Universidade Federal de Juiz de Fora

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Augusto Frederico Burle Neto

Potência de Expoente Irracional: Uma aula para os alunos da 3ª série do Ensino Médio

Juiz de Fora

2013

Augusto Frederico Burle Neto

Potência de Expoente Irracional: Uma aula para os alunos da 3ª série do Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Orientadora: Sofia Carolina da Costa Melo

Juiz de Fora

2013

Burle, Augusto Frederico Neto.

Potência de Expoente Irracional:
Uma aula para os alunos da 3ª série do Ensino Médio
Augusto, Frederico Burle Neto. - 2013.
50f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)
Universidade Federal de Juiz de Fora, 2013.

1. Matemática. 2. Irracional. 3. Sequência.
4. Limite. I. Título.

Augusto Frederico Burle Neto

Potência de Expoente Irracional: Uma aula para os alunos da 3ª série do Ensino Médio

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora.

Prof. Dra. Sofia Carolina da Costa Melo
(Orientadora)
PROFMAT
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Regis Castijos Alves Soares Júnior
PROFMAT
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Augusto César de Castro Barbosa
PROFMAT
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Juiz de Fora, 04 de abril de 2013.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha orientadora Sofia que me disponibilizou tempo precioso do seu trabalho para me dar suporte seguro e atencioso. Agradeço também a minha esposa Marina por sua paciência e compreensão nos meus momentos de tensão e ansiedade. Não poderia também deixar de agradecer a CAPES pela concessão da bolsa.

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso apresenta uma proposta de aula sobre potência de expoente irracional para alunos da terceira série do Ensino Médio. A definição de tal conteúdo envolve o conceito de limite de sequência, que é um tema não pertencente ao conteúdo programático da imensa maioria das escolas brasileiras. Aqui, a proposta é abordá-lo de uma maneira acessível aos alunos do Ensino Médio. No final deste trabalho são feitas as demonstrações formais que embasam tudo que na aula foi mostrado sem o devido rigor matemático.
Palavras-chave: Matemática. Irracional. Sequência. Limite.

ABSTRACT

This course conclusion work proposes a lesson about the power of irrational exponent for high school students. The definition of such content covers the limit of sequence concept, which does not constitute the curriculum of almost every Brazilian schools. This work aims at approaching the subject in an accessible to high school students. At the end, formal demonstrations are made to theorize the subjects presented in class without the proper mathematical formality.
Key words: Mathematics. Irrational. Sequence. Limit.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No Ensino Médio é estudado o conceito de função exponencial, cujo domínio é apresentado como sendo todos os números reais, os quais englobam os inteiros, os racionais e os irracionais. Porém, geralmente, só são definidas as potências de expoentes inteiros ou racionais. Vários livros didáticos de Ensino Médio abordam função exponencial simplesmente omitindo a extensão para expoente irracional.

O grau de dificuldade que apresenta a definição de potência de expoente irracional é o principal motivo para que tal tópico não seja estudado neste nível de escolaridade, não tendo sido incluído no currículo do Ensino Médio. Apesar desse empecilho, este trabalho de conclusão de curso se propõe a apresentar uma aula de potência de expoente irracional para alunos da terceira série do Ensino Médio.

Este trabalho está dividido da forma que apresentamos a seguir.

O capítulo 2 é composto das seguintes seções: objetivos, público alvo, pré-requisitos, materiais e tecnologias, recomendações metodológicas, dificuldades previstas, descrição geral e possíveis desdobramentos.

No capítulo 3 são apresentadas as propriedades da potenciação e os conceitos de potências de expoente natural, inteiro e racional. Além disso, é mostrado como alguns livros didáticos da Educação Básica abordam o conceito de número irracional e como alguns livros do Ensino Médio tratam, sem defini-las, as potências de expoente irracional.

No capítulo 4 é mostrada a aula sobre a potência de expoente irracional para os estudantes da terceira série do Ensino Médio.

No capítulo 5 é feita a demonstração formal do que foi ensinado nessa aula, sendo portanto um conteúdo que não é apresentado aos alunos.

O capítulo 6 trata da expectativa quanto ao rendimento dos alunos da terceira série do Ensino Médio em relação à aula de potência de expoente irracional.

2 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

2.1 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho de conclusão de curso é apresentar ao aluno da terceira série do Ensino Médio alguns conceitos de Análise que possibilitem, nessa fase de aprendizado, o estudo de potência de expoente irracional. Para tal, é necessária uma abordagem que permita ao aluno aprender conceitos cuja notação formal é matéria específica do Ensino Superior.

Há uma lacuna no ensino de função exponencial, uma vez que o aluno aprende a traçar o gráfico de funções exponenciais mas geralmente não tem contato com números que são imagens de elementos irracionais do domínio dessas funções. Pretendemos preencher essa lacuna conceituando ideias matemáticas desconhecidas pelo aluno com uma terminologia que ele seja capaz de compreender, valendo-se dos conhecimentos adquiridos até essa série. Portanto, a explicação dos sucessivos passos dessa abordagem que prescinde do formalismo da linguagem matemática é o objetivo desse trabalho.

2.2 PÚBLICO ALVO

A proposta dessa aula de potência de expoente irracional destina-se a estudantes da 3ª série do Ensino Médio.

2.3 PRÉ-REQUISITOS

Os conteúdos que são pré-requisitos para que os alunos da 3ª série do Ensino Médio compreendam a aula sobre potência de expoente irracional são: resolução de equações e inequações do 1º e do 2º grau, resolução de inequações modulares, função quadrática, função exponencial e método de demonstração por absurdo.

2.4 MATERIAIS E TECNOLOGIAS

Para o desenvolvimento da aula é necessária uma calculadora, pois algumas divisões feitas à mão consumiriam um tempo demasiado, sem nenhum ganho pedagógico.

2.5 RECOMENDAÇÕES METODOLÓGICAS

São necessários três tempos de quarenta e cinco minutos para a aula sobre potência de expoente irracional para os alunos da 3ª série do Ensino Médio.

2.6 DIFICULDADES PREVISTAS

A maioria dos alunos que chegam ao Ensino Médio não estão habituados a raciocinar, a descobrir sozinhos as soluções de determinados problemas, enfim tem pouca base para compreender conceitos matemáticos mais complexos presentes no Ensino Médio. Sendo assim, é previsível que o desenvolvimento da aula de potência de expoente irracional apresente aspectos que boa parte dos alunos tenha dificuldade de compreender. Justamente por isso é que o conceito de potência de expoente irracional, que envolve a noção de limite de sequência, é abordado na aula da forma menos formal possível.

2.7 DESCRIÇÃO GERAL

A aula começa com a revisão das propriedades da potenciação e da potenciação com expoente racional. Em seguida, é mostrado como os números irracionais e as potências de expoente irracional são abordados nos livros didáticos.

É importante que os alunos da 3ª série do Ensino Médio entendam que cada número real é igual ao limite de uma sequência de números racionais que converge para esse número real. Por exemplo, o número 3 é igual ao limite da sequência $(3,0;\quad 3,00;\quad 3,000;...)$, o número $5,333\ldots$ é igual ao limite da sequência $(5,0;\quad 5,33;\quad 5,333;...)$ e o número $\sqrt{2}$ é igual ao limite da sequência $(1,4;\quad 1,41;\quad 1,414;\quad 1,4142;\quad 1,41421;\quad 1,414213;...)$.

Assim, para podermos conceituar potência de expoente irracional, é necessária inicialmente uma abordagem de número real (em particular, de número irracional) como o limite de uma sequência. Para compreender essa definição o aluno deve ser apresentado antes aos conceitos de sequência e limite de sequência.

Após definirmos sequência, apresentamos alguns exemplos de sequências convergentes e de sequências divergentes para o aluno perceber a noção de limite de sequência.

Em seguida, definimos número irracional como sendo o limite de uma sequência de racionais que converge para esse irracional. Apresentamos então, na forma de propriedade das sequências convergentes, a definição de limite de sequência, sem formalizar demais, ou seja sem o uso das notações n_o, ε. Também sem sermos rigorosos na formalização, definimos sequência de Cauchy.

Em seguida, apresentamos a definição formal de potência de expoente real, que engloba o caso de expoente irracional. Para que essa definição proceda, mostramos que a^x existe, sendo a um número positivo e a^x o limite da sequência a^{X_n}, onde X_n é uma sequência de racionais que converge para o número real x. Antes dessa demonstração, para ela ser possível, apresentamos dois teoremas segundo os quais toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy e toda sequência de números reais de Cauchy é convergente.

2.8 POSSÍVEIS DESDOBRAMENTOS

Em um projeto de iniciação científica para alunos do Ensino Médio, com boa base em Matemática, seria interessante que, na aula de potência de expoente irracional, se abordasse mais formalmente o conceito de limite de sequência. Nesse caso, o capítulo 4 desse trabalho de conclusão de curso, a menos de algumas demonstrações, poderia fazer parte dessa aula. Pouquíssimos colégios no Brasil incluem limite, tanto de sequência quanto de função, em sua matriz curricular do Ensino Médio. Certamente, é muito proveitoso para o aluno que ingressa em uma faculdade da área de Ciências Exatas já ter obtido, durante o Ensino Médio, algum tipo de conhecimento sobre limite. Quanto mais formalmente, melhor.

3 A POTENCIAÇÃO NOS LIVROS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

No início deste capítulo são definidas as potências de expoente natural, inteiro e racional e também são apresentadas as propriedades da potenciação. Em seguida, é mostrado como alguns livros didáticos da Educação Básica abordam os números irracionais. No final é apresentada a forma como alguns livros didáticos do Ensino Médio tratam das potências de expoente irracional, sem defini-las.

3.1 POTÊNCIA DE EXPOENTE NATURAL

Sejam a um número real e x um número natural. Definimos a potência de a de expoente natural x como sendo o número:

$$a^x = \underbrace{a.a.a \ldots a.a}$$

x fatores

3.2 PROPRIEDADES DA POTENCIAÇÃO

Devemos recordar as seguintes propriedades relativas à potenciação:

I) $a^{x+y} = a^x.a^y$

II) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

III) $(a.b)^x = a^x.b^x$

Vamos demonstrá-las:

I) $a^{x+y} = \ a^x.a^y$

$$a^x.a^y = \underbrace{a.a \ldots .a}_{x fatores} . \underbrace{a.a \ldots .a}_{y fatores} = \underbrace{a.a \ldots .a}_{x+y fatores} = a^{x+y}$$

II) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$$(a^x)^y = \underbrace{a^x.a^x\ldots a^x}_{y fatores} = \underbrace{\underbrace{a.a\ldots.a}.\underbrace{a.a\ldots.a}.\underbrace{a.a\ldots.a}}_{x\ .\ y\ fatores}_{xfatores\ xfatores\ xfatores} = a^{xy}$$

III) $(a.b)^x = a^x.b^x$

$$(a.b)^x = \underbrace{a\ .\ b\ldots\ a\ .\ b\ldots\ a\ .\ b}_{xfatores} = \underbrace{a\ .\ a\ \ldots.a}_{xfatores}.\underbrace{b\ .\ b\ \ldots.b}_{xfatores} = a^x.b^x$$

As três propriedades têm que valer não só para potências de expoente natural, como para as de qualquer expoente real.

3.3 POTÊNCIA DE EXPOENTE INTEIRO

Sejam a um número real não nulo e x um número natural. Temos que $a^0 = 1$, pois:

$a^{0+x} = a^0.a^x$ (usando a propriedade I)

$a^x = a^0.a^x$

$a^0 = \dfrac{a^x}{a^x} = 1$

Como x é um número natural, $-x$ é um inteiro negativo. Logo, se o expoente for um número inteiro negativo, então $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$, pois:

$a^{x+(-x)} = a^x.a^{-x}$ (usando a propriedade I)

$a^0 = a^x.a^{-x}$

1$= a^x.a^{-x}$

$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$, pois $a^x \neq 0$

3.4 POTÊNCIA DE EXPOENTE RACIONAL

Sejam a um número real positivo, x um número natural e n um número natural maior que 1. Então $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$, pois:

$a^x = a^{\frac{x}{n}.n}$

$a^x = (a^{\frac{x}{n}})^n$ (usando a propriedade II)

Extraindo a raiz de índice n em ambos os membros, obtemos o resultado esperado.

Como $\dfrac{x}{n}$ é um número racional positivo, $-\dfrac{x}{n}$ é um racional negativo. Logo, se o expoente for um número racional negativo, então:

$a^{\frac{-x}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{x}{n}}}$, pois:

$a^{-\frac{x}{n}+\frac{x}{n}} = a^0 = 1$

$a^{-\frac{x}{n}}.a^{\frac{x}{n}} = a^{-\frac{x}{n}+\frac{x}{n}} = 1$ (usando a propriedade I)

$a^{-\frac{x}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{x}{n}}}$ pois $a^{\frac{x}{n}} \neq 0$

Logo, $a^{-\frac{x}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^x}}$

Devemos ressaltar que, no caso de expoente racional, há necessidade de se fazer a restrição da base a ser positiva. Se considerássemos a possibilidade de a ser negativa, teríamos determinadas potências de expoente racional que não seriam números reais, como por exemplo $(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$.

3.5 NÚMEROS IRRACIONAIS

Vejamos agora como alguns livros didáticos da Educação Básica apresentam os números irracionais. Observe que não são citados nem números irracionais que não possuem uma lei de formação e nem potências de expoente irracional.

Segundo Iezzi, G.; Dolce, O.; Périgo, R. (1998, p.8), temos:

> Assim como existem números decimais que podem ser escritos como frações, com numerador e denominador inteiros - os números racionais, que acabamos de ver - há os que não admitem tal representação infinita periódica.
>
> Vejamos alguns exemplos:
>
> 1 - O número 0,212112111... não é dízima periódica, pois os algarimos após a vírgula não se repetem periodicamente.
>
> 2 - O número 1,203040... também não comporta representação fracionária, pois não é dízima periódica.
>
> 3 - Os números $\sqrt{2} = 1,4142135...$, $\sqrt{3} = 1,7320508...$ e $\pi = 3,141592...$, por não apresentarem representação infinita periódica, também não são números racionais.
>
> Um número cuja representação decimal infinita não é periódica é chamado de número irracional.

Segundo Machado, A. S. (1998, p.40), temos:

> Há números que podem ser escritos na forma decimal com infinitas casas decimais e não são periódicos. Verifica-se que esses números não são racionais (não podem ser obtidos por divisão de dois inteiros). Eles são denominados números irracionais.
>
> São exemplos de números irracionais:
>
> $\sqrt{2} = 1,4142135...$
>
> $\sqrt{10} = 3,1622776...$

$\sqrt[4]{6} = 1,5650845...$

$\pi = 3,1415926...$ (razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência)

$e = 2,7182818284...$ (conhecido como número de Euler - Leonard Euler - 1707/1783)

$1 - \sqrt{2} = -0,4142135...$

$-14,123112311123...$

Segundo Bianchini, E.; Paccola, H. (2004, p.50-51), temos:

> Os números racionais também não são suficientes para indicar todas as situações. Considere, por exemplo, um quadrado de lado 1. Aplicando o teorema de Pitágoras, determinamos que a medida da diagonal desse quadrado é $\sqrt{2}((\sqrt{2})^2 = 1^2 + 1^2)$.
>
> Mostremos que $\sqrt{2}$ não é um número racional.
>
> De fato, se $\sqrt{2}$ fosse racional, então deveriam existir dois números p e q primos entre si, tal que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, ou seja, $p = q\sqrt{2}$.
>
> Elevando ambos os membros ao quadrado, temos $p^2 = 2q^2$. Logo p^2 é par e consequentemente p é par, pois se p fosse ímpar, p^2 também seria ímpar.
>
> Fazendo $p = 2k(k \in \mathbb{Z})$, temos: $4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$.
>
> Logo, q^2 é par e então q é par.
>
> O fato de p e q serem pares nos mostra qua a suposição de que p e q são primos entre si é falsa.
>
> Logo, não existe o número racional $\dfrac{p}{q}$, tal que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$. Portanto,$\sqrt{2}$ não é um número racional.
>
> De um modo geral, toda raiz cuja representação decimal não é exata, assim como todo número cuja forma decimal não é exata nem periódica, não são números racionais. A esses tipos de números chamamos de números irracionais.
>
> Vejamos outros exemplos de números irracionais:
>
> a) Escritos na forma decimal: 0,373373337...; 0,412413414...; 2,121221222...; π = 3,14159
>
> b) Escritos na forma de radical : $\sqrt{5}, -\sqrt{3},\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[6]{5},\ \dfrac{2}{3}\sqrt{2}, \sqrt[4]{2^3}$
>
> O fato de sempre existir, entre dois números racionais, um outro número racional não significa que os números racionais preencham completamente os pontos da reta numérica, o que vale dizer que existem pontos da reta que não representam números racionais. A esses pontos associamos os números irracionais.

3.6 POTÊNCIA DE EXPOENTE IRRACIONAL

Vejamos agora alguns exemplos da forma como alguns livros didáticos do Ensino Médio tratam das potências de expoente irracional. Observe que, em nenhum momento, essas potências são definidas. Os livros citam simplesmente aproximações dessas potências, visto que a definição de potência de expoente irracional envolve o conceito de limite de sequência, que não é abordado nos livros didáticos da Educação Básica.

Segundo Iezzi, G.; Dolce, O.; Murakami, C. (2004, p.21-22), temos:

> Dados um número real $a > 0$ e um número irracional α, podemos construir, com base nas potências de expoente racional, um único número real positivo a^{α} que é a potência de base a e expoente irracional α.
>
> Seja por exemplo a potência $3^{\sqrt{2}}$. Sabendo quais são os valores racionais aproximados por falta ou por excesso de $\sqrt{2}$, obtemos em correspondência os valores aproximados, por falta ou por excesso de $3^{\sqrt{2}}$ (potências de base 3 e expoente racional, já definidas):
>
> | A_1 | A_2 | B_1 | B_2 |
> |---|---|---|---|
> | 1 | 2 | 3^1 | 3^2 |
> | $1,4$ | $1,5$ | $3^{1,4}$ | $3^{1,5}$ |
> | $1,41$ | $1,42$ | $3^{1,41}$ | $3^{1,42}$ |
> | $1,414$ | $1,415$ | $3^{1,414}$ | $3^{1,415}$ |
> | $1,4142$ | $1,4143$ | $3^{1,4142}$ | $3^{1,4143}$ |
> | $\sqrt{2}$ | | $3^{\sqrt{2}}$ | |
>
> Definição
>
> Sejam $a \in \mathbb{R}, a > 0$ e α um número irracional; consideremos os conjuntos:
>
> $A_1 = \{r \in \mathbb{Q} / r < \alpha\}$ e $A_2 = \{s \in \mathbb{Q} / s > \alpha\}$
>
> Notemos que:
>
> a) todo número de A_1 é menor que qualquer número de A_2;
>
> b) existem dois racionais r e s tais que $r < \alpha < s$ e a diferença $s - r$ é menor que qualquer número positivo arbitrário.
>
> Em correspondência aos conjuntos A_1 e A_2, consideremos os conjuntos
>
> $B_1 = \{a^r / r \in A_1\}$ e $B_2 = \{a^s / s \in A_2\}$.
>
> Se $a > 1$, demonstra-se que:
>
> a) todo número de B_1 é menor que qualquer número de B_2;
>
> b) existem dois números a^r e a^s tais que a diferença a^s - a^r é menor que qualquer número positivo arbitrário.
>
> Nessas condições, dizemos que a^r e a^s são aproximações por falta e por excesso, respectivamente, de a^{α} e que B_1 e B_2 são classes que definem a^{α}.
>
> Se $0 < a < 1$, tudo acontece de forma análoga.
>
> Exemplos de potências com expoente irracional:
>
> $$2^{\sqrt{2}}, 4^{\sqrt{3}}, 5^{\pi}, \left(\frac{2}{3}\right)^{1+\sqrt{2}}, (7)^{1+\sqrt{2}}, (7)^{-\sqrt{2}}, (\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$$
>
> Se $a = 0$ e α é irracional e positivo, daremos a seguinte definição especial
>
> $$0^{\alpha} = 0$$
>
> Observações
>
> 1ª) Se $a = 1$, então $1^{\alpha} = 1$, $\forall\ \alpha$ irracional.

2ª) Se $a < 0$ e α é irracional e positivo, então o símbolo a^{α} não tem significado.

Exemplos: $(-2)^{\sqrt{2}}$, $(-5)^{\sqrt{3}}$ e $(-\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ não tem significado.

3ª) Se α é irracional e negativo ($\alpha < 0$), então 0^{α} não tem significado.

4ª) Para potências de expoente irracional são válidas as propriedades (P).

Segundo Dante, L. R. (2011, p.218), temos:

Vamos agora dar uma idéia de como caracterizar, por exemplo, $2^{\sqrt{2}}$. Tomamos as aproximações racionais do número irracional $\sqrt{2}$, que são $1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;...$, e temos definidas as potências com expoente racional $2^{1};\ 2^{1{,}4};\ 2^{1{,}41};\ 2^{1{,}414};...$

À medida que:

$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;...$ se aproximam de $\sqrt{2}$,

$2^{1};\ 2^{1{,}4};\ 2^{1{,}41};\ 2^{1{,}414};...$ se aproximam de $2^{\sqrt{2}}$.

Usando a calculadora:

$2^{1} = 2;\ 2^{1{,}4} = 2{,}639015;\ 2^{1{,}41} = 2{,}657371;\ 2^{1{,}414} = 2{,}664749$.

Obtemos assim, por aproximação de racionais, a potência a^{x}, com x irracional e a real positivo.

Potência com expoente real

Lembrando-se que a união dos números racionais com os irracionais resulta nos números reais, chegamos às potências com números reais mantendo as propriedades já mencionadas. Observe algumas potências com expoente real:

$$3^{\frac{5}{6}} \quad 2^{\sqrt{3}} \quad 7^{\pi} \quad (\sqrt{3})^{\sqrt{2}} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{5}} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}} \quad 5^{4} \quad 7^{-2} \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{5}} \quad 8^{0}$$

Segundo Iezzi, G.; Dolce, O.; Degenszajn, D.; Périgo, R.; Almeida, N. (2010, p.170), temos:

Vamos agora dar o significado às potências do tipo a^{x}, em que $a \in \Re_{+}^{*}$ e o expoente x é um número irracional.

Por exemplo: $2^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{5}}$, $10^{\sqrt{3}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{7}}$, $4^{-\sqrt{5}}$, ...

Seja a potência $2^{\sqrt{2}}$.

Como $\sqrt{2}$ é irracional, vamos considerar aproximações racionais para esse número por falta e por excesso e, com auxilio de uma calculadora científica, obter o valor das potências de expoentes racionais:

$$\sqrt{2} \cong 1{,}41421356$$

Por falta	Por excesso
$2^{1} = 2$	$2^{2} = 4$
$2^{1{,}4} \cong 2{,}639$	$2^{1{,}5} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \cong 2{,}828$
$2^{1{,}41} \cong 2{,}657$	$2^{1{,}42} \cong 2{,}675$
$2^{1{,}414} \cong 2{,}6647$	$2^{1{,}415} \cong 2{,}6665$
$2^{1{,}4142} \cong 2{,}6651$	$2^{1{,}4143} \cong 2{,}6653$
$\vdots$	$\vdots$

Note que, à medida que os expoentes se aproximam de $\sqrt{2}$ por valores racionais, tanto por falta quanto por excesso, os valores das potências tendem a um mesmo valor, definido por $2^{\sqrt{2}}$, que é aproximadamente igual a 2,665.

Seja $a \in \mathbb{R}, a > 0$.

Já estudamos os diferentes tipos de potências a^x com x racional ou irracional.

Em qualquer caso $a^x > 0$, isto é, toda potência de base real positiva e expoente real é um número positivo.

Para essas potências continuam válidas todas as propriedades apresentadas nos itens anteriores deste capítulo.

4 PROPOSTA DE AULA SOBRE POTÊNCIA DE EXPOENTE IRRACIONAL

4.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE A PROPOSTA DE AULA

No Ensino Fundamental o aluno aprende que um número irracional é um número que possui infinitas casas decimais, sem a ocorrência de um período, ou seja, sem que, a partir de uma determinada casa decimal, um ou mais algarismos passem a se repetir. É explicado para os alunos que todo número irracional não pode ser escrito na forma de fração com numerador e denominador inteiros. Alguns números irracionais são exemplificados, como $\sqrt{2}$, $4\sqrt{3}, \pi$ e o número de Euler e. Porém, não são nem citados pelos professores números irracionais como $3^{\sqrt{2}}$. Dessa forma, o aluno conclui o Ensino Fundamental sem ter tido nenhum contato com potências de expoente irracional.

Na 1ª série do Ensino Médio, as funções exponenciais são apresentadas aos alunos. Como o domínio das funções exponenciais é o conjunto dos números reais, nessa etapa de suas vidas escolares os alunos deveriam ter contato com números como $3^{\sqrt{2}}$, porém deveriam ser alertados pelo professor que a definição formal dessas potências de expoente irracional lhes seriam apresentadas somente na 3ª série, quando eles estariam mais maduros para compreendê-la. Dessa forma, os alunos concluiriam o Ensino Médio sem ficar com essa lacuna na aprendizagem da potenciação, podendo, assim, não só determinar as primeiras casas decimais de $3^{\sqrt{2}}$, como conhecer o significado de $3^{\sqrt{2}}$.

Neste capítulo, apresentamos a proposta de aula sobre potência de expoente irracional para os alunos da 3ª série do Ensino Médio. Como o conceito de potência de expoente irracional envolve a noção de limite de sequência, inicialmente conceituamos sequência. Em seguida, é apresentada a idéia de limite de sequência, através de exemplos de sequências convergentes, além de serem mostrados também exemplos de sequências divergentes. Para podermos mostrar que a definição de potência de expoente irracional procede, são apresentadas duas propriedades (que correspondem aos conceitos de sequência convergente e sequência de Cauchy) e dois teoremas (que, juntos, correspondem ao Critério de Cauchy). Finalmente, definimos potência de expoente irracional e em seguida mostramos que tal definição procede.

4.2 SEQUÊNCIAS

Definição 4.1. *Seja A um conjunto qualquer. Uma sequência de elementos de A é qualquer função $\Psi : \mathbb{N} \to A$. Podemos denotar, mais informalmente, $(X_1, X_2, X_3, ...)$ ou X_n como sendo uma sequência de elementos de A, onde $X_1 = \Psi(1)$, $X_2 = \Psi(2)$, e assim por diante. Numa sequência a ordem dos termos é relevante, ou seja, X_1 é o primeiro termo, X_2 é o segundo termo, e assim por diante.*

As sequências podem ser expressas na *forma explícita* ou na *forma recorrente.*

Exemplo 4.2. ***Seja a sequência*** $\boldsymbol{(2, 4, 6, 8, ...)}$.

Observe que $X_1 = 2 = 2.1$, $X_2 = 4 = 2.2$, $X_3 = 6 = 2.3$ e, de forma geral, o termo de ordem n é igual ao dobro de n, isto é, o "enésimo" termo é igual ao dobro de n. Logo, podemos expressar essa sequência, na forma explícita, da seguinte maneira: $X_n = 2n$.

Por outro lado, podemos observar que o primeiro termo é igual a 2 e, a partir do segundo, cada termo é igual ao termo anterior acrescido de duas unidades. Logo, na forma recorrente, X_n é expressa da seguinte maneira:

$X_1 = 2$ e $X_{n+1} = X_n + 2$ para $n \geq 1$.

4.3 LIMITES DE SEQUÊNCIAS

Existem sequências X_n tais que, a medida que n aumenta, os valores de X_n cada vez mais se aproximam de um determinado número real. Esse número é chamado de *limite da sequência* e é representado por $\lim_{n\to\infty} X_n$ (lê-se limite de X_n quando n tende para o infinito).

Vejamos alguns exemplos de sequências:

Exemplo 4.3. $\boldsymbol{X_n = \dfrac{1}{n}}$

Para $n = 1$, temos $X_1 = \dfrac{1}{1} = 1$; para $n = 2$, temos $X_2 = \dfrac{1}{2}$; para $n = 3$, temos $X_3 = \dfrac{1}{3}$; e, de forma geral, cada termo é igual a fração cujo numerador é 1 e o denominador é igual a ordem desse termo. Assim, temos:

$$\left(1,\ \frac{1}{2},\ \ \frac{1}{3},\ \ \frac{1}{4},\ ...\right)$$

Exemplo 4.4. $\boldsymbol{X_n = \dfrac{n}{n+1}}$

Para $n = 1$, temos $X_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$; para $n = 2$, temos $X_2 = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$; para $n = 3$, temos $X_3 = \dfrac{3}{3+1} = \dfrac{3}{4}$; e de forma geral, cada termo é igual a fração cujo numerador é a ordem desse termo e o denominador é igual ao sucessor do numerador. Assim, temos:

$$\left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5}...\right)$$

Para calcularmos o limite de uma sequência, temos de descobrir para qual número ela se aproxima quando n tende para o infinito. Na prática, devemos descobrir o que acontece quando n for muito grande.

No exemplo 4.3, se tomarmos $n = 1000000$, teremos:
$X_{1000000} = \dfrac{1}{1000000} = 0,000001.$

Se tomarmos $n = 1000000000$, teremos:
$X_{1000000000} = \dfrac{1}{1000000000} = 0,000000001.$

Vemos que, a medida que n cresce, X_n vai se aproximando de zero.

Intuitivamente, percebemos que o limite da sequência $X_n = \dfrac{1}{n}$ é igual a zero.

Denotamos $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

No exemplo 4.4, se tomarmos $n = 999999$ teremos:
$X_{999999} = \dfrac{999999}{1000000} = 0,999999.$

Se tomarmos $n = 999999999$, teremos:
$X_{999999999} = \dfrac{999999999}{1000000000} = 0,999999999.$

Vemos que a medida que n cresce, X_n vai se aproximando de 1.

Intuitivamente, percebemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1.$

Devemos ter cuidado com o fato de que, para calcularmos o limite de determinadas sequências, é necessário que utilizemos um valor exageradamente grande para n. Vejamos o próximo exemplo.

Exemplo 4.5. $\boldsymbol{X_n = \dfrac{1}{n - 999999}}$

Vamos descobrir o limite dessa sequência. Para tal temos que calcular o valor, não do milionésimo termo, e sim de um termo de ordem muito mais elevada, por exemplo, o trilionésimo. Vejamos:

Tomando $n = 1000000$ temos $X_{1000000} = \dfrac{1}{1000000 - 999999} = 1.$
Se tomarmos $n = 1000000000000$, teremos:
$X_{1000000000000} = \dfrac{1}{1000000000000 - 999999} = \dfrac{1}{999999000001} \cong 0.$

Já podemos perceber que o limite dessa sequência é 0, pois o denominador cresce indefinidamente, enquanto o numerador é fixo e igual a 1.

4.4 CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIAS

Quando o limite de uma sequência é o número real L, dizemos que essa sequência é *convergente* e ela *converge para* L.

No exemplo 4.3, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Logo a sequência $X_n = \frac{1}{n}$ converge para 0.

No exemplo 4.4 temos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Logo a sequência $X_n = \frac{n}{n+1}$ converge para 1.

Dizemos que uma sequência é *limitada superiormente* quando existe algum número real A tal que nenhum termo da sequência é maior que A. Analogamente, uma sequência é *limitada inferiormente* quando existe algum número real B tal que nenhum termo da sequência é menor que B. Uma sequência é *limitada* quando é limitada superior e inferiormente.

Quando uma sequência não converge para nenhum número real, dizemos que essa sequência é *divergente*. Vejamos um exemplo de uma sequência que diverge. A sequência do exemplo 4.2 $X_n = 2n$ diverge, pois, a medida que n cresce, X_n cresce indefinidamente. Observe que, por maior que seja um valor que fixarmos, teremos necessariamente um certo termo da sequência a partir do qual todos os termos são maiores do que esse valor fixado. Dizemos que essa sequência *tende a infinito* e usamos a seguinte notação: $\lim\limits_{n\to\infty} 2n = \infty$.

Vamos analisar outras sequências divergentes.

Exemplo 4.6. $\boldsymbol{X_n = 2n^3 - 100n^2 + 3n}$

Todas as sequências expressas por polinômios divergem, pois para valores suficientemente grandes de n, o termo de maior grau "comanda", isto é, os outros termos ficam desprezíveis quando comparados a ele, não importando os valores dos coeficientes. Uma maneira prática de percebermos tal fato é colocando em evidência o termo de maior grau. Vejamos: $X_n = 2n^3 - 100n^2 + 3n = 2n^3 \ . \left(1 - \frac{50}{n} + \frac{3}{2n^2}\right)$. À medida que n cresce, $-\frac{50}{n}$ *e* $\frac{3}{2n^2}$ se aproximam cada vez mais de zero e, assim, $\left(1 - \frac{50}{n} + \frac{3}{2n^2}\right)$ se aproxima de 1. Consequentemente, $2n^3.\left(1 - \frac{50}{n} + \frac{3}{2n^2}\right)$ se torna cada vez mais próximo de $2n^3$, ou seja, os termos da sequência se aproximam cada vez mais do termo de maior grau do polinômio que expressa a sequência. Logo, visto que $2n^3$ cresce indefinidamente, isto é, visto que $\lim\limits_{n\to\infty} 2n^3 = \infty$, concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} 2n^3 - 100n^2 + 3n = \infty$.

Observe que essas duas sequências, $X_n = 2n$ e $X_n = 2n^3 - 100n^2 + 3n$, não são limitadas e por isso não poderiam ser convergentes. Porém não basta uma sequência ser limitada para que seja convergente. Vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 4.7. ***Seja a sequência*** $\boldsymbol{(2, -3,\ 2, -3,\ 2, -3, \ldots)}$.

Essa sequência é limitada superiormente por 2 e limitada inferiormente por -3, ou seja, nenhum termo dessa sequência é maior que 2 e nenhum termo dessa sequência é menor que -3.

Logo, essa sequência é limitada. Por outro lado, a sequência não se aproxima de um determinado número quando tomamos os termos de ordem cada vez maior. Observe que, como os termos de ordem ímpar (isto é, o 1º termo, o 3º, o 5º, e assim por diante) são todos iguais a 2 e os termos de ordem par (isto é, o 2º termo, o 4º, o 6º, e assim por diante) são todos iguais a -3, os termos da sequência se alternam sempre entre 2 e -3. Assim, os termos não se aproximam cada vez mais de 2, bem como não se aproximam de -3. Logo, essa sequência não converge nem para 2, nem para -3 e nem para nenhum outro número, ou seja, ela diverge.

Esse tipo de divergência também ocorre com a sequência do próximo exemplo:

Exemplo 4.8. $\boldsymbol{X_n = (-1)^n.\dfrac{n}{n+1}}$ ***, ou seja,*** $\boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots\right)}$.

Essa sequência é limitada tanto superiormente, quanto inferiormente, pois todos os seus termos são maiores que -1 e menores que 1. Além disso, os termos de ordem ímpar se aproximam de -1 e os termos de ordem par se aproximam de 1. Porém, não podemos dizer que os termos se aproximam de 1, bem como não é correto afirmar que os termos se aproximam de -1.

Existem sequências de números racionais que convergem para números irracionais. Vejamos o próximo exemplo, no qual a sequência é expressa na forma recorrente:

Exemplo 4.9. $\boldsymbol{X_1 = 2}$ ***e*** $\boldsymbol{X_{n+1} = \dfrac{1}{2}.\left(X_n + \dfrac{2}{X_n}\right)}$

Todos os termos dessa sequência são números racionais, mas ela converge, como veremos adiante, para o número irracional $\sqrt{2}$.

Observação: A origem dessa fórmula de recorrência não pode fazer parte da aula de potência de expoente irracional pelo fato de conter a noção de derivada.

Vamos determinar os cinco primeiros termos dessa sequência:

$$X_1 = 2$$

$$X_2 = \frac{1}{2}.\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$X_3 = \frac{1}{2}.\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{9+8}{6}\right) = \frac{17}{12}$$

$$X_4 = \frac{1}{2}.\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{289+288}{204}\right) = \frac{577}{408}$$

$$X_5 = \frac{1}{2}.\left(\frac{577}{408} + \frac{2}{\frac{577}{408}}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{577}{408} + \frac{816}{577}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{332929+332928}{235416}\right) = \frac{665857}{470832}$$

Vamos agora com o auxílio de uma calculadora calcular os quadrados desses cinco primeiros termos:

$X_1^2 = 4$

$X_2^2 = \dfrac{9}{4} = 2,25$

$X_3^2 = \dfrac{289}{144} \cong 2,006$ (X_3^2 tem suas três primeiras casas decimais iguais às de $2,006$)

$X_4^2 = \dfrac{332929}{166464} \cong 2,000006$ (X_4^2 tem suas seis primeiras casas decimais iguais às de $2,000006$)

$X_5^2 = \dfrac{443365544449}{221682772224} \cong 2,000000000004$ (X_5^2 tem suas doze primeiras casas decimais iguais às de $2,000000000004$).

Cabe lembrar que, se não quisermos recorrer a um computador, devemos efetuar manualmente os cálculos do quadrado de 665857, do quadrado de 470832 e do quociente aproximado desses dois quadrados, que corresponde ao valor aproximado do quadrado de X_5, devido a quantidade de dígitos de 443365544449 e de 221682772224 ser maior do que a suportada pela calculadora.

À medida que n cresce, X_n elevado ao quadrado se aproxima de 2, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} X_n^2 = 2$. Como os quadrados dos termos da sequência X_n se aproximam cada vez mais de 2, as raízes quadradas desses quadrados, isto é, os termos de X_n, se aproximam cada vez mais de $\sqrt{2}$, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \sqrt{2}$.

Sabemos que uma calculadora não trabalha com fração, e sim com o quociente do numerador pelo denominador da mesma. Se utilizarmos uma máquina de calcular de oito digitos e teclarmos 2 seguido da tecla de raiz quadrada, a máquina de calcular mostrará no seu visor, como resultado, $1,4142135$. Como $1,4142135^2 = 1,99999982358225 \neq 2$, o resultado não está correto. O fato da máquina de calcular só possuir oito dígitos gera erros que tem de ser percebidos por parte do aluno. Se teclarmos “ $1,4142135$ X $1,4142135 =$ ” teremos como resultado $1,9999998$ e não o correto, que seria $1,99999982358225$. Mesmo se utilizarmos um computador capaz de efetuar contas com números que possuem uma grande quantidade de casas decimais, ainda assim o resultado que ele dará para $\sqrt{2}$ não estará correto, já que $\sqrt{2}$ não possui um número finito de casas decimais.

Vejamos as operações que a máquina de calcular de oito dígitos efetua até mostrar o resutado de $\sqrt{2}$:

$X_1 = 2$

$X_2 = \frac{1}{2}.\left(2+\frac{2}{2}\right) = \frac{1}{2}.(2+1) = \frac{3}{2} = 1,5$

$X_3 = \frac{1}{2}.\left(1,5+\frac{2}{1,5}\right) = \frac{1}{2}.(1,5+1,3333333) = \frac{2,8333333}{2} = 1,4166666$

$X_4 = \frac{1}{2}.\left(1,4166666+\frac{2}{1,4166666}\right) = \frac{1}{2}.(1,4166666+1,4117647) = \frac{2,8284313}{2} = 1,4142156$

$X_5 = \frac{1}{2}.\left(1,4142156+\frac{2}{1,4142156}\right) = \frac{1}{2}.(1,4142156+1,4142115) = \frac{2,8284271}{2} = 1,4142135$

$X_6 = \frac{1}{2}.\left(1,4142135+\frac{2}{1,4142135}\right) = \frac{1}{2}.(1,4142135+1,4142136) = \frac{2,8284271}{2} = 1,4142135.$

Por não possuir mais casas decimais, a máquina simplesmente pára o processo de calcular os termos seguintes da sequência. Equivocadamente, segundo a máquina, qualquer termo de ordem maior ou igual a cinco é igual a $1,4142135$. Porém, sabemos que, na verdade, os termos vão se tornando cada vez menores, mas sempre tais que seus quadrados são maiores do que 2.

Pelo fato de "truncar" os números que não cabem no seu visor, a máquina já compromete o processo de determinar corretamente os termos dessa sequência logo no terceiro termo. Quando ela apresenta $1,3333333$ como o resultado da divisão de 2 por $1,5$, já está sendo feita uma aproximação de um número que não pode ser expresso com uma quantidade finita de casas decimais.

A dízima $1,333...$, que é o resultado da divisão de 2 por $1,5$, pode ser expressa como o limite da sequência do próximo exemplo.

Exemplo 4.10. $\boldsymbol{X_1 = 1,3}$ ***e*** $\boldsymbol{X_{n+1} = X_n + 0,1^n.0,3}$

Vamos determinar os primeiros termos dessa sequência:

$X_1 = 1,3$

$X_2 = 1,3+0,1\ .\ 0,3 = 1,3+0,03 = 1,33$

$X_3 = 1,33+0,1^2\ .\ 0,3 = 1,33+0,01\ .\ 0,3 = 1,33+0,003\ = 1,333$

$X_4 = 1,333+0,1^3\ .\ 0,3 = 1,333+0,001\ .\ 0,3 = 1,333+0,0003\ = 1,3333$

Podemos perceber que o termo de ordem k, ou seja, X_k possui k casas decimais, todas compostas pelo algarismo 3. Por outro lado, sabemos que $2 \div 1,5$ tem infinitas casas decimais com o algarismo 3. Logo, o limite dessa sequência é exatamente o resultado da divisão de 2 por $1,5$, ou seja $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 1,333...$.

4.5 CONCEITUAÇÃO DE POTÊNCIA DE EXPOENTE IRRACIONAL

Nessa seção, é feita uma abordagem de número real que não é vista pelos alunos da Educação Básica. Em seguida, são apresentadas duas propriedades e dois teoremas que serão utilizados na explicação da coerência da definição formal de potência de expoente irracional.

Vamos inicialmente abordar os números irracionais fazendo uma relação com o conceito de limite de sequência.

Cada número real (e, consequentemente, cada número irracional) é igual ao limite de alguma sequência de racionais que converge para esse número real.

Por exemplo, o número $\sqrt{2}$ é igual ao limite da sequência do exemplo que segue.

Exemplo 4.11. $\mathbf{(1,4\ ;\ 1,41\ ;\ 1,414\ ;\ 1,4142\ ;\ 1,41421\ ;...)}$

Essa sequência é construída de seguinte forma: como $1,4^2 = 1,96 < 2$ e $1,5^2 = 2,25 > 2$, temos que a primeira casa decimal de $\sqrt{2}$ é 4 e assim o primeiro termo da sequência é $1,4$; analogamente, como $1,41^2 = 1,9881 < 2$ e $1,42^2 = 2,0164 > 2$, temos que a segunda casa decimal de $\sqrt{2}$ é 1 e assim o segundo termo da sequência é $1,41$; e daí em diante. Observe que cada termo dessa sequência tem uma casa decimal a mais que o termo anterior, sendo que o termo de ordem n tem as n primeiras casas decimais de $\sqrt{2}$. Por isso o limite dessa sequência é $\sqrt{2}$.

Como já vimos, $\sqrt{2}$ também é igual ao limite da sequência do exemplo 4.9, $\left(2, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, ...\right)$, que, do quarto termo em diante, oferece aproximações melhores para $\sqrt{2}$ do que a sequência do exemplo 4.11. Observe, como já vimos, que o quadrado do quarto termo da sequência do exemplo 4.9 é aproximadamente igual a $2,000006$ (cuja diferença, em módulo, para 2 é igual a $0,000006$), enquanto que o quadrado do quarto termo da sequência do exemplo 4.11 é igual a $1,4142^2$=1,99996164 (cuja diferença, em módulo , para 2 é igual a $0,00003836$). Já o quadrado do quinto termo da sequência do exemplo 4.9 é aproximadamente igual a $2,000000000004$ (cuja diferença, em módulo, para 2 é igual a $0,000000000004$), enquanto que o quadrado do quinto termo da sequência do exemplo 4.11 é igual a $1,41421^2 = 1,9999899241$ (cuja diferença, em módulo, para 2 é igual a $0,0000100759$).

Vamos agora enunciar a primeira de duas importantes propriedades.

Propriedade 4.12. *Seja X_n uma sequência que converge para um número real L. Então, a diferença, em módulo, entre os termos da sequência e L fica tão pequena quanto se queira, a partir de um determinado termo, ou seja, sempre existe um determinado termo da sequência a partir do qual $|X_n - L|$ é menor que qualquer número previamente estabelecido, por menor que esse seja.*

Vejamos alguns exemplos.

Já vimos que a sequência do exemplo 4.3 $X_n = \dfrac{1}{n}$ converge para 0.

Se quisermos que a diferença, em módulo, entre os termos de X_n e o seu limite, que é zero, fique menor do que $\dfrac{1}{100}$, devemos resolver a seguinte inequação:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{100}.$$

Como $\frac{1}{n}$ é sempre positivo, temos:

$\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$

$n > 100.$

Logo, a partir do centésimo-primeiro termo, a diferença, em módulo, entre qualquer termo de X_n e 0 é menor do que $\frac{1}{100}$.

Agora, se quisermos que a diferença, em módulo, entre os termos de X_n e o seu limite, que é zero, fique menor do que $\frac{1}{1000000}$, devemos resolver a seguinte inequação:

$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{1000000}.$

Como $\frac{1}{n}$ é sempre positivo, temos:

$\frac{1}{n} < \frac{1}{1000000}$

$n > 1000000.$

Logo, a partir do milionésimo-primeiro termo, a diferença, em módulo, entre qualquer termo de X_n e 0 é menor do que $\frac{1}{1000000}$.

Será que já podemos concluir que, a partir de um determinado termo, a diferença, em módulo, entre os termos de X_n e 0 fica tão pequena quanto se queira? Veremos mais adiante que a resposta é não.

Vejamos outro exemplo.

Já vimos que a sequência do exemplo 4.4 $X_n = \frac{n}{n+1}$ converge para 1.

Se quisermos que a diferença, em módulo, entre os termos X_n e 1 fique menor do que $\frac{1}{200}$, devemos resolver a seguinte inequação:

$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{200}.$

Como $\frac{n}{n+1} < 1$, qualquer que seja n, pois $n > 0$ e $n+1 > n$, temos $\frac{n}{n+1} - 1 < 0$.

Assim, $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = -\left(\frac{n}{n+1} - 1\right) = 1 - \frac{n}{n+1}$, visto que $|a| = -a$ se $a < 0$.

Continuando a resolução da inequação, temos:

$1 - \frac{n}{n+1} < \frac{1}{200}$

$\frac{n+1-n}{n+1} < \frac{1}{200}$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{200}$$

$$n+1 > 200$$

$$n > 199.$$

Logo a partir do ducentésimo termo, a diferença , em módulo, entre qualquer termo de X_n e 1 é menor que $\frac{1}{200}$.

Se quisermos que a diferença, em módulo, entre os termos de X_n e 1 fique menor do que $\frac{1}{5000000}$, devemos resolver a seguinte inequação:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{5000000}.$$

Como $\frac{n}{n+1} < 1$, para qualquer valor de n, temos $\frac{n}{n+1} - 1 < 0$.

Assim, $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = 1 - \frac{n}{n+1}$.

Continuando a resolução da inequação, temos:

$$1 - \frac{n}{n+1} < \frac{1}{5000000}$$

$$\frac{n+1-n}{n+1} < \frac{1}{5000000}$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{5000000}$$

$$n+1 > 5000000$$

$$n > 4999999.$$

Logo, a partir do termo de ordem 5000000, a diferença, em módulo, entre qualquer termo de X_n e 1 é menor do que $\frac{1}{5000000}$.

Ainda não podemos concluir que, a partir de um certo termo, a diferença, em módulo, entre os termos de X_n e 1 fica tão pequena quanto se queira. Veremos mais adiante o porquê.

Para comprovarmos que estamos certos no cálculo do limite de uma sequência expressa na forma explícita, temos que utilizar a Propriedade 4.12.

Vejamos novamente a sequência do exemplo 4.4 $X_n = \dfrac{n}{n+1}$. Vimos que essa sequência converge para 1. Suponhamos que, erroneamente, achássemos que $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ fosse igual a $0,99$. Se quisermos descobrir a partir de qual termo dessa sequência o módulo da diferença entre qualquer termo e $0,99$ é menor do que $\dfrac{1}{10}$, devemos resolver a inequação abaixo:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 0,99\right| < \frac{1}{10}$$

$$-\frac{1}{10} < \frac{n}{n+1} - 0,99 < \frac{1}{10}$$

$$-n-1 < 10n - 9,9n - 9,9 < n+1$$

$$-n-1 < 0,1n - 9,9 < n+1$$

$$-n+8,9 < 0,1n < n+10,9$$

Logo, $-n+8,9 < 0,1n$ e $0,1n < n+10,9$

$$-1,1n < -8,9 \quad \text{e} \quad -0,9n < 10,9$$

$$1,1n > 8,9 \quad \text{e} \quad 0,9n > -10,9$$

$$n > \frac{8,9}{1,1} = \frac{89}{11} \quad \text{e} \quad n > -\frac{10,9}{0,9} = -\frac{109}{9}$$

Logo, $n > \dfrac{89}{11} = 8,090909...$, ou seja, $n \geq 9$.

Concluímos que, a partir do nono termo, o módulo da diferença entre qualquer termo da sequência $X_n = \dfrac{n}{n+1}$ e $0,99$ é menor que $\dfrac{1}{10}$. Vejamos o que ocorre se quisermos que essa diferença, em módulo, fique menor que $\dfrac{1}{100}$:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 0,99\right| < \frac{1}{100}$$

$$-\frac{1}{100} < \frac{n}{n+1} - 0,99 < \frac{1}{100}$$

$$-n-1 < 100n - 99n - 99 < n+1$$

$$-n-1 < n - 99 < n+1$$

$$-n+98 < n < n+100$$

Logo, $-n+98 < n$ e $n < n+100$

$$-2n < -98 \quad \text{e} \quad n-n < 100$$

$$2n > 98 \quad \text{e} \quad 0n < 100$$

$n > 49 \quad \text{e} \quad 0 < 100$

Logo, $n > 49$, ou seja, $n \geq 50$.

Concluímos que, a partir do quinquagésimo termo, o módulo da diferença entre qualquer termo da sequência $X_n = \dfrac{n}{n+1}$ e $0,99$ é menor que $\dfrac{1}{100}$. Vejamos o que ocorre se quisermos que essa diferença, em módulo, fique menor que $\dfrac{1}{1000}$:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 0,99\right| < \frac{1}{1000}$$

$$-\frac{1}{1000} < \frac{n}{n+1} - 0,99 < \frac{1}{1000}$$

$$-n-1 < 1000n - 990n - 990 < n+1$$

$$-n-1 < 10n - 990 < n+1$$

$$-n+989 < 10n < n+991$$

Logo, $-n+989 < 10n \quad \text{e} \quad 10n < n+991$

$989 < 11n \quad \text{e} \quad 9n < 991$

$n > \dfrac{989}{11} \quad \text{e} \quad n < \dfrac{991}{9}$

Logo, $\dfrac{989}{11} < n < \dfrac{991}{9}$, ou seja, $90 \leq n \leq 100$. Concluímos que não existe um termo a partir do qual o módulo da diferença entre qualquer termo da sequência e $0,99$ é menor do que $\dfrac{1}{1000}$. Segundo a Propriedade 4.12, caso essa sequência convergisse para $0,99$, esse termo teria que existir. Para comprovar que essa sequência não converge para $0,99$, poderíamos ter resolvido a seguinte inequação, sendo p um número positivo arbitrário:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 0,99\right| < p$$

$$-p < \frac{n}{n+1} - 0,99 < p$$

$$-pn - p < n - 0,99n - 0,99 < pn + p$$

$$-pn - p < 0,01n - 0,99 < pn + p$$

$$-pn - p + 0,99 < 0,01n < pn + p + 0,99$$

Logo, $-pn - p + 0,99 < 0,01n \quad \text{e} \quad 0,01n < pn + p + 0,99$

$(-p - 0,01)n < p - 0,99$ e $(0,01 - p)n < p + 0,99$

Na linha anterior, como $p > 0$ e consequentemente $-p - 0,01 < 0$, a primeira inequação é equivalente a $(p + 0,01)n > 0,99 - p$. Logo, temos que: $n > \dfrac{0,99 - p}{p + 0,01}$. Na segunda inequação, se p for menor que $0,01$ então $0,01 - p > 0$. Nesse caso essa inequação fica equivalente a $n < \dfrac{p + 0,99}{0,01 - p}$. Assim, a primeira e a segunda inequações, se $p < 0,01$, implicam em $\dfrac{0,99 - p}{p + 0,01} < n < \dfrac{p + 0,99}{0,01 - p}$. Logo, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{n+1}$ não pode ser igual a $0,99$ pois, se fosse, deveríamos ter n maior que uma expressão envolvendo p, e não compreendido entre duas expressões envolvendo p. Observe que, como afirma a Proposição 4.12, se $\lim\limits_{n \to \infty} X_n = L$, então, por menor que seja o número positivo p, sempre existe algum termo da sequência X_n a partir do qual ocorre $|X_n - L| < p$, qualquer que seja n.

Vamos agora mostrar que, de fato, o limite da sequência do exemplo 4.3 é igual a 0, ou seja, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Sendo p um número positivo arbitrário, temos que resolver a inequação abaixo:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < p$$

$$-p < \frac{1}{n} - 0 < p$$

$$-p < \frac{1}{n} < p$$

$$-pn < 1 < pn$$

Logo, $-pn < 1$ e $1 < pn$

$pn > -1$ e $\dfrac{1}{p} < n$

$n > \dfrac{-1}{p}$ e $n > \dfrac{1}{p}$

Como $1 > -1$ temos que $n > \dfrac{1}{p}$.

Concluímos que, dado um número positivo p, a partir do termo de ordem igual ao menor número inteiro maior que $\dfrac{1}{p}$, o módulo da diferença entre qualquer termo da sequência $X_n = \dfrac{1}{n}$ e 0 é menor que p. Assim, fica provado que $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Vamos agora mostrar que de fato o limite da sequência do exemplo 4.4 é igual a 1, ou seja, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$. Sendo p um número positivo arbitrário, temos que resolver a inequação abaixo:

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < p$$

$$-p < \frac{n}{n+1} - 1 < p$$

$$-pn - p < n - n - 1 < pn + p$$

$$-pn - p < -1 < pn + p$$

Logo $-pn - p < -1$ e $-1 < pn + p$

$-pn < p-1 \quad$ e $\quad -pn < p+1$

$pn > -p+1 \quad$ e $\quad pn > -p-1$

$n > \dfrac{-p+1}{p} \quad$ e $\quad n > \dfrac{-p-1}{p}$

Como $-p+1 > -p-1$ temos que $n > \dfrac{-p+1}{p}$.

Concluímos que, dado um número positivo p, a partir do termo de ordem igual ao menor número inteiro maior que $\dfrac{-p+1}{p}$, o módulo da diferença entre qualquer termo da sequência $X_n = \dfrac{n}{n+1}$ e 1 é menor que p. Assim, fica provado que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Por exemplo, se $p = 0,000001$, então $n > \dfrac{-0,000001+1}{0,000001} = \dfrac{0,999999}{0,000001} = 999999$, ou seja,$n \geq 1000000$. Observe que, se $n = 999999$, $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{999999}{1000000} = 0,999999$ e então $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| = |0,999999 - 1| = |-0,000001| = 0,000001$, que não é menor que p. Se $n = 1000000$, $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right|$ $\left|\dfrac{1000000}{1000001} - 1\right| = \left|\dfrac{1000000 - 1000001}{1000001}\right| = \left|-\dfrac{1}{1000001}\right| \cong 0,000000999$, que é menor que p.

Consideremos novamente a sequência do exemplo 4.9, expressa na forma recorrente por $X_1 = 2 \quad$ e $\quad X_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(X_n + \dfrac{2}{X_n}\right)$. Vimos, sem provar, que essa sequência converge para $\sqrt{2}$.

Como $1,4142135^2 \cong 1,999999824 < 2$ e $\quad 1,4142136^2 \cong 2,000000106 > 2$, temos que $1,4142135 < \sqrt{2} < 1,4142136$. Como $X_5 = \dfrac{665857}{470832} \cong 1,414213562$, temos que X_5 possui suas sete primeiras casas decimais iguais as de $\sqrt{2}$ e por isso $\left|X_5 - \sqrt{2}\right| < 0,0000001$.

Se quisermos que o módulo da diferença entre os termos dessa sequência e $\sqrt{2}$ fique menor do que, por exemplo, $0,0000000000000000001$, basta continuarmos calculando os termos subsequentes ao quinto termo de modo que, a partir de um determinado termo X_k, teremos, qualquer que seja $n \geq k$, $|X_n - \sqrt{2}| < 0,0000000000000000001$. Podemos garantir que o módulo da diferença entre cada termo da sequência e $\sqrt{2}$ se torna cada vez menor. Para provar isso, vamos mostrar que a sequência é limitada inferiormente por $\sqrt{2}$ e é decrescente. Além disso, por ser decrescente, ela é limitada superiormente pelo seu primeiro termo, que é igual a 2. Estamos nos baseando na existência de um teorema cujo enunciado é o seguinte:

Teorema 4.13. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Observe que ser limitada significa ser limitada superior e inferiormente e ser *monótona* significa ser *não decrescente* (isto é, qualquer termo da sequência é maior ou igual ao termo anterior) ou *não crescente* (ou seja, qualquer termo é menor ou igual ao termo anterior). Note também que ser *decrescente* (isto é, qualquer termo da sequência é menor que o termo anterior) é um caso particular de ser não crescente.

Observação: A demonstração desse teorema foge ao escopo da aula para os alunos.

Primeiro, veremos que a sequência é decrescente. Para isto vamos mostrar que, para todo número natural $n \geq 1$, $\quad X_{n+2} < X_{n+1}$. Observe que ficará faltando mostrarmos que $X_2 < X_1$. Essa prova, porém, é imediata, pois como $X_1 = 2$ e $X_2 = \frac{1}{2}\left(X_1 + \frac{2}{X_1}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2} = 1,5$, temos que $X_2 < X_1$.

Como $X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(X_n + \frac{2}{X_n}\right) = \frac{1}{2}.\frac{X_n^2+2}{X_n}$ e $X_{n+2} = \frac{1}{2}\left(X_{n+1} + \frac{2}{X_{n+1}}\right)$, temos que:

$$X_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}.\frac{X_n^2+2}{X_n} + \frac{2.2X_n}{X_n^2+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}.\frac{X_n^2+2}{X_n} + \frac{4X_n}{X_n^2+2}\right).$$

Como $\frac{1}{2}.a + \frac{1}{2}.a = a$ podemos reescrever X_{n+1} da seguinte forma:

$X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}.\frac{X_n^2+2}{X_n} + \frac{1}{2}.\frac{X_n^2+2}{X_n}\right)$. Vamos mostrar que $\frac{4X_n}{X_n^2+2} < \frac{1}{2}.\frac{X_n^2+2}{X_n}$ e então teremos demonstrado que $X_{n+2} < X_{n+1}$, ou seja, que a sequência é decrescente.

Suponhamos, por absurdo, que $\frac{4X_n}{X_n^2+2} \geq \frac{1}{2}.\frac{X_n^2+2}{X_n}$. A sequência é formada somente por termos positivos, pois o primeiro termo é igual ao número positivo 2 e a soma, bem como a divisão, de números positivos, resulta sempre em números positivos. Considerando que $2X_n > 0$, qualquer que seja n, e multiplicando os dois membros da inequação acima por $2X_n$ obtemos $\frac{8X_n^2}{X_n^2+2} \geq X_n^2 + 2$. Como $X_n > 0$, temos que $X_n^2 + 2 > 0$.

Logo, segue que $8X_n^2 \geq (X_n^2+2)^2$. Como $X_n > 0$, temos que $8X_n^2 > 0$ e $(X_n^2+2)^2 > 0$.

Logo, segue que $\sqrt{8}X_n \geq X_n^2 + 2 \Rightarrow X_n^2 - \sqrt{8}X_n + 2 \leq 0$. O discriminante da equação $X_n^2 - \sqrt{8}X_n + 2 = 0$ é igual a : $8 - 4.1.2 = 8 - 8 = 0$.

Logo, a única raiz é $\frac{\sqrt{8}}{2.1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Como o coeficiente de X_n^2 é igual a 1, que é um número positivo, e o discriminante da equação é nulo, temos que $X_n^2 - \sqrt{8}X_n + 2 > 0$, qualquer que seja $X_n \neq \sqrt{2}$. Como a sequência é formada por números racionais, nenhum termo pode ser igual a $\sqrt{2}$, que é um número irracional. Logo, para todo $X_n, X_n^2 - \sqrt{8}X_n + 2 > 0$. Chegamos a uma contradição, pois $\frac{4X_n}{X_n^2+2} \geq \frac{1}{2}.\frac{X_n^2+2}{X_n}$, implica em $X_n^2 - \sqrt{8}X_n + 2 \leq 0$. Concluímos que $\frac{4X_n}{X_n^2+2} < \frac{1}{2}.\frac{X_n^2+2}{X_n}$ e, consequentemente, que a sequência é decrescente.

Agora vamos mostrar que a sequência é limitada inferiormente por $\sqrt{2}$. Suponhamos, por absurdo, que $X_{n+1} < \sqrt{2}$, ou seja que $\frac{1}{2}\left(X_n + \frac{2}{X_n}\right) < \sqrt{2}$. Logo, $X_n + \frac{2}{X_n} < 2\sqrt{2}$.

Como $X_n > 0$, temos que: $X_n^2 + 2 < 2\sqrt{2}X_n \Rightarrow X_n^2 - 2\sqrt{2}X_n + 2 < 0$. O discriminante da equação $X_n^2 - 2\sqrt{2}X_n + 2 = 0$ é igual a $8 - 8 = 0$. Como o coeficiente de X_n^2 é igual a 1, que é um número positivo, e o discriminante da equação é nulo, temos que $X_n^2 - \sqrt{8}X_n + 2 \geq 0$. Chegamos a uma contradição, visto que, se $X_{n+1} < \sqrt{2}$, então $X_n^2 - \sqrt{8}X_n + 2 < 0$.

Concluímos, então, que nenhum termo pode ser menor que $\sqrt{2}$, ou seja, que a sequência é limitada inferiormente por $\sqrt{2}$.

Vamos agora apresentar uma segunda importante propriedade.

Propriedade 4.14. *Dizemos que uma sequência é de Cauchy se conseguimos tornar tão pequena quanto se queira a diferença, em módulo, entre quaisquer dois termos de ordem maior ou igual a de um determinado termo, ou seja, uma sequência é de Cauchy se, por menor que seja um número arbitrário p, sempre existir algum termo X_k a partir do qual $|X_n - X_m| < p$, quaisquer que sejam n e m maiores ou iguais a k.*

Por exemplo, a sequência do exemplo 4.9, expressa por $X_1 = 2$ e $X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(X_n + \frac{2}{X_n}\right)$, é de Cauchy, pois, como já vimos:

$X_1 = 2$

$X_2 = 1,5$

$X_3 = \frac{17}{12}$, que é aproximadamente igual a $1,4166666$

$X_4 = \frac{577}{408}$, que é aproximadamente igual a $1,4142156$

$X_5 = \frac{665857}{470832}$, que é aproximadamente igual a $1,4142135$.

Então, se quisermos tornar menor que 0,01 o módulo da diferença entre quaisquer dois termos de ordem maior ou igual a de um determinado termo, basta escolhermos o terceiro para ser esse termo, pois, a partir dele, todos os termos são iguais à soma de $1,41$ com valores menores que $0,01$, ou seja, todos os termos, a partir do terceiro, possuem o algarismo 1 na casa das unidades, 4 na casa dos décimos e 1 na casa dos centésimos. Assim, a diferença, em módulo, entre quaisquer dois termos, a partir do terceiro, é sempre menor que $0,01$. Por exemplo, $|X_3 - X_5| \cong 1,4166666 - 1,4142135 = 0,0024531 < 0,01$.

Analogamente, se quisemos tornar menor que $0,00000000000000000001$ a diferença, em módulo, entre quaisquer dois termos de ordem maior ou igual a de um determinado termo, devemos prosseguir calculando os termos seguintes ao quinto e, então, em algum momento, as vinte primeiras casas decimais de um certo termo de ordem k serão iguais às vinte primeiras do termo seguinte. Assim, teremos, a partir de X_k, a diferença, em módulo, entre quaisquer dois termos menor que $0,00000000000000000001$ (ou 10^{-20}).

Podemos perceber que a diferença, em módulo, entre quaisquer dois termos de ordem maior ou igual a de um determinado termo fica realmente tão pequena quanto se queira, ou seja, a sequência X_n acima é de Cauchy.

Agora já podemos apresentar a definição formal de potência de expoente real, que engloba o caso de expoente irracional.

Definição 4.15. *Sejam a um número real positivo e x um número real.*

Seja X_n uma sequência de números racionais que converge para x.

Então, como a função exponencial $f(x) = a^x$ é uma função contínua, temos que $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{X_n}$.

Para essa definição fazer sentido, devemos demonstrar que a sequência a^{X_n} converge para a^x.

Para essa demonstração, ainda vamos precisar dos dois teoremas que seguem.

Teorema 4.16. *Toda sequência que possui a Propriedade 4.12, ou seja, que converge, possui obrigatoriamente a Propriedade 4.14, ou seja, é de Cauchy.*

A idéia desse teorema é a seguinte:

Seja X_n uma sequência que converge para L.

Para valores grandes de n, os termos X_n vão cada vez mais se aproximando de L (Propriedade 4.12).

Nesse caso eles estão, necessariamente, se aproximando uns dos outros (Propriedade 4.14).

Teorema 4.17. *Toda sequência de números reais que possui a Propriedade 4.14, ou seja, de Cauchy, possui a Propriedade 4.12, isto é, converge.*

A idéia desse teorema é a seguinte:

Para valores grandes de n os termos X_n vão se aproximando uns dos outros (Propriedade 4.14), ou seja, a diferença, em módulo, entre quaisquer dois termos pode se tornar tão pequena quanto se queira, a partir de um determinado termo. Assim, sempre existe um determinado termo a partir do qual todos os termos da sequência possuem a mesma parte inteira e as mesmas primeiras n casas decimais, isto é, a diferença entre quaisquer dois desses termos é menor que 10^{-n}. Então, concluímos que os termos se aproximam de um mesmo número, que é o limite da sequência. Logo, a sequência converge (Propriedade 4.12).

Vamos agora demonstrar que a^x existe, isto é, a^{X_n} converge para a^x.

Como X_n converge para x, temos, pelo Teorema 4.16, que X_n é uma sequência de Cauchy. Como X_n é de Cauchy, temos, para valores grandes de n, os termos de X_n se aproximando uns dos outros. Sendo r um número natural positivo arbitrário, temos, para valores grandes de n, que $a^{X_{n+r}} \div a^{X_n} = a^{X_{n+r}-X_n} \cong a^0 = 1$, pois $X_{n+r} \cong X_n$. Como, para valores grandes de n, $a^{X_{n+r}} \div a^{X_n} \cong 1$, temos que $a^{X_{n+r}} \cong a^{X_n}$. Logo, os termos da sequência a^{X_n} também vão se aproximando uns dos outros, ou seja, a^{X_n} é de Cauchy.

Sendo a^{X_n} uma sequência de números reais e de Cauchy, concluímos, pelo Teorema 4.17, que a^{X_n} converge.

Logo, provamos que, sendo a um número real positivo, x um número real e X_n uma sequência de números racionais que converge para x, o limite $\lim_{n\to\infty} a^{X_n}$ existe. Vejamos porque esse limite é igual a a^x, ou seja, porque $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{X_n}$.

À medida que os termos de X_n se aproximam de x, os termos de a^{X_n} se aproximam de a^x. Assim, como a função exponencial $f(x) = a^x$ é uma função contínua, temos que o limite de a^{X_n} é igual a a^x.

Por exemplo, $2^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} 2^{X_n}$, sendo X_n a sequência que converge para $\sqrt{2}$ e é expressa por $X_1 = 2$ e $X_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(X_n + \dfrac{2}{X_n}\right)$.

5 CONCEITOS FORMAIS

Este capítulo desse trabalho de conclusão de curso aborda as definições formais de conceitos que foram apresentados aos alunos de maneira informal na aula de potência de expoente irracional. Além disso, são feitas as demonstrações formais dos fatos e teoremas mostrados aos alunos com uma linguagem acessível aos mesmos, sem o devido rigor matemático.

Definição 5.1. *Limite de Sequência*

Seja X_n uma sequência de números reais. Afirmarmos que o limite de X_n é o número real L equivale a dizermos que, por menor que seja um número positivo arbitrário ε, sempre existe um número natural n_0 tal que, para todos os termos de ordem maior ou igual a n_0, o módulo da diferença entre esses termos da sequência e o número L é menor que o número ε.

Segundo Ávila, G. S. (1999, p.17), temos:

> Diz-se que uma sequência (a_n) converge para o número L, ou tem limite L se, dado qualquer número $\varepsilon > 0$, é sempre possível encontrar um número N tal que
>
> $$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$
>
> Escreve-se:
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = L,\ lim\ a_n = L \text{ ou } a_n \to L.$$

Vejamos agora a origem da relação de recorrência em que $X_1 = 2$ e $X_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(X_n + \dfrac{2}{X_n}\right)$, que expressa uma sequência cujo limite é $\sqrt{2}$.

Consideremos inicialmente a função $f(x) = x^2 - 2$, cuja raiz positiva é $\sqrt{2}$. Vamos construir uma sequência cujos termos se aproximam cada vez mais de $\sqrt{2}$. O primeiro termo dessa sequência é igual a 2, ou seja $X_1 = 2$. Para determinar X_2, consideremos a reta que passa pelo ponto $(X_1, f(X_1)$ e é tangente ao gráfico da função f. Tomemos X_2 como a abscissa do ponto de interseção dessa reta com o eixo x do plano cartesiano. Analogamente, para determinar X_3, consideremos a reta que passa pelo ponto $(X_2\ , f(X_2))$ e é tangente ao gráfico da função f. Repetindo-se esse processo indefinidamente, observe que X_{n+1} é igual a abscissa do ponto de interseção com o eixo x da reta que passa pelo ponto $(X_n, f(X_n))$ e é tangente ao gráfico da função f. O coeficiente angular dessa reta é igual a $f'(X_n)$ e, como $f'(x) = 2x$, temos que $f'(X_n) = 2X_n$.

Logo, a equação dessa reta é $y - f(X_n) = 2X_n.(x - X_n)$ e, como o ponto de interseção com o eixo x é $(X_{n+1}, 0)$, temos que $0 - f(X_n) = 2X_n(X_{n+1} - X_n)$. Como $f(X_n) = X_n^2 - 2$, segue que $2 - X_n^2 = 2X_nX_{n+1} - 2X_n^2 \Rightarrow 2 + X_n^2 = 2X_nX_{n+1} \Rightarrow \dfrac{2}{X_n} + X_n = 2X_{n+1} \Rightarrow X_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(X_n + \dfrac{2}{X_n}\right)$.

Definição 5.2. *Sequência de Cauchy*

Seja X_n uma sequência de números reais. Afirmarmos que X_n é uma sequência de Cauchy equivale a dizermos que, por menor que seja um número positivo arbitrário ε, sempre existe um número natural n_0 tal que, para quaisquer dois termos de ordem maior ou igual a n_0, o módulo da diferença entre esses dois termos da sequência é menor que o número ε.

Segundo Figueiredo, D. G. (1996, p.32), temos:

> Sequências de Cauchy:
>
> Uma sequência (a_n) de números reais é denominada uma sequência de Cauchy se, dado $\varepsilon > 0$, existir n_0 (que pode depender de ε) tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ para todos $n,\ m \geq n_0$.

Na aula de potência de expoente irracional foi apresentado, sem ter sido formalmente demonstrado, o que chamamos de Teorema 4.16, cujo enunciado é o seguinte: Toda sequência que possui a Propriedade 4.12, ou seja, que converge, possui obrigatoriamente a Propriedade 4.14, ou seja, é de Cauchy. Também foi apresentado, sem ter sido formalmente demonstrado, o que chamamos de Teorema 4.17, cujo enunciado é o seguinte: Toda sequência de números reais que possui a Propriedade 4.14, ou seja, de Cauchy, possui a Propriedade 4.12, isto é, converge. Esses dois teoremas correspondem ao Critério de Cauchy.

Teorema 5.3. *Critério de Cauchy: Uma sequência (a_n) é convergente se, e só se, dado $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ para $m,\ n > n_0$.*

Abaixo apresentamos a demonstração, segundo Figueiredo, D. G. (1996, p.31-32).

> Suponhamos , primeiramente, que (a_n) seja convergente e seja r seu limite. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $|a_n - r| < \varepsilon/2$ para $n > n_0$.
>
> Logo, se n e m são maiores que n_0 temos, usando a desigualdade do triângulo:
>
> $$|a_n - a_m| \leq |a_n - r| + |a_m - r| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$
>
> Reciprocamente, suponhamos que a condição do teorema seja satisfeita e provemos que (a_n) é convergente. Devemos, pois, descobrir o limite r. Pela hipótese dado $\varepsilon = 1$, existe n_0 tal que
>
> $$|a_n - a_m| < 1, \text{ para } n,\ m \geq n_0. \text{ Logo,}$$
> $$|a_n - a_{n_0}| < 1, \text{ para } n \geq n_0.$$
>
> Da desigualdade do triângulo segue-se então:
>
> $$|a_n| \leq |a_{n_0}| + |a_n - a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}| \text{ para } n \geq n_0.$$

Seja agora k' o maior dos números $|a_1|$, $|a_2|,\ldots,$ $|a_{n_{0-1}}|$, e seja k o maior dos dois números, k' e $1+|a_{n_0}|$. Portanto,

(1)

$$|a_n| \leq k, \text{ para todo } n.$$

Aplicando o teorema de Bolzano-Weierstrass, segue-se que (a_n) contém uma subsequência convergente (a_{n_j}), e seja r seu limite. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0' \in \mathbb{N}$ tal que

(2)

$$|a_{n_j} - r| < \varepsilon$$

para $n_j \geq n_0'$. Por outro lado, em virtude da hipótese, temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0'' \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

para $n,\ m \geq n_0''$. Agora, pela desigualdade do triângulo, temos

(3)

$$|a_m - r| \leq |a_m - a_n| + |a_n - r|$$

para quaisquer termos a_n e a_m de (a_n). Logo, se em (3) tomarmos $m \geq max(n_0'\ , n_0'')$ e $n = n_j \geq\ max\ (n_0'\ n_0'')$ temos

$$|a_m - r| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

o que prova a convergência de (a_n).

Na demonstração do Critério de Cauchy foi citado o teorema de Bolzano-Weierstrass, que é um corolário do Teorema 4.13, cujo enunciado é o seguinte: Toda sequência monótona limitada é convergente.

Abaixo apresentamos a demonstração do Teorema 4.13, segundo Lima, E. L. (2007, p.25).

Seja (x_n) monótona, digamos não decrescente, limitada. Escrevamos $X = \{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$ e $a = sup\ X$. Afirmamos que $a = lim\ x_n$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Assim, $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$ e daí $lim\ x_n = a$.

Semelhantemente, se (x_n) é não crescente, limitada então $lim\ x_n$ é o ínfimo do conjunto dos valores x_n.

Corolário 5.4. *Teorema de Bolzano-Weierstrass:*
Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Segue a demonstração, segundo Lima, E. L. (2007, p.25).

Com efeito, basta mostrar que toda sequência (x_n) possui uma subsequência monótona. Digamos que um termo x_n da sequência dada é destacado quando $x_n \geq x_p$ para todo $p > n$. Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n tais que x_n é um termo destacado. Se for D um conjunto infinito, $D = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$, então a subsequência $(x_n)_{n\in D}$ será monótona não-crescente. Se, entretanto, D for finito seja $n_1 \in \mathbb{N}$ maior do que todos os $n \in D$. Então x_{n_1} não é destacado, logo existe $n_2 > n_1$ com $x_{n_1} < x_{n_2}$. Por sua vez, x_{n_2} não é destacado, logo existe $n_3 > n_2$ com $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$. Seguindo, obtemos uma subsequência crescente $x_{n_1} < x_{n_2} < \cdots < x_{n_k} < \cdots$.

Vejamos agora a demonstração do seguinte fato que foi apresentado na aula de potência de expoente irracional, na página 36, como Definição 4.15.

Teorema 5.5. *Sejam a um número real positivo, x um número real e X_n uma sequência de números racionais que converge para x. Então o limite $\lim\limits_{n\to\infty} a^{X_n}$ existe e é igual a a^x, ou seja, $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{X_n}$.*

Demonstração:

Veja na página 36 que, segundo o Teorema 4.17, se uma sequência de números reais é de Cauchy, então ela é convergente. Vamos então demonstrar que a^{X_n} é de Cauchy. Assim estaremos provando também que a^{X_n} converge. Demonstrar que a^{X_n} é de Cauchy significa mostrar que:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0$ natural que $m, n \geq n_0 \Rightarrow |a^{X_m} - a^{X_n}| < \varepsilon$. Temos que:

$$|a^{X_m} - a^{X_n}| < \varepsilon \Leftrightarrow |a^{X_m - X_n + X_n} - a^{X_n}| < \varepsilon \Leftrightarrow |a^{X_m - X_n}.\, a^{X_n} - a^{X_n}| < \varepsilon \Leftrightarrow |a^{X_n}.\, (a^{X_m - X_n} - 1)| < \varepsilon.$$

Como o módulo de um produto é igual ao produto dos módulos, ou seja, como $|f\ .\ g| = |f|\ .\ |g|$, temos: $|a^{X_m} - a^{X_n}| < \varepsilon \Leftrightarrow |a^{X_n}|\ .\ |a^{X_m - X_n} - 1| < \varepsilon$.

Logo, devemos mostrar que:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ natural tal que,se $m, n \geq n_0$, então $|a^{X_n}|\ .\ |a^{X_m - X_n} - 1| < \varepsilon$.

Como X_n converge para o número real x, temos, pelo Teorema 4.16, que X_n é de Cauchy. Logo, $X_m - X_n$ se torna tão próximo de 0 quanto se queira e assim $|a^{X_m - X_n} - 1|$ também se torna tão próximo de 0 quanto se queira. Segue que, se $|a^{X_n}|$ for limitada, então também se torna tão próximo de 0 quanto se queira o produto $|a^{X_n}|\ .\ |a^{X_m - X_n} - 1|$. Por isso vamos agora mostrar a seguinte afirmação:

Afirmação 5.6. *Sejam a um número real positivo, x um número real e X_n uma sequência de números racionais que converge para x. Então a sequência $|a^{X_n}|$ é limitada.*

Demonstração:

Por hipótese X_n converge. Assim, como qualquer sequência convergente é limitada, existe A real tal que $-A \leq X_n \leq A$, ou seja $|X_n| \leq A$. Segue que, para $a > 1$, temos $|a^{X_n}| \leq a^A$ e, para $0 < a < 1$, temos $|a^{X_n}| \leq a^{-A}$. Logo, $|a^{X_n}|$ é limitada.

Provamos, assim, que $|a^{X_n}|$ é limitada.

Seja $R = a^A$, se $a > 1$, e $R = a^{-A}$, se $0 < a < 1$.

Temos então que $|a^{X_n}|\ .\ |a^{X_m - X_n} - 1| \leq R\ .\ |a^{X_m - X_n} - 1|$.

Como X_n é de Cauchy, temos que:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0$ natural tal que: $m, n \geq n_0 \Rightarrow |X_m - X_n| < \varepsilon$.

Temos também que, dado ε acima, $\exists\ n_0'$ natural tal que:
$m, n \geq n_0' \Rightarrow |X_m - X_n| < \dfrac{\varepsilon}{R}$.

Temos então que, dado ε acima, $\exists\ n_1$ natural, $n_1 \geq n_0'$, tal que:
$m, n \geq n_1 \Rightarrow |a^{X_m - X_n} - 1| < \dfrac{\varepsilon}{R}$.

Logo, para $m,\ n \geq n_1$,

$|a^{X_n}|\ .\ |a^{X_m - X_n} - 1| \leq R\ .\ |a^{X_m - X_n} - 1| < R\ .\ \dfrac{\varepsilon}{R} = \varepsilon$, ou seja, $|a^{X_n}|\ .\ |a^{X_m - X_n} - 1| < \varepsilon$.
Logo, a^{X_n} é de Cauchy e, pelo Teorema 4.17, concluímos que a^{X_n} converge, ou seja, o limite $\lim\limits_{n\to\infty} a^{X_n}$ existe. Por outro lado, sabemos que a função real de variável real $f(x) = a^x$ é uma função contínua. Por isso e pelo fato de $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = x$, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} f(X_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a^{X_n} = a^{\lim\limits_{n\to\infty} X_n} = a^x$, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{X_n} = a^x$.

Usamos nessa demonstração, e devemos prová-lo, o fato de que toda sequência convergente é limitada.

Teorema 5.7. *Toda sequência convergente é limitada.*

Segue a demonstração, segundo Lima, E. L. (2007, p.24).

> Seja $a = lim\ x_n$. Tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-1, a+1)$. Sejam b o menor e c o maior elemento do conjunto finito $\{x_1, \ldots,\ x_{n_0},\ a-1,\ a+1\}$. Todos os termos x_n da sequência estão contidos no intervalo $[b, c]$, logo ela é limitada.

Quando enunciamos o que chamamos de Teorema 4.17, ou seja, toda sequência de números reais de Cauchy converge, na verdade quisemos dizer que qualquer sequência de Cauchy cujos termos pertencem ao corpo dos reais converge para um número pertencente ao corpo dos reais. Temos que fazer essa ressalva porque toda sequência de racionais que converge para um número irracional simplesmente não é convergente se considerarmos o corpo dos racionais.

Vamos então definir corpo:

Um *corpo* é um conjunto K, munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação, que satisfazem a certas condições, chamadas os axiomas de corpo.

A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in K$ sua soma $x+y \in K$, enquanto a multiplicação associa a esses elementos o seu produto $x.y \in K$. Os axiomas de corpo são os seguintes:

Axiomas da adição:

Associatividade - $\forall\ x,\ y,\ z \in K$ temos $(x+y)+z = x+(y+z)$.

Comutatividade - $\forall\ x,\ y\ \in K$ temos $x+y = y+x$.

Elemento neutro - $\exists$ 0 (zero)$\in K$ tal que $x+0 = x, \forall x \in K$.

Simétrico - Todo elemento $x \in K$ possui um simétrico $-x \in K$ tal que $x+(-x) = 0$.

Axiomas da multiplicação:

Associatividade - $\forall\ x,\ y,\ z \in K$ temos $(x.y).z = x.(y.z)$.

Comutatividade - $\forall\ x,\ y \in K$ temos $x.y = y.x$.

Elemento neutro - $\exists$ 1 (um)$\in K$ tal que $1 \neq 0$ e $x.1 = x, \forall x \in K$.

Inverso multiplicativo - Todo $x \neq 0$ em K possui um inverso x^{-1} tal que $x.x^{-1} = 1$.

As operações de adição e multiplicação num corpo K acham-se relacionadas por um axioma, com o qual fica completa a definição de corpo.

Axioma da distributividade:

$\forall\ x,\ y,\ z \in K$ temos $x\ .\ (y+z) = x\ .\ y + x\ .\ z$

Um corpo ordenado é um corpo K no qual podemos destacar um subconjunto $P \subset K$, chamado o conjunto dos elementos positivos de K, tal que as duas condições abaixo são satisfeitas:

i) A soma e o produto de elementos positivos são positivos, ou seja, $x,\ y \in\ P \Rightarrow x+y\ \in\ P$ e $x.y\ \in\ P$.

ii) Dado $x \in K$, exatamente uma das três alternativas ocorre: ou $x = 0$, ou $x \in P$ ou $-x \in P$.

Assim, indicando com $-P$ o conjunto dos elementos $-x$, onde $x \in P$, temos $K = P \cup (-P) \cup \{0\}$, sendo os conjuntos $P, -P$ e $\{0\}$ disjuntos dois a dois. Os elementos de P são chamados evidentemente de negativos.

Um subconjunto X de um corpo ordenado K é chamado de *limitado superiormente* quando existe $b \in K$ tal que $b \geqslant x$ para todo $x \in X$. Em outras palavras, temos $X \subset (-\infty, b]$. Cada $b \in K$ com essa propriedade é dito uma *cota superior* de X.

Analogamente, $X \subset K$ é chamado de *limitado inferiormente* quando existe $a \in K$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. Temos então $X \subset [a, +\infty)$. Cada $a \in K$ com essa propriedade é dito uma *cota inferior* de X.

Um subconjunto X de um corpo ordenado K é chamado de *limitado* quando é limitado superior e inferiormente, isto é, quando existem $a, b \in K$ tais que $X \subset [a, b]$.

Sejam K um corpo ordenado e $X \subset K$ um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in K$ é chamado *supremo* do subconjunto X quando b é a menor das cotas superiores de X em K.

Assim b é supremo do conjunto X e se somente forem satisfeitas as duas condições abaixo:

i) Para todo $x \in X$ temos $x \leq b$.

ii)Se $c \in K$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $c \geq b$.

A primeira condição diz que b é uma cota superior de X, enquanto a segunda garante que qualquer outra cota superior de X tem que ser maior ou igual a b, ou seja, b é a menor das cotas superiores.

Se dois elementos b e b' em K cumprem as duas condições acima, a segunda condição garante $b \leq b'$ e $b' \leq b$, ou seja, $b = b'$. Portanto o supremo de um conjunto, quando existe, é único. Usamos a notação $supX$ para denotar o supremo do conjunto X.

Consideremos o mesmo corpo ordenado K e seja $Y \subset K$ um subconjunto limitado inferiormente. Um elemento $a \in K$ é chamado *ínfimo* do subconjunto Y quando a é a maior das cotas inferiores de X em K.

Analogamente ao caso do supremo, a é o ínfimo do conjunto Y se e somente se forem satisfeitas as duas condições abaixo:

i) Para todo $y \in Y$ temos $y \geq a$.

ii)Se $c \in K$ é tal que $y \geq c$ para todo $y \in Y$, então $c \leq a$.

A primeira condição diz que a é uma cota inferior de Y, enquanto a segunda garante que qualquer outra cota inferior de Y tem que ser menor ou igual a a, ou seja, a é a maior das cotas inferiores.

Se dois elementos a e a' cumprem as duas condições acima, a segunda condição garante $a \leq a'$ e $a' \leq a$, ou seja, $a = a'$. Portanto o ínfimo de um conjunto, quando existe, é único. Usamos a notação $infY$ para denotar o ínfimo do conjunto Y.

Se $X \subset K$ possuir um elemento máximo, este será o seu supremo e, se X possuir um elemento mínimo, ele sera o seu ínfimo. Reciprocamente, se $supX$ pertence a X, então é o maior elemento de X; se $infX$ pertence a X, então é o menor elemento de X.

Sejam agora $X = \{x$ racionais tais que $x \geq 0$ e $x^2 < 2\}$ e $Y = \{y$ racionais tais que $y > 0$

e $y^2 > 2\}$. Como $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow x$ não pertence a X, concluímos que $X \subset [0,2]$. Logo, X é um conjunto limitado de números racionais. Por outro lado $Y \subset (0,+\infty)$, de modo que Y é limitado inferiormente. Mostraremos que não existem $supX$ nem $infY$ no conjunto dos números racionais (é claro que $infX = 0$, pois 0 é o menor elemento de X). Na demonstração usaremos os seguintes fatos.

A) O conjunto X não possui elemento máximo, ou seja, $supX$ não pertence a X.

Demonstração:

Dado qualquer $x \in X$, tomamos um número racional r menor do que 1 tal que $0 < r < \dfrac{2-x^2}{2x+1}$. Afirmamos que x+r ainda pertence a X. Com efeito, como $0 < r < 1$, temos $r^2 < r$. Da outra desigualdade que r satisfaz segue que $r(2x+1) < 2-x^2$. Por conseguinte, $(x+r)^2 = x^2+2rx+r^2 < x^2+2rx+r = x^2+r(2x+1) < x^2+2-x^2 = 2$.

Assim dado qualquer $x \in X$, existe um número maior $x+r \in X$.

B) O conjunto Y não possui elemento mínimo, ou seja, $infY$ não pertence a Y.

Demonstração:

Dado qualquer $y \in Y$ temos $y > 0$ e $y^2 > 2$. Logo, podemos obter um número racional r tal que $0 < r < \dfrac{y^2-2}{2y}$. Logo, $2ry < y^2-2$ e daí $(y-r)^2 = y^2-2ry+r^2 > y^2-2ry > 2$. Notemos que $y-r$ é positivo, ou seja, $r < y$, pois $y^2-2ry > 2$. Assim podemos obter $y-r \in Y$, com $y-r < y$, ou seja, dado qualquer $y \in Y$, existe um número menor $y-r \in Y$.

C) Se $x \in X$ e $y \in Y$, então $x < y$.

Demonstração:

Temos $x^2 < 2 < y^2$, e portanto, $x^2 < y^2$. Como x e y são ambos positivos, concluímos que $x < y$ (A rigor poderia ser $x = 0$ mas, neste caso, a conclusão $x < y$ é óbvia).

Usando os fatos A, B e C mostraremos que, entre os números racionais, não existem $supX$ nem $infY$.

Demonstração:

Suponhamos, primeiro, que existisse $a = supX$. Seria obrigatoriamente $a > 0$. Não poderia ser $a^2 < 2$ por que isto faria $a \in X$ e, então, a seria o elemento máximo de X, que não existe, pelo fato A. Também não poderia ser $a^2 > 2$, porque isto faria $a \in Y$. Como, em virtude de B, Y não possui elemento mínimo, existiria $b \in Y$, com $b < a$.

Usando o fato C, concluiríamos que $x < b < a$ para todo $x \in X$, o que contradiz ser $a = supX$.

Assim, se existir $a = supX$, deverá ser $a^2 = 2$. Porém sabemos que não existe nenhum número racional com esta propriedade. Concluímos que, entre os racionais, o conjunto X não possui supremo.

Um raciocinio exatamente análogo, baseado nos fatos A, B e C, mostraria que o número $b = infY$, se existir, deve satisfazer $b^2 = 2$ e, portanto, Y não possui ínfimo entre os racionais.

Ao mesmo tempo, estes argumentos mostram que, se existir um corpo ordenado no qual todo subconjunto não-vazio, limitado superiomente, possua supremo, existirá, nesse corpo, um elemento $a > 0$ cujo quadrado é 2. Esse corpo, que conterá o conjunto dos racionais e consequentemente o conjunto X, possuirá $a = supX$, cujo quadrado, não podendo ser menor, nem maior do que 2, deverá ser igual a 2. Escrevemos $a = \sqrt{2}$.

Definição 5.8. *Um corpo ordenado K é denominado completo quando todo subconjunto vazio, limitado superiormente, $X \subset K$, possui supremo em K.*

Resulta da definição que, num corpo ordenado completo, todo subconjunto não-vazio e limitado inferiormente, $Y \subset K$, possui um ínfimo. Com efeito, dado Y, seja $X = -Y$, isto é, $X = \{-y; y \in Y\}$. Então, como X não é vazio e é limitado superiormente, existe $a = supX$. Como se percebe facilmente, temos $-a = infY$.

Vejamos agora o seguinte axioma:

Existe um corpo ordenado completo, chamado o corpo dos números reais.

Por ser completo, o corpo dos reais possui um número positivo a tal que $a^2 = 2$. É claro que só existe um único número positivo (representado por $\sqrt{2}$) cujo quadrado é 2, pois $a^2 = b^2 = 2 \Rightarrow 0 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \Rightarrow a+b = 0$ ou $a-b = 0$. No primeiro caso $a = -b$ (logo, não podem ser a e b ambos positivos) e no segundo $a = b$.

Provaremos agora que, dados quaisquer dois números n natural, e a real positivo, existe um único número real $b > 0$ tal que $b^n = a$. O número b, como sabemos, é chamado a raiz n-ésima de a de e é representado pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$. A demonstração se baseia no mesmo argumento usado no caso da $\sqrt{2}$. Vejamos:

Consideremos o conjunto $X = \{x$ reais tais que $x \geq 0$ e $x^n < a\}$. O conjunto X é não-vazio, pois $0 \in X$, e é limitado superiormente (Se $a < 1$, então 1 é uma cota superior de X; se $a > 1$ então $a^n > a$ e daí a é uma cota superior de X).

Seja $b = supX$. Afirmamos que $b^n = a$. Isto se baseia nos seguintes fatos;

A) O conjunto X não possui elemento máximo.

Demonstração:

Dado $x \in X$ qualquer, provaremos que é possível tomar $d > 0$ tão pequeno que ainda se tenha $(x+d)^n < a$, isto é, $x+d \in X$. Para isto, usaremos o seguinte fato auxiliar, que demonstraremos por indução:

Dado $x > 0$, existe, para cada n, um número real positivo A_n (dependendo de x) tal que $(x+d)^n \leqslant x^n + A_n.\ d$, qualquer que seja d entre 0 e 1.

Para $n = 1$ é óbvio que essa desigualdade é verdadeira. Supondo verdadeira para n, temos para o caso $n+1$:

$(x+d)^{n+1} = (x+d)^n(x+d) \leqslant (x^n + A_n\ .\ d)(x+d) = x^{n+1} + A_n\ .\ d\ .\ x + d\ .\ x^n + A_n\ .\ d^2 = x^{n+1} + (A_n\ .\ x + x^n + A_n\ .\ d).\ d < x^{n+1} + (A_n\ .\ x + x^n + A_n)\ .\ d$ (já que $0 < d < 1$). Tomando $A_{n+1} = A_n\ .\ x + x^n + A_n$, obtemos $(x+d)^{n+1} < x^{n+1} + A_{n+1}\ .\ d$.

Como $x \in X$, ou seja, $x \geq 0$ e $x^n < a$, tomamos d tal que $d < 1$ e $0 < d < \dfrac{a - x^n}{A_n}$. Teremos $x^n + A_n\ .\ d < a$ e, consequentemente, $(x+d)^n < a$, o que prova que X não possui elemento máximo.

B) O conjunto Y=$\{y$ reais tais que $y > 0$ e $y^n > a\}$ não possui elemento mínimo.

Demonstração:

Seja $y \in Y$. Escolhemos d, com $0 < d < y$, tal que $(y-d)^n > a$, isto é, $y - d \in Y$. Para tal, observemos que, sendo $0 < d < y$, temos $(y-d)^n = y^n \left(1 - \dfrac{d}{y}\right)^n \geq y^n(1 - n.\dfrac{d}{y}) = y^n - ny^{n-1}.d$, como resulta, com $r = -\dfrac{d}{y}$, da desigualdade de Bernoulli, que diz que $(1+r)^n \geq 1 + n.r$, quaisquer que sejam n natural e r real.

Se tomarmos $0 < d < \dfrac{y^n - a}{n.y^{n-1}}$ obteremos então $y^n - ny^{n-1}d > a$ e, portanto, $(y-d)^n > a$. Isto mostra que Y não possui elemento mínimo.

C) Se $x \in X$ e $y \in Y$ então $x < y$.

Demonstração:

De fato temos $x^n < a < y^n$, e como x e y são positivos, concluímos que $x < y$ (O caso $x = 0$ implica $x < y$, obviamente).

Deduzimos dos fatos A, B e C que o número $b = supX$ satisfaz a condição $b^n = a$. Com efeito, se fosse $b^n < a$, então b pertenceria ao conjunto X, do qual é supremo. Logo, b seria o elemento máximo de X, o que contradiz o fato A. Também não pode ser $b^n > a$ porque então $b \in Y$ e como, pelo fato B, Y não possui elemento mínimo, haveria um $c \in Y$ com $c < b$. Pelo fato C teríamos $x < c < b$ para todo $x \in X$ e então c seria uma cota superior de X menor do que $b = supX$, outra contradição. Logo, tem que ser $b^n = a$.

Vamos agora demonstrar a desigualdade de Bernoulli ($(1+r)^n \geq 1 + n.r$, quaisquer que sejam n natural e r real), que foi usada na demonstração acima.

Demonstração (pelo método de indução finita):

Para $n=1$ é obvio que a desigualdade é verdadeira.

Supondo verdadeira para n, teremos, para $n+1$:

$(1+r)^{n+1} = (1+r)^n(1+r) \geq (1+n.r)(1+r) = 1+(n+1)r+n.r^2 \geq 1+(n+1)r$, pois $n.r^2$ não pode ser negativo. Logo, $(1+r)^{n+1} \geq 1+(n+1)r$ e, assim, fica provada, por indução, a desigualdade de Bernoulli.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Minha expectativa quanto à aplicação deste trabalho para turmas da 3ª série do Ensino Médio relaciona-se com o tipo de escola em que será ministrada a aula sobre potência de expoente irracional.

No caso de boas escolas particulares, cuja maioria dos alunos traz uma base matemática sólida, acredito que não haverá dificuldade na compreensão dos conteúdos ensinados.

Quanto às escolas públicas, devemos considerar a grande diferença de qualidade que existe na rede. Em algumas delas, a situação pode até mesmo aproximar-se da verificada nos colégios citados anteriormente. Em compensação, na grande maioria da rede pública, creio que poucos alunos serão capazes de apreender os conceitos contidos na aula, visto que há necessidade de pré-requisitos que não foram abordados em séries anteriores.

7 REFERÊNCIAS

[1] ÁVILA, G. S. *Introdução à análise matemática.* 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.

[2] BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. *Matemática.* 1. ed. São Paulo: Moderna, 2004.

[3] DANTE, L. R. *Matemática Contexto e Aplicações.* 5. ed. São Paulo: Ática, 2011.

[4] FIGUEIREDO, D. G. *Analise I.* 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

[5] IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. *Matemática Ciência e Aplicações.* 5. ed. São Paulo: Atual, 2010.

[6] IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R. *Matemática.* São Paulo: Atual, 1998.

[7] IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de Matemática Elementar.* 9. ed. São Paulo: Atual, 2004.

[8] LIMA, E. L. *Análise Real.* 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[9] MACHADO, A. S. *Matemática Temas e Metas.* São Paulo: Atual, 1998.