



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# A TRIGONOMETRIA ALÉM DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Ana Paula Rogério de Oliveira

Orientador  
Prof. Dr. Cícero Lopes Frota

2017



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# A TRIGONOMETRIA ALÉM DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Ana Paula Rogério de Oliveira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador  
**Prof. Dr. Cícero Lopes Frota**

2017

### Ficha Catalográfica

O48t Oliveira, Ana Paula Rogério de.  
A trigonometria além do triângulo e retângulo / Ana Paula Rogério de  
Oliveira. – Maringá : Universidade Estadual de Maringá – UEM, 2017.  
70 f.

Orientador: Dr. Cícero Lopes Frota.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá - UEM.

1. Trigonometria. 2. Funções trigonométricas. 3. Matemática. I.  
Universidade Estadual de Maringá - UEM. II. Título.

(21 ed) CDD: 516.24

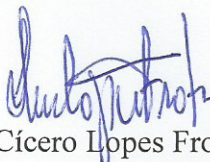
Bibliotecária Responsável Inês Gemelli CRB 9/966

**ANA PAULA ROGÉRIO DE OLIVEIRA**

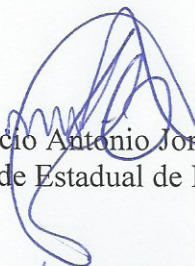
## **A TRIGONOMETRIA ALÉM DO TRIÂNGULO RETÂNGULO**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

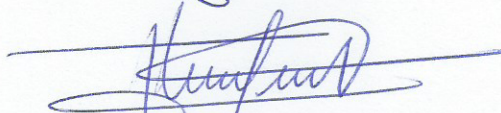
COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. Cícero Lopes Frota  
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientador)



Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva  
Universidade Estadual de Londrina



Prof. Dr. Thiago Fanelli Ferraiol  
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 31 de março de 2017.

Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

*Dedico este trabalho ao meu esposo Anderson Costa de Oliveira e aos meus filhos Anna Luiza Rogério, Giovanna Rogério e Pedro Rogério, os quais me deram força para perseverar nesta etapa de minha vida, sempre com apoio constante, partilhando risos e lágrimas.*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus, pois me mostrou que não há noite que possa impedir o nascer do sol e assim, tornou possível o que parecia impossível, abrindo as portas quando eu não via saída.

A meu esposo, Anderson Costa de Oliveira, que me incentivou desde o início, sendo a inspiração que me sustentou por dois anos de estudo e quilômetros de rodovia. Obrigada por ser meu melhor amigo.

Muito especialmente, desejo agradecer ao meu orientador Prof. Doutor Cícero Lopes Frota, pela disponibilidade, atenção dispensada, paciência, dedicação e profissionalismo, sempre abrindo portas onde eu nem as via.

Aos meus Pais, João Vitorino Rogério e Maria Becegatto Rogério, pelo incentivo, compreensão e encorajamento, durante todo este período, por muitas e muitas vezes tornando minha ausência menos notada possível por seus netos.

Aos meus sogros Aurélio Costa de Oliveira e Aurora Emília de Oliveira, que nos momentos em que zelaram de meus filhos enquanto estava ausente por conta dos estudos.

A minha irmã, Flávia Rogério, sangue do meu sangue, por sempre estar ao lado nos momentos mais difíceis, mesmo que distante, sendo exemplo de dedicação aos estudos.

Aos meus amigos e parentes, pelo seu apoio incondicional.

Aos meus colegas de mestrado, pelos momentos de entusiasmo e de sofrimento partilhados em conjunto. Tudo que aprendi com vocês não esquecerei jamais!

Aos professores do PROFMAT pelos ensinamentos e sabedoria.

À CAPES pelo apoio financeiro recebido.

Enfim, a todos que em algum momento colaboraram para que eu chegasse até aqui.

# Resumo

Nesta dissertação estudamos as funções trigonométricas e suas principais propriedades. Introduzimos as funções trigonométricas no triângulo retângulo e usando uma abordagem geométrica, via função de Euler, fazemos a extensão destas para toda reta real. Além disso, apresentamos também um estudo analítico das funções trigonométricas.

**Palavras-chave:** Trigonometria, Funções Trigonométricas, Matemática.

# Abstract

In this master thesis we study the trigonometric functions and their main properties. We introduce the trigonometric functions on the rectangle triangle and using a geometric approach, via Euler's function, we extend them to the real straight line. Moreover, we present an analytical study of the trigonometric functions.

**Keywords:** Trigonometry, Trigonometric Functions, Mathematics.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>1 A Trigonometria no Triângulo Retângulo</b>	<b>9</b>
1.1 Semelhança de Triângulos . . . . .	9
1.2 Seno, Cosseno e Tangente . . . . .	17
1.3 Aplicações . . . . .	26
<b>2 Funções Trigonométricas - Uma abordagem geométrica</b>	<b>30</b>
2.1 Motivação: Movimentos Periódicos - Oscilatórios . . . . .	30
2.2 Função de Euler . . . . .	35
2.3 As funções trigonométricas . . . . .	43
2.4 Propriedades básicas das funções trigonométricas . . . . .	45
2.5 Derivada das funções trigonométricas . . . . .	57
<b>3 Funções Trigonométricas - Uma abordagem analítica</b>	<b>63</b>
3.1 Motivação: Vibrações mecânicas . . . . .	63
3.2 Sequências de funções . . . . .	66
3.3 Construção analítica das funções trigonométricas . . . . .	68
3.4 Propriedades básicas das funções trigonométricas . . . . .	75
<b>Referências</b>	<b>82</b>

# Introdução

A Trigonometria é um ramo da matemática onde se estuda certas funções especiais, hoje denominadas "funções trigonométricas". Originalmente a palavra trigonometria significa medida das partes de um triângulo (do grego a palavra trigonon significa triângulo e a palavra metron significa medida) e sua origem data do século IV a.c., com os egípcios e babilônios, motivados por problemas ligados a Astronomia, Agrimensura e Navegação. Hiparco de Nicéia, um astrônomo que viveu por volta de 180 a 125 a.c., é considerado o "Pai da Trigonometria", por conta do tratado de sua autoria, escrito em doze livros, onde fez a construção da primeira tabela trigonométrica. Nesta dissertação apresentamos um estudo sobre trigonometria o qual poderá ser útil para os estudantes do ensino médio e também para os professores de matemática em geral. Iniciamos o estudo respeitando a evolução histórica da teoria onde, por meio de semelhança de triângulos, introduziu-se os conceitos de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo qualquer. Esta é a conhecida trigonometria no triângulo retângulo que apresentamos e discutimos no primeiro capítulo deste trabalho.

Durante muito tempo, por mais de mil anos, a Trigonometria ficou restrita ao triângulo retângulo e somente no ano de 1748 tomou a forma atual quando Leonhard Paul Euler, matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha, introduziu a medida do raio de um círculo como unidade (o radiano) e definiu as funções trigonométricas aplicadas a um número real qualquer e não mais a um ângulo agudo, como era feito até então. Na verdade a mudança das razões trigonométricas para funções periódicas já começou com François Viète, matemático francês (1540-1603) que foi o primeiro a dar um tratamento analítico à Trigonometria, entretanto estas ideias se concretizaram com o aparecimento do Cálculo Diferencial e Integral e o estudo dos movimentos (Mecânica), e através de Euler foram concretamente realizadas. Controvérsias a parte, conforme discutimos no capítulo dois desta dissertação, de fato a única razão plausível para a extensão das funções trigonométricas para todo número real, é a necessidade de se modelar movimentos oscilatórios (ou vibratórios), que são aqueles movimentos periódicos cujo sentido do movimento, ou ainda o sentido da velocidade, é invertido regularmente, tais como o movimento do pêndulo de um relógio, movimento de uma massa presa a uma mola, movimento do pistão de um motor e etc.

No capítulo dois, motivados pelo problema de se descrever movimentos oscilatórios,

---

usando uma abordagem geométrica, introduzimos a função de Euler que, intuitivamente consiste em enrolar a reta real em um carretel circular de raio igual a uma unidade. Composto a função de Euler com as funções projeções usuais obtemos as funções trigonométricas, cosseno, seno e a razão destas, a função tangente. Definidas tais funções estudamos suas principais propriedades e obtemos um esboço dos seus gráficos. Todo conteúdo abordado até a penúltima seção do capítulo dois (seção 2.4) faz parte do currículo escolar da educação básica e nestes sentido a dissertação pode ser bastante útil para os estudantes do ensino médio. Finalizamos o capítulo dois calculando a derivada das funções trigonométricas, conceito essencial e decisivo para concluir sobre a concavidade dos esboços gráficos apresentados.

No terceiro capítulo retomamos a questão relacionado à modelagem dos movimentos oscilatórios. Desta vez, aplicando a segunda lei de Newton, concluimos que as funções que descrevem estes movimentos devem ser soluções da equação diferencial ordinária (EDO), linear, de segunda ordem  $y'' = -y$ . Então, por uma abordagem puramente analítica, sem qualquer apelo geométrico, construímos duas funções que são soluções da EDO acima. Mais ainda, verificamos que tais funções formam um conjunto fundamental de soluções para a EDO, isto é, toda e qualquer solução da EDO é uma combinação linear destas. Também verificamos que as funções construídas são, na verdade, as funções trigonométricas estudadas no capítulo dois. A construção analítica das funções trigonométricas está baseada na teoria sobre seqüências de funções e convergência uniforme. Este capítulo foge ao escopo do ensino médio e é usualmente estudado nos cursos avançados de análise real. Entretanto imaginamos que através deste estudo o professor, certamente, amplia seu conhecimento sobre o assunto e consegue ter uma visão ampla e completa sobre o tema "Trigonometria".

# 1 A Trigonometria no Triângulo Retângulo

## 1.1 Semelhança de Triângulos

O conceito de proporcionalidade, presente no famoso Teorema de Tales e na teoria sobre semelhança de triângulos, foi um dos conhecimentos geométricos mais úteis ao longo dos tempos. Foi com semelhança de triângulos que Aristarco (310 a.C. - 230 a.C.) comparou as distâncias da Terra, e os matemáticos árabes estabeleceram as razões trigonométricas, hoje conhecidas como seno, cosseno e tangente. Tales de Mileto (624 a.C. - 547 a.C.), considerado um dos mais versáteis gênios da Antiguidade, levou para Grécia a Geometria dos egípcios e começou a aplicar a ela os procedimentos da Filosofia grega. Com seu método de comparar sombras, hoje conhecido como teorema de Tales, realizou muitos cálculos até então inéditos. O mais famoso deles foi a obtenção da altura de uma pirâmide: conta-se que Tales fincou uma vareta verticalmente no chão, ao lado da pirâmide e esperou até um momento em que a sombra e a vareta tivessem exatamente o mesmo tamanho. Nesse instante, Tales mediu a sombra da pirâmide e descobriu sua altura. Como é possível explicar o procedimento de Tales para obter a altura da pirâmide?

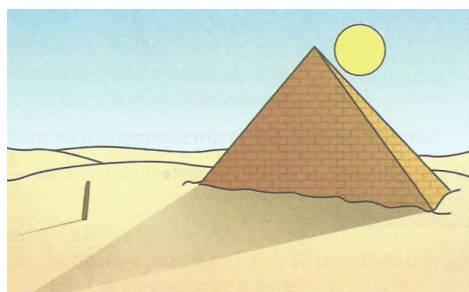
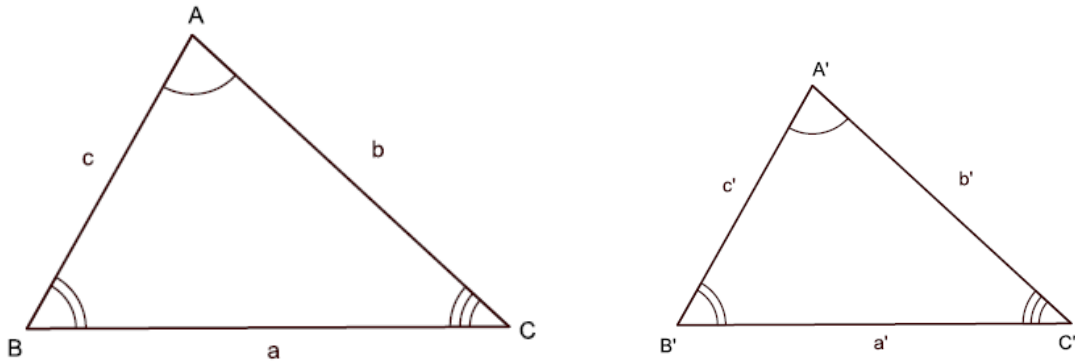


Figura 1.1: Retirada de [3].

Sobre a semelhança de triângulos: Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando eles possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados *homólogos* (correspondentes) proporcionais.

Na figura abaixo os triângulos ABC e A'B'C', são semelhantes:

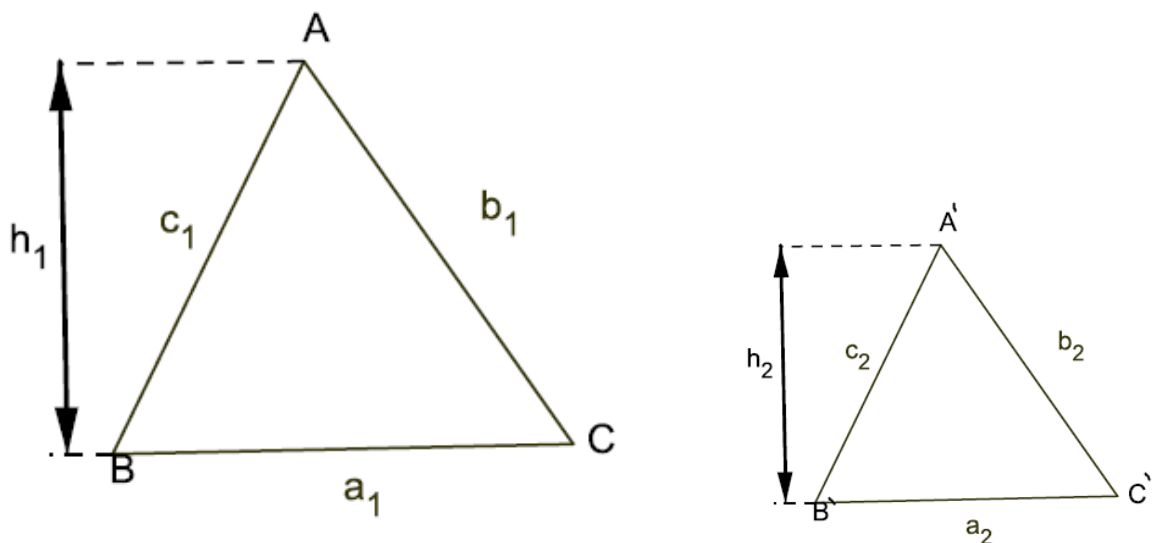


Escrevemos:  $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ , para denotar que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo A'B'C'. Esquematizamos a semelhança de triângulos por:

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \\ \hat{C} \cong \hat{C}' \end{cases} \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k,$$

aqui  $k$  é uma constante denominada razão de semelhança.

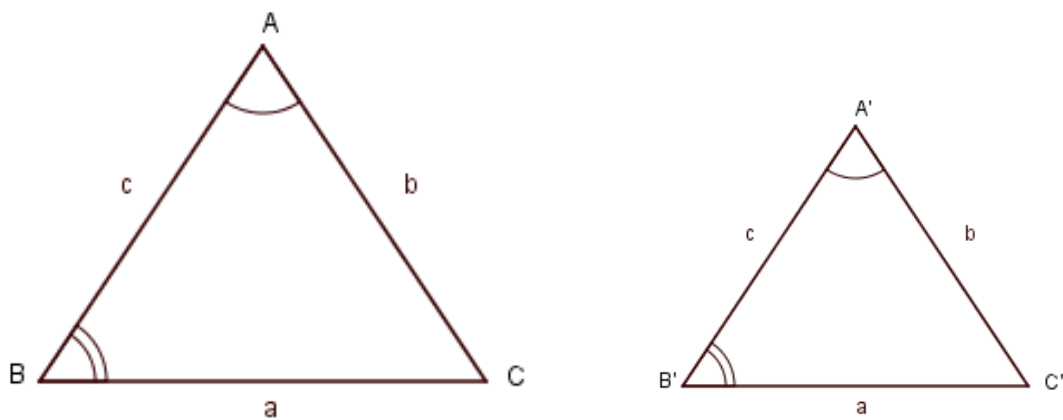
Um fato interessante é que, se dois triângulos são semelhantes com razão de semelhança  $k$ , então quaisquer outros elementos lineares homólogos desses triângulos (alturas, perímetros, medianas, etc.) também serão proporcionais com a mesma razão  $k$ .



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{a_2 + b_2 + c_2} = k$$

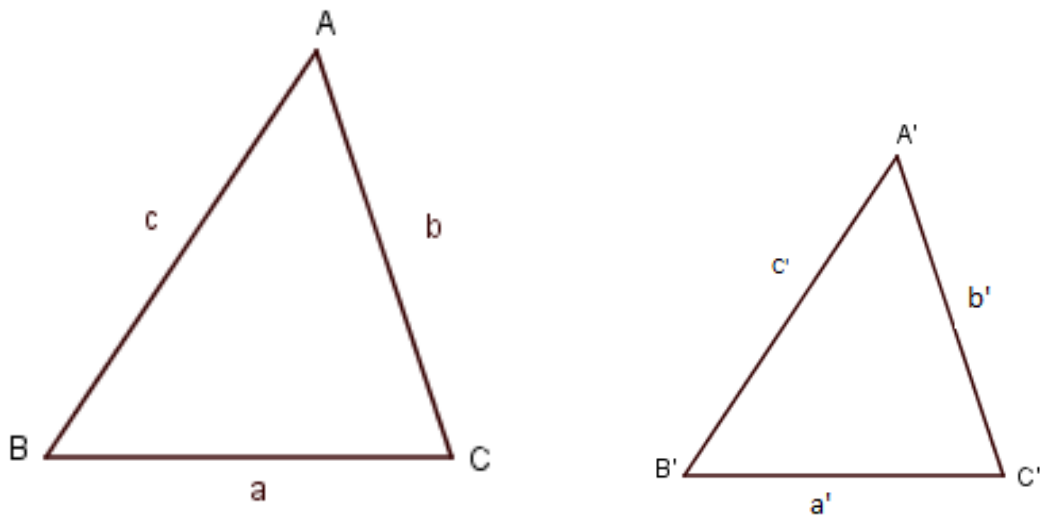
É possível estabelecermos um conjunto de condições suficientes para que tenhamos garantida a semelhança entre dois triângulos dados. Para isto, basta verificar alguns elementos específicos. Tais condições são conhecidas como casos de semelhança, os quais veremos a seguir.

1º caso de semelhança: AA (Ângulo, Ângulo). Dois triângulos são semelhantes se dois ângulos de um são congruentes a dois ângulos do outro.



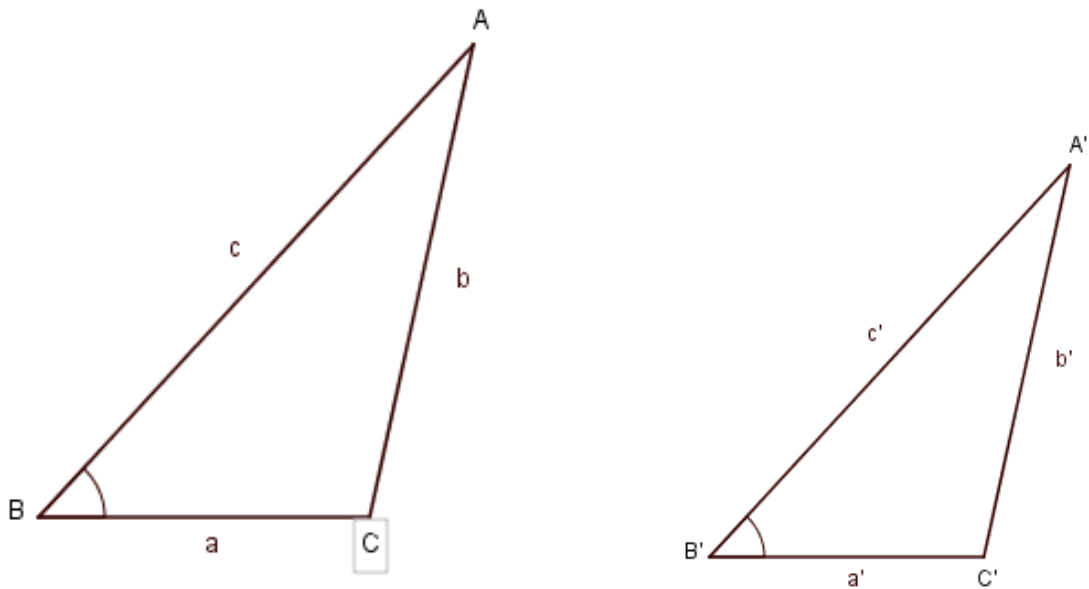
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

2º caso de semelhança: LLL (Lado, Lado, Lado). Dois triângulos são semelhantes se os lados de um são proporcionais aos lados dos outros.



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

3º caso de semelhança: LAL (Lado, Ângulo, Lado). Dois triângulos são semelhantes se possuem um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais.



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} \cong \widehat{B'} \\ \frac{c}{c'} = \frac{a}{a'} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

É importante observar que a semelhança de triângulos é uma relação de equivalência. Com efeito, considere  $\tau$  o conjunto de todos os triângulos no plano. Então, é fácil

ver que:

- (i)  $T \sim T, \forall T \in \tau$  (reflexiva: todo triângulo é semelhante a si mesmo).
- (ii) Se  $T_1 \sim T_2$ , então  $T_2 \sim T_1$  (simétrica: se um triângulo  $T_1$  é semelhante a um triângulo  $T_2$ , então  $T_2$  é semelhante a  $T_1$ ).
- (iii) Se  $T_1 \sim T_2$  e  $T_2 \sim T_3$ , então  $T_1 \sim T_3$  (transitiva: se um triângulo  $T_1$  é semelhante ao triângulo  $T_2$ , e este é semelhante a outro triângulo  $T_3$ , então  $T_1$  é semelhante a  $T_3$ ).

A teoria sobre semelhança de triângulos é a base para o desenvolvimento de vários conceitos. A primeira aplicação desta teoria é a obtenção de importantes relações métricas num triângulo retângulo.

Seja dado um triângulo retângulo  $ABC$ , reto em  $\hat{A}$ , cujos lados opostos aos ângulos  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ , medem  $a, b$  e  $c$ . Ou seja  $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$  e  $\overline{AB} = c$ . A partir do ponto  $A$ , traçamos um segmento perpendicular ao lado  $BC$ , dando origem ao ponto  $H$ . Esta construção determina sobre o lado  $BC$  dois segmentos,  $BH$  e  $HC$ , cujas medidas, são denotadas por  $m$  e  $n$ , respectivamente. Note que  $a$  é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo  $ABC$ ;  $b$  e  $c$  são as medidas dos catetos;  $h$  é a medida do segmento  $AH$  (altura relativa a hipotenusa  $BC$ ) e  $m + n = a$ . A situação dada esta exposta na figura:

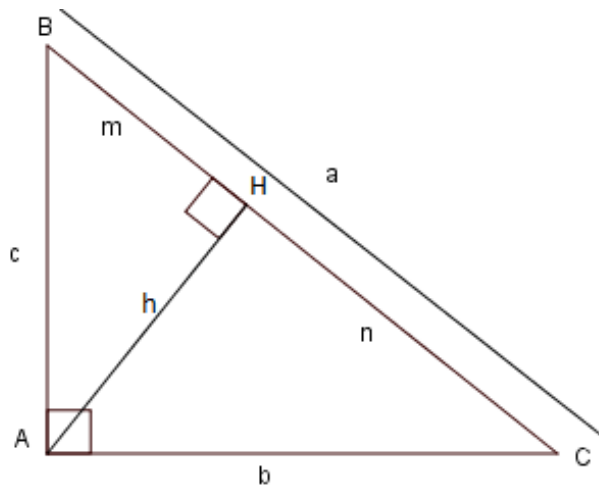


Figura 1.2

Podemos destacar três triângulos retângulos:  $\triangle ABC, \triangle HBA$ , e  $\triangle HCA$ , os quais são semelhantes entre si. De fato:

- (1)  $\triangle ABC \sim \triangle HBA$ . Observamos na figura (1.3) que os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{H}$ , são retos e o ângulo  $\hat{B}$  é comum aos dois triângulos. Logo, pelo caso AA, concluímos a afirmação.



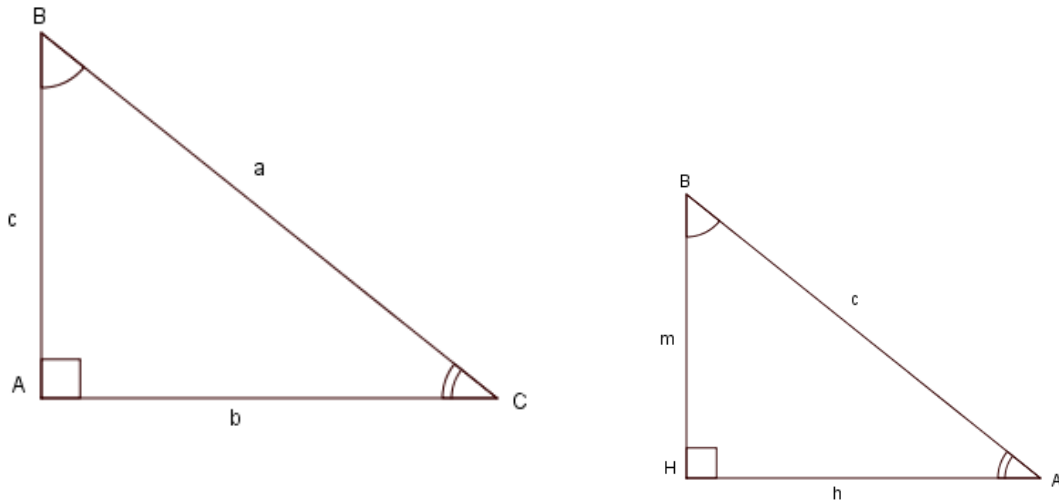


Figura 1.3

(2)  $\triangle ABC \sim \triangle HAC$ . Novamente aplicamos o caso AA pois os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{H}$  são ângulos retos e o ângulo  $\hat{C}$  é comum aos dois triângulos, veja figura (1.4).

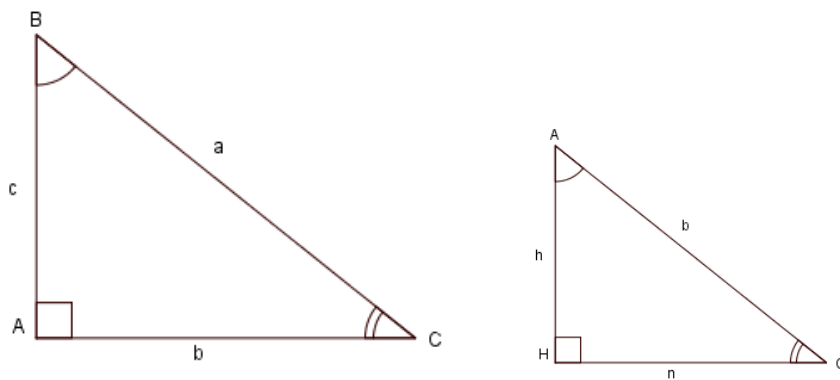


Figura 1.4

(3)  $\triangle HBA \sim \triangle HAC$ . Isto decorre dos casos anteriores e da propriedade transitiva da semelhança de triângulos, veja figura (1.5).

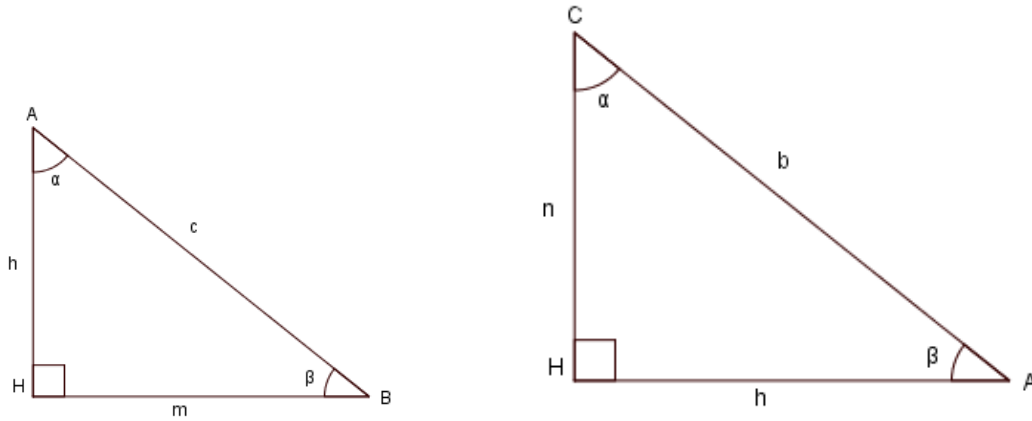


Figura 1.5

A partir da semelhança desses triângulos, no próximo teorema estabelecemos importantes relações entre as medidas de seus lados, conhecidas na literatura como relações métricas no triângulo retângulo.

**Teorema 1.1.** (*Relações métricas*) Considere o  $\triangle ABC$  e seus elementos, conforme a figura 1.2. Então:

- |   |                  |
|---|------------------|
| (i) $c^2 = m.a$                               | (ii) $b.c = a.h$ |
| (iii) $b^2 = n.a$                             | (iv) $h^2 = m.n$ |
| (v) $a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras). |                  |

Demonstração. Para provar (i) e (ii), vejamos que da semelhança entre os triângulos ABC e HBA (veja figura (1.3)) temos que  $\frac{c}{a} = \frac{m}{c}$ , de onde resulta que  $c^2 = m.a$ .

Também observamos que  $\frac{a}{b} = \frac{c}{h}$  e por isso,  $b.c = a.h$ .

Para verificar (iii), veja que da semelhança entre os triângulos ABC e HAC (figura (1.4)), temos que  $\frac{a}{b} = \frac{b}{n}$ , de onde segue a afirmação.

Pela semelhança dos triângulos HBA e HAC (figura (1.5)), temos que

$$\left[ \frac{\overline{AH}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{HB}}{\overline{HA}} \Leftrightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Leftrightarrow h^2 = m.n \right],$$

o que prova (iv).

Para finalizar provemos (v) (Teorema de Pitágoras). Usando (i) e (iii) obtemos

$$b^2 + c^2 = n.a + m.a = (n + m).a = a.a = a^2.$$

Isto conclui a demonstração do Teorema 1.1. ■

Finalizamos esta seção ilustrando a utilização das relações métricas para a solução de dois problemas práticos.

Problema 1: Uma escada de 25 metros está encostada na parte vertical de um edifício, de forma que o pé da escada está a 7 metros da base do prédio. Se o topo da escada escorrega 4 metros, quanto irá escorregar o pé da escada?

Solução. A situação apresentada no problema nos sugere a figura (1.6). Denotando por  $x$  a altura do edifício e  $y$  a distância que a escada escorrega. Pelo item (v) do Teorema 1.1 (Teorema de Pitágoras), temos que  $25^2 = 7^2 + x^2$ . Logo,  $x = 24m$ .

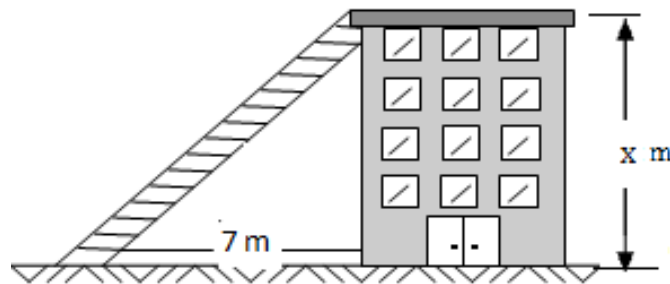
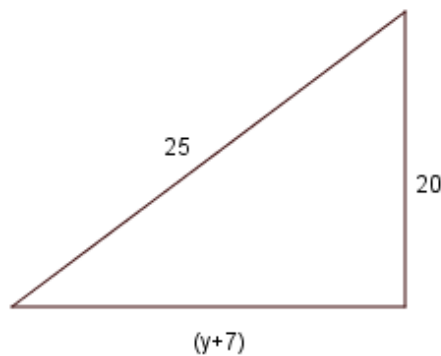


Figura 1.6

No momento que o topo da escada escorrega 4 metros, ele está a 20 metros do chão, e o pé da escada está a  $(y + 7)m$  da base do prédio. Veja a figura:



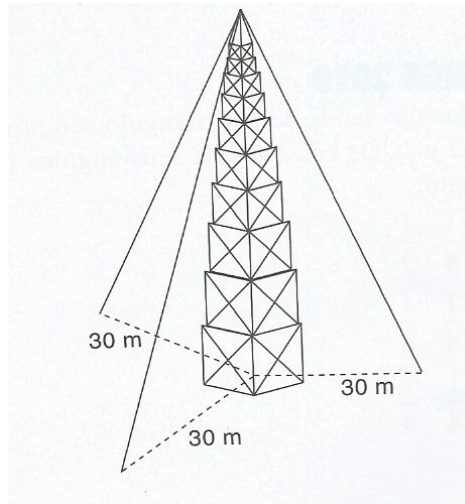
Novamente, usando o Teorema de Pitágoras, temos que

$$25^2 = 20^2 + (y + 7)^2.$$

Resolvendo esta equação quadrática encontramos duas raízes, a saber,  $y_1 = 8$  e  $y_2 = -22$ . Descartamos a segunda raiz negativa e ficamos com  $y = 8$  metros. Portanto, o pé da escada estará a 15m da base do prédio.

Problema 2: A figura abaixo mostra uma antena retransmissora de rádio de 72 metros de altura. Ela é sustentada por 3 cabos de aço que ligam o topo da antena ao

so, em pontos que estão a 30 metros do pé da antena. Quantos metros de cabos serão utilizados para fazer a sustentação da antena?



Solução. Representamos por  $x$  a medida de cada um dos três cabos que darão sustentação à antena. Então pelo Teorema de Pitágoras vemos que

$$x^2 = 30^2 + 72^2 \Rightarrow x = \sqrt{6084} \Rightarrow x = 78.$$

Portanto, como a antena é sustentada por 3 cabos iguais de 78 metros, serão utilizados 234 metros de cabo de aço.

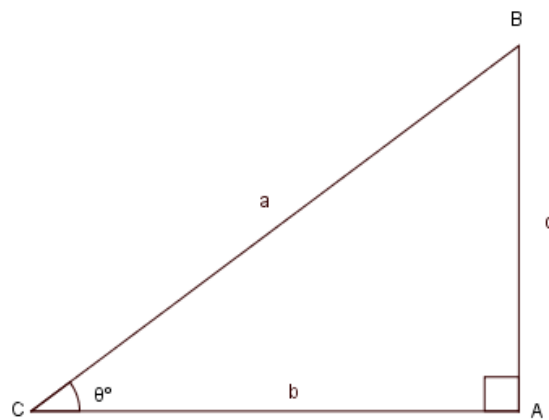
## 1.2 Seno, Cosseno e Tangente

Contam os historiadores que, por volta do ano 140 a.C., o grego Hiparco de Niceia (c. 190 a.C. - c. 120 a.C.) - considerado o maior astrônomo do mundo - relacionou os lados e os ângulos de um triângulo retângulo e elaborou, pela primeira vez na história da humanidade, o equivalente ao que hoje é uma tabela com valores trigonométricos dos ângulos de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ . Posteriormente, já no século II, o astrônomo e geógrafo grego Ptolomeu (85-165) estabeleceu em sua obra *Almagesto* novas proposições trigonométricas. Ele elaborou uma tabela de cordas correspondentes a ângulos de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , ordenadas crescentemente, que é equivalente a uma tabela de senos, um dos conceitos centrais da Trigonometria. Nessa obra, Ptolomeu apresentou também a teoria geocêntrica, que se manteve por cerca de 1500 anos. Povos árabes, que tiveram acesso ao *Almagesto*, divulgaram na Europa os conhecimentos sobre Astronomia e Trigonometria. Depois disso, importantes trabalhos hindus sobre a Trigonometria foram traduzidos para o árabe, no fim do século VIII, mas o primeiro tratado sistemático sobre o tema foi elaborado pelo matemático alemão Johann Müller (1436-1476), em sua obra *De triangulis* (Tratado dos triângulos).

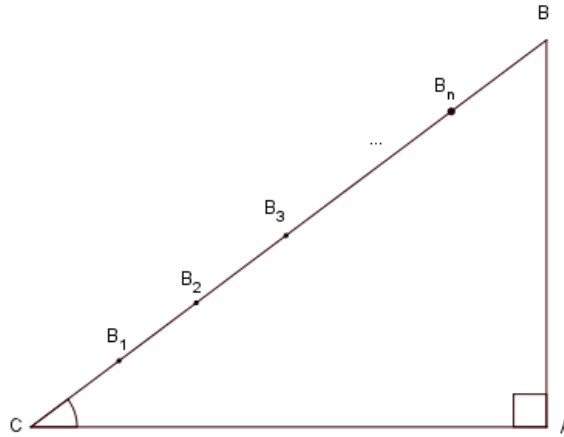


Figura 1.7: Cláudio Ptolomeu, figura retirada de [3].

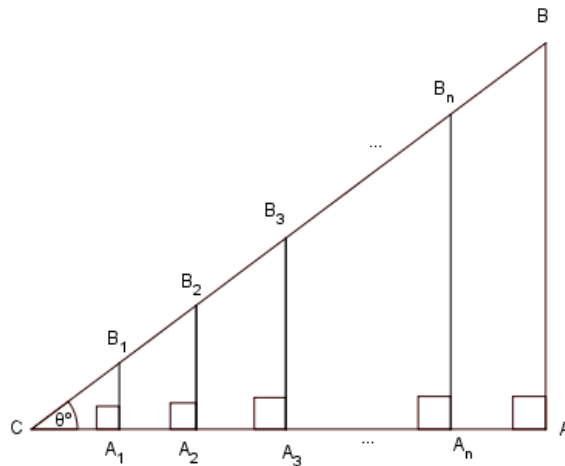
Iniciamos nossas considerações a partir de um triângulo retângulo  $ABC$ , reto em  $\hat{A}$ , com o ângulo agudo  $\hat{ACB}$  medindo  $\theta^\circ$ , conforme o esboçado na figura abaixo, onde  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{AB} = c$ .



Sobre a hipotenusa BC, escolhemos aleatoriamente  $n$  pontos:  $B_1, B_2, \dots, B_n$ .



A partir de cada um dos pontos  $B_i$ , baixamos uma perpendicular ao lado CA, dando origem a  $n$  pontos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sobre o segmento CA, tais que:  $A_i B_i \perp CA, \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ .



Deste modo, pelo caso de semelhança AA(ângulo, ângulo), vemos que:

$$\Delta A_i C B_i \sim \Delta A_j C B_j \sim \Delta A C B, \forall i, j.$$

Portanto,

$$\frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{C B_1}} = \frac{\overline{A_2 B_2}}{\overline{C B_2}} = \dots = \frac{\overline{A_n B_n}}{\overline{C B_n}} = \frac{\overline{A B}}{\overline{C B}} = \frac{c}{a} = k_1; \tag{1.1}$$

$$\frac{\overline{C A_1}}{\overline{C B_1}} = \frac{\overline{C A_2}}{\overline{C B_2}} = \dots = \frac{\overline{C A_n}}{\overline{C B_n}} = \frac{\overline{C A}}{\overline{C B}} = \frac{b}{a} = k_2; \tag{1.2}$$

$$\frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{C A_1}} = \frac{\overline{A_2 B_2}}{\overline{C A_2}} = \dots = \frac{\overline{A_n B_n}}{\overline{C A_n}} = \frac{\overline{A B}}{\overline{C A}} = \frac{c}{b} = k_3. \tag{1.3}$$

Note que as constantes  $k_1, k_2$  e  $k_3$  não dependem do triângulo considerado, mas dependem somente do ângulo  $\widehat{ACB}$ . Ou seja, as constantes  $k_1, k_2$  e  $k_3$  dependem somente do valor de  $\theta$ , medida do ângulo  $\widehat{ACB}$ . Isto motiva a seguinte definição:

**Definição 1.1.** *Dado um número real  $\theta$  tal que  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  definimos, respectivamente, o seno, cosseno e a tangente de  $\theta$  como sendo as constantes  $k_1, k_2$  e  $k_3$  obtidas em (1.1), (1.2) e (1.3).*

Portanto, denotando seno de  $\theta = \text{sen } \theta$ , cosseno de  $\theta = \text{cos } \theta$  e tangente de  $\theta = \text{tg } \theta$ , temos que:

$$\begin{aligned}\text{sen } \theta &= \frac{c}{a} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}, \\ \text{cos } \theta &= \frac{b}{a} = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}}, \\ \text{tg } \theta &= \frac{c}{b} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}}.\end{aligned}$$

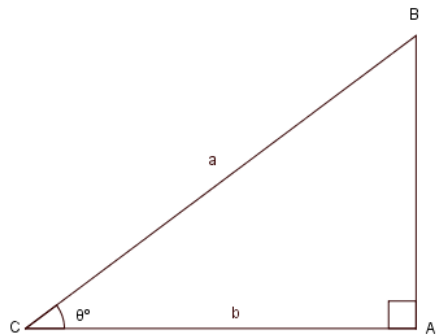


Figura 1.8

Note que o seno, cosseno e a tangente são funções reais definidas no intervalo aberto  $(0, 90^\circ)$ . Estas funções são chamadas funções trigonométricas. Como a medida da hipotenusa é maior do que a medida dos catetos, vemos que  $\text{sen } \theta$  e  $\text{cos } \theta$  são valores entre zero e um. Observe que a definição das funções trigonométricas segue uma abordagem geométrica e está diretamente relacionada com triângulos retângulos. No próximo teorema, apresentamos uma identidade denominada relação fundamental e também fazemos uma caracterização da tangente.

**Teorema 1.2.** *Para todo  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ , temos que:*

(i)  $(\text{sen } \theta)^2 + (\text{cos } \theta)^2 = 1$  (relação fundamental);

(ii)  $\text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}$ .

Demonstração. Dado o número  $\theta$  ( $0 < \theta < 90^\circ$ ), construímos um triângulo retângulo conforme a figura (1.8). Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Dividindo por  $a^2$  ambos os lados desta igualdade, obtemos

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \left(\frac{a}{a}\right)^2,$$

ou seja,

$$\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1.$$

Para provar (ii) basta ver que

$$\text{tg } \theta = \frac{c}{b} = \frac{c \cdot a}{b \cdot a} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}.$$

■

Para resolver problemas é necessário conhecer os valores das funções trigonométricas ( $\text{sen } \theta$ ,  $\text{cos } \theta$  e  $\text{tg } \theta$ ) para diferentes valores de  $\theta$ . Isto conduziu à construção de "tábuas" para estas funções. Baseado nas aplicações e também pela importância na construção das tábuas, 3 valores de  $\theta$  são especialmente importantes, a saber,  $\theta = 30^\circ$ ,  $\theta = 45^\circ$  e  $\theta = 60^\circ$ , que são chamados de arcos notáveis. Para estes arcos, temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.3.** (*Arcos Notáveis*) Referente às funções trigonométricas temos a seguinte tábua:

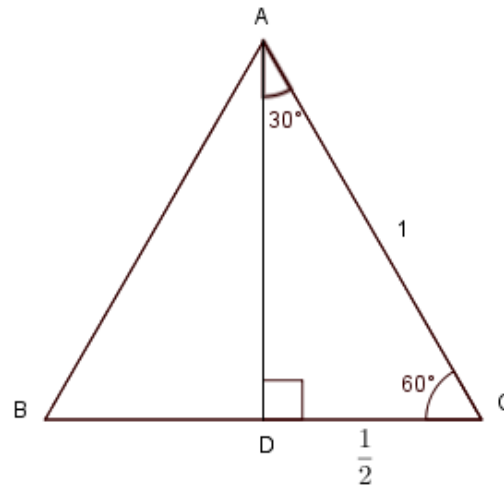
$\theta$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Demonstração. Sabemos que os valores das funções trigonométricas não dependem dos tamanhos dos triângulos retângulos, mas somente do valor do ângulo agudo considerado. Então, a demonstração do teorema é feita com a construção de triângulos convenientes. Iniciamos considerando um triângulo equilátero de lado medindo 1 unidade. Denotamos por A, B e C os vértices do triângulo e traçamos, a partir do vértice A, a altura AD, que neste caso também é mediana. Logo  $\overline{BD} = \overline{DC} = \frac{1}{2}$ . Na figura abaixo, esboçamos nossa construção:

Pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo  $\triangle DCA$ , temos:

$$(\overline{AD})^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

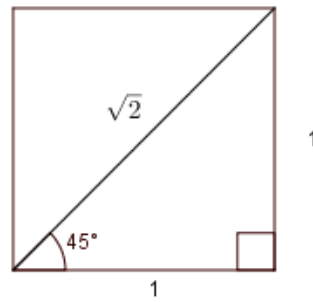




Logo concluímos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 30^\circ &= \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} & \text{e} & \quad \operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{sen} 60^\circ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{e} & \quad \operatorname{cos} 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Para calcularmos o seno e o cosseno de  $45^\circ$ , consideramos um quadrado de lado medindo 1 unidade. Pelo teorema de Pitágoras, encontramos que sua diagonal mede  $\sqrt{2}$ . Assim, temos a situação dada pela figura



Portanto é fácil ver que

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Os valores da tangente, a terceira linha da tabela dada no teorema, é facilmente obtida considerando (ii) do Teorema 1.2. Isto conclui a demonstração do Teorema 1.3. ■

É possível ampliar o conhecimento sobre seno e cosseno por meio de fórmulas de adição, as quais apresentamos a seguir.

**Teorema 1.4.** (*Fórmulas de adição*) *Dados  $\alpha$  e  $\beta$  reais tais que  $0 < \alpha, \beta, (\alpha + \beta), (\alpha - \beta) < 90$ , temos:*

- i)  $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha$ ;*
- ii)  $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta - \text{sen } \beta \cos \alpha$ ;*
- iii)  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta$ ;*
- iv)  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \text{sen } \alpha \text{sen } \beta$ .*

*Demonstração.* Para provar (i) e (iii), construímos um triângulo retângulo AEF de hipotenusa igual a 1, inscrito em um retângulo ABCD, conforme a figura.

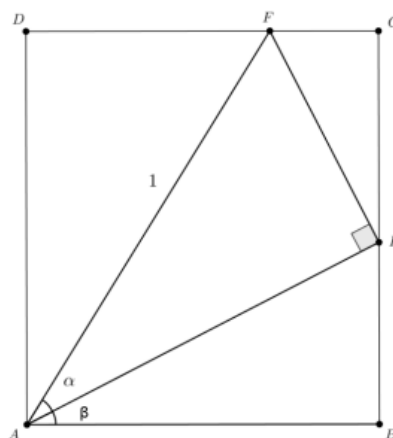


Figura 1.9

Denotamos os ângulos  $E\hat{A}F = \alpha$  e  $B\hat{A}E = \beta$ . Então, é fácil ver que  $\overline{AE} = \cos \alpha$  e  $\overline{EF} = \sin \alpha$ .

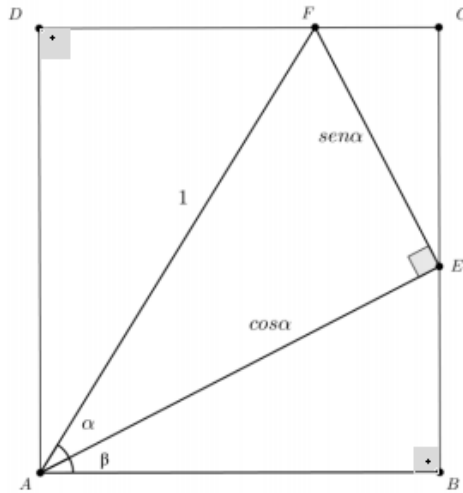


Figura 1.10

Além disso,  $\overline{AB} = \cos \alpha \cdot \cos \beta$  e  $\overline{BE} = \sin \beta \cdot \cos \alpha$ . Note que o ângulo  $A\hat{E}B$  deve medir  $(90^\circ - \beta)$  e, conseqüentemente,  $C\hat{E}F$  deve ter medida  $\beta$ . Também, pelo Teorema de Tales o ângulo  $A\hat{F}D = \alpha + \beta$ . Logo:

$$\overline{CE} = \sin \alpha \cdot \cos \beta, \quad \overline{CF} = \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\overline{FD} = \cos(\alpha + \beta) \quad \text{e} \quad \overline{AD} = \sin(\alpha + \beta).$$

Pelo exposto temos a figura (1.11).

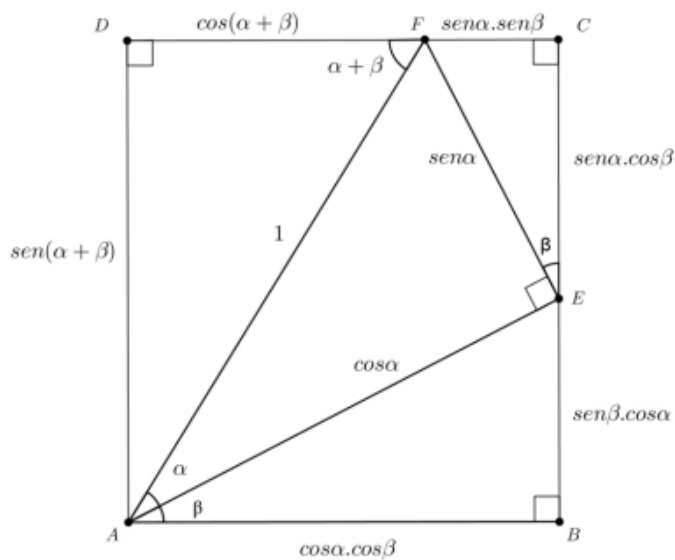


Figura 1.11

Como  $ABCD$  é um retângulo, concluímos que as medidas dos lados opostos são iguais e isto prova os item (i) e (iii) do Teorema 1.4.

Para provar os item (ii) e (iv), construímos um triângulo retângulo  $AEF$  de hipotenusa igual a 1, inscrito em um retângulo  $ABCD$ , conforme figura abaixo:

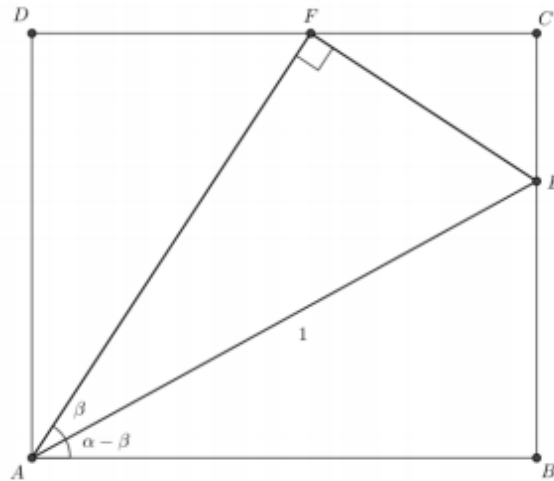


Figura 1.12

Denotamos os ângulos  $E\hat{A}F = \beta$  e  $F\hat{A}B = \alpha$ , de modo que o ângulo  $E\hat{A}B = \alpha - \beta$ . Então,  $\overline{AF} = \cos \beta$  e  $\overline{EF} = \text{sen } \beta$ .

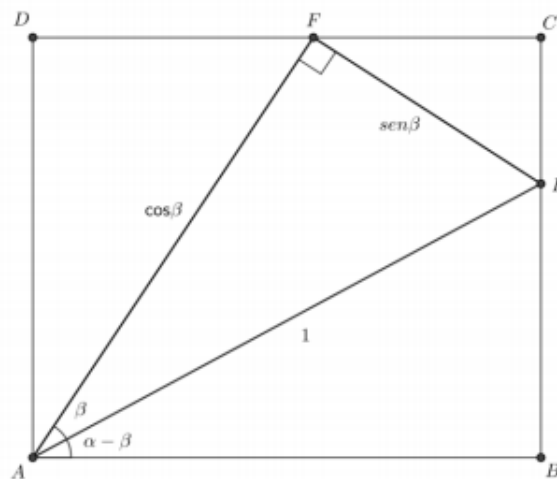


Figura 1.13

Também encontramos  $\overline{AB} = \cos(\alpha - \beta)$  e  $\overline{BE} = \text{sen}(\alpha - \beta)$ . Note que o ângulo  $\widehat{AEB}$  deve medir  $(90^\circ - (\alpha - \beta))$ ,  $\widehat{AEF}$  deve medir  $(90^\circ - \beta)$  e  $\widehat{DAF}$  deve medir  $(90^\circ - \alpha)$ . Consequentemente, o ângulo  $\widehat{CEF} = \widehat{AFD} = \alpha$ . E ainda,  $\overline{CE} = \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha$ ,  $\overline{CF} = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta$ ,  $\overline{FD} = \cos \alpha \cdot \cos \beta$  e  $\overline{AD} = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta$ .

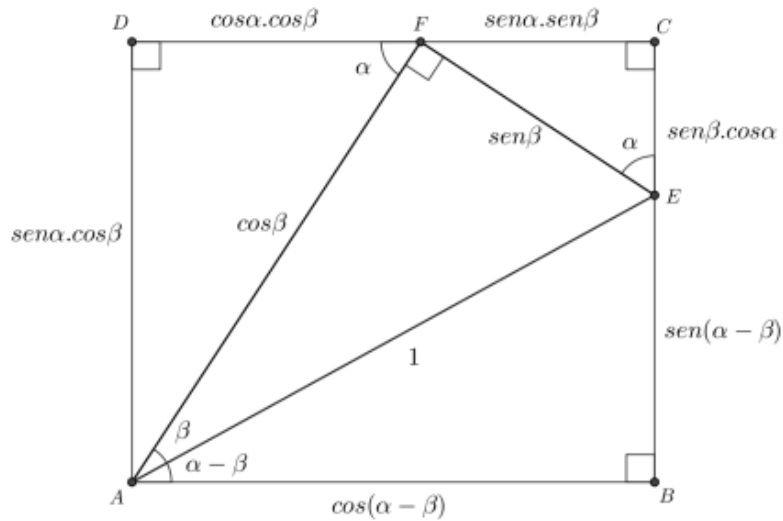


Figura 1.14

Como ABCD é um retângulo, as medidas dos lados opostos são iguais e isto prova os itens (ii) e (iv) do Teorema 1.4. ■

### 1.3 Aplicações

A trigonometria no triângulo retângulo, ou ainda, as funções trigonométricas estudadas na seção anterior nos permitem resolver muitos problemas. Nesta seção, a título de ilustração, vamos considerar quatro problemas.

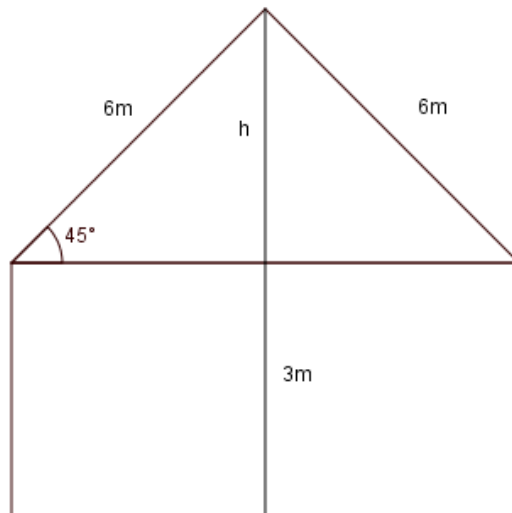
Problema(1). Na construção de um telhado foram usadas telhas francesas e o "caimento" /, do telhado é de  $45^\circ$  em relação ao plano horizontal. Sabendo que, em cada lado da casa, foram construídos 6 m de telhado e que, até a laje do teto, a casa tem 3 m de altura, determine a que altura se encontra o ponto mais alto do telhado dessa casa.

Solução. Concretizamos as informações dadas no problema através da figura abaixo.

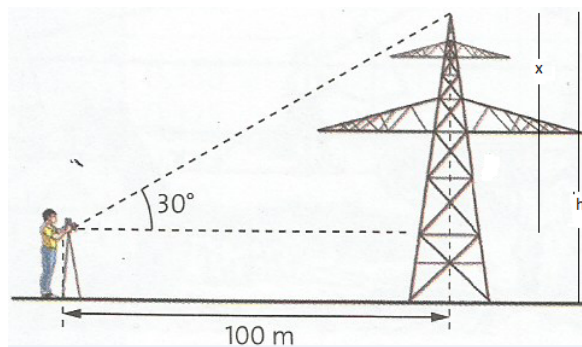
Pela definição do seno temos que

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 6 \text{ sen } 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cong \frac{6 \cdot (1,41)}{2} \cong 4,23.$$

Assim, concluímos que o ponto mais alto do telhado dessa casa está a 7,23 metros do chão.



Problema(2). Para determinar a altura  $h$  de uma torre, um topógrafo coloca o teodolito a 100 m da base e obtém um ângulo de  $30^\circ$ , conforme mostra a figura. Sabendo que a luneta do teodolito está a 1,70m do solo, qual é aproximadamente a altura da torre?



Solução. Conforme mostra a figura, denotando por  $h$  a altura da torre, temos que:

$$h = x + 1,70, \text{ onde } x \text{ é tal que } \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{100}.$$

Logo,

$$x = 100 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 57,7.$$

Então, a altura da torre é aproximadamente 59,4 metros.

Problema(3). Um avião levanta voo a partir de um ponto A e sobe fazendo um ângulo constante de  $15^\circ$  com a horizontal. A que altura estará e qual a distância percorrida quando sobrevoar uma torre situada a 2km do ponto de partida?

Solução. Ilustramos os dados do problema por meio da figura.

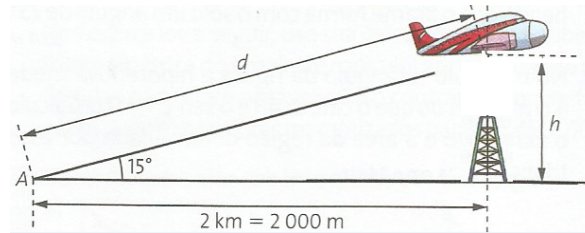


Figura 1.15

Então, pela definição da tangente, temos que

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{h}{2000} \Rightarrow h = 2000 \cdot \operatorname{tg} 15^\circ,$$

Utilizando o Teorema 1.4, veja que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 15^\circ &= \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \simeq \frac{2,45 - 1,41}{4} \simeq 0,26. \end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \simeq \frac{2,45 + 1,41}{4} \simeq 0,96. \end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\operatorname{sen} 15^\circ}{\cos 15^\circ} \simeq \frac{0,26}{0,96} \simeq 0,27.$$

Agora, retornamos na expressão inicial e obtemos

$$h \simeq 2000 \cdot (0,27) \simeq 540m.$$

Para calcular a distância  $d$  percorrida pelo avião podemos fazer,

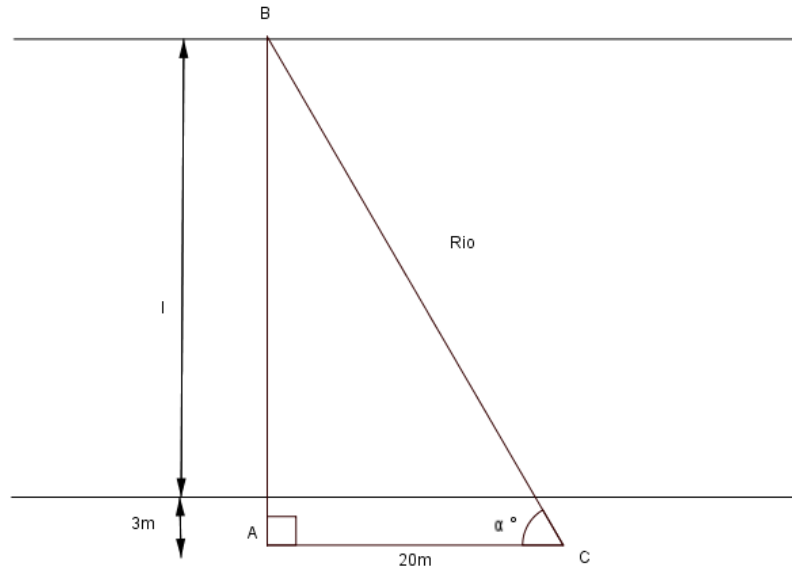
$$\cos 15^\circ = \frac{2000}{d} \Rightarrow d = \frac{2000}{\cos 15^\circ} \simeq \frac{2000}{0,96} \simeq 2.083m.$$

Portanto, o avião estará a uma altura de aproximadamente 540m e a terá percorrido uma distância de aproximadamente 2.083 metros.

Problema(4). Como determinar a largura de um rio sem atravessá-lo?

Solução. Inicialmente fixamos um ponto referencial na margem oposta à nossa posição. Por exemplo, uma árvore ou uma rocha, onde então marcamos um ponto B. A três metros de distância do rio, na margem onde estamos, oposta à margem onde foi marcado o ponto B, utilizando um aparelho para medir ângulos (teodolito), marcamos dois

pontos denotados por A e C, tais que o ângulo  $\widehat{BAC}$  seja reto e a medida do segmento AC seja 20 metros. Agora em C, ainda usando a teodolito, medimos o ângulo  $\widehat{ACB}$  o qual supostamente, digamos tenha medida de  $\alpha^\circ$ . Observamos assim a figura, onde l é a largura do rio.



Pela definição da tangente, temos

$$\operatorname{tg} \alpha^\circ = \frac{(l + 3)}{20},$$

de onde segue que

$$l = 20 \operatorname{tg} \alpha^\circ.$$

Assim, concluímos que a largura do rio dependerá de  $\alpha$  mediante à seguinte fórmula

$$l = 20 \operatorname{tg} \alpha^\circ.$$



## 2 Funções Trigonométricas - Uma abordagem geométrica

### 2.1 Motivação: Movimentos Periódicos - Oscilatórios

A compreensão dos fenômenos naturais e o desenvolvimento tecnológico dependem fundamentalmente do entendimento dos mais diversos tipos de movimentos. A Física, uma grande área das ciências naturais, em um dos seus mais importantes ramos chamado de "Mecânica", dedica-se ao estudo dos movimentos. Dentre os diferentes tipos de movimentos no nosso cotidiano, destacam-se os movimentos periódicos, que são aqueles que se repetem da mesma forma em intervalos de tempos regulares e sucessivos, chamados de período. Alguns fenômenos periódicos são muito importantes para a contagem do tempo. Nosso calendário, por exemplo, foi construído a partir dos movimentos dos corpos celestes, que são movimentos periódicos. Por exemplo, a rotação da terra em torno do seu eixo é um movimento periódico, cujo período associado é de 24 horas, ou seja, um dia. Assim um dia é o tempo necessário para que a terra execute uma volta completa, no seu movimento de rotação, em torno de seu eixo. Outro exemplo é o movimento da terra em torno do sol, cujo período é de 365 dias, ou ainda, o que chamamos de um ano. O movimento da lua também é um movimento periódico, todos os dias ela dá uma volta em torno do planeta terra, periodicamente, ou seja, todos os dias ela faz o mesmo trajeto, em um mesmo período.

Uma classe particular de movimentos periódicos, extremamente importante, são os chamados movimentos oscilatórios ou vibratórios. Movimentos oscilatórios (ou vibratórios) são aqueles movimentos periódicos cujo sentido do movimento, ou ainda, o sentido da velocidade, é invertido regularmente. Os exemplos mais simples de movimentos oscilatórios, dentre outros, são: o movimento do pêndulo de relógio, de uma massa presa a uma mola (massa-mola), da corda de um violão e de um pistão do motor de um automóvel.

Por meio de simples observação do cotidiano nos deparamos frequentemente com fenômenos periódicos e oscilatórios. Como ilustração vejamos alguns:

**i) Marés.** Os movimentos periódicos de elevação dos níveis da água dos oceanos, mares e lagos são provocados pela força gravitacional da Lua e do Sol sobre a Terra. As marés

ocorrem em intervalos regulares de 6 horas e 12 minutos. Portanto, a cada 24 horas e 50 minutos, o mar sobe e desce duas vezes, constituindo um fluxo e refluxo das águas. Assim, a medida que a Terra gira, outras regiões passam a sofrer elevações, como se a subida de nível se deslocasse seguindo o movimento da Lua. No lado oposto da terra, dá-se o mesmo: as águas também se erguem, de forma que uma elevação compensa a outra. Assim, nas regiões costeiras essas elevações das águas correspondem às marés altas. Enquanto o nível das águas sobe em dois lados opostos na Terra, em outras regiões do globo (diametralmente opostas) ele desce: é a maré baixa. A diferença entre maré baixa e maré alta é denominada amplitude das marés e se mede por uma régua graduada chamada marégrafo. Observe a tabela abaixo, onde podemos observar a hora e a altura das marés altas.

		PREIA-MAR				BAIXA-MAR			
DIA DO MÊS	DIA DA SEMANA	MANHÃ		TARDE		MANHÃ		TARDE	
		HORA	ALTURA	HORA	ALTURA	HORA	ALTURA	HORA	ALTURA
1	●	0216	3.4	1444	3.3	0830	0.2	2048	0.2
2	QUI	0304	3.6	1532	3.4	0918	0.0	2135	0.1
3	SEX	0352	3.6	1620	3.4	1006	0.0	2222	0.2
4	SAB	0440	3.6	1708	3.3	1054	0.1	2309	0.3
5	DOM	0529	3.5	1758	3.1	1143	0.2	2359	0.4
6	SEG	0620	3.3	1850	2.9	-	-	1234	0.5
7	TER	0714	3.0	1947	2.7	0052	0.7	1328	0.7
8	☾	0815	2.8	2053	2.6	0152	0.9	1431	0.9
9	QUI	0924	2.6	2207	2.5	0303	1.0	1543	1.0
10	SEX	1040	2.5	2319	2.6	0424	1.1	1657	1.1
11	SAB	1149	2.5	-	-	0538	1.0	1800	1.0
12	DOM	0019	2.7	1245	2.6	0636	0.9	1849	0.9
13	SEG	0107	2.8	1330	2.7	0722	0.8	1930	0.8
14	TER	0148	2.9	1408	2.8	0801	0.7	2006	0.7
15	QUA	0223	3.0	1442	2.9	0836	0.6	2040	0.6
16	○	0256	3.1	1515	2.9	0908	0.6	2112	0.6
17	SEX	0328	3.1	1546	3.0	0939	0.5	2143	0.6
18	SAB	0359	3.2	1618	3.0	1011	0.5	2215	0.6
19	DOM	0430	3.1	1650	2.9	1042	0.5	2249	0.6
20	SEG	0503	3.1	1725	2.9	1116	0.6	2324	0.7
21	TER	0539	3.0	1802	2.8	1151	0.7	-	-
22	QUA	0618	2.9	1846	2.7	0002	0.8	1231	0.8
23	QUI	0703	2.7	1937	2.6	0047	0.9	1318	0.9
24	☾	0759	2.6	2042	2.5	0141	1.0	1417	1.0
25	SAB	0911	2.5	2158	2.6	0250	1.1	1532	1.0
26	DOM	1033	2.6	2313	2.7	0413	1.1	1653	1.0
27	SEG	1148	2.7	-	-	0531	0.9	1801	0.8
28	TER	0017	2.9	1250	2.9	0635	0.7	1858	0.6
29	QUA	0113	3.2	1344	3.1	0730	0.4	1949	0.4
30	●	0203	3.4	1433	3.3	0819	0.1	2036	0.2
31	SEX	0251	3.6	1519	3.4	0906	0.0	2121	0.1

Figura 2.1

Plotando estas informações obtemos um gráfico da forma:

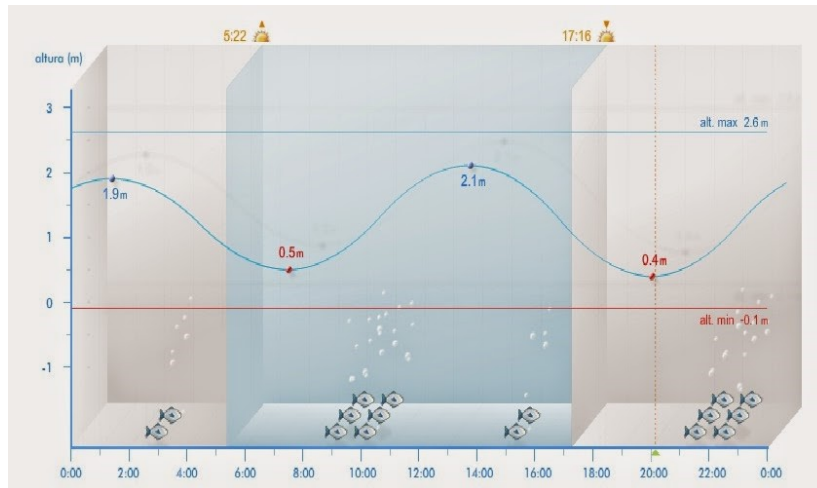


Figura 2.2

ii) **Temperatura média.** Ao analisarmos a variação média de temperatura em determinada região, é possível também percebermos uma periodicidade nas ocorrências destas. Vejamos, no caso da Alemanha em determinado ano, conforme o gráfico <sup>1</sup> abaixo, há uma variação uniforme, tanto das temperaturas mínimas, quanto nas máximas durante o período de 12 meses.



Figura 2.3

<sup>1</sup>Retirado de <https://sundaycooks.com/clima-na-alemanha-melhor-epoca/> em 25/02/2017, às 17h

iii) **Pressão interna do coração.** Também há uma periodicidade em eventos que ocorrem no corpo humano, por exemplo a pressão interna do coração. Veja o gráfico <sup>2</sup> a seguir:

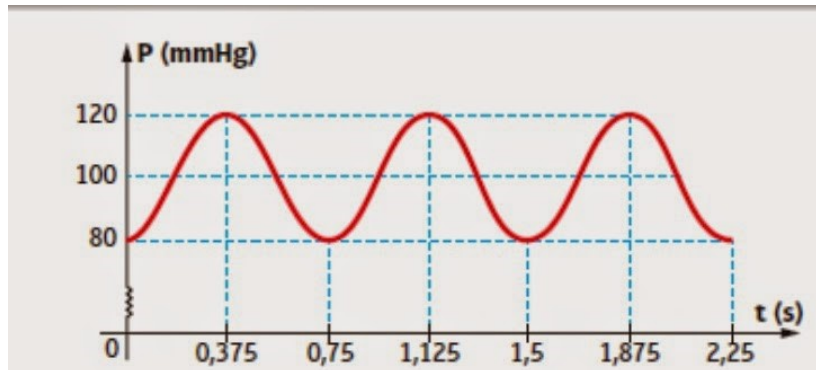


Figura 2.4

O gráfico mostra a pressão interna do coração de um certo indivíduo em função do instante de coleta dessa medida, onde se analisa a situação clínica de um paciente, sendo P a pressão nas paredes dos vasos sanguíneos (em milímetros de mercúrio: mmHg) e t o tempo (em segundos). Em geral, a pressão indicada no gráfico obedece um ciclo, sendo que cada ciclo completo equivale a um batimento cardíaco. Note por meio do gráfico, que ocorre um ciclo completo a cada 0,75 segundos, o que implica dizer que a frequência cardíaca do indivíduo avaliado é de 80 batimentos por minuto.

iv) **Ciclo menstrual.** O ciclo menstrual da mulher ocorre num período (normalmente) de 28 dias. Esse processo continua durante toda a vida reprodutiva da mulher. Todo esse processo é consubstanciado numa mudança hormonal. O gráfico abaixo ilustra como se dá este ciclo.



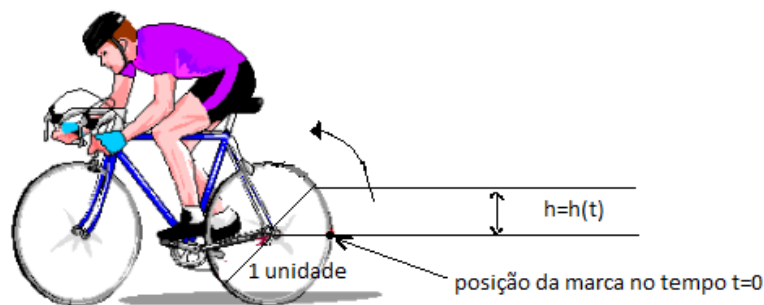
Figura 2.5

<sup>2</sup>As figuras 2.1, 2.2 e 2.4 foram retiradas de <http://schionattoengenharia.blogspot.com.br/2014/10/matematicaproporcionalidade-e.html>, em 25/02/2017, às 17h.

Portanto movimento das marés, temperatura média diária numa determinada região, pressão interna do coração, ciclo menstrual e etc, tem em comum a característica de serem "ondas", ou seja, movimentos periódicos. Mais geralmente, ondas do mar, som, luz, sinais de rádio, terremotos, aparentemente fenômenos de naturezas distintas, tem em comum o fato de todos serem ondas, formados por um movimento periódico e ou oscilatório, caracterizados como ondas sonoras, ondas luminosas, ondas de rádio, ondas sísmicas e ondas do mar.

Sem sombra de dúvida, compreender como se dão os movimentos periódicos e oscilatórios é fundamental para entendimento da natureza bem como para o desenvolvimento tecnológico, conforme dissemos anteriormente. Se um fenômeno é sabidamente periódico, podemos prever com facilidade o que ocorre em momentos não observados. Muitos são os fenômenos físicos e sociais de comportamento cíclico que ao serem modelados, geram gráficos similares aos mostrados nos exemplos mencionados acima. Conforme veremos, para que seja possível uma modelagem matemática destes fenômenos é necessário ampliar o domínio das funções trigonométricas, definidas no triângulo retângulo.

Para facilitar a modelagem admitimos que uma partícula execute um movimento oscilatório, sobre um eixo (uma reta orientada), em torno da origem do eixo. Concretamente considere uma bicicleta com rodas de raio igual a uma unidade de comprimento. Imagine que fixamos uma marca sobre o pneu desta bicicleta e denotamos por  $h$  a altura da marca em relação ao centro da roda, conforme indicado na figura abaixo:

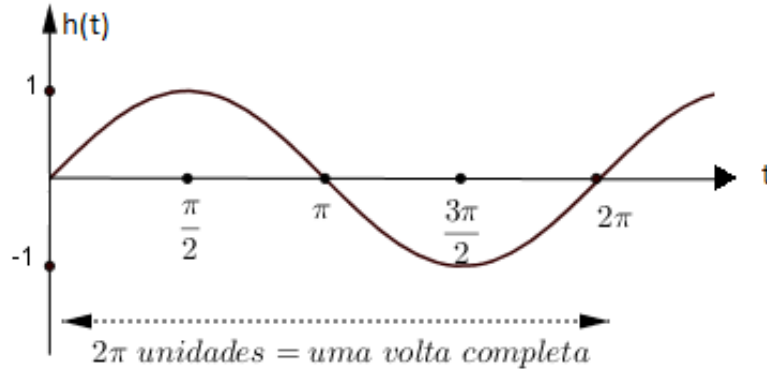


À medida que a bicicleta anda, a roda gira e  $h$  passa a ser uma função do tempo  $h = h(t)$  que flutua entre os valores 1 e  $-1$ , como na animação em

<http://www.zweigmedia.com/RealWorld/trig/wheel.html>.

Quanto mais rápido a roda girar mais rápido será a oscilação. Suponha que a bicicleta ande a uma velocidade constante igual a uma unidade por segundo e que no instante inicial  $t = 0$  a marca esteja na posição em que  $h(0) = 0$  (veja novamente a figura). Desde de que o raio é igual a 1, o comprimento da circunferência é igual a  $2\pi$  e,

portanto, a cada  $2\pi$  segundos a marca percorre uma volta completa. É fácil ver que o gráfico da função  $h = h(t)$  tem o seguinte formato:



Para definição matemática da função  $h$  é necessário "enrolar" a reta real num carretel de raio igual a uma unidade. Este processo é o que descreve a função de Euler que estudamos na próxima seção.

## 2.2 Função de Euler

No plano cartesiano  $xOy$  denotamos por  $\mathcal{C}$  a circunferência de raio igual a 1 e centro na origem  $O = (0, 0)$ , isto é,

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}.$$

A função de Euler é a função

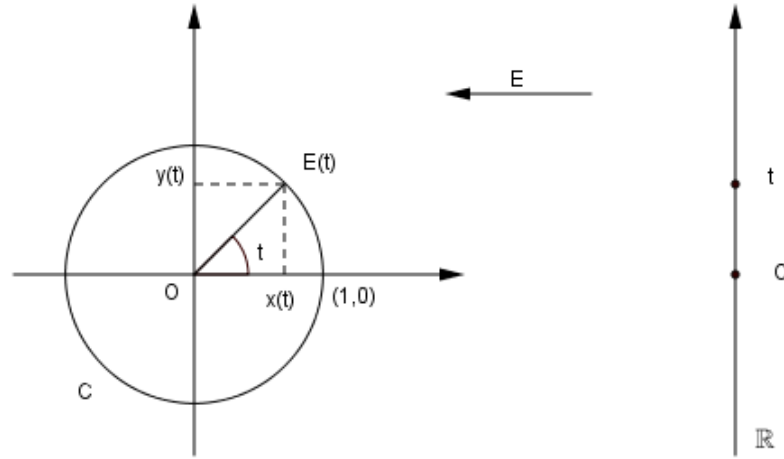
$$E : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$$

$$t \mapsto E(t) = (x(t), y(t))$$

definida da seguinte forma:

- I)  $E(0) = (1, 0)$ ;
- II) se  $t > 0$ , percorremos sobre a circunferência  $\mathcal{C}$ , a partir do ponto  $(1, 0)$ , um caminho de comprimento  $t$ , sempre andando no sentido positivo (anti horário). A imagem  $E(t)$  é o ponto final deste caminho de comprimento  $t$ ;
- III) se  $t < 0$ ,  $E(t)$  será a extremidade final de um caminho sobre  $\mathcal{C}$ , de comprimento  $t$ , que parte do ponto  $(1, 0)$  e percorre  $\mathcal{C}$  sempre no sentido negativo (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros do relógio usual).





Conforme comentamos anteriormente, a função de Euler  $E : \mathbb{R} \rightarrow C$  pode ser vista como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência  $C$  (pensada como um carretel) de modo que o ponto  $0 \in \mathbb{R}$  caia exatamente sobre o ponto  $(1, 0) \in C$ . Na sequência, vamos estabelecer algumas propriedades da função de Euler que serão utilizadas futuramente. Iniciamos observando que a função de Euler é periódica, de período  $2\pi$ ; ou ainda, vale o resultado:

**Teorema 2.1.**  $E(t') = E(t)$  se, e somente se,  $t' = t + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* De fato, cada vez que o ponto  $t$  descreve na reta um intervalo de comprimento  $l$ , sua imagem  $E(t)$  percorre sobre a circunferência  $C$  um arco de igual comprimento  $l$ . Em particular, como a circunferência unitária tem comprimento igual a  $2\pi$ , quando o ponto  $t$  descreve um intervalo de comprimento  $2\pi$ , sua imagem  $E(t)$  dá uma volta completa sobre  $C$ , retornando ao ponto de partida. Assim sendo, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , tem-se  $E(t + 2\pi) = E(t)$  e mais geralmente, para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , tem-se  $E(t + 2k\pi) = E(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Reciprocamente, se  $t < t'$  em  $\mathbb{R}$  são tais que  $E(t) = E(t')$ , isto significa que quando um ponto  $s$  da reta varia de  $t$  a  $t'$  sua imagem  $E(s)$  se desloca sobre  $C$  no sentido positivo, partindo de  $E(t)$  dando um número inteiro  $k$  de voltas e retornando ao ponto de partida  $E(t') = E(t)$ . A distância total percorrida é igual a  $2k\pi$ , logo  $t' = t + 2k\pi$ , pois o comprimento do caminho percorrido por  $E(s)$  é, por definição, igual à distância percorrida por  $s$  sobre a reta  $\mathbb{R}$ . Isto completa a demonstração do Teorema 2.1. ■

A seguir comentamos as simetrias da função de Euler.

**Teorema 2.2.** Se  $E(t) = (x, y)$ , então:

- (i)  $E(t + \pi) = (-x, -y)$ ;      (ii)  $E\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = (-y, x)$ ;
- (iii)  $E(-t) = (x, -y)$ ;      (iv)  $E\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = (y, x)$ ;
- (v)  $E(\pi - t) = (-x, y)$ .

Demonstração. Para provar (i) devemos mostrar que

$$E(t + \pi) = -E(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Provemos (2.1) em etapas:

(1) Se  $t = 0$ . Então

$$E(0 + \pi) = E(\pi) = (-1, 0) = -(1, 0) = -E(0).$$

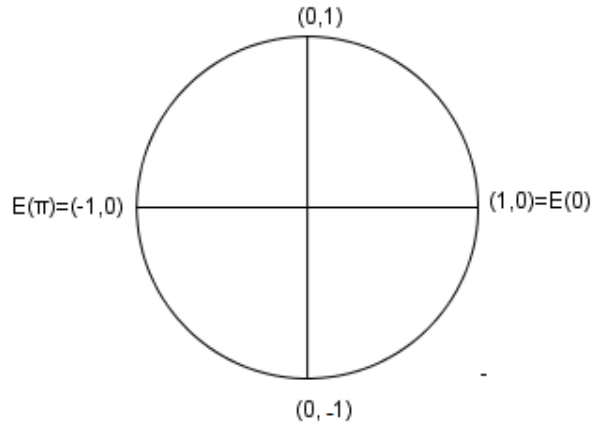


Figura 2.6

(2) Se  $0 < t < \frac{\pi}{2}$ . Neste caso  $E(t)$  está no 1º quadrante e  $E(t + \pi)$  está no 3º quadrante.

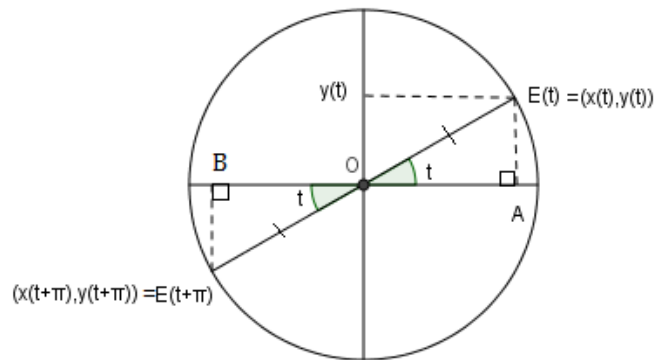


Figura 2.7

Na figura 2.7 observamos os triângulos  $OAE(t)$  e  $OBE(t + \pi)$ . Aplicando a definição de cosseno e seno ao triângulo  $OAE(t)$  temos:

$$\cos t = x(t) \quad \text{e} \quad \text{sen } t = y(t). \quad (2.2)$$

Por outro lado considerando o triângulo  $OBE(t + \pi)$ , temos que:

$$\cos t = -x(t + \pi) \quad \text{e} \quad \text{sen } t = -y(t + \pi), \quad (2.3)$$



onde os sinais negativos foram tomados porque o ponto  $E(t + \pi)$  está no terceiro quadrante. Logo de (2.2) e (2.3) segue que

$$x(t) = -x(t + \pi) \quad \text{e} \quad y(t) = -y(t + \pi),$$

ou ainda,

$$E(t + \pi) = (x(t + \pi), y(t + \pi)) = -(x(t), y(t)) = -E(t),$$

provando-se (2.1) quando  $0 < t < \frac{\pi}{2}$ .

(3) Se  $t = \frac{\pi}{2}$ . Então

$$E\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = E\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1) = -(0, 1) = -E\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

(4) Se  $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ . Neste caso  $E(t)$  está no segundo quadrante e  $E(t + \pi)$  está no quarto quadrante.

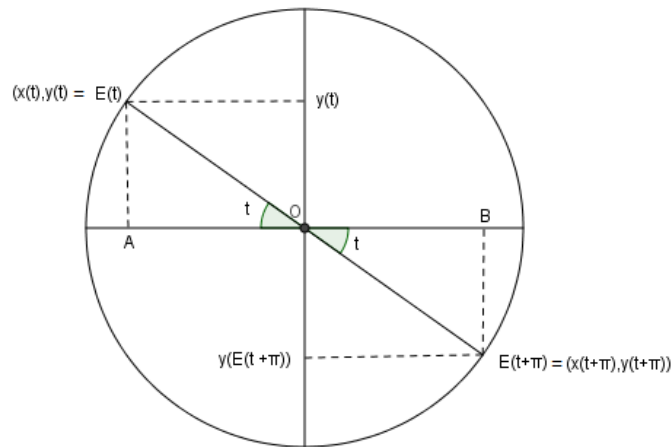


Figura 2.8

Na figura 2.8 observamos os triângulos  $OAE(t)$  e  $OBE(t + \pi)$ . Aplicando a definição de cosseno e seno ao triângulo  $OAE(t)$  temos:

$$\cos t = -x(t) \quad \text{e} \quad \sin t = y(t), \tag{2.4}$$

onde o sinal negativo foi tomado porque o ponto  $E(t)$  está no segundo quadrante.

Por outro lado, considerando o triângulo  $OBE(t + \pi)$ , temos que:

$$\cos t = x(t + \pi) \quad \text{e} \quad \sin t = -y(t + \pi), \tag{2.5}$$

onde o sinal negativo foi tomado porque o ponto  $E(t + \pi)$  está no quarto quadrante, onde sua ordenada é negativa.

Logo de (2.4) e (2.5), segue que

$$x(t) = -x(t + \pi) \quad \text{e} \quad y(t) = -y(t + \pi)$$

ou ainda

$$E(t + \pi) = (x(t + \pi), y(t + \pi)) = -(x(t), y(t)) = -E(t),$$

provando-se (2.1) quando  $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ .

(5) Se  $t = \pi$ . Então

$$E(\pi + \pi) = E(2\pi) = (1, 0) = -(-1, 0) = -E(\pi).$$

(6) Se  $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$ . Neste caso o ponto  $E(t)$  está no terceiro quadrante e  $E(t + \pi)$  está no primeiro quadrante.

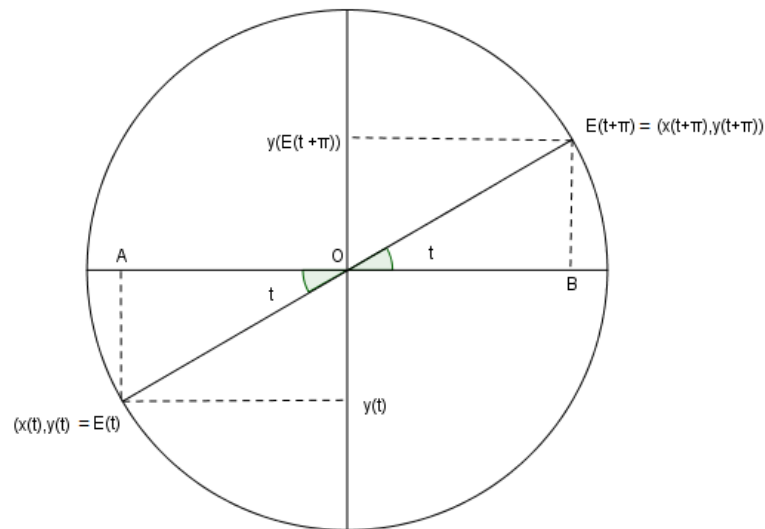


Figura 2.9

Na figura (2.9) observamos os triângulos  $OAE(t)$  e  $OBE(t + \pi)$ . Aplicando a definição de cosseno e seno ao triângulo  $OAE(t)$  temos:

$$\cos t = -x(t) \quad \text{e} \quad \sin t = -y(t), \tag{2.6}$$

onde os sinais negativos foram tomados porque o ponto  $E(t)$  está no terceiro quadrante. Por outro lado, considerando o triângulo  $OBE(t + \pi)$ , temos que:

$$\cos t = x(t + \pi) \quad \text{e} \quad \sin t = y(t + \pi). \tag{2.7}$$

Logo de (2.6) e (2.7), segue que

$$x(t) = -x(t + \pi) \quad \text{e} \quad y(t) = -y(t + \pi)$$

ou ainda

$$E(t + \pi) = (x(t + \pi), y(t + \pi)) = -(x(t), y(t)) = -E(t),$$

provando-se (2.1) quando  $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ .

(7) Se  $t = \frac{3\pi}{2}$ . Então

$$E\left(\frac{3\pi}{2} + \pi\right) = E\left(\frac{5\pi}{2}\right) = (0, 1) = -(0, -1) = -E\left(\frac{3\pi}{2}\right).$$

(8) Se  $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$ . Nesta situação o ponto  $E(t)$  está no quarto quadrante e o ponto  $E(t + \pi)$  está no terceiro quadrante.

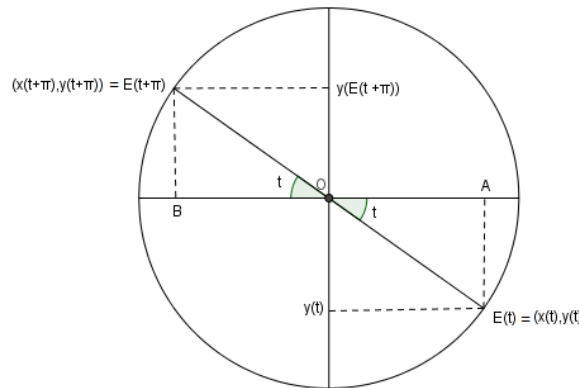


Figura 2.10

Na figura 2.10 observamos os triângulos  $OAE(t)$  e  $OBE(t + \pi)$ . Aplicando a definição de cosseno e seno ao triângulo  $OAE(t)$  temos:

$$\cos t = x(t) \quad \text{e} \quad \sin t = -y(t), \tag{2.8}$$

onde o sinal negativo foi tomado porque o ponto  $E(t)$  está no quarto quadrante.

Por outro lado, considerando o triângulo  $OBE(t + \pi)$ , temos que:

$$\cos t = -x(t + \pi) \quad \text{e} \quad \sin t = y(t + \pi). \tag{2.9}$$

Logo de 2.8 e 2.9), segue que

$$x(t) = -x(t + \pi) \quad \text{e} \quad y(t) = -y(t + \pi),$$

ou ainda,

$$E(t + \pi) = (x(t + \pi), y(t + \pi)) = -(x(t), y(t)) = -E(t)$$

provando-se (2.1) quando  $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$ .

(9) Se  $t = 2\pi$ . Então

$$E(2\pi + \pi) = E(3\pi) = E(\pi) = (-1, 0) = -(1, 0) = -E(2\pi).$$

Logo, de (1) a (9), podemos concluir que para qualquer  $0 \leq t \leq 2\pi$  tem-se

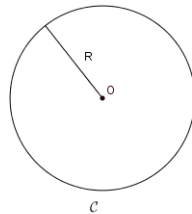
$$E(t + \pi) = -E(t).$$

Desta identidade e a periodicidade de  $E(t)$  resulta o item (i) do teorema.

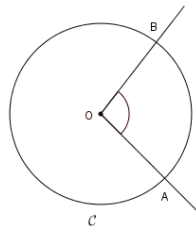
As demais propriedades dadas pelos itens (ii) a (v), são demonstradas de modo análogo. ■

Podemos também usar a função de Euler para medir ângulos. Antes porém vamos introduzir uma nova unidade de medida de ângulo, diferente do grau, chamada radiano. Faremos aqui um raciocínio parecido com aquele que fizemos com os triângulos retângulos. Usando semelhança definimos seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.

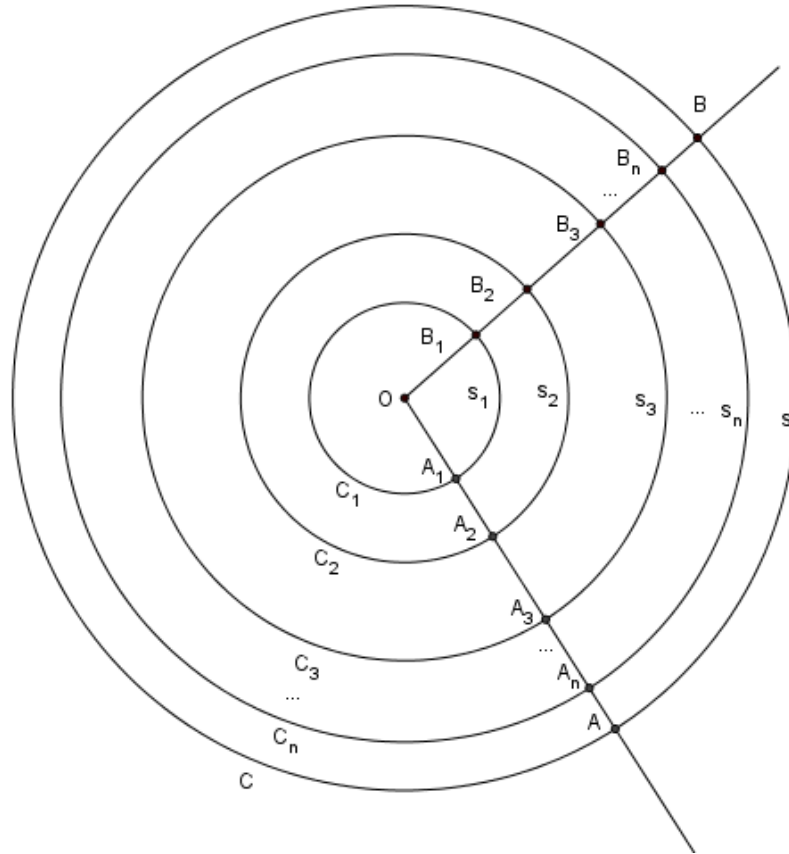
Considere uma circunferência  $\mathcal{C}$  de centro  $O$  e raio  $R$ .



Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos distintos na circunferência  $\mathcal{C}$ , dando origem ao ângulo central  $A\hat{O}B$ .



No segmento  $OB$  escolhemos aleatoriamente  $n$  pontos  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Com centro em  $O$  traçamos  $n$  circunferências (concêntricas) de raios  $R_1 = \overline{OB_1}, R_2 = \overline{OB_2}, \dots, R_n = \overline{OB_n}$ . Por  $A_1, A_2, \dots, A_n$  denotamos os pontos de interseção destas circunferências com o segmento  $OA$ . Assim, temos a figura



$$\begin{aligned}
 R_1 = \overline{OB_1} = \overline{OA_1} & \text{ e } s_1 \text{ é o comprimento do arco } \widehat{AB}; \\
 R_2 = \overline{OB_2} = \overline{OA_2} & \text{ e } s_2 \text{ é o comprimento do arco } \widehat{AB}; \\
 \dots & \dots \\
 R_n = \overline{OB_n} = \overline{OA_n} & \text{ e } s_n \text{ é o comprimento do arco } \widehat{AB}; \\
 R = \overline{OB} = \overline{OA} & \text{ e } s \text{ é o comprimento do arco } \widehat{AB}.
 \end{aligned}$$

Dos fundamentos da geometria (veja [1]), sabemos que quaisquer dois círculos são figuras semelhantes e a razão de semelhança é a razão entre seus raios. Portanto temos que

$$\frac{s_1}{R_1} = \frac{s_2}{R_2} = \frac{s_3}{R_3} = \dots = \frac{s}{R} = k \quad (k \text{ constante})$$

A constante  $k$  não depende da circunferência, mas somente do ângulo central  $\widehat{AOB}$ . Este fato motiva a definição:

**Definição 2.1.** *A medida do ângulo central  $\widehat{AOB}$  em radianos é igual a  $k$ . Ou seja, por definição, a constante  $k$  é a medida do ângulo central  $\widehat{AOB}$ , em radianos.*

Como a semi-circunferência tem comprimento  $\pi R$ , temos que a medida deste ângulo em radianos é  $\frac{\pi \cdot R}{R} = \pi$ , ou seja,

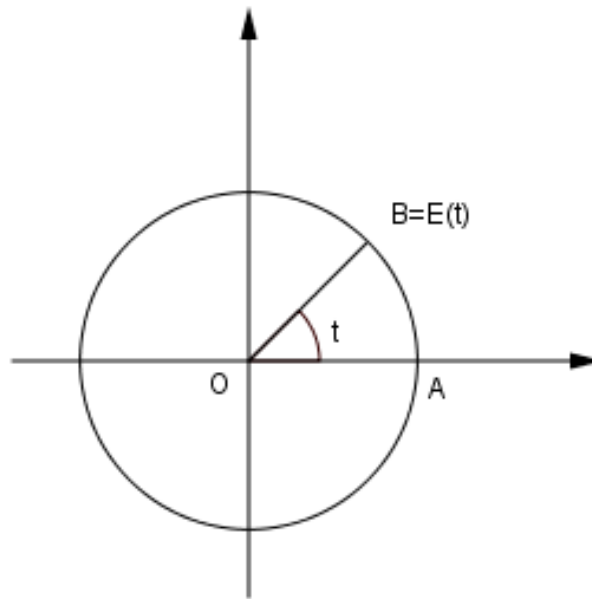
180° equivale a  $\pi$  radianos.

De modo geral, se  $r$  é a medida do ângulo em radianos e  $g$  é a medida deste mesmo ângulo em graus, então:

$$r = \left(\frac{\pi}{180}\right) g \Leftrightarrow g = \left(\frac{180}{\pi}\right) r.$$

Note que, o ângulo de 1 radiano tem medida  $\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) \cong 57^\circ$  e o comprimento do arco de 1 radiano é igual ao raio da circunferência.

Denotamos  $A = (1, 0)$ ,  $O = (0, 0)$  e para cada  $t \in \mathbb{R}$  consideramos  $B = E(t)$ . Diz-se neste caso que o ângulo  $AOB$  mede  $t$  radianos.



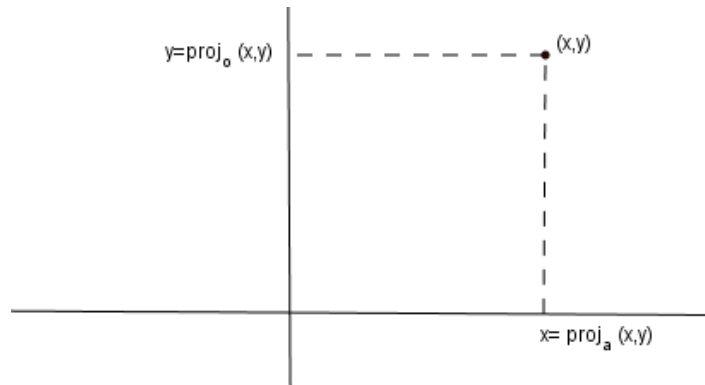
Note que de acordo com esta definição podemos ter medidas negativas para ângulos.

## 2.3 As funções trigonométricas

No capítulo 1 introduzimos as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente as quais tinham como domínio arcos entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . Se considerarmos arcos medidos em radianos, então as funções trigonométricas estão definidas para valores de  $t$ , tais que  $0 < t < \frac{\pi}{2}$ . Nesta seção, nosso objetivo é usar a função de Euler para estender o domínio das funções trigonométricas para toda reta real  $\mathbb{R}$ . Ou seja, pretendemos definir  $\sin t$ ,  $\cos t$  e  $\operatorname{tg} t$  para todo número real  $t$ .

Veja que no plano  $\mathbb{R}^2$  estão bem definidas (e de modo natural) duas funções projeções, a saber, a função projeção sobre o eixo das abscissas e a função projeção sobre o eixo das ordenadas, respectivamente, dadas por:

$$\begin{aligned} \text{proj}_a : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} & \text{proj}_o : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}. \\ (x, y) &\mapsto \text{proj}_a(x, y) = x & \text{e} & & (x, y) &\mapsto \text{proj}_o(x, y) = y \end{aligned}$$

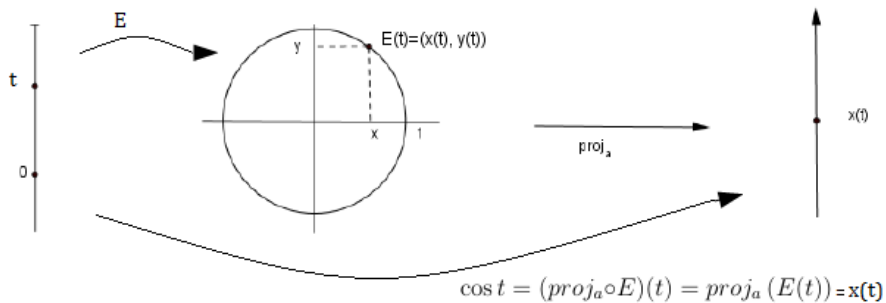


Usando a função de Euler e as funções projeções, podemos definir:

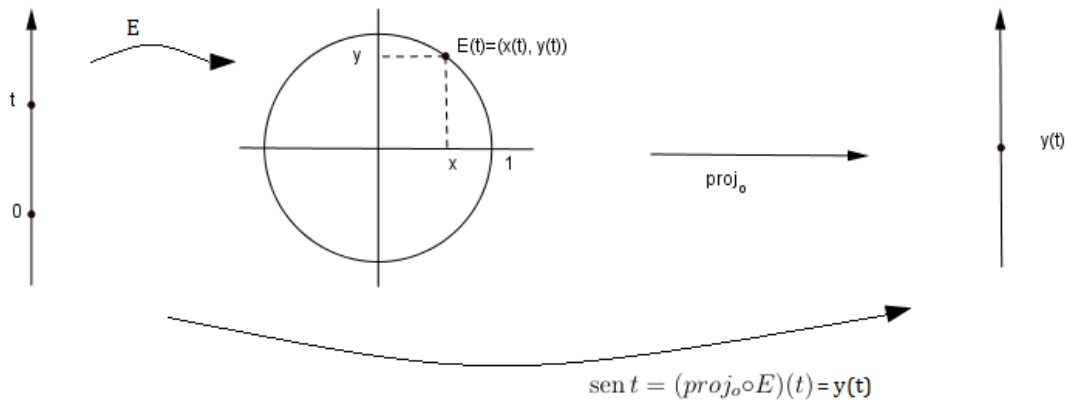
**Definição 2.2.** (*Funções trigonométricas*) Definimos as funções cosseno e seno como sendo a composição da função de Euler  $E$  com as projeções, ou seja,

$$\text{cosseno} := (\text{proj}_a \circ E) \quad \text{e} \quad \text{seno} := (\text{proj}_o \circ E). \quad (2.10)$$

Observe as figuras



$$\cos t := (\text{proj}_a \circ E)(t) = \text{proj}_a(x(t), y(t)) = x(t) = \text{abscissa do ponto } E(t).$$



$$\text{sen } t := (\text{proj}_o \circ E)(t) = \text{proj}_o((x(t), y(t))) = y(t) = \text{ordenada do ponto } E(t).$$

Num primeiro momento, pode parecer estranho nominar as funções, na definição acima, por cosseno e seno, pois já usamos esta nomenclatura para as funções definidas no capítulo I. Entretanto, como o raio da circunferência é igual a um, é fácil ver que se  $0 < t < \frac{\pi}{2}$  e  $\cos t$  e  $\text{sen } t$  são as funções do capítulo I, temos que  $(\text{proj}_a \circ E)(t) = \cos t$  e  $(\text{proj}_o \circ E)(t) = \text{sen } t$ . Em outras palavras, as funções agora definidas são extensões, para toda reta real, das que foram consideradas no capítulo I.

Podemos ver que  $\cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , então considerando (ii) do Teorema 1.2 podemos definir a função tangente.

**Definição 2.3.** (*Função tangente*). Para todo  $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , definimos

$$\text{tg } t = \frac{\text{sen } t}{\cos t}. \tag{2.11}$$

Da mesma forma, a função tangente definida aqui é uma extensão da tangente definida no primeiro capítulo.

## 2.4 Propriedades básicas das funções trigonométricas

Na seção anterior definimos as funções trigonométricas e vimos que elas são extensões do seno, cosseno e tangente definidos no triângulo retângulo. Também comentamos que tais funções foram construídas para modelar os movimentos oscilatórios/vibratórios. Nesta seção vamos estudar as principais propriedades das funções trigonométricas. Começamos observando que para todo  $t \in \mathbb{R}$ , o ponto  $E(t) = (\cos t, \text{sen } t)$  pertence ao círculo unitário. Então devemos ter

$$\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \tag{2.12}$$



ou seja, a relação fundamental, dada no Teorema 1.2, continua válida para todo valor de  $t \in \mathbb{R}$ .

Agora vejamos um resultado que é consequência direta dos Teoremas 2.1 e 2.2.

**Teorema 2.3.** *Para todo  $t \in \mathbb{R}$  temos que:*

$$(i) \cos(t + \pi) = -\cos t \quad e \quad \sin(t + \pi) = -\sin t ;$$

$$(ii) \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t \quad e \quad \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t ;$$

$$(iii) \cos(-t) = \cos t \quad e \quad \sin(-t) = -\sin t ;$$

$$(iv) \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t \quad e \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t ;$$

$$(v) \cos(\pi - t) = -\cos t \quad e \quad \sin(\pi - t) = \sin t ;$$

$$(vi) \cos(t + 2k\pi) = \cos t \quad e \quad \sin(t + 2k\pi) = \sin t .$$

Demonstração. Do Teorema 2.2, sabemos que:  $E(t + \pi) = -E(t)$ , ou seja,

$$(x(t + \pi), y(t + \pi)) = (-x(t), -y(t)).$$

Logo,

$$\cos(t + \pi) = x(t + \pi) = -x(t) = -\cos(t)$$

e

$$\sin(t + \pi) = y(t + \pi) = -y(t) = -\sin(t)$$

o que prova (i) do Teorema. Os demais itens, de (ii) a (v), são verificadas de modo análogo. Por fim, usando o Teorema (2.1), concluímos a propriedade (vi). ■

Alguns comentários sobre as propriedades dadas no Teorema 2.3. De  $\cos t = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$  vemos que o cosseno é translação de  $\frac{\pi}{2}$ , a esquerda, da função seno. De modo geral, seno e cosseno, um é translação do outro por  $\frac{\pi}{2}$ . Já em (iii), está dito que o cosseno é uma função par ( $f(t) = f(-t)$ ), enquanto que o seno é uma função ímpar ( $f(-t) = -f(t)$ ). Portanto, o gráfico da função cosseno é simétrico em relação ao eixo  $y$  e o gráfico da função seno é simétrico em relação a origem. A última propriedade, dada no Teorema 2.3, diz que cosseno e seno são funções periódicas de período  $2\pi$ .

Nosso próximo resultado consiste em estender as fórmulas de adição dadas no Teorema 1.4.

**Teorema 2.4.** *(Fórmulas de adição) Para todos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  temos que:*

$$(i) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta ;$$

$$(ii) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta ;$$

$$(iii) \quad \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha;$$

$$(iv) \quad \text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha.$$

Além disso, se  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  e  $(\alpha + \beta) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  temos ainda que

$$(v) \quad \text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta};$$

$$(vi) \quad \text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}.$$

Demonstração. Consideremos o círculo unitário no plano  $Oxy$ . Sejam  $A = (1, 0)$  e  $P$ ,  $Q$  dois pontos sobre o círculo. Denotemos a medida do arco  $\widehat{AP}$  por  $\alpha$  e a medida do arco  $\widehat{AQ}$  por  $\beta$ , como na figura (2.11). Note que  $P = (\cos \alpha, \text{sen } \alpha)$  e  $Q = (\cos \beta, \text{sen } \beta)$ . Então, se  $d$  é a distância entre os pontos  $P$  e  $Q$  temos que

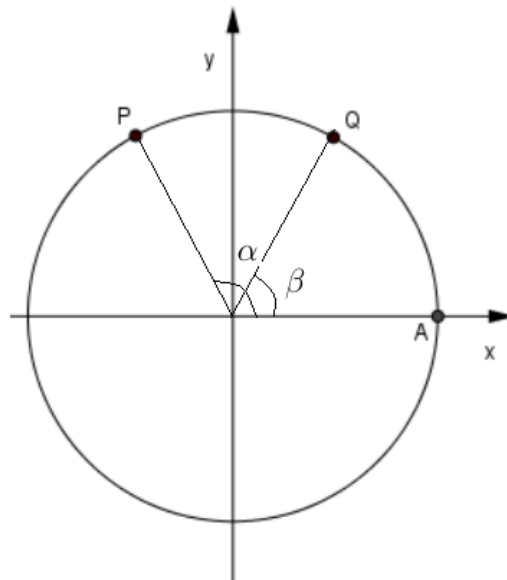


Figura 2.11

$$\begin{aligned} d^2 &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta)^2 \\ &= \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \text{sen}^2 \alpha - 2 \text{sen } \alpha \text{sen } \beta + \text{sen}^2 \beta \\ &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \text{sen } \alpha \text{sen } \beta). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Agora, fazemos a rotação do nosso sistema de coordenadas de um ângulo  $\beta$  em torno da origem obtendo um novo sistema de coordenadas  $Ox'y'$  como na figura (2.12).

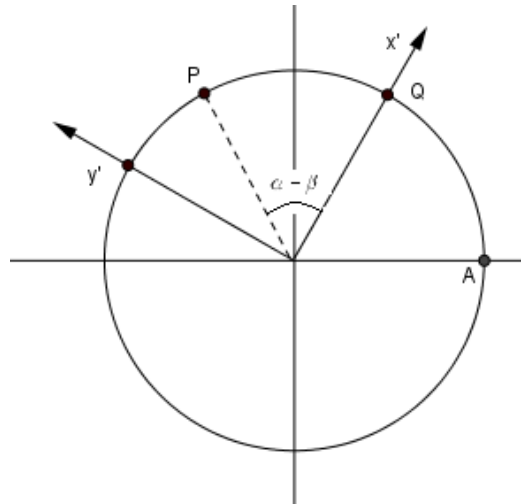


Figura 2.12

As coordenadas dos pontos  $Q$  e  $P$ , segundo o novo sistema de coordenadas são:

$$Q = (1, 0) \quad \text{e} \quad P = (\cos(\alpha - \beta), \text{sen}(\alpha - \beta)).$$

Calculando novamente a distância entre os pontos  $P$  e  $Q$ , usando a relação fundamental, obtemos:

$$\begin{aligned} d^2 &= (1 - \cos(\alpha - \beta))^2 + (0 - \text{sen}(\alpha - \beta))^2 \\ &= 1 - 2 \cos(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) + \text{sen}^2(\alpha - \beta) \\ &= 2 - 2 \cos(\alpha - \beta). \end{aligned} \tag{2.14}$$

De (2.13) e (2.14) resulta

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta,$$

o que prova o item (ii) do teorema.

Se tomarmos  $(-\beta)$  em vez de  $\beta$  em (ii), temos que

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) + \text{sen} \alpha \cdot \text{sen}(-\beta) = \cos \alpha \cdot \cos(\beta) - \text{sen} \alpha \cdot \text{sen}(\beta),$$

onde usamos que cosseno é uma função par e seno é uma função ímpar, provando o item (i).

Do item (ii) do Teorema 2.3 e do item (i) acima, temos que

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos \beta + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \text{sen} \beta,$$

ou seja,

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen} \beta \cdot \cos \alpha,$$

o que prova o item (iii).

Usando o item (iii) com  $(-\beta)$  no lugar de  $\beta$ , obtemos

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha + (-\beta)) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos(-\beta) + \operatorname{sen}(-\beta) \cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha.$$

Aqui novamente usamos que cosseno é uma função par enquanto que seno é uma função ímpar, ficando provado o item (iv).

Sobre a tangente escrevemos:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}$$

Dividindo numerador e denominador por  $(\cos \alpha \cdot \cos \beta) \neq 0$ , pois  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  e  $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , obtemos

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta},$$

provando assim o item (v).

Usando o item (v) podemos ver que

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

o que prova o item (vi), concluindo a demonstração do Teorema 2.4. ■

A partir das fórmulas da adição de arcos, é possível obter as fórmulas para arco duplo. De fato,

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha.$$

Então,

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha. \quad (2.15)$$

Do mesmo modo

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha,$$

ou ainda,

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha. \quad (2.16)$$

Por fim,

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha},$$

ou seja,

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (2.17)$$

Usando a relação fundamental e as igualdades (2.15), (2.16) e (2.17) podemos expressar  $\operatorname{sen} \alpha$ ,  $\operatorname{cos} \alpha$  e  $\operatorname{tg} \alpha$  em termos de  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ . Com efeito,

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \left[ 2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right] = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cos} \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cos} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Dividindo numerador e denominador por  $\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} \neq 0$  ( $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) obtemos

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{2 \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cos} \frac{\alpha}{2}}}{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (2.18)$$

Também note que

$$\operatorname{cos} \alpha = \operatorname{cos} \left[ 2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right] = \operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Dividindo numerador e denominador por  $\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} \neq 0$ , resulta que

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\frac{\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (2.19)$$

Analogamente raciocinamos para a tangente. Veja que

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left[ 2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right] = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (2.20)$$

**Teorema 2.5.** (*Lei dos cossenos e lei dos senos*) Dado um triângulo qualquer de vértices  $ABC$ , sejam  $a, b$  e  $c$  as medidas dos lados  $BC, AC$  e  $AB$ , respectivamente. As seguintes identidades se verificam

$$(i) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \operatorname{cos} \widehat{A};$$

$$(ii) \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \operatorname{cos} \widehat{B};$$

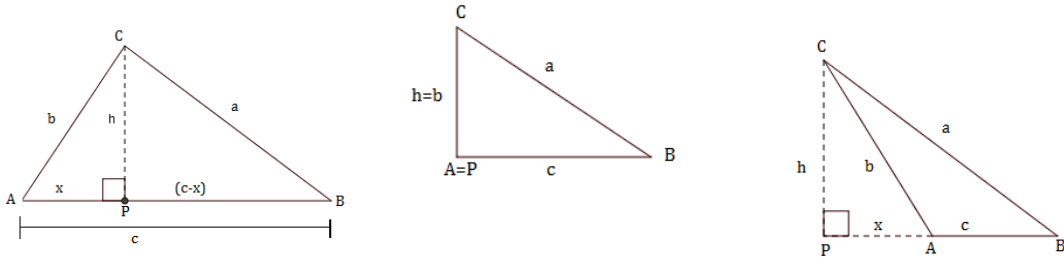
$$(iii) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \operatorname{cos} \widehat{C};$$

$$(iv) \quad \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}}.$$

Observação 1. Os três primeiros itens, juntos, estabelecem a lei dos cossenos, que afirma: "Em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado entre eles".

Observação 2. O item (iv) do Teorema 2.5 é conhecido como Lei dos senos a qual afirma que: "O seno de um ângulo de um triângulo qualquer é proporcional à medida do lado oposto a esse ângulo".

Demonstração. Sejam dados  $\triangle ABC$ ,  $a, b, c$  como no enunciado do teorema. Denotamos por  $h = \overline{CP}$  a altura baixada de  $C$  sobre o lado  $AB$ . Temos 3 casos para considerar:  $0 < \hat{A} < 90^\circ$ ,  $\hat{A} = 90^\circ$  e  $90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$ , ou seja, quando o ângulo  $\hat{A}$  é agudo, reto ou obtuso. Observe as figuras



Caso 1 ( $\hat{A}$  é agudo). Consideremos  $x = \overline{AP}$ , então é fácil ver que

$$x = b \cos \hat{A}. \tag{2.21}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos  $ACP$  e  $PBC$  obtemos

$$b^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - x^2 \tag{2.22}$$

e

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - c^2 - x^2 + 2cx.$$

Substituindo (2.21) nesta última igualdade obteremos

$$h^2 = a^2 - x^2 - c^2 + 2bc \cos \hat{A}. \tag{2.23}$$

De (2.22) e (2.23) segue que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A},$$

ou seja, a identidade (i) se verifica.

Caso 2 ( $\hat{A}$  é reto). Neste caso  $\cos \hat{A} = 0$  e portanto (i) toma a forma

$$a^2 = b^2 + c^2$$

que é absolutamente o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $ABC$ .

Caso 3 ( $\hat{A}$  é obtuso). Neste caso o ponto  $P$  recai sobre o prolongamento do lado  $AB$ . Denotamos novamente  $x = \overline{PA}$ . Então

$$x = b \cos(\pi - \widehat{A}) = -b \cos \widehat{A}. \quad (2.24)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos  $PAC$  e  $PBC$  obtemos

$$b^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - x^2 \quad (2.25)$$

e

$$a^2 = h^2 + (c + x)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - c^2 - x^2 - 2cx.$$

Substituindo (2.24) nesta última igualdade, resulta que

$$h^2 = a^2 - c^2 - x^2 + 2bc \cos \widehat{A}. \quad (2.26)$$

De (2.25) e (2.26) temos que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A},$$

e isto conclui a demonstração do item (i).

A demonstração dos itens (ii) e (iii) são análogas. Para provarmos o item (iv) consideremos as mesmas figuras. No caso 1 vemos que

$$b \operatorname{sen} \widehat{A} = h = a \operatorname{sen} \widehat{B}.$$

Logo,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}}. \quad (2.27)$$

Por outro lado, denotando por  $\alpha = \widehat{ACP}$  e  $\beta = \widehat{PCB}$  temos que  $\widehat{C} = \alpha + \beta$ . Logo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \widehat{C} &= \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha \\ &= \frac{x}{b} \cdot \frac{h}{a} + \frac{(c-x)}{a} \cdot \frac{h}{b} = \frac{xh}{ab} + \frac{(c-x)h}{ab} = \frac{ch}{ab}; \end{aligned}$$

ou ainda

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{ab}{h}.$$

Substituindo  $h = a \operatorname{sen} \widehat{B}$  nesta igualdade, temos

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}}. \quad (2.28)$$

Juntando (2.27) e (2.28) provamos (iv) no caso 1 ( $\widehat{A}$  agudo).

Quando  $\widehat{A} = 90^\circ$ , segundo caso, podemos facilmente ver

$$\operatorname{sen} \widehat{A} = 1, \quad a = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} \quad \text{e} \quad a = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}}.$$

Então

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = a = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}};$$

o que prova o resultado no caso 2.

Para concluir vejamos o caso 3, quando  $\widehat{A}$  é obtuso. Neste caso temos que

$$\operatorname{sen} \widehat{A} = \operatorname{sen}(\pi - \widehat{A}) = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \operatorname{sen} \widehat{A}, \quad (2.29)$$

e

$$\operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \operatorname{sen} \widehat{B}. \quad (2.30)$$

De (2.29) e (2.30) obtemos que

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}}. \quad (2.31)$$

Por outro lado, denotando  $\alpha = P\widehat{C}B$  e  $\beta = A\widehat{C}P$  temos que  $\widehat{C} = \alpha - \beta$ . Logo,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} C &= \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha \\ &= \frac{x+c}{a} \cdot \frac{h}{b} - \frac{x}{b} \cdot \frac{h}{a} = \frac{(x+c)h}{ab} - \frac{xh}{ab} = \frac{ch}{ab}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{ab}{h}.$$

Substituindo  $h = b \operatorname{sen} \widehat{A}$  nesta igualdade, temos

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}}. \quad (2.32)$$

De (2.31) e (2.32) provamos o item (iv) no caso 3 ( $\widehat{A}$  obtuso) e concluimos a demonstração do Teorema 2.5. ■

Há uma interpretação geométrica para a razão  $\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}}$ , de fato, ela é igual ao diâmetro do círculo circunscrito do triângulo  $ABC$ . Considere a circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ , circunscrita ao triângulo  $ABC$ , onde  $OB$  e  $OC$  são raios da circunferência,  $BC = a$  e  $\alpha$  a medida do ângulo  $\widehat{A}$  (veja figura 2.13). A perpendicular  $OP$ , baixada de  $O$  sobre o lado  $BC$  é mediana do triângulo isósceles  $OBC$  e também bissetriz do ângulo  $C\widehat{O}B = 2\alpha$ . Logo  $C\widehat{O}P = \alpha$ . Veja novamente a figura 2.13. Daí resulta que

$$\frac{a}{2} = r \operatorname{sen} \widehat{A},$$

ou seja,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = 2r = \text{diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo } ABC.$$

As leis dos cossenos e dos senos permitem obter os seis elementos de um triângulo quando dados três deles, desde que um seja lado, conforme os casos clássicos de congruência de triângulos.



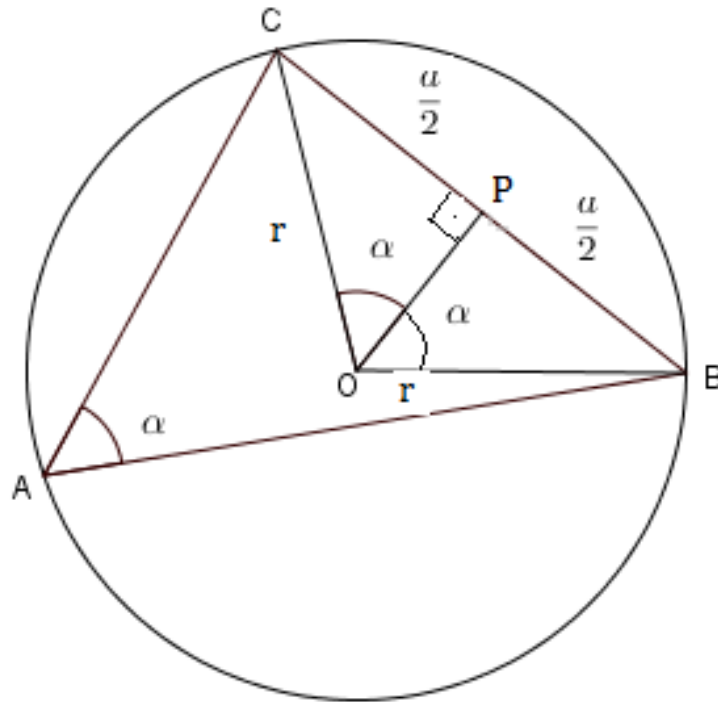


Figura 2.13

Das funções seno e cosseno derivam, além da tangente que já conhecemos, outras funções trigonométricas, conhecidas como cotangente, secante e cossecante, definidas, respectivamente:

$$\cotg(x) = \frac{\cos(x)}{\sen(x)}, \quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad \text{e} \quad \csc(x) = \frac{1}{\sen(x)}.$$

Cumpra observar que tais funções, sendo definidas por meio de quocientes, têm seus domínios restritos aos números reais para os quais o denominador é diferente de zero.

### Gráfico das funções trigonométricas

Finalizamos esta seção com um esboço do gráfico das funções trigonométricas. Este é um ponto delicado pois é preciso entender que trata-se de um esboço e não de uma construção precisa. Todas as ferramentas matemáticas disponíveis até o momento, que de fato são os conteúdos abordados no ensino médio, não nos permitem concluir informações sobre concavidade e também sobre a formação de "bicos". É bastante comum o aluno do ensino médio, no momento da "construção" dos gráficos das funções trigonométricas apresentar as seguintes dúvidas:

- Como saber que entre 0 e  $\pi$  o gráfico da função seno tem concavidade voltada para baixo?

- Por que não existem "bicos" nos gráficos das funções seno e cosseno?

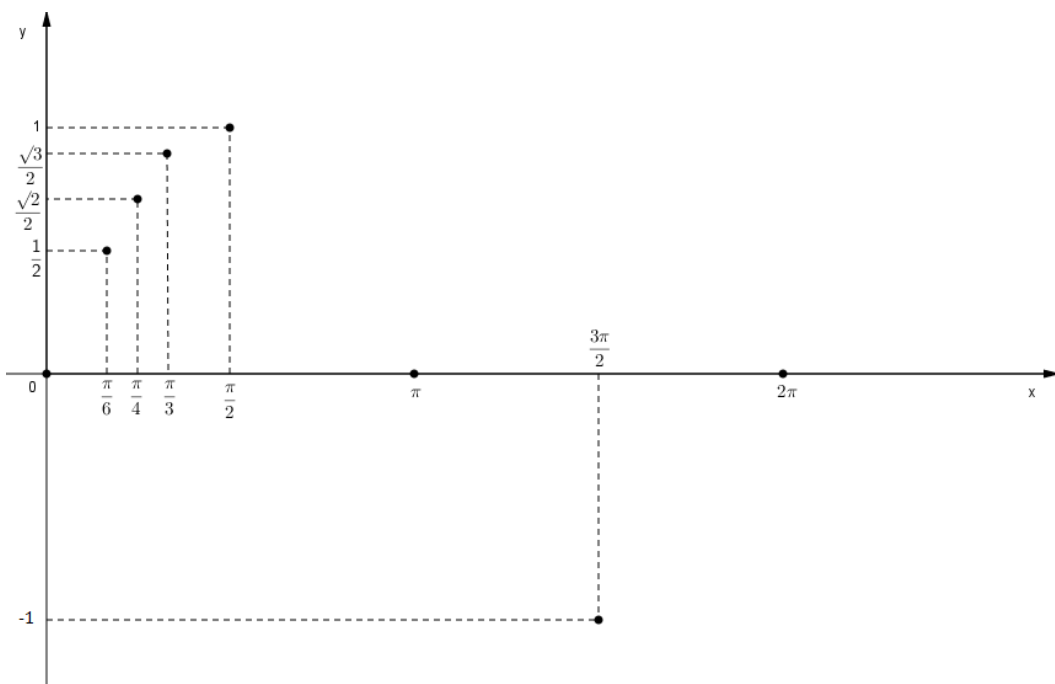
Também é muito comum respostas insatisfatórias, por parte dos professores. Respostas erradas levam o estudante ao fracasso e ao desinteresse, por se sentirem incapa-

zes. A completa compreensão do gráfico das funções trigonométricas só é possível com o estudo do cálculo diferencial, mais precisamente, com o conceito da derivada. Quando uma função é derivável em um intervalo, seu gráfico não possui bicos. Também o estudo do sinal da derivada de uma função nos permite concluir sobre crescimento, decréscimo e extremos relativos (máximos e mínimos locais). Por fim a derivada de segunda ordem fornece informações sobre a concavidade do gráfico de uma função.

Tendo em mente as considerações acima, faremos o esboço do gráfico da função seno. Desde que a função seno é periódica de período  $2\pi$ , basta fazermos o esboço do gráfico para o intervalo  $[0, 2\pi]$  e depois repetir esse padrão para toda reta. Iniciamos observando que as raízes (pontos onde o gráfico corta o eixo  $x$ ) são  $x = 0, x = \pi$  e  $x = 2\pi$ , pois  $\sin 0 = \sin \pi = \sin 2\pi = 0$ . Além disso conhecemos os valores da tabela:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

Plotando esses pontos no plano cartesiano, temos



Através das fórmulas de adição de arcos do Teorema 1.4, é possível determinar as coordenadas de mais alguns pontos.

$x$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$y = \sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Pela definição da função seno podemos facilmente encontrar os intervalos de crescimento e decrescimento, os quais são descritos pela tabela:

$0 < x < \frac{\pi}{2}$	a função é crescente
$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$	a função é decrescente
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	a função é crescente

Em resumo temos que:

- (i)  $\text{sen } 0 = 0$ ;
- (ii) a medida que  $x$  varia de 0 até  $\frac{\pi}{2}$  os valores de  $\text{sen } x$  crescem de zero até o valor máximo igual a  $1 = \text{sen } \frac{\pi}{2}$ ;
- (iii) quando  $x$  variar de  $\frac{\pi}{2}$  até  $\frac{3\pi}{2}$  os valores de  $\text{sen } x$  decrescem de 1 até o valor mínimo  $-1 = \text{sen } \frac{3\pi}{2}$ , cortando o eixo das abcissas em  $x = \pi$ ;
- (iv) a medida que  $x$  varia de  $\frac{3\pi}{2}$  até  $2\pi$  os valores de  $\text{sen } x$  crescem de  $-1$  até zero.

Veja a figura

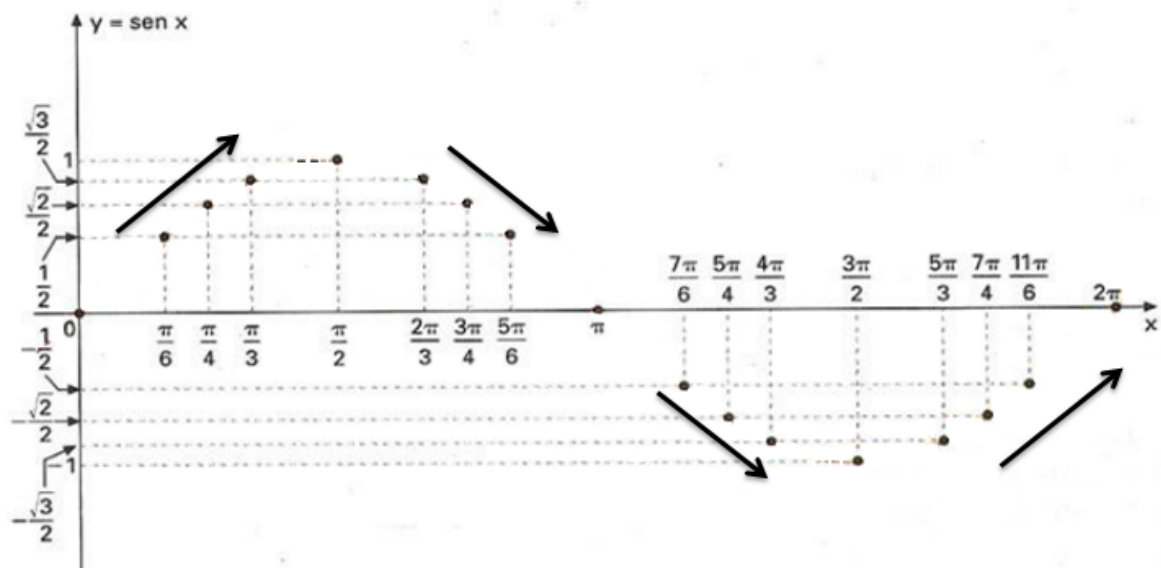


Figura 2.14

A partir desta figura, adicionamos dois fatos cuja demonstração foge ao escopo dos conteúdos do ensino médio,

- 1° fato: O gráfico da função seno é uma curva contínua sem bicos.
- 2° fato: No intervalo de 0 a  $\pi$  o gráfico tem a concavidade voltada para baixo, enquanto que no intervalo de  $\pi$  a  $2\pi$  a concavidade esta voltada para cima.

Agora, considerando estes fatos, podemos completar o esboço do gráfico<sup>3</sup> da função seno obtendo:

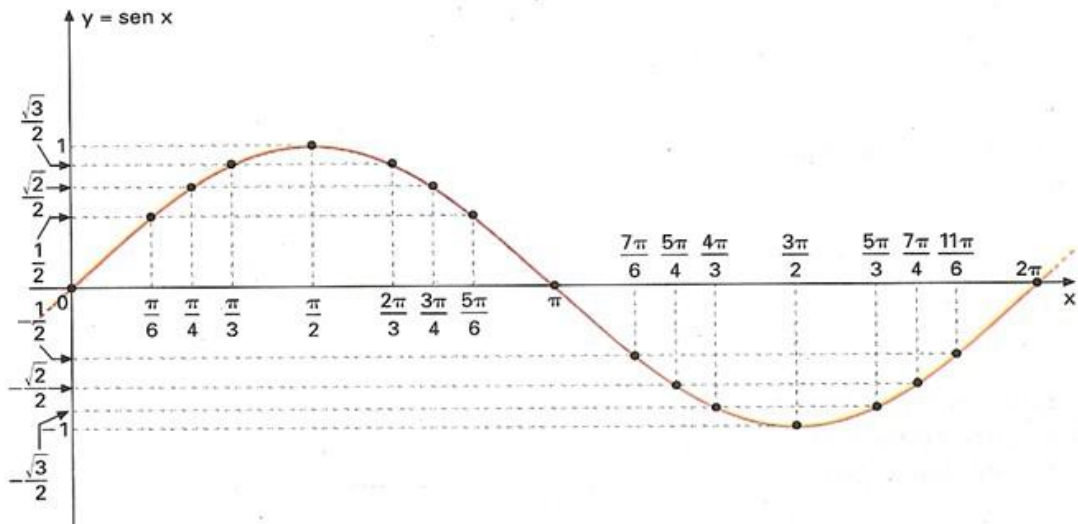


Figura 2.15

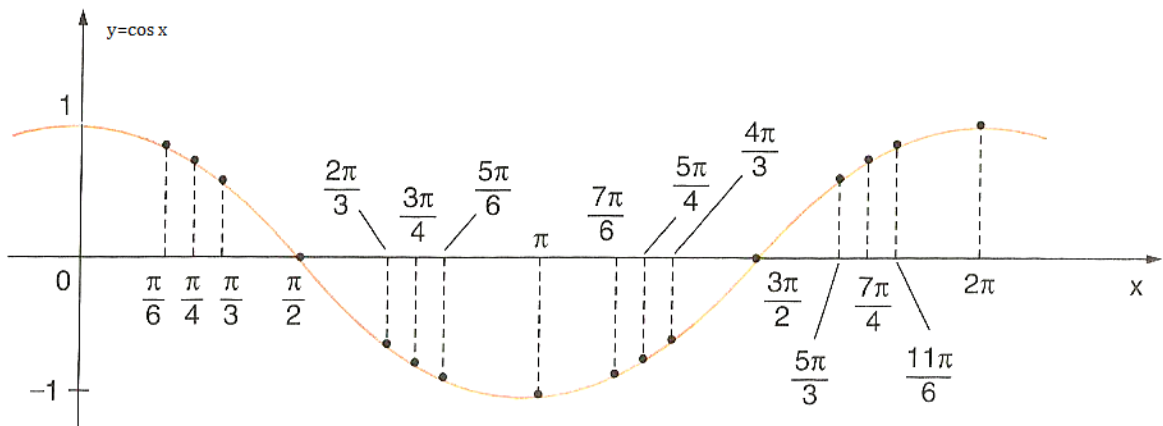


Figura 2.16

De modo análogo podemos esboçar o gráfico da função cosseno, como segue:

Um estudo mais aprofundado sobre o esboço dos gráfico das funções trigonométricas pode ser visto em [5].

## 2.5 Derivada das funções trigonométricas

Um conceito fundamental no estudo de funções é determinar o quão rápido determinada grandeza varia em relação a outra, ou seja, determinar taxa de variação. Se  $y = f(x)$  é uma função real definida num intervalo aberto  $I = (a, b)$  e  $x_1 < x_2$  são dois pontos dados em  $I$ , a taxa de variação média da função em relação a  $x$ , no intervalo  $[x_1, x_2]$  é o quociente

<sup>3</sup>As figuras (2.15) e (2.16), foram retiradas de ([4])

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (2.33)$$

Por outro lado, se  $x \in I$  é um ponto fixado no domínio de  $f$ , definimos a taxa de variação instantânea da função  $f$ , no ponto  $x$ , que denotamos por  $f'(x)$  e chamamos a derivada de  $f$  no ponto  $x$ , como sendo o valor para o qual se aproximam as taxas de variação média em intervalos cada vez menores, em torno do ponto  $x$ . Em outras palavras

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2.34)$$

Conhecer a derivada de uma função é crucial para compreensão do comportamento desta função (veja [7], [6]). Nesta seção, uma vez definidas as funções trigonométricas, queremos encontrar suas derivadas. Vejamos inicialmente a derivada da função seno. Por definição

$$(\text{sen } x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x}{\Delta x}. \quad (2.35)$$

Usando as propriedades das funções trigonométricas podemos reescrever o quociente acima de modo conveniente:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x}{\Delta x} &= \frac{\text{sen } x(\cos \Delta x) + (\text{sen } \Delta x) \cos x - \text{sen } x}{\Delta x} \\ &= \cos x \left( \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x} \right) + \frac{\text{sen } x(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} \frac{(\cos x + 1)}{(\cos x + 1)} \\ &= \cos x \left( \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x} \right) + \frac{\text{sen } x[(\cos \Delta x)^2 - 1]}{(\Delta x)(\cos x + 1)} \\ &= \cos x \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x} + \frac{\text{sen } x(-(\text{sen } \Delta x)^2)}{(\Delta x)(\cos x + 1)} \\ &= \cos x \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x} - \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x} \frac{(\text{sen } x \text{ sen } \Delta x)}{(\cos x + 1)}. \end{aligned}$$

Resumindo temos que

$$\frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x}{\Delta x} = (\cos x) \left( \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x} \right) - \left( \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x} \right) \left[ \frac{(\text{sen } x)(\text{sen } \Delta x)}{(\cos x + 1)} \right]. \quad (2.36)$$

Para tomar o limite em (2.36) quando  $(\Delta x)$  tende a zero, observamos que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\text{sen } x)(\text{sen } \Delta x)}{(\cos x + 1)} = \frac{\text{sen } x \cdot 0}{1 + 1} = 0, \quad (2.37)$$

então só falta encontrar o limite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x}.$$

Trata-se de um limite clássico (fundamental), para isto temos o seguinte lema.

**Lema 2.1.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

Demonstração. Considere a figura 2.17, que representa parte da circunferência de raio 1, situada no primeiro quadrante.

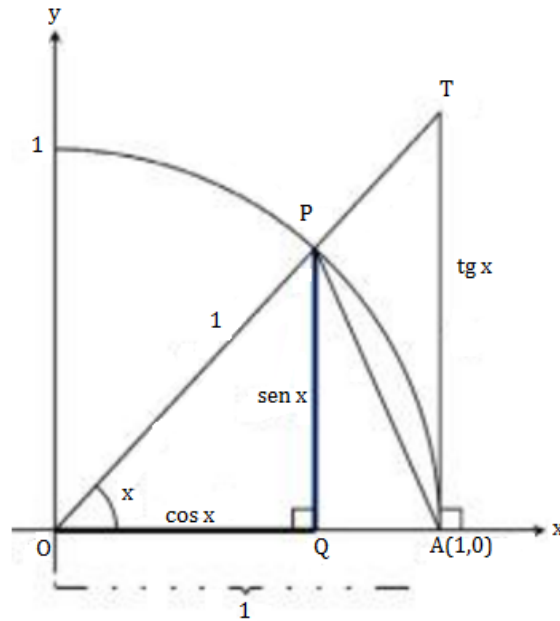


Figura 2.17

Denotando

$$A_{\Delta OAP} = \text{área do triângulo } OAP;$$

$$A_{\text{setor } POA} = \text{área do setor } POA;$$

$$A_{\Delta OAT} = \text{área do triângulo } OAT,$$

temos que:

$$A_{\Delta OAP} < A_{\text{setor } POA} < A_{\Delta OAT}. \tag{2.38}$$

Calculando as áreas temos:

$$A_{\Delta OAP} = \frac{\text{sen } x}{2}, \quad A_{\text{setor } POA} = \frac{x}{2} \quad \text{e} \quad A_{\Delta OAT} = \frac{\text{tg } x}{2}.$$

Portanto segue que

$$\frac{\text{sen } x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\text{tg } x}{2} \quad \text{para todo } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Multiplicando todos os membros dessa desigualdade por  $\frac{2}{\text{sen } x} > 0$  encontramos

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x},$$

ou ainda,

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \quad \text{para todo } 0 < x < \frac{\pi}{2}. \quad (2.39)$$

Desde que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$ , pelo Teorema do Confronto (conforme [6]), tomamos o limite quando  $x \rightarrow 0^+$  em (2.39) e obtemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Devemos ainda provar que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ . Como seno é uma função ímpar, podemos ver que

$$\frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Por outro lado, o cosseno é uma função par, então  $\cos(-x) = \cos x$ . Logo podemos ver que a desigualdade (2.39) continua válida para  $\frac{-\pi}{2} < x < 0$ . Da mesma forma, tomando o limite quando  $x \rightarrow 0^-$  obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = 1,$$

e isto completa a prova do Lema 2.1. ■

Agora estamos aptos para passar ao limite em (2.36). Ou seja, considerando o lema anterior, o valor do limite dado em 2.37 e usando as propriedades de limite conforme [2], podemos passar ao limite em (2.36) quando  $(\Delta x)$  tende a zero e obtemos:

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x,$$

, ou ainda, a derivada da função seno é a função cosseno. Usualmente também denotamos a derivada por

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (2.40)$$

Vejamos na sequência como calcular a derivada da função cosseno. Por definição

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}. \quad (2.41)$$

De modo análogo ao que fizemos para a função seno, vamos reescrever o quociente em (2.41) numa forma conveniente:

$$\begin{aligned} & \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \frac{\cos x \cdot \cos \Delta x - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} \Delta x - \cos x}{\Delta x} \\ &= \frac{\cos x(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} = \frac{\cos x(\cos \Delta x - 1)(\cos \Delta x + 1)}{\Delta x(\cos \Delta x + 1)} - \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \\ &= \frac{\cos x[(\cos \Delta x)^2 - 1]}{(\Delta x)(\cos \Delta x + 1)} - \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \\ &= \frac{\cos x(-(\operatorname{sen} \Delta x)^2)}{(\Delta x)(\cos \Delta x + 1)} - \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$= \frac{-\cos x}{(\cos \Delta x + 1)} \cdot \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x} \cdot \text{sen } \Delta x - \text{sen } x \cdot \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x}$$

Assim,

$$\frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -\frac{\cos x}{(\cos \Delta x + 1)} \cdot \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x} \cdot \text{sen } \Delta x - \text{sen } x \cdot \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x}. \quad (2.42)$$

Considerando o Lema 2.1 e usando as propriedades do limite conforme [2], passamos ao limite na expressão (2.42), quando  $\Delta x$  tende a zero, e obtemos

$$(\cos x)' = -\frac{\cos x}{2} \cdot 1 \cdot 0 - (\text{sen } x) \cdot 1,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\text{sen } x. \quad (2.43)$$

Finalizamos esta seção com uma interessante observação sobre as funções seno, cosseno, e suas derivadas. Para facilitar a escrita denotamos a função seno por  $S$  e a função cosseno por  $C$ , isto é. sejam:

$$S(x) = \text{sen } x \quad \text{e} \quad C(x) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Então de (2.40) e (2.43) temos que

$$S'(x) = C(x) \quad \text{e} \quad C'(x) = -S(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Portanto

$$S''(x) = -S(x) \quad \text{e} \quad C''(x) = -C(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}, \quad (2.44)$$

também temos que

$$S(0) = 0 \quad \text{e} \quad S'(0) = 1, \quad (2.45)$$

enquanto que

$$C(0) = 1 \quad \text{e} \quad C'(0) = 0. \quad (2.46)$$

Resumindo, de (2.44) concluímos que as funções seno e cosseno são soluções da equação diferencial ordinária de segunda ordem,

$$y'' + y = 0$$

e satisfazem, respectivamente, as condições iniciais (2.45) e (2.46).

Adicionalmente, sabemos que para  $x \in (0, \pi)$  temos que  $S(x) > 0$ , então de (2.44) resulta que  $S''(x) < 0$  quando  $x \in (0, \pi)$ . Logo, o gráfico da função seno, no intervalo de  $(0, \pi)$ , tem a concavidade voltada para baixo. De modo similar, desde que  $S(x) < 0$  para  $x \in (\pi, 2\pi)$ , de (2.44) concluímos que  $S''(x) > 0$  quando  $x \in (\pi, 2\pi)$ . Isto implica que o gráfico da função seno, no intervalo  $(\pi, 2\pi)$  tem a concavidade voltada para cima.



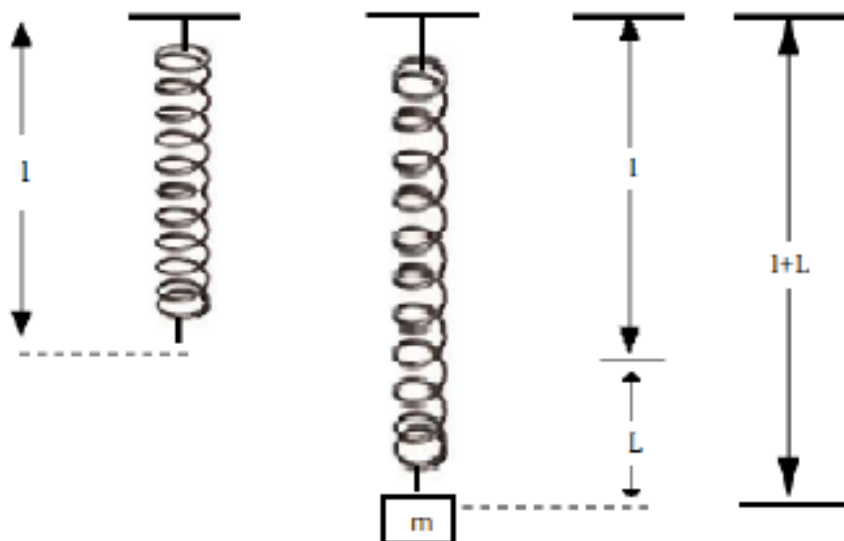
Ainda de (2.40) e (2.43), vemos que podemos derivar as funções seno e cosseno quantas vezes desejarmos, ou seja, seno e cosseno possuem derivadas de todas as ordens, são funções de classe  $C^\infty(\mathbb{R})$ , infinitamente deriváveis. Assim seus gráficos são curvas extremamente suaves, sem bicos.

# 3 Funções Trigonométricas - Uma abordagem analítica

## 3.1 Motivação: Vibrações mecânicas

No início do capítulo anterior falamos sobre movimentos periódicos/oscilatórios ou vibratórios e a importância destes para o entendimento da natureza e também para o desenvolvimento tecnológico. O movimento de uma massa presa a uma mola é talvez, a situação mais simples possível de um movimento vibratório. Logo, a compreensão deste movimento é o primeiro passo para que se entenda qualquer outro movimento vibratório mais complexo. Nesta seção, vamos modelar o movimento de uma massa presa a uma mola.

Consideremos uma massa  $m$  presa a uma das extremidades de uma mola, cujo comprimento original (sem estendê-la ou comprimí-la) é igual a  $l$ , posta na direção vertical, conforme a figura abaixo:



Devido à força peso, ao fixar a massa na mola, esta é estendida para baixo, provocando um alongamento  $L$ . Na situação de equilíbrio (a massa está parada) existe uma força (chamada força elástica) da mola, que atua para cima, no sentido contrário

à força peso, com intensidade proporcional ao alongamento  $L$ , dada por

$$F_m = -K \cdot L$$

onde  $K$  é uma constante característica da mola.



Então, dada a situação de equilíbrio, a resultante das forças deve ser nula, isto é

$$mg - KL = 0, \quad (3.1)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade. Na prática a equação (3.1) pode ser usada para se determinar a constante  $K$  da mola. A massa  $m$ , a aceleração da gravidade  $g$  e o alongamento  $L$  são dados e a partir de (3.1) encontramos o valor de  $K$ .

Queremos descrever o movimento da massa quando esta é destendida ou comprimida, a partir da situação de equilíbrio, ou ainda devido a ação de alguma força externa. Então, fixamos um eixo vertical orientado positivamente para baixo, sendo a origem fixada na posição de equilíbrio. Denotemos por  $s(t)$  a posição da massa  $m$  no instante de tempo  $t$ , segundo o eixo referencial fixado, conforme a figura (3.1).

A segunda lei de Newton nos diz que força é igual ao produto da massa pela aceleração, ou seja,

$$F = m \cdot a. \quad (3.2)$$

Note que sobre a massa  $m$  em movimento vibratório, atuam 3 forças: força peso, força da mola e força de amortecimento (resistência do ar). A força peso atua sempre para baixo, no sentido positivo do eixo, e tem intensidade  $P = m \cdot g$ . A força da mola age sempre para restaurar a mola à sua posição natural e tem intensidade proporcional

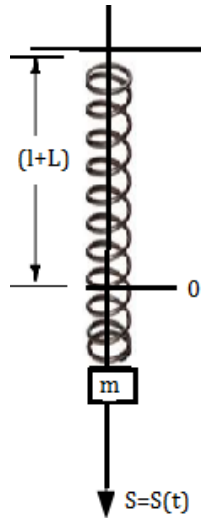


Figura 3.1

ao alongamento total  $(L + s)$ . Então a força da mola é proporcional ao seu alongamento e tem sentido oposto a ele, isto é:

$$F_m = -K(L + s)$$

Por outro lado, a força de amortecimento age sempre no sentido contrário do movimento e sua intensidade é proporcional à velocidade da massa  $m$ . Então, a força de amortecimento tem intensidade

$$F_a = -\gamma s'(t).$$

Note que  $s'(t)$  é a taxa de variação instantânea da posição  $s(t)$ , ou seja, a velocidade e  $\gamma$  é uma constante de proporcionalidade.

Portanto, retornando em (3.2) e usando as forças mencionadas temos:

$$P + F_m + F_a = m \cdot s''(t),$$

$$\begin{aligned} mg - K(L + s(t)) - \gamma s'(t) &= m s''(t), \\ (mg - KL) - Ks(t) - \gamma s'(t) &= m s''(t). \end{aligned}$$

Usando (3.1) nesta igualdade obtemos

$$m s''(t) + \gamma s'(t) + Ks(t) = 0,$$

dividindo por  $m \neq 0$ , temos

$$s''(t) + \left(\frac{\gamma}{m}\right) s'(t) + \left(\frac{K}{m}\right) s(t) = 0. \quad (3.3)$$

Logo, a posição da massa  $m$  no instante de tempo  $t$ , modelada pela função  $s = s(t)$ , deve satisfazer a equação diferencial ordinária linear de 2ª ordem (3.3).

Por simplicidade, consideremos a situação ideal na qual não há resistência do ar e supomos ainda que  $\frac{K}{m} = 1$ . Então, a equação (3.3) toma a forma mais simples.

$$s''(t) + s(t) = 0. \quad (3.4)$$

Logo, a posição da mola deve ser dada por uma função cuja derivada segunda seja igual a menos ela própria, ou seja,

$$s''(t) = -s(t) \text{ para todo } t > 0. \quad (3.5)$$

Se, adicionalmente à equação (3.5), especificamos duas condições iniciais, a saber, a posição inicial  $s_0$  e velocidade inicial  $v_0$  da massa  $m$ ,

$$s(0) = s_0 \quad \text{e} \quad s'(0) = v_0 \quad (3.6)$$

temos um problema de valores iniciais, cuja solução é unicamente determinada por  $s = s(t)$ . Em outras palavras, do ponto de vista físico, é razoável concluir que existe uma única função  $s = s(t)$ , satisfazendo à equação (3.5) e as condições iniciais (3.6).

Nesse capítulo, motivados pela discussão aqui apresentada, vamos dar a solução matemática para o problema. Vamos, por meio de uma abordagem puramente analítica, construir duas funções,  $C = C(t)$  e  $S = S(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , satisfazendo a equação (3.5) determinadas condições iniciais.

## 3.2 Sequências de funções

Nesta seção, apresentamos a ferramenta matemática necessária para a construção analítica das funções trigonométricas. A teoria é sobre sequências de funções e um estudo completo pode ser visto em [2] e [6]. Nossa estratégia, na próxima seção, para construção das funções desejadas, será definir duas sequências de funções convenientes  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e provar que tais sequências convergem, respectivamente, para funções  $C$  e  $S$ , as quais terão as propriedades que queremos.

Sejam  $A \subset \mathbb{R}$  e denotamos por  $F(A)$  o conjunto de todas as funções reais definidas em  $A$ , isto é:

$$F(A) = \{\Psi : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad \Psi \text{ é uma função}\}.$$

Uma sequência de funções de  $A$  em  $\mathbb{R}$  é uma função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow F(A) \\ n &\rightarrow f(n) = f_n \end{aligned}$$

que a cada número natural  $n$  faz corresponder uma função  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Usualmente denotamos uma sequência de funções de  $A$  em  $\mathbb{R}$  por  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

O ponto crucial a respeito das sequências de funções é a convergência. Quando consideramos sequências numéricas temos somente uma noção de convergência ao passo que para sequências de funções podemos ter diversas formas de convergência. A noção mais simples de convergência de uma sequência de funções é a convergência pontual.

**Definição 3.1.** (*Convergência pontual*) Dizemos que uma sequência de funções  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$  em  $\mathbb{R}$  converge pontualmente para uma função  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  quando, para cada  $x$  fixado em  $A$ , a sequência numérica  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge para o número  $f(x)$ .

Para denotar que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge pontualmente para  $f$  escrevemos:

$$f_n \rightarrow f \text{ pontualmente.}$$

Bem observada, a definição acima nos diz que  $f_n \rightarrow f$  pontualmente, quando para cada  $x \in A$  e  $\varepsilon > 0$  existe um índice  $n = n_0(\varepsilon, x)$  (que depende de  $\varepsilon$  e  $x$ ) tal que se  $n \geq n_0$  tem-se  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ . Quando o índice  $n$  não depende de  $x$ , mas apenas do número  $\varepsilon$ , temos uma noção mais "forte" de convergência, denominada convergência uniforme.

**Definição 3.2.** (*Convergência uniforme*) Dizemos que uma sequência de funções  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$  em  $\mathbb{R}$  converge uniformemente para uma função  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  quando, para cada  $\varepsilon > 0$  dado, existe um índice  $n_0 = n(\varepsilon)$  (que só depende do  $\varepsilon$ ) tal que se  $n \geq n_0$  então  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ , para todo  $x \in A$ .

É claro que se  $f_n \rightarrow f$  uniformemente então em particular  $f_n \rightarrow f$  pontualmente. Entretanto a recíproca é falsa. Por exemplo a sequência de funções  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f_n(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in [0, 1],$$

converge pontualmente para a função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases},$$

mas  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  não converge uniformemente para  $f$ .

A convergência uniforme, por ser um conceito mais forte, traz muitas vantagens ao estudo. De modo geral todas as "boas propriedades" dos termos  $f_n$  são transferidas para a função limite, quando a convergência é uniforme. No próximo resultado tratamos a continuidade.

**Teorema 3.1.** Se  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de funções contínuas de  $A$  em  $\mathbb{R}$  e  $f_n \rightarrow f$  uniformemente, então  $f$  é contínua em  $A$ .

A demonstração deste teorema e de todos os outros desta seção, podem ser encontradas em [2], [6]. Em outras palavras o resultado afirma que o limite uniforme de funções contínuas é ainda uma função contínua. Do ponto de vista prático, verificar a convergência uniforme pela definição (3.2) é algo não muito fácil e, por isso, outras alternativas foram desenvolvidas. A mais importante é o critério de Cauchy para convergência uniforme, dado pelo resultado a seguir.

**Teorema 3.2.** *Uma sequência de funções  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$  em  $\mathbb{R}$  converge uniformemente, se e somente se, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tais que se  $m, n \geq n_0$  então  $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ , para todo  $x \in A$ .*

Baseado neste teorema é bastante comum, para se provar a convergência uniforme de uma dada sequência de funções  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , mostrar que para  $m, n \in \mathbb{N}$  suficientemente grandes e todo  $x \in A$  temos um estimativa do tipo

$$|f_m(x) - f_n(x)| < u_n, \tag{3.7}$$

onde  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência numérica tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \tag{3.8}$$

Sobre a convergência uniforme e diferenciação podemos, sob certas condições, garantir que o limite uniforme  $f$  de uma sequência de funções  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diferenciáveis em  $A$  é ainda uma função diferenciável em  $A$  e vale  $f' = \lim f'_n$ . De fato temos o resultado:

**Teorema 3.3.** *Seja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de funções deriváveis no intervalo  $[a, b]$ . Se para um certo  $x \in [a, b]$ , a sequência numérica  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge e se a sequência das derivadas  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente em  $[a, b]$  para uma função  $g$ , então  $(f_n)$  converge uniformemente em  $[a, b]$  para uma função derivável  $f$  e  $f' = g$ .*

Finalizamos essa seção com o teorema devido a Taylor, o qual, sob certas condições expressa uma função por meio de um polinômio envolvendo a função e suas derivadas.

**Teorema 3.4.** *(Fórmula de Taylor) Seja  $I = [a, b]$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com  $n$  derivadas contínuas e  $f^{n+1}$  definida em todo  $(a, b)$ . Seja  $x_0 \in I$ , então para cada  $x \in [a, b]$ , existe  $c$  entre  $x_0$  e  $x$  tal que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} + f^{n+1}(c) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

### 3.3 Construção analítica das funções trigonométricas

Na seção 3.1 concluímos que se  $S = S(t)$  é a posição de uma massa  $m$ , presa a uma mola no instante de tempo  $t$ , ela deve ser solução da EDO

$$S''(t) = -S(t).$$

Usando a teoria da seção (3.2), vamos construir duas funções que são solução desta EDO. Em [2] pode-se aprofundar esse estudo.

**Teorema 3.5.** *Existem funções  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfazem as seguintes condições:*

(i)  $C''(x) = -C(x)$  e  $S''(x) = -S(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

(ii)  $C(0) = 1, C'(0) = 0, S(0) = 0, S'(0) = 1$ .

Demonstração. Vamos inicialmente definir por recorrência, duas sequências de funções contínuas, as quais denotamos por  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Consideremos então:

$$C_1(x) = 1 \quad \text{e} \quad S_1(x) = x \quad \text{para } x \in \mathbb{R}; \quad (3.9)$$

$$C_{n+1}(x) = 1 - \int_0^x S_n(t) dt \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \text{ e } n = 1, 2, 3, 4, \dots; \quad (3.10)$$

$$S_n(x) = \int_0^x C_n(t) dt \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \text{ e } n = 2, 3, 4, \dots, \quad (3.11)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ . De (3.9), (3.10) e (3.11) vemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , as funções  $C_n$  e  $S_n$  estão bem definidas e são funções contínuas em toda reta real  $\mathbb{R}$ . Além disso, pelo Teorema Fundamental do Cálculo (veja em [6]) podemos concluir que  $C_{n+1}$  e  $S_n$  são deriváveis em toda reta e mais ainda,

$$S'_n(x) = C_n(x) \quad \text{e} \quad C'_{n+1}(x) = -S_n(x), \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Ainda usando (3.9) - (3.11), façamos alguns cálculos para escrever  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de forma explícita. Vejamos que

$$\begin{aligned} C_{1+1} &= C_2(x) = 1 - \int_0^x t dt = 1 - \left( \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^x = 1 - \frac{x^2}{2}; \\ S_2(x) &= \int_0^x C_2(t) dt = \int_0^x \left( 1 - \frac{t^2}{2} \right) dt = \left( t - \frac{t^3}{3 \cdot 2} \right) \Big|_0^x = x - \frac{x^3}{3!}, \\ C_{2+1}(x) &= C_3(x) = 1 - \int_0^x \left( t - \frac{t^3}{3!} \right) dt = 1 - \left( \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{3! \cdot 4} \right) \Big|_0^x \\ &= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!}; \\ S_3(x) &= \int_0^x \left( 1 - \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4!} \right) dt = \left( t - \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \frac{t^5}{5 \cdot (4!)} \right) \Big|_0^x \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}; \\ C_{3+1}(x) &= C_4(x) = 1 - \int_0^x \left( t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \right) dt = 1 - \left( \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{3! \cdot 4} + \frac{t^6}{6 \cdot (5!)} \right) \Big|_0^x \\ &= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!}; \\ S_4(x) &= \int_0^x \left( 1 - \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \right) dt = \left( t - \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \frac{t^5}{5 \cdot (4!)} - \frac{t^7}{7 \cdot 6!} \right) \Big|_0^x \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \end{aligned}$$

Portanto, por indução, para todo  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  resulta que:



$$C_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (3.13)$$

e

$$S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (3.14)$$

Vamos verificar que a sequência  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente em qualquer intervalo  $I = [-A, A]$ ,  $A > 0$ , e em particular,  $(C_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge para cada  $x \in \mathbb{R}$ . De fato, usando (3.13) podemos fazer a seguinte estimativa: Sejam fixados, arbitrariamente,  $A > 0$  e  $m, n \in \mathbb{N}$  tais que  $m > n > 2A$  então

$$\frac{A}{2n} < \frac{1}{4}. \quad (3.15)$$

Consequentemente para todo  $x \in [-A, A]$ , ( $|x| \leq A$ ) temos:

$$\begin{aligned} |C_m(x) - C_n(x)| &= \left| \frac{(-1)x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!} + \dots + \frac{(-1)^{m-1}x^{2(m-1)}}{[2(m-1)]!} \right| \\ &= \left| \frac{x^{2n}}{(2n)!} \left[ (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}x^2}{(2n+2)(2n+1)} + \dots + \frac{(-1)^{(m-1)}x^{2m-2-2n}}{(2m-2)(2m-3)\dots(2n+1)} \right] \right| \\ &\leq \frac{A^{2n}}{(2n)!} \left[ 1 + \left(\frac{A}{2n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{A}{2n}\right)^{2m-2n-2} \right] \\ &< \frac{A^{2n}}{(2n)!} \left[ 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{2m-2-2n} \right] \\ &< \frac{A^{2n}}{(2n)!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3} \frac{A^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Desde que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!} = 0,$$

pelo critério de Cauchy (Teorema 3.2) concluímos que  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente no intervalo  $[-A, A]$ , para todo  $A$  arbitrariamente fixado. Logo, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , a sequência numérica  $(C_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

Denotamos

$$C(x) = \lim C_n(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Então, está bem definida uma função  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  limite da sequência de funções  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$C_n \rightarrow C \quad \text{uniformemente em todo intervalo } [-A, A], \quad A > 0.$$

Desde que cada  $(C_n)$  é uma função contínua e a convergência é uniforme, pelo Teorema 3.1, resulta que a função  $C$  é contínua em  $\mathbb{R}$ . Também é fácil ver que  $C_n(0) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e portanto

$$C(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n(0) = 1 \quad (3.17)$$

Para verificarmos a convergência de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  observamos que para  $|x| \leq A$  e  $m > n > 2A$ , usando (3.11) e (3.16) concluímos que

$$\begin{aligned} |S_m(x) - S_n(x)| &= \left| \int_0^x [C_m(t) - C_n(t)] dt \right| \leq \int_0^x |C_m(t) - C_n(t)| dt \\ &< \frac{4}{3} \frac{A^{2n}}{(2n)!} |x| < \frac{4A}{3} \frac{A^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

E portanto  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente em  $[-A, A]$ , para todo  $A > 0$ . Denotamos por  $S$  o limite da sequência  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , isto é

$$\begin{aligned} S : \quad \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \end{aligned}$$

Analogamente, sendo cada uma das funções  $(S_n)$  contínua e a convergência uniforme, vemos que  $S$  é contínua em  $\mathbb{R}$ . Como  $S'_n(0) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  resulta que

$$S(0) = 0. \tag{3.18}$$

Vejamos a seguir as sequências das derivadas  $(C'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(S'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . De fato, de (3.12) temos que

$$C'_n(x) = -S_{n-1}(x) \quad \text{para } n \geq 2$$

e como  $S_n \rightarrow S$  uniformemente em  $[-A, A]$ , obtemos que  $C'_n \rightarrow (-S)$  uniformemente em  $[-A, A]$ . Pelo Teorema 3.3 segue que a função  $C$  é derivável em  $[-A, A]$  e  $C'(x) = -S(x)$  para todo  $x \in [-A, A]$ . Pela arbitrariedade de  $A > 0$ , vemos que  $C$  é derivável em todo ponto  $x \in \mathbb{R}$  e

$$C'(x) = -S(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{3.19}$$

Agora note que de (3.12) temos também que  $S'_n(x) = C_n(x)$  e  $C_n \rightarrow C$  uniformemente em  $[-A, A]$ , então com um raciocínio análogo concluímos que  $S$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e

$$S'(x) = C(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{3.20}$$

De (3.19) e (3.20) temos que:

$$C''(x) = -C(x) \quad \text{e} \quad S''(x) = -S(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

e

$$C'(0) = 0 \quad \text{e} \quad S'(0) = 1,$$

o que completa a prova do Teorema 3.5. ■

Da demonstração do Teorema 3.5, especificamente de (3.19) e (3.20) enfatizamos que

$$C'(x) = -S(x) \quad \text{e} \quad S'(x) = C(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

e  $C$  e  $S$  são funções de classe  $C^\infty$ , ou seja, possuem derivadas de todas as ordens.

Definindo

$$(C(x))^2 + (S(x))^2 = f(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

podemos ver que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e, pela regra da cadeia,

$$f'(x) = 2C(x).C'(x) + 2S(x).S'(x) = 2C(x).(-S(x)) + 2S(x).(C(x)) = 0.$$

Logo,  $f$  é constante. Mas

$$f(0) = (C(0))^2 + (S(0))^2 = 1 + 0 = 1,$$

então

$$f(x) = 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

de onde resulta que as funções  $C$  e  $S$  satisfazem

$$(C(x))^2 + (S(x))^2 = 1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}, \tag{3.21}$$

a qual é chamada identidade Pitagoriana ou relação fundamental.

Vejamos o Teorema 3.5 sob a ótica das EDOs. Considere os dois problemas de valores iniciais

$$\left| \begin{array}{l} y'' = -y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{array} \right. \tag{3.22}$$

e

$$\left| \begin{array}{l} y'' = -y, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{array} \right. \tag{3.23}$$

Então o Teorema 3.5 constroi duas funções  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  soluções do PVI (3.22) e (3.23), respectivamente. Trata-se portanto de um teorema de existência de soluções para os PVI (3.22) e (3.23).

É possível ainda provar que as funções  $C$  e  $S$  satisfazendo as condições do Teorema 3.5 são únicas. Em outras palavras os PVI (3.22) e (3.23) possuem uma, e somente uma, solução. De fato, suponha que  $C_1$  e  $C_2$  sejam soluções do PVI (3.22) e  $S_1$  e  $S_2$  sejam soluções do PVI (3.23). Definindo

$$D(x) = C_1(x) - C_2(x) \tag{3.24}$$

e

$$T(x) = S_1(x) - S_2(x), \tag{3.25}$$

é fácil verificarmos que

$$\left\{ \begin{array}{l} D''(x) = -D(x), \\ D(0) = 0, \\ D^{(k)}(0) = 0 \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N} \end{array} \right. \quad (3.26)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} T''(x) = -T(x), \\ T(0) = 0, \\ T^{(k)}(0) = 0 \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Seja  $x \in \mathbb{R}$  arbitrariamente fixado. Denotamos por  $I_x$ , o intervalo fechado de extremos 0 e  $x$ . Desde que  $I_x$  é compacto e  $D$  é contínua em  $I_x$ , deve existir uma constante  $K > 0$ , tal que

$$|D(t)| \leq K \quad \text{e} \quad |T(t)| \leq K \quad \text{para todo } t \in I_x. \quad (3.28)$$

Aplicando o Teorema 3.4 (fórmula de Taylor) para a função  $D$  em  $I_x$  temos que para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $C_n \in I_x$  tal que

$$D(x) = D(0) + \frac{D'(0)}{1!}x + \frac{D''(0)}{2!}x^2 \dots + \frac{D^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{D^{(n)}(c_n)}{n!}x^n = \frac{D^{(n)}(c_n)}{n!}x^n,$$

onde aqui usamos o fato de que  $D(0) = D^{(k)}(0) = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Um simples cálculo nos mostra que

$$D^{(n)}(c_n) = \pm D(c_n) \quad \text{ou} \quad D^{(n)}(c_n) = \pm T(c_n),$$

e, em ambos os casos, levando em conta (3.28) obtemos que

$$|D(x)| \leq \frac{K|x|^n}{n!}. \quad (3.29)$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{|x|^n}{n!} \right) = 0$ , tomando o limite em (3.2) resulta que  $D(x) = 0$ . Pela arbitrariedade na escolha de  $x$ , em verdade concluímos que

$$D(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

ou ainda,

$$C_1(x) = C_2(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

o que prova a unicidade de soluções do PVI (3.22). Um raciocínio análogo para  $T$ , prova que  $T(x) = 0$ , ou seja

$$S_1(x) = S_2(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Isto mostra a unicidade de solução do PVI (3.23).

Nesta etapa temos a garantia da existência e unicidade das funções  $C$  e  $S$  construídas no Teorema 3.5. No final da seção 2.5 provamos que as funções cosseno e seno, definidas através da função de Euler, são soluções dos PVI's (3.22) e (3.23), respectivamente. Logo, pela unicidade de solução, as funções dadas pelo Teorema 3.5 são as mesmas estudadas no capítulo 2. Por isso, damos os mesmos nomes a estas funções, ou seja, a única função  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo

$$\left\{ \begin{array}{l} C''(x) = -C(x), \\ C(0) = 1, \\ C'(0) = 0, \end{array} \right.$$

dada pelo Teorema 3.5 é chamada função cosseno e é denotada por

$$C(x) = \cos x.$$

Também, a única função  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo

$$\left\{ \begin{array}{l} S''(x) = -S(x), \\ S(0) = 0, \\ S'(0) = 1, \end{array} \right.$$

dada pelo Teorema 3.5 é chamada função seno e é denotada por

$$S(x) = \sin x.$$

Finalizamos esta seção, mostrando que as funções cosseno e seno formam um conjunto fundamental de soluções para a EDO

$$y'' = -y, \tag{3.30}$$

ou seja, se  $f = f(x)$  é uma solução da EDO (3.30), então existem números reais  $\alpha$  e  $\beta$  tais que

$$f(x) = \alpha C(x) + \beta S(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Com efeito, suponha que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaça a EDO (3.30) e defina a a função auxiliar

$$g(x) = f(0)C(x) + f'(0)S(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.31}$$

Então derivando a função  $g$  obtemos

$$g'(x) = f(0)C'(x) + f'(0)S'(x) = -f(0)S(x) + f'(0)C(x)$$

e

$$\begin{aligned} g''(x) &= -f(0)S'(x) + f'(0)C'(x) \\ &= -f(0)C(x) - f'(0)S(x) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{cases} g''(x) = -g(x) & x \in \mathbb{R}, \\ g(0) = f(0), \\ g'(0) = f'(0). \end{cases}$$

Definindo

$$h(x) = f(x) - g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

segue que

$$\begin{aligned} h''(x) &= f''(x) - g''(x) = -f(x) + g(x) \\ &= -h(x), \end{aligned} \tag{3.32}$$

e das condições iniciais

$$h(0) = f(0) - g(0) = f(0) - g(0) = 0, \tag{3.33}$$

$$h'(0) = f'(0) - g'(0) = f'(0) - f'(0) = 0. \tag{3.34}$$

De (3.32), (3.33) e (3.34), usando um raciocínio análogo ao utilizado para concluir que  $D(x) = 0$  na prova da unicidade, temos que

$$h(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

ou ainda,

$$f(x) = g(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Logo existem constantes  $\alpha = f(0)$  e  $\beta = f'(0)$  tais que

$$f(x) = \alpha C(x) + \beta S(x).$$

### 3.4 Propriedades básicas das funções trigonométricas

Agora sabemos que as funções  $C$  e  $S$  são, respectivamente, as funções cosseno e seno. A seguir veremos que é possível, usando somente a construção analítica das funções seno e cosseno, provar algumas de suas importantes propriedades.

$C$  é uma função par e  $S$  é uma função ímpar, isto é:

$$C(-x) = C(x) \quad \text{e} \quad S(-x) = -S(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

De fato, se  $\gamma(x) = C(-x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então:

$$\gamma''(x) = C''(-x), \tag{3.35}$$

$$C''(-x) = -C(-x). \tag{3.36}$$

De (3.35) e (3.36) segue que

$$\gamma''(x) = -\gamma(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Além disso,

$$\gamma(0) = C(0) = 1 \quad \text{e} \quad \gamma'(0) = -C'(0) = 0,$$

então pela unicidade de solução do problema (3.22) devemos ter  $\gamma = C$ . Portanto,

$$C(-x) = C(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Se  $\beta(x) = S(-x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então:

$$\beta''(x) = S''(-x), \tag{3.37}$$

$$S'''(-x) = -S(-x). \tag{3.38}$$

De (3.37) e (3.38) temos que

$$\beta''(x) = -\beta(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Além disso,

$$\beta(0) = S(0) = 0 \quad \text{e} \quad \beta'(0) = S'(0) = 1,$$

então pela unicidade de solução do problema (3.29),  $\beta = S$ . Portanto,

$$S(-x) = -S(x).$$

Sendo  $x, y \in \mathbb{R}$ , temos as chamadas "fórmulas de adição de arcos":

$$C(x+y) = C(x).C(y) - S(x).S(y) \quad \text{e} \quad S(x+y) = S(x).C(y) + C(x).S(y).$$

Para verificarmos as igualdades acima, consideremos  $y \in \mathbb{R}$  e  $f(x) = C(x+y)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Então,

$$\begin{aligned} f'(x) &= C'(x+y) \\ f''(x) &= C''(x+y) = -C(x+y) = -f(x). \end{aligned}$$

Então,

$$f''(x) = -f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Desde que  $C$  e  $S$  formam um conjunto fundamental para a EDO (3.30), existem  $\alpha$  e  $\beta$  tais que,

$$f(x) = \alpha C(x) + \beta S(x), \tag{3.39}$$

$$f'(x) = \alpha C'(x) + \beta S'(x) = -\alpha S(x) + \beta C(x), \tag{3.40}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Considerando  $x = 0$  em (3.39) e (3.40), obtemos:

$$C(y) = \alpha \quad \text{e} \quad -S(y) = \beta.$$

Logo,

$$C(x+y) = f(x) = \alpha C(x) + \beta S(x) = C(x).C(y) - S(x).S(y). \quad (3.41)$$

Ainda temos que,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -S(x+y) = -\alpha S(x) + \beta C(x) \\ &= -C(y)S(x) - S(y).C(x) \\ &= S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Agora, demonstraremos algumas estimativas importantes envolvendo as funções cosseno e seno. Se  $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ , temos:

$$-x \leq S(x) \leq x; \quad (3.43)$$

$$1 - \frac{1}{2}x^2 \leq C(x) \leq 1, \quad (3.44)$$

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leq S(x) \leq x, \quad (3.45)$$

$$1 - \frac{1}{2}x^2 \leq C(x) \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4. \quad (3.46)$$

Com efeito, pela relação pitagoriana, temos que  $-1 \leq C(t) \leq 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $x \geq 0$ . Então, integrando obtemos,  $-x \leq \int_0^x C(t)dt \leq x$ , isto é:  $-x \leq S(x) \leq x$  o que prova o item (3.44).

Integrando (3.44) temos,  $-\frac{x^2}{2} \leq \int_0^x S(t)dt \leq \frac{1}{2}x^2$ . Como  $\int_0^x S(t)dt = -\int_0^x C'(t)dt$ , então:

$$\begin{aligned} C(x) - C(0) &= -\int_0^x S(t)dt \Rightarrow C(x) - 1 \\ &= -\int_0^x S(t)dt, \\ \int_0^x S(t)dt &= 1 - C(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{2} &\leq -C(x) + 1 \leq \frac{x^2}{2}, -C(x) \leq \frac{x^2}{2} - 1 \\ 1 - \frac{x^2}{2} &\leq C(x), \end{aligned}$$

o que prova (3.45).

Integrando (3.45), temos :

$$x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \leq S(x) \leq x \leq x - \frac{x^3}{6} \leq S(x) \leq x.$$



E por fim, integrando (3.46):

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} &\leq 1 - C(x) \leq \frac{x^2}{2}, \\ -\frac{x^4}{24} + \frac{x^2}{2} - 1 &\leq -C(x) \leq -1 + \frac{x^2}{2}, \\ 1 - \frac{x^2}{2} &\leq C(x) \leq \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + 1.\end{aligned}$$

No capítulo anterior, usamos a definição geométrica do número  $\pi$ , isto é,  $\pi$  é a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. No que segue, vamos caracterizá-lo por meio de uma propriedade analítica. Para isto, consideremos o lema.

**Lema 3.1.** *As seguintes afirmações se verificam:*

- Existe raiz positiva da função cosseno, ou seja,  $\exists r > 0$  tal que  $C(r) = 0$ .*
- A menor raiz positiva da função cosseno, está no intervalo  $(\sqrt{2}, \sqrt{6 - 2\sqrt{3}})$ , isto é,  $\exists \gamma \in (\sqrt{2}, \sqrt{6 - 2\sqrt{3}})$  tal que  $C(\gamma) = 0$  e  $C(x) > 0$  para todo  $x \in [0, \gamma)$ .*
- O número  $2\gamma$  é a menor raiz positiva da função seno, ou seja,  $\exists \gamma \in (\sqrt{2}, \sqrt{6 - 2\sqrt{3}})$  tal que  $S(2\gamma) = 0$  e  $S(x) > 0$  para todo  $x \in (0, 2\gamma)$ .*

Demonstração. Seja  $U$  o conjunto das raízes da função cosseno, no intervalo  $(\sqrt{2}, \sqrt{6 - \sqrt{3}})$ , isto é,

$$U = \{r \in (\sqrt{2}, \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}); \quad C(r) = 0\}. \quad (3.47)$$

Denotamos

$$\varphi(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad \text{e} \quad \Psi(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$

É fácil ver que  $\varphi$  tem duas raízes dadas por  $x_1 = -\sqrt{2}$  e  $x_2 = \sqrt{2}$ , enquanto que  $\Psi$  possui 4 raízes dadas por

$$x_1 = -\sqrt{6 - 2\sqrt{3}}, \quad x_2 = -\sqrt{6 + 2\sqrt{3}}, \quad x_3 = \sqrt{6 - 2\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad x_4 = \sqrt{6 + 2\sqrt{3}}.$$

Vejam também que  $\varphi(0) = \Psi(0) = 1$ ,  $\sqrt{2}$  é a única raiz positiva de  $\varphi$  e  $\sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$  é a menor raiz positiva de  $\Psi$ . Destes fatos, a estimativa (3.46) e a continuidade da função  $C$ , segue que existe raiz de  $C$  no intervalo  $(\sqrt{2}, \sqrt{6 - 2\sqrt{3}})$ . Então

$$U \neq \emptyset$$

e isto prova o item (a).

Agora desde que  $U$  é não vazio e limitado inferiormente, existe

$$\gamma = \inf U.$$

Como  $C$  é contínua,  $U$  é um conjunto fechado e assim concluímos que  $\gamma \in U$ , ou seja,  $\exists \gamma \in (\sqrt{2}, \sqrt{6 - 2\sqrt{3}})$  tal que  $C(\gamma) = 0$  e  $C(x) > 0$  para todo  $x \in [0, \gamma)$ , provando-se o item (b) do lema.

Levando em conta que  $C(\gamma) = 0$ , de (3.42) podemos ver que

$$S(2\gamma) = 2S(\gamma)C(\gamma) = 0,$$

o que mostra que  $2\gamma$  é raiz positiva da função seno. Mais do que isto, afirmamos que  $2\gamma$  é a menor raiz positiva de  $S$ . De fato se  $0 < 2\delta < 2\gamma$  fosse a menor raiz positiva de  $S$ , então

$$0 = S(2\delta) = 2S(\delta)C(\delta).$$

Mas, como  $S(\delta) \neq 0$  (pois  $\delta < 2\delta$  e  $2\delta$  é a menor raiz positiva de  $S$  devemos ter que

$$C(\delta) = 0 \quad \text{e} \quad \delta < \gamma,$$

o que é um absurdo porque contradiz (b). Logo  $2\gamma$  é de fato a menor raiz positiva de  $S$  e a prova do lema está finalizada. ■

O lema nos permite dar seguinte caracterização analítica para o número  $\pi$ .

**Definição 3.3.** O número real  $2\gamma$ , caracterizado como a menor raiz positiva da função seno é chamado de  $\pi$ , isto é,

$$\pi := 2\gamma.$$

Com esta definição, vemos que o número  $\pi$  satisfaz a estimativa

$$2,828 < \pi < 3,185$$

e é a menor raiz positiva da função seno. Por outro lado  $\frac{\pi}{2}$  está no intervalo

$$1,414 < \sqrt{2} < \frac{\pi}{2} < \sqrt{6 - 2\sqrt{3}} < 1,593$$

e é a menor raiz positiva da função cosseno.

Seguimos nosso estudo provando que as funções  $C$  e  $S$  são periódicas de período  $2\pi$ . Vejamos que

$$S(2\pi) = 2S(\pi)C(\pi) = 0, \tag{3.48}$$

pois  $S(\pi) = 0$ . Também temos

$$\begin{aligned} C(\pi) &= C\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \left(C\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 - \left(S\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 \\ &= -\left(S\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Ainda temos que

$$\begin{aligned} S\left(\frac{\pi}{2}\right) &= S\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = S\left(\pi + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= S(\pi)C\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C(\pi)S\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= S(\pi)C\left(\frac{\pi}{2}\right) - C(\pi)S\left(\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Usando (3.49) na igualdade acima obtemos

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(S\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^3.$$

Desde que  $S\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$  resulta que

$$\left(S\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = 1$$

e como  $S\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$  concluímos que

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \quad (3.50)$$

Substituindo (3.50) em (3.49) chegamos em

$$C(\pi) = -1. \quad (3.51)$$

Por fim, temos ainda que

$$C(2\pi) = (C(\pi))^2 - (S(\pi))^2 = 1.$$

Resumindo, encontramos:

$$\begin{aligned} S\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1, & S(\pi) &= 0 & \text{e} & S(2\pi) &= 0; \\ C\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0, & C(\pi) &= -1 & \text{e} & C(2\pi) &= 1. \end{aligned}$$

Logo, dado  $x \in \mathbb{R}$  temos

$$C(x + 2\pi) = C(x)C(2\pi) - S(x)S(2\pi) = C(x)$$

e

$$S(x + 2\pi) = S(x)C(2\pi) + C(x)S(2\pi) = S(x),$$

ou seja,  $C$  e  $S$  são periódicas de período  $2\pi$ .

Para finalizarmos, vamos verificar que  $C$  e  $S$  são translações de  $\frac{\pi}{2}$ . Dado  $x \in \mathbb{R}$  temos

$$\begin{aligned} C\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= C\left(\frac{\pi}{2}\right)C(x) + S\left(\frac{\pi}{2}\right)S(x) \\ &= S(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= C(x)C\left(\frac{\pi}{2}\right) - S(x)S\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -S(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$S(x) = C\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -C\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Além disso

$$\begin{aligned} S\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= S\left(\frac{\pi}{2}\right)C(x) - S(x)C\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= C(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= S(x)C\left(\frac{\pi}{2}\right) + S\left(\frac{\pi}{2}\right)C(x) \\ &= C(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$C(x) = S\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = S\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

# Referências

- [1] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Fortaleza, 1994.
- [2] BARTLE, ROBERT G.; SHERBERT, D. R. *Introduction to Real Analysis*. 4 ed. , John Wiley Sons, Inc., EUA, 2010.
- [3] DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações - Vol. 1 (Ensino Médio)*. 1 ed., Ática, São Paulo, 2011.
- [4] IEZZI, G. *Matemática, ciência e aplicações vol. 2*. 7 ed., Saraiva, São Paulo, 2013.
- [5] MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO, AUGUSTO CÉSAR MORGADO, E. W. *Trigonometria/Números Complexos*. Coleção do Professor de Matemática, 3 ed., Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1992.
- [6] MUNIZ NETO, A. C. *Fundamentos de Cálculo*. 1 ed., Coleção Profmat, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2015.
- [7] STEWART, J. *Cálculo*. Volume 1, 7 ed., Cengage, São Paulo, 2013.