UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE - UFAC
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - CCET
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

FABIANE DA ROCHA FARIAS

INVERSAS GENERALIZADAS DE MATRIZES E SUAS APLICAÇÕES EM RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

RIO BRANCO-AC
2017

FABIANE DA ROCHA FARIAS

INVERSAS GENERALIZADAS DE MATRIZES E SUAS APLICAÇÕES EM RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Trabalho apresentado ao Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Acre, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edcarlos Miranda de Souza

Co-orientador: Prof. Msc. Henrique Hiroto Yokoyama

RIO BRANCO - AC

2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAC

F224i Farias, Fabiane da Rocha, 1987 -
Inversas generalizadas de matrizes e suas aplicações em resoluções de sistemas lineares / Fabiane da Rocha Farias. – 2017.
46 f.; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Acre, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Rio Branco, 2017.
Inclui referências bibliográficas.
Orientador: Prof. Dr. Edcarlos Miranda de Souza.
Coorientador: Prof. Me. Henrique Hiroto Yokoyama.

1. Matemática – Dissertação. 2. Sistemas lineares. 3. Matrizes. I. Título.

CDD: 510

Bibliotecária: Alanna Santos Figueiredo – CRB-11/1003.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE – UFAC
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas - CCET
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Inversas generalizadas de matrizes e suas aplicações em resoluções de sistemas lineares

Autor (a): Fabiane da Rocha Farias
Orientador (a): Prof. Dr. Edcarlos Miranda de Souza

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Acre – PROFMAT/UFAC, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre.

Examinado (a) por:

Edcarlos Miranda de Souza.
Prof. Dr. Edcarlos Miranda de Souza
Orientador e Presidente da Banca – PROFMAT/UFAC

Prof. Dr. Sérgio Brazil Júnior
Membro Interno – PROFMAT/UFAC

Henrique Hiroto Yokoyama
Prof. Me. Henrique Hiroto Yokoyama
Membro - CAP/UFAC

Marcio dos Santos Soares
Prof. Me. Márcio dos Santos Soares
Membro Externo - IMCF

Rio Branco, Acre
Agosto de 2017

À minha família, pelo enorme carinho e incentivo ao meu trabalho.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Edcarlos Miranda de Souza, por todo apoio, dedicação e pelo enorme comprometimento que teve desde o início deste trabalho. Pela paciência interminável, pela serenidade inconfundível, pelo incentivo constante, pelo carinho com que sempre me tratou, por toda ajuda intelectual prestada em todas as horas, pela disponibilidade sempre existente, pela compreensão com meus momentos difíceis e pela enorme e indispensável colaboração para que este trabalho se tornasse realidade.

Ao meu co-orientador Prof. Msc. Henrique Hiroto Yokoyama por acreditar nesse projeto e contribuir intelectualmente para que fosse realizado.

Aos professores do PROFMAT Msc. Lidermir de Souza Arruda, Dr. Sérgio Brazil Junior, Dr. José Ivan da Silva Ramos, Dr. José Ronaldo Melo e Msc. Geirto de Souza, sempre muito comprometidos com nossa formação e essenciais para que eu chegasse até aqui.

Aos companheiros de mestrado pelo enorme companheirismo, ajuda, paciência, colaboração, incentivo e carinho. Em especial aos amigos Francisco da Silva Gonçalves, Katson Roger Teixeira da Luz, Uelder Araújo Teixeira, Gilmerez Marinho da Silva, Jéssica Nunes de Souza, Oziel dos Santos Silva, Francisco Gilvan Martins do Nascimento e Regislane da Conceição Xavier dos Reis pela amizade e apoio durante todo o curso.

À minha mãe, Maria de Lourdes da Rocha Farias e ao meu esposo Matheus Pereira Lima, pelo imenso carinho, apoio e compreensão dedicados a mim não só durante o período de mestrado, mas ao longo da vida. E principalmente pela paciência e palavras de incentivo durante os anos de mestrado.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

À todos que colaboraram para a conclusão deste trabalho, em especial à minha família, com gestos de incentivo, sorrisos, carinho, amizade, paciência, apoio técnico e emocional. Todos foram de grande importância para a conclusão desta dissertação.

Acima de tudo à Deus, por iluminar meus caminhos sempre, me dando forças para não desistir e permitir que eu conquistasse meu objetivo.

RESUMO

FARIAS, Fabiane da Rocha. **Introdução à álgebra das matrizes**. 2017. Dissertação (Mestrado). PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática. Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas - CCET, Universidade Federal do Acre - UFAC. Rio Branco, 2017.

O presente trabalho busca contribuir para o estudo da álgebra das matrizes enfatizando desde sua definição e operações básicas, até o estudo das matrizes inversas generalizadas. Apresenta-se uma análise dos principais fundamentos de matrizes, suas operações estudadas no Ensino Médio e suas operações mais avançadas, desconhecidas por este público estudantil. Detalham-se alguns aspectos do comportamento das matrizes no campo vetorial e sua contribuição para o estudo dos sistemas lineares. São apresentadas as definições de matrizes inversas generalizadas, assim como suas variações, mostrando que estas são de grande valia na busca por soluções gerais de sistemas lineares consistentes e indeterminados e soluções aproximadas de sistemas lineares inconsistentes. Utiliza-se o software geogebra para o cálculo das inversas generalizadas, apresentando sua utilização através de vídeo.

Palavras-Chave: Matrizes; Inversas generalizadas; Sistemas lineares; Soluções aproximadas.

ABSTRACT

The present work seeks to contribute to the study of matrix algebra emphasizing from its definition and basic operations, to the study of generalized inverse matrices. It presents an analysis of the main fundamentals of matrices, its operations studied in High School and its more advanced operations, unknown by this student public. Some aspects of matrix behavior in the vector field and its contribution to the study of linear systems are described. The definitions of generalized inverse matrices, as well as their variations, are presented, showing that they are of great value in the search for general solutions of linear systems, consistent and indeterminate and approximate solutions of inconsistent linear systems. Geogebra software is used for the calculation of generalized inverses, presenting their use through video.

Key-words: Matrices; Generalized inverses; Linear systems; Approximate solutions.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como principal objetivo estabelecer uma solução geral para sistemas lineares consistentes e indeterminados e uma melhor solução aproximada, com critério definido para o termo “melhor”, para sistemas lineares inconsistentes utilizando matrizes inversas generalizadas.

Matrizes são maneiras de descrever situações reais utilizando tabelas. Tais tabelas não se apresentam de maneira aleatória, sua disposição de linhas e colunas deve ser respeitada, pois cada uma delas representa uma informação específica. Assim como nas situações do cotidiano, as matrizes também podem sofrer alterações através de operações realizadas entre elas e com números reais, também definidos como escalares.

Um exemplo claro das matrizes representando situações reais são os sistemas lineares, uma vez que estes são muito utilizados para responder perguntas relacionadas à incógnitas procuradas constantemente em problemas. Um sistema linear pode ser escrito na forma matricial, o que se constitui em um dos métodos de resolução do mesmo.

Um sistema linear pode ser considerado consistente e determinado, quando apresenta uma única solução, consistente e indeterminado, quando apresenta infinitas soluções e inconsistente, quando não possui solução. Este estudo visa, através das matrizes, mostrar uma forma de se obter a solução geral de um sistema consistente e determinado e a melhor solução aproximada para um sistema inconsistente.

Neste trabalho buscou-se trazer a álgebra das matrizes com uma linguagem mais clara e acessível. É uma leitura para todos os públicos e que traz um assunto desconhecido para muitos estudantes da graduação em Matemática.

No capítulo 2 será abordado os principais fundamentos das matrizes, suas definições, operações, nomenclaturas e exemplos para facilitar a compreensão do leitor. Destacando-se ainda, neste capítulo, o comportamento de uma matriz como um vetor, facilitando assim o cálculo do seu módulo ou norma.

No capítulo 3 será feito uma instrução de conceitos e exemplos de matrizes inversas generalizadas. Será priorizado o estudo da inversas generalizadas Condicional, de Mínimos Quadrados e de Moore-Penrose. Para cada uma das inversas será realizado um detalhamento da sua resolução através de passos que são claramente descritos ao leitor. Além disso, para cada inversa generalizada será apresentado um vídeo ensinando como encontra-la utilizando o software Geogebra, através de um hiperlink que direciona o leitor ao vídeo criado e postado pela autora no site Youtube.

Por fim, no capítulo 4 o leitor será apresentado aos sistemas lineares. Neste capítulo serão abordados os tipos de sistemas lineares a e importância das matrizes no cálculo de suas respectivas soluções. O trabalho não se aprofunda na solução de sistemas lineares consistentes e determinados, pois esse cálculo já é conhecido pelos estudantes desde a educação básica. Aqui, a prioridade será o método para encontrar uma solução geral para sistemas consistentes e indeterminados usando as matrizes generalizadas e encontrar a melhor solução aproximada para sistemas lineares inconsistentes usando as matrizes generalizadas de Mooore-Penrose. Um sistema inconsistente pode apresentar muitas soluções aproximadas, mas aqui mostraremos como medir essa aproximação e a forma de saber qual delas pode ser definida como a mais próxima de todas.

2. FUNDAMENTOS DE MATRIZES

2.1 Conceitos

2.1.1 Definição e representação de uma matriz

Em determinadas circunstâncias, para descrever com clareza uma certa situação, é necessário expressá-la através de uma tabela contendo elementos numéricos organizados em linhas e colunas. À essa tabela, atribuímos, na Matemática, o nome de **Matriz**.

A disposição das linhas de uma matriz é dada na horizontal, enquanto as colunas aparecem na vertical.

Neste trabalho, em geral, será adotado letras maiúsculas em negrito para denotar uma matriz, com exceção da matriz nula, que será indicada por "**0**" e das matrizes vetores, que serão representadas por letras minúsculas em negrito. Suas entradas pertencerão ao conjunto dos números reais e serão representados pela mesma letra escolhida para denotar a matriz, porém, neste caso, em letra minúscula e delimitados por colchetes.

Exemplos:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} ; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1{,}2 & -5 & 1 \end{bmatrix} ; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0{,}1 & -7 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 11 & 4 \end{bmatrix}.$$

A dimensão ou ordem de uma matriz pode ser definida como um par ordenado (m,n), no qual **m** representa a quantidade de linhas e **n** representa a quantidade de colunas. Nos exemplos anteriores temos:

- Matriz **F** de ordem 3x2 (possui três linhas e duas colunas).

- Matriz **A** de ordem 1x3 (possui uma linha e três colunas).

- Matriz **B** de ordem 3x3 (possui três linhas e três colunas).

De uma forma geral, a representação de uma matriz **A** = $[a_{ij}]_{mxn}$ é dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Seus elementos são definidos por $[a_{ij}]$, onde $i = 1, 2, ..., m$ é o índice que representa linha e $j = 1, 2, ..., n$ é o índice que representa coluna. A notação **A =** $[a_{ij}]_{mxn}$ representa uma matriz por meio de um elemento típico.

2.1.2 Tipos de Matrizes

• **Matriz quadrada:** dizemos que uma matriz **A =** $[a_{ij}]_{mxn}$ é quadrada quando $m = n$, ou seja, o número de linhas é igual ao número de colunas. Neste trabalho denotaremos uma matriz **A** quadrada, de ordem n, por $\mathbf{A_n}$.

Os elementos a_{ij}, com $i = j$, de uma matriz **A**, quadrada, formam a **diagonal principal** desta matriz.

Os elementos a_{ij}, com $i + j = n + 1$, de uma matriz **A**, quadrada, formam a **diagonal secundária** desta matriz.

Exemplos:

$$\mathbf{F_2} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} ; \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

• **Matriz retangular:** dizemos que uma matriz **A =** $[a_{ij}]_{mxn}$ é retangular quando $m \neq n$, ou seja, o número de linhas é diferente do número de colunas.

Exemplos:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{\mathbf{2x3}} ; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ -5 & 9 & 8 \end{bmatrix}_{\mathbf{4x3}}$$

• **Matriz triangular superior:** dizemos que uma matriz $\mathbf{A_n} = [a_{ij}]$ é triangular superior quando $a_{ij} = 0$, para todo $i > j$, ou seja, todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

Exemplos:

$$\mathbf{F_2} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix};\ \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

• **Matriz triangular inferior:** dizemos que uma matriz $\mathbf{A_n} = [a_{ij}]$ é triangular inferior quando $a_{ij} = 0$, para todo $i < j$, ou seja, todos os elementos acima da diagonal principal são nulos.

Exemplos:

$$\mathbf{F_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix};\ \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

• **Matriz diagonal:** dizemos que uma matriz $\mathbf{A_n} = [a_{ij}]$ é diagonal quando todos os elementos abaixo e acima da diagonal principal são nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$.

Exemplos:

$$\mathbf{F_2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};\ \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

• **Matriz nula:** dizemos que uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{mxn}$ é nula quando temos $a_{ij} = 0$, para todo i e para todo j, ou seja, todos os elementos da matriz são iguais a zero. Neste trabalho, denotaremos a matriz nula por $\mathbf{0} = [a_{ij}]_{mxn}$.

Exemplos:

$$\mathbf{0_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{4x3}}$$

• **Matriz identidade:** definimos por matriz identidade uma matriz $\mathbf{A_n} = [a_{ij}]$, com $a_{ij}=1$, para todo $i = j$ e com com $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$ ou seja, todos os elementos que pertencem à diagonal principal são iguais à 1 e àqueles que não pertencem à diagonal principal são iguais à zero. Esta é uma matriz muito importante, como veremos adiante. Neste trabalho, denotaremos a matriz identidade por $\mathbf{I_n}$.

Exemplos:

$$\mathbf{I_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \ \mathbf{I_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• **Matriz oposta:** uma matriz **A** = $[a_{ij}]_{mxn}$ terá sua oposta definida neste trabalho por **-A** = $[-a_{ij}]_{mxn}$. Podemos afirmar ainda que a matriz oposta de **A** pode ser obtida através da troca de sinal dos elementos da matriz **A**, sem alteração de posição.

Exemplos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{2x3} ; \ \mathbf{-A} = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -1 \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2x3}$$

• **Matriz transposta:** uma matriz **A** = $[a_{ij}]_{mxn}$ terá sua transposta definida neste trabalho por $\mathbf{A^t}$ = $[a_{ji}]_{nxm}$. Podemos afirmar ainda que a matriz transposta pode ser obtida através da troca de linhas por colunas de uma matriz **A** dada.

Exemplos:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3x2} ; \ \mathbf{F^t} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{2x3} ; \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{1x3} ; \ \mathbf{A^t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{3x1}$$

• **Matriz simétrica:** quando uma matriz $\mathbf{A_n}$ = $[a_{ij}]$ apresenta $a_{ij} = a_{ji}$, para todo *i* e para todo *j*, então dizemos que $\mathbf{A_n}$ é uma matriz simétrica.

Exemplos:

$$\mathbf{F_2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} ; \ \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Observação: Sendo $\mathbf{A_n}$ uma matriz simétrica, vale que $\mathbf{(A_n)^t = A_n}$.

• **Matriz anti-simétrica:** quando uma matriz $\mathbf{A_n}$ = $[a_{ij}]$ apresenta $a_{ij} = -a_{ji}$, para todo *i* e para todo *j*, então dizemos que $\mathbf{A_n}$ é uma matriz anti-simétrica.

Exemplos:

$$\mathbf{F_2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \textbf{;}\ \mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -4 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

- **Matriz bloco diagonal:** será uma matriz cujos elementos matriciais também são matrizes, na qual as únicas entradas não nulas estão em uma sequência de submatrizes quadradas arrumadas em torno da diagonal principal.

Exemplo:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{C} \end{bmatrix},$$

onde **A** e **C** são matrizes quadradas de ordem 2 e **B** uma matriz quadrada de ordem 3.

Logo, podemos entender a matriz **F** na forma abaixo:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{b}_{11} & \mathrm{b}_{12} & \mathrm{b}_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{b}_{21} & \mathrm{b}_{22} & \mathrm{b}_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{b}_{31} & \mathrm{b}_{32} & \mathrm{b}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{c}_{11} & \mathrm{c}_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{c}_{21} & \mathrm{c}_{22} \end{bmatrix}_{7\mathrm{x}7}$$

2.2 Operações básicas com matrizes

2.2.1 Adição de matrizes

Definição: Dadas duas matrizes **B** = $[b_{ij}]_{mxn}$ e **C** = $[c_{ij}]_{mxn}$, a soma entre elas pode ser definida pela matriz **D** = $[d_{ij}]_{mxn}$, tal que $d_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, para todo *i* e para todo *j*. A soma entre duas matrizes só poderá ser efetuada caso ambas possuam a mesma quantidade de linhas e colunas.

Exemplo: Sejam **B**= $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{3\mathrm{x}2}$ e **C** = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}_{3x2}$

Logo, **B** + **C** = **D** = $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3x2}$

Podemos observar que, de acordo com a definição, a adição de matrizes possui as mesmas propriedades que a operação de adição no conjunto dos números reais:

- **Comutativa: B** + **C** = **C** + **B;**

- **Associativa: B** + (**C** + **D**) = (**B** + **C**) + **D;**

- **Existência de elemento neutro: B** + **0** = **B;**

- **Existência do inverso aditivo**: Para toda matriz **A** = $[a_{ij}]_{mxn}$, ∃ a matriz **-A** $[-a_{ij}]_{mxn}$, tal que **A + (-A) = -A + A = 0**.

2.2.2 Subtração de matrizes

Definição: Dadas duas matrizes **B** = $[b_{ij}]_{mxn}$ e **C** = $[c_{ij}]_{mxn}$, a diferença entre elas pode ser definida pela matriz **D** = $[d_{ij}]_{mxn}$, tal que $d_{ij} = b_{ij} - c_{ij}$, para todo *i* e para todo *j*. A subtração entre duas matrizes só poderá ser efetuada caso ambas possuam a mesma quantidade de linhas e colunas.

A diferença **D = B - C** entre as matrizes **B** e **C** é dada por:

B - C = D

D = $[d_{ij}] = [b_{ij} - c_{ij}]$

$\neq$

C - B = D

D = $[d_{ij}] = [c_{ij} - b_{ij}]$.

Exemplo: Sejam **B** = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{3x2}$ e **C** = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}_{3x2}$

Logo, **B** - **C** = **D** = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}_{3x2}$ e **C** - **B** = **D** = $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 3 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}_{3x2}$.

2.2.3 Multiplicação de uma matriz por um escalar

Definição: Dada uma matriz **B** = $\left[b_{ij}\right]_{mxn}$ e um escalar λ ∈ IR, o produto **λB** = $\left[\lambda b_{ij}\right]_{mxn}$ = $\left[b_{ij}\lambda\right]_{mxn}$, para todo *i* e para todo *j*, ou seja, o produto de um escalar por uma matriz é obtido multiplicando-se cada entrada da matriz pelo escalar.

Exemplo: Considere a matriz **B** = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{2x2}$ e λ = -2, então **λB** = **Bλ** = $\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{2x2}$.

2.2.4 Multiplicação entre matrizes

Definição: Sejam **B** = $\left[b_{ij}\right]_{mxn}$ e **C** = $\left[c_{ij}\right]_{nxq}$ matrizes, definimos o produto de **B** por **C** como sendo a matriz **P =** $[p_{ir}]_{mxq}$, tal que os elementos da matriz **P** são da forma:

$$[\mathbf{p_{ir}}] = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{b_{ij}\, c_{jr}}$$

que é igual à soma dos produtos dos elementos da *i*-ésima linha de **B** pelos elementos da *r*-ésima coluna de **C**. Desta forma, multiplicamos todas as linhas de **B** por todas as colunas de **C**. Sendo assim, o produto **BC = P** só será possível caso o número de colunas da primeira (**B**) for igual ao número de linhas da segunda (**C**).

Exemplo:

B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{3x2}$ **.** **C** = $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}_{2x2}$ = **BC** = $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & -1 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}_{3x2}$, onde:

$bc_{11} = b_{11}\, c_{11} + b_{12}\, c_{21} = 1 \,.\, 4 + 2 \,.\, 0 = 4$

$bc_{12} = b_{11}\, c_{12} + b_{12}\, c_{22} = 1 \,.\, 1 + 2 \,.\, (-2) = - 3$

$bc_{21} = b_{21}\, c_{11} + b_{22}\, c_{21} = - 1 \,.\, 4 + 0 \,.\, 0 = - 4$

$bc_{22} = b_{21}\, c_{12} + b_{22}\, c_{22} = - 1 \,.\, 1 + 0 \,.\, (- 2) = - 1$

$bc_{31} = b_{31}\, c_{11} + b_{32}\, c_{21} = 3 \,.\, 4 + (- 2) \,.\, 0 = 12$

$bc_{32} = b_{31}\, c_{12} + b_{32}\, c_{22} = 3 \,.\, 1 + (- 2) \,.\, (- 2) = 7$

A matriz identidade $\mathbf{I_n}$ é o elemento neutro da multiplicação de matrizes. Isto quer dizer que, se **B** é de mesma ordem que $\mathbf{I_n}$, então **BI** = **IB** = **B**.

Observe que pode existir ainda **BC = 0**, mesmo sem que **A = 0** ou **B = 0**.

Desde que sejam possíveis as operações, são válidas as seguintes propriedades:

i. **AI = IA = A** (pela definição de matriz identidade)
ii. **A(B + C) = AB + AC** (distributividade à esquerda da multiplicação, em relação à soma)
iii. **(A + B)C = AC + BC** (distributividade à direita da multiplicação, em relação à soma)
iv. **(AB)C = A(BC)** (associatividade)
v. **0 . A = 0** e **A . 0 = 0**

2.2.5 Matriz inversa

Definição: Seja **A** uma matriz quadrada, definimos como sendo a inversa de **A,** a matriz $\mathbf{A^{-1}}$ (se existir), tal que:

$$\mathbf{A \,.\, A^{-1} = A^{-1} \,.\, A = I}$$

Se a matriz **A** possui inversa, então essa inversa é única e dizemos que **A** é uma matriz inversível, invertível ou não singular. Caso contrário, dizemos que a matriz **A** é singular, não inversível ou não invertível.

Exemplo: A matriz $\mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ é inversível, com

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Pois, } \mathbf{A \,.\, A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Algumas propriedades das matrizes inversas, cujas demonstrações são facilmente encontradas em Cantão (2012):

- Se **A** é inversível, então $\mathbf{A^{-1}}$ também é e $(A^{-1})^{-1} = A$

- Se **A** e **B** são inversíveis, então **AB** também é e $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

- Se **A** é inversível, então $\mathbf{A^t}$ também é e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

2.2.6 Potência de matrizes quadradas

Definição: Tomando uma matriz $\mathbf{F_n}$ e *h* como um número inteiro positivo, a *h*-ésima potência de $\mathbf{F_n}$ é definida por:

$$\mathbf{F^h} = \underbrace{\mathbf{F \,.\, F \,.\, F \,.\, F \ldots F}}_{\textbf{h vezes}}, \text{ sendo } \mathbf{F^0} = \mathbf{I_n}.$$

Exemplo: Seja $\mathbf{F_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Logo, $\mathbf{(F_2)^1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{(F_2)^2} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$.

A seguir, mostraremos três definições importantes de matrizes quadradas relacionadas à sua potência:

i) **Idempotente:** Uma matriz diz-se idempotente quando multiplicada por si mesma, resulta nela própria. Ou seja, $\mathbf{F^2 = F}$.

Exemplo: A matriz $\mathbf{F_2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é idempotente, pois $\mathbf{F_2 \,.\, F_2 = F_2}$.

Observação: Se uma matriz $\mathbf{F_n}$ é idempotente, $\mathbf{I_n - F_n}$ também será.

ii) Nilpotente: Uma matriz diz-se nilpotente quando existir um x ∈ IN, tal que $\mathbf{F_n^x = 0_n}$.

Teorema 1: Se uma matriz $\mathbf{F_n}$ é nilpotente de classe 2[1], então $\mathbf{I_n - F_n}$ é inversível e $(\mathbf{I_n - F_n})^{-1} = \mathbf{I_n + F_n}$

Demonstração: $(\mathbf{I_n - F_n})(\mathbf{I_n + F_n}) = \mathbf{I_n^2 + F_n - F_n - F_n^2 = I_n^2 - F_n^2 = I_n - 0_n = I_n}$.

Exemplo: A matriz $\mathbf{F_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ é nilpotente, pois $\mathbf{F_3^2 = 0_3}$.

iii)Unipotente: Definimos uma matriz quadrada como sendo unipotente, se $\mathbf{F^2 = I_n}$.

Exemplo: A matriz $\mathbf{F_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ é unipotente, pois $\mathbf{F_2 \,.\, F_2 = I_2}$.

2.2.7 Partição de Matrizes

Definição: Uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{mxn}$ pode ser particionada em blocos e se isso ocorre, cada bloco será constituído por uma submatriz resultante da "divisão" da matriz inicial em linhas e colunas consecutivas. Esta divisão pode ser indicada por linhas posicionadas horizontal e verticalmente entre cada submatriz.

Exemplo: Consideremos a matriz **A**, de ordem 4x5, e suas respectivas partições:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 9 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 8 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 7 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Logo, as submatrizes de **A** serão:

[1] Dizemos que $\mathbf{F_n}$ é nilponte de classe 2, se $\mathbf{F_n^2 = 0}$.

A11 = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **; A12** = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$ **; A21** = $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ **; A22** = $\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 8 & 6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$**.**

2.2.8 Formas escalonadas

Definição: Uma matriz **A**, de ordem mxn, apresenta-se na forma escalonada quando obedece as seguintes propriedades:

i) O primeiro elemento da primeira coluna só poderá ser *zero* ou *um*.

ii) O primeiro elemento não nulo de cada linha será considerado um pivô e este deverá se situar à direita do pivô da linha que se situa acima desta.

iii)Uma coluna que possui um pivô, terá todos os seus demais elementos nulos.

Exemplo: A matriz **A** está na sua forma escalonada e **F** apresenta-se na sua forma escalonada canônica.

$$\mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3x4} .$$

Ao número de pivôs existentes em uma determinada matriz, atribuímos o nome de **característica da matriz.**

Abaixo definimos três operações elementares que podem ser realizadas para escalonar uma matriz:

- Permutar duas linhas ou duas colunas.

- Multiplicar ou dividir todos os elementos de uma linha (ou de uma coluna) por um número real diferente de zero.

- Somar a uma linha (ou a uma coluna) outra linha (ou coluna) paralela.

2.2.9 Posto ou rank de uma matriz

Quando uma matriz **A** está escrita na sua forma escalonada, o número de linhas ou colunas não-nulas dessa matriz receberá o nome de **posto** ou **rank**, que será denotado por p(**A**).

O valor máximo do posto de uma matriz é menor que os números correspondentes ao número de linhas e colunas, ou seja, se uma matriz tem ordem 3x5, o valor máximo que pode alcançar o posto desta matriz é 3 (pois 3 = mínimo {3, 5}).

A única matriz que tem posto 0 é a matriz nula, qualquer outra matriz terá posto maior ou igual a 1.

Exemplo: A matriz $\mathbf{A_3}$ tem p(**A**) = 2.

$$\mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.10 Cálculo da matriz inversa

Uma forma de se calcular a inversa de uma matriz, é utilizar o escalonamento de matrizes, de forma que se consiga justapor à matriz **A** uma matriz identidade de mesma ordem. Opera-se simultaneamente sobre as linhas das duas matrizes, até que no lugar da matriz **A** apareça a matriz identidade. Nesse mesmo momento, observa-se que na posição inicial da matriz identidade aparece $\mathbf{A^{-1}}$, a matriz inversa de **A**. Ou seja,

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] \sim \ldots \sim [\mathbf{I} \mid \mathbf{A^{-1}}]$$

Exemplo: Seja $\mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Para encontrar $\mathbf{A^{-1}}$, faremos:

- $L_2 = L_1 + (-2)\, L_2$:

  $$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

- $L_1 = L_2 + (-1)\, L_1$:

  $$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

- $L_1 = \left(-\frac{1}{2}\right) L_1$:

  $$\left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Então, $\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim ... \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$.

Logo, $\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

3- INVERSAS GENERALIZADAS

A definição de matriz inversa generalizada ou condicional pode ser vista como mais geral e possui aplicação principal na resolução de sistemas lineares consistentes e indeterminados e inconsistentes, que veremos mais adiante.

Definiremos a seguir as inversas generalizada ou condicional, generalizada de mínimos quadrados e generalizada de Moore-Penrose.

3.1 Inversa Generalizada ou Condicional

Definição: Uma inversa generalizada ou condicional de uma matriz **A**, de ordem m x n**,** é qualquer matriz $\mathbf{A}^-$, de ordem n x m, que satisfaz a condição:

$$\boxed{\mathbf{A} \,.\, \mathbf{A}^- \,.\, \mathbf{A} = \mathbf{A}}$$

Uma inversa generalizada não é única, exceto quando **A** é uma matriz não singular, neste caso $\mathbf{A}^- = \mathbf{A}^{-1}$.

Toda matriz, quadrada ou retangular, possui uma inversa condicional, inclusive as matrizes linha e coluna.

Exemplo: Seja a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{3x2}$.

É fácil verificar que a matriz $\mathbf{A}^- = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}_{2x3}$, é uma inversa generalizada de A, pois $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{A}^- \,.\, \mathbf{A} = \mathbf{A}$. Mas para chegarmos nesse resultado, podemos descrever o processo através de um Teorema e de um algoritmo de 5 passos, que será relatado a seguir.

3.1.1 Cálculo da inversa generalizada ou condicional

Para encontrar a inversa generalizada de uma matriz **A** de ordem mxn, utilizaremos o Teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em Rencher (2008).

> **Teorema 2:** Suponha que **A** é de ordem mxn e de posto *r* e que **A** é particionada como:
>
> $$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} A11 & A12 \\ \hline A21 & A22 \end{array}\right]_{mxn}$$
>
> Onde A_{11} é $r \; x \; r$ de posto *r*. Então uma inversa generalizada de **A** é dada por:
>
> $$\mathbf{A}^{-} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]_{n \, x \, m}$$
>
> Onde **0** são as matrizes nulas e tem dimensões apropriadas para que $\mathbf{A}^{-}$ seja nxm.

O Teorema 2 pode ser melhor explicado através do Algoritmo de Searle para encontrar uma inversa condicional $\mathbf{A}^{-}$, para qualquer matriz **A** de ordem m x n e de posto *r*.

> **ALGORITMO DE SEARLE**
>
> 1. Encontre qualquer submatriz não singular $\mathbf{C}_r$. Não é necessário que os elementos de **C** ocupem posições (linhas e colunas) adjacentes em **A**.
> 2. Encontre $\mathbf{C}^{-1}$ e sua transposta $(\mathbf{C}^{-1})^t$.
> 3. Substitua em **A** os elemento de **C** pelos elementos de $(\mathbf{C}^{-1})^t$,
> 4. Substitua todos os outros elementos de **A** por zeros.
> 5. Transponha a matriz resultante.

Mostraremos agora como encontramos a matriz $\mathbf{A}^{-}$ do exemplo do item 3.1 utilizando o algoritmo de Searle.

$$\text{Seja } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{3x2}$$

1. Primeiro calculamos o posto da matriz **A** e obtemos p(**A**) = 2. Em seguida, escolhemos a matriz $\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
2. Encontramos, agora, $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$. Agora, temos $(\mathbf{C}^{-1})^t = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.
3. Substituindo em **A** todas as entradas de **C** pelas de $(\mathbf{C}^{-1})^t$, temos: $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Substituindo todas as outras entradas de **A** por zeros, temos: $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Transpondo a matriz resultante do item 4, temos então **A**$^-$ = $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}_{2x3}$, que é uma matriz generalizada de **A**.

Precisamos destacar que escolhendo outras matrizes **C** e usando o algoritmo, podemos encontrar outras inversas generalizadas de **A**.

Podemos, também, utilizar o programa Geogebra para cálculo da inversa generalizada de uma matriz, como pode ser visto no vídeo descrito no link: https://www.youtube.com/watch?v=HxGpX1Z-_yQ.

3.2 Inversa Generalizada de Mínimos quadrados ($\mathbf{A}^{mq}$)

Definição: Dada uma matriz **A,** de ordem mxn, toda matriz da forma $\mathbf{A}^{mq}$, de ordem nxm, é denominada inversa generalizada de mínimos quadrados de **A** quando satisfaz as seguintes condições:

i) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{mq} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$

ii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{mq}$ é uma matriz simétrica, ou seja, $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{mq})^t = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{mq}$

Exemplo: Seja a matriz **A** = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2x3}$.

É fácil verificar que a matriz $\mathbf{A}^{mq}$ = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}_{3x2}$ é uma inversa de mínimos quadrados de **A**, pois satisfaz as condições i e ii.

Mas para chegarmos nesse resultado, podemos descrever o processo através do Teorema 3, citado a seguir.

Teorema 3: Toda matriz do tipo $\mathbf{A}^{mq} = (\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A})^- \cdot \mathbf{A}^t$ é uma inversa de mínimos quadrados de **A**, para qualquer escolha da inversa condicional $(\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A})^-$.

3.2.1 Cálculo da inversa generalizada de mínimos quadrados

Para encontrar a inversa de mínimos quadrados de uma matriz **A**, utilizamos o Teorema 3, citado no item anterior, e o algoritmo de Searle.

Usando a matriz **A** = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2x3}$, o cálculo de $\mathbf{A^{mq}}$ será feito obedecendo os passos abaixo:

1. Primeiramente encontramos $\mathbf{A^t}$ = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Em seguida, fazemos $\mathbf{A^t . A}$ = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Nos próximos passos, nosso objetivo será encontrar ($\mathbf{A^t . A}$)$^-$. Para tanto, utilizaremos o algoritmo de Searle.

3. Calculamos o posto de $\mathbf{A^t . A}$ = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, obtendo p($\mathbf{A^t . A}$) = 2.

4. Em seguida, escolhemos a matriz $\mathbf{C_2}$ = $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **.**

5. Encontramos agora $\mathbf{C^{-1}}$ = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$. Agora, temos $\mathbf{(C^{-1})^t}$ = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

6. Substituindo em $\mathbf{A^t . A}$ as entradas de **C** pelas de $\mathbf{(C^{-1})^t}$, temos: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

7. Substituindo todas as outras entradas de $\mathbf{A^t . A}$ por zeros, temos: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

8. Transpondo a matriz resultante, temos ($\mathbf{A^t . A}$)$^-$ = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

9. Logo, uma inversa de mínimos quadrados de **A** é:

$$\mathbf{A^{mq}} = (\mathbf{A^t} \mathbin{.} \mathbf{A})^- \mathbin{.} \mathbf{A^t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \mathbin{.} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lembrando ainda que escolhendo outras matrizes **C** e usando o algoritmo de Searle e o Teorema 3, podemos encontrar outras inversas de mínimos quadrados de **A**.

Podemos, também, utilizar o programa Geogebra para cálculo da inversa de mínimos quadrados de uma matriz, como pode ser visto no vídeo descrito no link: https://www.youtube.com/watch?v=IVcaZdOPnhg&t=190s.

3.3 Inversa Generalizada de Moore-Penrose

Definição: Dada uma matriz **A,** de ordem mxn, uma inversa generalizada de Moore-Penrose de **A** será uma matriz $\mathbf{A}^+$, de ordem nxm, única, que satisfaz as seguintes condições:

i) $\mathbf{A} \mathbin{.} \mathbf{A}^+ \mathbin{.} \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

ii) $\mathbf{A}^+ \mathbin{.} \mathbf{A} \mathbin{.} \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$.

iii) $\mathbf{A} \mathbin{.} \mathbf{A}^+$ é uma matriz simétrica, ou seja, $(\mathbf{A} \mathbin{.} \mathbf{A}^+)^t = \mathbf{A} \mathbin{.} \mathbf{A}^+$.

iv) $\mathbf{A}^+ \mathbin{.} \mathbf{A}$ é uma matriz simétrica, ou seja, $(\mathbf{A}^+ \mathbin{.} \mathbf{A})^t = \mathbf{A}^+ \mathbin{.} \mathbf{A}$.

A inversa de Moore-Penrose, também conhecida como Pseudoinversa, é bastante útil em demonstrações matemáticas e nas resoluções aproximadas de um sistema inconsistente.

Exemplo: Seja a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4x3}$.

É fácil verificar que a matriz $\mathbf{A}^{+} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & -1/6 & -1/6 \\ -1/6 & -1/6 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}_{3x4}$ é a inversa generalizada de Moore-Penrose da matriz **A**, pois são válidas as condições i, ii, iii e iv acima estabelecidas.

Mas para chegarmos nesse resultado, podemos descrever o processo através do Teorema 4, citado a seguir, cuja demonstração pode ser vista em Luna **(**2008).

Teorema 4: Dada a matriz **A**, de ordem mxn, de posto p(**A**) = *r*, então existe uma, e somente uma matriz $\mathbf{A}^{+}$, de ordem nxm, que satisfaz as quatro condições de Moore-Penrose. $\mathbf{A}^{+}$ é dada por $\mathbf{A}^{+} = \mathbf{C}^{t} \cdot (\mathbf{B}^{t} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^{t})^{-1} \cdot \mathbf{B}^{t}$, onde **B** e **C** são matrizes de posto coluna e posto linha completos, respectivamente e são tais que **A = BC**.

3.3.1 Fatoração de Posto completo

Para encontrarmos $\mathbf{A}^{+}$, recorremos à fatoração de posto completo da matriz **A**. Fatorar uma matriz **A**, de ordem mxn e posto *r*, consiste em obter matrizes **B**, de ordem mxr, e **C**, de ordem rxn, de forma que **A = B . C**, com **B** representando o posto coluna completo e **C** o posto linha completo de **A**, ambas de posto *r*. Em geral, **B** e **C** não são únicas.

Para realizarmos a fatoração de posto completo de uma matriz, utilizaremos o algoritmo de Dwivedi (1975), que não é único, descrito a seguir:

1. Seja $A = [a_{ij}]_{mxn}$, de posto *r*, com $i = 1,...,p,...m$; $j = 1,...,q,...,n$. Fazemos a escolha de algum elemento $a_{pq} \neq 0$.

2. Em seguida, obtemos o produto $\mathbf{U_1 V_1}$, no qual:

- $\mathbf{U_1} = \frac{1}{a_{pq}} \cdot \begin{bmatrix} a_{1q} \\ a_{2q} \\ \vdots \\ a_{mq} \end{bmatrix}$

- $\mathbf{V_1} = [a_{p1} \quad a_{p2} \quad \cdots \quad a_{pn}]$

Fazemos, agora, $\mathbf{A_1} = \mathbf{A} - \mathbf{U_1V_1}$.

3. Se $\mathbf{A_1} = \mathbf{0}$, o processo está encerrado, então $\mathbf{B} = \mathbf{U_1}$ e $\mathbf{C} = \mathbf{V_1}$.

4. Se $\mathbf{A_1} \neq \mathbf{0}$, repetir o mesmo processo para $\mathbf{A_1}$, e assim sucessivamente, até obter $\mathbf{A_r}=\mathbf{0}$.

5. Ao final do processo, tem-se a matriz **B**, que é constituída pelas matrizes colunas **U**'s e a matriz **C** pelas matrizes linhas **V**'s, de onde temos que a fatoração pode ser representada por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U_1V_1} + \mathbf{U_2V_2} + \ldots + \mathbf{U_rV_r} = [\mathbf{U_1} \quad \ldots \quad \mathbf{U_r}]\begin{bmatrix}\mathbf{V_1}\\ \vdots \\ \mathbf{V_r}\end{bmatrix} = \mathbf{B} \,.\, \mathbf{C}$$

Exemplo:

Seja a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}_{4x3}$. Para encontrarmos sua fatoração de posto completo, utilizaremos o algoritmo descrito acima:

1. Usando o método de Gauss, sabemos que p(**A**) = 2. Logo, encontraremos **B**, de ordem 4x2, e **C**, de ordem 2x3. Escolhemos então o elemento $a_{21} = 1$.

2. Em seguida, temos que:

- $\mathbf{U_1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$

- $\mathbf{V_1} = [1 \quad 1 \quad 0]$

- $\mathbf{U_1V_1} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

3. Fazendo $\mathbf{A_1} = \mathbf{A} - \mathbf{U_1V_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Como $\mathbf{A_1} \neq \mathbf{0}$, repetiremos o mesmo processo para $\mathbf{A_1}$.

4. Escolhemos o elemento $a_{33} = 1$.

5. Em seguida, temos que:

- $\mathbf{U_2} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $\mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

- $\mathbf{U_2V_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

6. Fazendo $\mathbf{A_2} = \mathbf{A_1} - \mathbf{U_2V_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Como $\mathbf{A_2} = \mathbf{0}$, o processo está encerrado.

7. Temos então $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{4x2}$ e $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{2x4}$. Logo, $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$.

3.3.2 Cálculo da inversa generalizada de Moore-Penrose.

Definição: Pelo Teorema 4, o cálculo da inversa generalizada de Moore-Penrose $\mathbf{A^+}$ é dado por:

$$\mathbf{A^+} = \mathbf{C^t} \cdot (\mathbf{B^t} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C^t})^{-1} \cdot \mathbf{B^t},$$

com $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$, onde $\mathbf{B}$ é o posto coluna completo e $\mathbf{C}$ é o posto linha completo.

Exemplo:

Calcular a inversa de Moore-Penrose da matriz **A** = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4x3}$.

Como já sabemos (ver exemplo do item 3.3.1), o posto coluna completo e o posto linha completo da matriz **A** são, respectivamente, **B** = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e **C** = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Para calcular sua inversa de Moore-Penrose $\mathbf{A}^+$, faremos:

a) $\mathbf{B}^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{C}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $\mathbf{B}^t \, . \, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

c) $\mathbf{B}^t \, . \, \mathbf{A} \, . \, \mathbf{C}^t = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

d) $(\mathbf{B}^t \, . \, \mathbf{A} \, . \, \mathbf{C}^t)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ -1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$.

e) $\mathbf{C}^t \, . \, (\mathbf{B}^t \, . \, \mathbf{A} \, . \, \mathbf{C}^t)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ -1/6 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ 1/3 & -1/2 \\ -1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$.

f) $\mathbf{A}^+ = \mathbf{C}^t \, . \, (\mathbf{B}^t \, . \, \mathbf{A} \, . \, \mathbf{C}^t)^{-1} \, . \, \mathbf{B}^t$

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ 1/3 & -1/2 \\ -1/6 & 1/2 \end{bmatrix} \mathbf{.} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & -1/6 & -1/6 \\ -1/6 & -1/6 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Podemos utilizar, também, o programa Geogebra para cálculo da Inversa de Moore-Penrose, como pode ser observado no link https://www.youtube.com/watch?v=Fsv1lnn_-mo&t=2s.

4. SISTEMAS LINEARES E INVERSAS GENERALIZADAS

4.1 Conceito de Sistema Linear

Dado um sistema linear qualquer de **m** equações e **n** incógnitas $X_1, X_2, ..., X_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

ele pode ser escrito na forma matricial como **Ax = b**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}, \text{ onde:}$$

- **A** é a matriz do sistema e pode ser quadrada ou retangular;
- **b** é a matriz coluna dos termos independentes, com o mesmo número de linhas de **A**;
- **x** é a matriz coluna das incógnitas do sistema, com a quantidade de linhas igual à quantidade de colunas de **A**.

Os sistemas lineares são classificados de acordo com o número de soluções apresentados pelo mesmo. Assim, os sistemas lineares podem ser classificados como:

- ✓ **Sistema Consistente ou Possível e Determinado** – possui uma única solução.
- ✓ **Sistema Consistente ou Possível e Indeterminado** – possui infinitas soluções.
- ✓ **Sistema Inconsistente ou Impossível** – não possui solução.

A solução para um sistema de equações também poderá ser expressa em forma de matriz, usando o conceito de matriz inversa:

- Caso 1: Se $m = n$ e **A** é não singular, então existe uma única matriz coluna solução $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ e o sistema é considerado consistente.

- Caso 2: Se $m > n$, de tal forma que **A** tenha mais equações que incógnitas, então o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ não tem solução e é considerado inconsistente.

- Caso 3: Se $m < n$, de tal forma que **A** tenha menos equações que incógnitas, então o sistema possui um número infinito de soluções e é considerado consistente. A solução desse sistema pode ser dada através da matriz coluna $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-}\,\mathbf{b}$, em que $\mathbf{A}^{-}$ é a inversa generalizada de **A**. Neste caso, diferentes escolhas de $\mathbf{A}^{-}$ resultarão em diferentes soluções para o sistema.

4.2. As infinitas soluções de um sistema consistente através das inversas generalizadas

Já vimos que um sistema consistente que possui infinitas soluções pode ser também classificado como sistema possível e indeterminado. Porém, como os infinitos valores das incógnitas geram infinitas soluções para o sistema, uma forma de resolver esse problema seria encontrar uma solução geral que fosse capaz de gerar todas as outras soluções particulares. Para tanto, apresentaremos uma forma de encontrar essa solução geral utilizando as inversas generalizadas e para isso utilizaremos o teorema descrito abaixo.

Teorema 5: Se o sistema de equações $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é consistente, então todas as possíveis soluções podem ser obtidas das duas seguintes maneiras:

- Use uma $\mathbf{A}^{-}$ específica em $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-} \,.\, \mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-} \,.\, \mathbf{A}) \,.\, \mathbf{h}$ e use todos os possíveis valores para a matriz coluna arbitrária h.
- Use todas as possíveis inversas $\mathbf{A}^{-}$ em $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Exemplo: Encontrar uma solução para o sistema abaixo, visto que é consistente e possui um número infinito de soluções.

$$\begin{cases} 3a + 2b + 3c + d = 10 \\ a + \ \ b + 2c + d = 5 \\ 5a + 3b + 4c + d = 8 \end{cases}$$

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$, de tal forma que $\mathbf{Ax = b}$ e $\mathbf{x = A^{-} b}$.

Para encontrar $\mathbf{A}^{-}$ seguiremos os passos do algoritmo de Searle:

1. Usando o método de Gauss, determinamos p(**A**) = 2 e em seguida escolhemos a matriz $\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Desta forma, $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $(\mathbf{C}^{-1})^{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Substituindo as entradas de **A,** relativos a **C,** por $(\mathbf{C}^{-1})^{\mathbf{t}}$, temos: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Substituindo todas as outras entradas de **A** por zeros, temos: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Transpondo a matriz resultante do item 4, temos: $\mathbf{A}^{-} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Logo, uma solução para o sistema dado é obtida através de $\mathbf{x = A^{-} b}$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, **a = 0, b = 5, c = 0** e **d = 0**.

Lembrando que diferentes escolhas de **A**$^-$, resultarão em diferentes soluções para o sistema apresentado.

Usando o Teorema 5, uma das formas de encontrar todas as possíveis soluções do sistema apresentado, será realizando o seguinte processo:

- Use uma **A**$^-$ específica em **x = A$^-$. b + (I - A$^-$. A) . h** e use todos os possíveis valores para a matriz coluna arbitrária *h*.

Observe que:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \right) . \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix},$$

temos então:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) . \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_3 + h_4 \\ -3h_3 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} h_3 + h_4 \\ -3h_3 + 5 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix}$$

Logo, **a** = $h_3 + h_4$, **b** = $- 3h_3 + 5$, **c** = h_3 e **d** = h_4, para quaisquer valores que atribuímos para h_3 e h_4.

4.3 Encontrando soluções aproximadas para sistemas inconsistentes

4.3.1 Características do sistema inconsistente

Já vimos que um sistema linear é dito inconsistente ou impossível quando não admite qualquer solução.

Ao citarmos um sistema inconsistente, embora não sejamos capazes de apresentar uma solução exata para o mesmo, não significa dizer que não possamos encontrar uma solução aproximada. Em muitos problemas do cotidiano, como por exemplo, nas análises estatísticas de experimentos, é de fundamental importância a obtenção de soluções aproximadas de sistemas lineares.

Quando falamos de solução aproximada, podemos observar que esse conjunto não é unitário e tampouco finito. Então como classificar qual das soluções desse conjunto que teria a melhor aproximação?

Para definir a melhor aproximação para uma solução de um sistema inconsistente utilizaremos o erro desta solução e a norma do vetor erro.

4.3.2 Norma ou módulo de um vetor

Se uma matriz **A** = $[a_{ij}]_{mxn}$ possui m = 1, é considerada um vetor linha e se possui n = 1, é considerada um vetor coluna. Um vetor também pode ser considerado matriz linha **A** = $[a_{ij}]_{1xn}$ou matriz coluna **A** = $[a_{ij}]_{mx1}$.

Exemplos:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}_{1x3}\ ;\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}_{2x1}$$

Como uma matriz linha ou coluna também pode ser vista como um vetor, podemos calcular sua norma ou módulo.

A norma ou módulo de um vetor é o comprimento desse vetor, que pode ser calculado por meio da distância de seu ponto final até a origem.

O conceito de módulo de vetor não se difere do conceito de módulo de um número real e seu cálculo utiliza a mesma ideia de distância desse número até a origem.

Vetores são objetos criados para observar direção, sentido e intensidade de movimento de objetos no espaço. Esse espaço não se restringe às três dimensões comumente estudadas, mas se trata de um espaço "n"-dimensional. Dessa forma, calcular a norma de um vetor é o mesmo que calcular a distância entre o ponto (a,b) e a origem (0,0) [para o caso de duas dimensões, por exemplo]. Utilizando $||v||$ como notação para módulo do vetor v = (a,b), pertencente ao plano, teremos:

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)}$$

Exemplo: Calcular a norma do vetor a = (3, -5)

$$||a|| = \sqrt{(3^2 + (-5)^2)}$$
$$||a|| = \sqrt{9 + 25}$$
$$||a|| = \sqrt{36}$$
$$||a|| = 6$$

4.3.3 Cálculo da solução aproximada para sistemas inconsistentes

Dado um sistema inconsistente $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e uma solução aproximada $\mathbf{x_a}$ deste sistema, define-se o erro desta solução como o vetor $e\,(\mathbf{x_a}) = \mathbf{b} - \mathbf{Ax_a}$. Um vetor $\mathbf{x_+}$ é definido como melhor aproximação se atender duas condições:

i) $||e\,(\mathbf{x_+})||^2 \leq ||e\,(\mathbf{x_a})||^2$

ii) Se $||e\,(\mathbf{x_+})||^2 = ||e\,(\mathbf{x_a})||^2$, então $||\mathbf{x_+}||^2 \leq ||\mathbf{x_a}||^2$

Exemplo:

Observe o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ 6a + 3b = 15 \end{cases}$$

Utilizando o método da substituição em sua resolução, temos:

- Da 1ª equação: 2a + b = 15 ⇔ b = 3 - 2a
- Substituindo a 1ª equação na 2ª: 6a + 3b = 15

6a + 3 (3 - 2a) = 15

6a + 9 - 6a = 15

9 = 15

Como 9 ≠ 15 e não encontramos nenhuma solução para as incógnitas, o sistema é considerado inconsistente, mas isso não quer dizer que o sistema não possua soluções aproximadas. Podemos citar $\mathbf{x_{a1}}$ e $\mathbf{x_{a2}}$ como duas dessas infinitas aproximações:

- $\mathbf{X_{a1}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $\mathbf{X_{a2}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Mas qual das duas seria a melhor solução aproximada para o sistema em questão?

Calcularemos primeiramente os vetores erros de cada uma das soluções.

- $e\,(\mathbf{x_{a1}}) = \mathbf{b} - \mathbf{Ax_{a1}}$

$e\,(\mathbf{x_{a1}}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$e\,(\mathbf{x_{a1}}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}$

$e\,(\mathbf{x_{a1}}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

- $e\,(\mathbf{x_{a2}}) = \mathbf{b} - \mathbf{Ax_{a2}}$

$e\,(\mathbf{x_{a2}}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$e\,(\mathbf{x_{a2}}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

$e\ (\mathbf{x_{a2}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

Verificando a norma de cada um dos vetores erros, temos:

- $\|\ e\ (\mathbf{x_{a1}})\ \| = \sqrt{((-2)^2 + 0^2)} = \sqrt{4} = 2$

- $\|\ e\ (\mathbf{x_{a2}})\ \| = \sqrt{(0^2 +\ 6^2)} = \sqrt{36} = 6$

Analisando a condição estabelecida acima para definir um vetor $\mathbf{x_+}$ como melhor aproximação entre duas soluções aproximadas e sabendo que $\|e\ (\ \mathbf{x_{a1}}\ )\|^2 \leq \|e\ (\ \mathbf{x_{a2}}\ )\|^2$, temos que $\mathbf{x_+} = \mathbf{x_{a1}}$, ou seja, $\mathbf{x_{a1}}$ pode ser classificada como melhor aproximação entre as duas soluções.

Mas como podemos definir a melhor aproximação dentre todo o conjunto de soluções aproximadas de um sistema inconsistente?

Essa é exatamente a reposta que o Teorema 6 nos traz e sua demonstração pode ser vista em Guimarães (2010).

Teorema 6: A melhor solução aproximada de um sistema inconsistente **Ax = b** é dada por $\mathbf{x_+} = \mathbf{A^+ b}$, em que $\mathbf{A^+}$ é a inversa generalizada de Moore-Penrose da matriz **A**.

Exemplo: Considere o sistema inconsistente abaixo.

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = \ \ 2 \\ 3x + 5y + 4z = \ \ 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases}$$

Sabendo que **A** é a matriz do sistema, **x** a matriz coluna das incógnitas do sistema e **b** a matriz coluna dos termos independentes do sistema, temos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\ \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Segundo o Teorema citado acima, para encontrarmos uma solução aproximada para o sistema apresentado, devemos primeiramente encontrar a inversa generalizada de Moore-Penrose da matriz A.

Como já vimos no capítulo anterior, para cálculo da inversa de Moore-Penrose de uma matriz, devemos inicialmente encontrar sua fatoração de posto completo.

Sendo assim, temos:

1. Usando o método de Gauss, encontramos p(**A**) = 2. Logo, **B** terá de ordem 3x2 e **C** terá ordem 2x3. Escolhemos então o elemento $a_{11} = 1$.

2. Em seguida, temos que:

- $\mathbf{U_1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

- $\mathbf{V_1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

- $\mathbf{U_1V_1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 5 & 15 & 10 \end{bmatrix}$

3. Fazendo $\mathbf{A_1} = \mathbf{A} - \mathbf{U_1V_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -12 & -6 \end{bmatrix}$.

   Como $\mathbf{A_1} \neq \mathbf{0}$, repetiremos o processo para $\mathbf{A_1}$.

4. Escolhemos o elemento $a_{23} = -2$.

5. Em seguida, temos que:

- $\mathbf{U_2} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

- $\mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

- $\mathbf{U_2V_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -12 & -6 \end{bmatrix}$

8. Fazendo $\mathbf{A_2} = \mathbf{A_1} - \mathbf{U_2V_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Como $\mathbf{A_2} = \mathbf{0}$, o processo está encerrado.

9. Temos então $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$. Logo, **A**=**BC**.

Para calcular a inversa de Moore-Penrose $\mathbf{A}^+$, faremos:

a) $\mathbf{B}^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{C}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

b) $\mathbf{B}^t \,.\, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 33 & 34 \\ 18 & 14 & 16 \end{bmatrix}$.

c) $\mathbf{B}^t \,.\, \mathbf{A} \,.\, \mathbf{C}^t = \begin{bmatrix} 35 & 33 & 34 \\ 18 & 14 & 16 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 202 & -200 \\ 92 & -88 \end{bmatrix}$.

d) $(\mathbf{B}^t \,.\, \mathbf{A} \,.\, \mathbf{C}^t)^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}14 & 0{,}32 \\ -{,}015 & 0{,}32 \end{bmatrix}$.

e) $\mathbf{C}^t \,.\, (\mathbf{B}^t \,.\, \mathbf{A} \,.\, \mathbf{C}^t)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -0{,}14 & 0{,}32 \\ -{,}015 & 0{,}32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}14 & 0{,}32 \\ 0{,}17 & -0{,}33 \\ 0{,}01 & -0{,}01 \end{bmatrix}$.

f) $\mathbf{A}^+ = \mathbf{C}^t \,.\, (\mathbf{B}^t \,.\, \mathbf{A} \,.\, \mathbf{C}^t)^{-1} \,.\, \mathbf{B}^t$

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} -0{,}14 & 0{,}32 \\ 0{,}17 & -0{,}33 \\ 0{,}01 & -0{,}01 \end{bmatrix} \mathbf{.} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}14 & -0{,}1 & 0{,}26 \\ 0{,}17 & 0{,}17 & -0{,}17 \\ 0{,}01 & 0{,}03 & 0{,}04 \end{bmatrix}.$$

Já conhecida a matriz $\mathbf{A}^+$, encontraremos a seguir a melhor solução aproximada para o sistema em questão fazendo:

$$\mathbf{x_+} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$$

Logo, $\mathbf{x}_+ = \begin{bmatrix} -0{,}14 & -0{,}1 & 0{,}26 \\ 0{,}17 & 0{,}17 & -0{,}17 \\ 0{,}01 & 0{,}03 & 0{,}04 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3{,}26 \\ 2{,}67 \\ -0{,}29 \end{bmatrix}$.

Faremos agora, uma outra tentativa de encontrar a solução aproximada para o sistema em questão, trabalhando com uma outra inversa generalizada da matriz **A**, que não seja necessariamente a inversa generalizada de Moore-Penrose.

Observe que, pelo Teorema 2, uma inversa generalizada para a matriz **A** será:

$$\mathbf{A}^- = \begin{bmatrix} -1{,}25 & 0{,}75 & 0 \\ 0{,}75 & -0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, usando o Teorema 6, a melhor solução aproximada para o sistema inconsistente em questão seria $\mathbf{x}_1$:

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}^- \mathbf{b}$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1{,}25 & 0{,}75 & 0 \\ 0{,}75 & -0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mas qual das duas, $\mathbf{x}_+$ ou $\mathbf{x}_1$, seria a melhor solução aproximada para o sistema em questão?

Faremos a verificação calculando primeiramente os vetores erros de cada uma das soluções.

- $e\,(\mathbf{x}_+) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_+$

$$e\,(\mathbf{x}_+) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -3{,}26 \\ 2{,}67 \\ -0{,}29 \end{bmatrix}$$

$$e\,(\mathbf{x}_+) = \begin{bmatrix} -2{,}15 \\ 1{,}62 \\ 0{,}54 \end{bmatrix}$$

- $e\,(\mathbf{x_1}) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x_+}$

$$e\,(\mathbf{x_1}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e\,(\mathbf{x_1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -14 \end{bmatrix}$$

Verificando a norma de cada um dos vetores erros, temos:

- $\|\, e\,(\mathbf{x_+})\, \| = \sqrt{((-2{,}15)^2 + (1{,}62)^2 + (0{,}54)^2)} = \sqrt{7{,}5385} \cong 2{,}75$

- $\|\, e\,(\mathbf{x_1})\, \| = \sqrt{(0^2 + 0^2 + (-14)^2)} = \sqrt{196} = 14$

Desta forma, podemos observar que $\|e\,(\mathbf{x_+})\|^2 \leq \|e\,(\mathbf{x_1})\|^2$. Logo, $\mathbf{x_+}$ pode ser classificada como melhor aproximação entre as duas soluções. Sendo assim, podemos ver que no Teorema 6, a matriz generalizada usada deve ser a de **Moore-Penrose**, tornando inviável a utilização de qualquer outra matriz generalizada.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho, observamos que quando se conhece os fundamentos básicos de uma matriz, a definição de uma matriz inversa generalizada e o algoritmo capaz de encontrá-la, é possível se obter uma solução geral para um sistema linear consistente e indeterminado.

Além disso, podemos observar que um sistema linear considerado inconsistente ou impossível, embora não possua uma solução exata, pode possuir uma melhor solução aproximada, sendo estabelecido um critério para o que definimos como “melhor solução”. Para tanto, basta que se conheça os fundamentos e operações básicas de uma matriz, assim como os conceitos e cálculos das inversas generalizadas, em especial da Moore-Penrose, que é essencial para se obter a solução buscada.

O uso de softwares facilita na operacionalização dos cálculos, fornecendo mais tempo para as interpretações dos conceitos estudados. O software Geogebra mostrou-se viável para a realização do cálculo das inversas aqui estudadas, embora, possa ser aperfeiçoado para que o cálculo destas seja feito a partir de funções próprias do programa, sem a necessidade do leitor ter que desenvolver todos os passos manualmente no software.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. RENCHER, A.C., **Linear Models in Statistics**, John Wiley & Sons, Department os Satatistics, Brigham Young University, Provo, Utah, 2 nd. ed., New York, 2008.

2. BOLDRINI, J.L., **Álgebra Linear**, 3 ed., São Paulo: Harbra, 1986.

3. LIMA, C.G., **Álgebra de Matrizes**, Baseado no capítulo 2 do livro: *Linear Models in Statistics*, RENCHER, A.C., 2000, John Wiley & Sons, New York. DCE/ESALQ - USP, São Paulo, 2007.

4. CANTÃO, L.A.P.; **Álgebra Linear - AL**, Notas de aula - Aula 4, Departamento de Engenharia Ambiental, UNESP, São Paulo, 2012.

5. ZONTINI, D.D., **Métodos Computacionais para Inversas Generalizadas**, Tese de Doutorado, UFPR, Curitiba, 2014.

6. GUIMARÃES, P.H.S., **Uma abordagem Geométrica da Teoria de Inversas Generalizadas**, Tese de Mestrado, UFLA, Minas Gerais, 2010.

7. Departamento de Matemáticas, CSI/ITESM, **Inversas Generalizadas**, 2009.

8. FOGO, J.C., **Teoria de Matrizes para Estatística**, Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Estatística, São Carlos, 2016.

9. LUNA, J. G.; ESTEVES, E. M., **Modelos Lineares**, Notas de Curso, UEPB - CCT - DME, Coordenação de Estatística, Campina Grande, 2008.

10. SEARLE, S.P., **Matrix algebra useful for statistics**, New York, 1982.