculo de centro  $E$  e raio  $DE$ , de modo que  $\overline{AO} = \overline{AE} = \overline{EC}$ . Assim, os triângulos  $AOE$  e  $ACE$  são isóceles com  $\widehat{AOE} = \widehat{AEO} = \alpha$  e  $\widehat{ECA} = \beta$ .

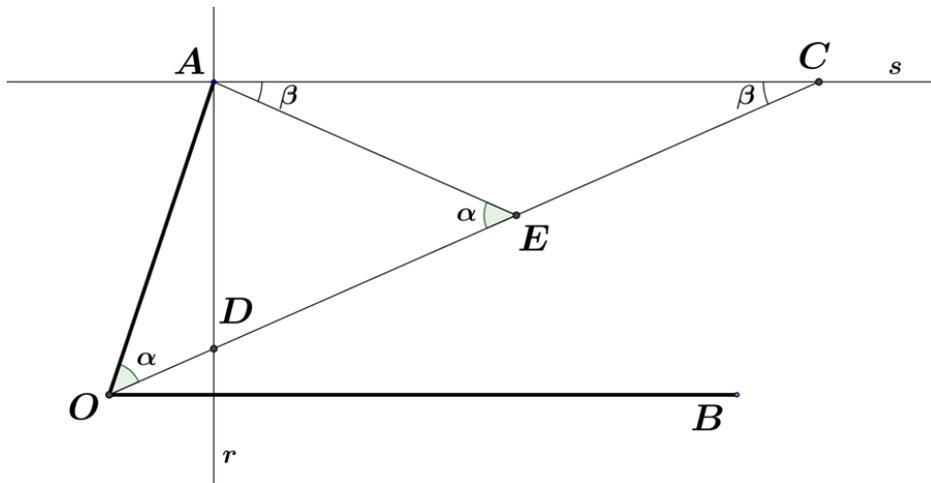


Figura 4.15

Usando o teorema do ângulo externo no triângulo  $ACE$ , temos que

$\widehat{AEO} = \widehat{EAC} + \widehat{ACE}$ , ou seja,  $\alpha = 2\beta$ . Como a reta  $\overrightarrow{AC}$  é paralela à reta  $\overrightarrow{OB}$ , também vale  $\widehat{BOC} = \widehat{ACO} = \beta$ . Assim,  $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{AOB} = \alpha + \beta \Rightarrow \widehat{AOB} = 3\beta$ . Logo,  $\beta = \widehat{BOC} = \frac{1}{3} \widehat{AOB}$ . Foi feita então a trisseção do ângulo  $\widehat{AOB}$ .

A dificuldade da construção anterior consiste em encontrar o ponto  $C$  na reta  $s$  satisfazendo as condições exigidas. É aí que mais uma vez pode ser utilizada a *conchóide de Nicomedes* para solucionar o problema.

Consideremos o estágio da construção em que foram traçadas apenas as retas  $r$  e  $s$ .

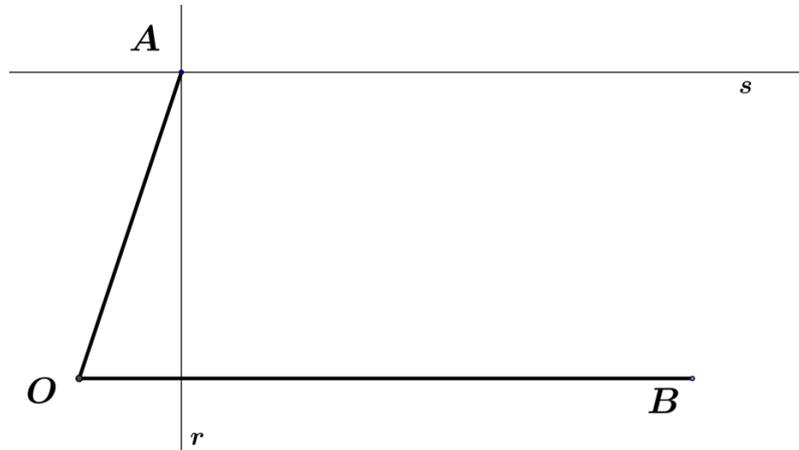


Figura 4.16

Agora traçamos a *conchóide* da reta  $r$  com pólo no ponto  $O$  e módulo  $2 \cdot \overline{OA}$ .

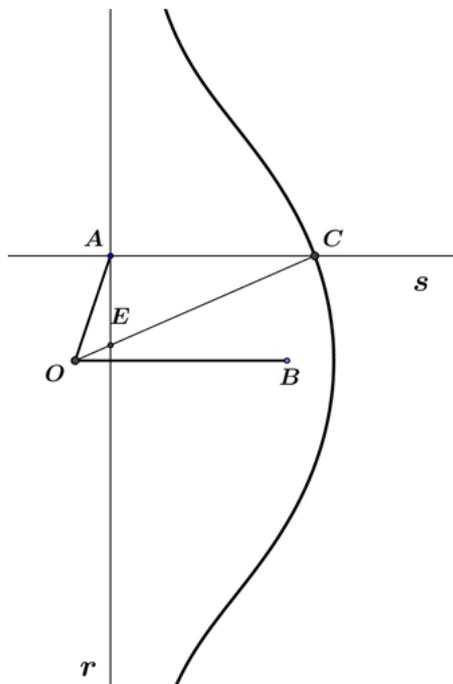


Figura 4.17

Sendo  $C$  a interseção da *conchóide* com a reta  $s$  e  $E$  a interseção do segmento  $OC$  com a reta  $r$ , temos que  $\overline{EC} = 2 \cdot \overline{OA}$ . A discussão anterior garante que  $B\hat{O}C = \frac{1}{3} A\hat{O}B$ .

Se  $\widehat{AOB}$  for reto, a trissecção é feita construindo um triângulo equilátero  $XOB$ , como na figura 3.18(b).

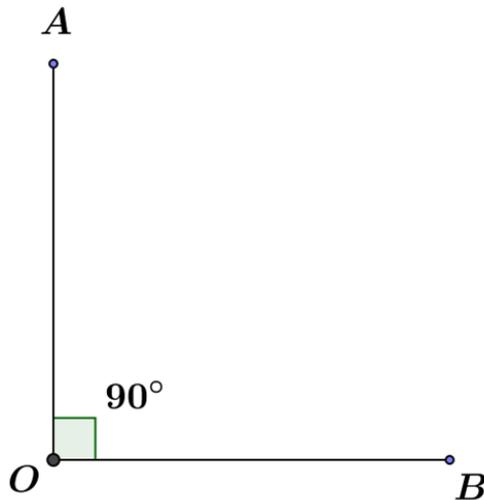


Figura 4.18(a)

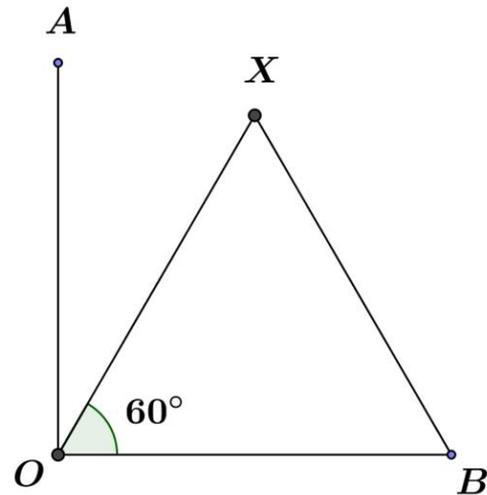


Figura 4.18(b)

Agora, bisseccionando o ângulo  $X\widehat{OB}$ , obtemos a trissecção do ângulo  $A\widehat{OB}$ .

Se  $90^\circ < A\widehat{OB} < 180^\circ$ , escrevemos  $A\widehat{OB} = 90^\circ + \theta$ . Se  $180^\circ < A\widehat{OB} < 270^\circ$ , escrevemos  $A\widehat{OB} = 180^\circ + \theta$ . Se  $270^\circ < A\widehat{OB} < 360^\circ$ , escrevemos  $A\widehat{OB} = 270^\circ + \theta$ , onde  $\theta$  é um ângulo agudo em todos os casos. Como é possível trissecionar o ângulo reto com régua e compasso, também é possível trissecionar os ângulos de  $180^\circ$  e  $270^\circ$ . Portanto, o problema da trissecção de um ângulo qualquer se resume na trissecção de um ângulo agudo qualquer.

#### 4.2.2 Usando a espiral de Arquimedes.

Vamos começar lembrando uma importante propriedade da espiral de Arquimedes. A figura abaixo mostra um ramo da espiral no primeiro quadrante do plano cartesiano.

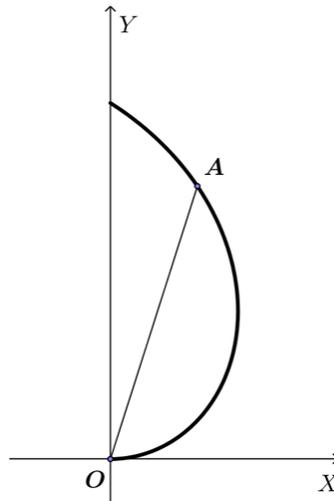


Figura 4.19

Seja  $A$  um ponto qualquer nesse ramo. Consideremos agora um círculo centrado em  $O$  e raio  $OA$  cuja interseção com o semi-eixo positivo  $X$  é o ponto  $P$ .

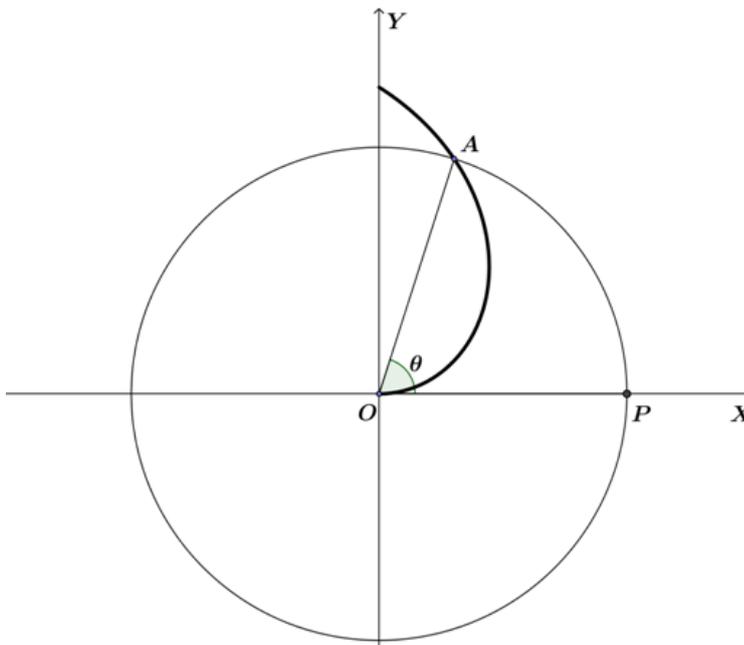


Figura 4.20

Se  $\theta$  a medida em radianos do ângulo  $A\hat{O}P$  e  $\overline{OA} = r$ , a equação polar da espiral fornece  $\overline{OA} = r = \theta$ .

Vamos ver agora como isto pode ser usado para trisseccionar um ângulo agudo  $M\hat{O}N$  com  $O$  na origem do plano,  $M$  no semi-eixo positivo  $X$  e  $N$  no primeiro quadrante.

Começamos marcando o ponto  $A$  de interseção da semi-reta  $\overrightarrow{ON}$  com o ramo da espiral. Depois marcamos os pontos  $B$  no segmento  $OA$  de modo que  $\overline{OB} = \frac{1}{3}\overline{OA}$ . Em seguida traçamos um círculo centrado em  $O$  e raio  $\overline{OB}$ . Seja  $C$  o ponto de interseção deste círculo com o ramo da espiral, conforme a figura 3.21.

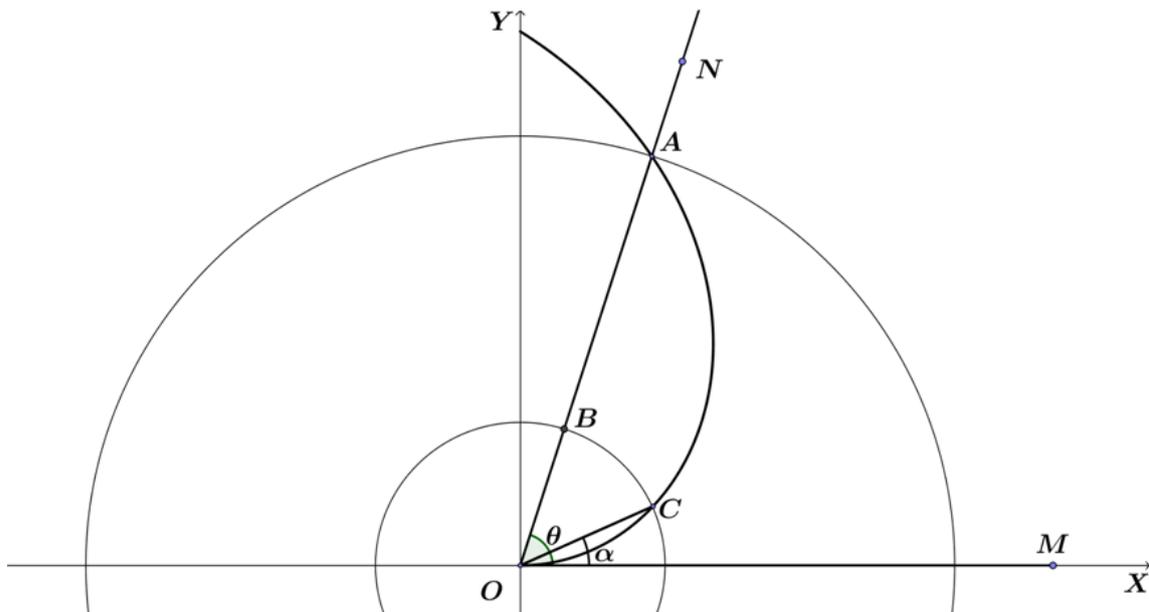


Figura 4.21

Se  $\theta$  a medida em radianos do ângulo  $M\hat{O}N$  e  $\alpha$  a medida em radianos do ângulo  $C\hat{O}M$ , a propriedade comentada no começo da seção nos permite escrever:

$$\overline{OA} = \theta \text{ e } \overline{OC} = \alpha$$

Mas  $\overline{OB} = \overline{OC}$ . Logo,  $\overline{OB} = \alpha$ . Como  $\overline{OA} = 3\overline{OB}$ , concluímos que

$$\theta = \overline{OA} = 3\overline{OB} = 3\alpha.$$

$$\text{Portanto, } C\hat{O}M = \frac{1}{3} N\hat{O}M.$$

#### 4.2.3 Outra solução proposta por Arquimedes.

Consideremos o ângulo  $A\hat{O}B$  da figura 4.22, onde  $O$  é o centro do círculo e  $A$  e  $B$  pertencem a um mesmo círculo.

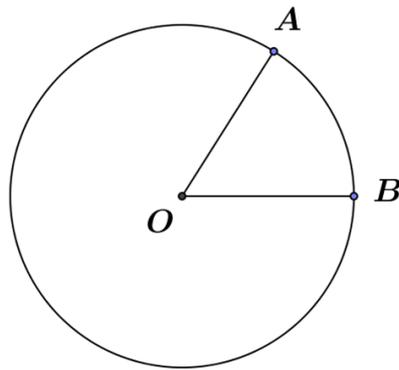


Figura 4.22

Por  $A$  traçamos uma reta que corta o círculo no ponto  $M$  e a reta suporte do segmento  $OB$  no ponto  $N$ , conforme a figura abaixo, de maneira que  $\overline{MN} = \overline{OM}$ . Isso pode ser feito marcando-se em uma régua pontos cuja distância seja exatamente  $\overline{OM}$  e posicionando essa régua de modo a que as marcas coincidam com pontos sobre o círculo e a reta suporte de  $OB$ . Mais adiante veremos como obter o ponto  $N$  usando uma conchoide.

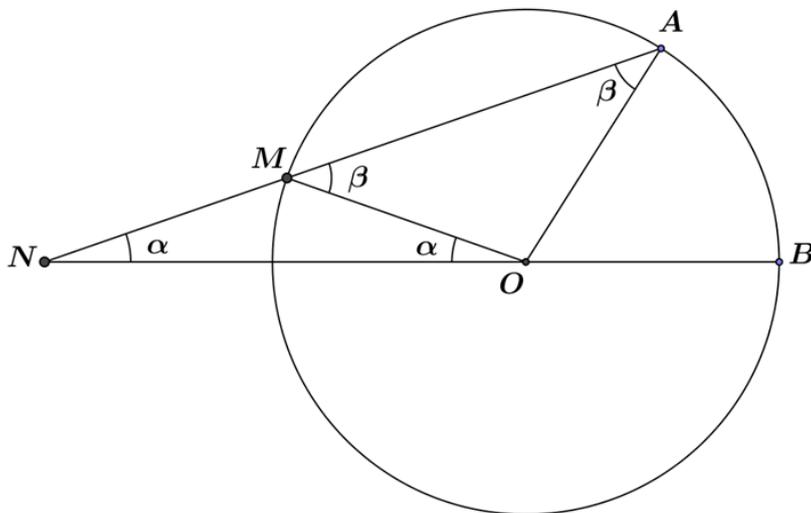


Figura 4.23

Os triângulos  $MON$  e  $AOM$  são isósceles, com  $M\hat{O}N = M\hat{N}O = \alpha$  e  $A\hat{M}O = M\hat{A}O = \beta$ . Usando o teorema do ângulo externo no triângulo  $MON$ , obtemos:

$$\beta = 2\alpha.$$

Sendo  $\theta = A\hat{O}B$ , o teorema do ângulo externo aplicado ao triângulo  $AON$  nos dá:

$$\theta = \alpha + \beta \Rightarrow \theta = 3\alpha.$$

Assim,  $\widehat{ANO} = \frac{1}{3} \widehat{AOB}$ .

Mais uma vez, aqui a dificuldade da construção é encontrar o ponto (nesse caso, o ponto  $N$ , que por sua vez determina o ponto  $M$ ) satisfazendo as condições necessárias. E mais uma vez a *conchóide* pode ser utilizada para fornecer tal ponto. Vejamos como.

Na figura 4.24 traçamos a semi-reta  $\overrightarrow{BO}$  e a *conchóide* do círculo com pólo em  $A$  e módulo igual a  $\overline{OA}$ . A interseção da *conchóide* com a semi-reta é o ponto  $N$  procurado, pois, se  $M$  é a interseção do segmento  $AN$  com o círculo, então  $\overline{MN} = \overline{OA}$ .

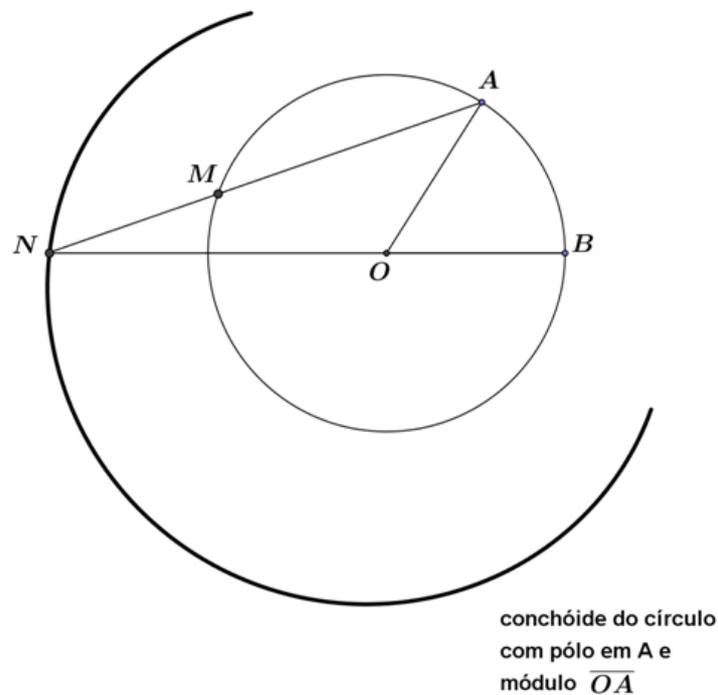


Figura 4.24

A partir daqui podemos fazer a construção explicada anteriormente.

#### 4.2.4 A trissectriz de Hípias.

Vejamos como a *trissectriz* de Hípias pode ser utilizada para resolver o problema da trissecção do ângulo.

Consideremos a figura 4.25, onde  $ABCD$  é um quadrado, a curva  $DEB$  (onde  $E$  é um ponto móvel) é um arco circular centrado em  $A$ , a curva  $DPG$  é a *trissectriz*, o segmento  $FH$  é móvel e paralelo ao segmento  $AB$ .

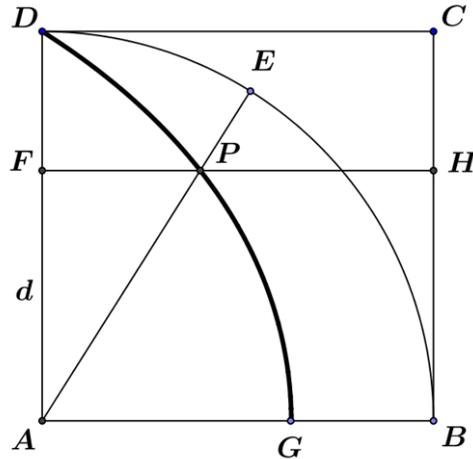


Figura 4.25

A maneira como a *trissectriz* é gerada, explicada no capítulo 2, faz com que a fração que  $\overline{AF}$  representa de  $\overline{AD}$  seja a mesma que  $\theta$  representa de  $\frac{\pi}{2}$ . Agora vamos ver como obter a trisseção do ângulo  $E\hat{A}B$ .

O tempo gasto para que o segmento  $FH$  saia da posição da figura 4.25 e chegue à posição do segmento  $AB$  é igual ao tempo que o ponto  $E$  leva para sair da posição da figura e chegar à posição do ponto  $A$ . Como as velocidades do segmento  $FH$  e do ponto  $E$  são constantes, temos que em dois terços desse tempo o segmento  $FH$  percorre dois terços da distância  $d$  entre os pontos  $A$  e  $F$  representada na figura 4.25, e o ponto  $E$  percorre dois terços do arco  $EB$ , também da figura 4.25. O que resta para  $FH$  completar seu caminho é um terço de  $d$ . Assim, de sua nova posição, o ponto  $E$  está a um terço do caminho em direção ao ponto  $A$ , o que faz com que o novo ângulo  $E\hat{A}B$  seja um terço do ângulo  $E\hat{A}B$  original. Facilmente podemos marcar a nova posição do segmento  $FH$ , conforme figura abaixo.

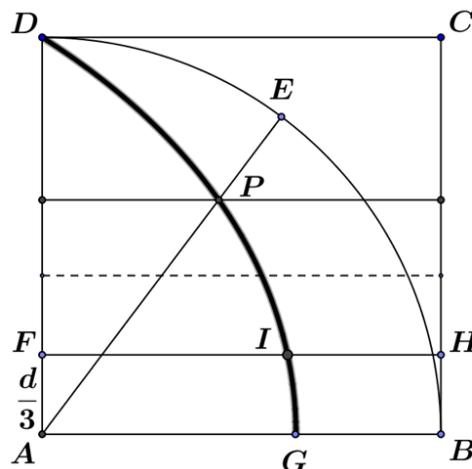


Figura 4.26

O que falta é sabermos a nova posição do ponto  $E$ . Para tanto, seja  $I$  a interseção do segmento  $FH$  em sua nova posição com a *trissectriz*. Recordemos que a cada ponto desta curva correspondem uma posição do segmento  $FH$  e uma posição do segmento  $AE$ , ambos passando pelo ponto em questão. Portanto, a nova posição do ponto  $E$  é dada pela interseção da reta  $AI$  com o arco  $BD$ .

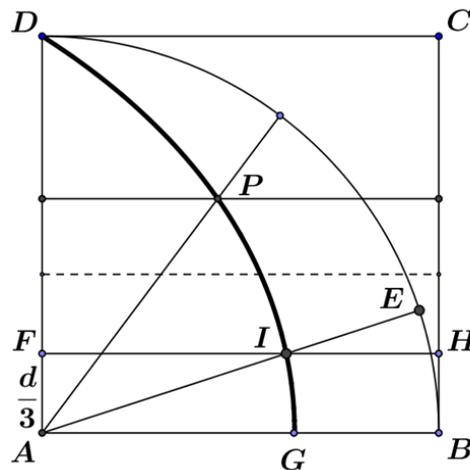


Figura 4.27

Aqui, finalmente, o novo ângulo  $E\hat{A}B$  é um terço do ângulo  $E\hat{A}B$  original.

### 4.3 A quadratriz e a quadratura do círculo.

A *trissectriz* também é chamada de *quadratriz*, pois Dinóstrato, irmão de Menaecmus, utilizou a curva de Hípias para resolver o problema da quadratura do círculo. Na figura 4.28 temos um quadrado  $ABCD$  com lado de comprimento 1. A curva  $DPG$  é a *quadratriz*, o arco  $DEB$  é circular centrado em  $A$  e o segmento  $FH$  é paralelo ao lado  $AB$ .

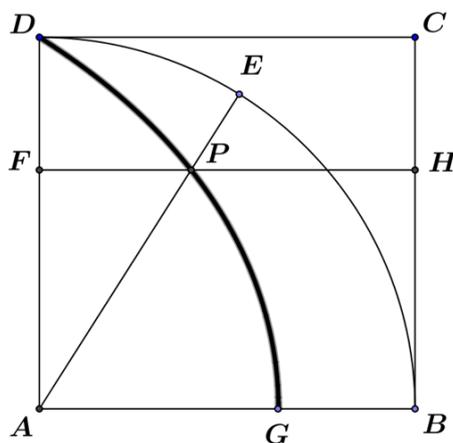


Figura 4.28

Dinóstrato notou que o segmento  $AG$  tem comprimento  $\frac{2}{\pi}$ . A demonstração dada por ele para esse fato baseia-se simplesmente na geometria elementar. A seguir, daremos uma demonstração usando a linguagem moderna e um fato básico do cálculo.

Sejam  $\theta$  a medida em radianos do ângulo  $E\hat{A}G$ ,  $x = \overline{FP}$ ,  $y = \overline{AF}$  e  $r = \overline{AP}$  ( $P$  um ponto genérico da *quadratriz*). Como já foi dito anteriormente, a fração que  $y$  representa de 1 é a mesma que  $\theta$  representa de  $\frac{\pi}{2}$ . Assim, temos que

$$\frac{y}{1} = \frac{\theta}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow y = \frac{2\theta}{\pi}$$

Além disso, vale

$$\frac{y}{r} = \text{sen}\theta \Rightarrow r = \frac{y}{\text{sen}\theta}$$

Assim, a equação polar da *quadratriz* é

$$r = \frac{2\theta}{\pi \text{sen}\theta}.$$

Agora, usando o fato de que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\text{sen}\theta} = 1$$

obtemos

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} r = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\theta}{\pi \text{sen}\theta} = \frac{2}{\pi} \cdot 1 = \frac{2}{\pi}$$

Mas,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} r = \overline{AG}.$$

Portanto,  $\overline{AG} = \frac{2}{\pi}$ .

Dado um círculo de raio  $R$ , um quadrado cuja área é igual à área do círculo deve ter lado  $l = R\sqrt{\pi}$ . Vamos ver agora como obter um segmento de comprimento  $\sqrt{\pi}$  a partir do segmento  $\overline{AG}$ .

Na figura 4.29 temos as semi-retas  $\overrightarrow{OX}$  e  $\overrightarrow{OY}$  formando um ângulo qualquer entre si. Os pontos  $P, Q, R$  e  $S$  são tais que  $\overline{OP} = 1$ ,  $\overline{OR} = \overline{AG} = \frac{2}{\pi}$ ,  $\overline{OS} = 1$  e o segmento  $QS$  é paralelo ao segmento  $PR$ .

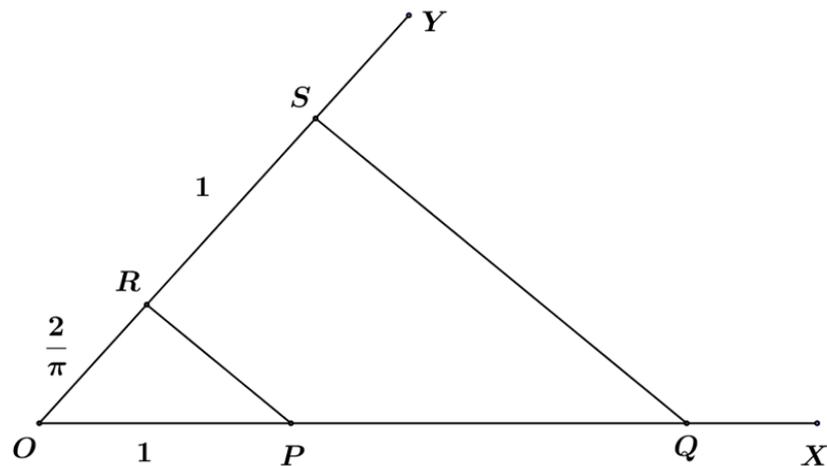


Figura 4.29

O Teorema de Tales nos permite escrever

$$\frac{\overline{PQ}}{1} = \frac{1}{\frac{2}{\pi}} \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{\pi}{2}$$

Assim,  $2\overline{PQ} = \pi$ . Descreveremos a seguir um método de obtenção de um segmento que representa  $\sqrt{\pi}$ , método este que se baseia em uma propriedade simples do triângulo retângulo.

A figura abaixo representa um semi-círculo de diâmetro  $\overline{AB} = \pi + 1$ , com  $CD$  perpendicular a  $AB$  e  $\overline{AD} = \pi$  e  $\overline{DB} = 1$ .

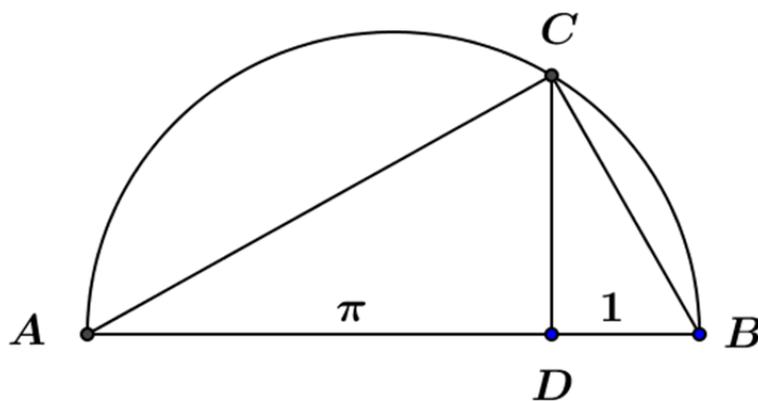


Figura 4.30

Como o triângulo  $ABC$  é retângulo em  $C$ , o segmento  $CD$  é a altura relativa à hipotenusa  $AB$ . Logo,

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB} \Rightarrow \overline{DC}^2 = \pi \cdot 1 \Rightarrow \overline{DC} = \sqrt{\pi}.$$

Vemos então que o processo que começou com a *quadratriz* termina com a obtenção de um segmento de comprimento  $\sqrt{\pi}$ . E o problema da quadratura do círculo está resolvido.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos então que os matemáticos gregos da antiguidade e os que vieram depois deles durante mais de dois mil anos estavam em busca do impossível. Mas a busca não foi em vão. Novas idéias e novas teoria foram elaboradas. Curvas importantes foram descobertas. Como vimos, Menaecmus, em sua tentativa de duplicar o cubo, encontrou as cônicas, curvas de inquestionável importância para a ciência e para a própria matemática. Assim, os três problemas clássicos desempenharam um papel importantíssimo no desenvolvimento da matemática e na construção da torre do conhecimento humano.

**REFERÊNCIAS**

- CARREGA, J.C. *Téorie des Corps:La Règle ET Compass*.Paris: Hermann,1989.
- HEFEZ, A; TORRES VILLELA, M. L. *Polinômios e Equações Algébricas*.1° ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- LAWRENCE, J. D. *A Catalogo f Special Plane Curves*. 1° ed. New York: Dover Publications, 1972.
- ROTMAN, J. *Galois Theory*. 2° ed. New York: Springer, 1998.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*.São Paulo: Edgar Blucher,1974.
- CARVALHO, João Pitombeira de. < <http://www.bienasbm.ufba.br/M20.pdf>>. Acesso em: 17 de abril de 2017.