Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matematica - IM
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI:
possibilidades de aplicações no ensino básico

José Jackson de Oliveira

Salvador - Bahia
Abril de 2013

SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI:
POSSIBILIDADES DE APLICAÇÕES NO ENSINO BÁSICO

José Jackson de Oliveira

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos.

Salvador - Bahia
Abril de 2013

SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI:
POSSIBILIDADES DE APLICAÇÕES NO ENSINO BÁSICO

José Jackson de Oliveira

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 09 de abril de 2013.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos (Orientador)
UFBA

Prof. Dra. Rita de Cássia de Jesus Silva
UFBA

Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva
UFAL

Ao meu mais recente amor, Rebeca, que nasceu durante esse trabalho.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar ao Criador que iluminou o meu caminho durante esta caminhada.

Agradeço também a minha esposa, Heloisa, que de forma especial e carinhosa me deu força e coragem, me apoiando nos momentos de dificuldades, quero agradecer também aos meus filhos, Isabelle, minha primogênita, João Lucas, e a recém chegada, Rebeca, que embora não tivessem conhecimento disto, mas trouxeram alegria e inspiração.

E não deixando de agradecer de forma grata e grandiosa minha mãe, Josefa.

Ainda no âmbito acadêmico, agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior), pela bolsa concedida nos últimos 24 meses, sem a qual não teria sido possível a minha dedicação total ao presente trabalho.

Agradeço à Universidade Federal da Bahia (UFBA) por me acolher como aluno no período do mestrado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Evandro Santos, pela paciência, pelas sugestões, por ter acreditado na realização desta pesquisa e confiado em meus ideais. Agradeço também a todos os professores que me acompanharam durante o mestrado.

Aos grandes amigos de viagem, Jorge Alécio Mascarenhas e Paulo Sergio Moraes, pela amizade e incentivo incomparáveis.

"Se por acaso omiti alguma coisa mais ou menos oportuna ou necessária, peço perdão, pois não existe ninguém que não cometa erros e seja prudente em todos os assuntos."(Leonardo de Pisa)

Resumo

Este trabalho pretende destacar a importância da utilização das seqüências Fibonacci como ferramenta que irá auxiliar em alguns temas do ensino da Matemática, em especial o ensino médio. O professor de Matemática, com sua habilidade e bem orientado, deverá provocar no aluno a construção dos conceitos matemáticos utilizando essas seqüências. No entanto, na sala de aula, o docente deve trabalhar com resoluções de problemas que despertem e provoquem no aluno a vontade de aprender, levando-o a perceber as ligações com os conteúdos afins. Além de auxiliar no ensino aprendizagem dos conteúdos propostos, temos a possibilidades de explorar alguns aspectos da História da matemática, objetivando introduzir e complementar os conteúdos do currículo. Temos também a oportunidade, neste trabalho de conclusão, de apresentar e demonstrar como as seqüências Fibonacci se conectam com os conteúdos da disciplina.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci; triângulo de Pascal; Terorema de Pitágoras; número de ouro.

Abstract

This paper aims to highlight the importance of using strings as Fibonacci tool that will help in some topics of mathematics teaching, especially high school. Professor of Mathematics, with his skill and focused student should result in the construction of mathematical concepts using these sequences. However, in the classroom, the teacher must work with resolutions of problems that arouse and provoke the student's will learn, leading him to realize the links with related content. Besides helping in the teaching learning the proposed content, we have possibilities to explore some aspects of the history of mathematics, aiming to introduce and supplement the curriculum content. We also have the opportunity to complete this work, to present and demonstrate how the sequences Fibonacci connect with the content of the discipline.

Keywords: Fibonacci sequence, Pascal's triangle, the Pythagorean Theorem; gold number.

Conteúdo

Introdução

Leonardo de Pisa ou Leonardo Pisano, mais conhecido como Fibonacci, nasceu em Pisa, um importante centro comercial da Itália, por volta do ano 1175. Fibonacci seria a forma reduzida de *filius Bonacci*, ou seja, filho de Bonacci (boa natureza ou boa fortuna). O pai de Fibonacci, Guiglielmo Bonacci, era um secretário da República Pisa ligado aos negócios mercantis. Seu pai dirigia um posto comercial na costa norte da África, na cidade de Bugia, hoje Bejaia, Argélia. Segundo algumas versões ele era cônsul de Pisa em Bugia.

Leonardo, durante a infância, foi educado na cidade de Bugia por um tutor. Ali ainda jovem teve contato com comerciantes de diversas culturas da região mediterrânea, onde aprendeu técnicas matemáticas desconhecidas do ocidente.

Mais tarde viajou como comerciante pela costa do mediterrâneo por diversos países, como Egito, Sicília, Grécia e Síria, onde estudou aritmética e conheceu os algarismos arábicos, reconhecendo a sua praticidade e eficiência em relação aos algarismos romanos.

Em 1200, Fibonacci retorna a sua cidade natal e em 1202, aos 27 anos, publicou o que havia aprendido na sua obra mais famosa, o livro *"Liber abacci"* (livro dos ábacos ou dos cálculos), onde foi reeditado em 1228. Nos seus trabalhos há uma forte influência dos matemáticos al-Khwârizmî e Abû Kâmil entre outros mestres árabes.

O livro é dividido em quinze capítulos contendo quase todo o conhecimento aritmético e algébrico da época. O livro apresentava a importância do novo sistema de numeração aplicada a contabilidade, conversão de pesos e medidas, taxas de câmbio e muitas outras aplicações. O livro ainda descreve o zero como uma notação posicional indicando as posições vagas, critérios de divisibilidade e decomposição em fatores primos. O *"Liber abaci"* teve um grande reconhecimento na Europa provocando um enorme impacto no pensamento matemático europeu, o que fez Leonardo de Pisa ser considerado o maior matemático da idade média[Liv].

Vejamos alguns dos problemas do *"Liber abaci"*.

> Problema - 1 Se 1 Solidus imperial (dinheiros), que vale 12 derniers imperiais é vendido por 31 derniers pisanos (dinheiro), quanto derniers pisanos se devem obter em troca de 11 derniers imperiais?

Problema 2 - Sobre o trabalho de um homem numa certa tarefa
Um certo homem recebe 7 besantes (dinheiros) num mês pelo seu trabalho, e se alguma parte do tempo ele não trabalhar, paga de volta 4 besantes por mês; fica durante um mês, uns dias trabalha, outros dias não; assim ele tem 1 besante de quando trabalha, descontando o que não trabalha. Procura-se, quantos dias do mês trabalhou, e quantos não trabalhou. Nota: O mês é considerado de 30 dias.

Problema 3 - Capítulo 10 - Regra das companhias
Dois homens juntos fazem uma companhia na qual o primeiro põe, na dita sociedade, 18 dinheiros, e o outro põe, nessa mesma companhia, 25 dinheiros, e a companhia faz um lucro de 7 dinheiros, e procura-se quanto é que, cada um dos dois, terá dos 7 dinheiros.

No seu segundo trabalho de Leonardo de Pisa, escrito em 1220, O *Practica geometriae* (geometria prática), descreve seus conhecimentos sobre Geometria e Trigonometria. Foi dedicado ao astrônomo Imperial Dominicus Hispanus, o qual lhe apresentou ao Imperador Frederico II. O livro contém uma grande coleção de problemas geométricos, divididos em oito capítulos, juntamente com teoremas baseados nos Elementos de Euclides[Liv].

No tratado intitulado *Flos* (flor), escrito em 1225, encontramos problemas indeterminados que nos remetem a Diofanto(200-284) e outros determinados que lembram Euclides(325 a.C.-265 a.C.), os árabes e os chineses. Fibonacci mostrou um interesse especial na raiz cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, onde ele tenta provar que é impossível encontrar as raízes da equação escritas nas formas euclidianas $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, ou como uma razão de inteiros, onde a e b são racionais, ou seja, as raízes não podem ser obtidas por meio de construções com régua não graduada ou compasso.

A reputação de Fibonacci chamou a atenção do imperador Frederico II, que lhe enviou um convite para participar de um torneio matemático. Um dos problemas propostos no torneio foi colocado a Leonardo pelo mestre João de Palermo, sábio da corte de Frederico II:

"encontrar um quadrado de um número em relação ao qual, quando cinco lhe é adicionado ou subtraído, obtém-se sempre um quadrado de um número racional."

A solução para esse problema é $3\frac{5}{12}$ e encontra-se no livro *O Liber quadratorum*, escrito no mesmo ano do livro *Flos*. É um trabalho amplo e completo. O nome do livro em latim significa "o livro dos quadrados" no qual Leonardo segue os passos de Diofanto. O livro é sobre a teoria dos números que, entre outras coisas, examina os métodos para encontrar as ternas pitagóricas, um dos temas do nosso trabalho.

Depois de 1228, não sabemos praticamente nada sobre a vida de Leonardo, exceto o decreto da República de Pisa em 1240, que lhe deu o título de "Discretus et sapiens magister Leonardo Bigollo"("sério e sábio mestre Leonardo Bigollo") em reconhecimento do grande progresso que trouxe para a matemática. Leonardo Bigollo era como ele assinava alguns de seus trabalhos, onde na língua toscana significa "viajante".

Fibonacci morreu algum tempo depois, não se sabe exatamente o ano, mas estima-se entre 1240 a 1250, provavelmente em Pisa. No século 19, uma estátua de Fibonacci foi erguida em Pisa. Hoje ela se encontra na galeria ocidental do Camposanto, cemitério histórico na Piazza dei Miracoli.

O presente trabalho está distribuído da seguinte maneira:

No primeiro capítulo discutimos sobre o surgimento da sequência de Fibonacci, onde foram feitas diversas abordagens da sequência com alguns temas do ensino básico. Com um enfoque histórico e teórico apresentamos alguns teoremas relevantes e suas demonstrações.

No segundo capítulo foram abordados procedimentos e técnicas metodológicas com o objetivo de melhorar o ensino aprendizagem da Matemática. Descrevemos algumas atividades que podem ser aplicadas na sala de aula. Criamos estratégias que visam aprimorar e dinamizar a práxis pedagógica.

Nas considerações finais é destacada a importância de ensinar Matemática de forma interdisciplinar e contextualizada, criando um ambiente agradável e interessante para os discentes, e assim contribuindo para uma aprendizagem significativa.

Capítulo 1

Abordagens no ensino básico

1.1 Fibonacci e os coelhos

A sequência de Fibonacci foi motivada por um problema exposto no capítulo 12 do livro Liber Abaci [Zah]. Fibonacci apresenta uma questão com a qual desejava prever o número de coelhos gerados mensalmente a partir de um único casal de coelhos:

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur?(Quantos pares de coelhos são descendentes em um ano por um casal?)

Provavelmente este problema tenha sido oriundo do Papiro de Rhind, aproximadamente1650 a.C.. Um documento no qual constam 85 problemas copiados por um escriba chamado Ahmes de um trabalho ainda mais antigo. Trata-se do seguinte problema:

"Um homem põe um casal de coelhos dentro de um cercado. Quantos casais de coelhos serão produzidos num ano, se a natureza desses coelhos é tal que a partir do segundo mês um casal gera a cada mês um novo casal de coelhos que se torna produtivo ao fim de dois meses?"

Vamos mostrar uma solução proposta por [Zah]para esse problema:

(i) no primeiro mês, temos um casal de coelhos ainda filhotes;

(ii) no segundo mês, temos o mesmo casal, porém fértil;

(iii) no terceiro mês, o casal de coelhos gera o primeiro par de coelhos, agora temos dois casais;

(iv) no quarto mês, temos o primeiro casal, o casal jovem do mês anterior e mais um novo casal gerado do primeiro casal, portanto temos três casais;

(v) no quinto mês, temos o primeiro casal que gera mais um par, o segundo casal, agora adulto, que gera outro casal, e o casal do mês passado, temos agora 5 casais;

(vi) no sexto mês, temos oito casais, onde três são adultos e cinco filhotes;

(vii) e assim por diante.

Esse problema reproduz a sequênca (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.) que descreve o número da casais produzido durante os doze meses do ano. Podemos observar na figura 1.1 que número de casais de coelhos segue a sequência de Fibonacci.

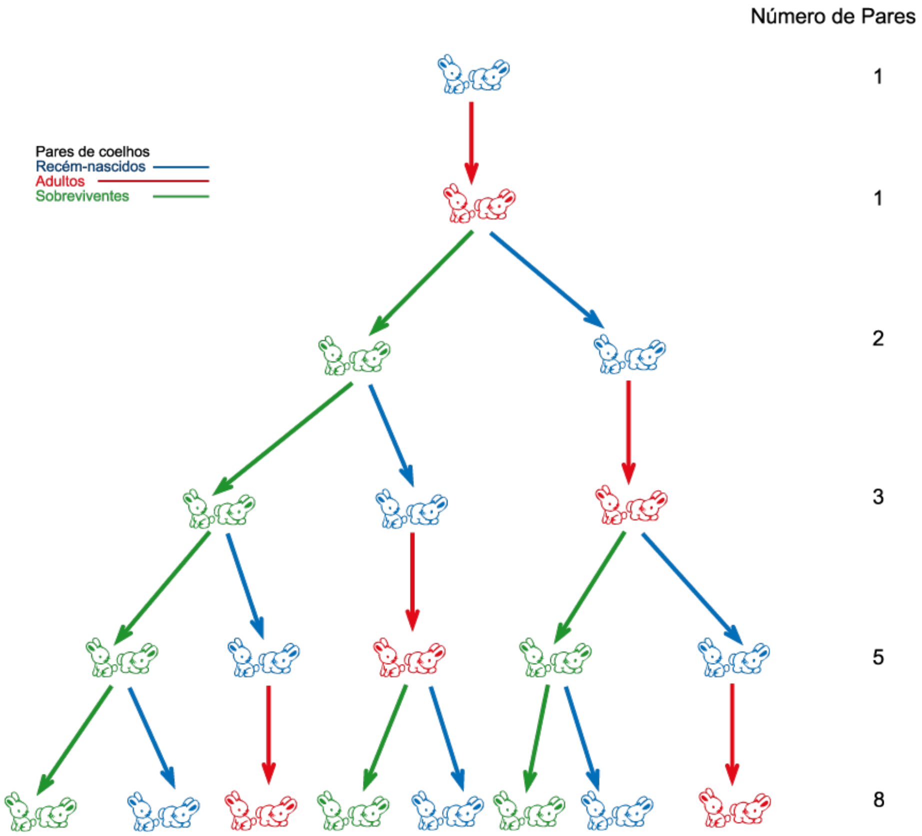


Figura 1.1: casais de coelhos mês a mês

Definição 1. *Chama-se sequência de Fibonacci a sequência definida por*

$$(1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots),$$

onde os termos dessa sequência chama-se números de Fibonacci.

Definição 2. *Chama-se sequência de Fibonacci a sequência definida recursivamente por* $F_1 = 1$ *e* $F_2 = 1$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{1.1}$$

$\forall n > 2$

A sequência de Fibonacci, que tornou Leonardo famoso, foi nomeada pelo matemático francês Eduard Lucas (1842-1891), em 1877 [Liv]. Lucas também desenvolveu uma sequência, a qual foi atribuída o seu nome, sequência de Lucas, onde existem associações com a sequência de Fibonacci.

A sequência Fibonacci é chamada de recorrente e a equação 1.1 é um caso de recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, que são da forma

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0. \tag{1.2}$$

onde temos $x_1 = x_2 = 1$ e $p = 1$ e $q = 1$. É necessário que $q \neq 0$, pois se $q = 0$ temos uma recorrência de primeira ordem.

A cada recorrência 1.2 associamos uma equação do segundo grau

$$r^2 + pr + q = 0 \tag{1.3}$$

chamada de equação característica, definido pelo teorema 1.

Teorema 1. *Seja $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ uma fórmula de recorrência linear de segunda ordem, homogênea de coeficientes constantes e cuja equação característica $r^2 + pr + q = 0$ possui 2 raízes r_1 e r_2. Então $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ é uma solução dessa recorrência com coeficientes constantes α_1 e α_2.*

A demonstração desse teorema pode ser visto em [Lim]. A sequência de Fibonacci definida por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ e $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$ tem equação caracterítica $r^2 + r + 1 = 0$ cuja raízes são

$$r_1 = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } r_2 = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Usando o Teorema 1 temos

$$F_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{1.4}$$

Para calcular as constantes α_1 e α_2, substituimos os valores $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$ em (1.4) para encontrarmos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \\ \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

onde

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \tag{1.5}$$

Substituindo 1.5 em 1.4, temos

$$F_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{1.6}$$

ou seja,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{1.7}$$

A seguir definiremos a fórmula de Binet, que apresenta a solução da recorrência da sequência de Fibonacci.

1.2 Fórmula de Binet

A fórmula de Binet para os números de Fibonacci foi desenvolvida pela primeira vez por Leonhard Paul Euler(1707-1783) em 1765, mas ficou esquecida até ser redescoberta pelo matemático francês Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856) em 1843, e nomeada em sua honra. A fórmula também já era conhecida no século XVIII, pelo matemático francês Abraham de Moivre(1667-1754) [Liv].
Com a fórmula de Binet é possível encontrar o valor de qualquer número de fibonacci F_n a partir da sua posição n.

Teorema 2. *Os números de Fibonacci F_n são dados pela fórmula*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \tag{1.8}$$

chamada de fórmula de Binet.

1.3 Os números de Fibonacci e o Triângulo de Pascal

Os números de Fibonacci podem ser encontrados também no Triângulo de Pascal, ver figura 1.2. O triângulo de aritmético, também conhecido como Triângulo de Tartaglia em alguns países, já era conhecido no século XII, e algumas das suas propriedades foram estudadas pelos matemáticos Yang Hui na China e por Omar Khayyam na Pérsia [Hun].

Blaise Pascal(1623-1662) tem seu nome fortemente associado ao triângulo por ter sido o primeiro matemático a escrever um tratado sobre o triângulo aritmético. Já o nome Tartaglia, pseudônimo do italiano Niccolò Fontana(1500-1557) vem porque foi um dos primeiros a publicar na Europa.

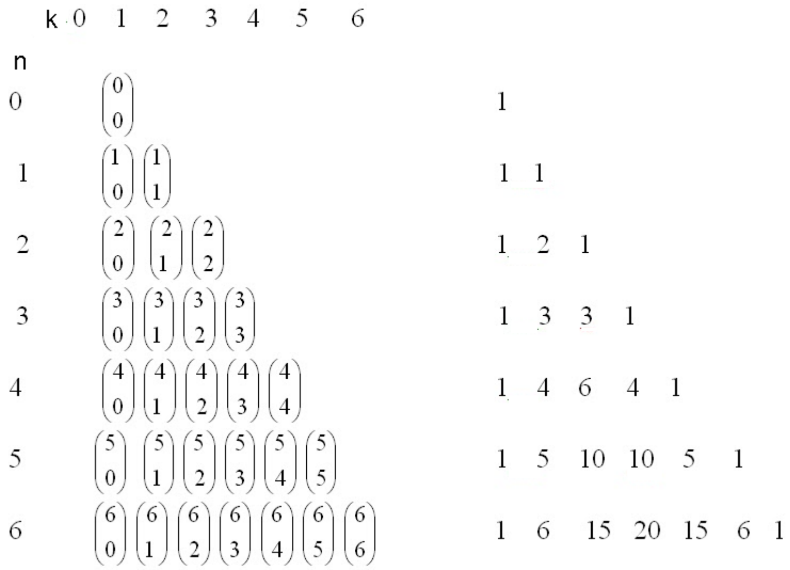


Figura 1.2: Triângulo de Pascal e os coeficientes binomiais

No seu *Traité du triangle arithmétique* ("Tratado sobre o Triângulo aritmético") de 1653, Pascal descreve um triângulo tabular infinito e simétrico formado por números inteiros expressos por coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$, onde n representa o número da linha e k representa o número da coluna [Hun].

A propriedade mais importante do triângulo é a aplicação do binômio de Newton, onde cada linha do triângulo representa os coeficientes da expansão binomial $(a+b)^n$. A partir do Triângulo de Pascal podem ser obtidos os números de Fibonacci, basta somar os números das diagonais, como mostra a figura 1.3. Começa a partir da primeira diagonal 1, a segunda 1, em seguida, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

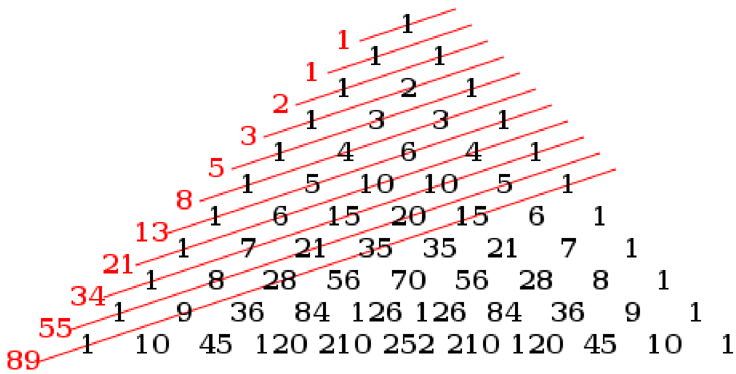


Figura 1.3: Triângulo de Pascal e os números de Fibonacci

O seguinte teorema nos fornece uma fórmula para encontrar os números de Fibonacci nas diagonais do Triângulo de Pascal.

Teorema 3. *(Teorema de Lucas) Para qualquer $n > 1$, a sequência de Fibonacci é dado pelo somatório:*

$$F_n = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k-1}, \tag{1.9}$$

onde$\lfloor x \rfloor$ representa o maior inteiro menor ou igual a x.

Antes de demonstrar equação 1.9 por indução, vamos apresentar dois casos:

- Se n for par, temos que

$$F_n = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k}{k-1} \tag{1.10}$$

- Se n for ímpar, obtemos:

$$F_n = \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n-k}{k-1} \tag{1.11}$$

Demonstração. Provaremos esse teorema usando o princípio da indução matemática.

Quando n=1, temos:

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum_{k=1}^{\frac{1+1}{2}} \binom{1-k}{k-1} \\ F_1 &= \binom{o}{o} \\ F_1 &= 1 \end{aligned}$$

Quando n=2, obtemos:

$$\begin{aligned} F_2 &= \sum_{k=1}^{\frac{2}{2}} \binom{2-k}{k-1} \\ F_2 &= \binom{1}{o} \\ F_2 &= 1 \end{aligned}$$

Suponhamos agora que 1.9 seja verdadeira para n para $n > 2$. Queremos provar que para $n+1$ também é verdadeira. Para isso, consideremos os dois casos 1.10 e 1.11.

$i)$ para n par, temos $n-1$ e $n+1$ ímpares. Logo,

$$F_{n+1} = \sum_{k=1}^{\frac{(n+1)+1}{2}} \binom{(n+1)-k}{k-1}$$

A Relação de Stifel, nos permite realizar o próximo passo:

$$F_{n+1} = \sum_{k=1}^{\frac{n+2}{2}} \left[\binom{n-k}{k-1} + \binom{n-k}{(k-1)-1}\right]$$

$$F_{n+1} = \sum_{k=1}^{\frac{n+2}{2}} \binom{n-k}{k-1} + \sum_{k=1}^{\frac{n+2}{2}} \binom{n-k}{(k-1)-1}$$

Vamos efetuar uma mudança de variável, fazendo $p = k-1$, e p variando de 0 a $\frac{n}{2}$, mas como $p \neq 0$ então ele deve variar de 1 a $\frac{n}{2}$.

$$F_{n+1} = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k}{k-1} + \sum_{p=1}^{\frac{n}{2}} \binom{(n-1)-p}{p-1}$$

$$F_{n+1} = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k}{k-1} + \sum_{p=1}^{\frac{(n-1)+1}{2}} \binom{(n-1)-p}{p-1}$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

$ii)$ para n ímpar, temos $n-1$ e $n+1$ pares. Logo,

$$F_{n+1} = \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \binom{(n+1)-k}{k-1}$$

Utilizando a Relação de Stifel:

$$F_{n+1} = \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \left[\binom{n-k}{k-1} + \binom{n-k}{(k-1)-1}\right] = \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n-k}{k-1} + \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n-k}{(k-1)-1}.$$

Substituíndo $p = k-1$, temos:

$$F_{n+1} = \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n-k}{k-1} + \sum_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{(n-1)-p}{p-1}$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

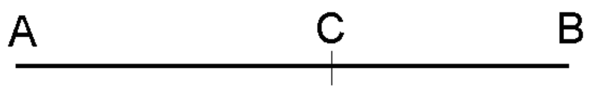
Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, completamos a prova do teorema, o qual é verdadeiro para todo $n \geqslant 1$. $\square$

1.4 Fibonacci e o número de ouro

Desde a antiguidade um número vem sendo estudado por matemáticos e curiosos devido as suas extraordinárias propriedades. Este número ficou conhecido como: o número de ouro. E a partir do século XX o número de ouro foi denotado pelo matemático americano Mark Barr pela letra grega Φ, em homenagem ao arquiteto Fídias, que viveu entre os anos 490 e 430 a. C., responsável pela construção do "Partenon de Atenas" [Liv]. Barr justifica que o uso da primeira letra do nome de Fídias se deve ao fato do arquiteto sempre utilizar a razão áurea em seus trabalhos. No entanto, alguns matemáticos utilizam a letra τ (*tau* - que em grego significa "secção" ou "corte") para designar o número de ouro.

A sua primeira definição foi dada no livro *Os Elementos* de Euclides de Alexandria [Liv]. Euclides chamou esse número de "razão extrema e média". Nos Elementos, mais precisamente no livro VI, ele define a razão áurea como:

"Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor"



De acordo com a definição temos que a razão dos comprimentos de AC (segmento maior) e CB (segmento menor) é igual a razão dos comprimentos de AB (linha completa) e AC (segmento maior), ou seja,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}.$$

Se tomarmos o comprimento $CB = 1$ e o comprimento maior $AC = x$, e utilizando a definição acima, chegamos a equação:

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}. \tag{1.12}$$

O que implica na equação quadrática:

$$x^2 - x - 1 = 0. \tag{1.13}$$

Cujas raízes são:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

A solução positiva é exatamente a razão áurea $\Phi = 1,618\ldots$ e a negativa é o seu recíproco $\varphi = -0,618\ldots$.

Somando Φ e φ obtemos

$$x_1 + x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \quad \text{ou seja,}$$
$$\Phi + \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 1 - \Phi$$

E multiplicando as raízes temos

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{4} = -1 \quad \text{, ou seja,}$$
$$\Phi \cdot \varphi = -1 \Rightarrow \varphi = -\frac{1}{\Phi}$$

Se observarmos a taxa de crescimento dos números de Fibonacci, ou seja, a razão entre o (n+1)-ésimo número da sequência e o (n)-ésimo quando n aumenta, se aproxima cada vez mais da razão áurea. Observem que os quocientes a seguir vão se aproximando do número de ouro.

$$\begin{aligned}
1/1 &= 1\\
2/1 &= 2\\
3/2 &= 1,5\\
5/3 &= 1,666\ldots\\
8/5 &= 1,6\\
13/8 &= 1,625\\
21/13 &= 1,615385\\
34/21 &= 1,619048\\
55/34 &= 1,617647\\
89/55 &= 1,618182.
\end{aligned}$$

A razão entre dois números sucessivos, quando n cresce, oscila em torno de Φ, alternando entre maior e menor que 1,618..., como podemos observar na figura 1.4. Essa afirmação foi descoberta pelo matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler(1571-1630) em 1611[Liv], como veremos no teorema 4.

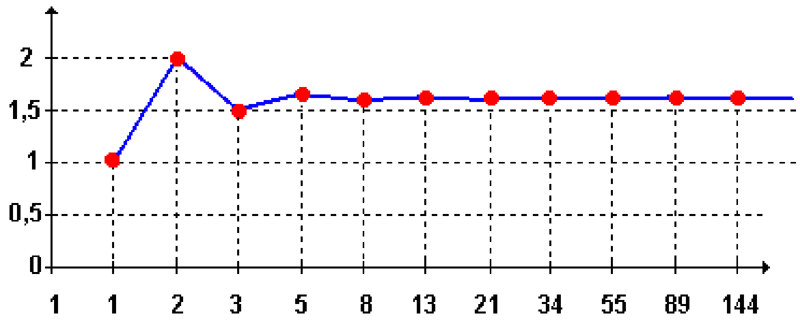


Figura 1.4: Taxa de crescimento na sequência de Fibonacci

Teorema 4. *O limite da razão $\frac{F_{n+1}}{F_n}$, quando n tende ao infinito é aproximadamente 1,618..., ou seja,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi. \tag{1.14}$$

Demonstração. Usando a fórmula de Binet, ver teorema 1.8, obtemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}$$

Como $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ temos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = 0$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= 1,618\ldots.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$$

$\square$

1.5 A sequência de Fibonacci e as triplas pitagóricas

Outra aplicação do ensino básico que mantêm uma relação interessantíssima com a seqüência de Fibonacci são triplas pitagóricas. Lembrando que as triplas pitagóricas surge do famoso Teorema de Pitágoras sobre os comprimentos dos lados de qualquer triângulo retângulo.

Teorema 5. *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos, ou seja,*

$$c^2 = b^2 + a^2, \tag{1.15}$$

onde c representa o comprimento da hipotenusa, e a e b representam os comprimentos dos catetos.

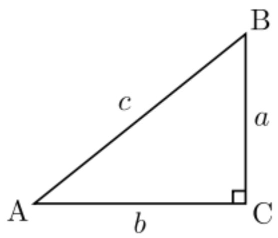


Figura 1.5: Triângulo retângulo

Embora o teorema utilize o nome do matemático grego Pitágoras (570 a.C. – 495 a.C.), existem evidências, de acordo com [Boy], que os babilônios estavam familiarizados com o teorema. Uma tábua de barro conhecida por Plimpton 322 de 1800 a.C., preservada na Universidade de Columbia nos Estados Unidos, é a prova de que esse teorema já era conhecido pelos babilônios.

Em 1948, Charles Raine observou que tomando quaisquer quatro números consecutivos da sequencia de Fibonacci, $F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}$, o produto dos termos extremos $F_n \cdot F_{n+3}$ e duas vezes o produto dos termos internos $2 \cdot F_{n+1} \cdot F_{n+3}$ representam os catetos do triângulo retângulo e a hipotenusa é um número de Fibonacci dado por F_{2n+3}.

Considerando um triângulo retângulo com catetos a e b e hipotenusa c, temos

$$\begin{aligned} a &= F_n \cdot F_{n+3} \\ b &= 2(F_{n+1} \cdot F_{n+2}) \\ c &= F_{2n+3} \end{aligned}$$

observando a sequência de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ e tomando como exemplo $\ldots 3, 5, 8, 13, \ldots$ verificamos que

$$\begin{aligned} a &= 3 \cdot 13 = 39 \\ b &= 2(5 \cdot 8) = 80 \\ c &= \sqrt{39^2 + 80^2} = \sqrt{1521 + 6400} = \sqrt{7921} = 89 = F_{2 \cdot 4+3} = F_{11}. \end{aligned}$$

Harlan L. Umansky em 1968 [Kal], seguindo a idéia de Raine, ampliou o resultado para uma seqüência de Fibonacci generalizada. Se w, x, y e z são quatro números consecutivos de Fibonacci, então $(wz, 2xy, yz–wx)$ é uma tripla pitagórica, isto é,

$$(wz)^2 + (2xy)^2 = (yz - wx)^2 \tag{1.16}$$

Podemos substituir w por $y - x$ e z por $y + x$. Logo, as parametrizações atribuídas anteriormente podem ser substituída por:

$$(wz, 2xy, yz–wx) = [(y - x)(y + x), 2xy, y(x + y) - x(y - x)] \tag{1.17}$$

Temos também William Boulger que em 1989 observou que as triplas pitagóricas podem ser expressa por:

$$(wz, 2xy, x^2 + y^2). \tag{1.18}$$

Assim temos,
$w = y - x$ e $z = y + z$, onde, $a = (y - x)(y + x)$ e $b = 2xy$ e pelo teorema de pitágoras, obtemos

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= \\ [(x - y)(x + y)]^2 + (2xy)^2 &= \\ \left(x^2 - y^2\right)^2 + 4x^2y^2 &= \\ x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 &= \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 &= \\ \left(x^2 + y^2\right)^2 &= c^2 \end{aligned}$$

Portanto, $c = x^2 + y^2$

Outro resultado conhecido é o de A. F. Horadam de 1961, determinando sua parametrização por:

$$(xw, 2yz, 2yz + x^2) \tag{1.19}$$

Apresentamos algumas possibilidades que podem ser exercitados, mas consideramos a clássica parametrização de Boulguer 1.18 mais simples e de fácil assimilação para os alunos.

1.6 Exemplos

1. Como não havia elevadores na época de Leonardo, ele tinha sempre que usar as escadas. Se estava com pressa, ele subia as escadas de dois em dois degraus, caso contrário recorria à forma habitual, de degrau em degrau. Se se misturar estes dois tipos de ação tem-se então:
   •passar para o próximo degrau;
   •saltar por cima do degrau que está imediatamente a seguir.
   Então, de quantas maneiras diferentes ele podia fazer saltos de n degraus? Quantas maneiras há de subir um lance de escadas de 4 degraus? De 5 degraus? E de n degraus? Porquê?

2. Uma doação rende 9 reais por semana a um orfanato para a aquisição de ingressos para concertos em um teatro local. As entradas custam 2 reais por professor e 1 real por criança. De quantas maneiras se pode formar um grupo para ir ao teatro, admitindo-se que nem uma troca de professores e nem uma troca de crianças formam um novo grupo, mas tão somente uma troca de professore e criança? (Adaptação do livro [Hun])

Capítulo 2

Atividades com a sequência de Fibonacci

A Matemática é indiscutivelmente uma disciplina que apresenta, para o discente, certo grau de dificuldade. O professor tem um grande desafio no ensino da Matemática: Como ensinar Matemática? É preciso motivar seus alunos, desenvolvendo capacidades e competências para aprender os conceitos matemáticos. A motivação desenvolve o gosto pela Matemática, despertando o prazer e o desejo em aprender os conteúdos propostos. E para aprender é necessário contextualizar os conceitos trazendo para a realidade do aluno. As aplicações do dia a dia tornam as aulas mais interessantes e apreciadas.

Contudo o professor deve entender o seu papel, saber o que ensina, como ensinar e por que ensinar. Analisar suas atitudes e utilizar uma metodologia adequada capaz de criar autonomia no aluno ensinado a pensar e ser crítico. E assim relacionar sua metodologia aos programas de ensino, adequando os conteúdos, buscando alternativas extracurriculares e ir além dos livros didáticos. Ubiratan D'Ambrósio na apresentação do livro [Bie] afirma:

> *O resultado é que a matemática vem causando grande angústia e frustração nos alunos, professores e famílias. Essa matéria se tornou a campeã das reprovações nos sistemas escolares. Por que tão poucos alunos gostam, apreciam e se dão bem com a Matemática? Sem dúvida o problema não está com os alunos, nem com os professores, mas sim na maneira como a Matemática é organizada nos currículos, como é motivada e como é cobrada dos alunos e professores.*

O professor deve deixar de lado os exercícios rotineiros, repetitivos e enfadonhos, que muitas vezes aborrecem o aluno. As suas atividades bem planejadas desenvolvem no aluno, de forma autônoma, capacidades para interpretar, discutir e criar suas resoluções, possibilitando uma aprendizagem significativa. Nessas atividades é importante que haja interação entre os outros colegas para desenvolver o respeito, a socialização e a troca de experiências.

Outro modo de obter sucesso nas aulas é desafiar os alunos, trazendo jogos, materiais manipuláveis, recursos tecnológicos e até mesmo usar a história da Matemática como estratégia, despertando a sua curiosidade. Uma visão histórica traz uma percepção mais humanizada da Matemática e de que forma ela foi construída, como afirma o pai do positivismo Augusto Comte na sua publicação *Curso de Filosofia Positiva* iniciada em 1830 e concluída doze anos depois:

> *Não se conhece completamente uma ciência enquanto não se souber da sua história.*

2.1 Fibonacci na sala de aula

A sequência de Fibonacci traz diversas possibilidades de aplicações para o ensino básico, em especial ao ensino da Matemática. Como professor de matemática do ensino médio, tive a oportunidade de conduzir algumas atividades relacionadas com os números de Fibonacci. Nessas atividades foi possível explorar as suas propriedades e particularidades e criar estratégias para interligar a sequência com situações reais.
Foi um trabalho prazeroso, motivador e que despertou o interesse dos discentes em conhecer melhor os números de Fibonacci. A busca pelas respostas, os desafios e as curiosidades foram os fatores para a construção do conhecimento. O clássico problema dos coelhos, apresentada no capítulo anterior, é uma dessas curiosidades que dá início ao estudo da sequência de Fibonacci. Essa é a grande oportunidade para apresentar ao aluno o contexto histórico que envolve a criação da sequência. As notas históricas tornam as aulas mais atrativas. A introdução dos algarismos indos-arábicos para o mundo ocidental é um ponto marcante na história do matemático Leonardo. Em 1202, Leonardo mostrou a vantagem dos algarismos arábicos em relação aos algarismos romanos com a publicação do livro *"Liber Abacci"*. Nesse livro é que surge o problema para determinar a velocidade de reprodução dos coelhos. Esse desafio é proposto a seguir.

2.2 Atividade 1: Os coelhos de Fibonacci

Podemos destacar como primeira atividade o problema dos casais de coelhos.
Qual o número de pares de coelhos que serão gerados num ano, a partir de um casal de coelhos jovens, considerando, que nenhum coelho morre durante o ano, cada casal de coelhos gera outro casal de coelhos mensalmente e cada coelho (fêmea) fica fértil após dois meses.

Foi sugerido que o aluno preenchesse a tabela 2.1, identificando o número casais jovem (não fértil), adulto e o total em cada mês. Depois de completar a tabela, foi apresentado aos alunos um questionário investigativo para perceber a compreensão dos alunos em relação à atividade proposta. Com a intenção de conhecer se os alunos perceberam algum padrão matemático no total de casais em cada mês, foram feitas as seguintes perguntas:

1. O que você notou com o número de casais de coelhos em cada final de mês? Existe algum padrão nessa sequência?

2. É possível determinar o número de casais no quinto mês? E no oitavo? Então será possível para qualquer mês do ano?

3. É possível modelar essa situação escrevendo matematicamente?

4. O que são sucessões recorrentes?

Mês	**Casais jovens**	**Casais adultos**	**Números de casais**
Janeiro			
Fevereiro			
Março			
Abril			
Maio			
Junho			
Julho			
Agosto			
Setembro			
Outubro			
Novembro			
Dezembro			

Tabela 2.1: Reprodução dos coelhos em cada mês.

Alguns resultados podem ser observados com essa atividade. O aluno vai se familiarizando com os conceitos de sequência, relações e funções entre conjuntos numéricos e equacionar situações problemas quando ele busca modelar o problema. Identificar as propriedades da sequência de Fibonacci.

E finalizamos a tarefa avaliando os procedimentos utilizados pelos alunos. Observamos a participação nas tarefas, o envolvimento, a discussão e a socialização com a resolução final e o questionário proposto. Até que ponto o aluno alcançou os objetivos e adquiriu os conceitos matemáticos referentes a sequência.

2.3 Atividade 2: O código Da Vinci e a sequência de Fibonacci

Nessa atividade iniciamos com alguns trechos do Best-seller “O código Da Vinci”, do autor norte americano Dan Brown , publicado em 2003. No início do capítulo 11, página 52 [Bro] tem o seguinte trecho:

> “Uma brincadeirinha numérica? disse Bezu Fache...”

O capitão Bezu Fache da Polícia Judiciária é o responsável pelas investigações. Um pouco mais adiante na mesma página, encontramos a explicação de uma das personagens sobre a sequência, a agente Sophie Neveu, do Departamento de Criptologia da Policia Judiciária:

> “- Essa é a seqüência Fibonacci - declarou ela, indicando o papel na mão de Fache - Uma progressão na qual cada termo é obtido somando-se os dois termos precedentes”

No capitulo 20, na página 77, o ilustre professor de Simbologia Religiosa da Universidade de Harvard, Robert Langdon descreve a relação da sequência com a razão áurea:

> “Enquanto Langdon punha os slides no projetor, explicava que o número PHI vinha da série de Fibonacci - uma progressão famosa não só porque a soma dos termos adjacentes equivalia ao termo seguinte, mas porque os quocientes dos termos adjacentes possuíam a estarrecedora propriedade de irem se aproximando gradativamente do número 1,6l8, o PHI!”

Ainda no capítulo 20, Langdon relembra uma de suas aulas da turma de simbolismo na arte.

> “-É – disse outro - mas o que isto tem a ver com arte? - Ai é que está! - disse Langdon. - Ainda bem que perguntou. - Então mostrou um slide. Um pergaminho amarelado onde se via o famoso homem nu de Leonardo da Vinci - O Homem Vitruviano - , assim chamado por causa de Marcus Vitruvius, o brilhante arquiteto romano que entoou louvores à Divina Proporção em seu texto De Architectura.”

A aula prossegue com Langdon instigando cada vez mais a curiosidade de seus alunos. Na página 79, ele comenta sobre as proporções do corpo humano:

> “Meçam a distância que vai do alto da cabeça até o chão, depois dividam o resultado pela distância do umbigo até o chão. Adivinhem só o numero que vai obter.”

Langdon vai concluindo sua aula mostrando obras de artes que possivelmente os artistas tenham usado a razão áurea em seus trabalhos.

> “Durante a meia hora seguinte, Langdon mostrou-lhes slides de obras de arte de Michelangelo, Albrecht Dürer, Da Vinci e muitos outros, demonstrando a fidelidade intencional e rigorosa de cada artista à Divina Proporção na composição de suas obras.”

Depois de lido trechos do livro, foi mostrado um recorte do filme. Nesse momento questionamos os alunos sobre o conhecimento da sequência de Fibonacci. Alguns já conheciam pelo filme e outros poucos pela leitura do livro. Mas para a maioria era uma sequência completamente desconhecida.

Esse capítulo é riquíssimo para explorar os conceitos colocados por Dan Brown sobre a sequência de Fibonacci e a razão áurea. Além de uma aula interdisciplinar com a história da arte temos a oportunidade de incentivar os alunos a leitura de um livro e ao final poderem de forma crítica avaliar o livro.

O fechamento dessa atividade culminou com uma pesquisa desenvolvida por grupos de quatro alunos. No final foi organizada uma exposição com as artes que supostamente tenham a razão áurea oculta nos quadros. Esse momento precioso para a socialização das produções.

As tarefas foram divididas nos grupos, onde foi dada ênfase o seguinte roteiro:

1. Investigue quem foi Fibonacci (Leonardo de Pisa);
2. Como relacionar a sequência de Fibonacci com arte;
3. Levar uma imagem do Homem Vitruviano de Leonardo da Vinci;
4. Fazer uma exposição com os quadros dos artistas citados no livro;
5. Preencher a tabela 2.2 com o auxilio de uma fita métrica com intuito de verificar a razão áurea nas medidas do corpo humano.

Nome	Altura (H)	Altura do umbigo (h)	H/h

Tabela 2.2: Razão entre a altura e a altura do umbigo.

2.4 Atividade 3: Construindo uma parede com tijolos

Nessa atividade propomos aos alunos construir uma parede utilizando tijolos. O comprimento desta parede é duas vezes maior do que a largura que possui $1u.c.$ (unidade de comprimento), onde a altura da parede deve ter $2u.c.$. Foi colocada a seguinte questão para os alunos: De quantas formas diferentes podemos construir uma parede de acordo com o seu comprimento? No exemplo da figura 2.1 temos as primeiras construções.

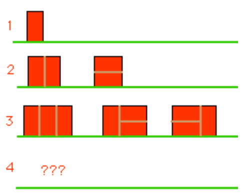


Figura 2.1: Parede com tijolos

Para o comprimento de 1 unidade, temos apenas uma forma. Para 2 unidades, existem duas formas. Para 3 unidades, a construção tem três formas. Em seguida montamos um questionário para os alunos. a) De quantas maneiras podemos formar uma parede de comprimento $4u.c.$? b) E com $5u.c.$? c) É possível descobrir um padrão nessas construções? Então quantas maneiras temos para uma parede de n unidades de comprimento? Nessa atividade temos também a possibilidade de introduzir uma simulação para a construção dessa parede no site:

O aluno pode, de forma divertida, exercitar e comprovar os resultados da sua atividade. No final tivemos a oportunidade de apresentar como esse trabalho chega à definição da sequência de Fibonacci. A avaliação foi feita observando a participação, discussão e a cooperação dos alunos com a atividade.

2.5 Atividade 4: Encontrando o número de ouro

Foi sugerido para os alunos que construíssem uma tabela, com a razão dos números consecutivos da sequência de Fibonacci. Por exemplo: $1/1, 2/1, 3/2, 5/3 \ldots$. Como foi visto no gráfico 1.4 do capítulo1. Depois foi pedido que os alunos representassem os resultados no plano cartesiano. Com F_n na abscissa e F_n/F_{n-1} na ordenada, ou seja a razão do número de Fibonacci pelo seu antecessor. O objetivo dessa atividade a fazer o aluno perceber que essas razões quando n aumenta converge para o número de ouro denominado Φ. Para essa atividade foi utilizado uma calculadora para efetuar as divisões e uma planilha eletrônica para que os alunos visualizassem, através da tabela das razões com seu respectivo gráfico, a sequencia convergindo para a razão áurea. Foi pedido para os alunos montarem na planilha a sequência de Fibonacci com pelo menos 15 primeiros números. Para encontrar a sequencia utilizamos a fórmula recursiva nas células. No exemplo da figura temos para as células $C4 = 1$ e $C5 = 1$. Na célula $C6$ temos a fórmula $C6 = A2 + A1$ e em seguida copiamos essa fórmula para as células seguintes até chegar em $C18$. Na coluna ao lado a partir de $D5$ introduzimos a razão entre os números sucessivos com a fórmula $D5 = C5/C4$, e copiamos a fórmula para as próximas células até chegar em $D18$. No menu formatamos a coluna D para 6 casas decimais. Na figura 2.2 temos um modelo que evidencia a convergência dessas razões para Φ. O gráfico utilizado foi do tipo "x y dispersão".

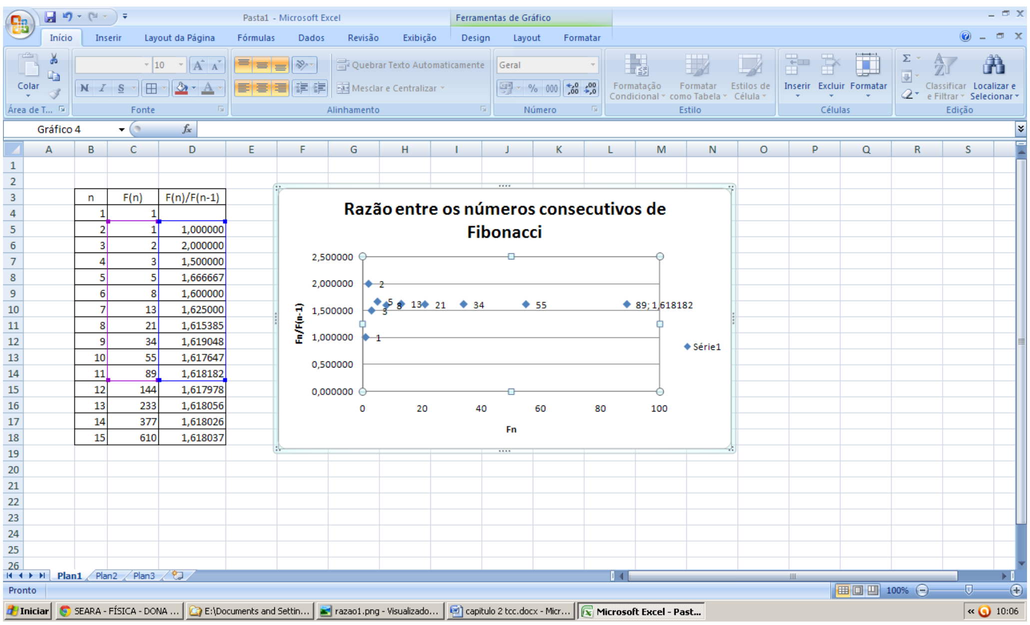


Figura 2.2: Modelo de uma planilha

Uma sugestão é utilizar o software Geogebra no laboratório com os alunos. Uma opção que dinamiza e motiva as aulas.

O questionário a seguir foi apresentado aos alunos:

1. Monte uma tabela utilizando a planilha eletrônica com as razões dos números consecutivos da sequência de Fibonacci;

2. Crie um gráfico adequado para esta tabela;

3. As razões da tabela leva a um número especial?

4. Verifique se o gráfico converge para algum ponto;

5. Investigue se há alguma relação entre a sequência de Fibonacci e a razão áurea.

Outra sugestão é modificar a fórmula de recursão para somar 3 últimos números, e assim estamos determinando uma variação de Fibonacci conhecida por Tribonacci. Essa extensão da sequência de Fibonacci foi introduzida pelo matemático M. Feinberg em 1963 [Fei]. E se adicionarmos quatro números sucessivos, criamos uma sequência recursiva chamada de Tetrabonacci. Desta forma podemos estimular os alunos a criarem novas sequências e descobrirem se estas também convergem para algum ponto.

2.6 Atividade 5: A botânica e Fibonacci

Nesse trabalho foi proposto que os alunos investigassem e relacionassem a sequência de Fibonacci com a natureza, em especial a botânica. Os números de fibonacci se relacionam com frequência na natureza. Podemos encontrar nas pétalas das flores, nos arranjos das folhas, nas pinhas, nos girassóis, nas escamas do abacaxi, nas sementes das flores, nos galhos das árvores e etc.

Aqui temos exemplos de como a sequência de Fibonacci aparecem com freqüência nos números de pétalas das flores:

Flor	**Pétalas**
Lírio, Íris	3
Aquilégia, botão-de-ouro	5
Delfínio	8
Cravo de defunto	13
Áster	21

Tabela 2.3: Número de pétalas das flores.

Para essa atividade foi pedido ao aluno para montar um painel com fotografias de plantas, arvores e frutas envolvendo os números de Fibonacci de acordo com suas descobertas na pesquisa. Cada grupo explanou de forma clara seus painéis fazendo uma reflexão do que aprenderam e que acharam de mais curioso. Culminou com um debate entre as equipes comparando e trocando os conhecimentos adquiridos da sequência e a natureza. Foi cobrado das equipes a organização das fotos, a estética dos painéis, os temas abordados e o cumprimento da tarefa.

Conclusão

O presente trabalho mostrou como podemos relacionar a Sequência de Fibonacci, a Razão Áurea e outros temas abordando conceitos importantes da Matemática. O objetivo foi estabelecer relações entre os conteúdos estudados com as situações próximas ao aluno. O aluno pode verificar a influência dos números de Fibonacci no mais variados temas do seu cotidiano, como na natureza, nas artes, nos seres vivos e em outros fenômenos do universo.

Em todas as atividades descritas temos a possibilidade de inserir vídeos, textos, softwares, planilhas eletrônicas e áudios. A internet também é uma ferramenta indispensável, auxiliando nas pesquisas e nas buscas de imagens.

Todas as atividades propostas comprovam como a Matemática, e em especial a sequência de Fibonacci, pode ser encontrada onde menos se esperam, nas coisas que nos rodeiam e nos lugares mais inusitados.

Os alunos fizeram buscas interessantes, descobriram temas agradáveis e curiosos, foram motivados aprender assuntos que muitas vezes pareciam enfadonhos e chatos. O objetivo é despertar o interesse do aluno pela Matemática e consequentemente a aprendizagem. Apesar das dificuldades com a Matemática, como na modelação do problema e como equacionar situações, os alunos buscaram dentro dos grupos, nas discussões, estratégias para desenvolver as atividades relacionando com diversas situações, minimizando com isso algumas deficiências com a disciplina.

O importante também é como o professor conduz as atividades, com metodologias adequadas, planejando e preparando as atividades pensando nas estratégias para envolver os alunos, e que esses percebam sentido no que estão fazendo. E assim o professor contribui para uma aprendizagem significativa promovendo a construção do conhecimento.

Buscamos relacionar os diversos temas da Matemática no ensino básico. As diferentes abordagens como: sequências (progressão aritmética e geométrica),conjuntos numéricos, relações e funções, gráficos, frações, teoria dos números, principio da indução finita, teorema de Pitágoras, Triângulo de Pascal, análise combinatória e outros. Além disso, deve buscar a interdisciplinaridade como, por exemplo, nas disciplinas de Física, História, Português, Artes, Biologia e Química.

E o mais interessante é que não termina aqui. As possibilidades de encontrar novas relações de Fibonacci com os elementos do universo são grandes e muitas aplicações ainda podem ser descobertas.Percebemos como essa sequência exerceu uma enorme influência na história das artes. Muitos pintores, escultores e arquitetos utilizaram da razão áurea e dos números de Fibonacci em seus trabalhos. Desde a antiguidade até hoje vemos exemplos da sua utilização.

Enfim, percebemos com a práxis pedagógica que a sequência de Fibonacci auxiliou de forma divertida o aprendizado dos conteúdos propostos na ementa. Esperamos que esses tipos de abordagens sejam mais freqüentes na sala de aula de forma a auxiliar os docentes melhorar o rendimento dos discentes. Com isso levar para a sala de aula uma metodologia diferenciada e agradável.

Referências Bibliográficas

[Bie] Biembengut, Maria Salett. *Número de Ouro e Secção Áurea: considerações e sugestões para a sala de aula*, Editora da Furb, 1996.

[Boy] Boyer, Carl B., *História da Matemática*, Edgar Blücher, 1996.

[Bro] Brown, Dan, *O Código da Vinci*, Editora Sextante, 2006.

[Cam] Câmara, Marco Antônio; Rodrigues, Melissa da Silva, *O número* Φ, Famat em Revista, n°11, Outubro de 2008.

[Fei] Feinberg, Mark, *Fibonacci - Tribonacci*, Fibonacci Quarterly, Vol. 1, (1963), 71-74.

[Hef] Hefez, Abramo, *Elementos de Aritmética*,SBM, 2011.

[Hun] Huntley, H.E., *A divina proporção*,Editora Universidade de Brasília, 1985.

[Lim] Lima, Elon; Carvalho, Paulo C. P.; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto C., *A matemática do ensino médio - volume 2*,SBM, 2006.

[Liv] Livio, Mario, *Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente*, Record, 2007.

[Lov] Lovász, L., Pelikán, J. e Vertergombi, K., *Matemática Discreta*,SBM,2003.

[Kal] Kalman, Dan; Mena, Robert, *The Fibonacci Numbers—Exposed*, Mathematics Magazine,Vol. 76, N° 3, June (2003), 167-181.

[San] Santos, José Plínio de Oliveira *Introdução à teoria dos números*, IMPA, 2007.

[Zah] Zahn, Maurício. *Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro*, Editora Ciência Moderna, 2011.