Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática
PROFMAT

Augusto Cézar Tiradentes Monteiro

INTRODUÇÃO AO TREINAMENTO OLÍMPICO: UMA PROPOSTA PARA OS ALUNOS DA REDE PÚBLICA ESTADUAL

Vitória-ES
2017

AUGUSTO CÉZAR TIRADENTES MONTEIRO

INTRODUÇÃO AO TREINAMENTO OLÍMPICO: UMA PROPOSTA PARA OS ALUNOS DA REDE PÚBLICA ESTADUAL

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. VALMECIR ANTÔNIO DOS SANTOS BAYER

Vitória-ES

2017

AUGUSTO CÉZAR TIRADENTES MONTEIRO

INTRODUÇÃO AO TREINAMENTO OLÍMPICO: UMA PROPOSTA PARA OS ALUNOS DA REDE PÚBLICA ESTADUAL

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 15 de agosto de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. VALMECIR ANTÔNIO DOS SANTOS BAYER - Orientador
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. MOACIR ROSADO FILHO
Universidade Federal do Espírito Santo

Profa. Dra. ANDRÉA GOMES GUIMARÃES
Universidade Federal Fluminense

Vitória-ES

2017

Agradecimentos

A DEUS, que sempre me deu forças para nunca desistir.

A minha mãe, Aparecida, meu eterno agradecimento. Sempre acreditando em minha capacidade.

A minha amada esposa, Vanessa, por ser tão importante na minha vida. Obrigado pela paciência e compreensão.

Ao meu orientador, Valmecir, por sua dedicação, competência e especial atenção nas revisões e sugestões.

A todos os professores do mestrado que, de alguma forma, contribuíram para minha formação.

A CAPES, pelo apoio financeiro concedido.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Resumo

As provas da OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – apresentam um grau de dificuldade elevado para a maioria dos alunos da rede pública. Além disso, nota-se também a falta de habilidade do professor em preparar os alunos para esse tipo de avaliação. Diante de toda essa problemática, dois professores de uma escola pública do município de Serra – ES desenvolveram a proposta, aqui apresentada, de treino olímpico composto por sequências didáticas com um desenvolvimento teórico contextualizado, seguido de uma lista de problemas já utilizados em provas da OBMEP.

Palavras-chave: OBMEP, rede pública, sequências didáticas, problemas, matemática.

Abstract

Exams of OBMEP - Brazilian Mathematical Olympiad Public Schools - presents a high degree of difficulty for most public school students. In addition, there is also the lack of teacher's ability to prepare students for this type of exams. Faced with all this problem, two teachers of a public school at the city of Serra - ES developed a Olympic training proposal, here presented, consisting of didactic sequences with a contextualidez theoretical development, followed by a list of problems of OBMEP exams.

Keywords: OBMEP, public education, teaching sequences, problems, mathematics

Capítulo 1

Introdução

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é um programa promovido pelo Ministério da Educação e Ministério de Ciência e Tecnologia em parceria com o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e a Sociedade Brasileira de Matemática. Podem participar dessa olimpíada os estudantes da rede pública matriculados do 6º ao 9º do Ensino Fundamental, e também os estudantes do Ensino Médio. Os alunos do Ensino Fundamental são separados em dois níveis diferentes, de acordo com a série cursada, e os alunos do Ensino Médio realizam a mesma prova independentemente da série. Os quatro mil e quinhentos medalhistas participam do Programa de Iniciação Científica (PIC) com bolsa do CNPq e com duração de um ano.

A primeira OBMEP aconteceu em 2005, e desde então o número de participantes vem aumentando a cada ano que se passa. "Os objetivos da OBMEP são promover o estudo de Matemática entre alunos das escolas públicas, contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica e identificar jovens talentos, entre outros"[1].

Cada escola inscrita recebe o material para a divulgação da Olimpíada e também o Banco de Questões com problemas e desafios matemáticos para auxiliar na preparação dos alunos para a avaliação.

Segundo Druck (2011) em [2], tanto alunos quanto professores acham o material didático importante, não apenas para a preparação para a olimpíada, mas também para a prática em sala de aula. Além disso, apenas 3% dos gestores afirmaram que os professores não utilizam o material. No entanto, nessa mesma pesquisa, todos os gestores partilham da opinião de que a prova apresenta um grau de dificuldade muito elevado quando comparado com o nível de ensino-aprendizagem de matemática nas escolas públicas.

"Sobre os professores, 59% reconhecem ter realizado alguma alteração real em suas práticas de ensino por causa da Olimpíada, como, por exemplo, a elaboração das provas, a visão da matemática, e o gosto pela matemática" [2]. Diante destas questões levantadas, é necessário verificar e experimentar o que, de fato, pode auxiliar os alunos na preparação para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

1.1 Justificativa e importância do trabalho

O tema deste estudo foi escolhido por mim e pela professora Drielly Valvassori Stocco, após a aplicação da 1ª fase da OBMEP na escola em que lecionamos. Na ocasião foi feita uma reflexão acerca dos resultados alcançados pelos alunos na avaliação, em que percebemos que não existe motivação e preparação para a realização da atividade proposta. Além disso, observamos que a frequência é reduzida no dia da prova, fato que gera um desperdício de material que é enviado para a escola.

Diante dessa problemática, nós iremos propor um treinamento olímpico que será desenvolvido através de sequências didáticas que serão construídas a partir do material que é fornecido pela OBMEP. Os conteúdos escolhidos foram:

- Introdução à Lógica Matemática;
- Aritmética;
- Álgebra: Equações de 1º e 2º Graus e Sistemas de Equações com Duas Incógnitas;
- Métodos de Contagem;
- Probabilidade;
- Geometria: Ângulos, Teorema de Pitágoras e Áreas de Figuras Planas.

Os conteúdos foram divididos entre os dois professores envolvidos no projeto, de modo que cada um apresentará as suas sequências didáticas. Vale ressaltar que os conteúdos escolhidos não contemplam todo o assunto que é abordado na OBMEP. Dessa forma. outras sequências podem ser pensadas como complemento desse treinamento olímpico.

O tópico de "Introdução à Lógica Matemática" será abordado pelos dois professores em seus trabalhos individuais, visto que trata-se de um assunto que não é abordado no currículo do Ensino Fundamental e Médio, além de ser fundamental para um bom desenvolvimento das avaliações propostas pela OBMEP.

Com essas sequências queremos melhorar o desempenho dos alunos na Olimpíada, além de elevar o nível de ensino-aprendizagem da Matemática em sala de aula. Todo o material que será apresentado terá como público-alvo os alunos do Ensino Médio da rede pública.

1.2 Objetivos do trabalho

Os objetivos deste trabalho são:

- Gerais:
  - Elaborar propostas para o ensino de Matemática com a utilização do material disponibilizado no site da OBMEP;
  - Estimular a participação dos alunos na OBMEP;
  - Propor sequências didáticas que desenvolvam o raciocínio lógico dos alunos, de forma que eles se sintam preparados para disputar a OBMEP.
  - Estimular o interesse dos alunos pela disciplina de Matemática.
- Específicos:
  - Revisar conceitos de Lógica, Álgebra, Combinatória, Probabilidade e Geometria Plana;
  - Desenvolver métodos de resolução de problemas;
  - Contribuir para uma integração entre a Matemática de sala de aula e a Matemática da OBMEP;
  - Proporcionar reflexões e questionamentos sobre importantes aspectos da Matemática.

1.3 Metodologia do trabalho

Em relação à metodologia serão apresentadas duas situações: a metodologia que poderá ser adotada pelo professor em sala de aula na aplicação das sequências didáticas, e a metodologia do trabalho da dissertação.

A metodologia para a aplicação das sequências didáticas poderá ser desenvolvida em três etapas, mas vale lembrar que essa é apenas uma sugestão, podendo o professor adequar de acordo com a sua realidade.

As sequências didáticas aqui propostas serão compostas de material teórico contextualizado, utilizando uma linguagem mais popular e menos científica, sem deixar de trabalhar o rigor da matemática, mas com o objetivo de aproximar ainda mais o aluno da disciplina em questão. Para a composição desse material teórico serão utilizadas as apostilas do PIC 2012 disponibilizadas no site da OBMEP, livros da Coleção do Professor de Matemática da SBM, além de livros didáticos.

Juntamente com o material teórico serão disponibilizadas, como sugestão, listas com problemas, de acordo com cada assunto abordado, e os mesmos serão retirados de provas anteriores também disponibilizadas no site da OBMEP.

Cada sequência didática foi pensada para três horas-aula e para ser desenvolvida em três momentos. O primeiro momento deve ser para orientação geral da tarefa, e também para o desenvolvimento teórico proposto. É interessante que o professor converse com o seu aluno para conhecer o que ele sabe e pensa sobre o assunto abordado. No segundo momento os alunos começam a desenvolver os problemas propostos, individualmente ou em duplas, e o professor atua como motivador e questionador, sem apresentar respostas prontas, provocando apenas reflexões que possam levar o aluno à solução procurada.

No terceiro momento, cada aluno ou dupla poderá compartilhar com a turma as suas ideias e soluções. Nessa etapa o professor não deve apenas avaliar os resultados encontrados, mas motivar discussões que conduzam para o resultado correto. Agindo assim, o professor motiva a participação e destaca a criatividade de cada aluno, mostrando que ele é capaz de desenvolver os problemas propostos pela OBMEP.

A metodologia do trabalho será a da Engenharia Didática, que tem suas características destacadas por Michèle Artigue. Segundo Artigue (1996), citado por Andrade (2011) em [3], este método possui quatro fases:

1. Análises prévias;

2. Construção e análise a priori das situações didáticas;

3. Experimentação;

4. Análise a posteriori e validação.

Além da análise feita sobre as sequências didáticas, será aplicado um questionário para verificar o que os alunos realmente pensam sobre a avaliação da OBMEP e, logo em seguida, serão submetidos a dois testes. Esses dois testes serão compostos por questões de olimpíadas já realizadas. Um abordará apenas as questões da primeira fase da OBMEP, ou seja, questões objetivas; e o outro teste abordará apenas questões da segunda fase da OBMEP, ou seja, questões discursivas. Tudo isso com o objetivo de diagnosticar a situação dos alunos em relação às etapas da OBMEP.

1.4 Estrutura da dissertação

No capítulo 1 é apresentado um breve histórico da OBMEP com alguns dados encontrados em outras pesquisas sobre a aplicação da olimpíada. As informações apresentadas nesse primeiro capítulo podem ser aprofundadas numa consulta ao site da OBMEP. Além disso, apresentamos a justificativa e importância do trabalho, a metodologia utilizada e os objetivos gerais e específicos. Apresentamos também uma análise dos dados coletados através de um diagnóstico feito através de um questionário e da aplicação de provas diagnósticas, dados estes que justificam a importância dessa pesquisa.

O capítulo 2 traz uma breve apresentação teórica sobre a Resolução de Problemas, visto que durante a pesquisa faz-se necessária a discussão com os alunos sobre tal assunto. Nele também estão as sequências didáticas propostas. No total são quatro sequências com assuntos bem definidos de fácil entendimento para o leitor.

No capítulo 3 é feita a análise a priori e a posteriori de cada uma dos problemas abordados nas sequências didáticas. O capítulo traz questões resolvidas por alguns alunos envolvidos no treino olímpico. São também apresentadas a conclusão e propostas de trabalhos futuros.

1.5 Diagnóstico

Para realizar as análises prévias dentro da metodologia de pesquisa escolhida, a fim de verificar o que os alunos trazem de conhecimento prévio sobre a OBMEP e, também, verificar como eles desenvolvem as questões que comumente são cobradas nas provas da olimpíada, foram aplicados um questionário e dois testes.

O questionário apresenta perguntas referentes à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Anexo A), para compreender o perfil do aluno que desenvolverá as sequências propostas. Foram 20 alunos inscritos para participar do treino olímpico proposto, distribuídos entre 1º, 2º e 3º anos do Ensino Médio, e todos eles responderam ao questionário proposto.

Identificamos que apesar de sempre participar da Olimpíada, os alunos desconhecem suas premiações. Eles classificaram a prova como difícil, motivo pelo qual relatam não conseguir responder muitas das questões. Além disso, indicaram que seus professores, na maioria dos casos, não oferecem qualquer tipo de preparação para a prova, e também que não procuram o portal da OBMEP na internet, em busca de material de estudo, embora sintam-se desafiados pelas questões da Olimpíada.

Os testes (Anexo B), foram elaborados a partir de questões de provas anteriores da OBMEP. Como se tratavam de um teste objetivo e outro discursivo, optamos por realizá-los em dois dias para disponibilizar mais tempo para a resolução das questões. O principal objetivo dos testes era o de avaliar a capacidade e a postura do aluno no momento da prova. Estes foram recolhidos para análise e, assim, direcionar a estrutura das aulas do treino olímpico.

No teste objetivo percebemos que poucos foram os alunos que desenvolveram cálculos referentes às questões propostas, a maioria apenas assinalou uma opção. Daí nota-se a falta de motivação e de preparação por parte dos alunos, pois alguns não fizeram cálculos por acharem as questões difíceis, e outros apenas marcaram o "x" por achar que questões de múltipla escolha não necessitam de cálculos. Na tabela abaixo é apresentada a análise estatística dos acertos e erros das questões do teste objetivo.

Questão	1	2	3	4	5	6	7	**Média**
Acertos	11	7	5	0	0	5	7	1,75
Erros	9	13	15	20	20	15	13	5,25
% Acertos	55	35	25	0	0	25	35	

Tabela 1.1: Diagnóstico da Avaliação Objetiva

A questão com o maior número de acertos é referente ao conteúdo de métodos de contagem e probabilidade. As duas questões com o pior desempenho são referentes à geometria, e a maioria dos alunos apenas assinalou uma letra sem apresentar cálculos.

Com esse teste pudemos perceber a dificuldade que a maioria dos alunos apresenta no desenvolvimento dos problemas. Falta um roteiro de resolução, além de uma leitura mais lenta e mais atenta.

No teste discursivo e situação foi mais grave ainda, pois os alunos não acertaram nenhuma das questões propostas e, em sua grande maioria, deixaram as provas em branco.

Diante dos resultados, trabalharemos questões já utilizadas em provas antigas da OBMEP de Nível 3, mas antes faz-se necessário uma aula sobre as técnicas de Resolução de Problemas.

Capítulo 2

Sequência Didática das Atividades

2.1 Resolução de Problemas

A Matemática escolar tem por finalidade desenvolver nos alunos a capacidade de utilizar os conhecimentos adquiridos em sala de aula na sua vida diária. A Resolução de Problemas é uma técnica desenvolvida na Matemática que mais se aproxima do cotidiano do aluno, apesar da dificuldade que resolver problemas apresenta. Além disso, a resolução de problemas torna-se um caminho para aprender novas ideias e capacidades matemáticas. De acordo com PALHARES (2004) em [4]

> Os bons problemas podem proporcionar a exploração de conceitos matemáticos importantes e reforçar a necessidade de compreender e usar várias estratégias, propriedades e relações matemáticas. Mas, antes de tudo é necessário resolver muitos problemas, pois, como refere Pólya, aprende-se a resolver problemas resolvendo problemas.

As atividades a seguir sugeridas, serão compostas de problemas já utilizados nas olimpíadas. Por isso, torna-se importante discutir com os alunos algumas tipologias de problemas e um modelo de resolução de problemas.

2.1.1 Tipologia de Problemas

PALHARES (2004) traz em [4] uma tipologia de problemas proposta por Charles e Lester (1986) com cinco tipos de problemas. São eles:

- **Problemas de um passo**

  São os problemas que podem ser resolvidos utilizando-se apenas uma das quatro operações básicas da aritmética. Exemplo: Paulo é frentista e atende 20 clientes por hora. Em quantas horas ele atendeu 180 clientes?

- **Problemas de dois ou mais passos**

  São os problemas que podem ser resolvidos utilizando-se duas ou mais das quatro operações básicas da aritmética. Exemplo: Num estacionamento de um shopping existem 40 motocicletas e 80 carros de passeio. Quantas rodas podem ser contadas ao todo?

- **Problemas de processo ou heurísticos**

  São os problemas que só podem ser resolvidos através da utilização de uma ou mais estratégias de resolução. Além disso, sua solução não está explícita em seu enunciado. Exemplo: Sete pessoas estão em um grupo. Se cada uma delas trocar um aperto de mão com todos os demais, quantos apertos de mão teremos ao todo?

- **Problemas de aplicação**

  São os problemas que utilizam dados da vida real e necessitam de tomada de decisões. A resolução desse tipo de problema passa a utilizar uma ou mais estratégias, e pode demorar horas ou dias para ser solucionado.

  Exemplo: Uma turma quer viajar para Recife – PE. Sabendo que pretendem viajar de avião e que vão gastar com pousada, passeios e alimentação, faça um levantamento do custo do passeio com duração de 10 dias para 15 pessoas.

- **Problemas tipo *puzzle***

  São os problemas que precisam como que de um "flash" para chegar à solução. Este tipo de problema tende a ser mais interessante para o aluno.

  Exemplo: Desenhe quatro linhas, sem levantar o lápis do papel, de modo que passem pelos nove pontos. (Figura 2.1)

2.1.2 Modelos de Resolução de Problemas

Não se pode determinar um único método para resolver problemas, e nem para ensinar a resolver problemas. *Pólya* descreveu em seu famoso livro *A Arte de Resolver Problemas*

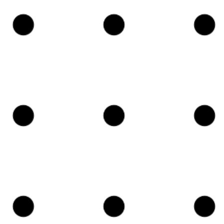


Figura 2.1: Nove Pontos

um método para resolver problemas compostos por quatro etapas. Esse método será apresentado como sugestão de modelo de resolução de problemas.

1. **Compreensão do problema:** O problema deve ser lido cuidadosamente e, se for necessário, várias vezes. Além disso, deve-se compreender o significado de cada termo utilizado no enunciado do problema. Nessa etapa pode-se também reescrever o problema, pois isso facilita a compreensão do mesmo. É importante também que sejam identificadas as informações necessárias para a resolução do problema.

2. **Estabelecimento de um plano:** Nessa segunda etapa deve-se encontrar alguma conexão entre os dados e a incógnita, buscando a definição de uma estratégia de resolução. Pode ser necessário considerar problemas auxiliares ou particulares.

3. **Execução do plano:** Nesta etapa executa-se o plano já traçado. Se chegar a algum impasse, deve-se voltar à fase anterior para o estabelecimento de um novo plano.

4. **Retrospectiva:** Nesta última etapa verifica-se se a solução obtida está de acordo com os dados e as condições estabelecidas pelo problema.

Após o diálogo com os alunos sobre a tipologia dos problemas e sobre o método de resolução de problemas, pode-se iniciar a aplicação das sequências que serão sugeridas a seguir.

2.2 Introdução ao Raciocínio Lógico

2.2.1 O que é Lógica?

Por definição, lógica é a ciência do raciocínio. A lógica formal, concentra-se apenas na estrutura ou forma da lógica. Dessa forma, quando estudamos a lógica formal observamos que a mesma é composta por um sistema dedutivo de enunciados que tem o objetivo de criar leis e regras para determinar a validade dos raciocínios. "A lógica formal trata da relação entre as premissas e conclusão, deixando de importar-se com a verdade das premissas. À ela, interessa dar as regras do pensamento correto."[5]

A lógica formal se baseia em dois princípios básicos: o da "não contradição" e o do "terceiro excluído". No caso da "não contradição" uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Por exemplo, a proposição "João é casado e é solteiro" fere esse princípio, pois é impossível que ele seja casado e solteiro ao mesmo tempo. O princípio do "terceiro excluído" assume que toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, sendo assim, toda proposição tem somente um valor lógico, ou é verdadeira (V) ou é falsa (F).

2.2.2 Exercícios

Desenvolva os problemas abaixo:

1. **(OBMEP – 1ª Fase 2010 – Nível 3 – Questão 11)**

   Adriano, Bruno, Carlos e Daniel participam de uma brincadeira na qual cada um é um tamanduá ou uma preguiça. Tamanduás sempre dizem a verdade e preguiças sempre mentem.

   - Adriano diz: "Bruno é uma preguiça".
   - Bruno diz: "Carlos é um tamanduá".
   - Carlos diz: "Daniel e Adriano são diferentes tipos de animais".
   - Daniel diz: "Adriano é uma preguiça".

   Quantos dos quatro amigos são tamanduás?

   (a) 0

   (b) 1

   (c) 2

   (d) 3

   (e) 4

2. **(OBMEP – 1ª Fase 2013 – Nível 3 – Questão 13)**

   Durante a aula, dois celulares tocaram ao mesmo tempo. A professora logo perguntou aos alunos: "De quem são os celulares que tocaram?", Guto disse: "O meu não tocou", Carlos disse: O meu tocou" e Bernardo disse: "O de Guto não tocou". Sabe-se que um dos meninos disse a verdade e os outros dois mentiram. Qual das seguintes afirmativas é verdadeira?

(a) O celular de Carlos tocou e o de Guto não tocou.

(b) Bernardo mentiu.

(c) Os celulares de Guto e Carlos não tocaram.

(d) Carlos mentiu.

(e) Guto falou a verdade.

3. **(OBMEP – 1ª Fase 2011 – Nível 3 – Questão 8)**

   Tia Geralda sabe que um de seus sobrinhos Ana, Bruno, Cecília, Daniela ou Eduardo comeu todos os biscoitos. Ela também sabe que o culpado sempre mente e que os inocentes sempre dizem a verdade.

   - Bruno diz: "O culpado é Eduardo ou Daniela."
   - Eduardo diz: "O culpado é uma menina."
   - Por fim, Daniela diz: "Se Bruno é culpado então Cecília é inocente."

   Quem comeu os biscoitos?

   (a) Ana

   (b) Bruno

   (c) Cecília

   (d) Daniela

   (e) Eduardo

2.3 Conjuntos do Números Naturais e Inteiros

A seção a seguir é baseada na apostila Iniciação à Arimética do Programa de Iniciação Científica da OBMEP [12]. Para maiores informações e um estudo mais detalhado sobre o assunto pode-se consultar a própria apostila ou, então, o *site* do Portal da Matemática [13].

2.3.1 Números Naturais

O conjunto dos números naturais é formado pelos mais simples de todos os números. Seus elementos podem ser representados, de forma ordenada, por:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,...$$

Esta descrição não apresenta todos os elementos, pois este conjunto possui uma quantidade infinita de elementos.

2.3.2 Propriedades dos Números Naturais

Adição

Segundo o dicionário Aurélio (preciso de colocar referência?), sucessor é aquele vem depois ou após outrem. Assim, quando $n,\ n' \in \mathbb{N}$, dizer que n' é o sucessor de n significa que n' vem logo depois de n, não havendo outros números naturais entre n e n'. O termo primitivo sucessor não é definido explicitamente. Seu uso e suas propriedades são regidos por algumas regras, abaixo enumeradas:

1. Todo número natural tem um único sucessor;

2. Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

3. Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro.

Indicaremos o sucessor de um número natural n por $n + 1$.

Com a definição acima podemos definir a adição de dois números naturais a e $b \in \mathbb{N}$, como sendo a operação que os associa à soma $a + b$, onde $a + b$ é tal que:

i) $a + 0 = a$, por isso, o número natural 0 será chamado de *elemento neutro* da adição.

ii) $a + b = ((((a \underbrace{+1) + 1) + 1) + ... + 1)}_{\text{b 1's}}$, se $b > 0$, ou seja, $a + b$ é o número natural que se obtém a partir de a aplicando-se b vezes seguidas a operação de tomar o sucessor.

Por exemplo, tem-se $2 + 2 = 4$ simplesmente porque 4 é o sucessor do sucessor de 2.

- Comutativa: Quaisquer que sejam os números naturais a e b, temos que a + b = b + a

Propriedades da adição:

- Comutativa: Quaisquer que sejam os números naturais a e b, temos que

$$a + b = b + a$$

Suponha $a = 4$ e $b = 3$. Ao aplicarmos a definição de adição temos:

$$4 + 3 = ((4 + 1) + 1) + 1 = (5 + 1) + 1 = 6 + 1 = 7$$

e

$$3 + 4 = (((3 + 1) + 1) + 1) + 1 = ((4 + 1) + 1) + 1 = (5 + 1) + 1 = 6 + 1 = 7$$

Assim, $3 + 4 = 4 + 3$.

- Associativa: Quaisquer que sejam os números naturais a, b e c, tem-se

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Essa propriedade nos diz, por exemplo, como realizar duas ou mais somas simultaneamente. Por exemplo, para realizar a soma $2+4+5$, podemos inicialmente somar o 2 e o 4, obtendo o número 6 e posteriormente somar o 5 ao resultado da soma de 2 e 4, chegando ao resultado $(2 + 4) + 5 = 6 + 5 = 11$. Ou podemos somar primeiro os números 4 e 5, obtendo o número 9, e em seguida somar 2 ao resultado, chegando a $2 + (4 + 5) = 2 + 9 = 11$. Assim, podemos definir que

$$a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$$

- Relação entre adição e ordem: Dados três números naturais a, b e c quaisquer,

$$\text{se } a < b, \text{ então } a + c < b + c.$$

- Recíproca da relação entre adição e ordem: Dados três números naturais a, b e c quaisquer,

$$\text{se } a + c < b + c, \text{ então } a < b.$$

Ordem

Se a e b são dois números naturais, dizemos que a é menor do que b, simbolizado por $a < b$, quando existe um número natural $c \neq 0$ tal que $b = a + c$. Dizemos também que $a > b$, quando $b < a$.

São propriedades da relação de ordem:

- *Transitividade*: Sejam a, b e c números naturais. Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.
  Pela definição de ordem, se $a < b$, então existe um número natural $d \neq 0$, tal que $b = a + d$. Se $b < c$, então existe um número natural $n \neq 0$ tal que $c = b + n$. Assim, podemos escrever $c = b + n = (a + d) + n = a + (d + n)$, e pela definição de ordem, temos que: $a < c$.

- *Tricotomia*: Dados dois números naturais a e b, é verdadeira apenas uma das três afirmações:

  $$a < b,\ a = b,\ a > b$$

  No caso, em que $a < b$ ou $a = b$, escrevemos $a \leq b$.

Dados dois números naturais a e b, tais que $a < b$, podemos definir os seguintes conjuntos:

- $[a, b]$ é o conjunto dos números naturais x tais que $a \leq x \leq b$, chamado de *intervalo fechado*;

- (a, b) é o conjunto dos números naturais x tais que $a < x < b$, chamado de *intervalo aberto*;

- $(a, b]$ é o conjunto dos números naturais x tais que $a < x \leq b$, chamado de *intervalo semiaberto ou semifechado*;

- $[a, b)$ é o conjunto dos números naturais x tais que $a \leq x < b$, chamado de *intervalo semiaberto ou semifechado*;

Exemplo: Determinar os elementos dos intervalos $[2, 4]$, $(1, 5)$, $(6, 8]$ e $[7, 9)$.

O intervalo $[2, 4] = \{x \in \mathbb{N}/2 \leq x \leq 4\} = \{2, 3, 4\}$.

O intervalo $(1, 5) = \{x \in \mathbb{N}/1 < x < 5\} = \{2, 3, 4\}$.

O intervalo $(6, 8] = \{x \in \mathbb{N}/6 < x \leq 8\} = \{7, 8\}$.

O intervalo $[7, 9) = \{x \in \mathbb{N}/7 \leq x < 9\} = \{7, 8\}$.

Uma propriedade fundamental dos números naturais é a seguinte:

Princípio da Boa Ordem: *Todo subconjunto não vazio do conjunto dos números naturais possui um menor elemento.*

O Princípio nos diz que em um subconjunto B não vazio de $\mathbb{N}$, existe um elemento b tal que $b \leq a$, para todo a pertencente a B.

Exemplo: Determine o menor elemento dos conjuntos $[2, 7]$ e $(2, 7]$.

$[2, 7] = \{x \in \mathbb{N}/2 \leq x \leq 7\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Assim, o menor elemento é o 2.

$(2, 7] = \{x \in \mathbb{N}/2 < x \leq 7\} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Assim, o menor elemento é o 3.

Subtração de naturais

Chamaremos de subtração de b e a, indicada por $b - a$, a operação definida por:

i) Se $a = b$, então $b - a = 0$.

ii) Se $b > a$, então $b - a = c$, tal que $b = (((a + \underbrace{1) + 1) + ... + 1)}_{\text{c 1's}}$.

iii) Se $b < a$, não se define $b - a$.

Por exemplo, se $a = 2$ e $b = 6$, temos que $b - a = 6 - 2 = 4$, pois

$$6 = ((((2 + 1) + 1) + 1) + 1)$$

Pela definição de $b - a$, temos $a + (b - a) = b$. Exemplo: Quero comprar um celular que custa 500 reais, mas tenho somente 150 reais. Quanto falta para que eu possa comprar o celular? Faltam 350 reais, pois para, partindo de 150, chegar em 500 precisamos tomar o sucessor 350 vezes, isto é, $500 - 150 = 350$.

Multiplicação

Definimos a operação de multiplicação entre números naturais, $a \times b$, que se lê a vezes b, como:

$$a \times b = \begin{cases} 0, \text{ se } a = 0 \\ b, \text{ se } a = 1 \\ \underbrace{b + b + \cdots + b}_{\text{a parcelas}}, \text{ se } a > 1 \end{cases}$$

O número $a \times b$ será chamado de produto de a por b e poderá ser também denotado ab, se não houver chance de confusão.

Ao multiplicarmos um natural b, por todos os números naturais, formamos um conjunto chamado de múltiplos de b.

Por exemplo, o conjunto dos múltiplos de 2, é: $\{0, 2, 4, 6, 8, \cdots\}$, cujos elementos são chamados de números pares. Os números que não são pares são chamados de ímpares.

Podemos também, determinar, por exemplo, o conjunto dos múltiplo de 7:

$$\{0, 7, 14, 21, 28, \cdots\}$$

Observe que o único múltiplo do zero é o próprio zero, e que todo número é múltiplo de 1 e de si próprio. Além disso, um múltiplo não nulo de um número natural não nulo é sempre maior ou igual ao próprio número.

Assim, podemos concluir que:

se, $a \times b = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.

Propriedades da Multiplicação

- Comutativa: quaisquer que sejam os números naturais a e b, temos que

$$a \times b = b \times a$$

- Associativa: quaisquer que sejam os números naturais a e b, temos que

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

- Distributiva em relação à adição: dados os números naturais a, b e c quaisquer, tem-se que

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

Por exemplo, considere dois múltiplos de 7, $14 = 2 \times 7$ e $21 = 3 \times 7$. Ao somarmos esses números obtemos:

$$\begin{aligned}
(2 \times 7) + (3 \times 7) &= (7 + 7) + (7 + 7 + 7) \\
&= (7 + 7) + (7 + (7 + 7)) \\
&= ((7 + 7) + 7) + (7 + 7) \\
&= (((7 + 7) + 7) + 7) + 7 \\
&= 5 \times 7 \\
&= (2 + 3) \times 7
\end{aligned}$$

Em que o resultado $(2+3)\times 7$ é obtido de $(2\times 7)+(3\times 7)$, utilizando somente a definição de multiplicação e a propriedade associativa da adição.

- Distributiva em relação à subtração: Se a e b são números naturais, tais que $a > b$, e c é um número natural qualquer, então

$$(a-b)\times c = (a\times c)-(b\times c)$$

- Multiplicação e ordem: Dados números naturais a , b e c quaisquer,

$$\text{se } a < b \text{ e } c > 0, \text{ então } c\times a < c\times b$$

Um conceito importante envolvendo os múltiplos de números naturais é o de múltiplo comum.

Considere os múltiplos de 2:

$$0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, ...$$

Agora, considere a sequência dos múltiplos de 3:

$$0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...$$

Assim, observamos que os números que são múltiplos comuns a 2 e 3 são:

$$0, 6, 12, 18, ...$$

Qual é o próximo número da sequência? Observando os números que aparecem, vemos que se tratam dos múltiplos de 6, ou seja, os múltiplos do menor múltiplo não nulo comum a 2 e 3.

Se a e b são números não nulos, temos que, por definição, $a\times b$ é múltiplo de a e de b. Assim, vimos que, se a e b são não nulos, o 0 e $a\times b$ são múltiplos comuns a a e b.

Definição: O menor múltiplo comum não nulo de dois números naturais não nulos a e b é denotado por $mmc(a, b)$ e será chamado de mínimo múltiplo comum de a e b.

Observe que este número existe, pois o conjunto dos múltiplos comuns não é vazio, como visto acima, e, além disso, o Princípio da Boa Ordem garante que existe um menor elemento.

Uma consequência importante da multiplicação é a potenciação:

Dados dois números naturais $a \neq 0$ e n qualquer, definimos a operação de potenciação como:

$$a^n = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 0 \\ a, \text{ se } n = 1 \\ \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{\text{n fatores}}, \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

Define-se que $0^n = 0$, se $n \neq 0$.

Sejam a, b, m e n números naturais, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Assim, algumas propriedades da potenciação são:

- $1^n = 1$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $(a^n)^m = a^{nm}$
- $a^n b^n = (ab)^n$

2.3.3 Números Inteiros

O conjunto dos números inteiros é o conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$$

Observe que todo número natural é também um número inteiro.

2.3.4 Propriedades dos Números inteiros

No conjunto dos números inteiros, temos que, para cada $a \in \mathbb{Z}$, por definição, $a+(-a) = 0$, sendo que $-0 = 0$ e $-(-a) = a$, quando $a \in \mathbb{N}$. Assim, por exemplo, $-(-2) = 2$, já que $2 \in \mathbb{N}$. Observe que se $a \notin \mathbb{N}$, então $-a \in \mathbb{N}$, e se $a \in \mathbb{N} - \{0\}$, então $-a \notin \mathbb{N}$. Dados $a,\ b \in \mathbb{Z}$, define-se $a + b$ de modo que $a + b = b + a$ e:

i) $a + b$ é a mesma soma de a e b definida em $\mathbb{N}$, quando $a,\ b \in \mathbb{N}$;

ii) $a + b = a - (-b)$, quando $a \in \mathbb{N}$ e $b \notin \mathbb{N}$, com $a \geq -b$ em $\mathbb{N}$;

iii) $a + b = -(-b - a)$, quando $a \in \mathbb{N}$ e $b \notin \mathbb{N}$, com $a \leq -b$ em $\mathbb{N}$;

iv) $a + b = -(-a + (-b))$, quando $a,\ b \notin \mathbb{N}$.

Sendo que nos itens (ii) e (iii), a operação de $-$ nos membros direitos das igualdades representam a operação de subtração de números naturais.

No conjunto dos números inteiros, continuam valendo as propriedades da adição, a saber, associativa, comutativa e a relação com a ordem. Agora, a definição de subtração $b - a$ é completa, ou seja, não possui restrição quanto aos valores de a e b, e podemos defini-la como:

i) Se $a = b$, então $b - a = 0$;

ii) Se $a > b$, então $b - a = c$ tal que $b = (((a + \underbrace{1) + 1) + ... + 1)}_{\text{c 1's}}$;

iii) Se, $b < a$, então $b - a = b + (-a)$.

Para a multiplicação nos inteiros, temos:

$$(-a) \times b = a \times (-b) = -(a \times b) \text{ e } (-a) \times (-b) = a \times b$$

Além disso, continuam valendo as propriedades associativa, comutativa e distributiva em relação à adição, sendo acrescentada para os inteiros, a distributiva em relação à subtração.

Múltiplos inteiros

Dado um inteiro a, consideremos o conjunto

$$a\mathbb{Z} = \{a \times d; d \in \mathbb{Z}\}$$

que é o conjunto dos múltiplos inteiros de a.

Os múltiplos inteiros de a possuem as seguintes propriedades:

- 0 é múltiplo de a;
- Se m é um múltiplo de a então $-m$ é múltiplo de a;
- Um múltiplo de um múltiplo de a é múltiplo de a;
- Se m e n são múltiplos de a, então $e \times m + f \times n$ é múltiplo de a quaisquer que sejam os inteiros e e f.

As propriedades acima também são válidas para os múltiplos comuns dos inteiros a e b.

Se a ou b é igual a zero, então o único múltiplo comum a eles é o próprio zero, que será chamado de mínimo múltiplo comum de a e b. Se a e b são não nulos, mesmo que um deles seja negativo, definimos o mínimo múltiplo comum de a e b como sendo o menor múltiplo comum positivo.

Divisores

Definição: Dizemos que um número inteiro $d \neq 0$ é um divisor de outro inteiro a quando a é múltiplo de d, ou seja, quando $a = d \times c$, para algum inteiro c.

Dizemos também que, quando a é múltiplo de d, a é divisível por d ou que d divide a.

Para representar o fato de d ser divisor de a, ou de d dividir a, utilizamos o símbolo $d|a$. Caso isso não ocorra, escrevemos $d \nmid a$.

Por exemplo:

$$1|6, -1|6, 2|6, -2|6, 3|6, -3|6, 6|6, -6|6$$

Como consequência das propriedades de múltiplos temos que $1|a$ e $a|0$, qualquer que seja o inteiro $a \neq 0$.

Observe que se a e d são números naturais, com $a \neq 0$, e se $d|a$, então $d \leq a$, pois, pela definição, a é múltiplo de d e assim $a \geq d$.

A divisibilidade possui propriedades importantes decorrentes das propriedades dos múltiplos:

- Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$, ou seja, ela é transitiva.
- Se $d|a$ e $d|b$, então $d|(b + a)$ e $d|(b - a)$.
- Se $d|(a + b)$ ou $d|(a - b)$ e $d|a$, então $d|b$.
- d é divisor comum de a e b se, e somente se, d é divisor comum de a e $b - a$.

Definição: Dados dois números inteiros a e b, não simultaneamente nulos, o maior divisor comum de a e b será chamado de máximo divisor comum de a e b e será denotado por $mdc(a, b)$.

Observe algumas propriedades do mdc:

- $mdc(a, b) = mdc(b, a)$

- $mdc(0,b) = \begin{cases} b, \text{ se } b > 0 \\ -b, \text{ se } b < 0 \end{cases}$
- Se $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, então

$$mdc(a,b) = mdc(-a,b) = mdc(-a,-b) = mdc(a,-b)$$

Determinar o máximo divisor comum de dois números é simples, desde que esses números sejam pequenos, neste caso basta listar todos os divisores e encontrar, entre os comuns, o maior. Por exemplo, para calcular o $mdc(18,24)$, escrevemos os divisores de 18:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \pm 9,\ \pm 18$$

e os de 24:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 8,\ \pm 12,\ \pm 24$$

Observamos que o $mdc(18,24) = 6$.

Mas se pelo menos um desses números for grande, esse processo se torna praticamente impossível de se realizar, pois é extremamente complicado determinar os divisores de números grandes.

Neste caso, para determinar o mdc entre dois números utilizamos a propriedade de divisibilidade vista anteriormente:

Um número d é divisor comum de a e b, não ambos nulos, se, e somente se, ele é divisor comum de a e $b - a$.

Se esse número d for o máximo divisor comum de a e b podemos afirmar que:

$$mdc(a,b) = mdc(a,b-a)$$

Como exemplo, temos que:

$$\begin{aligned}
mdc(5600,3969) &= mdc(3969,5600-3969) \\
mdc(3969,1631) &= mdc(1631,3969-1631) \\
mdc(1631,2338) &= mdc(1631,2338-1631) \\
mdc(1631,707) &= mdc(707,1631-707) \\
mdc(707,924) &= mdc(707,924-707) \\
mdc(707,217) &= mdc(217,707-217) \\
mdc(217,490) &= mdc(217,490-217) \\
mdc(217,273) &= mdc(217,273-217)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mdc(217,56) &= mdc(56,217-56) \\ mdc(56,161) &= mdc(56,161-56) \\ mdc(56,105) &= mdc(56,105-56) \\ mdc(56,49) &= mdc(49,56-49) \\ mdc(49,7) &= 7 \end{aligned}$$

Portanto, $mdc(5600, 3969) = 7$.

Algoritmo da divisão

Sejam dois números naturais a e b, com $a > 0$ e b qualquer. Queremos comparar o número natural b com os múltiplos de a. Para isso considere todos os intervalos da forma $[na, (n+1)a)$, onde n é um número natural qualquer.

Assim,

$$\mathbb{N} = [0, a) \cup [a, 2a) \cup [2a, 3a) \cup \cdots \cup [na, (n+1)a) \cup \cdots$$

Observe que os intervalos não possuem, dois a dois, elementos em comum. Assim, o número b está em apenas um desses intervalos, digamos $[qa, (q+1)a)$.

Pode ser mostrado que existem dois números naturais q e r, unicamente determinados, tais que

$$b = qa + r,\text{com } 0 \leq r < a$$

O número b é chamado *dividendo*, o número a *divisor*, os números q e r são chamados *quociente* e *resto*, respectivamente, da divisão de b por a. E este processo é conhecido como *divisão euclidiana*.

Se b é múltiplo de a, então, para algum q natural, $b = q \times a$, e assim, q é o quociente e $r = 0$ é o resto da divisão de b por a.

Para determinar o quociente e o resto da divisão euclidiana, temos que:

- Se $b < a$, então $q = 0$ e $r = b$;

- Se $b = a$, então $q = 1$ e $r = 0$;

- Se $b > a$, então construiremos a sequência numérica:

$$b - a, b - 2a, \cdots, b - qa, b - (q+1)a$$

até encontrar um número q tal que $b-(q+1)a < 0$ e $b-qa > 0$. Assim, $qa < b < (q+1)a$, ou seja, $b = qa + r$, com $0 \leq r < a$.

Por exemplo, para dividir o número 71 por 17, escrevemos a sequência de números da forma $71 - n17$, com $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
71 - 1 \times 17 &= 54 \\
71 - 2 \times 17 &= 37 \\
71 - 3 \times 17 &= 20 \\
71 - 4 \times 17 &= 3 \\
71 - 5 \times 17 &= -14 < 0
\end{aligned}$$

Desta forma, podemos representar a divisão euclidiana de 71 por 17:

$$71 = 4 \times 17 + 3$$

Pela construção proposta, a divisão euclidiana, pode ser estendida aos números inteiros. Pode ser mostrado que, caso $a > 0$, o resto r é tal que $0 \leq r < a$, e, caso $a < 0$, o resto é tal que $0 \leq r < -a$.

Ao dividirmos -5 por -3, encontramos quociente 2 e resto 1, pois $-5 = (-3)\times 2 + 1$. Assim, tanto na divisão por 2, quanto na divisão por -2, os possíveis restos são 0 e 1; na divisão por 3 ou -3, são 0, 1 e 2.

Dividir por $a > 0$ é equivalente a organizar os elementos em conjuntos com a elementos. Por exemplo, para saber quantas dezenas de maçãs há em um saco, basta dividir a quantidade por 10 e observar o valor encontrado no quociente. Assim, se tivermos em um saco 78 maçãs, teremos 7 dezenas, mas se tivéssemos 74 maçãs, ainda teríamos 7 dezenas de maçãs.

Algoritmo do mdc de Euclides

O Lema de Euclides: *Dados inteiros a e b, os divisores comuns de a e b são os mesmos divisores comuns de a e $b - c \times a$, para todo número inteiro c fixado.*

Demonstração: Se d é divisor comum de a e b, é claro que d é divisor de a. Como d é divisor de a e b, então existem inteiros c_1 e c_2 tais que $a = c_1 \times d$ e $b = c_2 \times d$, assim

$$b - c \times a = c_2 \times d - c \times (c_1 \times d) = c_2 \times d - (c \times c_1) \times d = [c_2 - (c \times c_2)]d,$$

ou seja, $b - c \times a$ é múltiplo de d, portanto d é divisor de $b - c \times a$. Logo, d é divisor comum de a e $b - c \times a$.

Reciprocamente, suponha que d seja um divisor comum de a e $b - c \times a$. Logo, existem inteiros c_1 e c_2 tais que, $a = c_1 \times d$ e $b - c \times a = c_2 \times d$, e assim

$$b - c \times (c_1 \times d) = c_2 \times d \rightarrowtail b - (c \times c_1)d = c_2 \times d \rightarrowtail b = c_2 \times d + (c \times c_1 \times d)$$

$$b = [c - 2 + (c \times c_1)]d$$

Logo, d é divisor comum de a e b. ■

O Lema de Euclides nos diz que os divisores de a e b são os mesmos divisores de a e $b - c \times a$, assim:

$$mdc(a, b) = mdc(a, b - c \times a),$$

o que permite tornar o processo menos complexo.

Vamos calcular o $mdc(a, b)$ onde $a = 108$ e $b = 294$.

Pelo Lema de Euclides, sabemos que o mdc de a e b é também mdc de a e de b menos um múltiplo qualquer de a. Mas qual dos múltiplos realmente facilitará o processo? Esse número é encontrado utilizando o algoritmo da divisão:

$$294 = 2 \times 108 + 78$$

Assim,

$$mdc(108, 294) = mdc(108, 294 - 2 \times 108) = mdc(108, 78)$$

Utilizando a mesma ideia, agora para 78 e 108:

$$108 = 1 \times 78 + 40$$

Assim,

$$mdc(108, 294) = mdc(108, 78) = mdc(108 - 1 \times 78, 78) = mdc(40, 78)$$

Utilizando novamente o algoritmo da divisão, desta vez para 40 e 78:

$$78 = 1 \times 40 + 38$$

Assim,

$$mdc(108, 294) = mdc(40, 78) = mdc(40, 18 - 1 \times 40) = mdc(40, 38)$$

Utilizando mais uma vez a ideia inicial, para 40 e 38:

$$mdc(108, 294) = mdc(40, 38) = mdc(40 - 1 \times 38, 38) = mdc(2, 38)$$

E finalmente,

$$38 = 19 \times 2$$

Assim,

$$mdc(108, 294) = mdc(2, 38) = mdc(2, 38 - 19 \times 2) = mdc(2, 0) = 2$$

Portanto $mdc(108, 294) = 2$.

O procedimento acima pode ser sistematizado por:

	2	1	1	1	19
294	108	78	40	38	2 = mdc
78	40	38	2	0	

2.3.5 Exercícios

Aplicando os conceitos vistos acima, resolva as seguintes questões:

1. **(OBMEP 2013 - Nível 2 - Questão 5)**

   Qual é o algarismo das dezenas da soma

   $$\underbrace{7}_{\text{um sete}} + \underbrace{77}_{\text{dois setes}} + \underbrace{777}_{\text{três setes}} + \underbrace{7777}_{\text{quatro setes}} + \ldots + \underbrace{777\ldots77}_{\text{setenta e seis setes}} + \underbrace{777\ldots777}_{\text{setenta e sete setes}} ?$$

   (a) 5

   (b) 6

   (c) 7

   (d) 8

   (e) 9

2. **(OBMEP 2010 - Nível 1 - Questão 6)**

   Na adição ao lado, o símbolo ♣ representa um mesmo algarismo. Qual é o valor de ♣ × ♣ + ♣?

$$\begin{array}{r} 4\clubsuit 7 \\ +\ 895 \\ \hline 1\clubsuit\clubsuit 2 \end{array}$$

(a) 6

(b) 12

(c) 20

(d) 30

(e) 42

3. **(OBMEP 2012 - Nível 3 - Questão 13)**

   Para fazer várias blusas iguais, uma costureira gastou R$ 2,99 para comprar botões de 4 centavos e laços de 7 centavos. Ela usou todos os botões e laços que comprou. Quantas blusas ela fez?

   (a) 2

   (b) 5

   (c) 10

   (d) 13

   (e) 23

4. **(OBMEP 2013 - Nível 2 - Questão 8)**

   Lucas pensou em um número, dividiu-o por 285 e obteve resto 77. Se ele dividir o número em que pensou por 57. Qual é o resto que ele vai encontrar?

   (a) 0

   (b) 20

   (c) 40

   (d) 54

   (e) 56

2.4 Problemas de Contagem

A seção a seguir é baseada na apostila Métodos de Contagem e Probabilidade do Programa de Iniciação Científica da OBMEP [14]. Para maiores informações e um estudo mais detalhado sobre o assunto pode-se consultar a própria apostila ou, então, o *site* do Portal da Matemática [13].

2.4.1 Introdução

Um dos assuntos mais interessantes de Matemática é o estudo dos problemas de contagem, pois ao mesmo tempo em que é elementar, pois as resoluções necessitam apenas das quatro operações básicas, podem se tornar extremamente complexas, pois se não forem abordadas de maneira apropriada, podem se tornar praticamente impossíveis.

2.4.2 Fatorial

No estudo dos problemas de contagem em muitos casos surgem expressões envolvendo multiplicação de números naturais consecutivos como, por exemplo, $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, ou, $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11$. Por esse motivo, definiu-se uma nova expressão envolvendo números naturais, o fatorial, que se define da seguinte forma:

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ n \cdot (n-1)!, & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Desta forma, resolvendo essa recorrência, concluímos que o fatorial também pode ser definido como:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Exemplo 01: Calcule:

a) $4!$

Solução:

Pela definição acima, temos:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

b) $\dfrac{9!}{6!}$

Solução:

Pela definição, $9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, e $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, agora escrevendo a divisão e simplificando os fatores comuns, obtemos:

$$\frac{9!}{6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

Observe que pela definição inicial: $9! = 9 \cdot 8!$, $8! = 8 \cdot 7!$ e $7! = 7 \cdot 6!$. Assim, $9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!$, e o problema proposto pode ser resolvido da seguinte maneira:

$$\frac{9!}{6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

2.4.3 Princípio Multiplicativo

Exemplo 02:

Adalberto levou para uma viagem 3 calças de cores diferentes: azul, preta e cinza; e 2 camisas também de cores distintas: branca e verde. Quantos pares de roupa (calça e camisa) diferentes ele consegue formar?

Solução:

Vamos listar todas as possíveis escolhas de Adalberto, tomando o cuidado para não repeti-las. Para isto devemos decidir qual decisão a ser tomada primeiro. No caso do exemplo, podemos utilizar a ordem proposta, ou seja:

- Escolha da cor da calça;
- A seguir, a escolha da cor da camisa.

Vamos montar uma tabela indicando as possibilidades. Para cada cor de calça escolhida,

Cor da calça	Cor da camisa
Azul	Branca
Azul	Verde
Preta	Branca
Preta	Verde
Cinza	Branca
Cinza	Verde

Tabela 2.1: Escolhas de Adalberto

Adalberto tem duas opções de cor para a camisa, como são três calças, ele tem então: $2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 6$ opções diferentes de escolha de roupas.

O processo acima exemplifica o *Princípio Multiplicativo* ou *Princípio Fundamental da Contagem*: *"Se desejarmos executar uma sequência de n ações, onde a primeira ação pode ser executada de m_1 maneiras, a segunda de m_2 maneiras e assim sucessivamente, até que a n-ésima ação pode ser executada de m_n maneiras, então o número total de maneiras de executar essa sequência de ações é igual ao produto $m_1 m_2 \cdots m_n$."*

O Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo pode ser ilustrado através de uma árvore de enumeração.

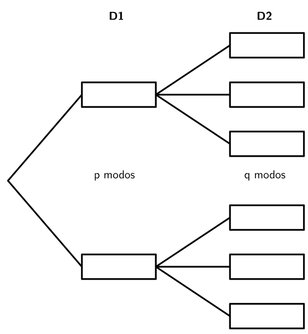


Figura 2.2: Árvore de Enumeração

Exemplo 03:

Quantas são as formas de se pintar a bandeira abaixo utilizando quatro cores diferentes?

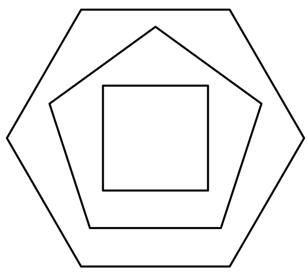


Figura 2.3: Exemplo 03

Solução:

Vamos começar escolhendo a cor mais externa, temos então quatro opções. Para escolher a cor do meio, como já temos uma cor utilizada, temos três opções. Portanto para a última parte sobram duas cores somente. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, são

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

bandeiras diferentes.

2.4.4 Problemas de Contagem

Para resolver problemas de contagem é preciso se colocar dentro da situação, escrever algumas possibilidades, para perceber quais são as possíveis dificuldades, e assim poder decidir qual decisão deve ser tomada primeiro, pois se tentarmos resolver todas as situações propostas ao mesmo tempo, não chegaremos a conclusão alguma. Portanto, as decisões mais complexas devem ser divididas em casos mais simples. Além disso, o recomendável é que as decisões mais complexas sejam resolvidas primeiro, pois dificuldades pequenas adiadas podem se tornar problemas insolúveis.

Exemplo 04: Quantos são os números de três algarismos distintos?

Solução:

Primeiramente devemos identificar possíveis dificuldades. A única restrição para este problema é que o primeiro algarismo da esquerda não pode ser zero. Então temos 9 opções para o algarismo da esquerda, 9 opções para o central (excluímos o utilizado no primeiro algarismo e incluímos o zero que não pôde ser escolhido) e 8 opções para o algarismo da esquerda (excluímos os dois já utilizados).

Pelo Princípio Multiplicativo, a resposta é:

$$9 \times 9 \times 8 = 648$$

Vamos tentar resolver esse exemplo de outra forma.

Começaremos pelo algarismo das unidades, para ele temos 10 opções, para o algarismo das dezenas temos 9 opções (excluímos o algarismo já utilizado) e para o algarismo das centenas a quantidade de opções depende dos algarismos utilizados anteriormente, se o zero tiver sido utilizado temos 8 opções, caso o zero não tenha sido utilizado 7. Mas qual é o total de opções? Como vamos contar esses números? A situação em que chegamos se deve a ordem das decisões tomadas.

Observe o problema a seguir, para entender como proceder caso tenha sido o raciocínio utilizado.

Exemplo 05:

Quantos são os números pares de três algarismos distintos?

Solução:

Vamos analisar as opções para escolha de cada algarismo:

- O das unidades tem que ser escolhido entre os seguintes: 0, 2, 4, 6 e 8.

- O das centenas não pode ser o zero.
- E o das dezenas somente não pode repetir os outros dois.

Observe que aqui temos um problema adicional, o zero aparece em duas condições. Para resolver esse caso, vamos separar a solução em dois casos:

1º: *O zero aparece no algarismo das unidades.*
Então temos 9 opções para o algarismo das dezenas e 8 opções para o algarismo das centenas. Logo pelo Princípio Multiplicativo temos $9 \times 8 = 72$ números pares de três algarismos distintos terminados em zero.

2º: *O zero não aparece no algarismo das unidades.*
Sobram então 4 opções para o algarismo das unidades, 8 opções para o algarismo das centenas (excluímos o zero e o algarismo das unidades) e 8 opções para o algarismo das dezenas. Pelo Princípio Multiplicativo, temos $4 \times 8 \times 8 = 256$ números.

Observe que os números contados no primeiro caso não aparecem no segundo, logo o total de números pares de três algarismos distintos é $72 + 256 = 328$.

Temos outra opção: considerar que o zero é o algarismo das centenas.

Neste caso, são 5 opções para o algarismo das unidades, 9 para o das dezenas e 8 para o das centenas, pelo Princípio Multiplicativo, são então $5 \times 9 \times 8 = 360$ números, mas aqui contamos também os números começados por zero, que são em um total de 32, pois temos 4 opções para o algarismo das unidades (não podemos utilizar o zero) e 8 opções para o das dezenas (não usamos o zero e das unidades).

Sendo assim, temos $360 - 32 = 328$ números satisfazendo a condição proposta pelo problema.

Exemplo 06:

De quantos modos podemos organizar 6 livros diferentes?

Solução:

Para o primeiro livro a ser colocado temos 6 opções, para o segundo são 5, para o terceiro são 4, e assim por diante. Então, pelo Princípio Multiplicativo, temos: $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$ modos.

Este tipo de problema é chamado de *Problema de Permutação Simples*, e de modo geral o número de permutações simples de n objetos é igual a $n!$.

Exemplo 07:

De quantos modos podem ser escolhidos três dos jogadores de um time de futebol para serem submetidos ao exame antidoping?

Solução:

Usando o Princípio Multiplicativo, temos que são $11 \times 10 \times 9 = 990$ modos, pois temos 11 opções para o primeiro jogador, 10 para o segundo e 9 para o terceiro. Mas essa quantidade está incorreta, pois contamos mais de uma vez, por exemplo, a escolha dos jogadores A, B e C. Neste caso as ordens ABC e CAB são iguais, por que os mesmos três jogadores estão sendo escolhidos para o exame.

Porém, esse erro é fácil de ser resolvido, pois todas as sequências foram contadas a mesma quantidade de vezes, então basta dividirmos o valor encontrado por esse número de repetições. Suponha então que sejam escolhidos os jogadores A, B e C, de quantas formas diferentes podemos ordená-los? Observe que este é um caso de permutação simples. Então a quantidade de formas é igual a $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

Logo, o total de modos a se escolher os três jogadores para o exame é igual a $\dfrac{990}{6} = 165$.

Esse tipo de problema é chamado *Problema de Combinação Simples*. E o número de maneiras de escolher p dentre n objetos é igual a $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

2.4.5 Exercícios

Agora vamos aplicar os conceitos discutidos anteriormente em problemas já propostos nas provas da OBMEP.

1. **(OBMEP 2012 – Nível 1 – Questão 13)**

   De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?

   (a) 2

   (b) 3

   (c) 4

   (d) 6

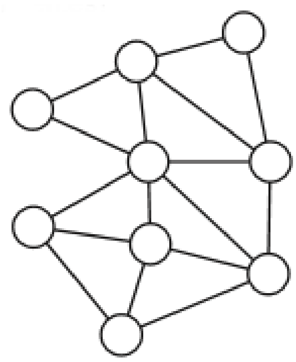


Figura 2.4: Questão 01

(e) 9

2. **(OBMEP 2013 – Nível 1 – Questão 13)**

   Carlinhos escreveu OBMEP2013 em cartões, que ele colocou enfileirados no quadro de avisos de sua escola. Ele quer pintar de verde ou amarelo os cartões com letras e de azul ou amarelo os cartões com algarismos, de modo que cada cartão seja pintado com uma única cor e que cartões vizinhos não tenham cores iguais. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer a pintura?

   (a) 2

   (b) 3

   (c) 6

   (d) 7

   (e) 12

3. **(OBMEP 2013 – Nível 2 – Questão 16)**

   Heloísa tem um cubo com faces pintadas de cores diferentes. De quantas maneiras ela pode escrever os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, um em cada face, de modo que a soma dos números em faces opostas seja sempre 7?

   (a) 6

   (b) 24

   (c) 48

   (d) 120

   (e) 720

2.5 Ângulos

2.5.1 Definição

Antes de definirmos ângulo, definiremos outros objetos geométricos, necessários:

- *Reta* – Conjunto de pontos alinhados.
- *Semirreta* – Considere uma reta r e um ponto A sobre essa reta. O ponto A divide a reta em duas partes, denominadas semirretas. Esse ponto é chamado origem da semirreta.

Consideremos agora, duas semirretas com a mesma origem, digamos o ponto O. A região compreendida entre essas semirretas é denominada ângulo. As semirretas são chamadas lados do ângulo e a origem de vértice.

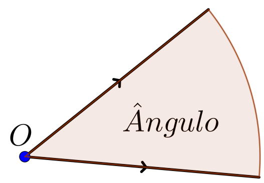


Figura 2.5: Definição de ângulo

Observemos que, na verdade, duas semirretas definem dois ângulos, por isso precisamos, especificar a qual ângulo nos referimos.

Para medir ângulos utilizamos o grau. Um grau (1°) corresponde à 1/360 da circunferência, ou seja, se dividirmos a circunferência em 360 partes iguais, por meio de semirretas com vértice no centro da circunferência, o ângulo formado por cada parte será de um grau. Com isso, se as semirretas coincidem, temos que, os dois ângulos formados são o de 0° e o de 360°.

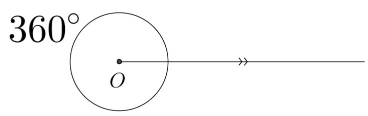


Figura 2.6: Ângulos de 0° e de 360°

Um ângulo é chamado de reto se sua medida for de 90°. Duas semirretas que formam entre si este ângulo são chamadas de perpendiculares. Semirretas com mesma origem, que estejam contidas na mesma reta, mas não sejam coincidentes, formam um ângulo denominado raso, ou seja, tem medida igual a 180°.

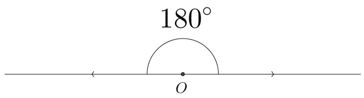


Figura 2.7: Ângulo raso

Assim, de modo geral podemos classificar um ângulo como sendo:

- *Agudo* se sua medida está entre 0° e 90°.
- *Reto* se sua medida é de 90°.
- *Obtuso* se sua medida está entre 90° e 180°.
- *Raso* se sua medida é de 180°.

Podemos também medir um ângulo a partir do comprimento do arco que ele determina em uma circunferência com centro no vértice, essa medida é conhecida como radiano. Um radiano (1 rad) corresponde a um arco cuja medida é a mesma do raio da circunferência.

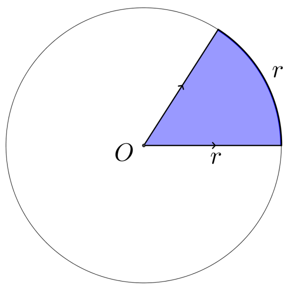


Figura 2.8: O radiano

Dois ângulos são ditos complementares se sua soma é igual a 90°. E são chamados de suplementares caso sua soma seja igual a 180°.

Considere agora duas retas concorrentes, ou seja, retas que possuem um único ponto em comum. Observe que essas retas formam quatro ângulos.

Dizemos que os ângulos α e β, γ e θ são opostos pelo vértice. Pela definição podemos dizer que os ângulos α e γ, γ e β são ângulos suplementares e, a partir daí, concluir que α e β são congruentes, isto é, possuem mesma medida. Assim, ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

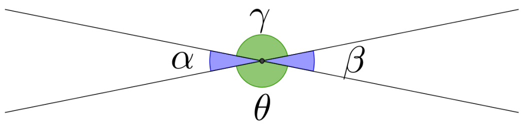


Figura 2.9: Ângulos opostos pelo vértice

2.5.2 Retas paralelas cortadas por uma transversal

Sejam r e s duas retas paralelas no plano. Retas paralelas são aquelas que não possuem pontos em comum. Considere t uma reta não paralela às outras, ou seja, t é concorrente com r e s. Conforme a figura abaixo, ela forma oito ângulos com as retas paralelas.

Esses ângulos formados são classificados de acordo com sua posição:

- *Em relação às retas paralelas temos*: os internos são os que aparecem entre as retas; e os externos são os que aparecem na parte de "fora" das retas. Assim, os ângulos c, d, e e f são internos, enquanto os ângulos a, b, g e h são externos.

- *Em relação à reta transversal temos*: os colaterais que aparecem no mesmo lado da reta; e os alternos que estão em lados opostos. Desta forma, os ângulos b, d, f e h são colaterais entre si e alternos com a, c, e e g.

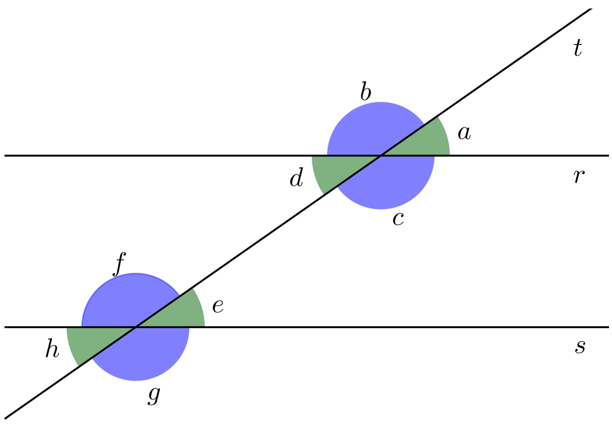


Figura 2.10: Retas paralelas cortadas por uma transversal

O Quinto Postulado de Euclides estabelece que: *"Dados, no plano, uma reta r e um ponto $A \notin r$, existe uma única reta s, paralela a r e passando por A."* Segue daí que, nas notações da figura 2.10, $c = f$ e $d + f = 180°$.

Com as consequências acima do Quinto Postulado e da definição de ângulos opostos pelo vértice, concluímos que ângulos alternos internos são congruentes, assim como ângulos alternos externos.

2.5.3 Polígonos e Ângulos

Polígono é a união de segmentos, de tal forma que é sempre possível, partindo de um ponto voltar até ele sem passar duas vezes por nenhum outro.

Iremos agora relacionar ângulos e polígonos. O principal elemento dessa relação é o triângulo. Por isso iremos agora trabalhar algumas propriedades dessa figura.

Os triângulos podem ser classificados de acordo com a medida de seus lados:

- Equilátero: se os três lados possuem o mesmo comprimento;
- Isósceles: se possui dois lados com o mesmo comprimento;
- Escaleno: se os três lados possuem medidas diferentes.

Ou de acordo com a medida dos ângulos internos:

- Acutângulo: se os três ângulos são agudos;
- Retângulo: se um dos ângulos for reto, ou seja, medir 90°;
- Obtusângulo: se um dos ângulos for obtuso.

É possível mostrar que:

- Triângulos equiláteros possem ângulos internos congruentes,e reciprocamente.
- Triângulos isósceles possuem dois ângulos internos congruentes, e reciprocamente.
- Triângulos escalenos possuem os três ângulos com medidas diferentes, e reciprocamente.

Vamos agora falar sobre a soma desses ângulos internos. Para determinar esse valor utilizaremos os conceitos vistos anteriormente.
Seja ABC um triângulo qualquer. Tracemos pelo vértice C uma reta paralela à reta que contém os vértices A e B. Pela notação da figura 2.11, temos que os ângulos a e d são alternos internos assim como os ângulos b e e, e, logo, $a = d$ e $b = e$. Dessa forma, a soma dos ângulos c, d e e é igual a soma dos ângulos a, b e c. Portanto, a soma dos ângulos internos do triângulo ABC $(a+b+c)$ é igual a 180°, pois c, d e e formam um ângulo raso.

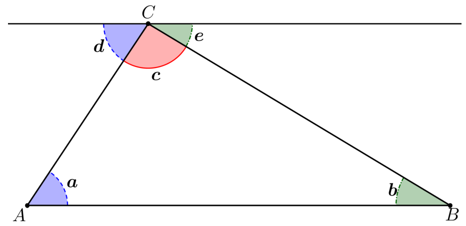


Figura 2.11: Soma dos ângulos internos de um triângulo

Outro resultado importante envolvendo os ângulos internos de um triângulo é conhecido como *Teorema do Ângulo Externo*. Mas antes de enunciar esse teorema vamos ver algumas definições:

- Ângulos adjacentes: possuem a mesma origem e compartilham um dos lados.
- Ângulo externo: é adjacente e suplementar a um dos ângulos internos de um triângulo.

Com essas definições, podemos enunciar o Teorema do Ângulo Externo: *"Dado um triângulo qualquer, a medida de cada ângulo externo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele"*. Para demonstrar esse teorema basta observar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° e a definição de ângulo externo.

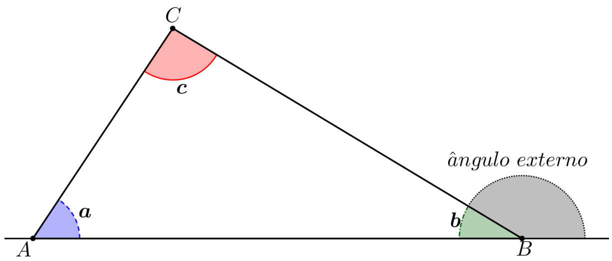


Figura 2.12: Ângulo externo

Considere agora um polígono convexo de n lados (polígono convexo é aquele que todo ângulo interno é menor que 180°). Chamaremos de diagonal do polígono todo segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos. A partir de cada vértice desse polígono podemos traçar $n - 3$ diagonais, pois podemos ligar este vértice a todos os outros, exceto o anterior, o posterior e a ele próprio.

Utilizando diagonais partindo de um mesmo vértice e os próprios lados do polígono podemos formar $n - 2$ triângulos. Podemos chegar a essa conclusão, observando o que ocorre com os quadriláteros, os pentágonos, os hexágonos, e assim por diante.

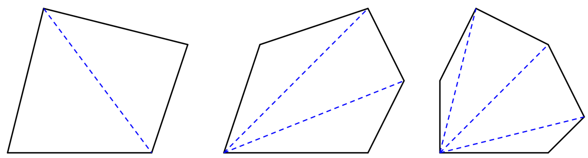


Figura 2.13: Diagonais em quadriláteros, pentágonos e hexágonos

Dessa forma, podemos concluir que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a soma dos ângulos internos de $n-2$ triângulos, ou seja, $S_n = (n-2) \times 180°$. E para finalizarmos essa aula, vamos definir o que é um polígono regular. Polígono regular é aquele cujos lados têm mesma medida e cujos ângulos internos são congruentes. Temos como exemplo de polígonos regulares, o triângulo equilátero e o quadrado.

2.6 Exercícios

Agora vamos aplicar os conceitos discutidos anteriormente em problemas já propostos nas provas da OBMEP.

1. **(OBMEP 2009 – Nível 2 – Questão 8)**

   A figura mostra dois trechos de 300 km cada um percorridos por um avião. O primeiro trecho faz um ângulo de 18° com a direção norte e o segundo, um ângulo de 44°, também com a direção norte. Se o avião tivesse percorrido o trecho assinalado em pontilhado, qual seria o ângulo desse trecho com a direção norte?

   (a) 12°

   (b) 13°

   (c) 14°

   (d) 15°

   (e) 16°

2. **(OBMEP 2009 – Nível 2 – Questão 15)**

   No triângulo ABC temos $AB = AC$ e os cinco segmentos marcados têm todos a mesma medida. Qual é a medida do ângulo $B\hat{A}C$?

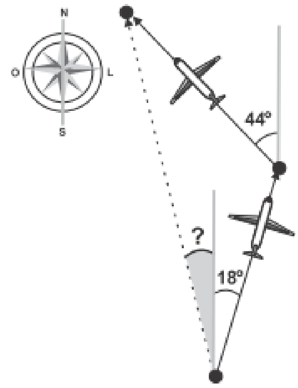


Figura 2.14: Questão 1

(a) 10°

(b) 15°

(c) 20°

(d) 25°

(e) 30°

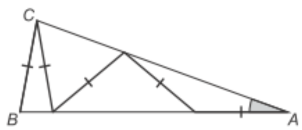


Figura 2.15: Questão 2

3. **(OBMEP 2007 – Nível 2 – Questão 12)**

   A figura mostra um polígono regular de dez lados com centro O. Qual é a medida do ângulo a?

   (a) 15°

   (b) 18°

   (c) 20°

   (d) 30°

   (e) 36°

4. **(OBMEP 2008 – Nível 2 – Questão 17)**

   Na figura o ângulo $A\hat{D}C$ mede 48° e os triângulos ACD, DBE e EAF são isósceles de bases AD, DE e EF, respectivamente. Quanto mede o ângulo $D\hat{E}F$?

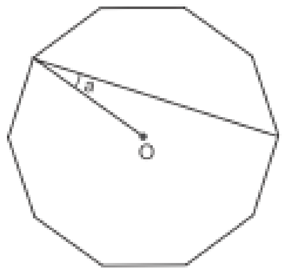


Figura 2.16: Questão 3

(a) 36°

(b) 40°

(c) 42°

(d) 48°

(e) 58°

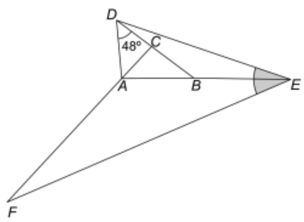


Figura 2.17: Questão 4

Capítulo 3

Procedimento Experimental

3.1 Análises Preliminares

3.1.1 Sujeitos

Esta proposta de treino olímpico foi realizada com vinte alunos do Ensino Médio, sendo 10 do 1º ano, 6 do 2º ano e 4 do 3º ano. Todos os alunos envolvidos são do turno matutino.

Os alunos que participaram da atividade apresentam um elevado interesse pela Matemática e, por consequência, possuem bons resultados na disciplina.

3.1.2 Instituição

O treinamento olímpico foi aplicado em uma escola da rede estadual do estado do Espírito Santo, localizada no município de Serra. Atualmente, a escola recebe alunos do Ensino Médio e funciona nos três turnos com aproximadamente 700 alunos por turno. Os professores envolvidos nessa proposta de treinamento olímpico lecionam nessa escola no turno matutino, e nesse turno temos 9 turmas de 1º ano, 6 turmas de 2º ano e 4 turmas de 3º ano. Por esse motivo, a maioria dos alunos participantes é do 1º ano.

A escola oferece Ensino Médio Regular nos três turnos, e no noturno funcionam também turmas de EJA e turmas de cursos técnicos.

3.2 Descrição da aplicação das sequências didáticas

Para o início do treino olímpico aqui proposto, foi solicitada uma autorização da direção da instituição. Em seguida, fizemos a divulgação da atividade, e tivemos 20 alunos interessados em participar. Entregamos para cada aluno dois termos de consentimento livre e esclarecido, um para que cada aluno assinasse e outro, para que o pai ou responsável de cada aluno assinasse. Nessa mesma ocasião, foi entregue para cada aluno o questionário que se encontra no "Anexo A".

As aulas foram marcadas no sexto horário, todas iniciando às 12 horas e terminando às 13 horas. No total tivemos 14 encontros, sendo que esses encontros foram agendados nas terças e quintas-feiras.

No primeiro encontro foi aplicada a avaliação diagnóstica com questões objetivas, e no segundo encontro foi aplicada a avaliação diagnóstica com questões discursivas. Em seguida, iniciamos a aplicação das quatro sequências didáticas. Todo o material proposto foi impresso e entregue aos alunos, para que ao final do treino eles tivessem uma apostila com os assuntos trabalhados.

Para a análise dos resultados, nós recolhemos as atividades desenvolvidas por eles e só entregamos ao final do trabalho.

Cada sequência foi aplicada em três encontros, de modo que no primeiro encontro foi apresentada ao aluno a parte teórica, levando sempre em consideração o que o aluno já sabia sobre cada um dos assuntos. No segundo encontro, eles eram divididos em três grupos para que pudessem discutir os problemas propostos e resolvê-los. E no terceiro encontro um representante de cada grupo foi ao quadro resolver cada um dos problemas.

3.3 Análise dos resultados das sequências didáticas

As sequências didáticas aplicadas foram construídas com a utilização de livros didáticos e, principalmente, com a utilização do material disponível no site da OBMEP. Nesta seção apresentaremos as análises a priori e a posteriori dos problemas propostos nas sequências.

3.3.1 Introdução ao Raciocínio Lógico

Apresentação dos problemas

1. **(OBMEP – 1ª Fase 2010 – Nível 3 – Questão 11)**

   Adriano, Bruno, Carlos e Daniel participam de uma brincadeira na qual cada um é um tamanduá ou uma preguiça. Tamanduás sempre dizem a verdade e preguiças sempre mentem.

   - Adriano diz: "Bruno é uma preguiça".
   - Bruno diz: "Carlos é um tamanduá".
   - Carlos diz: "Daniel e Adriano são diferentes tipos de animais".
   - Daniel diz: "Adriano é uma preguiça".

   Quantos dos quatro amigos são tamanduás?

   (a) 0

   (b) 1

   (c) 2

   (d) 3

   (e) 4

2. **(OBMEP – 1ª Fase 2013 – Nível 3 – Questão 13)**

   Durante a aula, dois celulares tocaram ao mesmo tempo. A professora logo perguntou aos alunos: "De quem são os celulares que tocaram?", Guto disse: "O meu não tocou", Carlos disse: O meu tocou" e Bernardo disse: "O de Guto não tocou". Sabe-se que um dos meninos disse a verdade e os outros dois mentiram. Qual das seguintes afirmativas é verdadeira?

   (a) O celular de Carlos tocou e o de Guto não tocou.

   (b) Bernardo mentiu.

   (c) Os celulares de Guto e Carlos não tocaram.

   (d) Carlos mentiu.

   (e) Guto falou a verdade.

3. **(OBMEP – 1ª Fase 2011 – Nível 3 – Questão 8)**

   Tia Geralda sabe que um de seus sobrinhos Ana, Bruno, Cecília, Daniela ou Eduardo comeu todos os biscoitos. Ela também sabe que o culpado sempre mente e que os inocentes sempre dizem a verdade.

   - Bruno diz: "O culpado é Eduardo ou Daniela."
   - Eduardo diz: "O culpado é uma menina."
   - Por fim, Daniela diz: "Se Bruno é culpado então Cecília é inocente."

   Quem comeu os biscoitos?

   (a) Ana

   (b) Bruno

   (c) Cecília

   (d) Daniela

   (e) Eduardo

Análise a priori

Para resolver as questões os alunos deveriam utilizar as ideias apresentadas durante a explicação sobre o conteúdo: organizar as informações em tabelas valorando as informações como verdadeiras ou falsas, tentando com isso encontrar contradições.

Foi observado que, na apresentação da sequência, não foram apresentados exemplos resolvidos, o que trouxe uma pequena dificuldade aos alunos. Sendo assim, fica como sugestão a inserção desse assunto com alguns exemplos resolvidos no quadro pelo professor.

Análise a posteriori

Observando a resolução do primeiro problema (Figura 3.1), percebi que os alunos fizeram uma suposição e desenvolveram a questão a partir disto. Os que começaram com a suposição correta, já encontraram a solução, enquanto os que começaram com a suposição errada, chegaram à contradição, e precisaram fazer uma nova suposição.

A maioria dos alunos resolveu o segundo problema mentalmente, conforme me relataram. Utilizando a mesma ideia do problema anterior, deve-se supor que um dos alunos falavam a verdade, e tentar chegar à uma contradição ou então que aquilo era verdade. E assim,

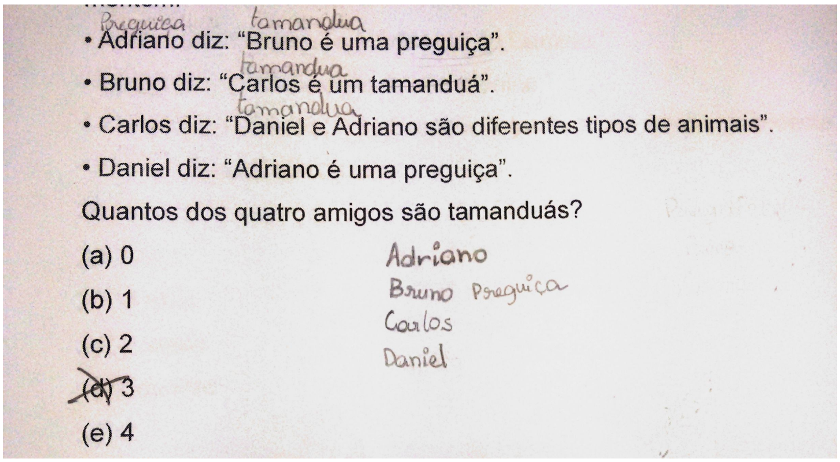
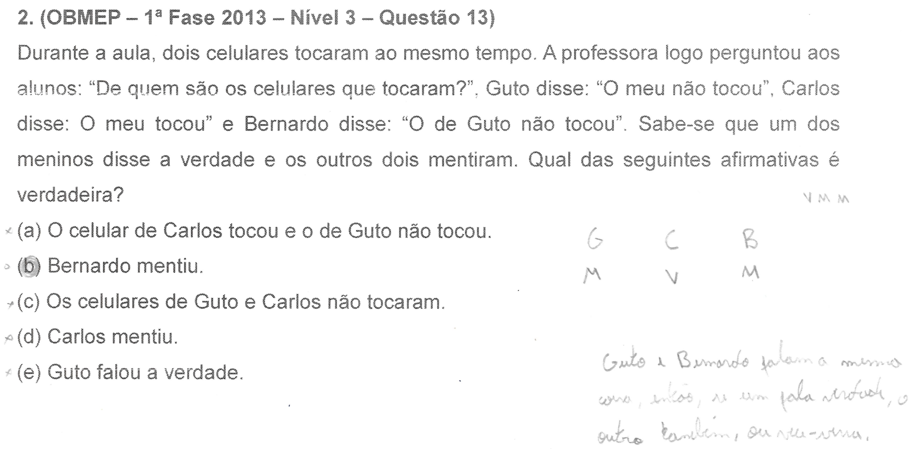

Preguiça tamandua
• Adriano diz: "Bruno é uma preguiça".
tamandua
• Bruno diz: "Carlos é um tamanduá".
tamandua
• Carlos diz: "Daniel e Adriano são diferentes tipos de animais".
• Daniel diz: "Adriano é uma preguiça".
Quantos dos quatro amigos são tamanduás?
(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3
(e) 4
Adriano
Bruno Preguiça
Carlos
Daniel

Figura 3.1: Raciocínio Lógico - Problema 1

responder à questão. Na Figura 3.2, observamos que um aluno aplica corretamente o princípio da não contradição para identificar a solução do problema.


2. (OBMEP – 1ª Fase 2013 – Nível 3 – Questão 13)

Durante a aula, dois celulares tocaram ao mesmo tempo. A professora logo perguntou aos alunos: "De quem são os celulares que tocaram?", Guto disse: "O meu não tocou", Carlos disse: O meu tocou" e Bernardo disse: "O de Guto não tocou". Sabe-se que um dos meninos disse a verdade e os outros dois mentiram. Qual das seguintes afirmativas é verdadeira?

V M M

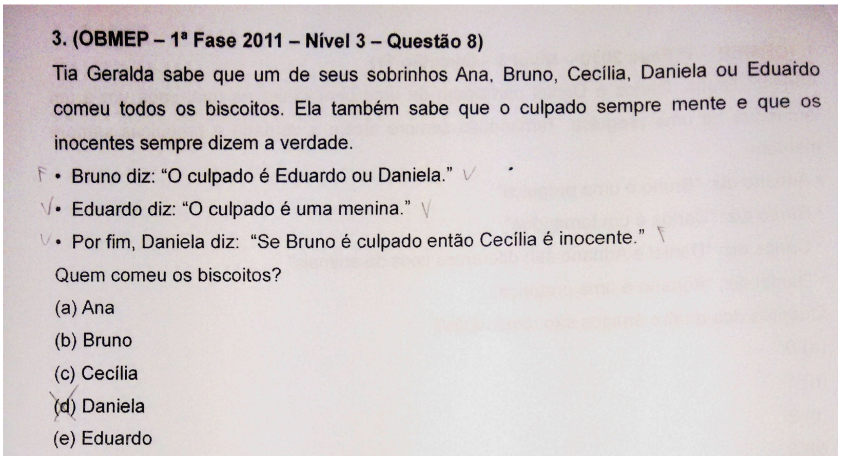
(a) O celular de Carlos tocou e o de Guto não tocou.
(b) Bernardo mentiu.
(c) Os celulares de Guto e Carlos não tocaram.
(d) Carlos mentiu.
(e) Guto falou a verdade.

G C B
M V M

Guto e Bernardo falam a mesma coisa, então, se um fala verdade, o outro também, ou vice-versa.

Figura 3.2: Raciocínio Lógico - Problema 2

Observamos na Figura 3.3 que o aluno utilizou uma estrutura semelhante à de uma tabela verdade ao resolver a terceira questão, para, então, proceder como nos problemas anteriores.



3. (OBMEP – 1ª Fase 2011 – Nível 3 – Questão 8)

Tia Geralda sabe que um de seus sobrinhos Ana, Bruno, Cecília, Daniela ou Eduardo comeu todos os biscoitos. Ela também sabe que o culpado sempre mente e que os inocentes sempre dizem a verdade.

F • Bruno diz: “O culpado é Eduardo ou Daniela.” V

V • Eduardo diz: “O culpado é uma menina.” V

V • Por fim, Daniela diz: “Se Bruno é culpado então Cecília é inocente.” V

Quem comeu os biscoitos?

(a) Ana

(b) Bruno

(c) Cecília

(d) Daniela

(e) Eduardo

Figura 3.3: Raciocínio Lógico - Problema 3

3.3.2 Conjunto dos Números Naturais e Inteiros

Apresentação dos problemas

1. **(OBMEP 2013 - Nível 2 - Questão 5)**

   Qual é o algarismo das dezenas da soma

$$\underbrace{7}_{\text{um sete}} + \underbrace{77}_{\text{dois setes}} + \underbrace{777}_{\text{três setes}} + \underbrace{7777}_{\text{quatro setes}} + \ldots + \underbrace{777\ldots77}_{\text{setenta e seis setes}} + \underbrace{777\ldots777}_{\text{setenta e sete setes}}?$$

   (a) 5

   (b) 6

   (c) 7

   (d) 8

   (e) 9

2. **(OBMEP 2010 - Nível 1 - Questão 6)**

   Na adição ao lado, o símbolo $\clubsuit$ representa um mesmo algarismo. Qual é o valor de $\clubsuit \times \clubsuit + \clubsuit$?

$$\begin{array}{r} 4\clubsuit 7 \\ +\ 895 \\ \hline 1\clubsuit\clubsuit 2 \end{array}$$

(a) 6

(b) 12

(c) 20

(d) 30

(e) 42

3. **(OBMEP 2012 - Nível 3 - Questão 13)**

   Para fazer várias blusas iguais, uma costureira gastou R$ 2,99 para comprar botões de 4 centavos e laços de 7 centavos. Ela usou todos os botões e laços que comprou. Quantas blusas ela fez?

   (a) 2

   (b) 5

   (c) 10

   (d) 13

   (e) 23

4. **(OBMEP 2013 - Nível 2 - Questão 8)**

   Lucas pensou em um número, dividiu-o por 285 e obteve resto 77. Se ele dividir o número em que pensou por 57. Qual é o resto que ele vai encontrar?

   (a) 0

   (b) 20

   (c) 40

   (d) 54

   (e) 56

Análise a priori

Para a resolução dos problemas dessa sequência os alunos utilizam os conhecimentos sobre Aritmética discutidos durante a aula. Os dois primeiros problemas abordam a adição. O terceiro problema envolve conhecimentos de múltiplos e fatoração. O último problema trabalha o algoritmo da divisão de Euclides.

A princípio os alunos não devem encontrar dificuldades nos três primeiros problemas, uma vez que são assuntos vistos desde o Ensino Fundamental. No último problema, espero que os alunos encontrem certa dificuldade, pois os professores não têm o costume de abordar o assunto da divisão utilizando o Algoritmo de Euclides.

Análise a posteriori

Logo no primeiro problema foi encontrada, por alguns alunos, uma pequena dificuldade, pois para sua resolução era necessário o conhecimento do sistema de posição decimal, assunto que não foi abordado durante as aulas. Após uma breve explicação sobre o assunto, a dificuldade foi superada e os alunos resolveram corretamente o problema (Figura 3.4).

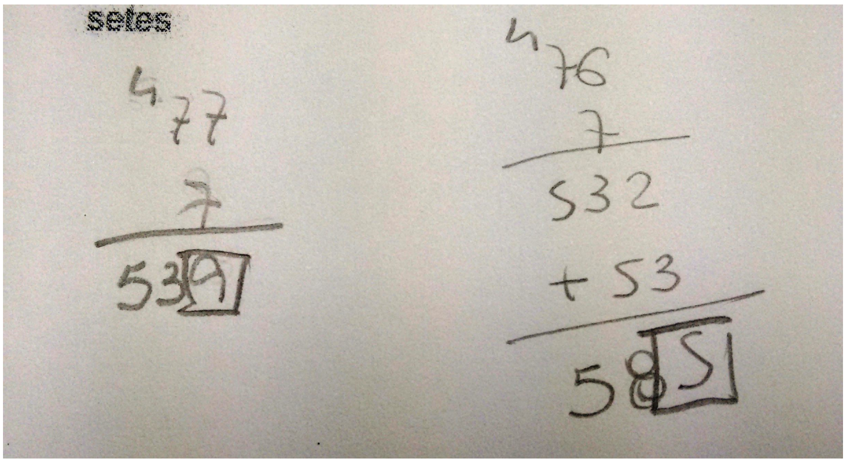


Figura 3.4: Aritmética - Problema 1

A resolução do segundo problema é bem intuitiva, ainda mais, depois de ter sido explicado sobre o sistema de posição decimal. Dessa forma, os alunos não encontraram dificuldades em sua resolução (Figura 3.5).

Nos dois últimos problemas os alunos encontraram certa dificuldade, como era esperado, pois envolve contextualização e este tipo de problema eventualmente gera dificuldades para eles. No terceiro problema, mesmo tendo sido dada a dica de fatorar o número 299, alguns alunos ainda assim, não conseguiram resolver a questão. Mas, o restante entendeu o problema e o resolveu corretamente (Figura 3.6).

Como era esperado no quarto problema, os alunos, a princípio, não utilizaram o Algoritmo da Divisão de Euclides (Figura 3.7). Eles tentaram resolver o problema utilizando o método da chave que, para a grande maioria, era o único conhecido para efetuar divisões. Após um tempo, lembrei-os da aula e de termos conversado sobre o Algoritmo de Euclides,

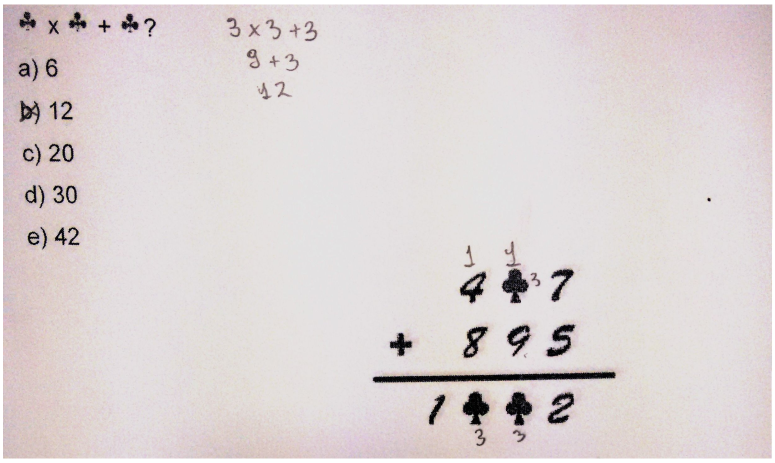


Figura 3.5: Aritmética - Problema 2

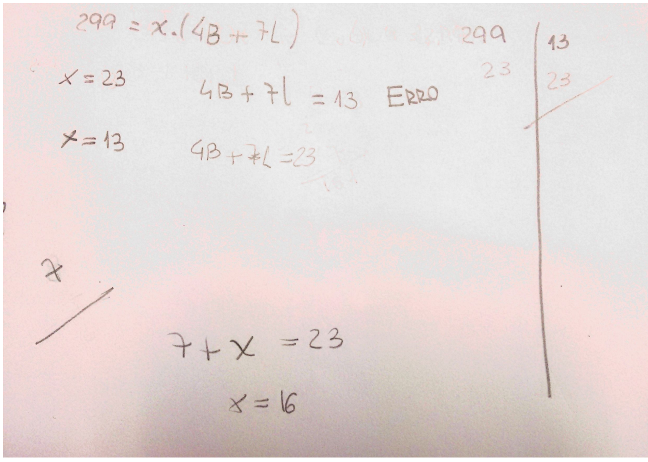


Figura 3.6: Aritmética - Problema 3

Ainda assim, alguns utilizaram métodos alternativos para resolver a questão (Figura 3.8).

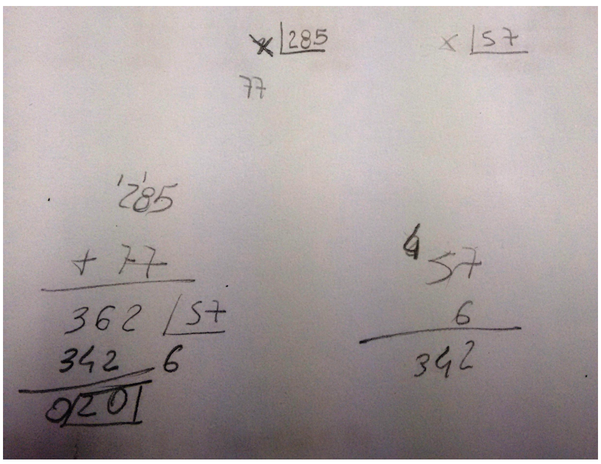


Figura 3.7: Aritmética - Problema 4

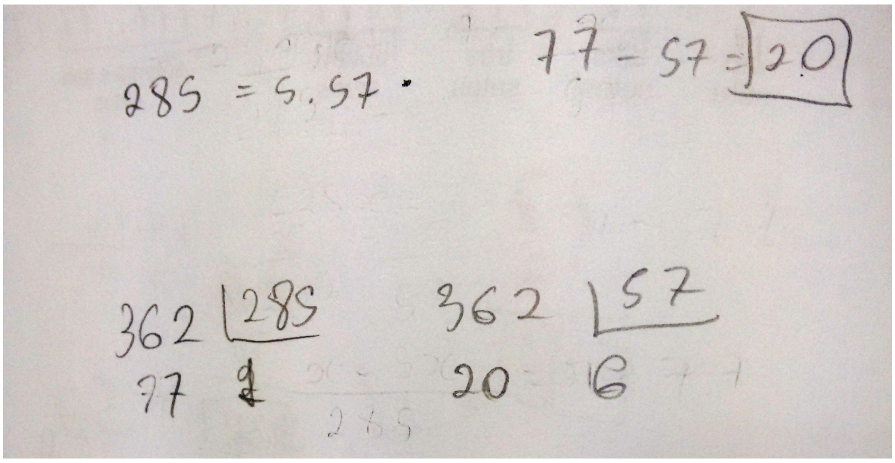


Figura 3.8: Aritmética - Problema 4

Esta sequência foi muito útil, pois pude observar que mesmo sendo um assunto bastante estudado, os alunos ainda assim encontraram dificuldades em resolver os problemas. Essa observação reforça a nossa motivação para execução deste projeto, uma vez que os alunos da rede pública chegam ao Ensino Médio com poucos conhecimentos básicos de Matemática.

3.3.3 Problemas de Contagem

Apresentação dos problemas

1. **(OBMEP 2012 – Nível 1 – Questão 13)**

   De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?

   (a) 2

   (b) 3

   (c) 4

   (d) 6

   (e) 9

2. **(OBMEP 2013 – Nível 1 – Questão 13)**

   Carlinhos escreveu OBMEP2013 em cartões, que ele colocou enfileirados no quadro

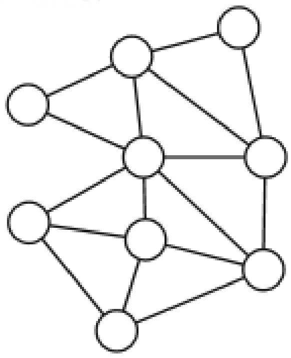


Figura 3.9: Questão 01

de avisos de sua escola. Ele quer pintar de verde ou amarelo os cartões com letras e de azul ou amarelo os cartões com algarismos, de modo que cada cartão seja pintado com uma única cor e que cartões vizinhos não tenham cores iguais. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer a pintura?

(a) 2

(b) 3

(c) 6

(d) 7

(e) 12

3. **(OBMEP 2013 – Nível 2 – Questão 16)**

Heloísa tem um cubo com faces pintadas de cores diferentes. De quantas maneiras ela pode escrever os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, um em cada face, de modo que a soma dos números em faces opostas seja sempre 7?

(a) 6

(b) 24

(c) 48

(d) 120

(e) 720

Análise a priori

A proposta dos problemas apresentados nesta sequência é de que o aluno aplique a teoria desenvolvida. Além disso, que ele elabore sua própria estratégia de solução para cada situação apresentada.

Os alunos do 1º e 2º anos podem apresentar alguma dificuldade na resolução dos problemas, uma vez que ainda não tiveram contato com o assunto e não possuem experiência suficiente para criar os métodos de resolução necessários.

A professora Drielly apresenta em seu trabalho uma sequência sobre Probabilidade, que dá continuidade a esta sequência.

Análise a posteriori

Como era esperado, os alunos do 1º e 2º anos tiveram uma certa dificuldade em compreender certas ideias, pois ainda não tiveram contato com o assunto abordado.
Além disso, alguns alunos conseguiram visualizar com certa facilidade as soluções, enquanto alguns encontraram certa dificuldade, uma vez que o desenvolvimento não depende de conhecimentos avançados de Matemática e sim, de uma correta leitura da questão.
Observando as soluções do primeiro problema, visualizamos essas diferenças. Enquanto um aluno, resolveu de forma clara e sucinta (Figura 3.10), o outro não identificou corretamente a proposta do problema (Figura 3.11).

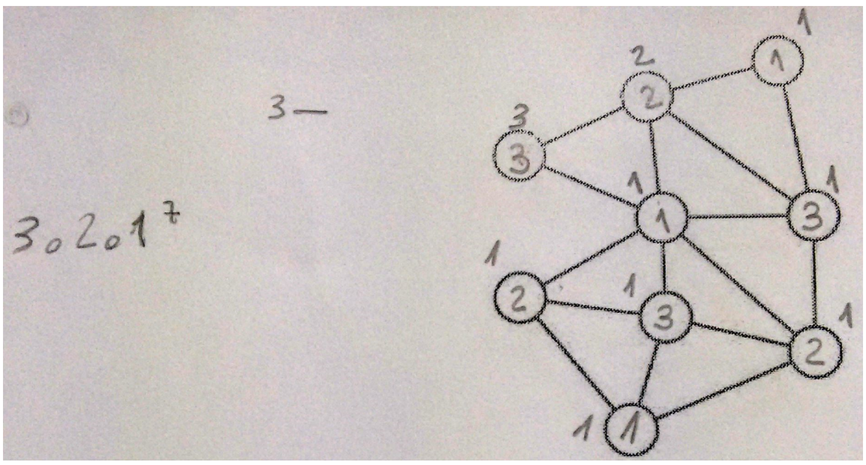


Figura 3.10: Problemas de Contagem - Problema 1

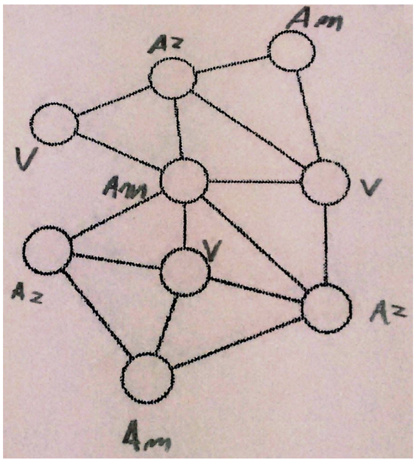


Figura 3.11: Problemas de Contagem - Problema 1

Na resolução do segundo problema, eles compreenderam mais facilmente o que era proposto. Por isso, não encontraram tanta dificuldade na resolução, mesmo aqueles que não entenderam corretamente o primeiro problema.

Observamos que um aluno (Figura 3.12) listou todas as possibilidades de todos os cartões juntos, enquanto o outro aluno (Figura 3.13) listou as possibilidades de um grupo e as possibilidades do outro grupo e observou quais satisfaziam as condições impostas pelo problema.

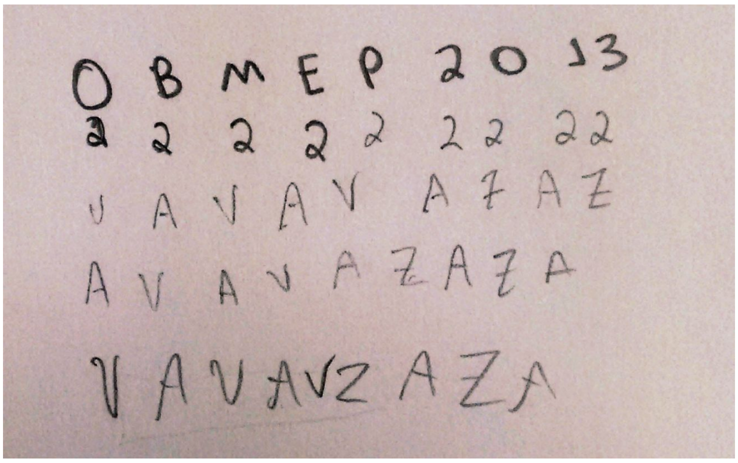


Figura 3.12: Problemas de Contagem - Problema 2

O terceiro problema não apresentou grande dificuldade para os alunos, pois, com os problemas anteriores, eles melhoraram sua percepção quanto à resolução das questões.

Quanto às resoluções do problema, observamos um aluno (Figura 3.14) que conseguiu

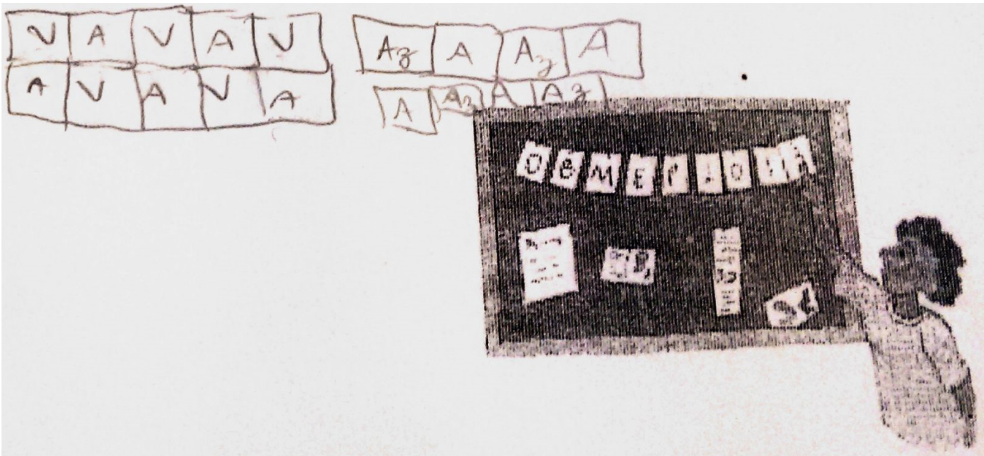


Figura 3.13: Problemas de Contagem - Problema 2

resolver a questão de forma mais direta, enquanto outro aluno (Figura 3.15) precisou detalhar um caso e, a partir dele, encontrar a resposta correta.

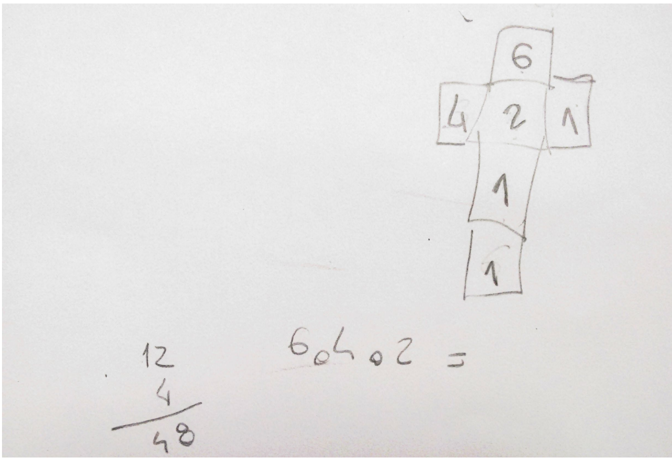


Figura 3.14: Problemas de Contagem - Problema 3

Foi possível observar, nessa sequência, o que já se esperava antes de sua execução: um grupo de alunos identifica rapidamente o desenvolvimento da solução, mesmo não tendo contato anterior com o assunto; um outro grupo identifica a solução mas, de uma forma mais extensa, necessitando detalhar algum caso para conseguir terminar a resolução; e um último grupo que, mesmo com a sequência de resoluções, ainda encontra dificuldade em visualizar o que é proposto.

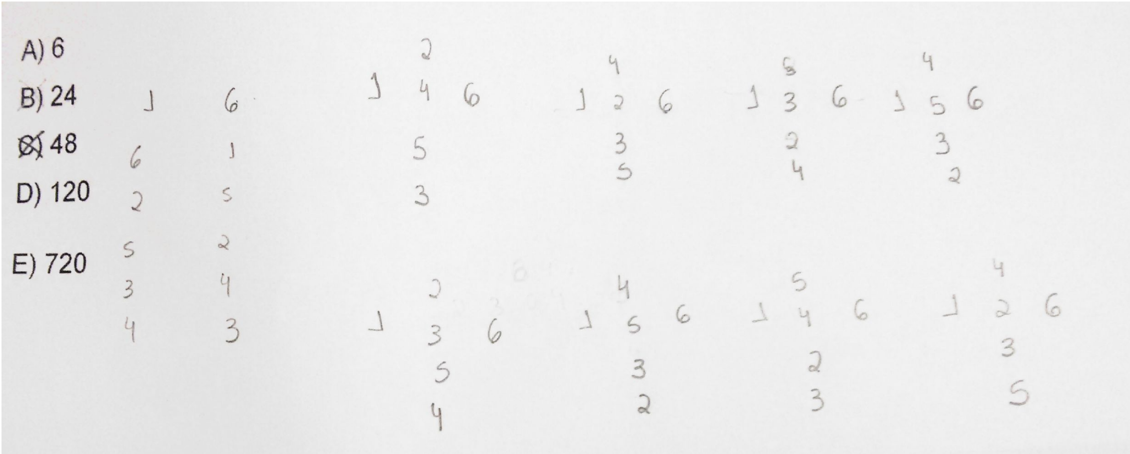


Figura 3.15: Problemas de Contagem - Problema 3

3.3.4 Ângulos

Apresentação dos problemas

1. **(OBMEP 2009 – Nível 2 – Questão 8)**

   A figura mostra dois trechos de 300 km cada um percorridos por um avião. O primeiro trecho faz um ângulo de 18° com a direção norte e o segundo, um ângulo de 44°, também com a direção norte. Se o avião tivesse percorrido o trecho assinalado em pontilhado, qual seria o ângulo desse trecho com a direção norte?

   (a) 12°

   (b) 13°

   (c) 14°

   (d) 15°

   (e) 16°

2. **(OBMEP 2009 – Nível 2 – Questão 15)**

   No triângulo ABC temos $AB = AC$ e os cinco segmentos marcados têm todos a mesma medida. Qual é a medida do ângulo $B\hat{A}C$?

   (a) 10°

   (b) 15°

   (c) 20°

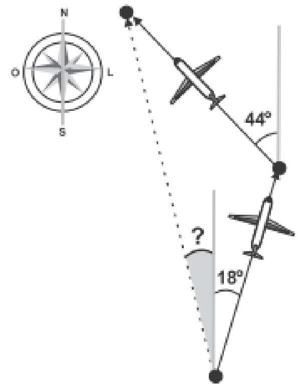


Figura 3.16: Ângulos - Problema 1

(d) 25°

(e) 30°

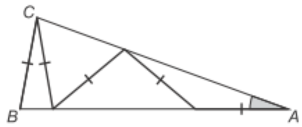


Figura 3.17: Ângulos - Problema 2

3. **(OBMEP 2007 – Nível 2 – Questão 12)**

   A figura mostra um polígono regular de dez lados com centro O. Qual é a medida do ângulo a?

   (a) 15°

   (b) 18°

   (c) 20°

   (d) 30°

   (e) 36°

4. **(OBMEP 2008 – Nível 2 – Questão 17)**

   Na figura o ângulo $A\hat{D}C$ mede 48° e os triângulos ACD, DBE e EAF são isósceles de bases AD, DE e EF, respectivamente. Quanto mede o ângulo $D\hat{E}F$?

   (a) 36°

   (b) 40°

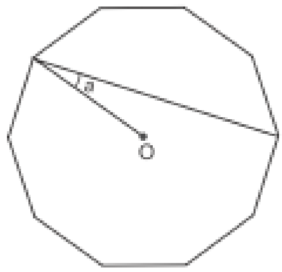


Figura 3.18: Ângulos - Problema 3

(c) 42°

(d) 48°

(e) 58°

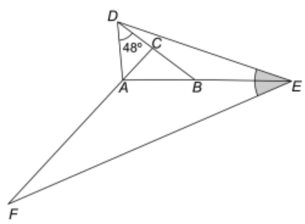


Figura 3.19: Ângulos - Problema 4

Análise a priori

Os problemas propostos nessa sequência abordam algumas propriedades de ângulos e sua relação com os polígonos.

Para a resolução do primeiro problema, o aluno necessita de conhecimentos sobre vários assuntos relacionados à ângulos: ângulos em uma transversal cortada por duas paralelas, soma dos ângulos internos de um triângulo, relação dos ângulos em um triângulo isósceles.

No segundo problema, o aluno necessita somente dos conhecimentos sobre soma dos ângulos internos de um triângulo e da relação dos ângulos em um triângulo isósceles. Além disso, é necessário conhecimentos algébricos para manipulação das expressões que surgem durante a resolução.

Para o terceiro problema é preciso que o aluno saiba sobre o ângulo central em um polígono regular.

E para finalizar a sequência o quarto problema reforça as relações sobre ângulos e triângulos.

Análise a posteriori

Apesar do primeiro problema (Figura 3.20) envolver uma quantidade maior de conceitos, os alunos não encontraram dificuldades para sua resolução, aplicando corretamente o que foi explicado durante a aula.

O segundo problema acabou se tornando um pouco mais complexo, uma vez que seu

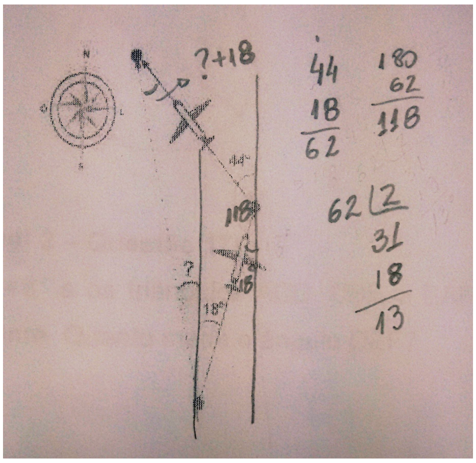


Figura 3.20: Ângulos - Problema 1

desenvolvimento é literal. Assim, a maioria dos alunos não conseguiu resolver.

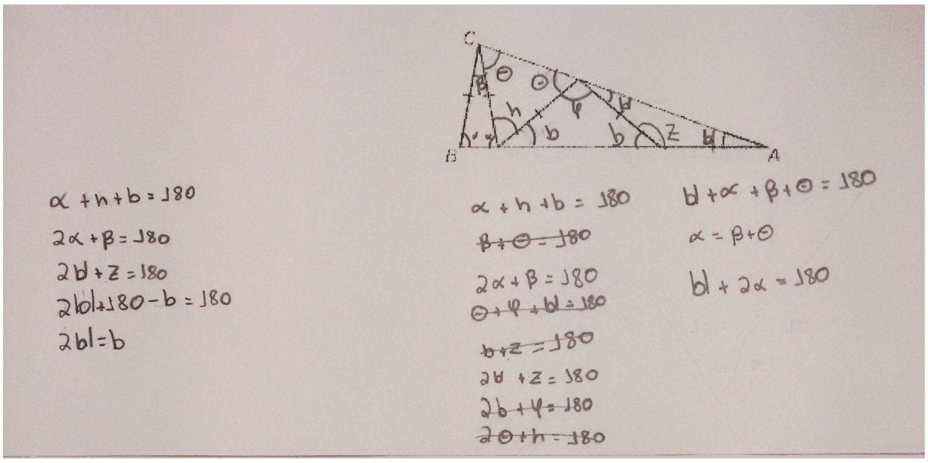


Figura 3.21: Ângulos - Problema 2

Observamos na tentativa de resolução (Figura 3.21) que o aluno utilizou corretamente os conceitos de ângulo e não concluiu a resolução, pois esbarrou na solução do sistema linear que encontrou.

Na resolução do terceiro problema (Figura 3.22), alguns alunos visualizaram a solução rapidamente. Enquanto outros não identificaram, no desenho, os elementos necessários

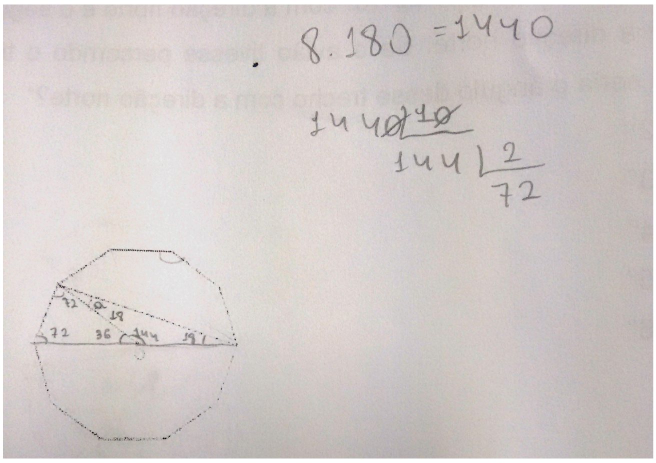


Figura 3.22: Ângulos - Problema 3

para a solução. Assim, foi preciso que eu desse algumas dicas. Após isto, os alunos conseguiram resolver o problema.

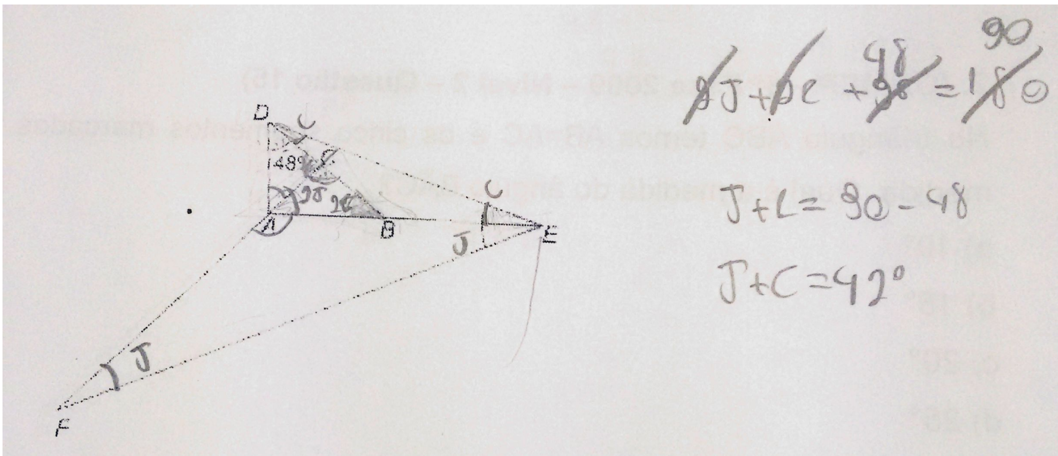


Figura 3.23: Ângulos - Problema 4

No último problema (Figura 3.23), eles não encontraram muitas dificuldades, pois, os conceitos necessários já haviam sido utilizados nos problemas anteriores.

3.4 Conclusão

Com o decorrer dos encontros, percebemos o envolvimento dos alunos com a Matemática e o interesse que foi despertado pela participação na OBMEP. Os conteúdos que foram pensados para os encontros foram recebidos com satisfação e cada aluno compartilhou o que já sabia sobre o assunto. Todas as sequências foram desenvolvidas de maneira progressiva e gradual, de tal forma que foi possível perceber a existência do aprendizado.

O questionário respondido pelos alunos teve um papel importante no desenvolvimento da pesquisa, pois nos possibilitou compreender o individual de cada aluno e sua opinião sobre a OBMEP. Além disso, proporcionou momentos de crescimento para os alunos com a apresentação das ferramentas disponíveis no site da Olimpíada.

O desenvolvimento das atividades em grupo desenvolveu o trabalho em equipe e melhorou a participação desses alunos em sala de aula. Os alunos participantes da pesquisa começaram a se destacar durante a aula regular, pois o medo de questionar já não existia mais.

Este trabalho traz apenas parte de uma proposta de treino olímpico. Assim, deixo como sugestão a elaboração de mais sequências e a junção desse material de modo que o aluno possa dispor de uma apostila como produto final dos encontros.

Referências Bibliográficas

[1] **OBMEP** (Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), *http://www.obmep.org.br/*. Acesso em: 23 de Janeiro de 2014.

[2] DRUCK, S. Introdução. **Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP)**, Brasília, 2011. 9-12.

[3] ANDRADE, M. L. T. D. D. **Geometria Esférica: uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no Ensino Básico**, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p. 120. 2011.

[4] PALHARES, P. **Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico**. 1ª Edição. ed. Lisboa: Lidel, 2004.

[5] MUNDIM, Roberto Patrus. A Lógica Formal – princípios elementares. **Economia & Gestão**, Belo Horizonte, Ed. PUC Minas, v.2, n.3, jan./jun. 2002.

[6] LIMA, E. L. et al. **Temas e Problemas Elementares**. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Coleção do Professor de Matemática - Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

[7] BIONDI, R. L.; VASCONCELLOS, L.; MENEZES-FILHO, N. E**nhancing quality of education in Latin America**: Evaluating the impact of the Brazilian Public School Mathematics Olympics. [S.l.]. 2012.

[8] NEVES, P. D. C. **A Lógica Matemática e a Semântica auxiliando na aprendizagem de alunos do Ensino Médio**. Universidade Católica de Brasília. Brasília. 2006.

[9] **InfoEscola**. Trabalhos Acadêmicos e Pesquisas Escolares. Disponível em: <www.infoescola.com>. Acesso em: 12 Março 2014.

[10] D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 23ª. ed. Campinas: Papirus, 2012.

[11] GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática**, 8º ano. São Paulo: FTD, 2009.

[12] HEFEZ, Abramo. **Iniciação à Aritmética**. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. .

[13] **Portal da Matemática**. Disponível em: <http://matematica.obmep.org.br>. Acesso em: 10 Jun. 2017.

[14] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto de. **Métodos de contagem e probabilidade**. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

Apêndice A

Anexos

A.1 Anexo A

UFES PROFMAT CAPES SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Universidade Federal do Espírito Santo

Centro de Ciências Exatas

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

PROJETO DE PESQUISA: INTRODUÇÃO AO TREINAMENTO OLÍMPICO: UMA PROPOSTA PARA OS ALUNOS DA REDE PÚBLICA ESTADUAL

1. Você participa da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OMBEP)?

( ) Sim.

( ) Não.

Se sim, assinale os anos em que você participou.

( ) 2013 ( ) 2012 ( ) 2011 ( ) 2010 ( ) 2009

2. Você sabe quais são as premiações que a OBMEP oferece?

( ) Sim.

( ) Não.

3. Como você classifica a prova da OBMEP?

( ) Fácil.

( ) Médio.

( ) Difícil.

( ) Muito Difícil.

4. Quando recebe a prova da OBMEP você tem a sensação de que:

( ) Sabe fazer muitas questões.

( ) Sabe fazer a metade das questões.

( ) Não sabe fazer muitas questões.

( ) Não sabe fazer nada.

5. Você se prepara para participar da OBMEP?

( ) Sim.

( ) Não.

6.O seu professor de matemática te oferece alguma preparação para a Prova da OBMEP?

( ) Sim.

( ) Não.

7. Você já acessou o site da OBMEP?

( ) Sim.

( ) Não.

Se sim, assinale o que você utilizou do site.

( ) Utilizei o banco de questões.

( ) Utilizei as provas e soluções.

( ) Utilizei as apostilas do PIC.

( ) Utilizei os vídeos.

8. A participação na OBMEP te estimula a estudar mais conceitos da Matemática? Por quê?

( ) Sim.

( ) Não

____

____

____

____

A.2 Anexo B

UFES PROFMAT CAPES SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Universidade Federal do Espírito Santo

Centro de Ciências Exatas

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Nome:____

Avaliação Diagnóstica

1. (OBMEP 2010) Carolina tem três cartões brancos numerados de 1 a 3 e três cartões pretos, também numerados de 1 a 3. Ela escolheu, ao acaso, um cartão branco e um preto. Qual é a probabilidade de a soma dos números dos cartões escolhidos ser par?

   (a) 3/5

   (b) 5/9

   (c) 1/2

   (d) 2/3

   (e) 3/4

2. (OBMEP 2010) Cada quadradinho na figura deve ser preenchido com um sinal de adição (+) ou de multiplicação (×). Qual é o maior valor possível da expressão obtida depois de preenchidos todos os quadradinhos?

$$2 \; \boxed{} \; 3 \; \boxed{} \; 0 \; \boxed{} \; 8 \; \boxed{} \; 9 \; \boxed{} \; 1$$

   (a) 77

   (b) 78

   (c) 79

   (d) 80

   (e) 81

3. (OBMEP 2009) Para achar o número de seu sapato, Maurício mediu o comprimento de seu pé em centímetros, multiplicou a medida por 5, somou 28, dividiu tudo por 4 e arredondou o resultado para cima, obtendo o número 40. Qual das alternativas mostra um possível comprimento do pé do Maurício?

   (a) 24 cm

   (b) 25 cm

   (c) 26 cm

   (d) 27 cm

   (e) 28 cm

4. (OBMEP 2010) Na figura ao lado os pontos destacados sobre a reta estão igualmente espaçados. Os arcos que ligam esses pontos são semicircunferências e a região preta tem área igual a 1. Qual é a área da região cinza?

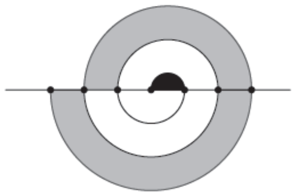
   (a) 15

   (b) 18

   (c) 25

   (d) 30

   (e) 36



5. (OBMEP 2010) A estrada que passa pelas cidades de Quixajuba e Paraqui tem 350 quilômetros. No quilômetro 70 dessa estrada há uma placa indicando Quixajuba a 92 km. No quilômetro 290 há uma placa indicando Paraqui a 87 km. Qual é a distância entre Quixajuba e Paraqui?

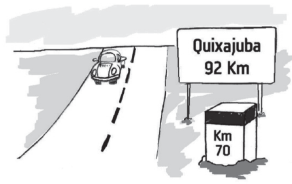
   (a) 5 km

   (b) 41 km

   (c) 128 km

   (d) 179 km

   (e) 215 km



6. (OBMEP 2010) Adriano, Bruno, Carlos e Daniel participam de uma brincadeira na qual cada um é um tamanduá ou uma preguiça. Tamanduás sempre dizem a verdade e preguiças sempre mentem.

   - Adriano diz: “Bruno é uma preguiça”.
   - Bruno diz: “Carlos é um tamanduá”.
   - Carlos diz: ”Daniel e Adriano são diferentes tipos de animais”.
   - Daniel diz: “Adriano é uma preguiça”.

   Quantos dos quatro amigos são tamanduás?

   (a) 0

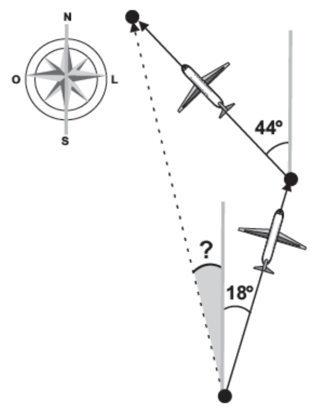
   (b) 1

   (c) 2

   (d) 3

   (e) 4

7. (OBMEP 2009) A figura mostra dois trechos de 300 km cada um percorrido por um avião. O primeiro trecho faz um ângulo de 18° com a direção norte e o segundo, um ângulo de 44°, também com a direção norte. Se o avião tivesse percorrido o trecho assinalado em pontilhado, qual seria o ângulo desse trecho com a direção norte?

   (a) 12°

   (b) 13°

   (c) 14°

   (d) 15°

   (e) 16°

UFES PROFMAT CAPES

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Universidade Federal do Espírito Santo

Centro de Ciências Exatas

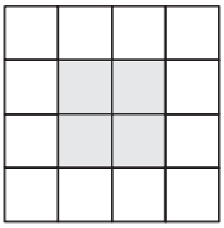
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Nome:____

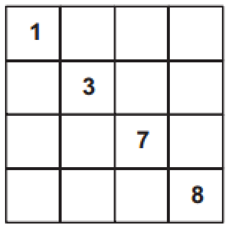
Avaliação Diagnóstica

1. (OBMEP 2011) Em cada casa de um quadriculado 4x4 deve ser colocado um dos números 1, 3, 7 e 8, de modo que em cada linha, coluna ou diagonal apareçam os quatro números.

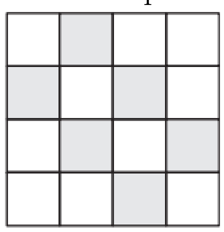
   (a) Qual é a soma dos números nos quatro quadradinhos centrais quando o quadriculado é preenchido de acordo com o enunciado?

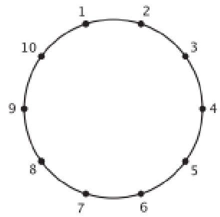
   (b) Suponha que 1, 3, 7 e 8 sejam colocados na diagonal, como na figura. De quantas maneiras é possível completar o quadriculado de acordo com o enunciado?

   (c) Qual é o maior valor possível para a soma dos números que aparecem nas casas cinzentas quando o quadriculado é preenchido de acordo com o enunciado?

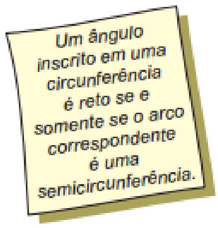
   

2. (OBMEP 2011) Em uma caixa há 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. O número de cada bola corresponde a um dos pontos da figura, os quais dividem a circunferência em 10 partes iguais. Nos itens a seguir, considere que as bolas são retiradas ao acaso, uma a uma e sem reposição.



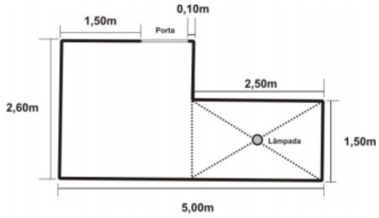
   (a) Se forem retiradas duas bolas, qual é a probabilidade de que o segmento determinado pelos pontos correspondentes seja um diâmetro da circunferência?

   (b) Se forem retiradas três bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um triângulo retângulo?



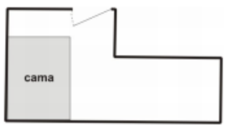
   (c) Se forem retiradas quatro bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um retângulo?

3. (OBMEP 2007) A figura mostra a planta do quarto do Pinhão. Todos os ângulos entre paredes são retos e a porta tem 90 cm de largura. Nessa questão, não consideramos a espessura das paredes.



(a) Uma lâmpada foi colocada no teto, na posição indicada na figura. Desenhe na planta a parte do chão que não será iluminada diretamente por essa lâmpada e calcule a área dessa parte.

(b) A cama do Pinhão mede 2,00 m por 1,60 m e foi colocada na posição indicada na figura ao lado. Nessa situação, é possível abrir a porta sem que ela toque na cama? Por quê?



4. (OBMEP 2007) O Grêmio Estudantil de Taperoá vai dar uma festa, vendendo ingressos a R$ 6,00. Para estimular a compra antecipada de ingressos, os diretores do Grêmio decidiram que:

   - os ingressos serão numerados a partir do número 1 e vendidos obedecendo à ordem crescente de sua numeração;
   - ao final da festa, cada participante receberá R$ 0,01 para cada ingresso vendido que tenha um número maior que o número do seu ingresso.

   (a) Se forem vendidos 100 ingressos, quanto vai receber, ao final da festa, a pessoa que comprou o ingresso com o número 1? E a que comprou o ingresso com o número 70?

   (b) Qual será o lucro do Grêmio se forem vendidos 100 ingressos?

   (c) Quantos ingressos o Grêmio deve vender para ter o maior lucro possível?