

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
PROFMAT**

JANE RODRIGUES TRINDADE

**UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O
ENSINO DE MATRIZES NO ENSINO MÉDIO**

VITÓRIA
2017

JANE RODRIGUES TRINDADE

**UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O
ENSINO DE MATRIZES NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação da Universidade Federal do Espírito Santo – Mestrado Profissional em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Professor Doutor Moacir
Rosado Filho

VITÓRIA
2017

DEDICATÓRIA

Aos meus filhos Janielly Trindade de Souza, Marcos Daniel Trindade de Souza e Lara de Souza Cordeiro, pelo tempo subtraído da nossa convivência, pelo amor, apoio e confiança, os quais foram meu suporte emocional e que me garantiram alcançar meu objetivo.

Ao meu amigo, companheiro e marido Marcos Antonio Viana de Souza por sua compreensão, apoio e paciência nesta grande jornada.

À minha mãe Vilma Farias Trindade, que em muitos momentos acreditou mais em mim do que eu mesma.

AGRADECIMENTOS

Minha gratidão é primeiramente a Deus, que me deu sustento e livramento em toda a minha trajetória. A Ele dedico toda honra desta conquista.

Ao professor orientador Moacir Rosado Filho, que esteve ao meu lado, me corrigindo e esclarecendo dúvidas, me incentivando, mostrando que sou capaz, em meio a tantas adversidades.

Aos professores doutores (Valmecir Bayer, Magda Soares Xavier, Fabio Júlio Valentim, Domingos Sávio Valério Silva) pelo período dedicado ao meu grupo de estudo, pela paciência e pelo ensino transmitido.

Ao professor doutor Florêncio F. Guimarães Filho pela solicitude e apoio extra classe.

Aos familiares, pelo apoio e compreensão, pela ausência em tantos momentos durante esta jornada.

Aos colegas de mestrado, pela parceria, amizade e por partilharem seus conhecimentos, os quais foram imprescindíveis na minha formação.

A todos os amigos, que sempre me deram palavras de motivação e que acreditaram em mim e no meu sucesso. Sou resultado da confiança e da força de vocês.

À CAPES pelo apoio financeiro.

EPÍGRAFE

“A teoria sem a prática vira ‘verbalismo’, assim como a prática sem a teoria, vira ‘ativismo’. No entanto, quando se une a prática com a teoria tem-se a práxis, a ação criadora e modificadora da realidade”.

Paulo Freire

RESUMO

Este trabalho tem como principal objetivo desenvolver a prática matemática apresentando o tema matrizes de modo tal que o aluno desenvolva o saber matemático e consiga responder aquela pergunta pragmática: “pra quê se aprende isto?”

Sabe-se que o tema apresentado não tem uma abordagem anterior ao segundo ano do Ensino Médio, sendo a noção intuitiva de matrizes vista superficialmente na análise e construção de tabelas. Esse fato gera grande dificuldade de compreensão por parte dos alunos, que não conseguem relacionar o estudo com situações práticas. Nosso alvo aqui será concretizar a teoria através de situações-problemas do dia-a-dia.

Para tanto, organizamos o trabalho em uma sequência didática distribuída em aulas seguidas de quatro aplicações práticas, sendo abordados grafos, codificação, escalonamento e produto de matrizes.

Palavra-chave: matrizes, sequência didática, aplicação de matrizes, codificação, grafos, escalonamento, produto de matrizes, aprendizagem.

ABSTRACT

This work has as main objective to develop the mathematical practice presenting the matrix subject in such a way that the student develops the mathematical knowledge and is able to answer that pragmatic question: "why one learns this?" It is known that the presented theme does not have an approach prior to the second year of high school, with the intuitive notion of matrices seen superficially in the analysis and construction of tables. This fact generates great difficulty of understanding by the students, who cannot relate the study to practical situations. Our goal here will be to realize the theory through everyday problems- situations. To do so, we organized the work in a didactic sequence distributed in classes followed by four practical applications, about graphs, coding, gaussian elimination and matrix product.

Keyword: Matrices, didactic sequence, matrix application, coding, graphs, gaussian elimination, matrix product, learning.

SUMÁRIO

<i>INTRODUÇÃO</i>	17
<i>MATRIZES – DEFINIÇÃO</i>	19
<i>MATRIZES – TIPOS, ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO</i>	23
<i>MATRIZES – MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR E TRANSPOSTA</i>	29
<i>MATRIZES – MULTIPLICAÇÃO</i>	33
<i>ESCALONAMENTO DE SISTEMAS LINEARES</i>	42
<i>APLICAÇÃO I – CAMPANHA PUBLICITÁRIA</i>	47
<i>APLICAÇÃO II – TEORIA DOS GRAFOS</i>	49
<i>APLICAÇÃO III – CÓDIGOS CORRETORES DE ERROS</i>	54
<i>APLICAÇÃO IV – ESCALONAMENTO</i>	61
<i>CONSIDERAÇÕES FINAIS</i>	67
<i>BIBLIOGRAFIA</i>	68

INTRODUÇÃO:

Este trabalho apresenta uma sequência didática em que o aluno obtém uma prática investigativa que o leva a observar a utilização da teoria matemática na resolução de problemas, facilitando a conquista de competências importantíssimas para seu processo de aprendizagem.

A esse respeito, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's Ensino Médio, parte III) afirmam que:

“Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver.” (pág. 9)

Pretendemos futuramente aplicar este trabalho a alunos do segundo ano do ensino médio da EEEM Aristóbulo Barbosa Leão, no município de Serra. Observando a composição do corpo discente da escola, é fácil constatar o baixo nível de conhecimento, e conseguimos verificar uma defasagem de três anos, em média, no aprendizado dos alunos na disciplina de matemática. Esta verificação é feita através de avaliações diagnósticas periódicas aplicadas pela equipe pedagógica da escola. Em relação à origem, podemos facilmente constatar que os alunos são oriundos de várias localidades do município e até mesmo do Estado, o que aumenta a defasagem verificada anteriormente. É necessário ainda esclarecer que 40% de nossos alunos são trabalhadores, o que reduz o tempo dispensado para os estudos. Deste modo, o que percebemos é uma situação desafiadora, no âmbito social e pedagógico.

Levando em conta a defasagem de conteúdos dos alunos das escolas públicas do Estado do Espírito Santo, e que isso é uma grande barreira para a construção de conhecimentos abstratos, necessários ao Ensino Médio, e de forma específica, o nível de dificuldade de compreensão que se multiplica, quando se refere ao estudo da Álgebra, propomos aqui atividades práticas, envolvendo pesquisa, organização e sistematização de dados, aplicação de cálculos algébricos, através das matrizes.

Uma sequência didática, distribuída em 22 aulas teóricas e práticas de caráter interdisciplinar abordando temas transversais, realizando registros de vivências e proporcionando a compreensão do conteúdo proposto através de análises de informações reais é o que se pretende fazer.

Para desenvolver o estudo aqui apresentado, estabelecemos como pré-requisitos, operações com números reais e conhecimento de equações.

Os alunos terão aulas teóricas, em que vão aprender conceitos relacionados ao tema e aulas de exercícios, onde verão como é aplicado todo o conteúdo. Nas aulas, também são propostos desafios para aprofundamento do tema da aula.

Serão também desenvolvidas quatro aplicações práticas do conteúdo desenvolvido.

Utilizando temas transversais, esta sequência didática poderá ser compartilhada com outras disciplinas, tais como Biologia, Educação Física, Sociologia utilizando o mesmo debate e aprofundando nos pontos de interesse das outras disciplinas. Podem ser abordados temas como preconceito, obesidade, alimentação saudável, anorexia, bulimia, prática esportiva, saúde, negociações comerciais e outros. Muitas outras ações, como uma Mostra Científica, dia do Esporte na Escola, Dia da Saúde na Escola, com a participação de profissionais voluntários, entre outros podem ser idealizados a partir desta sequência didática.

MATRIZES - DEFINIÇÃO

Tema: Matrizes

Objetivos: Apresentar o conceito de matrizes, através de exemplos e definições.

Conteúdos: Definição de Matrizes

Tempo Estimado: 2 aulas

Desenvolvimento:

Aula 1

- Atualmente, tudo gira em torno das informações. Porém, elas não teriam valor se não fossem organizadas de forma lógica e não pudessem ser facilmente recuperadas e relacionadas. Essa organização é feita usando-se um banco de dados, que é uma coleção de tabelas relacionadas entre si.
 - As matrizes são tabelas que relacionam dados numéricos.
- Esta atividade é proposta para ser desenvolvida com alunos reunidos em duplas, como introdução da noção de Matrizes:

As tabelas a seguir relacionam dados sobre o desempenho das equipes do grupo B da Liga Mundial de Vôlei, em 2016. Depois de analisar os dados das tabelas, construam uma tabela com a pontuação total dessas quatro equipes.



Figura 1: Lance da partida entre Brasil e Polônia durante a Liga Mundial 2016 de vôlei masculino

	Vitórias por 3 × 0 ou 3 × 1	Vitórias por 3 × 2	Derrotas por 3 × 0 ou 3 × 1	Derrotas por 3 × 2
Estados Unidos	4	1	1	0
Sérvia	6	0	0	0
Brasil	6	0	0	0
Polônia	1	0	5	0

Fonte: <http://www.resultados.com/volei/mundo/liga-mundial/resultados/>

	Pontos obtidos pela equipe
Vitória por 3 × 0 ou 3 × 1	3
Vitória por 3 × 2	2
Derrota por 3 × 0 ou 3 × 1	0
Derrota por 3 × 2	1

Orientações:

Antes de os alunos formarem duplas, leia a atividade com eles e estimule a compreensão dos dados da tabela; para isso, faça alguns questionamentos, por exemplo: “Quantas vitórias teve os Estados Unidos?”, “Quantos jogos cada equipe fez?”. Depois, deixe os alunos tentarem efetuar a tarefa proposta. Se possível, ao conferir os resultados, procure estimular a discussão dos procedimentos escolhidos por eles para a resolução.

Aula 2

1. MATRIZES:

A ideia geral de matrizes do tipo $m \times n$ é a de um quadro retangular com $m \cdot n$ elementos, dispostos em m linhas e n colunas. Na grande maioria das vezes, esses elementos são números.

Matrizes são frequentemente utilizadas para organizar dados.

1.1 Definição:

Uma matriz A é uma lista de números a_{ij} , com índices duplos, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. É representada por um quadro numérico com m linhas e n colunas no qual o elemento a_{ij} situa-se no cruzamento de i -ésima linha com a j -ésima coluna:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Se a matriz tem m linhas e n colunas, dizemos que ela é do tipo $m \times n$ ou de ordem $m \times n$.

Exemplos:

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×2 (dois por dois – duas linhas e duas colunas).

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -5 & 1 \\ 2 & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz de ordem 3×3 (três por três – três linhas e três colunas).

Frequentemente, representamos uma matriz utilizando letras maiúsculas acompanhadas de um índice representando a ordem, como, por exemplo, $A_{m \times n}$.

Na matriz $A_{m \times n}$, o elemento a_{ij} chama-se o ij -ésimo elemento de A ; escreve-se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Os números que aparecem na matriz são chamados *elementos* ou *termos* da matriz.

Exemplo: Considere a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -1 \\ -5 & 4 & 10 & 0 \\ 6 & -2 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Analisando a matriz acima, podemos observar que:

- O elemento 3 está na 1ª linha e na 1ª coluna: indica-se: a_{11} (lê-se a um um) = 3.
- O elemento 10 está na 2ª linha e na 3ª coluna: indica-se: a_{23} (lê-se a dois três) = 10.

Assim:

Para representar o elemento de uma matriz, usaremos uma letra com dois índices: O primeiro indica em que linha o elemento se encontra, e o segundo indica em que coluna; por exemplo, a_{33} é o elemento que está na 3ª linha e na 3ª coluna.

Na prática, podemos citar como exemplo a matriz $X = (x_{ij})$, com $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 3$, que tem como lei de formação $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{para } i = j \\ 0, & \text{para } i \neq j \end{cases}$. Neste caso, a matriz X será:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercícios de Fixação:

1. Escreva, no caderno a matriz correspondente à tabela de notas de três alunos no primeiro trimestre:

	Matemática	Física	Química	Biologia
Anelisa	18	20	18	21
Renata	17	18	19	24
Igor	24	27	22	30

2. Em relação à matriz do exercício 1, responda:
- O que significam os números da 1ª linha?
 - O que significam os números da 2ª coluna?
 - O que significa o número da 3ª linha e 3ª coluna?
3. Escreva as matrizes:
- $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ tal que $a_{ij} = i^2 + j^2$
 - $X = (x_{ij})_{4 \times 2}$, cujo elemento genérico é $x_{ij} = 4i - 2j + 3$

Respostas:

1. $\begin{bmatrix} 18 & 20 & 18 & 21 \\ 17 & 18 & 19 & 24 \\ 24 & 27 & 22 & 30 \end{bmatrix}$
2. a) As notas de Anelisa em cada matéria
 b) As notas de cada aluno em Física
 c) A nota de Igor em Química
3. a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 13 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 7 \\ 13 & 11 \\ 17 & 15 \end{pmatrix}$

Avaliação: Avaliação sobre o conteúdo da aula, a ser elaborada pelo professor.

MATRIZES -TIPOS, ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Tema: Tipos de Matrizes, Adição e Subtração

Objetivos: Identificar o tipo de matriz e realizar adição e subtração de matrizes.

Conteúdos: Matrizes – Tipos e Operações de Adição e Subtração

Tempo Estimado: 2 aulas.

Desenvolvimento:

Aula 1

Tipos de Matrizes:

- Uma matriz $1 \times n$ é chamada *matriz linha*. Por exemplo: $(1 \ 3 \ -2)$ é uma matriz linha do tipo 1×3 .
- Uma matriz $m \times 1$ matriz é chamada *matriz coluna*. Por exemplo: $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ é uma matriz coluna de ordem 3×1 .
- Uma matriz que contém mesmo número de linhas e colunas é chamada *matriz quadrada*.

Esse tipo de matriz $A_{n \times n}$ possui dois elementos de estudo, que são: A *Diagonal Principal*, que é constituída dos elementos a_{ij} , em que $i = j$ e a *Diagonal Secundária*, é constituída por elementos da forma $a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \dots, a_{n1}$.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -3 & 0 & 8 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Diagonal Secundária} \\ \text{Diagonal Principal} \end{array}$$

- Seja A matriz quadrada de ordem n . A é denominada *matriz identidade* de ordem n (indica-se por I_n) quando os elementos da sua diagonal principal são todos iguais a 1 e os demais são iguais a *zero*. Assim,

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ é a matriz identidade de ordem 2.}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ é a matriz identidade de ordem 3.}$$

$$\text{Em geral, } I_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- No conjunto das matrizes, a matriz que tem todos os elementos iguais a zero denomina-se *matriz nula*. Vamos simbolizar a matriz nula de ordem $m \times n$ por $O_{m \times n}$, e a *matriz nula* de ordem n por O_n .

Exemplo:

$$O_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Matriz diagonal* é uma matriz quadrada A em que $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na diagonal são nulos.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- *Matriz simétrica* é uma matriz quadrada A em que $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Igualdade de Matrizes:

Duas matrizes A e B são iguais se, e somente se, têm o mesmo tipo e seus elementos correspondentes são iguais.

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, temos simbolicamente:

$$A = B \leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \text{ com } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$$

Exemplo:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \div 2 & 2 - 1 \\ 5 \cdot 1 & 4 + 2 \end{pmatrix}$$

As matrizes são quadradas de ordem 2 e os elementos correspondentes são iguais.

b) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, então $A \neq B$, pois A e B não têm o mesmo tipo.

Adição e Subtração de Matrizes:

Acompanhe a seguinte situação:

O gerente de vendas de uma loja tem à sua disposição as tabelas de vendas mensais, em reais, dos seus três vendedores, por produto vendido. Veja:

	Vendas em Janeiro (R\$)	
Vendedor	Televisores	Computadores
Luis	23 000,00	12 000,00
Claudio	27 000,00	10 000,00
André	19 000,00	15 000,00

	Vendas em Fevereiro (R\$)	
Vendedor	Televisores	Computadores
Luis	21 000,00	10 000,00
Claudio	16 000,00	6 000,00
André	20 000,00	9 000,00

O gerente precisava saber as vendas do primeiro bimestre, em reais por produto vendido, dos seus três vendedores. Nesse caso, ele somou os dados das duas tabelas (janeiro e fevereiro), obtendo a tabela dos dados bimestrais

	Vendas no 1º bimestre (R\$)	
Vendedor	Televisores	Computadores
Luis	44 000,00	22 000,00
Claudio	43 000,00	16 000,00
André	39 000,00	24 000,00

Depois, o gerente precisava saber a evolução das vendas de janeiro para fevereiro: Tiveram aumento? Diminuíram? Qual a diferença do faturamento entre janeiro e fevereiro?

Uma maneira de obter essas informações é calcular a diferença dos dados das duas primeiras tabelas (fevereiro e janeiro), obtendo a tabela de evolução das vendas em janeiro e fevereiro:

Evolução das vendas em janeiro e fevereiro (R\$)		
Vendedor	Televisores	Computadores
Luis	-2 000,00	-2 000,00
Claudio	-11 000,00	-4 000,00
André	1 000,00	-6 000,00

Esse exemplo ilustra as operações de adição e subtração de matrizes.

Aula 2

* Adição:

Dadas duas matrizes, A e B do mesmo tipo $m \times n$, denomina-se soma da matriz A com a matriz B , que representamos por $A + B$, a matriz C do tipo $m \times n$ na qual cada elemento é obtido adicionando-se os elementos correspondentes de A e B .

Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são matrizes do tipo $m \times n$ a soma $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})$ do tipo $m \times n$ tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \text{ com } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

* Para Aprofundar (proposta de atividade para casa):

Construa três matrizes, A , B e C , de mesma ordem e verifique que:

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + O = O + A = A$, sendo O a matriz nula.
- $A + (-A) = (-A) + A = O$

As demonstrações das propriedades acima podem ser verificadas no livro *Álgebra Linear com Aplicações*, de Anton Howard e Chris Rorres.

* Matriz Oposta de uma matriz A:

É a matriz que somada com a matriz A resulta em uma matriz nula.

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, então a *matriz oposta* de A é $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, pois:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Os elementos correspondentes de A e $-A$ são números opostos. Obtendo-se $-A$ mudando o sinal de todos os elementos de A .

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \text{ então } -A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

* **Subtração de matrizes:**

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, $A - B = C$, com $C = (c_{ij})_{m \times n}$, tal que: $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 10 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & -2-(-3) & 5-6 \\ 10-(-4) & 0-5 & -1-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 10 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 14 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercícios:

1. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, calcule:

- $A + B - C$
- $A - B + C$
- $A - B - C$

2. Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz quadrada de ordem 2 tal que $a_{ij} = 2i + 3j - 5$, escreva a matriz oposta de A .

3. Escreva a matriz identidade de ordem 2 (I_2) e a matriz identidade de ordem 3 (I_3).

Respostas:

$$1. \text{ a) } \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$3. I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avaliação: Através da correção dos exercícios.

MATRIZES - MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR E TRANSPOSTA

Tema: Multiplicação e Matriz Transposta

Objetivos: Determinar o produto de um número real por matriz e definir a transposta de uma matriz.

Conteúdos: Multiplicação de um número real por uma matriz e matriz transposta

Tempo Estimado: 2 aulas.

Desenvolvimento:

Aula1

Multiplicação por um número real:

Vamos voltar ao problema da aula anterior: A situação do gerente de vendas:

Suponha que a comissão dos vendedores seja de 10% sobre o total mensal de vendas, em cada tipo de produto, vendido em fevereiro. O gerente deseja ter a informação sobre o custo das comissões pagas aos vendedores, por tipo de produto vendido. Para isto, ele pode multiplicar cada valor da tabela das vendas de Fevereiro por 0,10 (pois $0,10 = 10\%$), que é o percentual pago de comissão para os vendedores.

Vendedor	Vendas em Fevereiro (R\$)	
	Televisores	Computadores
Luis	$21\ 000,00 \cdot 0,10$	$10\ 000,00 \cdot 0,10$
Claudio	$16\ 000,00 \cdot 0,10$	$6\ 000,00 \cdot 0,10$
André	$20\ 000,00 \cdot 0,10$	$9\ 000,00 \cdot 0,10$

Realizando os cálculos com as informações, as comissões pagas em Fevereiro seriam:

Vendedor	Vendas em Fevereiro (R\$)	
	Televisores	Computadores
Luis	2 100,00	1 000,00
Claudio	1 600,00	600,00
André	2 000,00	900,00

Esse exemplo serve para ilustrar a operação de multiplicação de um número real por uma matriz. Isto porque nesta operação, multiplicamos o número real por cada elemento da matriz.

Acompanhe o exemplo:

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$, então $5 \cdot A$ corresponderá a:

$$5 \cdot A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 & 5 \cdot 6 & 5 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 4 & 5 \cdot (-5) & 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 30 & -5 \\ 20 & -25 & 0 \end{pmatrix}$$

Generalizando, se A é uma matriz $m \times n$, de elementos a_{ij} e α é um número real, então $\alpha \cdot A$ é uma matriz $m \times n$ cujos elementos são $\alpha \cdot a_{ij}$.

✓ Para aprofundar (proposta de atividade extra classe):

Escolha dois números reais e verifique as propriedades de multiplicação de número real por matriz.

Propriedades: Sendo α e β números reais e A e B matrizes de mesma ordem, verifique que:

- i) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$
- ii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- iii) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- iv) $1A = A$
- v) $0 \cdot A = O$, isto é, se multiplicarmos o número zero por qualquer matriz, o resultado será uma matriz nula.

As demonstrações das propriedades acima podem ser verificadas no livro Álgebra Linear com Aplicações, de Anton Howard e Chris Rorres.

Aula 2

Matriz Transposta:

Voltando ao problema proposto sobre vendas de uma loja, o gerente vai fazer uma apresentação para seus superiores e entre outras informações ele deseja mostrar as vendas bimestrais dos três vendedores, mas ele percebe que a visualização dos dados ficaria melhor se os vendedores estivessem nas colunas e os produtos nas linhas da tabela. Na prática, ele quer fazer o seguinte:

A tabela era assim:

	Vendas no 1º bimestre (R\$)	
Vendedor	Televisores	Computadores
Luis	44 000,00	22 000,00
Claudio	43 000,00	16 000,00
André	39 000,00	24 000,00

E ficará assim:

	Vendedor	Luis	Claudio	André
Vendas no 1º bimestre (R\$)	Televisores	44 000,00	43 000,00	39 000,00
	Computadores	22 000,00	16 000,00	24 000,00

A nova tabela do gerente é um exemplo de transposição de matriz.

Definição: Seja A uma matriz $m \times n$, denomina-se *Matriz Transposta* de A (indica-se por A^T) a matriz $n \times m$ cujas linhas são, ordenadamente as colunas de A .

Exemplos:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Propriedades: Considere as matrizes A e B e um número real k :

- i) Toda matriz cuja transposta é igual a ela, é matriz simétrica. (Observe o exemplo b).
- ii) $(A^T)^T = A$. Isto é, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma.
- iii) $(A + B)^T = A^T + B^T$. Em palavras, a transposta de uma soma é igual à soma das transpostas.
- iv) $(kA)^T = kA^T$

As demonstrações das propriedades acima podem ser verificadas no livro *Álgebra Linear com Aplicações*, de Anton Howard e Chris Rorres.

- Exercícios:

1. Escreva a matriz transposta das seguintes matrizes:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, determine:

- a) $A + B$
- b) $A - B$
- c) $5A$
- d) A^T
- e) B^T
- f) $A^T + B$

- g) $A + B^T$
 h) $3A^T$
 i) $(5A - B)^T$

Respostas:

1. a) $A^T = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ c) $C^T = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

2. a) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
 b) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$
 c) $\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
 d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
 e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

Avaliação: Através da correção dos exercícios.

MATRIZES - MULTIPLICAÇÃO

Tema: Multiplicação de Matrizes

Objetivos: Determinar o produto de matrizes

Conteúdos: Matrizes – Multiplicação.

Tempo Estimado: 5 aulas.

Desenvolvimento:

Aula 1

Introdução:

Observe as notas obtidas em um curso de Espanhol pelos alunos X, Y e Z, em cada bimestre do ano letivo.

	1º Bimestre	2º Bimestre	3º Bimestre	4º Bimestre
Aluno X	7	8	6	8
Aluno Y	4	5	5	7
Aluno Z	8	7	9	10

Para calcular a nota final do ano, o professor deve fazer uma média ponderada usando como pesos, respectivamente, 1, 2, 3 e 4. Assim, a média de cada aluno será determinada pela fórmula:

$$\frac{(1^{\circ} \text{ bim.} \times 1) + (2^{\circ} \text{ bim.} \times 2) + (3^{\circ} \text{ bim.} \times 3) + (4^{\circ} \text{ bim.} \times 4)}{1 + 2 + 3 + 4}$$

É equivalente fazer:

$$(1^{\circ} \text{ bim.} \times 0,1) + (2^{\circ} \text{ bim.} \times 0,2) + (3^{\circ} \text{ bim.} \times 0,3) + (4^{\circ} \text{ bim.} \times 0,4)$$

Podemos representar a tabela das notas bimestrais pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Vamos representar os pesos dos bimestres pela matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular as médias dos alunos:

$$\text{Aluno X: } (7 \times 0,1) + (8 \times 0,2) + (6 \times 0,3) + (8 \times 0,4) = 7,3$$

$$\text{Aluno Y: } (4 \times 0,1) + (5 \times 0,2) + (5 \times 0,3) + (7 \times 0,4) = 5,7$$

$$\text{Aluno Z: } (8 \times 0,1) + (7 \times 0,2) + (9 \times 0,3) + (10 \times 0,4) = 8,9$$

Essas médias podem ser registradas em uma matriz C , que é o produto da matriz A (notas) pela matriz B (pesos):

$$C = \begin{bmatrix} 7,3 \\ 5,7 \\ 8,9 \end{bmatrix}$$

A ideia utilizada para obter a matriz C será usada para expressarmos matematicamente a multiplicação de matrizes.

Aula 2

Definição:

Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são matrizes de ordem $m \times n$ e $n \times p$ respectivamente, o produto dessas matrizes é a matriz $A \cdot B = AB = [c_{ij}]$, do tipo $m \times p$, cujo ij -ésimo elemento é dado por:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Quando lidarmos com matrizes que têm um número pequeno de colunas (digamos ≤ 4), escreveremos a i -ésima linha na forma (a_i, b_i, c_i, d_i) , em vez de $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})$. Com esta notação, o produto de duas matrizes 3×3 ,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{bmatrix}$$

é a matriz abaixo especificada:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} a_1r_1 + b_1r_2 + c_1r_3 & a_1s_1 + b_1s_2 + c_1s_3 & a_1t_1 + b_1t_2 + c_1t_3 \\ a_2r_1 + b_2r_2 + c_2r_3 & a_2s_1 + b_2s_2 + c_2s_3 & a_2t_1 + b_2t_2 + c_2t_3 \\ a_3r_1 + b_3r_2 + c_3r_3 & a_3s_1 + b_3s_2 + c_3s_3 & a_3t_1 + b_3t_2 + c_3t_3 \end{bmatrix}.$$

Exemplo:

Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, vamos determinar, se existir $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

Solução:

Como A é do tipo 2×3 e B é do tipo 3×2 , segue que $C = A \cdot B$ existe e é do tipo 2×2 . Portanto,

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 & -1 \cdot (-2) + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Como B é do tipo 3×2 e A é do tipo 2×3 , segue que $D = B \cdot A$ existe e é do tipo 3×3 . E teremos:

$$\begin{aligned} D = B \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) & 0 \cdot 3 + 5 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \\ 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 4 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -5 & 0 & 10 \\ 7 & 12 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aula 3

Propriedades:

Vamos observar, por meio de exemplos, algumas propriedades relativas à multiplicação de matrizes envolvendo a matriz identidade.

i) A é uma matriz quadrada de ordem n .

- Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$A \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

$$I_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

- Seja $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Temos que $B \cdot I_3 = B$ e $I_3 \cdot B = B$ (verifique!).

ii) A não é uma matriz quadrada, isto é, $A_{m \times n}$, com $m \neq n$:

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$. Temos:

$$I_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}. \text{ (Note que não existe } A \cdot I_2 \text{).}$$

$$A \cdot I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}. \text{ (Note que não existe } I_3 \cdot A \text{).}$$

$$\text{Seja } B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Temos que $B \cdot I_2 = B$ e $I_3 \cdot B = B$ (verifique!). Note que não existe $B \cdot I_3$ e nem $I_2 \cdot B$.

Em geral, pode-se dizer que:

Se A é quadrada e de ordem n , $A \cdot I_n = A$ e $I_n \cdot A = A$.

Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$, com $m \neq n$, $A \cdot I_n = A$ e $I_m \cdot A = A$.

Aula 4

Propriedades (continuação):

Sejam $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$

i) A multiplicação de matrizes não é comutativa. Em geral, $AB \neq BA$

Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, e vamos determinar AB e BA .

$$\left. \begin{aligned} A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 2} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} \\ B_{2 \times 2} \cdot A_{2 \times 2} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \neq$$

ii) O produto de matrizes é associativo:

* $(AB)C = A(BC)$.

Aplicação:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -16 & 20 & 4 \\ -13 & 15 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}; (A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -16 & 20 & 4 \\ -13 & 15 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 25 \end{pmatrix}_{2 \times 1}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix}_{2 \times 1}; A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 25 \end{pmatrix}_{2 \times 1}$$

iii) O produto de matrizes é distributivo em relação à soma:

$$* (A + B)C = AC + BC.$$

Aplicação:

Tome $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}$, e verifique a propriedade.

$$* A(B + C) = AB + AC$$

Tome $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, e verifique a propriedade.

$$\bullet (AB)^T = B^T \cdot A^T \text{ (observe a ordem).}$$

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}^T = [5 \quad -3] = [3 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = B^T \cdot A^T.$$

iv) Multiplicação pela matriz nula:

$$A \cdot O = O$$

Verifique.

$$\bullet (A \cdot B^T)^T = B \cdot A^T \text{ (Observem a ordem)}$$

$$\text{Tome } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = (1 \quad -2)$$

$$(A \cdot B^T)^T = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}^T = (-2 \quad -5)$$

$$B \cdot A^T = (1 \quad -2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (-2 \quad -5)$$

* Observação: É necessário considerar quatro diferenças fundamentais entre o produto de matrizes e o produto de números:

- O produto AB não está definido para quaisquer matrizes A e B ; pois só faz sentido quando o número de linhas de A é igual ao número de colunas de B .
- O produto AB não é comutativo. Mesmo que AB e BA existam, não se tem necessariamente que $AB = BA$.

- O produto de duas matrizes não nulas pode ser a matriz nula: de $A \neq 0$ e $B \neq 0$ não se infere que $AB \neq 0$. Por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pode até ocorrer que $A \neq 0$ seja tal que $A^2 = 0$.

- Todo número a diferente de zero possui inverso multiplicativo a^{-1} pois $aa^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Por outro lado, dada a matriz quadrada A , do tipo $n \times n$, nem sempre existe uma matriz C , do tipo $n \times n$, tal que $AC = CA = I_n$. Quando uma tal matriz C existe, a matriz A se diz invertível e C chama-se a inversa de A . Escreve-se então $C = A^{-1}$.

As demonstrações das propriedades acima podem ser verificadas no livro *Álgebra Linear com Aplicações*, de Anton Howard e Chris Rorres.

Aula 5

Matriz Inversa:

Seja A uma matriz quadrada de ordem n . A matriz A é dita invertível se existe uma matriz B (quadrada de ordem n), tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Neste caso, B é dita inversa de A e é indicada por A^{-1} .

Exemplo:

A inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$; pois:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

e

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

- Atividade:

Desafio: Mostre que existe matriz quadrada de ordem 2, tal que $A^2 = 0$, sendo $A \neq 0$.

Solução:

Suponha que $A^2 = 0$.

Então podemos escrever: $A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, com $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos então:

- Caso $a + d \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow a^2 = 0 \rightarrow a = 0$ e $d^2 = 0 \rightarrow d = 0$

Este caso não interessa.

- Caso $a + d = 0 \rightarrow a = -d \rightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$

Neste caso, teremos:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab - ab \\ ac - ac & a^2 + bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{bmatrix}$$

Suponha $b = c = 0$:

$$\text{Então } a^2 + bc = 0 \rightarrow a^2 = -bc \rightarrow a^2 = 0 \rightarrow a = 0$$

Este caso não interessa.

Suponha $b \neq 0$ ou $c \neq 0$:

Caso 1: $b \neq 0$:

$$a^2 + bc = 0 \rightarrow a^2 = -bc \rightarrow c = -\frac{a^2}{b}$$

$$\text{E teremos } A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{bmatrix} \neq 0, \text{ com } A^2 = 0$$

Caso 2: $c \neq 0$

$$a^2 + bc = 0 \rightarrow a^2 = -bc \rightarrow b = -\frac{a^2}{c}$$

E teremos $A = \begin{bmatrix} a & -\frac{a^2}{c} \\ c & -a \end{bmatrix} \neq 0$ com $A^2 = 0$

Observação:

- Se $A^2 = 0$, com $A \neq 0$, então A não é invertível. De fato, se A fosse invertível, existiria uma matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Neste caso, iríamos ter:

$$0 = A^{-1} \cdot 0 \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A^2 \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A \cdot A \cdot A^{-1} = (A^{-1} \cdot A) \cdot (A \cdot A^{-1}) = I \cdot I = I, \text{ pois } A \cdot A = A^2 = 0. \text{ Mas, } 0 \neq I.$$

Aula 6

Exercícios:

1. O gerente de uma danceteria fez um levantamento sobre a frequência de pessoas na casa, em um final de semana, e enviou a seguinte tabela para o proprietário:

	<i>rapazes</i>	<i>moças</i>
<i>sábado</i>	80	60
<i>domingo</i>	?	75

O gerente se esqueceu de informar um campo da tabela, mas sabia que, curiosamente, a arrecadação nos dois dias havia sido a mesma. Sabendo que o ingresso para rapazes é de R\$ 15,00 e para moças é de R\$ 12,00:

- a) Represente por meio da multiplicação de matrizes, a matriz que fornece a arrecadação da casa em cada dia;
- b) Determine o valor do campo que ficou sem ser preenchido.

2. Um laboratório fabrica antiácido efervescente "AZIAZERO" em duas versões: tradicional (T) e especial (E). Na tabela seguinte, temos a composição de envelopes de 5g, nas duas versões:

Componentes	Versão	T	E
Bicarbonato de sódio		2,3g	2,5g
Carbonato de sódio		0,5g	0,5g
Ácido cítrico		2,2g	2g

- a) Em um certo mês foram fabricados 6 000 envelopes na versão T e 4 000 envelopes na versão E. Calcule, em kg, a quantidade necessária de cada componente para fabricação dessas 10 000 unidades.
- b) Represente, por meio de multiplicação de matrizes, os valores encontrados no item A.
- c) Em outro mês foram produzidos 15 000 envelopes de AZIAZERO. Calcule a quantidade produzida de cada versão, sabendo que o consumo total de bicarbonato de sódio foi de 35,6 kg.

3. A inversa de $\begin{pmatrix} y & -3 \\ -2 & x \end{pmatrix}$ é a matriz $\begin{pmatrix} x & x-4 \\ x-5 & 1 \end{pmatrix}$. Determine x e y.

Respostas:

1. a) $\begin{pmatrix} 80 & 60 \\ x & 75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 920 \\ 15x + 900 \end{pmatrix}$ b) 68

2. a) bicarbonato: 23,8 kg; carbonato: 5kg; ácido: 21,2 kg

b) $\begin{pmatrix} 2,3 & 2,5 \\ 0,5 & 0,5 \\ 2,2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\ 000 \\ 4\ 000 \end{pmatrix}$ c) 9500 envelopes na versão T e 5500 envelopes na versão E.

3. $x = 7$ e $y = 1$

Avaliação: Através da correção dos exercícios.

ESCALONAMENTO DE SISTEMAS LINEARES

Tema: Escalonamento de Sistemas Lineares

Objetivos: Utilizar as matrizes como sistematizadoras do Método

Conteúdos: Sistemas Lineares e Escalonamento

Tempo Estimado: 3 aulas.

Desenvolvimento:

Aula 1

Introdução:

Junte-se com um colega e tente resolver o sistema 4×4 abaixo. Prestem atenção nos detalhes!

$$\begin{cases} x + y + z + t = 8 \\ 2y + z + t = 2 \\ 2z + t = 5 \\ 2t = 6 \end{cases}$$

Observação: É importante não dar nenhuma dica aos alunos; deixe-os perceber a melhor maneira de resolver esse sistema. Após alguns minutos, pergunte a estratégia usada e estimule-os a notar o que tornou esse sistema fácil de ser resolvido.

Esse sistema está escalonado e, por isso, é simples de resolvê-lo. Vamos, então estudar o método de escalonamento.

Inicialmente é necessário saber o que é um sistema linear escalonado.

Considerando um sistema genérico $m \times n$, dizemos que ele está escalonado quando a matriz de coeficientes tiver, em cada uma de suas linhas, o primeiro elemento não nulo situado à esquerda do primeiro elemento não nulo da linha seguinte. Além disso, linhas com todos os elementos nulos devem estar abaixo de todas as outras. Observando as equações do sistema escalonado, percebe-se que, em cada linha considerada, a primeira incógnita com coeficiente não nulo está sempre à esquerda da primeira incógnita com coeficiente não nulo da linha seguinte.

São exemplos de sistema escalonados:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y + 5z = 7 \\ 3y + 2z = -4 \\ 4z = 8 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y + z + t = 9 \\ 4z + 5t = 10 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - 2y + z + t = 9 \\ 0y + 4z + 5t = 10 \\ 0z + 0t = 0 \\ 0t = 0 \end{cases}$$

Classificação de sistemas escalonados:

Para classificar um sistema escalonado, basta observar a última linha. Mas é preciso estar atento, pois a última linha em um sistema de n incógnitas é a n ésima linha, que, se não existir, deve ser considerada totalmente nula ($0x + 0y + 0z + \dots = 0$, o que equivale a $0 = 0$), como mostra o exemplo **b** acima.

Generalizando a última linha de um sistema escalonado:

$$a_n \cdot x_n = k_n$$

Em que a_n é o coeficiente, x_n é a incógnita e k_n é o termo independente, podemos ter três situações:

- Se $a_n \neq 0$, então a solução é única: sistema possível e determinado;
- Se $a_n = 0$ e $k_n = 0$, então temos infinitas soluções: sistema possível e indeterminado;
- Se $a_n = 0$ e $k_n \neq 0$, então não temos soluções: sistema impossível.

Resolução de sistemas escalonados:

Se o sistema é possível, basta resolvê-lo de baixo para cima, como veremos nos exemplos a seguir:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y + z = -6 \\ 4y - 2z = 0 \\ 5z = 10 \end{cases}$$

Sistema 3×3 escalonado (número de equações = número de incógnitas).

Da 3ª equação tiramos $z = 2$

Da 2ª equação, fazendo $z = 2$, temos $4y - 2 \cdot 2 = 0$ e daí $y = 1$.

Fazendo $y = 1$ e $z = 2$ na 1ª equação, temos $3x - 2 \cdot 1 + 2 = -6$ e daí $x = -2$.

Podemos concluir que o sistema é possível e determinado com $S = \{(-2, 1, 2)\}$.

$$\text{b) } \begin{cases} 9x - 2y + 3z - w = 1 \\ y - 2z + 4w = 6 \\ 5z + 2w = 3 \\ 0w = 9 \end{cases}$$

Sistema 4×4 já escalonado.

A 4ª equação permite dizer que o sistema é impossível, logo $S = \emptyset$.

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3y - 6z = 0 \end{cases}$$

Sistema 2×3 já escalonado.

Quando um sistema escalonado tem mais incógnitas do que equações e pelo menos um coeficiente não nulo em cada equação, ele é possível e indeterminado, pois as equações que faltam podem ser consideradas $0 = 0$.

A incógnita que não aparece no começo das equações é chamada incógnita livre.

Nesse exemplo, z é a incógnita livre. Fazendo $z = k$, com $k \in \mathbb{R}$, para descobrir a solução geral do sistema.

Da 2ª equação, temos:

$$x + 2k + k = 0 \rightarrow x = -3k.$$

Portanto, o sistema é possível e indeterminado e sua solução geral é: $S = \{(-3k, 2k, k)/k \in \mathbb{R}\}$.

$$d) \begin{cases} 2x - y + z - t = 2 \\ 2z + 3t = 1 \end{cases}$$

Aqui o sistema é possível e indeterminado (está escalonado e tem duas equações e quatro incógnitas e são duas incógnitas livres (y e t)).

Fazemos $y = \alpha$ e $t = \beta$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

Substituindo nas equações:

$$2z + 3\beta = 1 \rightarrow 2z = 1 - 3\beta \rightarrow z = \frac{1 - 3\beta}{2}$$

$$2x - \alpha + \frac{1 - 3\beta}{2} - \beta = 2 \rightarrow 4x = 2\alpha - 1 + 3\beta + 2\beta + 4 \rightarrow 4x = 2\alpha + 5\beta + 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{2\alpha + 5\beta + 3}{4}.$$

Solução geral: $\left\{ \left(\frac{2\alpha + 5\beta + 3}{4}, \alpha, \frac{1 - 3\beta}{2}, \beta \right) / \alpha \text{ e } \beta \in \mathbb{R}. \right\}$.

Aula 2

Processo para escalonamento de um sistema linear:

Quando o sistema linear não está escalonado, podemos obter um sistema equivalente a ele que esteja escalonado, por meio de algumas operações elementares. Para transformar um sistema não escalonado em um equivalente escalonado, alguns procedimentos podem ser feitos:

- Podemos trocar a posição das equações. Exemplo:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 4y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 4y = 1 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

- Podemos multiplicar todos os termos de uma equação por um número real diferente de zero:

$$3x - y + z = 5 \rightarrow 6x - 2y + 2z = 10.$$

- Podemos multiplicar os dois membros de uma equação por um mesmo número real diferente de zero e somar os resultados aos membros correspondentes da outra equação. Exemplo:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 7 \\ 3x - 5y + 9z = 25 \end{cases} \rightarrow 1^a \cdot (-3) + 2^a \begin{cases} x - 2y + 4z = 7 \\ -y - 3z = 4 \end{cases}$$

- Se no processo de escalonamento obtivermos uma equação com todos os coeficientes nulos e o termo independente diferente de zero, essa equação será suficiente para afirmar que o sistema é impossível, isto é, tem $S = \emptyset$. Exemplo:

$$0x + 0y + 0z = 7 \rightarrow S = \emptyset$$

- Vejamos agora alguns exemplos nos quais os sistemas são escalonados e depois classificados e resolvidos.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 2x + 7y + z = 21 \\ -3x - 5y + 2z = -8 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \cdot (-2) + 2^a \\ 1^a \cdot 3 + 3^a \end{matrix}$$

Para anular os coeficientes de x na 2^a e 3^a equações, podemos:

- ✓ Multiplicar a 1^a por (-2) e somar com a 2^a ;
- ✓ Multiplicar a 1^a por 3 e somar com a 3^a ;

Depois, podemos trocar as posições das duas últimas equações para que os coeficientes de y seja 1 na 2^a equação.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 3y - z = 7 \\ y + 5z = 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ y + 5z = 13 \\ 3y - z = 7 \end{cases} \rightarrow 2^a \cdot (-3) + 3^a \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ y + 5z = 13 \\ -16z = -32 \end{cases}$$

Observação: é conveniente, mas não obrigatório que o 1^a coeficiente da equação que vai ser multiplicada seja 1 ou -1 .

O sistema obtido escalonado e é equivalente ao sistema dado.

Podemos agora resolver:

- ✓ $z = \frac{-32}{-16} = 2$
- ✓ $y + 5 \cdot 2 = 13 \rightarrow 13 - 10 = 3$
- ✓ $x + 2 \cdot 3 + 2 = 7 \rightarrow x = 7 - 6 - 2 = -1$

Sistema possível e determinado com $S = \{(-1, 3, 2)\}$

Aula 3

Exercícios:

1) Classifique e resolva os sistemas lineares escalonados:

$$a) \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ y + 2z = 0 \\ 2z = -6 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x - 2y + z = 3 \\ 4y - z = 5 \\ 0z = 8 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

2) Escalone, classifique e resolva os sistemas lineares abaixo:

$$a) \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 3x - 3y + z = 8 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 3y - z = 8 \\ x - 14z = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + y - z = 10 \\ 2x - y - 7z = 0 \end{cases}$$

Respostas:

1)

a) SPD; $S = \{(4, -1, 3)\}$

b) SI; $S = \emptyset$

c) SPI; $S = \{(\frac{k+2}{3}, k, k)\}$

2)

a) SPD; $S = \{(1, -1, 2)\}$

b) SPI; $S = \{(14k, -9k, k)\}$

c) SI; $S = \emptyset$

APLICAÇÃO I – CAMPANHA PUBLICITARIA

Tema: Aplicações de Matrizes

Objetivos: Desenvolver relações entre os elementos das matrizes e realizar cálculos aritméticos.

Conteúdos: Produto de Matrizes relacionado a uma campanha publicitária

Tempo Estimado: 1 aula.

Desenvolvimento:

Durante uma campanha publicitária, cada um dos fabricantes dos refrigerantes A, B e C tentou aumentar sua fatia no mercado. Antes da campanha, o refrigerante A tinha 30% de todas as vendas, o refrigerante B tinha 50%, e o refrigerante C tinha 20% de todas as vendas.

Ao final de 6 meses de campanha, uma pesquisa foi realizada, e os seguintes resultados foram obtidos:

- a) Das pessoas que bebiam o refrigerante A, 10% trocaram para o refrigerante B, e 15% trocaram para o refrigerante C.
- b) Das pessoas que bebiam o refrigerante B, 12% trocaram para o refrigerante A, e 20% trocaram para o refrigerante C.
- c) Das pessoas que bebiam o refrigerante C, 8% trocaram para o refrigerante A, e 5% trocaram para o refrigerante B.

Determine o efeito da campanha publicitária sobre o mercado dos refrigerantes A, B e C. Em outras palavras, após 6 meses, qual é a porcentagem de vendas que cada fabricante tem?

Solução:

Se x é o total de pessoas que bebem refrigerante, então inicialmente $0,3x$ bebem o refrigerante A, $0,5x$ bebem o refrigerante B e $0,2x$ bebem o refrigerante C. Após 6 meses de campanha publicitária, $0,75 \cdot 0,3x + 0,12 \cdot 0,5x + 0,08 \cdot 0,2x = (0,75 \cdot 0,3 + 0,12 \cdot 0,5 + 0,08 \cdot 0,2)x$ passaram a beber o refrigerante A, $0,1 \cdot 0,3x + 0,68 \cdot 0,5x + 0,05 \cdot 0,2x = (0,1 \cdot 0,3 + 0,68 \cdot 0,5 + 0,05 \cdot 0,2)x$ passaram a beber o refrigerante B, e $0,15 \cdot 0,3x + 0,2 \cdot 0,5x + 0,87 \cdot 0,2x = (0,15 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,5 + 0,87 \cdot 0,2)x$ passaram a beber o refrigerante C.

Podemos expressar que o percentual de pessoas que passaram a beber o refrigerante A é:

$$[0,3 \quad 0,5 \quad 0,2] \begin{bmatrix} 0,75 \\ 0,12 \\ 0,08 \end{bmatrix}.$$

O percentual de pessoas que passaram a beber o refrigerante B é:

$$[0,3 \quad 0,5 \quad 0,2] \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,68 \\ 0,05 \end{bmatrix}.$$

O percentual de pessoas que passaram a beber o refrigerante C é:

$$[0,3 \quad 0,5 \quad 0,2] \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,2 \\ 0,87 \end{bmatrix}.$$

O produto $[0,3 \quad 0,5 \quad 0,2] \begin{bmatrix} 0,75 & 0,1 & 0,15 \\ 0,12 & 0,68 & 0,2 \\ 0,08 & 0,05 & 0,87 \end{bmatrix}$ resulta na matriz linha

$[0,301 \quad 0,38 \quad 0,319]$, cujo primeiro elemento é o percentual de pessoas que passaram a beber o refrigerante A, o segundo elemento é o percentual de pessoas que passaram a beber o refrigerante B, e o terceiro elemento é o percentual de pessoas que passaram a beber o refrigerante C.

A matriz $[0,3 \quad 0,5 \quad 0,2]$ é formada pelos percentuais originais de cada refrigerante. A matriz $\begin{bmatrix} 0,75 & 0,1 & 0,15 \\ 0,12 & 0,68 & 0,2 \\ 0,08 & 0,05 & 0,87 \end{bmatrix}$ é formada pelos percentuais de pessoas

que passaram a beber um dado refrigerante relativamente ao total de pessoas que bebiam outro dado refrigerante. Por exemplo, o elemento na segunda linha e terceira coluna dessa última matriz, o qual é igual a 0,2, é o percentual de pessoas que passaram a beber o refrigerante C relativamente ao total de pessoas que bebiam o refrigerante B.

Avaliação: Através da compreensão dos alunos em relação à atividade proposta.

APLICAÇÃO II - TEORIA DOS GRAFOS

Tema: Aplicações de Matrizes à Teoria dos Grafos

Objetivos: Desenvolver relações entre os elementos das matrizes e realizar cálculos aritméticos.

Conteúdos: Teoria dos Grafos

Tempo Estimado: 2 aulas.

Desenvolvimento:

Aula 1

- Introdução:

O material a seguir foi retirado do livro *Álgebra Linear com Aplicações*, de Howard Anton.

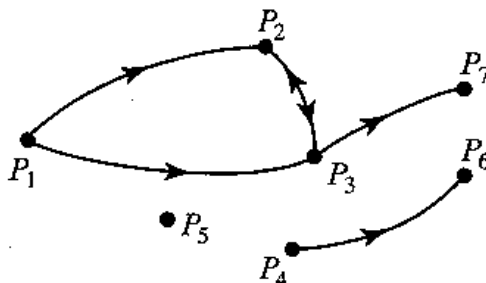
Existem inúmeros exemplos de conjuntos com um número finito de elementos nos quais existe alguma relação entre os elementos do conjunto. Por exemplo, o conjunto poderia consistir de uma coleção de pessoas, animais, países, companhias, equipes esportivas ou cidades; e a relação entre dois elementos A e B de um tal conjunto poderia ser que a pessoa A domina a pessoa B, o animal A alimenta-se do animal B, o país A apoia militarmente o país B, a companhia A vende seus produtos para a companhia B, a equipe A sistematicamente derrota a equipe B ou a cidade A possui um voo sem escalas para a cidade B.

Nós veremos agora como a *Teoria de Grafos Dirigidos* pode ser usada para modelar, matematicamente, relações como as dos exemplos dados.

- Definição:

Um *grafo dirigido* é um conjunto finito de elementos $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ junto com uma coleção finita de pares ordenados (P_i, P_j) de elementos distintos deste conjunto, sem repetição de pares ordenados. Os elementos do conjunto são chamados *vértices* e os pares ordenados *arestas dirigidas* do grafo dirigido. Nós usamos a notação $P_i \rightarrow P_j$ (que lemos “ P_i é conectado a P_j ”) para indicar que a aresta dirigida (P_i, P_j) , pertence ao grafo dirigido. Geometricamente, nós podemos visualizar um grafo dirigido (figura 1) representando os vértices como pontos no plano e

representando a aresta dirigida $P_i \rightarrow P_j$ por um segmento de reta ou de arco, desde o vértice P_i até o vértice P_j , com uma seta apontando de P_i para P_j . Se ambos $P_i \rightarrow P_j$ e $P_j \rightarrow P_i$, valem (que denotamos por $P_i \leftrightarrow P_j$), desenhamos somente um segmento entre P_i e P_j , mas com setas apontando em sentidos opostos (como



entre P_2 e P_3 na figura).

Figura 1

Como ocorre na figura 1, por exemplo, um grafo dirigido pode ter um vértice conectado a outro vértice, como ocorre com P_4 e P_6 , bem como também alguns vértices, tal como P_5 que podem não estar conectados com nenhum outro vértice. Além disto, como $P_i \rightarrow P_i$ não é permitido num grafo dirigido, um vértice não pode estar conectado consigo mesmo por um único arco que não passa por nenhum outro vértice.

Aula 2

A figura 2 mostra diagramas representando outros três exemplos de grafos dirigidos.

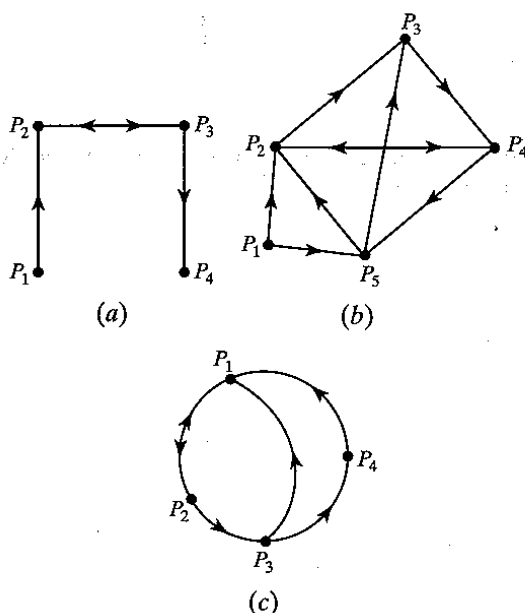


Figura 2

Dado um grafo dirigido de n vértices, nós podemos associar ao grafo uma matriz $M = [m_{ij}]$ de tamanho $n \times n$, chamada matriz de vértices do grafo dirigido, como segue. Os elementos da matriz são definidos por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } P_i \rightarrow P_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$. Para os três grafos dirigidos da figura 2, as matrizes de vértices correspondentes são:

Figura 2.a:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 2.b:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 2.c:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

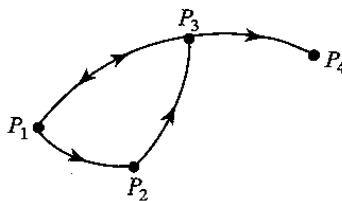
Por definição, as matrizes de vértices têm as seguintes propriedades:

- (i) Todas entradas são 0 ou 1.
- (ii) Todas entradas na diagonal principal são 0.

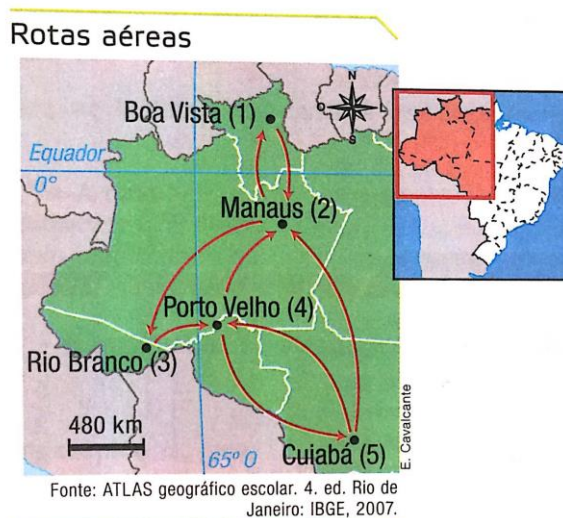
Reciprocamente, qualquer matriz com essas propriedades determina um único grafo dirigido cuja matriz de vértices é a matriz dada. Por exemplo, a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determina o grafo da figura:



- Atividade de fixação:
O mapa apresenta as rotas oferecidas por uma companhia aérea.



Considere que não existe percurso de uma cidade para ela mesma.

- a) Escreva a matriz $C = (c_{ij})_{5 \times 5}$, tal que:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe percurso direto da cidade } i \text{ para } j \\ 0, & \text{se não existe percurso direto da cidade } i \text{ para a cidade } j. \end{cases}$$

- b) Sabendo que a passagem para cada percurso custa R\$ 84,90, qual é o menor custo para uma viagem de ida e volta de Rio Branco a Boa Vista?

Respostas:

$$a) C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) R\$ 424,70

Avaliação: Através da correção do exercício.

APLICAÇÃO III – CÓDIGOS CORRETORES DE ERROS

Tema: Aplicações de Matrizes

Objetivos: Desenvolver relações entre os elementos das matrizes e realizar cálculos aritméticos.

Conteúdos: Codificação

Tempo Estimado: 2 aulas.

Desenvolvimento:

Aula 1

O material a seguir foi extraído parcialmente do livro Matemática e Atualidade I, de Christiane Rousseau.

Atualmente, a transmissão de dados, seja via rádio, internet, ou outras redes, impulsiona a comunicação global de tal forma que não se consegue vislumbrar evolução tecnológica sem este recurso.

Nesta aula, vamos utilizar um código de correção de erros conhecido como Código de Hamming, criado por Richard W hamming em 1950. Este código adiciona três bits a cada quatro bits da mensagem (por isso é chamado Hamming $C(7,4)$), e tem a capacidade de corrigir qualquer erro em um único bit.

Tomaremos um simples exemplo de transmissão de dados, utilizando código binário para apresentar aos nossos alunos a importância e a grande dimensão do estudo de dados em um sistema de comunicação.

Deseja-se enviar um sinal de comunicação de um emissor para um receptor. Mas, ao longo do canal de comunicação, o sinal pode ser modificado e no receptor chegar um sinal diferente, errado. É importante, na recepção, detectar-se o erro e corrigi-lo, para se obter o sinal que foi enviado pelo emissor. Para isso, antes do sinal ser enviado, ele é codificado.

Usaremos a “palavra” (u_1, u_2, u_3, u_4) . Vamos nos limitar à transmissão de “palavras” contendo exatamente quatro “letras”. Cada letra será 0 ou 1

Em vez de transmitir os quatro símbolos para representar um elemento, vamos transmitir os sete símbolos definidos da seguinte forma:

Código de correção de erros:

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2$$

$$v_3 = u_3$$

$$v_4 = u_4$$

$$v_5 = u_1 + u_2 + u_4$$

$$v_6 = u_1 + u_3 + u_4$$

$$v_7 = u_2 + u_3 + u_4$$

Ou seja, criamos um canal para transmitir quatro “letras” (bits), com capacidade para transmitir sete.

Como vamos trabalhar com bits, considere a seguinte tabela de adição e multiplicação do sistema binário:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Assim, por exemplo, para transmitir o código $u = (1, 0, 1, 1)$ enviamos a mensagem:

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7) = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0),$$

onde,

$$v_5 = u_1 + u_2 + u_4 = 1 + 0 + 1 = 0,$$

$$v_6 = u_1 + u_3 + u_4 = 1 + 1 + 1 = 1,$$

$$v_7 = u_2 + u_3 + u_4 = 0 + 1 + 1 = 0.$$

Nota: “+” é o operador de adição sobre o código criado.

Uma vez que os quatro primeiros símbolos de (v_1, v_2, \dots, v_7) são precisamente os quatro símbolos que desejamos transmitir, é necessário definir para que finalidades criamos os outros três símbolos. Esses são redundantes e nos permitem corrigir qualquer símbolo errôneo único.

Depois de estabelecido o código de Hamming $C(7,4)$, podemos desenvolver as verificações de erros, utilizando matrizes, da seguinte forma:

$v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7) = uG$, sendo G chamada de matriz geradora, dada por:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe que os quatro elementos de u são iguais aos quatro primeiros elementos de v , ou seja, $u = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

Variando $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ em $\mathbb{Z}_2^4 = \{(0,0,0,0), (0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,0,1,1), (0,1,0,0), (0,1,0,1), (0,1,1,0), (0,1,1,1), (1,0,0,0), (1,0,0,1), (1,0,1,0), (1,0,1,1), (1,1,0,0), (1,1,0,1), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}$, obtém-se 16 valores distintos para $v = uG$, conforme a tabela abaixo.

u	$v = uG$
(0,0,0,0)	(0,0,0,0,0,0,0)
(0,0,0,1)	(0,0,0,1,1,1,1)
(0,0,1,0)	(0,0,1,0,0,1,1)
(0,0,1,1)	(0,0,1,1,1,0,0)
(0,1,0,0)	(0,1,0,0,1,0,1)
(0,1,0,1)	(0,1,0,1,0,1,0)
(0,1,1,0)	(0,1,1,0,1,1,0)
(0,1,1,1)	(0,1,1,1,0,0,1)
(1,0,0,0)	(1,0,0,0,1,1,0)
(1,0,0,1)	(1,0,0,1,0,0,1)
(1,0,1,0)	(1,0,1,0,1,0,1)
(1,0,1,1)	(1,0,1,0,0,1,0)
(1,1,0,0)	(1,1,0,0,0,1,1)
(1,1,0,1)	(1,1,0,1,1,0,0)
(1,1,1,0)	(1,1,1,0,0,0,0)
(1,1,1,1)	(1,1,1,1,1,1,1)

Transmite-se v através de um canal de comunicação, obtendo-se na recepção um sinal w . Admitamos que $w = v$ ou w difere de v em apenas um de seus elementos.

Uma matriz de controle é uma matriz que satisfaz a propriedade $GH^T = 0$

Considere a matriz chamada de matriz de controle H , para $C(7,4)$, dada por:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe que as colunas de H são formadas pelos vetores de $\mathbb{Z}_2^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$, com exceção do vetor $(0,0,0)$.

Além disso, $GH^T = 0$:

$$G \cdot H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $w = v$, então $Hw^T = Hv^T = H(uG)^T = H(G^T u^T) = (HG^T)u^T = (GH^T)^T u^T = 0u^T = 0$.

Se w não é igual a v , então $w = v + (0 \ 0 \dots 1 \dots 0 \ 0)$, com 1 sendo i -ésimo elemento em $(0 \ 0 \dots 1 \dots 0 \ 0)$. Neste caso, como $Hv^T = 0$, então $Hw^T = H(v + (0 \ 0 \dots 1 \dots 0 \ 0))^T = 0 + H(0 \ 0 \dots 1 \dots 0 \ 0)^T$, que é igual à i -ésima coluna de H . Assim, quando Hw^T não é igual a zero, então Hw^T é igual à i -ésima coluna de H e w difere de v apenas no i -ésimo elemento. Observe que, como todas as colunas de H são distintas, um erro na i -ésima posição de w é, de fato, equivalente a obter a i -ésima coluna de H no produto Hw^T .

Deste modo, recupera-se v e, portanto, u .

Poderíamos ter escolhido a matriz geradora G da forma $G = (I_4 \ A)$, de modo que A seja uma matriz de ordem 4×3 cujas linhas sejam formadas pelos vetores de \mathbb{Z}_2^3 diferentes de $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$ em uma ordem qualquer, ou seja, de modo que as linhas de A sejam formadas pelos vetores $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ e $(1,1,1)$ em uma ordem qualquer. Os quatro primeiros elementos de $v = uG = u(I_4 \ A)$ formam o vetor u e, quando u varia em \mathbb{Z}_2^4 , obtêm-se 16 valores distintos para $v = uG$. No caso do exemplo considerado anteriormente, tomamos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para $G = (I_4 \ A)$, toma-se como matriz de controle $H = (A^T \ I_3)$. No caso do exemplo,

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

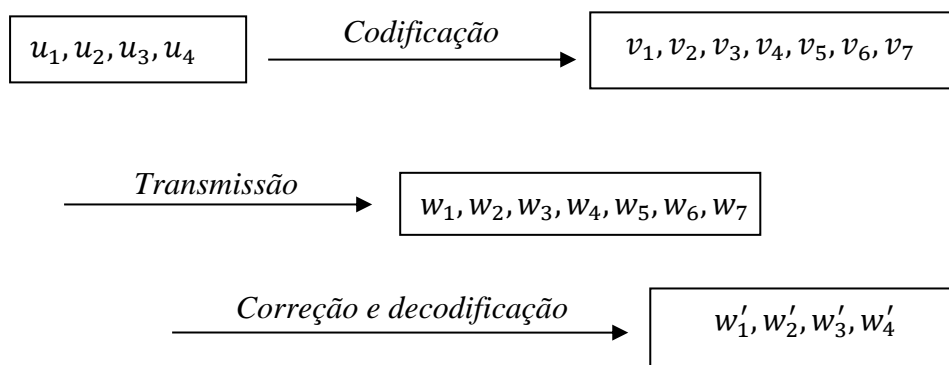
Dessa forma, as colunas de $H = (A^T \ I_3)$ são formadas pelos vetores de $\mathbb{Z}_2^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$, com exceção do vetor $(0,0,0)$, e, além disso,

$$GH^T = (I_4 \ A)(A^T \ I_3)^T = (I_4 \ A) \begin{pmatrix} A \\ I_3 \end{pmatrix} = A + A = 0.$$

Observe que $A + A = 0$ porque $0 + 0 = 1 + 1 = 0$.

Aula 2

Códigos corretores de erros



Observação:

A qualidade de um código pode ser julgada apenas como uma função das necessidades: a taxa de erro do canal, a duração média das mensagens para a enviar, o poder de processamento disponível para codificação e decodificação, etc.

Vamos testar o procedimento.

Exemplo:

Vamos tomar a mensagem $u = (0 \ 1 \ 1 \ 1)$.

A mensagem codificada

$$v = uG = (0 \ 1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1).$$

- Vamos considerar que não houve erro na transmissão ($w = v$).

$$Hw^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E decodificamos $u = (w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4) = (0 \ 1 \ 1 \ 1)$

- Caso haja erro na transmissão, suponha no terceiro elemento ($w \neq v$):
 $w = (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)$

$$Hw^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Neste caso, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ corresponde à terceira coluna da matriz H . Logo, o erro está no terceiro elemento de w e podemos corrigi-lo:

$$w = (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1) \rightarrow w = (0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)$$

E decodificamos $u = (w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4) = (0 \ 1 \ 1 \ 1)$.

- Caso haja erro na transmissão, suponha no sexto elemento ($w \neq v$):
 $w = (0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1)$

$$Hw^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Neste caso, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ corresponde a sexta coluna da matriz H . Logo, o erro está no sexto elemento de w e podemos corrigi-lo:

$$w = (0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1) \rightarrow w = (0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)$$

E decodificamos $u = (w_1 w_2 w_3 w_4) = (0 1 1 1)$

Exercícios:

1. Desejava-se transmitir a palavra $u = (0 0 0 0)$ e depois da decodificação foi encontrada palavra $w = (0 0 0 0 1 0 0)$. Determine se há erro e caso positivo, em qual termo ele se encontra.
2. No $C(7, 4)$ código Hamming, quais são os vetores a serem enviados se quisermos transmitir as palavras $(1 0 1 0)$, $(0 1 1 0)$ e $(1 1 1 0)$?

Resposta:

$$1) Hw^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Logo, o erro na palavra w está no quinto elemento, pois a matriz produto é a coluna $(1 0 0)^T$.

$$2) \\ (1 0 1 0) \rightarrow (1 0 1 0 1 0 1). \\ (0 1 1 0) \rightarrow (0 1 1 0 1 1 0). \\ (1 1 1 0) \rightarrow (1 1 1 0 0 0 0).$$

Avaliação: Através da correção do exercício.

APLICAÇÃO IV - ESCALONAMENTO

Tema: Aplicações de Matrizes: Escalonamento

Objetivos: Produzir uma investigação sobre alimentação e atividades físicas diárias realizadas pelos estudantes, e aos resultados investigados, associar conceitos matemáticos e técnicas de análise e síntese de dados, criando compreensão do aluno e aumentando a flexibilidade do professor em relação às estratégias de aplicação prática do tema abordado nesse estudo.

Conteúdos: Matrizes aplicadas ao Escalonamento de Sistemas Lineares.

Tempo Estimado: 3 aulas

Desenvolvimento:

Aula 1

As atividades de caráter investigativo serão realizadas a partir de situações-problemas propostas pelo professor, que irá orientar e acompanhar todo o processo inicial, direcionando as investigações, propondo questões e discutindo-as.

Por meio desses debates serão geradas evidências que justifiquem o uso de recursos matemáticos para simplificação do longo percurso previsto inicialmente no processo investigativo, melhorando significativamente o resultado positivo dos alunos.

Tendo em vista a importância da atividade física em qualquer idade e observando a realidade da escola em relação à classe social, acesso a alimentação, vulnerabilidade social dos alunos, consumo e tráfico de drogas no ambiente escolar, entre outros, buscamos com este trabalho apresentar aos jovens envolvidos as possibilidades de verificar e controlar, ou modificar, sua qualidade de vida através da análise e avaliação das informações coletadas. Desenvolvemos uma proposta inicial de realizarmos um levantamento, tendo como público alvo os alunos da primeira série, por se tratar de aproximadamente 50% do total de alunos da escola. Serão analisadas e discutidas questões como os benefícios das atividades físicas e boa alimentação e como elas são vistas por indivíduos na faixa etária média de 14 a 16 anos.

Como objetivo principal da pesquisa, elencamos o tempo gasto com atividades físicas, alimentação e calorias perdidas ou adquiridas de acordo com a rotina verificada.

- **Descrições, metodologia e aplicação:**

Inicialmente, este trabalho será desenvolvido com uma turma de segundo ano do ensino médio.

Foi solicitado que os alunos formassem grupos de cinco pessoas e que cada grupo entrevistasse dez alunos de uma turma específica de primeiro ano, durante o intervalo do recreio. Essa escolha foi feita para que não houvesse duplicidade de entrevistas. Nas entrevistas deveriam constar perguntas sobre a regularidade das práticas de atividades físicas, alimentação e dados relativos ao que o entrevistado sabe sobre os benefícios dessas práticas.

Aula 2

Com os dados coletados, o próximo passo foi ordenar os dados, determinando uma média da quantidade de horas de prática de exercícios semanais e da quantidade de refeições diárias. Esses dados foram organizados em tabelas, de acordo com o modelo abaixo:

Atividade:		
Dia da semana:	(horas/ dia)	
	Rapazes	Moças
segunda-feira		
terça-feira		
quarta-feira		
quinta-feira		
Sexta-feira		
Sábado		
Domingo		

Tabela 1: Quantidade de horas/dia de cada atividade física

Assim, com base nas pesquisas realizadas, o professor seleciona tabelas de um dos grupos para análise:

Atividade: Dança		
Dia da semana:	(horas/ dia)	
	Rapazes	Moças
segunda-feira	1,5	1
terça-feira	1	0,5
quarta-feira	2	1,5
quinta-feira	0	0,5
Sexta-feira	1	1
Sábado	0	0
Domingo	0	0

Tabela 2: Quantidade de horas/dia de dança

Atividade: Correr (9 km/h)		
Dia da semana:	(horas/ dia)	
	Rapazes	Moças
segunda-feira	2	1
terça-feira	1	0,5
quarta-feira	0	1
quinta-feira	0	0
Sexta-feira	1	0,5
Sábado	0	0
Domingo	0	0

Tabela 3: Quantidade de horas/dia de corrida

Atividade: Ginástica Aeróbica		
Dia da semana:	(horas/ dia)	
	Rapazes	Moças
segunda-feira	1	0,5
terça-feira	0	1
quarta-feira	1	0,5
quinta-feira	0	1
Sexta-feira	0	1
Sábado	1	1
Domingo	0	0

Tabela 4: Quantidade de horas/dia de ginástica aeróbica

Alimentação: refeições diárias		
Dia da semana:	(quantidade / dia)	
	Rapazes	Moças
segunda-feira	5	4
terça-feira	5	4
quarta-feira	5	3
quinta-feira	4	4
Sexta-feira	5	4
Sábado	6	5
Domingo	6	5

Tabela 4: Alimentação diária

Aula 3

Após esse levantamento, o professor seleciona dados de um aluno pesquisado e sugere uma situação-problema, como o exemplo abaixo:

Júlia, uma aluna, tem 93 quilos e deseja perder 23 quilos em 12 meses fazendo a atividade física proposta por ela (dança, corrida e ginástica aeróbica) e mantendo sua alimentação.

A tabela abaixo segue com uma proposta de atividades físicas que Júlia pode fazer para alcançar seu objetivo (essas atividades foram propostas por ela):

Dia da semana	Dança	Corrida(9km/h)	Ginástica Aeróbica
Segunda	1	2	0,5
Quarta	1,5	1	0,5
Sexta	1	1	1

Como Júlia quer perder 23 quilos em 12 meses, seu objetivo semanal será de perda de 0,48 Kg. Deste modo, ele precisara perder 3 737,5 calorias por semana. Esta medida foi determinada supondo que 1 quilo equivale a 7700 calorias.

Júlia distribuiu, então, sua perda calórica em: 1471,5 calorias segunda, 1223 calorias quarta e 1043 calorias na sexta. Assim, é necessário descobrir quantas calorias ela perderá no período que vai desenvolver cada atividade, para que obtenha sucesso em seus objetivos.

Nesta etapa, os alunos puderam, através da sistematização de dados, (a) construir estruturas matemáticas para resolver o problema.

Eles chamaram de x o número calorias perdidas na dança, y o número de calorias perdidas ao correr (9 Km/h) e z o número de calorias perdidas ao praticar ginástica aeróbica.

Utilizando os dados da tabela, chegamos ao seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y + 0,5z = 1471,5 \\ 1,5x + y + 0,5z = 1223 \\ x + y + z = 1043 \end{cases}$$

Após algum tempo analisando, os alunos foram motivados a buscar problemas parecidos, e observando as resoluções, elegeram como melhor forma para determinar os valores investigados a utilização do método do Escalonamento.

Resolução:

Reorganizando o sistema, trocando a primeira equação com a terceira, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 1043 \\ 1,5x + y + 0,5z = 1223 \\ x + 2y + 0,5z = 1471,5 \end{cases}$$

Podemos escrever uma matriz usando os coeficientes das equações do sistema. Usamos essa técnica para simplificar os cálculos. Então temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1043 \\ 1,5 & 1 & 0,5 & 1223 \\ 1 & 2 & 0,5 & 1471,5 \end{pmatrix}$$

Anulando a_{21} e a_{31} , temos:

Substituímos a 2ª linha pela subtração ($1,5 \times 1^a - 2^a$) e a 3ª linha pela subtração ($1^a - 3^a$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1043 \\ 0 & 0,5 & 1 & 341,5 \\ 0 & -1 & 0,5 & -428,5 \end{pmatrix}$$

Substituímos a 3ª linha pela subtração ($2 \times 2^a + 3^a$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1043 \\ 0 & 0,5 & 1 & 341,5 \\ 0 & 0 & 2,5 & 254,5 \end{pmatrix}$$

E o sistema escalonado tem como solução única: $x = 461,8$, $y = 479,4$ e $z = 101,8$.

Assim, considerando que Júlia vai gastar 461,8 calorias ao dançar, 479,4 calorias ao correr a 9 km/h e 101,8 km/h ao andar de bicicleta, semanalmente o gasto calórico será de 3 737,5 calorias, que representa 0,48 kg. Isso fará com que Julia esteja no seu IMC normal em 12 meses.

Avaliação: Através do acompanhamento de cada etapa da atividade proposta.

CONSIDERAÇÕES FINAIS:

Com este trabalho, os alunos foram estimulados a utilizar a linguagem matemática para estruturar questões que são do interesse deles. Essas questões fizeram com que a matemática adquirisse um sentido prático, visto que tudo o que foi proposto pertence ao universo real deles.

Temas como grafos e codificações que, para a maioria são inéditos, abstratos e de difícil compreensão, se tornam simples a partir da assimilação das aplicações apresentadas.

A compreensão e as conclusões levantadas por meio dos cálculos da situação-problema levaram à reflexão sobre questões de saúde, bem estar e relações sociais, proporcionando novas análises, despertando a curiosidade e estimulando o aprendizado.

Pode-se afirmar que, deste modo, a matemática cumpre o seu papel, viabilizando análises e resoluções de problemas reais, levando os alunos a desenvolverem novos saberes e aplicá-los a antigos questionamentos.

BIBLIOGRAFIA

Boldrini, José Luiz – Álgebra Linear – São Paulo – Brasil (1980)

Anton Haward e Chris Rorres – Álgebra Linear com Aplicações – Porto Alegre – Brasil – (2001)

Dante, Luiz Roberto- Matemática: Contexto e Aplicações – São Paulo – Brasil (2013)

Iezzi, Gelson – Matemática: Ciência e Aplicações, Vol 2; Ensino Médio – São Paulo – Brasil (2013)

Christiane Rousseau, Yvan Saint Aubin – Mathematics And Technology – Québec – Canadá (2000)

Souza, Joamir Ribeiro de – Novo Olhar Matemática, Vol 2, Ensino Médio – São Paulo – Brasil

Brasil, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica – Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) – Brasília (2006)

<http://www.colorado.edu/education/DMP/activities/matrices/dlsact04.html>