



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JAMIRES XIMENES RODRIGUES

SUPERFÍCIES ORIENTÁVEIS

FORTALEZA

2017

JAMIRES XIMENES RODRIGUES

SUPERFÍCIES ORIENTÁVEIS

Dissertação submetida ao Programa de pós-graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino da Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

**FORTALEZA**

**2017**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

R613s Rodrigues, Jamires Ximenes.  
Superfícies Orientáveis / Jamires Ximenes Rodrigues. – 2017.  
66 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2017.  
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Superfícies. 2. Espaço euclidiano. 3. Superfícies orientáveis. I. Título.

CDD 510

---

JAMIRES XIMENES RODRIGUES

SUPERFÍCIES ORIENTÁVEIS

Dissertação submetida ao Programa de pós-graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino da Matemática.

Aprovada em: 25/08/2017.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Frederico Vale Girão  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro  
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que  
contribuíram direta ou indiretamente com a  
sua realização.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, uno e trino, por, desde o dom da vida, ter me concedido muitas bênçãos. Dentre elas, saúde, para enfrentar esse período cansativo e desgastante, mas valioso e agradável, e ciência, para ser capaz de compreender os conhecimentos que me foram apresentados até aqui.

À minha mãe, Raimundinha, grande amor da minha vida, pessoa de pouco estudo, mas de grande sabedoria. Sou grato à senhora por ser essa mulher que, como poucas, exerce bem o papel de mãe, estando sempre ao meu lado, apoiando-me e estimulando a buscar, com a graça de Deus, conquistas cada vez maiores, e sempre zelando por mim.

Ao meu pai, João, homem de poucas palavras, mas que, mesmo sem ter dito, sou ciente que posso contar com sua disponibilidade para me ajudar no que eu pedir. Prova (desnecessária) disso foi sua contribuição nas minhas idas e vindas a Fortaleza durante esse curso de mestrado.

À Thamyres e à Aila, por estarem presentes em todos os momentos da minha vida e serem parte do presente divino que recebemos chamado família.

À minha amada, Kézia Dária, pela compreensão e paciência comigo durante essa etapa e por ser motivo para o meu empenho. Procuro oferecer reciprocidade ao seu amor e companheirismo, sem os quais seria bem mais difícil.

Aos colegas de curso, por todas as situações de aprendizado que me proporcionaram durante os cansativos, porém proveitosos e divertidos, dias de estudo, bem como por todas as gentilezas que me prestaram, mostrando o quanto o ser humano é bom. De modo especial, àqueles que me acompanharam de tão próximo que contribuíram para que eu não desistisse (vocês sabem quem são). Sou muito grato a vocês, meus amigos.

Ao meu orientador, o professor Dr. Marcelo Ferreira de Melo, ótimo profissional e pessoa admirável, por sua prontidão e generosidade para com todos e, em particular, comigo.

Aos meus amigos, Gerson e Fábio, homens que, independentemente (e antes mesmo) de serem padres, são sinais de Cristo em minha vida, através de seus exemplos, como foi a boa vontade em me acolher tantas vezes durante esse período de estudos, mas, sobretudo, pela amizade que os torna meus irmãos.

Aos docentes da Universidade Federal do Ceará (UFC) que foram meus professores no PROFMAT, pelos conhecimentos repassados e os exemplos dados de bons profissionais

Aos professores do curso de Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA) que me ajudaram, pelas dicas, a compreensão e as gentilezas.

A todos que de alguma forma me ajudaram nesses últimos anos: amigos, professores, colegas de trabalho, pessoas que não cito aqui, mas que tem meu respeito e

minha gratidão, pois deram passos comigo durante essa caminhada.

”A Matemática possui uma força maravilhosa capaz de nos fazer compreender muitos mistérios de nossa fé.” (SÃO JERÔNIMO)

## RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo apresentar o conceito de superfícies no espaço euclidiano e apresentar exemplos, partindo de casos mais simples como superfícies bidimensionais em  $\mathbb{R}^3$ , a casos gerais de superfícies  $m$ -dimensionais em  $\mathbb{R}^n$ . Trata-se de uma introdução à geometria diferencial de superfícies e de fundamental importância no estudo das variedades diferenciáveis. O propósito é preparar o leitor para uma conexão com a geometria riemanniana, estudo indispensável para alunos de mestrado e doutorado em matemática. Para um entendimento satisfatório desse trabalho é necessário estar familiarizado com conceitos de cálculo de várias variáveis e conceitos básicos de álgebra linear. Além disso, o presente estudo apresenta a noção de superfície orientável e superfície não orientável, apresentando exemplos de cada um desses tipos de superfícies.

**Palavras-chave:** Superfícies. Espaço euclidiano. Superfícies orientáveis.

## ABSTRACT

This work aims to present the concept of surfaces in Euclidean space and to present examples, starting from simpler cases as two-dimensional surfaces in  $\mathbb{R}^3$ , to general cases of  $m$ -dimensional surfaces in  $\mathbb{R}^n$ . It is an introduction to the differential geometry of surfaces and of fundamental importance in the study of differentiable manifolds. The purpose is to prepare the reader for a connection with Riemannian geometry, an indispensable subject for masters and doctoral students in Mathematics. For a satisfactory understanding of this work it is necessary to be familiar with concepts of multivariable calculus and basic concepts of linear algebra. In addition, the present study presents the notion of orientable surface and non-orientable surface, presenting examples of each of these types of surfaces.

**Keywords:** Surfaces. Euclidean space. Orientable surfaces.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação da aplicação diferenciável $x : U \rightarrow V \cap S$ . . . . .	15
Figura 2 – Curvas coordenadas $x : U \rightarrow V \cap S$ . . . . .	16
Figura 3 – Algumas situações que são evitadas na definição de superfície regular. . . . .	17
Figura 4 – Cobertura de $S^2$ pelas parametrizações do Exemplo 2.1.1. . . . .	18
Figura 5 – Representação da esfera em coordenadas geográficas. . . . .	19
Figura 6 – Representação da função $F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$ . . . . .	22
Figura 7 – Uma superfície não conexa. . . . .	23
Figura 8 – O toro gerado pela rotação de um círculo. . . . .	24
Figura 9 – A continuidade da aplicação $x^{-1}$ . . . . .	26
Figura 10 – Mudança de parâmetros. . . . .	28
Figura 11 – Função altura relativa a um vetor unitário. . . . .	30
Figura 12 – Aplicação diferenciável em coordenadas locais . . . . .	31
Figura 13 – Uma superfície de revolução . . . . .	33
Figura 14 – Plano tangente a superfície . . . . .	35
Figura 15 – Diferencial de uma aplicação entre superfícies . . . . .	36
Figura 16 – Movimento positivo de curvas fechadas . . . . .	39
Figura 17 – Construção da faixa de Möbius . . . . .	42
Figura 18 – Mudança de parâmetros em superfícies abstratas . . . . .	46
Figura 19 – Aplicação diferenciável entre superfícies abstratas . . . . .	47
Figura 20 – Aplicação antípoda no toro . . . . .	48
Figura 21 – O toro . . . . .	49
Figura 22 – Plano tangente em uma superfície abstrata . . . . .	50
Figura 23 – O plano projetivo contém uma faixa de Möbius . . . . .	51
Figura 24 – Uma imersão injetiva que não é homeomorfismo . . . . .	55
Figura 25 – Parametrização de um aberto $V$ . . . . .	55
Figura 26 – Mudança de coordenadas numa superfície $m$ -dimensional . . . . .	57
Figura 27 – O plano tangente no $\mathbb{R}^n$ . . . . .	58
Figura 28 – Aplicação diferenciável em superfícies. . . . .	59

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	12
2	SUPERFÍCIES NO ESPAÇO EUCLIDIANO . . . . .	14
2.1	Superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	14
2.2	Superfícies orientáveis em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	38
3	SUPERFÍCIES ABSTRATAS . . . . .	45
4	SUPERFÍCIES NO $\mathbb{R}^n$ . . . . .	54
4.1	Superfícies $m$ -dimensionais no $\mathbb{R}^n$ . . . . .	54
4.2	Superfícies orientáveis no $\mathbb{R}^n$ . . . . .	61
5	CONCLUSÃO . . . . .	65
	REFERÊNCIAS . . . . .	66

## 1 INTRODUÇÃO

A geometria diferencial é o estudo da geometria usando as noções e técnicas do cálculo diferencial e integral de várias variáveis. Tal ramo matemático nasceu, de certo modo, como uma ciência aplicada, principalmente em questões originadas da cartografia, de onde herdou parte de sua terminologia inicial. Entre os matemáticos que desenvolveram a geometria diferencial, podemos destacar Gauss, Riemann e Finsler. Gauss introduziu a geometria diferencial; Riemann, ampliando a geometria diferencial, tornou possível a teoria da relatividade desenvolvida por Einstein. A generalização da geometria diferencial desenvolvida por Finsler é freqüentemente uma ferramenta essencial para aplicações em biologia (modelagem da evolução de organismos coloniais), teoria do controle, engenharia e física. Paralelamente, a interação entre a geometria diferencial e a análise tem sido fator de desenvolvimento de ambas as disciplinas. No espírito da geometria analítica de Descartes, questões profundas de análise têm sido resolvidas através da geometria e vice-versa. Todo um capítulo, extremamente atual e de grande potencial para aplicações, das equações diferenciais parciais não lineares, foi desenvolvido sob a inspiração de questões geométricas. Também a computação gráfica demonstra que a geometria diferencial ficará proximamente presente e acessível para um público bem mais amplo, quer na área científica, quer na área empresarial, fornecendo a interface gráfica adequada à apresentação de resultados, ao desenvolvimento de novas tecnologias e ao planejamento de novos produtos.

Inicialmente e até a metade do século XIX, a geometria diferencial era vista de uma maneira extrínseca: curvas e superfícies eram consideradas dentro de um espaço euclidiano de dimensão maior (um plano em um espaço tridimensional, por exemplo). Começando com o trabalho de Riemann, a maneira intrínseca de se tratar a geometria foi desenvolvida, na qual não se pode ‘sair’ do objeto geométrico. A forma intrínseca é mais flexível, por exemplo, na relatividade, onde os espaços-tempos não podem ser naturalmente tratados extrinsecamente. É mais difícil de se definir curvatura (e outras estruturas como conexão) do ponto de vista intrínseco. Então, há um preço a ser pago. Essas duas maneiras diferentes de tratamento podem ser conciliadas. A geometria extrínseca, por exemplo, pode ser considerada como uma estrutura adicional à intrínseca.

Esse trabalho é uma introdução ao estudo da geometria diferencial. Ele introduz também os conceitos básicos de geometria riemanniana (geometria intrínseca), indispensável para estudantes de mestrado e doutorado em matemática. Neste trabalho apresentaremos o conceito de superfícies no espaço euclidiano, provavelmente a parte mais interessante e representativa da geometria diferencial. Para tal exposição vamos utilizar conceitos de álgebra linear e cálculo diferencial de várias variáveis. Além disso, iremos discutir a orientação de uma superfície, ou seja, quando uma superfície no espaço euclidiano é orientável ou não orientável. Segue-se, nos próximos parágrafos, um breve detalhamento

sobre os capítulos que compõem este trabalho.

No segundo capítulo, na seção 2.1, começamos o nosso estudo sobre superfícies apresentando o caso particular de superfícies no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ : definição e exemplos de superfícies. Na seção 2.2, trataremos da orientação de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  e apresentaremos exemplos de superfícies orientáveis e não orientáveis. Especificamente para este capítulo, precisaremos conhecer alguns fatos sobre a continuidade e a diferenciabilidade de funções e aplicações em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

No terceiro capítulo, introduziremos a noção de superfície abstrata. O objetivo é definir abstratamente (isto é, sem referência ao  $\mathbb{R}^3$ ) um conjunto  $S$  no qual faça sentido falar de funções diferenciáveis e estender a geometria de superfícies no espaço euclidiano para esse conjunto.

No quarto capítulo, iremos ampliar a definição de superfícies para espaços euclidianos de quaisquer dimensões, ou seja, superfícies em  $\mathbb{R}^n$ . Tal capítulo terá uma construção semelhante ao anterior; na seção 4.1 definiremos superfícies em  $\mathbb{R}^n$  e apresentaremos exemplos; e na seção 4.2 apresentaremos o conceito superfícies orientáveis e superfícies não orientáveis em  $\mathbb{R}^n$ , exemplificando cada um deles.

Para finalizar, podemos dizer que o objetivo maior deste trabalho é estimular e introduzir o leitor ao estudo da geometria diferencial, fundamental para alunos de mestrado e doutorado, principalmente para estudos mais avançados sobre variedades diferenciáveis e suas conexões com a geometria riemanniana.

## 2 SUPERFÍCIES NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Neste capítulo, começamos o nosso estudo sobre superfícies. Para tal, precisaremos de conhecimentos prévios em álgebra linear e cálculo. De álgebra linear, apenas conceitos mais básicos são necessários, e um curso padrão da graduação deve ser suficiente. Do cálculo, espera-se uma certa familiaridade com cálculo de várias variáveis e como sugestão de leitura temos [Lima 2010].

### 2.1 Superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$

Nesta seção introduzimos a noção de uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ . A grosso modo, uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$  é obtida tomando-se pedaços do plano, deformando-os e colando-os entre si, de tal forma que a figura resultante não apresente pontas, arestas ou auto-interseções; e que tenha sentido falar em plano tangente nos pontos desta figura. A ideia é definir um conjunto que seja, em certo sentido, bidimensional e que seja também suficientemente suave de forma que as noções usuais do cálculo possam ser estendidas a um tal conjunto.

**Definição 2.1.1.** *Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular se, para cada  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $x : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que (Fig.1)*

1.  $x$  é diferenciável. Isto significa que se escrevemos

$$x(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

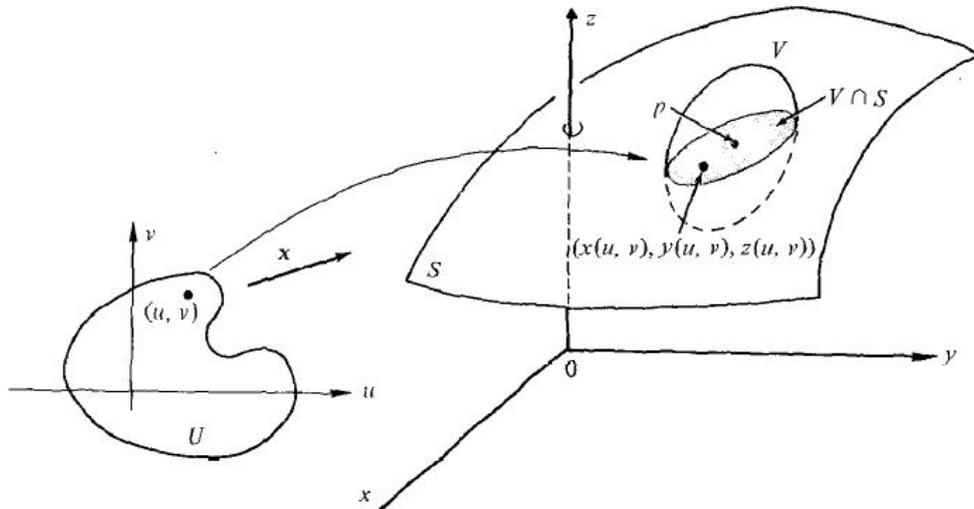
*as funções  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em  $U$ .*

2.  $x$  é um homeomorfismo. Como  $x$  é contínua pela condição 1, isto significa que  $x$  tem inversa  $x^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  que é contínua.
3. (condição de regularidade) Para todo  $q \in U$ , a diferencial  $dx_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

Explicaremos a condição 3 logo mais.

A aplicação  $x$  é chamada uma *parametrização* ou um sistema de coordenadas (locais) em (uma vizinhança de)  $p$ . A vizinhança  $V \cap S$  de  $p$  em  $S$  é chamada uma (*vizinhança coordenada*).

Figura 1 – Representação da aplicação diferenciável  $x : U \rightarrow V \cap S$ .



Fonte: [Carmo 2005] .

Com intuito de expressar a condição 3 de um forma mais familiar, iremos calcular a matriz da aplicação linear  $dx_q$  nas bases canônicas  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$  com coordenadas  $(u, v)$  e  $f_1 = (1, 0, 0)$ ,  $f_2 = (0, 1, 0)$  e  $f_3 = (0, 0, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$  com coordenadas  $(x, y, z)$ . Lembrando que associado a cada  $q \in U$  temos uma aplicação linear  $dx_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida da seguinte maneira. Sejam  $w \in \mathbb{R}^2$  e  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  uma curva diferenciável tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = w$ , pela regra da cadeia, a curva  $\beta = F \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  também é diferenciável. Então

$$dx_q(w) = \beta'(0).$$

Para maiores detalhes sobre aplicações diferenciáveis e regra da cadeia ver [?]

Seja  $q = (u_0, v_0)$ . O vetor  $e_1$  é tangente à curva  $u \rightarrow (u, v_0)$  cuja a imagem por  $x$  é a curva

$$u \rightarrow (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)).$$

Esta última curva (chamada de curva *coordenada*  $v = v_0$ ) está em  $S$  e tem em  $x(q)$  o vetor tangente (Fig.2)

$$\left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$$

onde as derivadas são calculadas em  $(u_0, v_0)$  e um vetor é indicado pelas suas componentes na base  $\{f_1, f_2, f_3\}$ . Assim, pela definição de diferencial (confira [?, cap. 5])

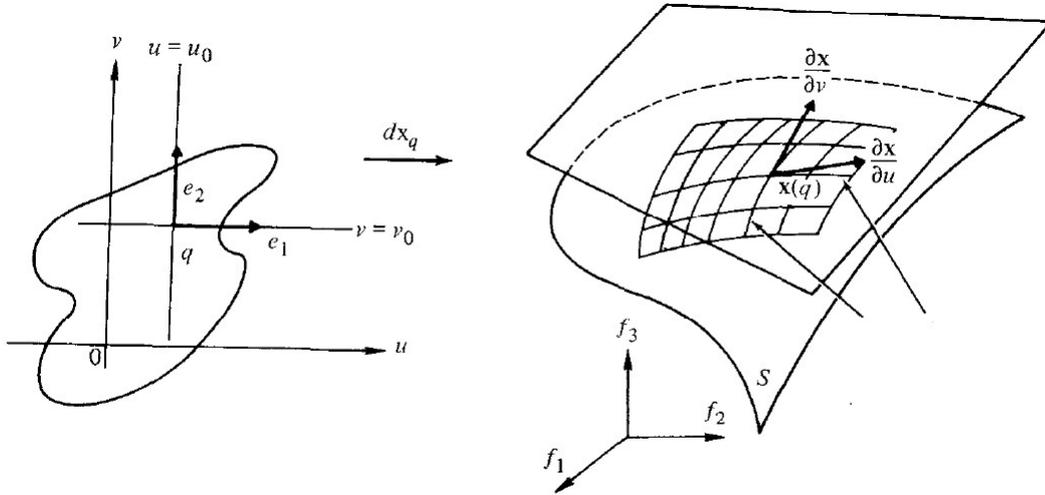
$$dx_q(e_1) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}.$$

Analogamente, usando a curva coordenada  $u = u_0$  (imagem por  $x$  da curva

$v \rightarrow (u_0, v)$ , obtemos

$$dx_q(e_2) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$$

Figura 2 – Curvas coordenadas  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$ .



Fonte: [Carmo 2005] .

Portanto, a matriz da aplicação linear  $dx_q$  nas bases consideradas é,

$$dx_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

A condição 3 da Def. 2.1.1 pode agora ser expressa exigindo-se que os dois vetores coluna desta matriz sejam linearmente independentes, ou, de forma equivalente, que o produto vetorial  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq 0$ ; ou, ainda de outro modo, que uma das submatrizes de ordem 2 da matriz  $dx_q$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)},$$

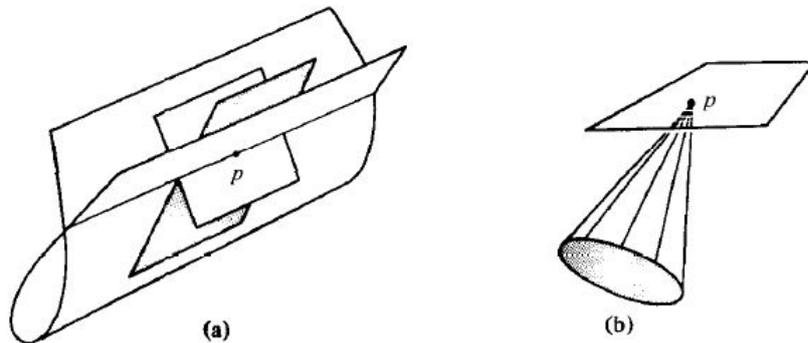
possue determinante diferente de zero em  $q$ .

**Observação 2.1.1.** Definimos a superfície como um subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  e não como uma aplicação. Conseguimos isso cobrindo  $S$  com trechos de parametrizações satisfazendo às condições 1, 2 e 3.

A condição 1 é natural se esperamos fazer alguma geometria diferencial sobre  $S$ . A injetividade de  $\mathbf{x}$ , abordada na condição 2, tem o objetivo de excluir a possibilidade de auto-interseções em superfícies regulares, algo evidentemente necessário se queremos

tratar, por exemplo, de plano tangente em um ponto  $p$  de  $S$  (ver Fig.3(a)). A continuidade da inversa na condição 2 tem um propósito mais sutil e poderá ser plenamente entendido quando falarmos de mudança de coordenadas, ou seja, essa condição é essencial para provar que certos objetos definidos não dependam do sistema de coordenadas escolhido, mas apenas do próprio conjunto  $S$ . Finalmente, a condição 3 garante a existência de um "plano tangente" em todos os pontos de  $S$  (ver Fig.3(b)).

Figura 3 – Algumas situações que são evitadas na definição de superfície regular.



Fonte: [Carmo 2005] .

**Exemplo 2.1.1.** Vamos mostrar que a esfera unitária  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  é uma superfície regular.

Iniciamos verificando que a aplicação  $x_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$x_1 = (x, y, +\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), \quad (x, y) \in U,$$

onde  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$  e  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ , é uma parametrização de  $S^2$ . Observe que  $x_1(U)$  é a parte (aberta) de  $S^2$  acima do plano  $xy$ .

Como  $x^2 + y^2 < 1$ , a função  $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$  tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Portanto,  $x_1$  é diferenciável e a condição 1 é satisfeita.

A condição 3 é verificada facilmente, uma vez que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

A condição 2 também é satisfeita, observando que  $x_1$  é bijetiva e que  $x_1^{-1}$  é a restrição da projeção (contínua)  $\pi(x, y, z) = (x, y)$  ao conjunto  $x_1(U)$ . Logo,  $x_1^{-1}$  é contínua em  $x_1(U)$ .

Agora, cobriremos a esfera inteira utilizando parametrizações similares. Pro-

cedemos da seguinte maneira. Definimos  $x_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  por

$$x_2(x, y) = \left( x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \right), \quad (x, y) \in U,$$

analogamente ao que foi feito para  $x_1$ , verifica-se que  $x_2$  é uma parametrização e observa-se que  $x_1 \cup x_2$  cobre a esfera menos o equador.

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, z = 0\}.$$

Utilizando então os planos  $xz$  e  $yz$ , definimos as seguintes parametrizações

$$x_3(x, z) = \left( x, +\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z \right),$$

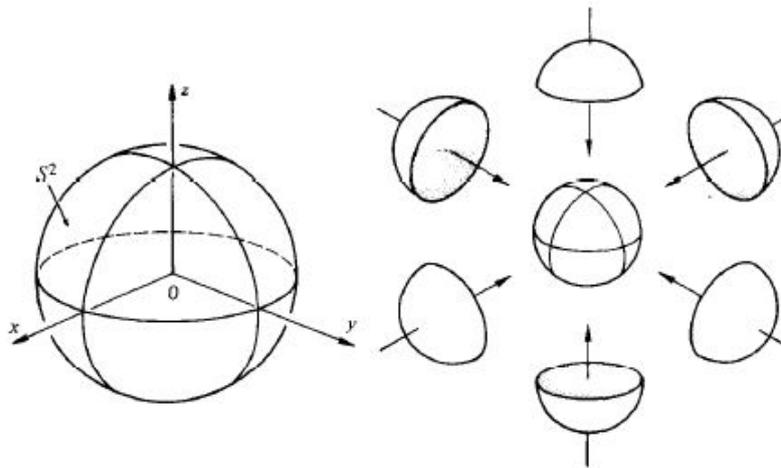
$$x_4(x, z) = \left( x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z \right),$$

$$x_5(y, z) = \left( +\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z \right),$$

$$x_6(y, z) = \left( -\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z \right),$$

que juntamente com  $x_1$  e  $x_2$ , cobrem inteiramente  $S^2$  (ver Fig.4). Assim, mostramos que  $S^2$  é uma superfície regular.

Figura 4 – Cobertura de  $S^2$  pelas parametrizações do Exemplo 2.1.1.



Fonte: [Carmo 2005].

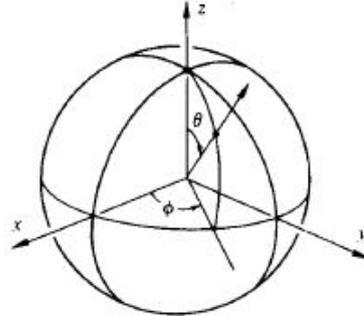
Para a maioria das aplicações, é conveniente relacionar parametrizações com as coordenadas geográficas em  $S^2$ . Sejam  $V = \{(\theta, \varphi); 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$  e  $x : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$x(\theta, \varphi) = (\text{sen } \theta \cos \varphi, \text{sen } \theta \text{sen } \varphi, \cos \theta).$$

Claramente,  $x(V) \subset S^2$ . Mostraremos que  $x$  é uma parametrização de  $S^2$ . Nestas coordenadas geográficas,  $\theta$  é a colatitude (o complemento da latitude) e  $\varphi$  a longitude (ver

Fig.5).

Figura 5 – Representação da esfera em coordenadas geográficas.



Fonte: [Carmo 2005] .

As funções  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta \cos \varphi$ ,  $\sin \theta \sin \varphi$ ,  $\cos \theta$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens; logo,  $x$  é diferenciável. Além disso, para que os determinantes Jacobianos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} &= \cos \theta \sin \theta, \\ \frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \varphi)} &= \sin^2 \theta \cos \varphi, \\ \frac{\partial(x, z)}{\partial(\theta, \varphi)} &= -\sin^2 \theta \sin \varphi, \end{aligned}$$

se anularem simultaneamente, é necessário que

$$\cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta \cos^2 \varphi + \sin^4 \theta \sin^2 \varphi = \sin^2 \theta = 0.$$

Mas isso não ocorre em  $V$ , pois  $V = \{(\theta, \varphi); 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$  e nesses intervalos  $\sin \theta \neq 0$ , portanto ficam satisfeitas as condições 1 e 2 da Def. 2.1.1.

Em seguida, observamos que dado  $(x, y, z) \in S^2 - C$ , onde  $C$  é o semi-círculo

$$C = \{(x, y, z) \in S^2; y = 0, x \geq 0\},$$

$\theta$  fica determinado de maneira única por  $\theta = \cos^{-1} z$ , uma vez que  $0 < \theta < \pi$ . Conhecendo o valor de  $\theta$ , determinamos  $\sin \varphi$  e  $\cos \varphi$  a partir de  $x = \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = \sin \theta \sin \varphi$ , e isto determina  $\varphi$  de maneira única ( $0 < \varphi < 2\pi$ ). Assim,  $x$  é bijetiva e portanto possui inversa  $x^{-1}$ . Para completar a verificação da condição 2, teríamos que provar a continuidade da inversa  $x^{-1}$ . No entanto, como demonstraremos logo mais (Prop. 2.1.4), esta prova não é necessária quando sabemos que  $S$  é uma superfície regular. Neste caso, como vimos que  $S^2$  é superfície regular pelo Exemplo 2.1.1.

Observamos que  $x(V)$  omite apenas um semi-círculo de  $S^2$  (incluindo os dois

polos) e que  $S^2$  pode ser coberta por vizinhanças coordenadas de duas parametrizações deste tipo.

Antes de prosseguirmos com os exemplos, apresentaremos duas proposições que simplificarão a tarefa de descobrir se um dado subconjunto do  $\mathbb{R}^3$  é uma superfície regular. A Proposição 2.1.1 mostra a relação existente entre a definição de uma superfície regular e o gráfico de uma função  $z = f(x, y)$ . A Proposição 2.1.2 utiliza o teorema da função inversa e relaciona a definição de superfície regular com subconjuntos da forma  $f(x, y, z) = \text{constante}$ .

**Proposição 2.1.1.** *Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável em um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , então o gráfico de  $f$ , isto é, o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $(x, y, f(x, y))$  para  $(x, y) \in U$ , é uma superfície regular.*

**Demonstração:** Vamos mostrar que a aplicação  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$x(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

é uma parametrização do gráfico, cuja vizinhança coordenada cobre todos os pontos do gráfico. A condição 1 é satisfeita sem problemas, pois as funções coordenadas  $x = u$ ,  $y = v$  e  $z = f(u, v)$  são diferenciáveis. A condição 3 também é satisfeita, visto que  $\partial(x, y)/\partial(u, v) \equiv 1$ . Por último, observamos que cada ponto  $(x, y, z)$  do gráfico é a imagem por  $x$  de um único ponto  $(u, v) = (x, y) \in U$ . Consequentemente,  $x$  é bijetiva, logo possui inversa  $x^{-1}$  que é a restrição ao gráfico de  $f$  da projeção (contínua) de  $\mathbb{R}^3$  sobre o plano  $xy$ , assim  $x^{-1}$  é contínua. ■

Antes de enunciarmos a Prop. 2.1.2, precisaremos da seguinte definição.

**Definição 2.1.2.** *Dada uma aplicação diferenciável  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida em um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , dizemos que  $p \in U$  é um ponto crítico de  $F$  se a diferencial de  $F$  se a diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  não é uma aplicação sobrejetiva. A imagem  $F(p) \in \mathbb{R}^m$  de um ponto crítico é chamado um valor crítico de  $F$ . Um ponto de  $\mathbb{R}^m$  que não é um valor crítico é chamado de valor regular de  $F$ .*

Se  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, então  $df_p$  aplicada ao vetor  $(1, 0, 0)$  é obtida calculando-se o vetor tangente em  $f(p)$  à curva

$$x \rightarrow f(x, y_0, z_0).$$

Segue que

$$df_p(1, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = f_x$$

e, analogamente, que

$$df_p(0, 1, 0) = f_y, \quad df_p(0, 0, 1) = f_z.$$

Concluimos que a matriz de  $df_p$  na base canônica  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$  é dada por

$$df_p = (f_x, f_y, f_z).$$

Neste caso, dizer que  $df_p$  não é sobrejetiva equivale a dizer que  $f_x = f_y = f_z = 0$  em  $p$ . Portanto,  $a \in f(U)$  é um valor regular de  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  se e somente se  $f_x, f_y$  e  $f_z$  não se anulam simultaneamente em qualquer ponto da imagem inversa

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U : f(x, y, z) = a\}.$$

**Proposição 2.1.2.** *Se  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável e  $a \in f(U)$  é um valor regular de  $f$ , então  $f^{-1}(a)$  é uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ .*

**Demonstração:** Seja  $p = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto de  $f^{-1}(a)$ . Como  $a$  é um valor regular de  $f$ , podemos supor, mudando os nomes dos eixos coordenados se necessário, que  $f_z \neq 0$  em  $p$ . Definimos uma aplicação  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)),$$

e indicamos por  $(u, v, t)$  as coordenadas de um ponto de  $\mathbb{R}^3$  onde  $F$  toma seus valores. A diferencial de  $F$  em  $p$  é dada por

$$dF_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix},$$

logo,  $\det(dF_p) = f_z \neq 0$ . Podemos então aplicar o teorema da função inversa (ver [?, cap. 5]) que garante a existência de vizinhanças  $V$  de  $p$  e  $W$  de  $F(p)$  tais que  $F : V \rightarrow W$  é inversível e a inversa  $F^{-1} : W \rightarrow V$  é diferenciável (ver Fig.6). Segue-se que as funções coordenadas de  $F^{-1}$ , isto é, as funções

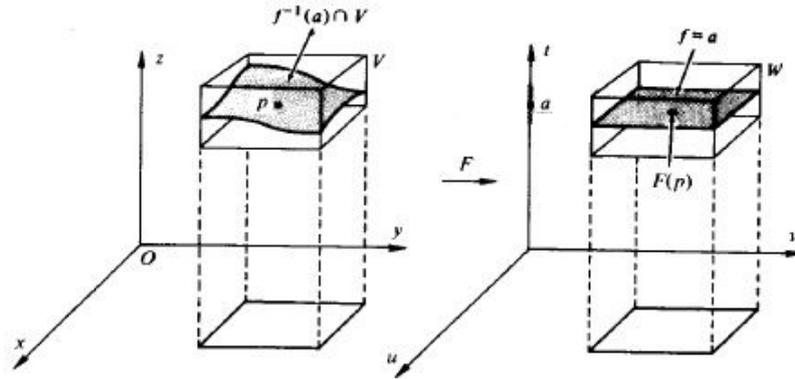
$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(u, v, t), \quad (u, v, t) \in W,$$

são diferenciáveis. Em particular,  $z = g(u, v, a) = h(x, y)$  é uma função diferenciável definida na projeção de  $V$  sobre o plano  $xy$ . Como

$$F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t); t = a\},$$

Concluimos que o gráfico de  $h$  é  $f^{-1}(a) \cap V$ . pela Prop. 2.1.1,  $f^{-1}(a) \cap V$  é uma vizinhança

Figura 6 – Representação da função  $F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$ .



Fonte: [Carmo 2005] .

coordenada de  $p$ . Conseqüentemente, todo ponto  $p \in f^{-1}(a)$  pode ser coberto por uma vizinhança coordenada, ou seja,  $f^{-1}(a)$  é uma superfície regular. ■

**Exemplo 2.1.2.** O elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

é uma superfície regular. De fato, é o conjunto  $f^{-1}(0)$ , onde

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

é uma função diferenciável e 0 é um valor regular de  $f$ . As derivadas parciais de  $f$  são  $f_x = 2x/a^2$ ,  $f_y = 2y/b^2$ ,  $f_z = 2z/c^2$  que se anulam apenas no ponto  $(0, 0, 0)$ , ponto este que não pertence a  $f^{-1}(0)$ , logo (pela Prop. 2.1.2)  $f^{-1}(0)$  é uma superfície regular. A esfera é um caso particular deste exemplo ( $a = b = c = 1$ ).

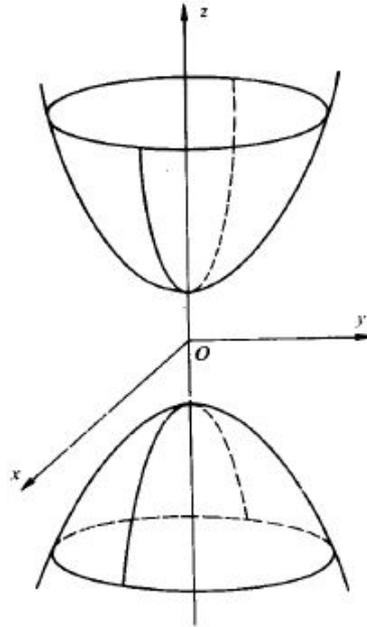
Os exemplos de superfícies regulares apresentados até agora são conjuntos conexos de  $\mathbb{R}^3$ . Diremos que uma superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  é conexa se quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por uma curva contínua contida em  $S$ . Na definição de uma superfície regular, não há restrição alguma sobre a conexidade das superfícies. O próximo exemplo mostra que superfícies regulares dadas pela Prop. 2.1.2 podem não ser conexas.

**Exemplo 2.1.3.** O hiperbolóide de duas folhas  $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  é uma superfície regular, já que é dada por  $S = f^{-1}(0)$ , onde 0 é um valor regular de  $f(x, y, z) = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$  (Fig 7). Observe que a superfície  $S$  não é conexa; pois dados dois pontos em duas folhas distintas ( $z > 0$  e  $z < 0$ ) não é possível ligá-los por uma curva contínua  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  contida na superfície. De fato, caso fosse possível,  $z(t)$  mudaria de sinal, e para algum  $t_0$  teríamos  $z(t_0) = 0$ . O que significaria que  $\alpha(t_0) \notin S$ .

A propósito, o argumento do Exemplo 2.1.2 pode ser utilizado para provar uma propriedade das superfícies conexas. Se  $f : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua que

não se anula, definida sobre uma superfície conexa, então  $f$  não muda de sinal em  $S$ .

Figura 7 – Uma superfície não conexa.



Fonte: [Carmo 2005] .

Para provar esta propriedade, utilizamos o teorema do valor intermediário (ver [Lima 2010, cap. 1]). Suponha, por contradição, que  $f(p) > 0$  e  $f(q) < 0$  para dois pontos  $p, q \in S$ . Como  $S$  é conexa, existe uma curva contínua  $\alpha : [a, b] \rightarrow S$  tal que  $\alpha(a) = p$ ,  $\alpha(b) = q$ . O teorema do valor intermediário aplicado à função contínua  $f \circ \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , assegura que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f \circ \alpha(c) = 0$ ; isto é,  $f$  é zero em  $\alpha(c)$ , o que é uma contradição.

**Exemplo 2.1.4.** O toro  $T$  é o conjunto gerado pela rotação de um círculo  $S^1$  de raio  $r$  em torno de uma reta pertencente ao plano do círculo e a uma distância  $a > r$  do centro do círculo (Fig 8).

Seja  $S^1$  o círculo no plano  $yz$  centrado  $(0, a, 0)$ . Então  $S^1$  é dado por  $(y - a)^2 + z^2 = r^2$  e os pontos do conjunto  $T$ , obtidos pela rotação deste círculo em torno do eixo  $Oz$  satisfazem a equação

$$z^2 = r^2 - \left( \sqrt{x^2 + y^2} - a \right)^2 .$$

Consequentemente,  $T$  é a imagem inversa de  $r^2$  pela função

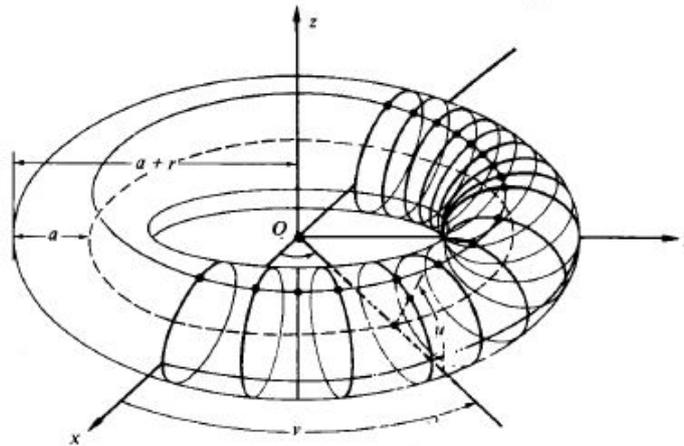
$$f(x, y, z) = z^2 - \left( \sqrt{x^2 + y^2} - a \right)^2 .$$

Essa função é diferenciável para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , e

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Como  $f_x = f_y = f_z = 0$  se  $\sqrt{x^2 + y^2} = a$  e  $z = 0$  ou  $x = y = z = 0$ , então  $r^2$  é um valor regular de  $f$ , pois nenhum desses pontos pertence a  $f^{-1}(r^2)$ . Logo  $T$  é uma superfície regular.

Figura 8 – O toro gerado pela rotação de um círculo.



Fonte: [Carmo 2005].

A proposição 2.1.1 nos diz que o gráfico de uma função diferenciável é uma superfície regular. A próxima proposição fornece uma recíproca local deste fato; isto é, qualquer superfície regular é localmente o gráfico de uma função diferenciável.

**Proposição 2.1.3.** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular e  $p \in S$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $S$  tal que  $V$  é o gráfico de uma função diferenciável que tem uma das seguintes formas:  $z = f(x, y)$ ,  $y = g(x, z)$ ,  $x = h(y, z)$ .*

**Demonstração:** Iremos mostrar o caso em que existe vizinhança  $V$  tal que  $V$  é o gráfico de uma função diferenciável na forma  $z=f(x,y)$ , os outros casos podem ser feitas de forma análoga. Seja  $x : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$  em  $p$ , e escrevendo  $x(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $(u, v) \in U$  Pela condição 3 da Def. 2.1.1, um dos determinantes Jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)},$$

não se anulam  $x^{-1}(p) = q$ .

Inicialmente suponha que  $\partial(x, y)/\partial(u, v) \neq 0$ , trocando o nome dos eixos se necessário, e considere a projeção  $\pi \circ x : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $\pi$  é a projeção  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ . Então  $\pi \circ x(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ , e, como  $\partial(x, y)/\partial(u, v) \neq 0$ , a diferen-

cial desta aplicação no ponto  $x^{-1}(p) = q$  é um isomorfismo. Aplicando o teorema da aplicação inversa, garantimos a existência de uma vizinhança  $V_1$  de  $q$  e  $V_2$  de  $\pi \circ x(q)$  tais que  $\pi \circ x$  aplique  $V_1$  difeomorficamente sobre  $V_2$  (Fig. 9). Segue daí que  $\pi$  restrita a  $x(V_1) = V$  é bijetiva e tem inversa diferenciável  $(\pi x)^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$ . Como  $x$  é um homeomorfismo, a imagem  $V = x(V_1)$  é uma vizinhança de  $p$  em  $S$ . Agora, considerando a composição da aplicação  $(\pi \circ x)^{-1} : (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$  com a função  $(u, v) \rightarrow z(u, v)$ , temos  $z = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$  e podemos notar que  $V = x(V_1) = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)); (u, v) \in V_1\} = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)); (u, v) \in (\pi \circ x)^{-1}(V_2)\} = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)); (\pi \circ x)(u, v) \in V_2\} = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)); (x(u, v), y(u, v)) \in V_2\} = \{(x, y, z(u(x, y), v(x, y))); (x, y) \in V_2\} = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in V_2\}$ , ou seja,  $V$  é o gráfico de uma função diferenciável  $f(x, y)$ . ■

A proposição a seguir diz que se sabemos que  $S$  é uma superfície regular e temos um candidato a ser uma parametrização de  $S$ , digamos  $x$ , então não precisamos verificar que  $x^{-1}$  é contínua, desde que as outras condições da definição de superfície sejam satisfeitas.

**Proposição 2.1.4.** *Seja  $p \in S$  um ponto de uma superfície regular  $S$  e seja  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma aplicação com  $p \in x(U)$  tal que as condições 1 e 3 da Def. 2.1.1 sejam satisfeitas. Suponha que  $x$  seja bijetiva. Então  $x^{-1}$  é contínua.*

**Demonstração:** O início da demonstração é similar à prova da Proposição anterior. Escreva  $x(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $(u, v) \in U$ , e seja  $q \in U$ . Pelas condições 1 e 3 podemos supor  $\partial(x, y)/\partial(u, v) \neq 0$ . Seja  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a projeção  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ . Pelo teorema da função inversa, obtemos vizinhanças  $V_1$  de  $q$  em  $U$  e  $V_2$  de  $\pi \circ x(q)$  em  $\mathbb{R}^2$  tais que  $\pi \circ x$  aplica  $V_1$  difeomorficamente sobre  $V_2$ .

Supondo agora que  $x$  seja bijetiva. Então, restrita a  $x(V_1)$ ,

$$x^{-1} = (\pi \circ x)^{-1} \circ \pi$$

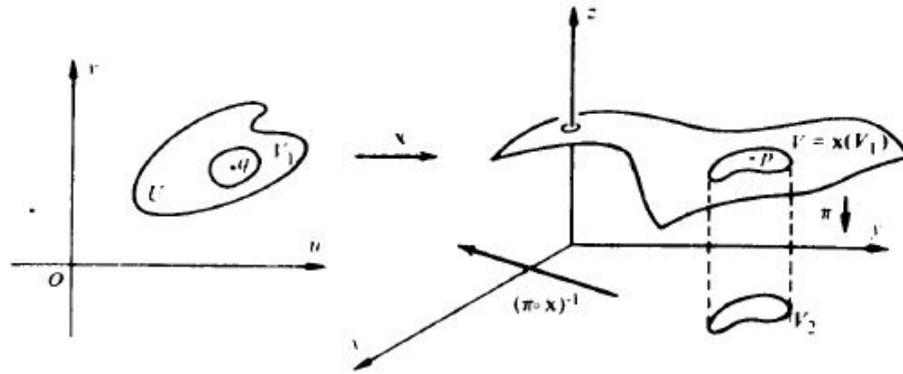
(ver Fig. 9). Assim,  $x^{-1}$ , sendo composição de aplicações contínuas, é contínua. ■

**Exemplo 2.1.5.** O cone de uma folha  $C$ , dada por

$$z = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

não é superfície regular. Observe que não podemos concluir isto somente pelo fato da parametrização "natural"

$$(x, y) \rightarrow (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Figura 9 – A continuidade da aplicação  $x^{-1}$ .

Fonte: [Carmo 2005] .

não ser diferenciável em  $(0, 0)$ , pois poderiam existir outras parametrizações satisfazendo a Def. 2.1.1.

Para mostrar que isto não acontece, utilizamos a Prop. 2.1.3. Se  $C$  fosse uma superfície regular, seria, numa vizinhança do ponto  $(0, 0, 0) \in C$ , o gráfico de uma função diferenciável tendo uma das formas:  $y = h(x, z)$ ,  $x = g(y, z)$ ,  $z = f(x, y)$ . As duas primeiras podem ser descartadas pelo fato das projeções de  $C$  sobre o plano  $xz$  e  $yz$  não serem injetivas. A forma restante teria que coincidir, em uma vizinhança do  $(0, 0, 0)$ , com  $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$ . Mas isso não pode ocorrer, pois  $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$  não é diferenciável em  $(0, 0)$ .

**Exemplo 2.1.6.** Uma parametrização para o toro  $T$  visto no Exemplo 2.1.4 pode ser dada por (Fig. 8)

$$x(u, v) = ((r \cos u + a) \cos v, (r \cos u + a) \sin v, r \sin u),$$

onde  $0 < u < 2\pi$ ,  $0 < v < 2\pi$ . Claramente a condição 1 é satisfeita, e a verificação da condição 3 reduz-se a um simples cálculo. calculando os determinantes dos Jacobianos temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= -r \sin u (r \cos u + a) \\ \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} &= r \cos u \sin v (-r \cos u + a) \\ \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} &= r \cos u \cos v (r \cos u + a) \end{aligned}$$

que não se anulam simultaneamente.

Para provar que  $x$  é bijetiva, primeiramente observamos que  $\sin u = z/r$ ; também notamos que, se  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq a$ , então  $\pi/2 \leq u \leq 3\pi/2$ , e se  $\sqrt{x^2 + y^2} \geq a$ , então ou  $0 < u \leq \pi/2$  ou  $3\pi/2 \leq u \leq 2\pi$ . Logo, dado  $(x, y, z)$ , isto determina  $u$ ,  $0 < u < 2\pi$ ,

de maneira única. Conhecendo  $u$ ,  $x$  e  $y$  determinamos  $\cos v$  e  $\sin v$ . Isto determina  $v$  de maneira única,  $0 < v < 2\pi$ . Concluimos assim que  $x$  é bijetiva.

Um dos objetivos da geometria diferencial é o estudo das propriedades de superfícies que dependem do comportamento das superfícies numa vizinhança de um ponto. A definição 2.1.1 é adequada a este estudo, pois de acordo com essa definição, cada ponto  $p$  de uma superfície regular pertence a uma vizinhança coordenada. Os pontos de uma tal vizinhança coordenada são caracterizados pelas suas coordenadas. Assim, em princípio, deveríamos poder definir as propriedades locais que nos interessam em termos dessas coordenadas.

Por exemplo, é importante que possamos definir o que significa uma função  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  ser diferenciável em um ponto  $p$  de uma superfície regular  $S$ . Uma maneira natural para definir este conceito seria escolher uma vizinhança coordenada de  $p$ , com coordenadas  $u, v$  por exemplo, e dizer que  $f$  é diferenciável em  $p$  se a sua expressão em coordenadas  $u, v$  possuir derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

Porém, um ponto  $p$  de  $S$  pode pertencer a várias vizinhanças coordenadas. Além disso, outros sistemas de coordenadas poderiam ter sido utilizados em uma vizinhança de  $p$ . Logo, para que a definição faça sentido, é necessário que ela não dependa do sistema de coordenadas escolhido, ou seja, precisa-se mostrar que quando um ponto pertence a duas vizinhanças coordenadas, com parâmetros  $(u, v)$  e  $(\xi, \eta)$ , é possível passar de um desses pares de coordenadas ao outro através de uma aplicação diferenciável.

A próxima proposição mostra que isso de fato acontece

**Proposição 2.1.5** (Mudança de Parâmetros). *Seja  $p$  um ponto de uma superfície regular  $S$ , e sejam  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e  $y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  duas parametrizações de  $S$ , tais que  $p \in x(U) \cap y(V) = W$ . Então a "mudança" de coordenadas  $h = x^{-1} \circ y : y^{-1}(W) \rightarrow x^{-1}(W)$  (Fig.10) é um difeomorfismo; isto é,  $h$  é diferenciável e tem uma inversa diferenciável  $h^{-1}$ .*

Em outras palavras, se  $x$  e  $y$  são dadas por

$$\begin{aligned} x(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), & (u, v) \in U, \\ y(\xi, \eta) &= (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)), & (\xi, \eta) \in V, \end{aligned}$$

então a mudança de coordenadas  $h$ , dada por

$$u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in y^{-1}(W),$$

é tal que as funções  $u$  e  $v$  têm derivadas contínuas de todas as ordens. Além disso, a

aplicação  $h$  possui inversa e tal inversa é dada por

$$\xi = \xi(u, v), \quad \eta = \eta(u, v), \quad (u, v) \in x^{-1}(W),$$

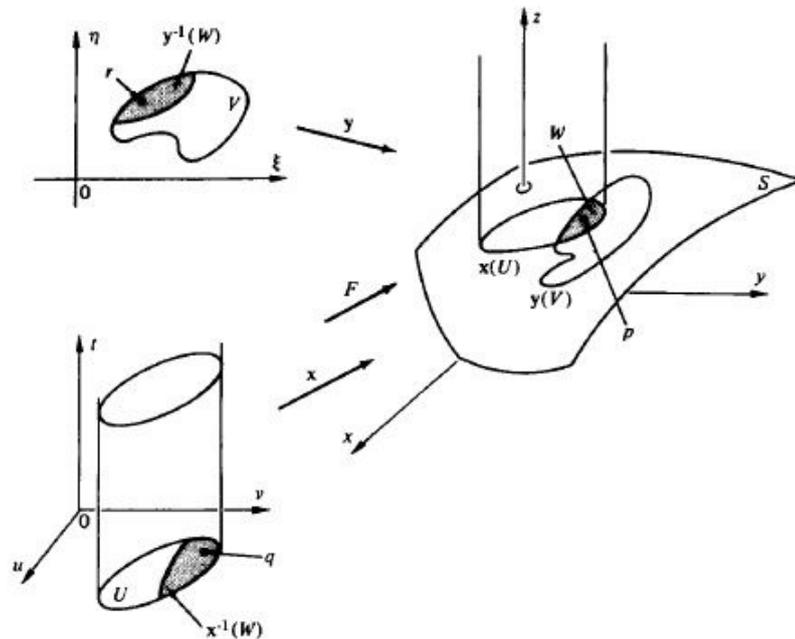
onde as funções  $\xi$  e  $\eta$  também possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Como  $h \circ h^{-1} = \text{Id}$  (Id aplicação identidade) então, aplicando a regra da cadeia, temos  $d(\text{Id})_r = d(h \circ h^{-1})_r = dh_{h^{-1}(r)} \circ dh_r^{-1}$  para todo  $r \in x^{-1}(W)$ . Assim

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} = 1,$$

isto implica que os determinantes dos Jacobianos, tanto de  $h$  com de  $h^{-1}$ , são diferentes de zero em todos os pontos.

**Demonstração da Prop. 2.1.5:** A aplicação  $h = x^{-1} \circ y$ , por se tratar de composição

Figura 10 – Mudança de parâmetros.



Fonte: [Carmo 2005] .

de homeomorfismos também é um homeomorfismo. Mas não podemos concluir, por um argumento análogo, que  $h$  é diferenciável, pois  $x^{-1}$  está definida em um subconjunto aberto de  $S$ , e não sabemos ainda o que vem a ser uma função diferenciável definida em  $S$ .

Procedemos da seguinte maneira. Seja  $r \in y^{-1}(W)$  e defina  $q = h(r)$ . Como  $x(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  é uma parametrização, podemos supor, renomeando os eixos caso necessário, que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Estendendo  $x$  a uma aplicação  $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t) \quad (u, v) \in U, t \in \mathbb{R}.$$

Geometricamente,  $F$  aplica um cilindro vertical  $C$  sobre  $U$  em um "cilindro vertical" sobre  $x(U)$ , levando cada seção de  $C$  com altura  $t$  na superfície  $x(u, v) + te_3$ , onde  $e_3$  é o vetor canônico do eixo  $Oz$  (Fig. 10).

Claramente  $F$  é diferenciável e sua restrição  $F|_{U \times 0} = x$ . Calculando o determinante da diferencial  $dF_p$ , obtemos

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Aplicando o teorema da função inversa para função  $F$ , obtemos uma vizinhança  $M$  de  $x(q)$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $F^{-1}$  existe e é diferenciável em  $M$ .

Pela continuidade de  $y$ , existe uma vizinhança  $N$  de  $r$  em  $V$  tal que  $y(N) \subset M$ . Observe que, restrita a  $N$ ,  $h|_N = F^{-1} \circ y|_N$  é a composição de aplicações diferenciáveis. Aplicando a regra da cadeia para aplicações concluímos que  $h$  é diferenciável em  $r$ . Como  $r$  é arbitrário,  $h$  é diferenciável em  $y^{-1}(W)$ .

Aplicando exatamente o mesmo argumento, conclui-se que  $h^{-1}$  é diferenciável, e portanto  $h$  é um difeomorfismo. ■

**Definição 2.1.3.** *Seja  $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, definida em um subconjunto aberto  $V$  de uma superfície regular  $S$ . Então  $f$  é diferenciável em  $p \in V$  se, para alguma parametrização  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , com  $p \in x(U) \subset V$ , a composição  $f \circ x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $x^{-1}(p)$ . A função é diferenciável em  $V$  se é diferenciável em todos os pontos de  $V$ .*

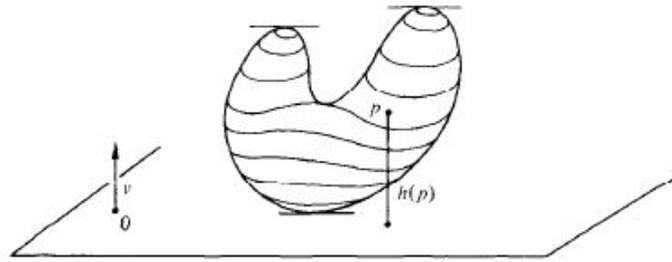
Devido a proposição 2.1.5, a definição 2.1.3 não depende da escolha da parametrização  $x$ . De fato, se  $y : W \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  é uma outra parametrização, com  $p \in y(W)$ , e se  $h = x^{-1} \circ y$ , então  $f \circ y = f \circ x \circ h$  também é diferenciável. Segue-se então a independência afirmada.

**Observação 2.1.2.** É comum o abuso de notação ao indicar  $f$  e  $f \circ x$  pelo mesmo símbolo  $f(u, v)$  e é dito que  $f(u, v)$  é a *expressão* de  $f$  no sistema de coordenadas  $x$ . Isso é equivalente a identificar  $x(U)$  com  $U$ , e pensar em  $(u, v)$ , indiferentemente, como um ponto de  $U$  e como um ponto de  $x(U)$  com coordenadas  $(u, v)$ .

**Exemplo 2.1.7.** Seja  $S$  uma superfície regular e  $V \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto aberto tal que  $S \subset V$ . Seja  $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Então a restrição de  $f$  a  $S$  é uma função diferenciável sobre  $S$ . De fato,, para qualquer  $p \in S$  e qualquer parametrização  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  em  $p$ , a função  $f \circ x : U \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável. Em particular, temos os seguintes exemplos de funções diferenciáveis:

1. A **função altura** relativa a um vetor unitário  $v \in \mathbb{R}^3$ ,  $h : S \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h(p) = p \cdot v$ ,  $p \in S$ , onde o ponto denota o produto interno usual em  $\mathbb{R}^3$ .  $h(p)$  é a altura de  $p \in S$  relativa a um plano normal a  $v$  e passando pela origem de  $\mathbb{R}^3$  (Fig. 11)

Figura 11 – Função altura relativa a um vetor unitário.



Fonte: [Carmo 2005] .

2. O quadrado da distância a um ponto fixo  $p_0 \in \mathbb{R}^3$ ,  $f(p) = |p - p_0|^2$ ,  $p \in S$ . A necessidade de considerar o quadrado vem do fato da distância  $|p - p_0|$  não ser diferenciável em  $p = p_0$

A definição de diferenciabilidade pode ser estendida a aplicações entre superfícies.

**Definição 2.1.4.** Dizemos que uma aplicação contínua  $\varphi : V_1 \subset S_1 \rightarrow S_2$ , de um conjunto aberto  $V_1$  de uma superfície regular  $S_1$  em uma superfície regular  $S_2$ , é diferenciável em  $p \in V_1$  se, dadas parametrizações

$$x_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1, \quad x_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2,$$

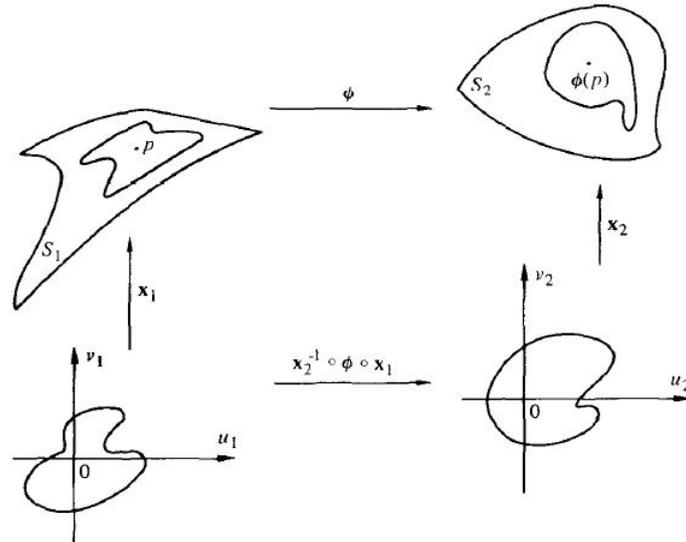
com  $p \in x_1(U_1)$  e  $\varphi(x_1(U_1)) \subset x_2(U_2)$ , a aplicação

$$x_2^{-1} \circ \varphi \circ x_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

é diferenciável em  $q = x^{-1}(p)$  (Fig. 12)

Em outras palavras,  $\varphi$  é diferenciável se, quando expressa em coordenadas locais como  $\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$ , as funções  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

Figura 12 – Aplicação diferenciável em coordenadas locais



Fonte: [Carmo 2005] .

A Definição 2.2.1 também não depende da escolha de uma parametrização. De fato, se  $y_1 : V_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$  é uma outra parametrização de  $S_1$  e  $y_2 : V_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$  uma outra parametrização de  $S_2$ , com  $p \in y_1(V_1)$  e  $\phi(y_1(V_1)) \subset y_2(V_2)$  então  $h_1 = x_1^{-1} \circ y_1$  e  $h_2 = x_2^{-1} \circ y_2$  são difeomorfismos. Logo  $y_2^{-1} \circ \phi \circ y_1 = h_2^{-1} \circ x_2^{-1} \circ \phi \circ x_1 \circ h_1$  é também diferenciável.

Duas superfícies regulares  $S_1$  e  $S_2$  são difeomorfas se existe uma aplicação diferenciável  $\phi : S_1 \rightarrow S_2$  com uma inversa diferenciável  $\phi^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$ . Uma tal  $\phi$  é chamada um difeomorfismo de  $S_1$  em  $S_2$ . A noção de difeomorfismo desempenha para superfícies regulares o mesmo papel que a noção de isomorfismo para os espaços vetoriais; ou o mesmo papel que a noção de congruência para geometria Euclidiana. Em outras palavras, do ponto de vista de diferenciabilidade, duas superfícies difeomorfas são indistinguíveis.

**Exemplo 2.1.8.** Se  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  é uma parametrização,  $x^{-1} : x(U) \rightarrow \mathbb{R}^2$  é diferenciável. De fato, para qualquer  $p \in x(U)$  e qualquer parametrização  $y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  em  $p$ , temos que  $x^{-1} \circ y : y^{-1}(W) \rightarrow x^{-1}(W)$ , onde

$$W = x(U) \cap y(V),$$

é diferenciável. Isso mostra que  $U$  e  $x(U)$  são difeomorfos, ou seja, **toda superfície regular é localmente difeomorfa a um plano.**

**Exemplo 2.1.9.** Sejam  $S_1$  e  $S_2$  superfícies regulares. Suponha que  $S_1 \subset V \subset \mathbb{R}^3$ , onde  $V$  é um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^3$ , e que  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  seja uma função diferenciável tal que  $\varphi(S_1) \subset S_2$ . Então a restrição  $\varphi|_{S_1} : S_1 \rightarrow S_2$  é uma aplicação diferenciável. De

fato, dado  $p \in S_1$  e parametrizações  $x_1 : U_1 \rightarrow S_1$ ,  $x_2 : U_2 \rightarrow S_2$ , com  $p \in x_1(U_1)$  e  $\varphi(x_1(U_1)) \subset x_2(U_2)$ , temos que a aplicação

$$x_2^{-1} \circ \varphi \circ x_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

é diferenciável. Em particular, temos os seguintes casos deste exemplo geral:

1. Seja  $S$  simétrica em relação ao plano  $xy$ ; isto é, se  $(x, y, z) \in S$ , então  $(x, y, -z) \in S$ . A aplicação  $\sigma : S \rightarrow S$  que leva  $p \in S$  no ponto simétrico, é diferenciável. Com efeito,  $\sigma$  é a restrição a  $S$  da função diferenciável  $\Sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\Sigma(x, y, z) = (x, y, -z)$ . Tal fato, pode ser generalizado para superfícies simétricas em relação a um plano qualquer de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Sejam  $R_{z,\theta} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a rotação de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $Oz$ , e  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície invariante por essa rotação, isto é, se  $p \in S$ ,  $R_{z,\theta}(p) \in S$ . Então a restrição  $R_{z,\theta} : S \rightarrow S$  é uma aplicação diferenciável.
3. Seja  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\varphi(x, y, z) = (xa, yb, zc)$ , onde  $a, b$ , e  $c$  são números reais diferentes de zero. Claramente  $\varphi$  é diferenciável, e a restrição  $\varphi | S^2$  é uma aplicação diferenciável da esfera

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

sobre o elipsóide

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

Uma *curva regular* em  $\mathbb{R}^3$  é um subconjunto  $C \subset \mathbb{R}^3$  com a seguinte propriedade: Para cada ponto  $p \in C$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e um homeomorfismo  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow V \cap C$  ( $I$  intervalo aberto) tal que a diferencial  $d\alpha_t$  é injetiva para cada  $t \in I$ . No próximo exemplo apresentamos uma superfície regular determinada pelo deslocamento de uma certa curva regular.

**Exemplo 2.1.10** (Superfícies de Revolução.). Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  o conjunto obtido ao girarmos uma curva regular plana  $C$  em torno de um eixo no plano que não encontra a curva; vamos considerar o plano  $xz$  como o plano da curva e o eixo  $Oz$  como o eixo de rotação. Seja

$$x = f(v), \quad z = g(v), \quad a < v < b, \quad f(v) > 0,$$

uma parametrização para  $C$  e denote por  $u$  o ângulo de rotação em torno do eixo  $Oz$ . Assim, obtemos a aplicação

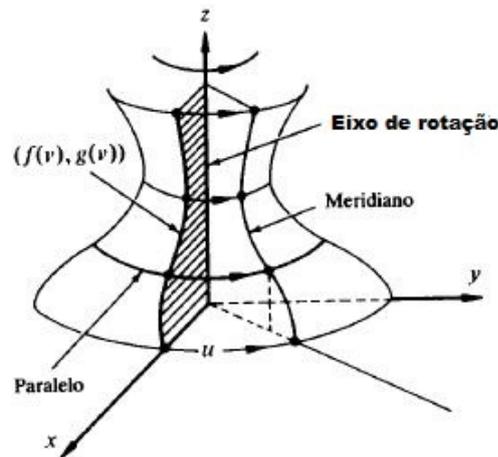
$$x(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$$

do conjunto aberto  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$  em  $S$  (Fig. 13). Se mostrarmos que  $x$  satisfaz as condições para uma parametrização da Definição 2.1.1, mostraremos que  $S$  é uma superfície regular (chamada de *superfície de revolução*), pois  $S$  pode ser inteiramente coberta por parametrizações similares. A curva  $C$  é chamada *curva geratriz* de  $S$ , e o eixo  $Oz$  é o *eixo de rotação* de  $S$ . Os círculos descritos pelos pontos de  $C$  são chamados *paralelos* de  $S$ , e as várias posições de  $C$  sobre  $S$  são chamados *meridianos* de  $S$ .

Para mostrar  $x$  é uma parametrização de  $S$  precisamos verificar as três condições da Def. 2.1.1. As condições 1 e 3 não apresentam dificuldades, e a verificação é feita por simples cálculos. Para mostrar que  $x$  é um homeomorfismo, mostraremos primeiro que  $x$  é injetiva. De fato, como  $(f(v), g(v))$  é uma parametrização de  $C$ , dados  $z = g(v)$  e  $x^2 + y^2 = (f(v))^2$ , podemos determinar  $v$  de maneira única. Segue-se que  $x$  é injetiva.

Observamos que, novamente por  $(f(v), g(v))$  ser parametrização de  $C$ ,  $v$  é uma função contínua de  $z$  e de  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , e conseqüentemente, uma função contínua de  $(x, y, z)$ .

Figura 13 – Uma superfície de revolução



Fonte: [Carmo 2005] .

Para provar que  $x^{-1}$  é contínua, basta mostrar que  $u$  é uma função contínua de  $(x, y, z)$ . Para isso, observamos primeiro que se  $u \neq \pi$ , obtemos, já que  $f(v) \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{u}{2} &= \frac{\operatorname{sen} \frac{u}{2}}{\cos \frac{u}{2}} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}}{2 \cos^2 \frac{u}{2}} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u} \\ &= \frac{\frac{y}{f(v)}}{1 + \frac{x}{f(v)}} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}; \end{aligned}$$

daí,

$$u = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Assim, se  $u \neq \pi$ ,  $u$  é uma função contínua de  $(x, y, z)$ . Pelo mesmo argumento, se  $u$  está em um pequeno intervalo em torno de  $\pi$ , obtemos que

$$u = 2 \operatorname{arc\,cotg} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Portanto,  $u$  é uma função contínua de  $(x, y, z)$ . Isso mostra que  $x^{-1}$  é contínua e portanto uma parametrização.

Mostraremos, com a próxima proposição, que a condição 3 na definição de uma superfície regular  $S$  garante que, para cada  $p \in S$ , o conjunto de vetores tangentes às curvas parametrizadas de  $S$ , passando por  $p$ , constituem um plano, onde entendemos por *vetor tangente* a  $S$ , em um ponto  $p$ , o vetor tangente  $\alpha'(0)$  de uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ , com  $\alpha(0) = p$ .

**Proposição 2.1.6.** *Seja  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de uma superfície regular  $S$  e seja  $q \in U$ . O subespaço vetorial de dimensão 2,*

$$dx_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

*coincide com o conjunto de vetores tangentes a  $S$  em  $x(q)$ .*

**Demonstração:** Seja  $w$  um vetor tangente em  $x(q)$ , isto é, seja  $w = \alpha'(0)$ , onde  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow x(U) \subset S$  é diferenciável e  $\alpha(0) = x(q)$ . Pelo Exemplo 2.1.8, a curva  $\beta = x^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  é diferenciável. Pela definição de diferencial, temos  $dx_q(\beta'(0)) = w$ . Logo  $w \in dx_q(\mathbb{R}^2)$  (Fig.14).

Por outro lado, seja  $w = x$ , onde  $v \in \mathbb{R}^2$ . É claro que  $v$ , é o vetor velocidade da curva  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  dada por

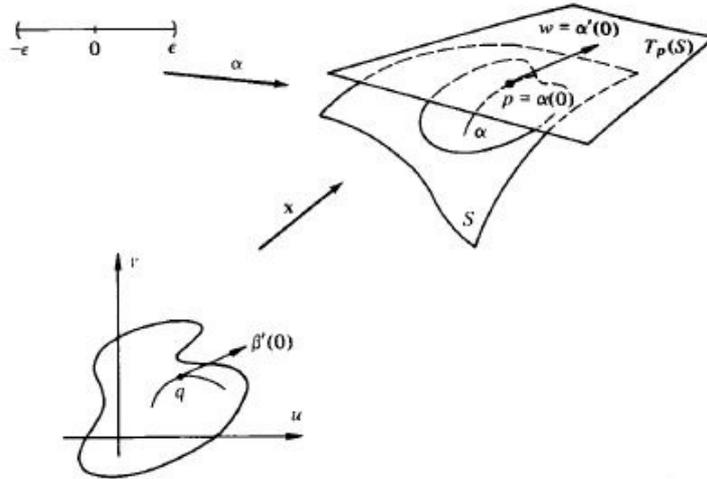
$$\gamma(t) = tv + q, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Novamente pela definição de diferencial,  $w = \alpha'(0)$ , onde  $\alpha = x \circ \gamma$ . Com isso, concluímos que  $w$  é um vetor tangente. ■

Pela Proposição 2.1.6, o plano  $dx_q(\mathbb{R}^2)$ , que passa por  $x(q) = p$ , não depende da parametrização  $x$ . Este plano será chamado de *plano tangente* a  $S$  em  $p$ , e será denotado por  $T_p S$ . A escolha de uma parametrização  $x$  determina uma base  $\{\partial x / \partial u(q), \partial x / \partial v(q)\}$

de  $T_p S$ , chamada *base associada* a  $x$ . Convém, às vezes, escrever  $\partial x / \partial u = x_u$  e  $\partial x / \partial v = x_v$ .

Figura 14 – Plano tangente a superfície



Fonte: [Carmo 2005].

As coordenadas de um vetor  $w \in T_p S$  na base associada a uma parametrização  $x$  são determinadas do seguinte modo:  $w$  é o vetor velocidade  $\alpha'(0)$  de uma curva  $\alpha = x \circ \beta$ , onde  $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  é dada por  $\beta(t) = (u(t), v(t))$ , com  $\beta(0) = q = x^{-1}(p)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \frac{d}{dt}(x \circ \beta)(0) = \frac{d}{dt}x(u(t), v(t))(0) \\ &= x_u(q)u'(0) + x_v(q)v'(0) = w. \end{aligned}$$

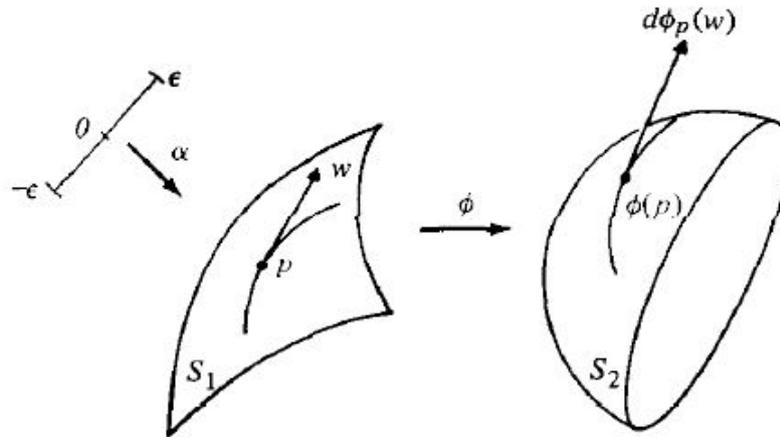
Logo, na base  $\{x_u(q), x_v(q)\}$ ,  $w$  tem coordenadas  $(u'(0), v'(0))$ , onde  $(u(t), v(t))$  é a expressão, na parametrização  $x$ , de uma curva cujo vetor velocidade em  $t = 0$  é  $w$ .

Tendo em mãos a noção de plano tangente, podemos discutir a diferencial de uma aplicação diferenciável entre superfícies. Sejam  $S_1$  e  $S_2$  duas superfícies regulares e seja  $\varphi : V \subset S_1 \rightarrow S_2$  uma aplicação diferenciável de um conjunto aberto  $V$  de  $S_1$  em  $S_2$ . Se  $p \in V$ , sabemos que todo vetor tangente  $w \in T_p S_1$  é o vetor velocidade  $\alpha'(0)$  de uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V$  com  $\alpha(0) = p$ . A curva  $\beta = \varphi \circ \alpha$  é tal que  $\beta(0) = \varphi(p)$ , e assim  $\beta'(0)$  é um vetor de  $T_{\varphi(p)} S_2$  (Fig. 15).

**Proposição 2.1.7.** *Na discussão acima, dado  $w$ , o vetor  $\beta'(0)$  não depende da escolha de  $\alpha$ . A aplicação  $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$  definida por  $d\varphi_p(w) = \beta'(0)$  é linear.*

**Demonstração:** Sejam  $x(u, v)$  e  $\bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$  parametrizações em vizinhanças de  $p$  e  $\varphi(p)$ ,

Figura 15 – Diferencial de uma aplicação entre superfícies



Fonte: [Carmo 2005].

respectivamente. Suponha que  $\varphi$  seja expressa nestas coordenadas por

$$\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$$

e que  $\alpha$  seja expressa por

$$\alpha(t) = (u(t), v(t)), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Então  $\beta(t) = (\varphi_1(u(t), v(t)), \varphi_2(u(t), v(t)))$ , e a expressão de  $\beta'(0)$  na base  $\{\bar{x}u, \bar{x}v\}$  é

$$\beta'(0) = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} v'(0), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} v'(0) \right).$$

A relação acima mostra que  $\beta'(0)$  depende apenas da aplicação  $\varphi$  e das coordenadas  $(u'(0), v'(0))$  de  $w$  na base  $\{x_u, x_v\}$ . Assim,  $\beta'(0)$  é independente de  $\alpha$ . Além disso, a mesma relação mostra que

$$\beta'(0) = d\varphi_p(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix};$$

ou seja,  $d\varphi_p$  é uma aplicação linear de  $T_p S_1$  em  $T_{\varphi(p)} S_2$ , cuja matriz nas bases  $\{x_u, x_v\}$  de  $T_p S_1$  e  $\{\bar{x}u, \bar{x}v\}$  de  $T_{\varphi(p)} S_2$  é justamente a matriz acima. ■

A aplicação linear  $d\varphi_p$  definida pela Prop. 2.1.7 é chamada diferencial de  $\varphi$  em  $p \in S_1$ . De modo análogo, definimos a diferencial de uma função diferenciável  $f : U \subset S \rightarrow \mathbb{R}$  em  $p \in U$  como aplicação linear  $df_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.1.11.** Seja  $v \in \mathbb{R}^3$  um vetor unitário e seja  $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(p) = v \cdot p$ ,  $p \in S$  a

função altura do Exemplo 2.1.7. Para calcular  $dh_p(w)$ , onde  $w \in T_p S$ , escolha uma curva diferenciável  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  com  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = w$ . Como  $h(\alpha(t)) = \alpha(t) \cdot v$ , obtemos

$$dh_p(w) = \left. \frac{d}{dt} h(\alpha(t)) \right|_{t=0} = \alpha'(0) \cdot v = w \cdot v.$$

**Exemplo 2.1.12.** Seja  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  a esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

e seja  $R_{z,\theta} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a rotação de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $Oz$ . Então  $R_{z,\theta}$  restrita a  $S^2$  é uma aplicação diferenciável de  $S^2$  (veja Exemplo 2.1.9). Iremos calcular  $(dR_{z,\theta})_p(w)$ ,  $p \in S^2$ ,  $w \in T_p S^2$ . Seja  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S^2$  uma curva diferenciável com  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = w$ . Então, como  $R_{z,\theta}$  é linear,

$$(dR_{z,\theta})_p(w) = \left. \frac{d}{dt} (R_{z,\theta} \circ \alpha(t)) \right|_{t=0} = R_{z,\theta}(\alpha'(0)) = R_{z,\theta}(w).$$

Observe que  $R_{z,\theta}$  deixa o polo norte  $N = (0, 0, 1)$  fixo, e que  $(dR_{z,\theta})_N : T_N S^2 \rightarrow T_N S^2$  é justamente a rotação de um ângulo  $\theta$  no plano  $T_N S^2$ .

Diremos que uma aplicação  $\varphi : U \subset S_1 \rightarrow S_2$  é um *difeomorfismo local* em  $p \in U$  se existe uma vizinhança  $V \subset U$  de  $p$  tal que  $\varphi$  restrita a  $V$  seja um difeomorfismo sobre o conjunto aberto  $\varphi(V) \subset S_2$ . Nestas condições, temos a versão do teorema da função inversa para superfícies e é expressa pela próxima proposição.

**Proposição 2.1.8.** *Se  $S_1$  e  $S_2$  são superfícies regulares e  $\varphi : U \subset S_1 \rightarrow S_2$  é uma aplicação diferenciável de um conjunto aberto  $U \subset S_1$  tal que a diferencial,  $d\varphi_p$ , de  $p \in U$  é um isomorfismo, então  $\varphi$  é um difeomorfismo local em  $p$*

**Demonstração:** Dadas parametrizações

$$x_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1, \quad x_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$$

com  $p \in x_1(U_1)$  e  $\varphi(x_1(U_1)) \subset x_2(U_2)$ , a aplicação

$$x_2^{-1} \circ \varphi \circ x_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^2$$

é diferenciável em  $q$  e sua diferencial  $d(x_2^{-1} \circ \varphi \circ x_1)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $q = x_1^{-1}(p)$ , é um isomorfismo, pois a diferencial  $d\varphi_p$  é isomorfismo e as diferenciais  $d(x_1)_q$  e  $d(x_2^{-1})_{\varphi(p)}$  também são isomorfismos pelo fato de  $S_1$  e  $S_2$  serem superfícies regulares. Assim, pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança  $V$  de  $q$  em  $U_1$  e uma vizinhança  $W$  de

$x_2^{-1} \circ \varphi \circ x_1(q)$  em  $\mathbb{R}^2$  tal que  $x_2^{-1} \circ \varphi \circ x_1 : V \rightarrow W$  é difeomorfismo. Portanto  $\varphi$  é um difeomorfismo local em  $p$ . ■

## 2.2 Superfícies orientáveis em $\mathbb{R}^3$

Nesta seção vamos discutir a noção de orientação em uma superfície e quando é possível orientar uma superfície. Intuitivamente, como cada ponto  $P$  de uma superfície regular  $S$  tem um plano tangente  $T_pS$ , a escolha de uma orientação de  $T_pS$  induz uma orientação em uma vizinhança de  $p$ , ou seja, a noção de movimento positivo ao longo de curvas fechadas suficientemente pequenas em torno de cada ponto da vizinhança (Fig. 16). Caso seja possível fazer essa escolha para cada ponto  $p \in S$  de forma que na interseção de quaisquer duas vizinhanças coordenadas as orientações coincidam, então dizemos que  $S$  é orientável. Caso contrário, dizemos que  $S$  é não orientável.

Fixada uma parametrização  $x(u, v)$  de uma vizinhança de um ponto  $p$  de uma superfície regular  $S$ , determinamos uma orientação do plano  $T_pS$ , a compreender, a orientação associada à base ordenada  $\{x_u, x_v\}$ . Se  $p$  pertence a uma vizinhança coordenada de uma outra parametrização  $\bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$ , a nova base  $\{\bar{x}_{\bar{u}}, \bar{x}_{\bar{v}}\}$  é expressa em termos da primeira por (ver Prop. 2.1.5)

$$\begin{aligned}\bar{x}_{\bar{u}} &= x_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + x_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \\ \bar{x}_{\bar{v}} &= x_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + x_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}},\end{aligned}$$

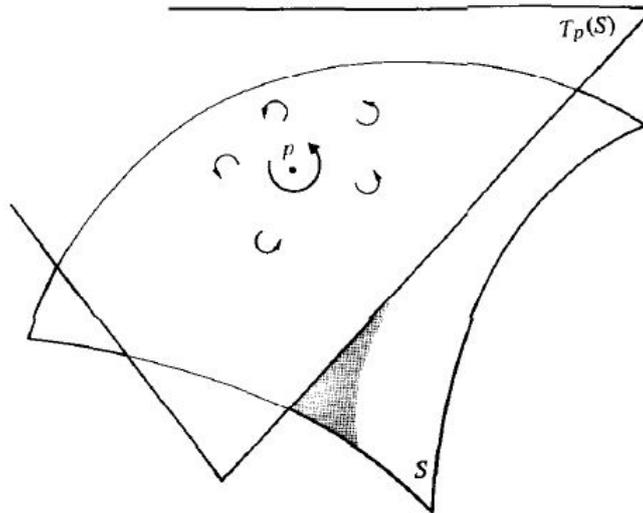
onde  $u = u(\bar{u}, \bar{v})$  e  $v = v(\bar{u}, \bar{v})$  são expressões de mudança de coordenadas. As bases  $\{x_u, x_v\}$  e  $\{\bar{x}_{\bar{u}}, \bar{x}_{\bar{v}}\}$  determinam, portanto, a mesma orientação de  $T_pS$  se e somente se o Jacobiano

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$$

da mudança de coordenadas é positivo.

**Definição 2.2.1.** *Uma superfície regular  $S$  é orientável se for possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto  $p \in S$  pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo em  $p$ . A escolha de uma tal família é chamada uma orientação de  $S$ , e neste caso,  $S$  é dita orientada. Se uma tal escolha não é possível, a superfície é não orientável. Se  $S$  é orientada, uma parametrização (local)  $x$  é compatível com a orientação de  $S$  se, adicionando  $x$  à família de parametrizações dada pela orientação, obtem-se ainda uma (logo, a mesma) orientação de  $S$ .*

Figura 16 – Movimento positivo de curvas fechadas



Fonte: [Carmo 2005] .

**Exemplo 2.2.1.** Todo subconjunto aberto  $U$  de uma superfície orientável  $S$  é uma superfície orientável. De fato, se  $S$  é orientável então é possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, com o jacobiano da mudança de coordenadas entre duas vizinhanças sendo positivo. A restrição de uma tal família a  $U$  nos daria uma família daria uma família de vizinhanças coordenadas cobrindo  $U$  (superfície regular) com jacobiano de mudança de coordenadas entre duas vizinhanças ainda positivo, logo  $U$  é superfície orientável.

**Exemplo 2.2.2.** Uma superfície que é um gráfico de uma função diferenciável (confira Prop. 2.1.1) é uma superfície orientável. De fato, todas as superfícies que podem ser cobertas por uma única vizinhança coordenada são, trivialmente, orientáveis.

**Observação 2.2.1.** Se uma superfície regular pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas, cuja interseção é conexa então a superfície é orientável. De fato, se a superfície pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas com parâmetros  $(u, v)$  e  $(\bar{u}, \bar{v})$ , de tal modo que a interseção  $W$  dessas vizinhanças seja um conjunto conexo. Fixe um ponto  $p \in W$ . Se o Jacobiano da mudança de coordenadas em  $p$  for negativo, trocamos  $u$  e  $v$  no primeiro sistema, e assim obtemos o Jacobiano positivo. Como o Jacobiano é diferente de zero em  $W$  e positivo em  $p \in W$ , segue-se do fato de  $W$  ser conexa que dado qualquer ponto  $q \in W$  existe curva contínua  $\alpha : [a, b] \rightarrow W$  com  $\alpha(a) = p$  e  $\alpha(b) = q$ . Se o Jacobiano for negativo em  $q$ , aplicando o teorema do valor intermediário para composição do Jacobiano com a curva  $\alpha$ , obteríamos um  $c \in (a, b)$  tal que o Jacobiano da mudança de coordenadas no ponto  $\alpha(c)$  seria zero, o que é um absurdo.

**Proposição 2.2.1.** *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  superfícies difeomorfas.  $S_1$  é orientável se, e somente se,  $S_2$  é orientável.*

**Demonstração:** Seja  $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$  um difeomorfismo então, para toda parametrização  $x : U \rightarrow V \subset S_1$  em  $S_1$ , a composição  $\varphi \circ x : U \rightarrow \varphi(V) \subset S_2$  é uma parametrização de  $S_2$ . As parametrizações do tipo  $\varphi \circ x$  constituem uma família de vizinhanças coordenadas para  $S_2$  e, como  $(\varphi \circ y)^{-1} \circ (\varphi \circ x) = y^{-1} \circ x$ , vemos que se  $x$  e  $y$  são duas vizinhanças coordenadas de uma orientação de  $S_1$  então as compostas  $\varphi \circ x$  constituem uma orientação para  $S_2$ . Logo,  $S_1$  orientável implica  $S_2$  orientável. Para recíproca, basta utilizar  $\varphi^{-1}$ . ■

Antes de apresentarmos um exemplo de superfície não orientável, exibiremos uma interpretação geométrica da ideia de orientabilidade de uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ .

Dado um sistema de coordenadas  $x(u, v)$  em  $p$ , fica determinada a escolha de um vetor normal unitário  $N$  em  $p$ , a saber,

$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|}(p). \quad (1)$$

Escolhendo um outro sistema de coordenadas locais  $\bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$  em  $p$ , vemos que

$$\bar{x}_{\bar{u}} \wedge \bar{x}_{\bar{v}} = (x_u \wedge x_v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}, \quad (2)$$

onde  $\partial(u, v)/\partial(\bar{u}, \bar{v})$  é o Jacobiano da mudança de coordenadas. Portanto,  $N$  conserva ou muda de sinal, conforme  $\partial(u, v)/\partial(\bar{u}, \bar{v})$  seja positivo ou negativo, respectivamente.

Convém chamar de *campo diferenciável de vetores normais* em um aberto  $U \subset S$  a uma aplicação diferenciável  $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  que associa a cada  $q \in U$  um vetor normal unitário  $N(q) \in \mathbb{R}^3$  a  $S$  em  $q$ .

**Proposição 2.2.2.** *Uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  é orientável se e somente se existe um campo diferenciável  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  de vetores normais em  $S$ .*

**Demonstração:** Se  $S$  é orientável, podemos cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas de tal modo que, na interseção de duas quaisquer delas, o Jacobiano da mudança de coordenadas é positivo. Nos pontos  $p = x(u, v)$  de cada vizinhança coordenada, definimos  $N(p) = N(u, v)$  pela Eq. (1).  $N(p)$  está bem definido, pois se  $p$  pertence a duas vizinhanças coordenadas, com parâmetros  $(u, v)$  e  $(\bar{u}, \bar{v})$ , os vetores normais  $N(u, v)$  e  $N(\bar{u}, \bar{v})$  coincidem pela Eq. (2). Além disso, pela Eq. (1), as coordenadas de  $N(u, v)$  em  $\mathbb{R}^3$  são funções diferenciáveis de  $(u, v)$ , pois  $x$  é uma parametrização de  $S$ , e portanto,

a aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  é diferenciável.

Por outro lado, seja  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo diferenciável de vetores normais em  $S$ , e considere uma família de vizinhanças coordenadas **conexas** (isto é possível pelo fato de toda superfície regular ser difeomorfa a um plano) cobrindo  $S$ . Para os pontos  $p = x(u, v)$  de cada vizinhança coordenada  $x(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$ , é possível, pela continuidade de  $N$  e, se necessário, fazer a troca entre  $u$  e  $v$ , que

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}.$$

Com efeito, o produto interno

$$\left\langle N(p), \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} \right\rangle = f(p) = \pm 1$$

é uma função contínua em  $x(U)$ . Como  $x(U)$  é conexo, pelo teorema do valor intermediário,  $f$  é constante. Então  $f \equiv 1$  ou  $f \equiv -1$  em  $x(U)$ . Caso  $f = 1$ , temos o resultado. Caso contrário, trocamos as coordenadas  $u$  e  $v$  na parametrização, obtendo assim o afirmado.

Procedendo desse modo com todas as vizinhanças coordenadas, teremos na interseção de duas quaisquer delas, digamos,  $x(u, v)$  e  $\bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$ , o Jacobiano

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$$

com certeza positivo; caso contrário, teríamos

$$\frac{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}}{|\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}|} = N(p) = -\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} = -N(p),$$

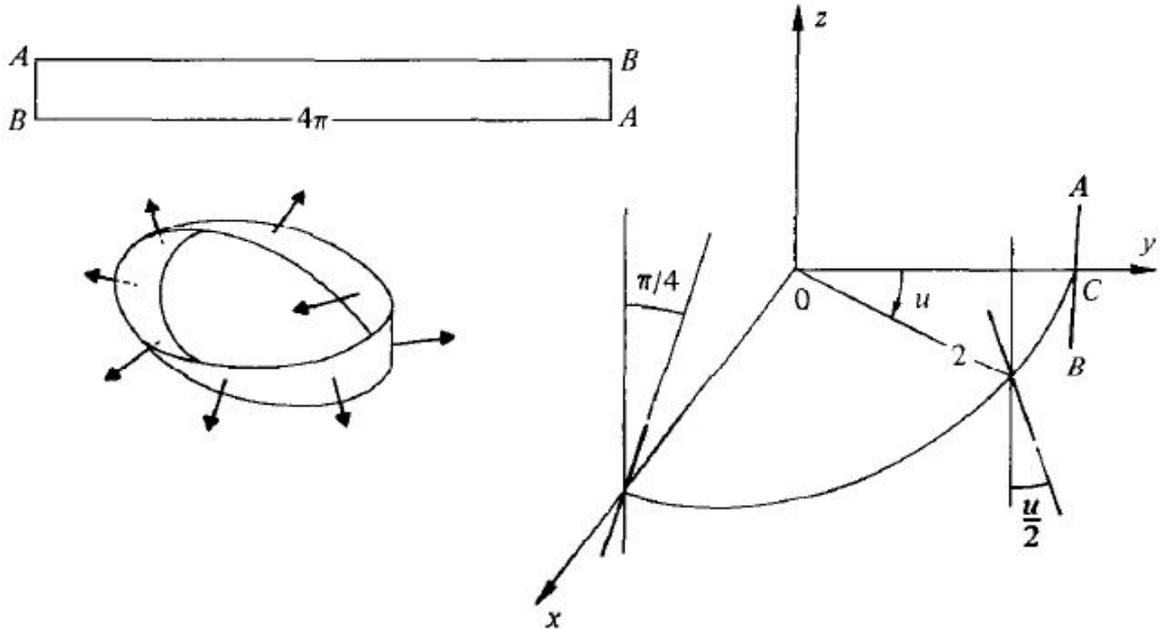
o que é uma contradição. Concluimos então, que dada uma família de vizinhanças coordenadas, com eventuais trocas entre  $u$  e  $v$ , satisfaz às condições da Def. 2.2.1, e portanto  $S$  é orientável. ■

**Observação 2.2.2.** A demonstração da Prop. 2.2.2 mostra que, para  $S$  ser orientável, precisamos apenas supor a existência de um campo de vetores normais unitários *contínuo* em  $S$ . Um tal campo de vetores será automaticamente diferenciável.

**Exemplo 2.2.3.** Descreveremos agora um exemplo de uma superfície não orientável, a chamada **faixa de Möbius**. Essa superfície é obtida (ver Fig.17) considerando o círculo  $S^1$  dado por  $x^2 + y^2 = 4$  e o segmento aberto  $AB$  dado no plano  $yz$  por  $y = 2$ ,  $|z| < 1$ .

Deslocamos o centro  $c$  de  $AB$  ao longo de  $S^1$ , e giramos  $AB$  em torno de  $c$ , no plano formado por  $Oz$  e  $c$ , de tal forma que quando  $c$  descreve um ângulo  $u$ ,  $AB$  tenha girado  $u/2$ . Quando  $c$  completa uma volta ao longo de  $S^1$ ,  $AB$  retorna à sua posição inicial, com os pontos extremos invertidos.

Figura 17 – Construção da faixa de Möbius



Fonte: [Carmo 2005] .

Do ponto de vista da diferenciabilidade, é como se tivéssemos identificando os lados opostos (verticais) de retângulo, dando uma torção no retângulo, de modo a identificar cada ponto do lado  $AB$  com seu simétrico do lado correspondente (Fig. 16).

Geometricamente é evidente que a faixa de Möbius  $M$  é uma superfície regular não orientável. De fato, se  $M$  fosse orientável, existiria um campo diferenciável  $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  de vetores normais unitários. Tomando esses vetores ao longo do círculo  $x^2 + y^2 = 4$ , veremos que, depois de uma volta completa,  $N$  voltaria à sua posição inicial como  $-N$ , o que é uma contradição.

Vamos agora apresentar uma demonstração analítica sobre a não orientabilidade de  $M$ .

Um sistema de coordenadas locais para faixa de Möbius é dado por

$$x(u, v) = \left( (2 - v \sin \frac{u}{2}) \sin u, (2 - v \sin \frac{u}{2}) \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right),$$

onde  $0 < u < 2\pi$  e  $-1 < v < 1$ . A vizinhança coordenada correspondente omite os pontos do intervalo  $u = 0$ . Tomando agora  $Ox$  como a origem dos  $u$ 's, obtemos uma outra parametrização  $\bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$  dada por

$$\begin{aligned} x &= \left\{ 2 - \bar{v} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2}\right) \right\} \cos \bar{u}, \\ y &= \left\{ 2 - \bar{v} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2}\right) \right\} \operatorname{sen} \bar{u}, \\ z &= \bar{v} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2}\right), \end{aligned}$$

cuja vizinhança coordenada omite o intervalo aberto  $u = \pi/2$ . Essas duas vizinhanças coordenadas cobrem a faixa de Möbius, e mostram que ela é uma superfície regular.

Observe que a interseção das duas vizinhanças coordenadas não é conexa, mas constituída de duas componentes conexas,

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ x(u, v) : \frac{\pi}{2} < u < 2\pi \right\}, \\ W_2 &= \left\{ x(u, v) : 0 < u < \frac{\pi}{2} \right\}. \end{aligned}$$

A mudança de coordenadas é dada por

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= u - \frac{\pi}{2} \\ \bar{v} &= v \end{aligned} \right\} \text{ em } W_1,$$

e

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{3\pi}{2} + u \\ \bar{v} &= -v \end{aligned} \right\} \text{ em } W_2,$$

Segue daí que

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = 1 > 0 \quad \text{em } W_1,$$

e

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = -1 < 0 \quad \text{em } W_2,$$

Suponhamos que seja possível definir um campo diferenciável de vetores normais  $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Trocando  $u$  por  $v$  se necessário, podemos admitir que (ver demonstração da Prop. 2.2.2)

$$N(p) = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|}$$

para todo  $p$  na vizinhança coordenada de  $x(u, v)$ . Analogamente, podemos admitir que

$$N(p) = \frac{\bar{x}_{\bar{u}} \wedge \bar{x}_{\bar{v}}}{|\bar{x}_{\bar{u}} \wedge \bar{x}_{\bar{v}}|}$$

para todos os pontos da vizinhança coordenada  $\bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$ . Porém, o Jacobiano de mudança de coordenada deve ser  $-1$  em  $W_1$  ou  $W_2$  (dependendo das eventuais mudanças do tipo  $u \rightarrow v, \bar{u} \rightarrow \bar{v}$  que tenham sido feitas). Se  $p$  é um ponto dessa componente da interseção, então  $N(p) = -N(p)$ , o que é uma contradição.

Vimos no Exemplo 2.2.2 que uma superfície que é um gráfico de uma função diferenciável é uma superfície orientável. Mostraremos no próximo exemplo que uma superfície regular que é a imagem inversa de um valor regular de uma função diferenciável também é orientável.

**Proposição 2.2.3.** *Se uma superfície regular é dada por  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = a\}$ , onde  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável e  $a$  é um valor regular de  $f$ , então  $S$  é orientável.*

**Demonstração:** Dado um ponto  $(x_0, y_0, z_0) = p \in S$ , considere a curva parametrizada  $(x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in I$ , em  $S$  passando pelo ponto  $p$  em  $t = t_0$ . Como a curva está em  $S$ , temos

$$f(x(t), y(t), z(t)) = a,$$

para todo  $t \in I$ . Derivando ambos os membros desta expressão em relação a  $t$ , vemos que em  $t = t_0$

$$f_x(p) \left( \frac{dx}{dt} \right)_{t_0} + f_y(p) \left( \frac{dy}{dt} \right)_{t_0} + f_z(p) \left( \frac{dz}{dt} \right)_{t_0} = 0.$$

Isto mostra que o vetor tangente à curva em  $t = t_0$  é ortogonal ao vetor  $(f_x, f_y, f_z)$  em  $p$ . Como a curva e o ponto são arbitrários, concluímos que

$$N(x, y, z) = \left( \frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \frac{f_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} \right)$$

é um campo diferenciável de vetores unitários em  $S$ . Junto com a Prop. 2.2.2, isto implica que  $S$  é orientável. ■

**Exemplo 2.2.4.** A esfera unitária  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  é uma superfície regular orientável. De fato,  $S^2$  é o conjunto  $f^{-1}(1)$  onde  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  é uma função diferenciável e  $1$  é um valor regular de  $f$ . Portanto, pela Prop. 2.2.3,  $S^2$  é orientável. Da mesma forma, o toro  $T$ , visto no exemplo 2.1.4, é orientável por ser o conjunto dos pontos  $f^{-1}(r^2)$  onde  $f(x, y, z) = z^2 - \left( \sqrt{x^2 + y^2} - a \right)^2$  é uma função diferenciável e  $r^2$  é um valor regular. De forma análoga o elipsóide e o hiperbolóide de duas folhas são superfícies orientáveis (ver exemplos 2.1.2 e 2.1.3)

### 3 SUPERFÍCIES ABSTRATAS

No capítulo 2 tratamos de superfícies como subconjuntos  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  nos quais faz sentido falar em funções diferenciáveis. Definimos um plano tangente  $T_pM$  em cada ponto  $p \in S$  onde pode ser desenvolvida a geometria diferencial em torno de  $p$ . Nosso objetivo nesse capítulo é definir abstratamente, ou seja, sem referência ao  $\mathbb{R}^3$ , um conjunto  $S$  no qual faça sentido falar de funções diferenciáveis e assim poder estender a geometria diferencial para tais conjuntos.

Historicamente, a definição abaixo levou um longo tempo para aparecer (em comparação a definição de superfície regular), provavelmente devido ao fato de que o papel fundamental desempenhado pela mudança de coordenadas na definição de uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  não era muito bem entendido.

**Definição 3.1.** *Uma superfície abstrata (variedade diferenciável de dimensão 2) é um conjunto munido de uma família de aplicações bijetivas  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$  de conjuntos abertos  $U_\alpha \subset \mathbb{R}^2$  em  $S$  tal que*

1.  $\cup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = S$ .
2. Para cada par  $\alpha, \beta$  com  $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , temos que  $x_\alpha^{-1}(W), x_\beta^{-1}(W)$  são conjuntos abertos em  $\mathbb{R}^2$ , e  $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha, x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$  são aplicações diferenciáveis (Fig.18).

O par  $(U_\alpha, x_\alpha)$  com  $p \in x_\alpha(U_\alpha)$  é chamado uma *parametrização* (ou sistema de coordenadas) de  $S$  em torno de  $p$ . Dizemos que  $x_\alpha(U_\alpha)$  é uma *vizinhança coordenada*, e se  $q = x_\alpha(u_\alpha, v_\alpha) \in S$ , que  $(u_\alpha, v_\alpha)$  são as *coordenadas* de  $q$  neste sistema de coordenadas. A família  $\{U_\alpha, x_\alpha\}$  é chamada uma *estrutura diferenciável* em  $S$ .

É imediato da condição 2 da definição 3.1 que a "mudança de parâmetros"

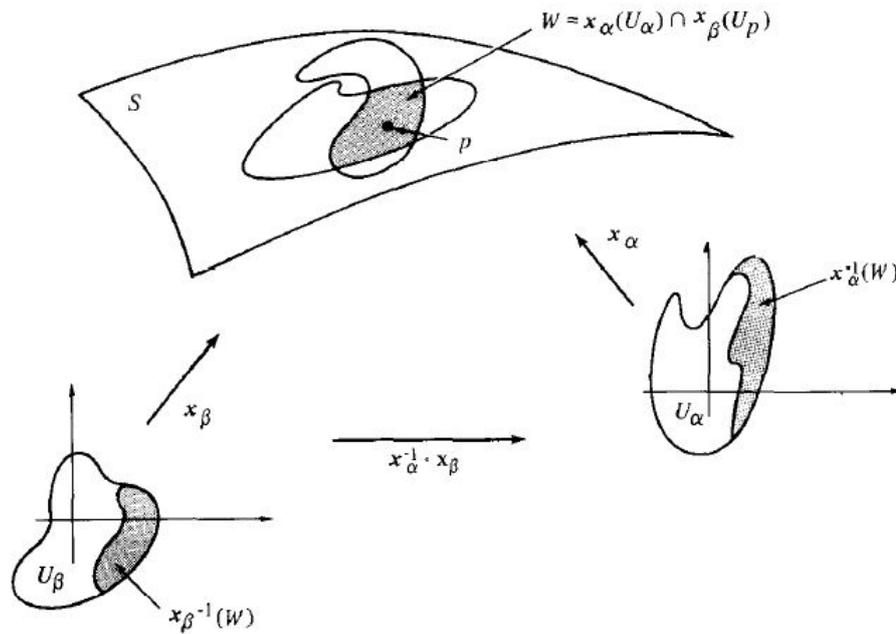
$$x_\beta^{-1} \circ x_\alpha : x_\alpha^{-1}(W) \rightarrow x_\beta^{-1}(W)$$

é um difeomorfismo.

**Observação 3.1.** Convém às vezes acrescentar uma outra condição à Def. 3.1 e dizer que a estrutura diferenciável deve ser máxima em relação às condições 1 e 2. Isto significa que a família  $\{U_\alpha, x_\alpha\}$  não está contida propriamente em nenhuma outra família de vizinhanças coordenadas satisfazendo as condições 1 e 2 da definição 3.1.

Comparando a definição de superfície abstrata com a definição de uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$  (seção 2.1 Def. 2.1.1) percebemos que o ponto fundamental da definição 3.1 é a inclusão da propriedade de mudança de parâmetros (que é um teorema para superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , veja Prop. 2.1.5) na definição de uma superfície abstrata. Como

Figura 18 – Mudança de parâmetros em superfícies abstratas



Fonte: [Carmo 2005] .

esta foi a propriedade que nos permitiu definir funções diferenciáveis em superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , é natural propor a seguinte definição

**Definição 3.2.** *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  superfícies abstratas. Uma aplicação  $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$  é diferenciável em  $p \in S_1$  se dada uma parametrização  $y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$  em torno de  $\varphi(p)$  existe uma parametrização  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$  em torno de  $p$  tal que  $\varphi(x(U)) \subset y(V)$  e a aplicação*

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

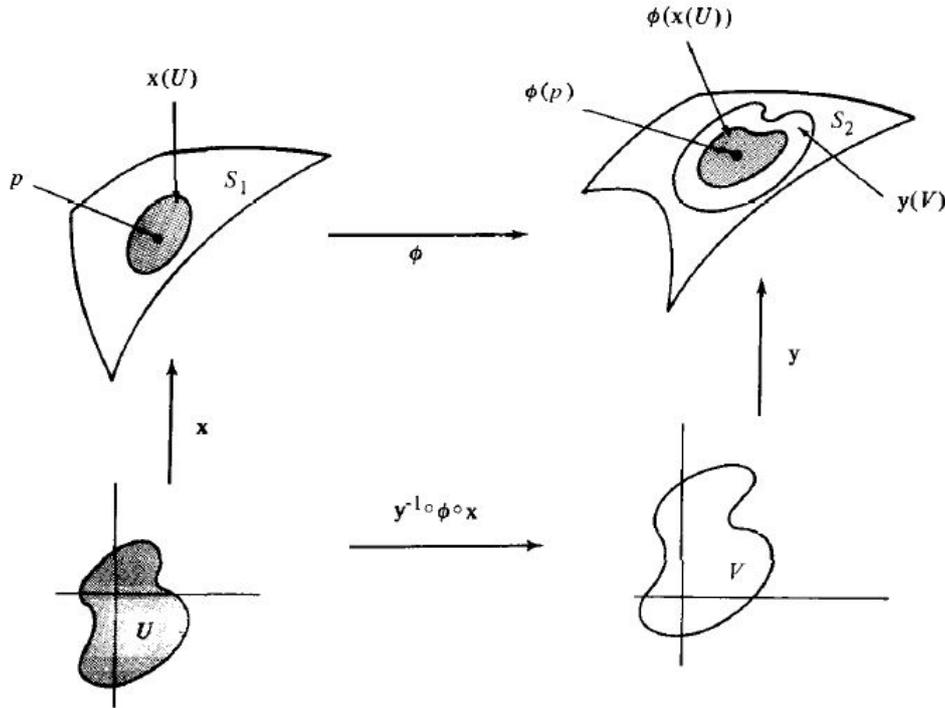
*é diferenciável em  $x^{-1}(p)$ . Dizemos que  $\varphi$  é diferenciável em  $S_1$  se é diferenciável em todo ponto  $p \in S_1$  (Fig.19).*

É evidente, pela condição 2 da definição 3.1, que a definição 3.2 não depende das escolhas das parametrizações. A aplicação 3 é chamada a *expressão* de  $\varphi$  nas parametrizações  $x, y$ .

Logo, faz sentido falar de aplicações diferenciáveis em superfícies abstratas e demos o primeiro passo rumo a uma generalização da geometria intrínseca.

**Exemplo 3.1.** Seja  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  a esfera unitária e seja  $A : S^2 \rightarrow S^2$  a aplicação antípoda, isto é,  $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ . Seja  $P^2$  o conjunto obtido de  $S^2$  identificando  $p$  com  $A(p)$  e denote  $\pi : S^2 \rightarrow P^2$  a aplicação natural  $\pi(p) = \{p, A(p)\}$ . Cubra  $S^2$  com parametrizações  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow S^2$  tais que  $x_\alpha(U_\alpha) \cap A \circ x_\alpha(U_\alpha) = \emptyset$ . Como  $S^2$  é uma superfície regular e  $A$  é um difeomorfismo

Figura 19 – Aplicação diferenciável entre superfícies abstratas



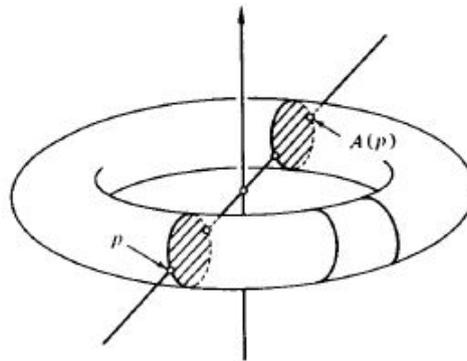
Fonte: [Carmo 2005].

(basta observar que  $A = A^{-1}$  e mostrar que  $A$  é diferenciável quando expressa em coordenadas locais, ver exemplo 2.1.1), segue-se que  $P^2$  munido da família  $\{U_\alpha, \pi \circ x_\alpha\}$  é uma superfície abstrata. De fato, as aplicações  $\pi \circ x_\alpha$  são bijetivas, pois se  $\pi \circ x_\alpha(p) = \pi \circ x_\alpha(q)$  então  $\{p, A(x_\alpha(q))\} = \{q, A(x_\alpha(q))\}$  e como  $x_\alpha(U_\alpha) \cap A \circ x_\alpha(U_\alpha) = \emptyset$ , temos  $p = q$ . Obviamente  $\cup \pi \circ x_\alpha(U_\alpha) = P^2$  e a condição 2 da definição 3.1 é satisfeita devido  $A$  e  $x_\alpha$  serem difeomorfismos.  $P^2$  é chamado de *plano projetivo real*.

**Exemplo 3.2.** Seja  $T \subset \mathbb{R}^3$  um toro de revolução (exemplo 2.1.4) com centro em  $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  e seja  $A : T \rightarrow T$  definida por  $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$  (Fig. 20). Seja  $K$  o espaço quociente de  $T$  pela relação de equivalência  $p \sim A(p)$  e denote por  $\pi : T \rightarrow K$  a aplicação  $\pi(p) = \{p, A(p)\}$ . Cubra  $T$  com parametrizações  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow T$  tais que  $x_\alpha(U_\alpha) \cap A \circ x_\alpha(U_\alpha) = \emptyset$ . Com os mesmos argumentos do exemplo anterior,  $K$  munido com a família  $\{U_\alpha, \pi \circ x_\alpha\}$  é uma superfície abstrata, que é chamada de *garrafa de Klein*.

**Exemplo 3.3.** Seja  $\mathbb{R}^2$  um plano com coordenadas  $(x, y)$  e  $T_{m,n} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a aplicação (translação)  $T_{m,n}(x, y) = (x + m, y + n)$ , onde  $m$  e  $n$  são inteiros. Defina uma relação de equivalência em  $\mathbb{R}^2$  por  $(x, y) \sim (x_1, y_1)$  se existem  $m, n$  tais que  $T_{m,n}(x, y) = (x_1, y_1)$ . Seja  $T$  o espaço quociente de  $\mathbb{R}^2$  por esta relação de equivalência, e seja  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$  a projeção natural  $\pi(x, y) = \{T_{m,n}(x, y); \text{para todos } m, n \text{ inteiros}\}$ . Assim, em cada quadrado unitário aberto cujos vértices tenham coordenadas inteiras, existe apenas um representante de um elemento de  $T$ , e  $T$  pode ser pensado como um quadrado fechado com

Figura 20 – Aplicação antípoda no toro



Fonte: [Carmo 2005] .

os lados opostos identificados (ver Fig. 20. Observe que todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$  denotados por  $x$  representam o mesmo ponto  $p$  em  $T$ ).

Seja  $i_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma família de parametrizações de  $\mathbb{R}^2$ , onde  $i_\alpha$  é a aplicação identidade, tal que  $U_\alpha \cap T_{m,n}(U_\alpha) = \emptyset$  para quaisquer  $m, n$  inteiros. Como  $T_{m,n}$  é difeomorfismo, pelos mesmos argumentos do exemplo 3.1, a família  $\{U_\alpha, \pi \circ i_\alpha\}$  é uma estrutura diferenciável para  $T$ .  $T$  é chamado *toro* (diferenciável). Segue-se da própria definição de estrutura diferenciável em  $T$  que  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$  é uma aplicação diferenciável e um difeomorfismo local (a construção feita na Fig.21 indica que  $T$  é difeomorfo ao toro usual em  $\mathbb{R}^3$ , confira exemplo 2.1.4).

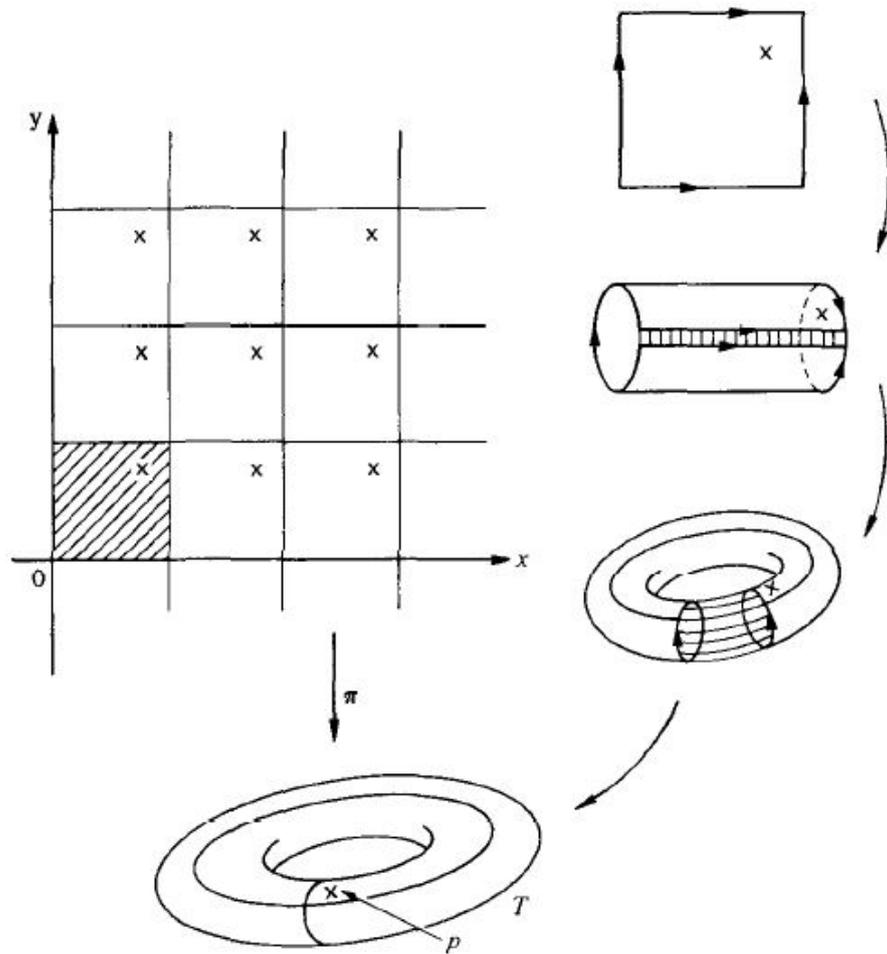
Nosso objetivo agora é associar um plano tangente a cada ponto de uma superfície abstrata  $S$ , utilizando aqui a experiência adquirida no capítulo 2 com superfícies no  $\mathbb{R}^3$ . Neste caso, o plano tangente é o conjunto de vetores tangentes em um ponto, sendo um vetor tangente em um ponto definido como a velocidade (derivada) neste ponto de uma curva na superfície. Assim, precisamos definir o que é o vetor tangente de uma curva em uma superfície abstrata. Como não podemos contar com o  $\mathbb{R}^3$ , que é onde encontram-se os vetores tangentes às curvas, é necessário descobrir uma propriedade característica de tais vetores tangentes que não dependa do  $\mathbb{R}^3$ .

As próximas considerações motivam a definição 3.3 apresentada logo em seguida. Seja  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ , com  $\alpha(0) = p$ . Escreva  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , e  $\alpha'(0) = (u'(0), v'(0)) = w$ . Seja  $f$  uma função diferenciável definida em uma vizinhança de  $p$ . Podemos restringir  $f$  a  $\alpha$  e escrever a derivada direcional de  $f$  com relação a  $w$  da seguinte maneira:

$$\left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \Big|_{t=0} = \left\{ u'(0) \frac{\partial}{\partial u} + v'(0) \frac{\partial}{\partial v} \right\} f.$$

Logo, a derivada direcional na direção do vetor  $w$  é um operador sobre funções dife-

Figura 21 – O toro



Fonte: [Carmo 2005].

renciáveis que depende apenas de  $w$ . Esta é a propriedade característica dos vetores tangentes que estávamos procurando.

**Definição 3.3.** Uma aplicação diferenciável  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  é chamada de uma curva em  $S$ . Suponha que  $\alpha(0) = p$  e seja  $D$  o conjunto de funções em  $S$  que são diferenciáveis em  $p$ . O vetor tangente à curva  $\alpha$  em  $t = 0$  é a função  $\alpha'(0) : D \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\alpha'(0)(f) = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in D.$$

Um vetor tangente em um ponto  $p \in S$  é o vetor tangente em  $t = 0$  de alguma curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  com  $\alpha(0) = p$ .

Escolhendo uma parametrização  $x : U \rightarrow S$  em torno de  $p = x(0, 0)$  podemos

expressar a função  $f$  e a curva  $\alpha$  em  $x$  por  $f(u, v)$  e  $(u(t), v(t))$ , respectivamente. Portanto,

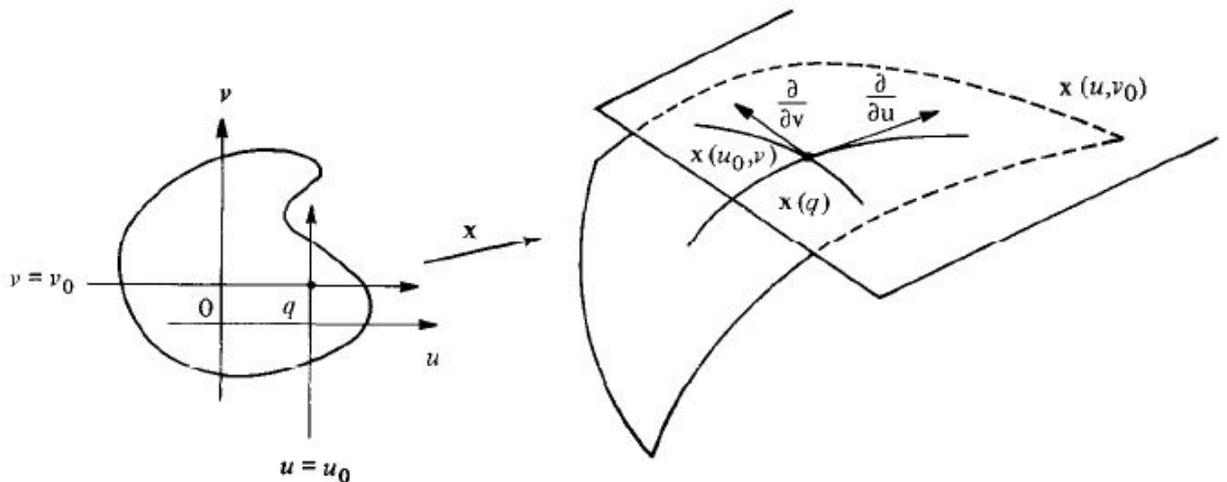
$$\begin{aligned} \alpha'(0)(f) &= \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(f(u(t), v(t))) \right|_{t=0} \\ &= u'(0) \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_0 + v'(0) \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)_0 = \left\{ u'(0) \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_0 + v'(0) \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)_0 \right\} (f). \end{aligned}$$

Isto sugere, dadas coordenadas  $(u, v)$  em torno de  $p$ , que denotemos por  $(\partial/\partial u)_0$  o vetor tangente em  $p$  que aplica  $f$  em  $(\partial f/\partial u)_0$ , analogamente  $(\partial/\partial v)_0$  denota o vetor tangente em  $p$  que aplica  $f$  em  $(\partial f/\partial v)_0$ . Podemos observar que  $(\partial/\partial u)_0$ ,  $(\partial/\partial v)_0$  também são interpretados como os vetores tangentes em  $p$  das "curvas coordenadas"

$$u \rightarrow x(u, 0), \quad v \rightarrow x(0, v),$$

respectivamente (Fig 22).

Figura 22 – Plano tangente em uma superfície abstrata



Fonte: [Carmo 2005] .

Assim, o conjunto de vetores tangentes em  $p$ , com as operações usuais para funções  $=$ , é um espaço bidimensional  $T_p S$  chamado de *espaço tangente* de  $S$  em  $p$ . E a escolha de uma parametrização  $x : U \rightarrow S$  em torno de  $p$  determina uma *base associada*  $\{(\partial/\partial u)_q, (\partial/\partial v)_q\}$  de  $T_q S$  para todo  $q \in x(U)$ .

Com a noção de espaço tangente, podemos estender para superfícies abstratas a definição de diferencial de aplicações entre superfícies.

**Definição 3.4.** *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  superfícies abstratas e seja  $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$  uma aplicação diferenciável. Para cada  $p \in S_1$  e cada  $w \in T_p S_1$ , considere a curva diferenciável  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1$ , com  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = w$ . Faça  $\beta = \varphi \circ \alpha$ . A aplicação  $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$*

dada por  $d\varphi_p(w) = \beta'(0)$  é uma aplicação linear bem definida, chamada de diferencial de  $\varphi$  em  $p$ .

A demonstração de que  $d\varphi_p$  está bem definida e é linear é da mesma forma que a feita na Prop. 2.1.7.

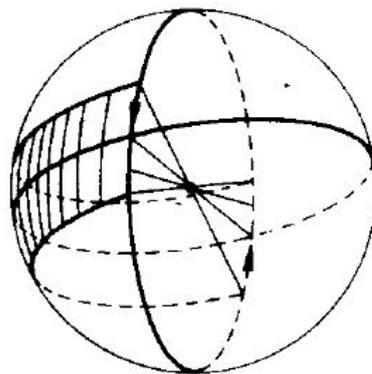
**Observação 3.2.** A definição de orientabilidade vista na seção 2.2 pode ser estendida, sem mudar uma única palavra, às superfícies abstratas, ou seja, uma superfície abstrata é orientável se pode ser coberta por uma família de vizinhanças coordenadas cujo jacobiano de mudança de coordenadas entre duas vizinhanças é positivo.

**Exemplo 3.4.** O toro diferenciável do exemplo 3.3 é orientável, pois é difeomorfo ao toro usual do  $\mathbb{R}^3$  que é orientável.

**Exemplo 3.5.** o plano projetivo real  $P^2$  do exemplo 3.1 é não orientável. Para provar isto, observemos que uma superfície abstrata  $S$  que contenha um conjunto aberto  $M$  difeomorfo a uma faixa de Möbius, é não orientável. Caso contrário, todo subconjunto aberto de  $S$  seria orientável (ver exemplo 2.2.1). Assim,  $M$  seria orientável, o que é um absurdo pela Prop. 2.2.1.

Ora,  $P^2$  é obtido a partir da esfera  $S^2$  pela identificação de pontos antípodos. Considere em  $S^2$  uma faixa fina  $B$  formada por segmentos abertos de meridianos cujos centros estão sobre a metade de um equador (Fig. 23). Através da identificação dos pontos antípodos, é claro que  $B$  se tornaria uma faixa de Möbius em  $P^2$ . Assim,  $P^2$  é não orientável.

Figura 23 – O plano projetivo contém uma faixa de Möbius



Fonte: [Carmo 2005].

Por um argumento análogo, pode-se mostrar que a garrafa de Klein  $K$  do exemplo 3.2 também é não orientável. Em geral, sempre que uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  é simétrica em relação à origem de  $\mathbb{R}^3$ , a identificação dos pontos simétricos dá origem a uma superfície abstrata não orientável.

Retornando à definição de superfície abstrata, vemos que a dimensão 2 não desempenhou um papel essencial. Assim, podemos estender esta definição para uma variedade de dimensão  $n$  (natural) arbitrária.

**Definição 3.5.** *Uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  é um conjunto  $M$  munido de uma família de aplicações bijetivas  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$  de conjuntos abertos  $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  em  $M$  tal que*

1.  $\cup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$ .
2. Para cada par  $\alpha, \beta$  com  $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , temos que  $x_\alpha^{-1}(W), x_\beta^{-1}(W)$  são conjuntos abertos em  $\mathbb{R}^n$ , e  $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha, x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$  são aplicações diferenciáveis.
3. A família  $\{U_\alpha, x_\alpha\}$  é máxima em relação às condições 1 e 2.

A família  $\{U_\alpha, x_\alpha\}$  satisfazendo as condições 1 e 2 é chamada uma estrutura diferenciável em  $M$ . Dada uma estrutura diferenciável em  $M$  podemos facilmente completá-la em uma máxima adicionando a ela todas as possíveis parametrizações que, junto com alguma parametrização da família  $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ , satisfazem a condição 2. Assim, com certo abuso de linguagem, podemos dizer que uma variedade diferenciável é um conjunto munido de uma estrutura diferenciável.

**Observação 3.3.** Uma família de conjuntos abertos pode ser definida em  $M$  pela seguinte regra:  $V \subset M$  é um conjunto aberto se para todo  $\alpha$ ,  $x_\alpha^{-1}(V \cap x_\alpha(U_\alpha))$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Os leitores familiarizados com a topologia elementar irão notar que uma tal família define uma topologia natural em  $M$ . Nesta topologia, as aplicações  $x_\alpha$  são contínuas e os conjuntos  $x_\alpha(U_\alpha)$  são abertos em  $M$ . Em alguns dos teoremas mais profundos sobre variedades, é necessário impor algumas condições sobre topologia de  $M$ .

As definições de aplicações diferenciáveis e de vetor tangente se generalizam, da mesma forma para variedades diferenciáveis. É claro que o espaço tangente é agora um espaço vetorial  $n$ -dimensional. As definições de diferencial e orientabilidade também se estendem imediatamente para esta situação mais geral.

Para encerrar esse capítulo, apresentamos um exemplo em que uma variedade bidimensional pode nos levar naturalmente a considerar variedades de dimensão maior.

**Exemplo 3.6** (O Fibrado Tangente). Seja  $S$  uma superfície abstrata e seja  $TS = \{(p, w), p \in S, w \in T_p S\}$ . Vamos mostrar que o conjunto  $TS$  pode ser munido de uma estrutura diferenciável (de dimensão 4) e, com esta estrutura,  $TS$  é chamado o *fibrado tangente* de  $S$ .

Seja  $\{U_\alpha, x_\alpha\}$  uma estrutura diferenciável em  $S$ . Vamos denotar  $(u_\alpha, v_\alpha)$  as coordenadas de  $U_\alpha$ , e por  $\{\partial/\partial u_\alpha, \partial/\partial v_\alpha\}$  as bases associadas nos planos tangentes de

$x_\alpha(U_\alpha)$ . Para cada  $\alpha$ , defina uma aplicação  $y_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^2 \rightarrow TS$  por

$$y_\alpha(u_\alpha, v_\alpha, x, y) = (x_\alpha(u_\alpha, v_\alpha), x \frac{\partial}{\partial u_\alpha} + y \frac{\partial}{\partial v_\alpha}), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Geometricamente, isto significa que tomamos como coordenadas de um ponto  $(p, w) \in TS$  as coordenadas  $u_\alpha, v_\alpha$  de  $p$  mais as coordenadas de  $w$  na base  $\{\partial/\partial u_\alpha, \partial/\partial v_\alpha\}$ .

Vamos mostrar que  $\{U_\alpha \times \mathbb{R}^2, y_\alpha\}$  é uma estrutura diferenciável em  $TS$ . Como  $\cup x_\alpha(U_\alpha) = S$  e  $(dx_\alpha)(\mathbb{R}^2) = T_{x_\alpha(q)}S$ ,  $q \in U_\alpha$ , temos que

$$\cup y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^2) = TS,$$

e isto verifica a condição 1 da Def. 3.5. Seja agora

$$(p, w) \in y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^2) \cap y_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^2).$$

Então

$$(p, w) = (x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(w_\alpha)) = (x_\beta(q_\beta), dx_\beta(w_\beta))$$

onde  $q_\alpha \in U_\alpha$ ,  $q_\beta \in U_\beta$ ,  $w_\alpha \in \mathbb{R}^2$ ,  $w_\beta \in \mathbb{R}^2$ . Assim

$$y_\beta^{-1} \circ y_\alpha(q_\alpha, w_\alpha) = y_\beta^{-1}(x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(w_\alpha)) = (x_\beta^{-1} \circ x_\alpha(q_\alpha), d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(w_\alpha)).$$

Como  $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$  é diferenciável,  $d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)$  também é. Segue-se que  $y_\beta^{-1} \circ y_\alpha$  é diferenciável, de forma análoga,  $y_\alpha^{-1} \circ y_\beta$  é diferenciável, o que verifica a condição 2 da Def. 3.5.

## 4 SUPERFÍCIES NO $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo, apresentamos uma generalização do conceito de superfície regular vista no capítulo 2. Até então tínhamos visto a definição de superfície bidimensional no  $\mathbb{R}^3$ , exemplos de tais superfícies, algumas propriedades importantes e o conceito de orientabilidade. Agora, vamos apresentar a definição de superfície  $m$ -dimensional no  $\mathbb{R}^n$ ,  $n$  um natural arbitrário, assim como propriedades e a definição de orientação neste conjunto. Este capítulo, segue a mesma construção do capítulo 2, sendo a primeira seção voltada para definição de superfície no  $\mathbb{R}^n$  e resultados importantes, e a segunda seção voltada para orientabilidade.

Assim como mencionado no capítulo 2, vamos precisar de conhecimentos de álgebra linear e cálculo diferencial de várias variáveis. Dentre os conhecimentos necessários para um bom entendimento deste capítulo pode-se citar: a matriz de uma transformação linear, o posto de uma matriz, teorema do núcleo e da imagem, vetores linearmente independentes, base de um espaço vetorial, diferencial de uma função de várias variáveis, regra da cadeia, o teorema da aplicação inversa e suas implicações (ver [Lima 2010]).

### 4.1 Superfícies $m$ -dimensionais no $\mathbb{R}^n$

Iniciamos esta seção com o conceito de parametrização, fundamental para a definição de superfície  $m$ -dimensional no  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 4.1.1.** *Uma parametrização de classe  $C^k$  de um conjunto  $V \subset \mathbb{R}^n$  é um homeomorfismo  $\varphi : V_0 \rightarrow V$ , que também é uma aplicação diferenciável de classe  $C^k$  tal que, para todo  $x \in V_0$ , a derivada  $\varphi'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma transformação linear injetiva, definida no aberto  $V_0 \subset \mathbb{R}^m$ . Evidentemente tem-se  $m \leq n$ . Quando é preciso ser explícito, dizemos que  $\varphi$  é uma **parametrização  $m$ -dimensional**.*

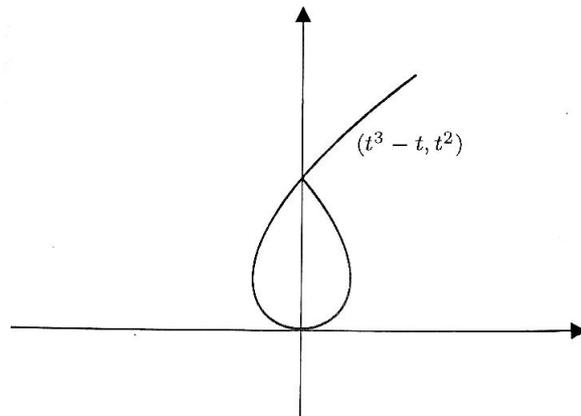
A definição 4.1.1 só faz sentido quando  $k \geq 1$  e dizemos, neste caso, que  $\varphi$  além de homeomorfismo é uma imersão de classe  $C^k$ . Às vezes é interessante considerar parametrizações de classe  $C^0$ , que são apenas homeomorfismos  $\varphi : V_0 \rightarrow V$ , de um aberto  $V_0 \subset \mathbb{R}^m$  sobre um conjunto  $V \subset \mathbb{R}^n$ .

**Observação 4.1.1.** Uma aplicação diferenciável  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$  é uma imersão se tem posto  $m$  em todos os pontos  $x \in U$ , ou seja, o número máximo de colunas linearmente independentes da matriz da transformação linear  $f'(x)$  é  $m$ . Da álgebra linear, isto é equivalente a matriz de  $f'(x)$  possuir pelo menos uma submatriz de ordem  $m$  com determinante diferente de zero.

**Exemplo 4.1.1.** Uma imersão injetiva  $\varphi : V_0 \rightarrow V$ , mesmo de classe  $C^\infty$ , pode não

ser um homeomorfismo de  $V_0$  sobre  $V = \varphi(V_0)$ . Um exemplo disso é o caminho  $\varphi : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definido por  $\varphi(t) = (t^3 - t, t^2)$  (ver Fig.24). Nota-se facilmente que  $\varphi$  é uma bijeção do aberto  $V_0 = (-1, +\infty) \subset \mathbb{R}$  sobre  $V = \varphi(V_0) \subset \mathbb{R}^2$ , que  $\varphi \in C^\infty$  e que  $\varphi'(t) = (3t^2 - 1, 2t)$  nunca se anula, logo  $\varphi'(t)$  é injetiva. Mas tomando uma sequência decrescente de números reais  $t_n$ , com  $\lim t_n = -1$ , vemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) = (0, 1) = \varphi(1)$  sem que seja  $\lim t_n = 1$ . Portanto  $\varphi^{-1} : V \rightarrow V_0$  não é contínua e  $\varphi$  não é homeomorfismo de  $V_0$  sobre  $V$ .

Figura 24 – Uma imersão injetiva que não é homeomorfismo

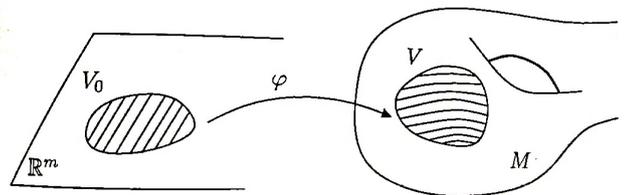


Fonte: [Lima 2010] .

Se  $\varphi : V_0 \rightarrow V$  é uma parametrização, cada ponto  $y = \varphi(x) \in V$  embora pertença a  $\mathbb{R}^n$ , necessita apenas de  $m$  números para ter sua posição determinada, a saber, as  $m$  coordenadas  $x \in V_0$ , chamadas os *parâmetros* que servem para localizar os pontos  $V$ .

**Definição 4.1.2.** Uma superfície de dimensão  $m$  e classe  $C^k$  em  $\mathbb{R}^n$  é um conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  que pode ser coberto por uma coleção de abertos  $U \subset \mathbb{R}^n$ , tais que cada  $V = U \cap M$  admite uma parametrização  $\varphi : V_0 \rightarrow V$ , de classe  $C^k$ , definida num aberto  $V_0 \subset \mathbb{R}^m$  (Fig.25).

Figura 25 – Parametrização de um aberto  $V$



Fonte: [Lima 2010] .

Cada um desses conjuntos  $V = U \cap M$  é um aberto em  $M$ . Para cada  $p \in M$ , diz-se que  $V$  é uma **vizinhança parametrizada** de  $p$ .

Assim, uma superfície de classe  $C^k$  e dimensão  $m$  em  $\mathbb{R}^n$  é um subconjunto

tal que cada um dos seus pontos possui uma vizinhança parametrizada, por uma parametrização de classe  $C^k$  e dimensão  $m$ .

Quando  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma superfície de dimensão  $m$ , escrevemos às vezes  $M^m$ . Dizemos também que  $M$  tem codimensão  $n - m$ . Se  $\dim M = 1$ ,  $M$  chama-se uma curva de classe  $C^k$ .

Como a restrição de uma parametrização  $\varphi : V_0 \rightarrow V$  a um aberto  $W_0 \subset V_0$  é ainda uma parametrização de  $W = \varphi(W_0)$ , todo ponto  $p$  de uma superfície  $M$  possui vizinhanças parametrizadas arbitrariamente pequenas: se  $\varphi : V_0 \rightarrow V$  é uma parametrização de  $V = U \cap M$  e  $B$  é qualquer bola aberta de centro  $p$  contida em  $U$  então  $W = B \cap M$  é parametrizada pela restrição de  $\varphi$  a  $W_0 = \varphi^{-1}(W)$ .

**Exemplo 4.1.2.** 4.1.3 Todo aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é uma superfície de dimensão  $n$  e classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^n$ , coberta por uma única vizinhança parametrizada  $U$  sendo  $\varphi : U \rightarrow U$  a aplicação identidade. Reciprocamente, se  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma superfície de dimensão  $n$  e classe  $C^1$  então cada vizinhança parametrizada  $V \subset M$  sendo imagem do aberto  $V_0 \subset \mathbb{R}^n$  pelo difeomorfismo  $\varphi : V_0 \rightarrow V$ , é um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ , pelo Teorema da Aplicação Inversa. O conjunto  $M$ , reunião de vizinhanças parametrizadas  $V$ , é portanto aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Assim, as superfícies de classe  $C^1$  e dimensão  $n$  em  $\mathbb{R}^n$  são os subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 4.1.3.** No outro extremo,  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma superfície de dimensão 0 se, e somente se, para cada ponto  $p \in M$  existe um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $U \cap M$  admite uma parametrização  $\varphi : V_0 \rightarrow V$  definida num aberto  $V_0 \subset \mathbb{R}^0 = \{0\}$ . Assim,  $V_0$  é um ponto e  $V = \{p\}$ . Portanto,  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma superfície de dimensão 0 se, e somente se, é um conjunto discreto, ou seja, seus pontos são todos isolados.

**Exemplo 4.1.4.** Sejam  $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$  uma decomposição em soma direta e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^k$  definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ . O conjunto  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n}; x \in U, y = f(x)\}$ , gráfico da aplicação  $f$ , é uma superfície de dimensão  $m$  e classe  $C^k$  em  $\mathbb{R}^{m+n}$ , imagem de uma única parametrização  $\varphi : U \rightarrow M$  dada por  $\varphi(x) = (x, f(x))$  (compare com a Prop. 2.1.1), onde a projeção  $\pi : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por  $\pi(x, y) = x$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n}$  é a inversa de  $\varphi$  quando restrita a  $M$ .

**Definição 4.1.3.** Um conjunto  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  chama-se *hiperfície de classe  $C^k$*  quando é localmente o gráfico de uma função de  $n$  variáveis de classe  $C^k$ . Isto significa que cada ponto  $p \in M$  pertence a um aberto  $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $V \cap M$  é o gráfico de uma função de classe  $C^k$  definida num aberto do  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 4.1.5.** Ser uma superfície é uma propriedade local, isto é, se cada ponto  $p$  do conjunto  $M$  pertence a um aberto  $Z \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $Z \cap M$  é uma superfície de dimensão  $m$

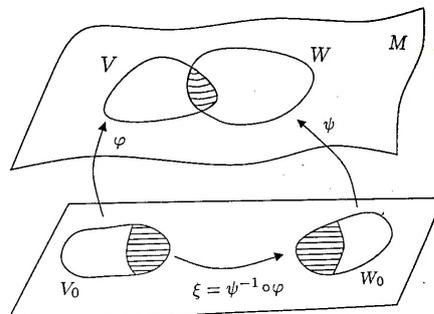
e classe  $C^k$ , então  $M$  é uma superfície de dimensão  $m$  de classe  $C^k$ . Assim, por exemplo, se para todo ponto  $p \in M$  existe um aberto  $Z \subset \mathbb{R}^n$ , tal que  $p \in Z$  e  $Z \cap M$  é o gráfico de uma aplicação  $f : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^k$  num aberto  $V_0 \subset \mathbb{R}^m$ , então  $M$  é uma superfície de dimensão  $m$  e classe  $C^k$ . Em particular, toda *hiperfície* de classe  $C^k$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  é uma superfície de dimensão  $n$  e classe  $C^k$ .

**Exemplo 4.1.6.** Se  $M_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$  e  $M_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$  são superfícies de classe  $C^k$  e dimensão  $m_1, m_2$  respectivamente, o *produto cartesiano*  $M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$  é uma superfície orientável de classe  $C^k$  e dimensão  $m_1 + m_2$ : se  $\varphi : V_0 \rightarrow V$  e  $\psi : W_0 \rightarrow W$  são respectivamente parametrizações em  $M_1 \times M_2$  então  $\varphi \times \psi : V_0 \times W_0 \rightarrow V \times W$ , definida por  $(\varphi \times \psi)(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$  é uma parametrização em  $M_1 \times M_2$ . Claramente, o produto cartesiano de um número finito qualquer de superfícies é ainda uma superfície. Em particular, como o círculo  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  é uma curva ("superfície" de dimensão 1) de classe  $C^\infty$ , o *toro bidimensional*  $T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$  é uma superfície  $C^\infty$ . Para todo  $n$ , o *toro n-dimensional*  $T^n = S^1 \times \dots \times S^1 \subset \mathbb{R}^{2n}$  é uma superfície  $C^\infty$  de dimensão  $n$  em  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Agora, vamos apresentar alguns resultados de superfícies  $m$ -dimensionais no  $\mathbb{R}^n$  que tratam-se de generalizações de resultados vistos no capítulo 2 sobre superfícies bidimensionais no  $\mathbb{R}^3$  (superfícies regulares), e suas demonstrações são análogas, apenas fazendo algumas alterações (considerando agora aplicações do  $\mathbb{R}^m$  para  $\mathbb{R}^n$ ).

**Proposição 4.1.1** (Mudança de Parâmetros). *Seja  $p$  um ponto de uma superfície  $M$  de classe  $C^k$  e dimensão  $m$ , e sejam  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  e  $\psi : V_0 \rightarrow V$  duas parametrizações de  $M$ , tais que  $p \in U \cap V = W$ . Então a mudança de coordenadas  $\xi = \psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \rightarrow \psi^{-1}(W)$  (Fig.26) é um difeomorfismo de classe  $C^k$ .*

Figura 26 – Mudança de coordenadas numa superfície  $m$ -dimensional



Fonte: [Lima 2010].

**Demonstração:** Ver Prop. 2.1.5 ■

**Proposição 4.1.2.** *Sejam  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma superfície de dimensão  $m$  e classe  $C^k$ ,  $\varphi : V_0 \rightarrow$*

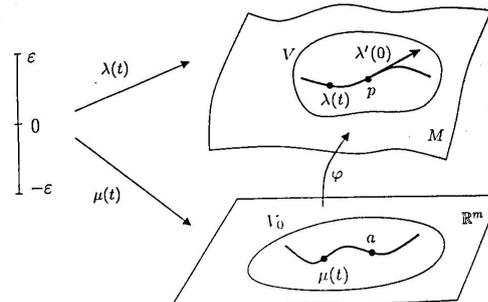
$V$  uma parametrização de classe  $C^k$  em  $M$  e  $a \in V_0$ . O subespaço vetorial de dimensão  $m$ ,

$$T_p M = \varphi'(a) \cdot \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$$

coincide com o conjunto de vetores tangentes a  $M$  em  $\varphi(a)$  (Fig.27).

**Demonstração:** Ver Prop. 2.1.6 ■

Figura 27 – O plano tangente no  $\mathbb{R}^n$



Fonte: [Lima 2010] .

A toda parametrização  $\varphi : V_0 \rightarrow V$ , com  $p = \varphi(a) \in V$ , corresponde uma base do espaço vetorial  $T_p M$ , formada pelos vetores

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(a) = \varphi'(a) \cdot e_1, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(a) = \varphi'(a) \cdot e_m.$$

**Exemplo 4.1.7.** Se  $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$  é o gráfico de uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , seu espaço vetorial tangente  $T_p M$ , no ponto  $p = (a, f(a))$ , é o gráfico da derivada  $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ou seja,  $T_p M = \{(v, f'(a) \cdot v); v \in \mathbb{R}^m\}$ . basta tomar a parametrização natural  $\varphi : U \rightarrow M$ ,  $\varphi(x) = (x, f(x))$ , cuja a derivada no ponto  $a$  é dada por  $\varphi'(a) \cdot v = (v, f'(a) \cdot v)$ , para notar que  $T_p M = \varphi'(a) \cdot \mathbb{R}^m$  é o gráfico de  $f'(a)$ . A mesma observação se aplica a uma superfície que é localmente o gráfico de uma aplicação.

Sejam as parametrizações  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  e  $\psi : V_0 \rightarrow V$  das vizinhanças parametrizadas  $U, V$  numa superfície  $M$ . Se  $W = U \cap V \neq \emptyset$  então cada ponto  $p \in W$  pode ser caracterizado pelos parâmetros  $x_1, \dots, x_m$  coordenadas do ponto  $x$  tal que  $\varphi(x) = p$ , ou pelas coordenadas  $y_1, \dots, y_m$  do ponto  $y$  tal que  $\psi(y) = p$ . Vimos, pela Prop 4.1.1, que a mudança de parâmetros  $x \mapsto y$  define um difeomorfismo  $\xi = \psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \rightarrow \psi^{-1}(W)$ ,  $\xi(x) = y$ .

Se  $p = \varphi(a) = \psi(b) \in W$ , temos as bases

$$\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(a) \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial y_1}(b), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial y_m}(b) \right\}$$

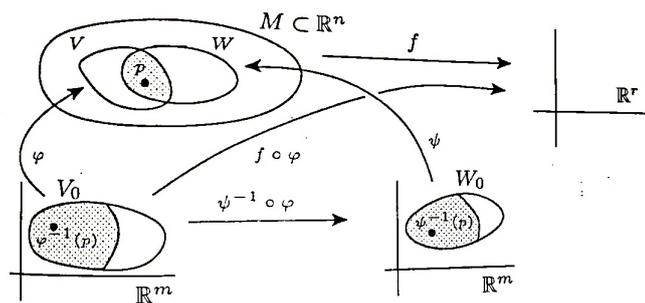
do espaço vetorial  $T_pM$ , determinadas pelas parametrizações  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  e  $\psi : V_0 \rightarrow V$ , respectivamente. Evidentemente, vale a relação  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(b)$ . Para determinar os coeficientes  $\alpha_{ij}$ , basta notar que, se  $\xi_1, \dots, \xi_m$  são as funções coordenadas de  $\xi$ , a igualdade  $\varphi = \psi \circ \xi$  nos dá, pela regra da cadeia

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(b) \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(a),$$

portanto  $\alpha_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(a)$ , ou seja, a matriz  $(\alpha_{ij})$ , de passagem de base  $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y_i}(b)\right)$  para  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a)\right)$ , no espaço vetorial  $T_pM$  (onde  $p = \varphi(a) = \psi(b)$ ) é a matriz jacobiana  $J\xi(a)$  onde  $\xi = \psi^{-1} \circ \varphi$ .

Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma superfície de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). Dizemos, de forma análoga ao capítulo 2, que uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^r$  é diferenciável no ponto  $p \in M$  é diferenciável no ponto  $p \in M$  quando existe parametrização  $C^k$ ,  $\varphi : V_0 \rightarrow V$ , de uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $M$ , tal que  $f \circ \varphi : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^r$  é diferenciável no ponto  $a = \varphi^{-1}(p)$ . Se tomarmos qualquer outra parametrização  $C^k$ ,  $\psi : W_0 \rightarrow W$ , de uma vizinhança de  $p$  em  $M$ , teremos  $f \circ \psi$  diferenciável no ponto  $\psi^{-1}(p)$  se, e somente se,  $f \circ \varphi$  for diferenciável no ponto  $\varphi^{-1}(p)$ , pois  $f \circ \psi = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$  e sabemos, pela proposição 4.1.1, que  $\varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(V \cap W) \rightarrow \varphi^{-1}(V \cap W)$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$  (ver Fig.28). Dizemos que  $f$  é de classe  $C^i$  ( $0 \leq i \leq k$ ) quando, para cada  $p$ , existe parametrização  $C^k$ ,  $\varphi : V_0 \rightarrow V$ , de uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $M$  tal que  $f \circ \varphi : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^r$  é de classe  $C^i$  no aberto  $V_0 \subset \mathbb{R}^m$ .

Figura 28 – Aplicação diferenciável em superfícies.



Fonte: [Lima 2010] .

Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^r$  é diferenciável no ponto  $p \in M$ , sua derivada nesse ponto é a transformação linear  $f'(p) : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^r$  definida do seguinte modo. Tomamos a parametrização  $\varphi : V_0 \rightarrow V$ , com  $p = \varphi(a)$ . Dado um vetor  $v \in T_pM$ , temos  $v = \varphi'(a) \cdot v_0$  para algum vetor  $v_0 \in \mathbb{R}^m$ . Definimos  $f'(p) \cdot v = (f \circ \varphi)'(a) \cdot v_0$ .

**Observação 4.1.2.** Qualquer vetor  $v \in T_pM$  é o vetor velocidade,  $v = \lambda'(0)$ , de um

caminho  $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  com  $\lambda(0) = p$ . Então a imagem  $f'(p) \cdot v = (f \circ \lambda)'(0)$  é o vetor velocidade, no ponto 0, do caminho  $f \circ \lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^r$ .

Se  $N \subset \mathbb{R}^r$  é outra superfície de classe  $C^k$  e a aplicação  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^r$ , diferenciável no ponto  $p \in M$  é tal que  $f(M) \subset N$ , dizemos que  $f : M \rightarrow N$  é uma *aplicação diferenciável* no ponto  $p$ . Pela observação 4.1.2,  $f'(b) \cdot v$  é o vetor velocidade de um caminho em  $N$ , onde  $v$  é o vetor velocidade de um caminho em  $M$ , logo se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^r$  é diferenciável no ponto  $p \in M$  então a derivada  $f'(p)$  é uma transformação linear de  $T_p M$  em  $T_q N$  onde  $q = f(p)$ .

Antes do próximo resultado, vamos generalizar a definição de valor regular dado no capítulo 2. Dizemos que um ponto  $c \in \mathbb{R}^n$  é *valor regular* de uma aplicação diferenciável  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ , quando, para todo ponto  $x \in U$  tal que  $f(x) = c$ , a derivada  $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  for uma transformação linear sobrejetiva. Considerando as funções coordenadas  $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  da aplicação  $f$ , vemos que  $c \in \mathbb{R}^n$  é um valor regular de  $f$  se, e somente se, em todo ponto  $x \in f^{-1}(c)$  os vetores  $\text{grad } f_1(x), \dots, \text{grad } f_n(x)$  são linearmente independentes. Com efeito, estes vetores são as linhas da matriz jacobiana de  $Jf(x)$  e sua independência linear significa que a matriz  $n \times m$  tem posto  $n$ , ou seja, que a transformação linear  $f'(x)$  é sobrejetiva. Quando  $n = 1$  esta condição significa que  $f(x) = c \Rightarrow \text{grad } f(x) \neq 0$ .

**Proposição 4.1.3.** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  de classe  $C^k$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Se  $c \in \mathbb{R}^{n-m}$  é o valor regular de  $f$  então  $f^{-1}(c)$  é uma superfície de classe  $C^k$  e dimensão  $m$  em  $\mathbb{R}^n$ . Em cada ponto  $p \in f^{-1}(c)$ , o espaço tangente  $T_p[f^{-1}(c)]$  é o núcleo da derivada  $f'(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ .*

**Demonstração:** A prova que  $f^{-1}(c)$  é superfície é semelhante a prova da proposição 2.1.2. Para segunda parte, dado qualquer  $p \in f^{-1}(c)$ , como todo vetor  $v$ , tangente em  $f^{-1}(c)$  no ponto  $p$ , é o vetor velocidade de um caminho  $\lambda$  contido  $f^{-1}(c)$ , logo  $f \circ \lambda = \text{constante}$ , temos que  $f'(p) \cdot v = (f \circ \lambda)'(0) = 0$ . Assim o espaço vetorial tangente  $T_p[f^{-1}(c)]$  está contido no núcleo de  $f'(p)$ . Como ambos são espaços vetoriais de dimensão  $m$ , segue-se que eles são iguais. ■

**Exemplo 4.1.8.** A esfera  $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}); x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é uma superfície de dimensão  $n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , pois  $S^n = f^{-1}(1)$  onde  $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$  e 1 é valor regular de  $f$ .

**Proposição 4.1.4.** *Toda superfície de classe  $C^k$  é localmente o gráfico de uma aplicação de classe  $C^k$*

**Demonstração:** Ver Prop 2.1.3 ■

**Proposição 4.1.5.**  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é uma hipersuperfície de classe  $C^k$  se, e somente se, é uma superfície de codimensão 1 e classe  $C^k$ .

**Demonstração:** Já tínhamos visto toda hipersuperfície é uma superfície. A recíproca segue imediatamente da proposição anterior. ■

## 4.2 Superfícies orientáveis no $\mathbb{R}^n$

Vamos estender agora o conceito de orientação de superfície visto no capítulo 2 para superfícies  $m$ -dimensionais no  $\mathbb{R}^n$ . Antes da definição de superfície orientável, vamos apresentar algumas definições.

Duas parametrizações  $\varphi : U_0 \rightarrow U$ ,  $\psi : V_0 \rightarrow V$ , de classe  $C^k$  numa superfície  $M$  dizem-se coerentes quando  $W = U \cap V = \emptyset$  ou então quando  $W \neq \emptyset$  e a matriz jacobiana  $J(\psi^{-1} \circ \varphi)(x)$  tem determinante positivo em todos os pontos  $x \in \varphi^{-1}(W)$ . Como sabemos, esta condição significa que  $p = \varphi(x) = \psi(y) \in W$ , e tem-se, para cada  $j = 1, \dots, m$ ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(y), \text{ com } \det(\alpha_{ij}) > 0.$$

Com efeito,  $(\alpha_{ij})$  é a matriz jacobiana do difeomorfismo  $\psi^{-1} \circ \varphi$  no ponto  $x$ .

Se  $W \neq \emptyset$ , o difeomorfismo  $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \rightarrow \psi^{-1}(W)$  tem determinante jacobiano diferente de zero em todos os pontos  $x \in \varphi^{-1}(W)$ . Como  $\det J(\psi^{-1} \circ \varphi)(x)$  é uma função contínua de  $x$ , seu sinal constante em cada componente conexa do aberto  $\varphi^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^m$ . Quando esse aberto é conexo, o sinal do determinante jacobiano é o mesmo em todos os pontos  $x$ .

Um atlas de classe  $C^k$  numa superfície  $M$  é uma coleção  $\mathcal{A}$  de parametrizações  $\varphi : V_0 \rightarrow V$ , de classe  $C^k$  cujas imagens cobrem  $M$ . O atlas  $\mathcal{A}$  diz-se coerente quando quaisquer duas parametrizações  $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$  são coerentes. Um atlas coerente de classe  $C^k$  numa superfície  $M$  chama-se *máximo* quando não pode estar contido, propriamente em nenhum outro atlas coerente de classe  $C^k$  em  $M$ . Todo atlas coerente  $\mathcal{A}$  de classe  $C^k$  está contido num único atlas máximo de classe  $C^k$ : basta acrescentar-lhe as parametrizações  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  de classe  $C^k$  que são coerentes com todas as  $\psi \in \mathcal{A}$ .

**Definição 4.2.1** (Superfícies Orientáveis). *Uma superfície  $M$  de classe  $C^k$  diz-se orientável quando existe nela pelo menos um atlas coerente de classe  $C^k$ . Neste caso, existe também um atlas coerente máximo, o qual se chama orientação de  $M$ . Uma superfície orientada é uma superfície orientável na qual se fez a escolha de uma orientação  $\mathcal{A}$ . As*

parametrizações  $\varphi \in \mathcal{A}$  chamam-se então **positivas**. Escrevemos  $\varphi > 0$  para significar que  $\varphi$  pertence a  $\mathcal{A}$ .

**Exemplo 4.2.1.** Toda superfície que é a imagem de uma única parametrização é orientável, pois essa parametrização constitui um atlas coerente. Isto inclui os subconjuntos abertos do espaço euclidiano e os gráficos de aplicações  $C^k$  definidos nesses abertos.

**Exemplo 4.2.2.** Todo subconjunto aberto  $U$  de uma superfície orientável  $M$  é uma superfície orientável: se  $\mathcal{A}$  é um atlas coerente, as restrições  $\varphi|_{\varphi^{-1}(U \cap V)}$  das parametrizações  $\varphi : V_0 \rightarrow V$ , pertencentes a  $\mathcal{A}$ , constituem um atlas coerente em  $U$ .

**Proposição 4.2.1.** *Se as superfícies  $M$  e  $N$  são difeomorfas então uma delas é orientável se, e somente se, a outra é.*

**Demonstração:** A prova desse resultado é análogo a prova da Prop. 2.2.1. ■

**Observação 4.2.1.** Uma observação simples, porém crucial, para a obtenção de um atlas coerente é a seguinte: dada uma parametrização  $\varphi : V_0 \rightarrow V$ , de classe  $C^k$ , numa superfície  $M$ , existe uma outra parametrização  $\varphi_1 : V_1 \rightarrow V$ , também de classe  $C^k$ , com a mesma imagem  $V$ , tal que, para toda  $\psi : W_0 \rightarrow W$ ,  $\psi \in C^k$ , em  $M$ , com  $V \cap W \neq \emptyset$ , tem-se  $\det J(\psi^{-1} \circ \varphi_1)(x) = -\det J(\psi^{-1} \circ \varphi)(\bar{x})$ , qualquer que seja  $p = \varphi_1(x) = \varphi(\bar{x}) \in V \cap W$ . Basta tomar  $\varphi_1 = \varphi \circ \xi$ , onde  $\xi : V_1 \rightarrow V_0$  é qualquer difeomorfismo de classe  $C^k$  com determinante jacobiano negativo em todos os pontos. Por exemplo, podemos considerar a reflexão  $\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , dada por  $\xi(x_1, \dots, x_m) = (-x_1, x_2, \dots, x_m)$  e pôr  $V_1 = \xi^{-1}(V_0)$ . Ao passar de  $\varphi$  para  $\varphi_1$ , diremos que estamos *mudando o sinal* da parametrização  $\varphi$ .

Como primeira aplicação da possibilidade de "mudar o sinal" de uma parametrização sem alterar sua classe de diferenciabilidade nem sua imagem temos o próximo exemplo.

**Exemplo 4.2.3.** Se uma superfície  $M$  admite um atlas formado por duas parametrizações  $\varphi : U_0 \rightarrow U$ ,  $\psi : V_0 \rightarrow V$ , com  $W = U \cap V$  conexo, então  $M$  é orientável. Com efeito, com  $\varphi^{-1}(W)$  é conexo, ou o determinante jacobiano de  $\psi^{-1} \circ \varphi$  é positivo em todos os pontos, então  $\mathcal{A} = \{\varphi, \psi\}$  é um atlas coerente, ou é negativo em todos os pontos. Neste caso, mudando o sinal de  $\varphi$ , obtemos uma parametrização  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow U$  tal que o atlas  $\{\varphi_1, \psi\}$  é coerente. Em qualquer caso,  $M$  é orientável.

Seja  $\mathcal{A}$  uma orientação numa superfície  $M$  de classe  $C^k$ . Como  $\mathcal{A}$ , se  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  e  $\psi : V_0 \rightarrow V$  são parametrizações positivas, tem-se  $\det J(\psi^{-1} \circ \varphi)(x) > 0$  para todo

$x \in \varphi^{-1}(U \cap V)$ . E como  $\mathcal{A}$  é máximo, se  $\xi : U_0 \rightarrow U$  é uma parametrização de classe  $C^k$  não pertencente a  $\mathcal{A}$ , deve existir alguma  $\psi : V_0 \rightarrow V$ , com  $\psi \in \mathcal{A}$ ,  $U \cap V \neq \emptyset$  e algum ponto  $p = \xi(x) \in U \cap V$  tal que  $\det J(\psi^{-1} \circ \xi)(x) < 0$ .

**Proposição 4.2.2.** *Sejam  $\mathcal{A}$  um atlas coerente máximo de classe  $C^k$  na superfície  $M$  e  $\xi : V_0 \rightarrow V$  uma parametrização de classe  $C^k$  em  $V \subset M$ , não pertence ao atlas  $\mathcal{A}$ . Se  $V$  é conexo então, para toda parametrização  $\psi : W_0 \rightarrow W$ , pertencente a  $\mathcal{A}$ , tem-se  $\det J(\psi^{-1} \circ \xi)(x) < 0$  seja qual for  $x \in \xi^{-1}(V \cap W)$ .*

**Demonstração:** O conjunto  $A$ , formado pelos pontos  $p = \xi(x) \in V$  tais que existe uma parametrização  $\psi : W_0 \rightarrow W$ , pertence a  $\mathcal{A}$ , com  $p \in W$  e  $\det J(\psi^{-1} \circ \xi)(x) < 0$  é aberto em  $V$ , como também é o conjunto  $B$  dos pontos  $p = \xi(x)$  tais que existe  $\varphi : Z_0 \rightarrow Z$ ,  $\varphi \in \mathcal{A}$ ,  $p \in Z$  e  $\det J(\varphi^{-1} \circ \xi)(x) > 0$ . Como  $\mathcal{A}$  é um atlas, todo ponto de  $V$  está na imagem de alguma parametrização pertencente a  $\mathcal{A}$ , logo  $V = A \cup B$ . Além disso, se existisse  $p = \xi(x) = \psi(y) \in A \cap B$ , da igualdade  $\varphi^{-1} \circ \xi = (\varphi^{-1} \circ \psi) \circ (\psi^{-1} \circ \xi)$  obteríamos

$$\det J(\varphi^{-1} \circ \xi)(x) = \det J(\varphi^{-1} \circ \psi)(y) \cdot \det J(\psi^{-1} \circ \xi)(x),$$

uma igualdade absurda pois o primeiro membro é positivo e, no segundo membro, o primeiro fator é positivo porque  $\mathcal{A}$  é coerente e o segundo fator é negativo pela definição do conjunto  $A$ . Portanto  $V = A \cup B$  é uma cisão. Mas  $V$  é conexo e  $A \neq \emptyset$ . (É neste ponto que usamos o fato de  $\mathcal{A}$  ser máximo: de  $\xi \notin \mathcal{A}$  segue-se que  $A \neq \emptyset$ ). Logo  $B = \emptyset$ , o que prova a proposição. ■

Dado um atlas coerente máximo  $\mathcal{A}$  na superfície orientável  $M$ , dizemos que uma parametrização  $\xi : V_0 \rightarrow V$  em  $M$  é negativa, e escrevemos  $\xi < 0$ , quando, para toda parametrização  $\psi : W_0 \rightarrow W$  pertencente ao atlas  $\mathcal{A}$ , e para todo ponto  $p = \xi(x) \in V \cap W$ , tivermos  $\det J(\psi^{-1} \circ \xi)(x) < 0$ . A proposição 4.2.2 diz que se  $V$  é conexo então  $\xi < 0$  se, e somente se,  $\xi \notin \mathcal{A}$ .

Duas parametrizações negativas são sempre coerentes: se  $\xi : V_0 \rightarrow V$  e  $\zeta : W_0 \rightarrow W$  são ambas negativas, para todo  $p \in V \cap W$  tome uma parametrização positiva  $\varphi$  cuja imagem contenha  $p$  e observe que  $J(\zeta^{-1} \circ \xi) = J(\zeta^{-1} \circ \varphi) \cdot J(\varphi^{-1} \circ \xi)$ . Assim, as parametrizações negativas constituem um atlas coerente  $\mathcal{A}^*$ , o qual é máximo. A orientação de  $M$  definida pelo atlas  $\mathcal{A}^*$  chama-se *orientação oposta* de  $\mathcal{A}$ .

**Proposição 4.2.3.** *Sejam  $\varphi : V_0 \rightarrow V$ ,  $\psi : W_0 \rightarrow W$  parametrizações de classe  $C^1$  uma superfície  $M$ , com  $V, W$  conexas e  $V \cap W \neq \emptyset$ . Se o determinante jacobiano de  $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(V \cap W) \rightarrow \psi^{-1}(V \cap W)$  muda de sinal então  $M$  não é orientável.*

**Demonstração:** Com efeito, se  $M$  fosse orientável, tomaríamos um atlas coerente

máximo  $\mathcal{A}$ , de classe  $C^1$  em  $M$ . A hipótese feita impede que  $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ . A Prop. 4.2.2 também impede que uma dessas parametrizações pertença  $\mathcal{A}$  e a outra não. Restaria apenas a possibilidade de  $\varphi \notin \mathcal{A}$  e  $\psi \notin \mathcal{A}$ . Como  $V$  e  $W$  conexas, teríamos  $\varphi < 0$  e  $\psi < 0$ , logo  $\varphi$  e  $\psi$  seriam coerentes, o que é um absurdo. Logo  $M$  é não orientável. ■

**Observação 4.2.2.** O determinante jacobiano de  $\psi^{-1} \circ \varphi$  nunca se anula. Logo ele só pode mudar de sinal quando a interseção  $V \cap W$  é desconexa.

Para encerrar este capítulo vamos apresentar um exemplo de superfície não orientável utilizando a proposição anterior.

**Exemplo 4.2.4.** Seja  $M \subset \mathbb{R}^6$  o conjunto das matrizes  $2 \times 3$  de posto 1. Escrevendo cada matriz  $2 \times 3$  sob a forma  $(v, w)$ , onde  $v, w \in \mathbb{R}^3$  são suas linhas,  $M$  é o conjunto das matrizes  $(v, w) \in \mathbb{R}^6 - \{0\}$  tais que  $v$  e  $w$  são linearmente dependentes. Temos  $M = V \cup W$ , onde  $V$  é o conjunto das matrizes de  $M$  cuja a primeira linha é  $\neq 0$  enquanto as matrizes de  $W$  têm a segunda linha não nula. Sejam  $U = \mathbb{R}^3 - \{0\}$  e  $V_0 = U \times \mathbb{R}$ . As aplicações  $\varphi : V_0 \rightarrow V$ ,  $\psi : V_0 \rightarrow W$ , definidas por  $\varphi(v, t) = (v, tv)$  e  $\psi(v, t) = (tv, v)$ , são parametrizações de classe  $C^\infty$  e  $\varphi^{-1}(V \cap W) = U \times (\mathbb{R} - \{0\}) = \psi^{-1}(V \cap W)$  tem duas componentes conexas, a saber,  $U \times (-\infty, 0)$  e  $U \times (0, +\infty)$ . A mudança de parametrização  $\psi^{-1} \circ \varphi : (v, t) \mapsto (tv, 1/t)$ , ou seja,  $(x, y, z, t) \mapsto (tx, ty, tz, 1/t)$ , tem determinante jacobiano igual  $-t$ , o qual é positivo na primeira componente conexa e negativo na segunda.  $M$  é portanto uma superfície de classe  $C^\infty$  e dimensão 4 em  $\mathbb{R}^6$  não orientável pela proposição 4.2.3. ■

## 5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo apresentar uma introdução ao estudo da geometria diferencial e preparar o leitor para uma conexão com cálculo da geometria intrínseca e o estudo da geometria riemanniana. A geometria diferencial é o ramo da matemática responsável pelo estudo da geometria utilizando técnicas do cálculo diferencial e integral de várias variáveis, e desenvolveu-se principalmente como uma ciência aplicada em questões como cartografia, computação gráfica, astronomia, entre outras. Além de sua contribuição para outras áreas da matemática como, por exemplo, equações diferenciais.

Iniciamos, contando um pouco da história e desenvolvimento da geometria diferencial, citando nomes importantes que desempenharam papel importante para esta área. Falamos como se daria o desenvolvimento deste trabalho e qual o objetivo principal do mesmo.

No capítulo 2, desenvolvemos a parte inicial da teoria de superfícies, tratando de superfícies bidimensionais no  $\mathbb{R}^3$  (superfícies regulares). Tal capítulo, teve como objetivo, familiarizar o leitor com os conceitos e terminologias de superfícies. Apresentamos exemplos de superfícies, para facilitar o entendimento sobre estes conjuntos e fixar as ideias sobre as proposições apresentadas durante o capítulo. Apresentamos resultados importantes; a mudança de parâmetros, que é necessário para definir funções diferenciáveis em superfícies; o plano tangente num ponto de uma superfície, que é um subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^3$  de dimensão 2, e aonde pode-se desenvolver o cálculo diferencial na superfície e apresentar uma métrica (ver [Carmo 2005] e [Carmo 2008]); além do conceito de orientação em superfície que nos diz que a mudança de parâmetros entre duas parametrizações de uma superfície orientável tem jacobiano positivo, ou seja, a matriz de mudança de base no plano tangente tem determinante positivo.

No capítulo 3, definimos uma superfície abstrata  $S$  (variedade diferenciável), ou seja, sem a referência do  $\mathbb{R}^3$ . Para tal, apresentamos definições que deram sentido a funções diferenciáveis definidas no conjunto  $S$  e assim estendemos a geometria diferencial para tal conjunto. Foram apresentados exemplos de tais conjuntos, propriedades e resultados similares aos vistos no capítulo 2, sempre fazendo um paralelo e utilizando a experiência adquirida no capítulo anterior.

No capítulo 4, estendemos a noção de superfície regular para superfícies de dimensão  $m$  no  $\mathbb{R}^n$ . A construção deste capítulo foi feita de forma semelhante ao do capítulo 2, apresentando a definição de superfícies  $m$ -dimensionais no  $\mathbb{R}^n$ , exemplos, resultados análogos aos de superfícies regulares, plano tangente no ponto de uma superfície e orientabilidade.

Para finalizar, recomendamos a leitura de [Carmo 2005] e [Lee 2003], como pesquisa sobre variedades diferenciáveis e geometria riemanniana que são as conexões obrigatórias para este trabalho introdutório de superfícies diferenciáveis.

## REFERÊNCIAS

- [Araújo 2012]ARAÚJO, P. V. *Geometria Diferencial*. 2. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2012.
- [Carmo 2005]CARMO, M. P. do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [Carmo 2008]CARMO, M. P. do. *Geometria Riemanniana*. 4. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2008.
- [Lee 2000]LEE, J. M. *Introduction to Topological Manifolds*. New York: Springer, 2000.
- [Lee 2003]LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2. ed. New York: Springer, 2003.
- [Lima 2010]LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 11. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2010. v. 2.
- [O'Neill 2006]O'NEILL, B. *Elementary Differential Geometry*. 2. ed. New York: Academic Press, 2006.
- [Spivak 1999]SPIVAK, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Houston: Publish or Perish, 1999. v. 1.