

Universidade Federal do Maranhão  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática

# **Números Complexos: Alguns aspectos algébricos e geométricos**

Robert Batista Pinheiro

2013

Universidade Federal do Maranhão  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática

# **Números Complexos: Alguns aspectos algébricos e geométricos**

por

Robert Batista Pinheiro

sob orientação do

Prof. Dr. Felix Siva Costa

Março de 2013

São Luís - MA

Universidade Federal do Maranhão  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática

## **Números Complexos: Alguns aspectos algébricos e geométricos**

por

**Robert Batista Pinheiro**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Números complexos

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Felix Silva Costa - UEMA (Orientador)**

---

**Prof. Dr. José Antônio Pires Ferreira Marão - UFMA**

---

**Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira - UNICAMP**

*Ao senhor Deus e à minha família.*

*“À medida que a investigação avança, tem-se tornado cada vez mais claro que para compreender verdadeiramente a matemática, mesmo que seja só o cálculo, o campo dos números reais é estranhamente estreito, e é imperativo que trabalhemos com os números complexos para atingir a uniformidade e a harmonia”.*

*Liang-Shin Hahnny*

# Agradecimentos

*À Deus, pois se não fosse por Ele nada seria possível;*

*À Minha esposa Josely de Jesus Queiroz que é o meu ponto de equilíbrio nas horas de grande dificuldade;*

*À minha filha Amanda Letícia que veio abrilhantar a minha vida;*

*Aos meus pais João Batista Pinheiro e Maria de Fátima Dutra Pinheiro que foram fundamentais na minha criação e educação;*

*Aos meus irmãos que sempre me incentivaram nessa jornada;*

*Aos meus amigos Filardes de Jesus, Edvilson Silva, Freud Sebastiane e Cintia Rosana pelas palavras de apoio e incentivo;*

*A todos os professores da Universidade Federal do Maranhão ligados ao PROFMAT por acreditarem no projeto;*

*Ao professor Dr. Felix Silva que prontamente aceitou ser meu orientador e foi de grande importância para que esse trabalho pudesse ser realizado;*

*Aos meus amigos Uilbiran Chaves, Manoel Jansen e Everton Cangussu pela colaboração, incentivo e ajuda na realização desse trabalho.*

*À SBM, a CAPES e a UFMA por, respectivamente, realizar, financiar e executar o projeto.*

# Resumo

O objetivo desse trabalho dentre outros, é desenvolver um material com maior embasamento teórico sobre números complexos, seja para o professor, seja para o aluno. Para isso, desenvolvemos o trabalho da seguinte forma: No capítulo 1 vamos apresentar um pouco da história dos números complexos, nesse capítulo vamos compreender que a criação dos números complexos surgiu a partir da busca da solução de equações do 3º grau e não do 2º grau. No capítulo 2 apresentaremos um resumo de todas as representações dos números complexos usualmente utilizadas (cartesiana, algébrica e trigonométrica) e também a representação matricial que quase não é abordada no ensino médio. No capítulo 3, apresentaremos a representação exponencial junto com o estudo de logaritmo no campo dos complexos e também a potenciação quando o expoente é um número da forma  $a + bi$ . No capítulo 4, discutimos alguns tópicos de geometria no plano de Argand-Gauss onde apresentaremos uma fórmula para calcular a área do polígono formado pelos afixos das raízes  $n$ -ésimas de um complexo  $a + bi$  que depende apenas de  $n, a$  e  $b$ .

Palavras-Chave: Números Complexos; Representações; Logaritmos; Áreas.

# Abstract

The aim of this study and others, is to develop a material with a stronger theoretical base on complex numbers, either to the teacher or to the student. For this, we developed the work as follows: In chapter 1 we show some of the history of complex numbers, in this chapter we understand that the creation of complex numbers arose from the search for the solution of equations of the 3rd degree and not of 2nd degree. In Chapter 2 we present a summary of all representations of complex numbers usually used (Cartesian, algebraic and trigonometric) and also the matrix representation which is barely addressed in high school. In Chapter 3, we present the exponential representation along with the study of the complex logarithm in the field and also the potentiation when the exponent is a number of the form  $a + bi$ . In chapter 4, we discuss some topics in geometry Argand-Gauss plane where we will present a formula to calculate the area of the polygon formed by affixes the  $n$ th roots of a complex  $a + bi$  which depends only on  $n, a$  and  $b$ .

Keywords: Complex Numbers; Representations; Logarithms; Areas.

# Sumário

Sumário	viii
Lista de Figuras	x
Introdução	1
1 Um pouco da história do números complexos	3
2 Representações dos números complexos	10
2.1 Representação cartesiana . . . . .	10
2.1.1 Propriedades da adição no conjunto $\mathbb{C}$ . . . . .	11
2.1.2 Propriedades da multiplicação no conjunto $\mathbb{C}$ . . . . .	12
2.1.3 Propriedade distributiva em relação à adição . . . . .	13
2.1.4 Imersão de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{C}$ . . . . .	14
2.1.5 Unidade imaginária . . . . .	15
2.2 Representação algébrica . . . . .	15
2.2.1 Operações com números complexos na forma algébrica . . . . .	16
2.2.2 Potências naturais de $i$ . . . . .	16
2.2.3 Conjugado de um número complexo . . . . .	17
2.2.4 Conjugado da soma, do produto e de uma potência . . . . .	17
2.2.5 Divisão de números complexos na forma algébrica . . . . .	18
2.3 Representação trigonométrica . . . . .	19
2.3.1 Módulo de um complexo . . . . .	20
2.3.2 Propriedades do módulo . . . . .	20
2.3.3 A desigualdade triangular . . . . .	21

---

2.3.4	Argumento de um número complexo . . . . .	22
2.3.5	Forma trigonométrica dos números complexos . . . . .	23
2.3.6	Igualdade de complexos na forma trigonométrica . . . . .	23
2.3.7	Operações com complexos na forma trigonométrica . . . . .	24
2.3.8	Radiciação de números complexos . . . . .	26
2.4	Representação matricial . . . . .	30
2.4.1	Adição de complexos na forma matricial . . . . .	31
2.4.2	Multiplicação de complexos na forma matricial . . . . .	31
2.4.3	Algumas propriedades na representação matricial . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Logaritmos no campo dos complexos</b>	<b>34</b>
3.1	Representação exponencial . . . . .	34
3.1.1	Operações na forma exponencial de complexos . . . . .	35
3.1.2	Aplicações da forma exponencial na trigonometria . . . . .	36
3.1.3	Aplicações da forma exponencial em somatórios de números binomiais	41
3.2	Conexão entre complexo e logaritmo . . . . .	46
3.2.1	Valor principal do logaritmo de um complexo . . . . .	46
3.3	Potenciação no campo do complexo . . . . .	49
3.4	Reflexões nos espelhos planos através de números complexos . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Tópicos de geometria no plano de Argand-Gauss</b>	<b>59</b>
4.1	Equação da reta por dois afixos . . . . .	59
4.2	Condição de alinhamento de três complexos . . . . .	62
4.3	Classificação dos triângulos . . . . .	63
4.4	Área do triângulo . . . . .	64
4.5	Área de um polígono convexo . . . . .	68
	<b>Considerações Finais</b>	<b>72</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>74</b>

# Lista de Figuras

2.1	Aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}'$ . . . . .	14
2.2	Plano de Argand-Gauss. . . . .	19
2.3	Plano de Argand-Gauss. . . . .	20
2.4	Plano de Argand-Gauss. . . . .	23
2.5	Representação geométrica das raízes de $\sqrt[4]{1}$ . . . . .	29
2.6	Polígono regular de $n$ lados. . . . .	30
3.1	Reflexão da luz. . . . .	53
3.2	Vetor posição. . . . .	54
3.3	Reflexão de $z = x - yi$ sobre o eixo $Ox$ . . . . .	55
3.4	Raio de luz refletido sobre o espelho $E$ . . . . .	56
3.5	Exemplo usando raio refletido. . . . .	57
4.1	Diagrama representando a aplicação $z = a + bi \rightarrow P(a, b)$ . . . . .	60
4.2	Reta $r$ passando por dois afixos. . . . .	60
4.3	Triângulo 1 . . . . .	63
4.4	Triângulo 2. . . . .	64
4.5	Triângulo 3. . . . .	66
4.6	Triângulo 4. . . . .	66
4.7	Triângulo 5. . . . .	67
4.8	Triângulo 6. . . . .	67
4.9	Polígono convexo no plano de Argand-Gauss. . . . .	68
4.10	Polígono regular formado pelas raízes $n$ -ésimas. . . . .	70

---

4.11 Polígono regular inscrito em uma circunferência, associado às raízes $n$ -ésimas de um complexo. . . . .	71
4.12 Triângulo 7. . . . .	72

# Introdução

Apesar do seu pouco aparecimento no ensino médio, os números complexos emergem naturalmente em diversas aplicações do mundo real. Eles possuem grande relevância em inúmeras áreas, principalmente nas engenharias, onde seu uso se torna uma ferramenta fundamental. Podemos citar, por exemplo, na engenharia elétrica onde a análise de circuitos de corrente alternada é feita com a ajuda desses números. Nessa mesma engenharia grandezas com a impedância (em ohm) e a potência aparente (em volt-ampere) são expressas por um número complexo, já na aerodinâmica foi desenvolvida uma curva fechada no plano complexo que representa o perfil de uma asa de avião [26]. Nesse trabalho apresentamos uma aplicação na física, mais precisamente na óptica, onde determinamos a direção de um raio de luz refletido num espelho plano<sup>1</sup>. Segundo Jucimar Peruzzo<sup>2</sup>, foi a partir do estudo das equações algébricas do 3º grau que se conseguiu um melhor entendimento da estrutura dos números complexos ou imaginários. Descobriu-se que o campo dos números reais é insuficiente para o estudo da álgebra, sendo indispensável trabalhar-se também com os números imaginários. Isso ficou bastante visível quanto à questão de resolução de equações. Os números complexos são uma das tantas abstrações matemáticas que facilitam o cálculo e a resolução de muitos problemas.

Nosso objetivo é apresentar um material de estudo para professores e alunos, com assuntos que envolvam números complexos. Inicialmente, apresentamos uma breve introdução sobre os números complexos, seu aparecimento e desenvolvimento ao longo dos tempos. No Capítulo 2, mostramos suas representações e propriedades, destacando as representações algébricas e trigonométricas, que são bastante utilizadas nas aplicações. No capítulo 3, abor-

---

<sup>1</sup>Sistema óptico de espelhos constituído por superfícies planas e polidas, capazes de refletir regularmente a luz.

<sup>2</sup>Professor da E.E.B. Dom Felício César da Cunha Vasconcelos e E.E.B. Isabel da Silva Telles em, Irani, Santa Catarina.

---

damos o estudo de logaritmo de um número complexo, que corresponde a um ponto delicado do assunto, mas de extrema importância. No capítulo 4, discutimos alguns tópicos de geometria no plano de Argand-Gauss, apresentando uma forma de calcular a área do polígono formado pelas raízes  $n$ -ésimas de um complexo.

Como dito anteriormente, nossa proposta é desenvolver um material com maior embasamento teórico, com a finalidade de dar um maior suporte aos professores e alunos, possibilitando, por exemplo, a elaboração e implementação de projetos em programas como o PIBIC-JUNIOR, que tem como objetivo fortalecer a pesquisa científica.

# Capítulo 1

## Um pouco da história do números complexos

Podemos dizer que uma das motivações principais do surgimento dos números complexos não foi à resolução de equações do 2º grau cujas soluções são expressas por raízes quadradas de números negativos. O surgimento desses números está ligado diretamente à resolução de equações algébricas do 3º grau. Até aquele momento as equações do 2º grau que apresentavam raízes quadradas de números negativos eram consideradas sem resolução e o objetivo dos matemáticos da época era desenvolver uma fórmula de resolução de equações cúbicas através de radicais, semelhante à que se usava para resolver as equações quadráticas.

Por volta de 1510, o matemático italiano Scipione Del Ferro (1465-1526) desenvolveu uma fórmula para um caso especial de cúbicas, ele desenvolveu uma resolução para equações do tipo

$$x^3 + px + q = 0.$$

Entretanto Scipione faleceu sem publicar seus resultados, divulgando-os apenas para um pequeno grupo de pessoas dentre eles Antônio Maria Del Fiore. De posse desse resultado Fiore tentou ganhar seu espaço entre os matemáticos e no ano de 1535 desafiou Nicolau Fontana (1500-1557), conhecido como Tartágia, para um duelo de resolução de problemas (o que era comum naquela época). O desafio consistia na resolução de trinta problemas para cada, propostos pelo oponente, cabia ao perdedor pagar trinta banquetes. Tartágia estava começando a se destacar no cenário matemático da época e prontamente aceitou o desafio.

Todos os problemas propostos por Fior para Tartáglio recaiam no caso particular da cúbica cuja solução ele conhecia, Tartáglio sabia que seu adversário conhecia tal solução, mas o que Fior não sabia era que no dia 10 de fevereiro de 1535 Tartáglio também deduziu a fórmula e foi ainda mais longe deduzindo a fórmula para a equação do tipo

$$x^3 + px^2 + q = 0.$$

Tartáglio venceu o desafio sem muito esforço, pois conseguiu resolver todos os problemas propostos por Fior, já seu adversário não conseguiu resolver nem a metade dos problemas impostos por Tartáglio, e saiu humilhado do desafio. A vitória de Tartáglio e sua descoberta ganham grande repercussão entre os matemáticos e ele recebe um convite de Girolamo Cardano (1501-1576) para ir a sua casa. Nessa época, Cardano gozava de boa posição em Milão e o convite era com o pretexto de apresentá-lo ao comandante militar da cidade, uma vez que Tartáglio tinha feito também grandes descobertas sobre tiros e fortificações, a intenção de Cardano era ganhar a autorização de Tartáglio para publicar a resolução da equação em seu livro *Practica Arithmetica* (1539). A princípio Tartáglio não revela a fórmula, mas depois de muita insistência Cardano conseguiu a fórmula com a promessa de que não publicaria, pois o próprio Tartáglio queria publicar e só estava esperando o momento exato para isso. Porém Tartáglio tinha revelado o segredo na forma de um poema cifrado e Cardano não conseguiu decifrar. Depois de mais promessas por parte de Cardano, Tartáglio revela a fórmula sem códigos, entretanto Cardano não cumpre a promessa e, em 1545, publica a fórmula de Tartáglio no seu livro *Ars Magna*<sup>1</sup>.

A solução para a equação cúbica do tipo  $x^3 + px + q = 0$  se dava através da fórmula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

conhecida hoje como fórmula de Cardano. Essa fórmula só se aplicava quando

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0,$$

---

<sup>1</sup>Para melhor entendimento, usar a seguinte referência [9]

pois isso garantia a existência da raiz evitando assim a mesma situação das equações do 2º grau com raízes quadradas de números negativos.

Nessa mesma época o matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1573) em seu livro *L'Álgebra Parte Maggiore Dell' Arithmetica* fez um estudo sobre a resolução de equações de grau inferior a quatro e resolvendo a equação  $x^3 - 15x = 4$  verificou por inspeção que  $x = 4$  era solução da equação, pois  $4^3 - 15 \cdot 4 = 4$  mas, tentando verificar se encontrava a mesma solução  $x = 4$ , pela fórmula de Cardano- Tartáglia obteve:

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{3375}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{3375}{27}}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Com esse resultado, Bombelli chegou a um impasse pois  $\sqrt{-121}$  não existia. Logo, a equação não teria solução, mas  $x = 4$  era uma solução da equação pois satisfazia a igualdade. Somente em 1572 ele resolveu o impasse, partindo da hipótese que existiam expressões das formas  $a + \sqrt{-b}$  e  $a - \sqrt{-b}$  que seriam as formas simplificadas de, respectivamente,  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$  e  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  tal que

$$(a + \sqrt{-b}) + (a - \sqrt{-b}) = 4$$

concluindo assim que  $a = 2$ . Faltava então determinar o valor de  $b$ , voltando a equação ele deduziu:

$$2 + \sqrt{-b} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{121} \cdot \sqrt{-1}} = \sqrt[3]{2 + 11 \cdot \sqrt{-1}}.$$

Elevando ambos os membros ao cubo, chegou na seguinte relação:

$$(8 - 6b) + (12 - b)\sqrt{-b} = 2 + 11\sqrt{-1}.$$

Por comparação concluiu que  $b = 1$ . Assim:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}.$$

Portanto

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Bambelli também criou as regras da multiplicação para operar com  $\sqrt{-1}$ , ou seja:

$$(\sqrt{-1}).(\sqrt{-1}) = -1$$

$$(-\sqrt{-1}).(\sqrt{-1}) = 1$$

$$(-\sqrt{-1}).(-\sqrt{-1}) = -1$$

$$(\pm 1)(\sqrt{-1}) = \pm\sqrt{-1}$$

$$(\pm 1)(\pm\sqrt{-1}) = \pm\sqrt{-1}$$

Além dessa regra da multiplicação também criou a regra para somar dois números da forma  $x + y\sqrt{-1}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , ou seja:

$$(x_1 + y_1\sqrt{-1}) + (x_2 + y_2\sqrt{-1}) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{-1}.$$

É importante ressaltar que a notação  $\sqrt{-1}$  só foi introduzida no ano de 1629 por Albert Girard (1595-1632) em seu livro *L'Invention Nouvelle em Algebre*, até então a simbologia para  $\sqrt{-1}$  era da forma  $R[0 \ m.1]$  ( $R$  de raiz,  $m$  de menos) usada por Bombelli. Já os termos real e imaginário foram introduzidos em 1637 por René Descartes (1596-1650); em 1777 Leonhard Euler (1707-1783) introduziu o símbolo  $i$  para denotar  $\sqrt{-1}$  sendo aceito plenamente somente no ano de 1801 quando Friederich Gauss (1777-1855) começou a usar de forma contínua essa notação. Também foi Gauss que introduziu a expressão "números complexos" e coube a Willian Rowan Hamilton (1805-1865) a introduzir a notação  $a+bi$  para um número complexo, essa expressão é denominada nos dias de hoje como forma algébrica de um número complexo.

No campo geométrico o desenvolvimento aconteceu a partir do ano de 1800 quando Jean Robert Argand (1768-1822) e Gauss chegaram a conclusão que os números complexos poderiam ser representados em um sistema de coordenadas retangulares e para isso eles convencionaram que o eixo horizontal representaria os números reais, o eixo vertical representaria os números imaginários e qualquer complexo poderia ser representado na forma de par ordenado, isto é,  $a + bi$  corresponderia ao par  $(a, b)$ . Com essas conversões um complexo  $a + bi$  representaria geometricamente um ponto nesse plano bidimensional que hoje é denominado

de plano de Argand-Gauss.

Encerramos este capítulo apresentando de forma sistemática e numa notação atual a solução encontrada para resolver a equação

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

desenvolvida por Cardano.

Primeiramente vamos fazer uma mudança de variável através da seguinte substituição  $x = y + m$ . Dessa forma:

$$a(y + m)^3 + b(y + m)^2 + c(y + m) + d = 0.$$

Desenvolvendo, teremos:

$$ay^3 + (3am + b)y^2 + (3am^2 + 2bm + c)y + (am^3 + bm^2 + cm + d) = 0.$$

Como o objetivo é reduzir a equação a uma cúbica do tipo  $y^3 + py + q = 0$  devemos anular o coeficiente de  $y^2$ . Para isso fazemos  $3am + b = 0$  e, assim,  $m = -\frac{b}{3a}$ . Logo,

$$ay^3 + (3am^2 + 2bm + c)y + (am^3 + bm^2 + cm + d) = 0.$$

Dividindo toda a equação por  $a \neq 0$ , obtemos:

$$y^3 + \left(\frac{3am^2 + 2bm + c}{a}\right)y + \left(\frac{am^3 + bm^2 + cm + d}{a}\right) = 0.$$

Fazendo  $p = \frac{3am^2 + 2bm + c}{a}$  e  $q = \frac{am^3 + bm^2 + cm + d}{a}$ , obtemos a equação

$$y^3 + py + q = 0$$

que é exatamente o tipo de cúbica que Tartágia desenvolveu a fórmula. Resolvendo essa equação encontraremos o valor de  $x$ .

Agora vamos mostrar numa linguagem atual como Tartágia chegou na fórmula de para determinar a raiz da equação  $y^3 + py + q = 0$ , para isso vamos usar outro artifício que é fazer

$y = A + B$ . Logo:

$$y^3 = (A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B).$$

Como  $y = A + B$ , então  $y^3 = A^3 + B^3 + 3ABy$  e, daí,

$$y^3 - 3ABy - (A^3 + B^3) = 0.$$

Comparando com a equação  $y^3 + py + q = 0$ , obtemos:

$$p = -3AB \implies AB = -\frac{p}{3} \implies A^3B^3 = -\frac{p^3}{27} \quad \text{e} \quad q = -(A^3 + B^3) \implies A^3 + B^3 = -q.$$

Fazendo  $\alpha = A^3$  e  $\beta = B^3$ , obtemos:  $\alpha\beta = -\frac{p^3}{27}$  e  $\alpha + \beta = -q$ .

Conhecemos agora a soma e o produto de dois números podemos assim gerar uma equação do 2º grau do tipo  $k^2 + qk - \frac{p^3}{27} = 0$  de raízes  $\alpha$  e  $\beta$ . Logo,  $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$ . Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} A^3 = \alpha &= \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2 + \frac{4p^3}{27}}{4}} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \\ &\implies A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B^3 = \beta &= \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2 + \frac{4p^3}{27}}{4}} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \\ &\implies B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \end{aligned}$$

Como  $y = A + B$ , segue que:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Neste capítulo, destacamos o aparecimento dos números complexos, bem como atual

---

simbologia e o plano de Argand-Gauss. Ainda, um modo sistemático para obtenção das raízes cúbicas de uma equação de terceiro grau. Lembrando que este foi o principal motivo do surgimento dos números complexos e não a resolução de uma equação de segundo grau. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [9], [17], [19], [20], [16].

# Capítulo 2

## Representações dos números complexos

### 2.1 Representação cartesiana

Seja o conjunto  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$ , isto é,  $\mathbb{R}^2$  é o conjunto dos pares ordenados  $(x, y)$  onde  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R}$ . Tomando os elementos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  desse conjunto, temos:

i) **Igualdade de pares ordenados:** Dois pares ordenados são iguais se, e somente se, possuem abscissas iguais e também as ordenadas.

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2$$

ii) **Adição de pares ordenados:** A soma de dois pares ordenados resulta em um novo par ordenado cujos primeiro e segundo termos são, respectivamente, a soma dos primeiros e a soma dos segundos termos dos pares ordenados dados.

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

iii) **Multiplicação de pares ordenados:** O produto de dois pares ordenados resulta em um novo par ordenado cuja abscissa é a diferença entre o produto dos primeiros termos e o produto dos segundos termos dos pares ordenados dados e cuja ordenada é a soma dos

produtos do primeiro termo de cada par dado pelo segundo termo do outro par.

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

Chamamos de número complexo a qualquer par ordenado  $(x, y)$  de números reais. O conjunto dos números complexos, representado pela letra  $\mathbb{C}$ , é o conjunto dos pares ordenados de números reais para os quais estão definidas a igualdade, a adição e a multiplicação. De maneira usual o elemento de  $\mathbb{C}$  é representado pela letra  $z$ , logo:

$$z \in \mathbb{C} \iff z = (x, y) \text{ com } x, y \in \mathbb{R}.$$

Aqui  $x$  é chamada a parte real de  $z$ , denotada por  $Re(z) = x$ , e  $y$  é a parte imaginária de  $z$ , denotada por  $Im(z) = y$ . [18]

O complexo cuja parte imaginária é zero, tem a seguinte forma  $(x, 0)$ . Este número é identificado com o número real  $x$ . [18]

Tomando dois elementos de  $\mathbb{C}$ ,  $z_1 = (a, b)$  e  $z_2 = (c, d)$ , estabelecemos, as seguintes definições:

- i) **Igualdade de complexos:**  $z_1 = z_2 \iff a = c$  e  $b = d$ .
- ii) **Adição de complexos:**  $z_1 + z_2 = z_a$  onde  $z_a = (a + c, b + d)$ .
- iii) **Multiplicação de complexos:**  $z_1 \cdot z_2 = z_m$  onde  $z_m = (ac - bd, ad + bc)$ .

### 2.1.1 Propriedades da adição no conjunto $\mathbb{C}$

A-1) **Propriedade associativa :**  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

Demonstração: Sejam  $z_1 = (a, b)$ ,  $z_2 = (c, d)$  e  $z_3 = (e, f)$ . Então:

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= [(a, b) + (c, d)] + (e, f) = [(a + c, b + d)] + (e, f) \\ &= [(a + c) + e, (b + d) + f] = [a + (c + e), b + (d + f)] \\ &= (a, b) + [(c + e, d + f)] = z_1 + (z_2 + z_3) \end{aligned}$$

A-2) **Propriedade comutativa :**  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Demonstração: Sejam  $z_1 = (a, b)$ ,  $z_2 = (c, d)$ . Então:

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b) = z_2 + z_1.$$

A-3) **Existência do elemento neutro:**  $\exists e_a \in \mathbb{C}; z + e_a = z, \forall z \in \mathbb{C}$ .

Demonstração: Fazendo  $z = (a, b)$ , vamos mostrar que existe  $e_a = (x, y)$  tal que  $z + e_a = z, \forall z \in \mathbb{C}$ . De fato:

$$(a, b) + (x, y) = (a, b) \iff (a + x, b + y) = (a, b).$$

Logo,  $a + x = a$  e  $b + y = b$  de onde,  $x = 0$  e  $y = 0$ . Portanto existe  $e_a = (0, 0)$  que somado a qualquer número complexo  $z$  dá como resultado o próprio  $z$ .

A-4) **Existência do elemento simétrico:**  $\exists z' \in \mathbb{C}; z + z' = e_a, \forall z \in \mathbb{C}$ .

Demonstração: Fazendo  $z = (a, b)$ , vamos mostrar que existe  $z' = (x, y)$  tal que  $z + z' = e_a, \forall z \in \mathbb{C}$ . De fato:

$$(a, b) + (x, y) = (0, 0) \iff (a + x, b + y) = (0, 0).$$

Logo,  $a + x = 0$  e  $b + y = 0$  de onde,  $x = -a$  e  $y = -b$ . Portanto, existe  $z' = (-a, -b)$  que somado a qualquer número complexo  $z$  dá como resultado o elemento neutro  $e_a$ .

## 2.1.2 Propriedades da multiplicação no conjunto $\mathbb{C}$

M-1) **Propriedade associativa :**  $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

Demonstração: Sejam  $z_1 = (a, b)$ ,  $z_2 = (c, d)$  e  $z_3 = (e, f)$ . Então:

$$\begin{aligned} (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 &= [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = [(ac - bd, ad + bc)] \cdot (e, f) \\ &= [(ac - bd) \cdot e - (ad + bc) \cdot f, (ac - bd) \cdot f + (ad + bc) \cdot e] \\ &= [(ac) \cdot e - (bd) \cdot e - (ad) \cdot f - (bc) \cdot f, (ac) \cdot f - (bd) \cdot f + (ad) \cdot e + (bc) \cdot e] \\ &= [a \cdot (ce) - b \cdot (de) - a \cdot (df) - b \cdot (cf), a \cdot (cf) - b \cdot (df) + a \cdot (de) + b \cdot (ce)] \\ &= [a \cdot (ce - df) - b \cdot (cf + de), a \cdot (cf + de) + b \cdot (ce - df)] \\ &= (a, b) \cdot [(ce - df, cf + de)] = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \end{aligned}$$

M-2) **Propriedade comutativa :**  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Demonstração: Sejam  $z_1 = (a, b)$ ,  $z_2 = (c, d)$ . Então:

$$z_1 \cdot z_2 = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) = (c, d) \cdot (a, b) = z_2 \cdot z_1.$$

M-3) **Existência do elemento neutro:**  $\exists e_m \in \mathbb{C}; z \cdot e_m = z, \forall z \in \mathbb{C}$ .

Demonstração: Fazendo  $z = (a, b)$ , vamos mostrar que existe  $e_m = (x, y)$  tal que  $z \cdot e_m = z, \forall z \in \mathbb{C}$ . De fato:

$$(a, b) \cdot (x, y) = (a, b) \iff (ax - by, ay + bx) = (a, b).$$

Logo,  $ax - by = a$  e  $ay + bx = b$  de onde,  $x = 1$  e  $y = 0$ . Portanto existe  $e_m = (1, 0)$  que multiplicado a qualquer número complexo  $z$  dá como resultado o próprio  $z$ .

M-4) **Existência do elemento inverso:**  $\exists z^{-1} \in \mathbb{C}; z \cdot z^{-1} = e_m, \forall z \in \mathbb{C} - \{(0, 0)\}$ .

Demonstração: Fazendo  $z = (a, b) \neq (0, 0)$ , vamos mostrar que existe  $z^{-1} = (x, y)$  tal que  $z \cdot z^{-1} = e_m, \forall z \in \mathbb{C}^*$ . De fato:

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0) \iff (ax - by, ay + bx) = (1, 0).$$

Logo,  $ax - by = 1$  e  $ay + bx = 0$  de onde,  $x = \frac{a}{a^2 + b^2}$  e  $y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$ . Portanto existe  $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$  que multiplicado a qualquer número complexo  $z \neq (0, 0)$  dá como resultado o elemento neutro  $e_m$ .

### 2.1.3 Propriedade distributiva em relação à adição

Dados  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  então  $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Demonstração: Sejam  $z_1 = (a, b)$ ,  $z_2 = (c, d)$  e  $z_3 = (e, f)$ , temos:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] = (a, b) \cdot [(c + e, d + f)] \\ &= [a \cdot (c + e) - b \cdot (d + f), a \cdot (d + f) + b \cdot (c + e)] = [ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be] \\ &= [(a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot e - b \cdot f), (a \cdot d + bc) + (af + be)] \\ &= (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + bc) + (a \cdot e - b \cdot f, af + be) = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \end{aligned}$$

### 2.1.4 Imersão de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{C}$

Seja o subconjunto  $\mathbb{C}'$  de  $\mathbb{C}$ , formado pelos complexos da forma  $(x, 0)$ , isto é:

$$\mathbb{C}' = \{(x, y); x \in \mathbb{R} \text{ e } y = 0\}.$$

Consideremos uma aplicação  $f$ , de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{C}'$  que leva cada  $x \in \mathbb{R}$  ao par  $(x, 0) \in \mathbb{C}'$ .

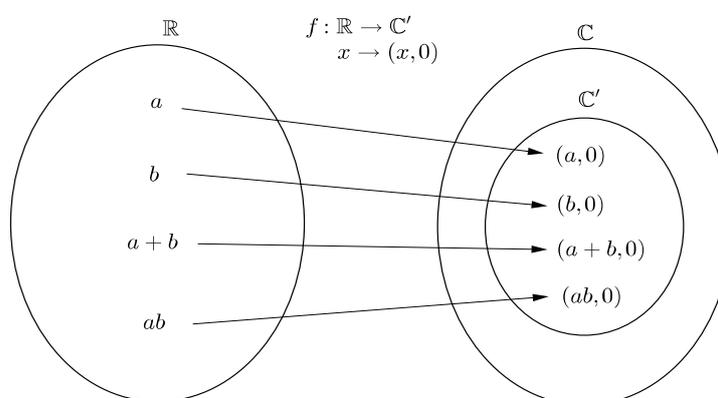


Figura 2.1: Aplicação de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{C}'$ .

Observamos primeiramente que  $f$  é bijetora, pois:

1. Todo par  $(x, 0) \in \mathbb{C}'$  é o correspondente, segundo  $f$ , de  $x \in \mathbb{R}$  (ou seja,  $f$  é sobrejetiva).
2. Dados  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , com  $x_1 \neq x_2$ , temos que os seus correspondentes  $(x_1, 0) \in \mathbb{C}'$  e  $(x_2, 0) \in \mathbb{C}'$  são distintos, de acordo com a definição de pares ordenados (ou seja,  $f$  é injetora).

Observamos ainda que  $f$  conserva as operações de adição e multiplicação, pois:

1.  $f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$ ;
2.  $f(ab) = (ab, 0) = (ab - 0.0, a.0 + 0.b) = (a, 0).(b, 0) = f(a).f(b)$ .

Como temos uma aplicação bijetora  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}'$  que conserva as operações de adição e multiplicação, dizemos que  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}'$  são isomorfos. Devido ao isomorfismo podemos operar

com os complexos da forma  $(x, 0)$  do mesmo modo que operamos com o real  $x$ , ou seja:

$$(x, 0) \longrightarrow x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Com essa justificativa, o número complexo da forma  $(x, 0)$  será identificado com o número real  $x$  [18].

### 2.1.5 Unidade imaginária

Definimos como unidade imaginária (notação:  $i$ ) o número complexo  $(0, 1)$ , ou seja:  $i = (0, 1)$ . Então:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0).$$

Obtemos assim, de acordo com **Subseção 2.1.4**, a propriedade fundamental da unidade imaginária:  $i^2 = -1$ .

## 2.2 Representação algébrica

O número complexo  $z = (x, y)$  pode ser reescrito como:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1),$$

ou seja, utilizando as representações  $1$  e  $i$ , para os respectivos pares ordenados, obtemos a representação  $z = x + yi$  que é denominada de forma algébrica, onde os números reais  $x$  e  $y$  são, respectivamente, denominados de parte real e parte imaginária de  $z$ , cujas notações são  $Re(z) = x$  para parte real e  $Im(z) = y$  para parte imaginária. Se  $y \neq 0$  então o número complexo  $z = x + yi$  é denominado número imaginário e no caso de  $x = 0$  é conhecido como imaginário puro.

Vamos, a seguir, apresentar algumas propriedades dos números complexos com esta representação.

### 2.2.1 Operações com números complexos na forma algébrica

i) **Igualdade de dois complexos:** Dois complexos são iguais se, e somente se, têm partes reais iguais e partes imaginárias também iguais. Sejam os complexos  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$ ,

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2.$$

ii) **Adição de dois complexos:** Para somarmos dois complexos nessa forma, somamos as partes reais e as partes imaginárias. Sejam os complexos  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$ ,

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

iii) **Multiplicação de complexos:** Para efetuarmos o produto de dois números complexos na forma algébrica devemos aplicar a propriedade distributiva e a propriedade fundamental da unidade imaginária ( $i^2 = -1$ ). Sejam os complexos  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$ ,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) = x_1x_2 + x_1y_2i + y_1x_2i + y_1y_2i^2 \\ &= x_1x_2 + x_1y_2i + y_1x_2i - y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i \end{aligned}$$

### 2.2.2 Potências naturais de $i$

Vamos analisar o comportamento das potências do tipo  $i^n$ , onde  $n$  é um número natural, temos:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1 \text{ (propriedade fundamental da unidade imaginária)}$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

Percebemos que à proporção que  $n$  cresce, os valores de  $i^n$  vão se repetindo periodicamente, admitindo sempre um dos valores da sequência  $(1, i, -1, -i)$ . Como o período de repetição é de quatro unidades, então podemos calcular o valor de  $i^n$  bastando elevar  $i$  ao resto da divisão euclidiana de  $n$  por 4. Quando efetuamos essa divisão obteremos um quociente  $q \in \mathbb{N}$  e um resto  $r \in \mathbb{N}$ , então:

$$n = 4q + r \implies i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r, \quad 0 \leq r < 4.$$

Com isso, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos as seguintes possibilidades.

$$\begin{aligned} i^n &= i^{4q+0} = i^{4q} \cdot i^0 = 1 \cdot 1 = 1; \\ i^n &= i^{4q+1} = i^{4q} \cdot i^1 = 1 \cdot i = i; \\ i^n &= i^{4q+2} = i^{4q} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1; \\ i^n &= i^{4q+3} = i^{4q} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i. \end{aligned}$$

Porém fica a dúvida para potências de  $i$  com expoentes inteiros negativos, racionais e irracionais, que com o decorrer do trabalho apresentamos tais comportamentos.

### 2.2.3 Conjugado de um número complexo

O conjugado do complexo  $z = (a, b)$  é o complexo  $\bar{z} = (a, -b)$ , ou  $\bar{z} = a - bi$ .

Da definição, resulta que:

- (a) O conjugado do conjugado de  $z$  é o próprio  $z$ ;
- (b) A soma de dois complexos conjugados é o dobro da parte real e a diferença é o imaginário puro cujo coeficiente é o dobro dos coeficientes dos complexos em questão;
- (c) O produto de um número complexo pelo seu conjugado é igual ao número real positivo.

### 2.2.4 Conjugado da soma, do produto e de uma potência

Se  $z_1$  e  $z_2$  são números complexos quaisquer, temos:

- i) O conjugado da soma é a soma dos conjugados, isto é:  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ .

ii) O conjugado do produto é o produto dos conjugados, isto é:  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ .

iii) O conjugado da potência é igual à potência do conjugado, isto é:  $\overline{z_1^n} = (\overline{z_1})^n$ .

Demonstrações:

(i)

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i \\ &= (a - bi) + (c - d)i = \overline{z_1} + \overline{z_2}.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{ac + adi + bci - bd} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i = ac - adi - bci - bd = (a - bi)(c - di) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\overline{z_1^n} &= \overline{(a + bi)^n} = \overbrace{\overline{(a + bi) \cdot (a + bi) \cdot (a + bi) \cdot \dots \cdot (a + bi)}}^{n \text{ fatores}} \\ &= \underbrace{\overline{(a + bi)} \cdot \overline{(a + bi)} \cdot \overline{(a + bi)} \cdot \dots \cdot \overline{(a + bi)}}_{n \text{ fatores}} = \left[ \overline{(a + bi)} \right]^n = (\overline{z_1})^n.\end{aligned}$$

## 2.2.5 Divisão de números complexos na forma algébrica

Para efetuarmos a divisão de  $\frac{a + bi}{c + di}$  com  $c + di \neq 0$ , basta multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, então:

$$\begin{aligned}\frac{a + bi}{c + di} &= \left( \frac{a + bi}{c + di} \right) \cdot \left( \frac{c - di}{c - di} \right) = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2} = \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2} \\ &= \left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right) + \left( \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) i.\end{aligned}$$

Como já sabemos dividir dois complexos, podemos agora operar potências de  $i$  com expoentes inteiros negativos, ou seja,  $i^{-n} = \frac{1}{i^n}$  com  $n > 0$ .

Analisaremos o comportamento de  $i^n$  com  $n \in \mathbb{Z}_-^*$ :

$$\begin{aligned}i^{-1} &= \frac{1}{i} = -i; & i^{-2} &= \frac{1}{i^2} = -1; & i^{-3} &= \frac{1}{i^3} = i; & i^{-4} &= \frac{1}{i^4} = 1; \\i^{-5} &= \frac{1}{i^5} = -i; & i^{-6} &= \frac{1}{i^6} = -1; & i^{-7} &= \frac{1}{i^7} = i; & i^{-8} &= \frac{1}{i^8} = 1 \\&\dots\end{aligned}$$

Percebemos o mesmo comportamento de  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja, os valores de  $i^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}_-^*$ , vão se repetindo periodicamente, admitindo sempre um dos valores da sequência  $(-i, -1, i, 1)$ . Logo, para  $n \in \mathbb{Z}$  teremos que  $i^n$  sempre será igual a um desses valores.

## 2.3 Representação trigonométrica

O complexo  $z = a + bi$  pode ser representado geometricamente, para isso usamos um plano idêntico ao plano de coordenadas cartesianas denominado de plano de Argand-Gauss. A cada complexo  $z = a + bi$  corresponde um único ponto  $P(a, b)$  do plano  $xOy$ , esse ponto é chamado de afixo do complexo  $z$ . Todos os números reais têm seus afixos no eixo  $Ox$ , os números imaginários têm seus afixos fora desse eixo, já os complexos da forma  $z = bi = (0, b)$  são denominados imaginários puros e seus afixos estão sobre o eixo  $Oy$ . Os eixos  $Ox$  e  $Oy$  são denominados, respectivamente, de eixo real e eixo imaginário.

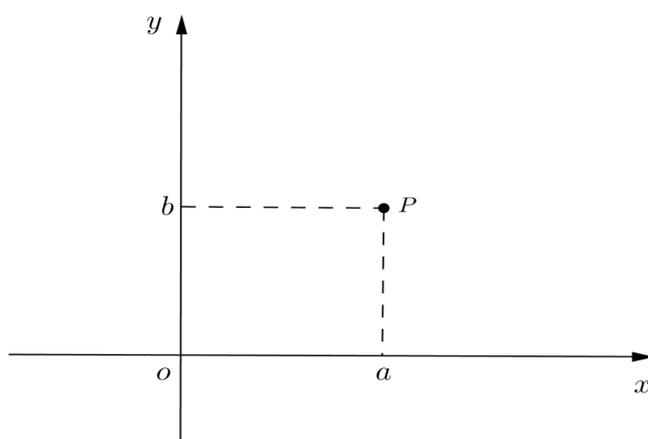


Figura 2.2: Plano de Argand-Gauss.

### 2.3.1 Módulo de um complexo

O módulo de um número complexo  $z = a + bi$  é o número real  $\rho \geq 0$  que representa a distância de  $P(a, b)$  até a origem do plano de Argand-Gauss. O módulo de um número complexo  $z = a + bi$  também pode ser representado por  $|z|$ .

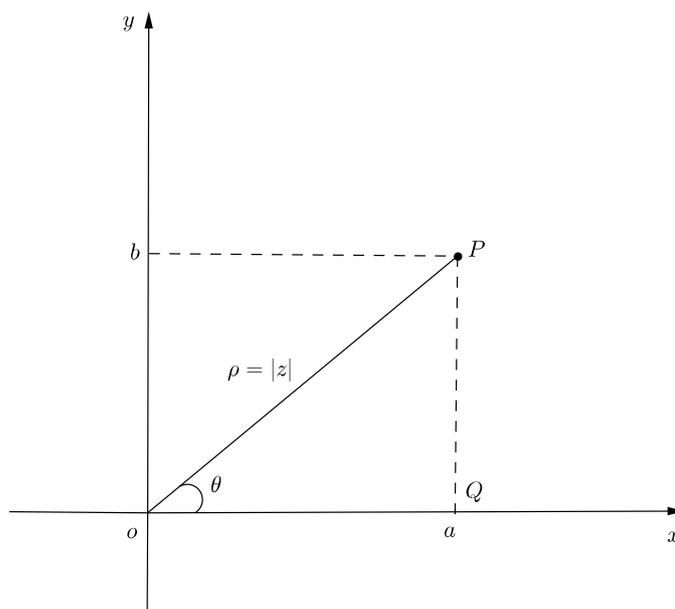


Figura 2.3: Plano de Argand-Gauss.

Observando que o triângulo  $OPQ$  é retângulo então  $\rho^2 = a^2 + b^2$ , como o número real  $\rho$  representa o comprimento do segmento,

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (2.1)$$

### 2.3.2 Propriedades do módulo

Sejam  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$  dois complexos, temos as seguintes propriedades:

- (i)  $|z_1| = |\overline{z_1}|$
- (ii)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- (iii)  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$

Demonstrações:

(i)

$$|z_1| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |a - bi| = |\bar{z}_1|$$

(ii)

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |(a + bi)(a - bi)| = |(ac - bd) + (ad + bc)i| \\ &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2acbd + b^2c^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2} = \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)} \cdot \sqrt{(c^2 + d^2)} = |z_1| \cdot |z_2|. \end{aligned}$$

(iii) Vamos inicialmente calcular  $\left| \frac{1}{z_2} \right|$ .

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z_2} \right| &= \left| \frac{1}{c + di} \right| = \left| \frac{1}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} \right| = \left| \frac{c - di}{c^2 + d^2} \right| = \left| \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2}i \right| \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{(a^2 + d^2)^2} + \frac{d^2}{(a^2 + d^2)^2}} = \sqrt{\frac{c^2 + d^2}{(a^2 + d^2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{a^2 + d^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + d^2}} \\ &= \frac{1}{|z_2|}. \end{aligned}$$

Agora iremos com esse resultado demonstrar a propriedade:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

### 2.3.3 A desigualdade triangular

O módulo da soma de dois complexos é menor que a soma dos módulos, isto é, dados os complexos  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ , tem-se  $|z + w| \leq |z| + |w|$ .

Partimos da desigualdade  $(ad - bc)^2 \geq 0$  (que é verdadeira para quaisquer que sejam  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ).

$$(ad - bc)^2 \geq 0 \implies a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2 \geq 0 \implies a^2d^2 + b^2c^2 \geq 2adbc.$$

Somando a ambos os membros o número positivo  $a^2c^2 + b^2d^2$ , temos

$$a^2d^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + b^2d^2 \geq 2adbc + a^2c^2 + b^2d^2 \implies (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2.$$

Daí, teremos:

$$\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq (ac + bd).$$

Multiplicando ambos os membros por 2 e em seguida somando o número positivo  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ , obtemos:

$$a^2 + b^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + c^2 + d^2 \geq a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2.$$

Segue que

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \implies |z| + |w| \geq |z + w|,$$

ou, de forma equivalente,

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

### 2.3.4 Argumento de um número complexo

Chamamos de argumento de um número complexo, o número real  $\theta$ , tal que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho} \text{ e } \operatorname{cos}\theta = \frac{a}{\rho}, \quad a, b, \rho \in \mathbb{R}.$$

O ângulo  $\theta$  é considerado no sentido anti-horário a partir da parte positiva do eixo real até o segmento  $OP$ . Observamos ainda no caso de  $b = 0$  e  $a > 0$ , isto é, quando  $P$  está no semi-eixo positivo  $Ox$ ,  $\theta = 0 \text{ rad}$ .

De modo geral, para  $z \neq 0$  o ângulo  $\theta$  é determinado a menos de um múltiplo inteiro de  $2\pi$ , ou seja,  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Nesse caso,  $\theta$  é denominado argumento principal pelo fato de também serem considerados como argumentos do número complexo  $z = a + bi$  todos os arcos cômruos de  $\theta$ , ou seja, os ângulos de medida  $\theta_k = \theta_0 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

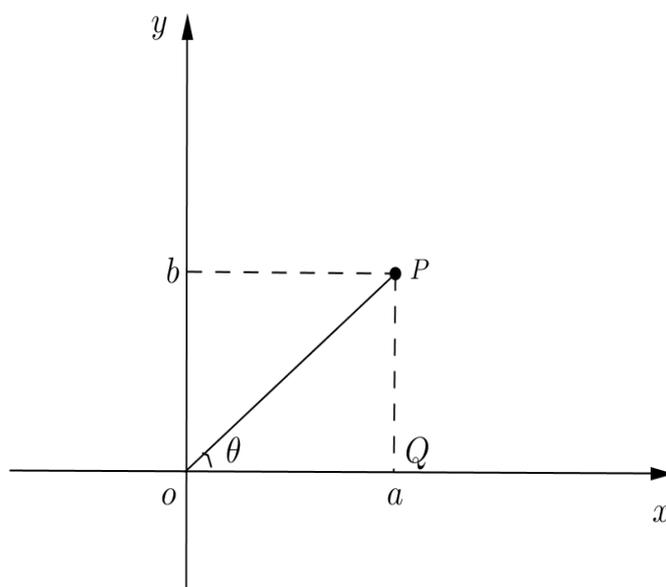


Figura 2.4: Plano de Argand-Gauss.

### 2.3.5 Forma trigonométrica dos números complexos

Seja o complexo  $z = a + bi$ ,  $z \neq 0$ . Usando as relações trigonométricas no triângulo retângulo  $OPQ$  da Figura 2.4, temos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho} \implies b = \rho \operatorname{sen}\theta \quad (i) \quad \text{e} \quad \operatorname{cos}\theta = \frac{a}{\rho} \implies a = \rho \operatorname{cos}\theta. \quad (ii)$$

Substituindo (i) e (ii) na igualdade  $z = a + bi$ , obtemos  $z = \rho \operatorname{cos}\theta + i\rho \operatorname{sen}\theta$ , ou seja:

$$z = \rho(\operatorname{cos}\theta + i\operatorname{sen}\theta) \quad (2.2)$$

que corresponde à sua forma trigonométrica.

### 2.3.6 Igualdade de complexos na forma trigonométrica

Sejam os complexos  $z_1 = \rho_1(\operatorname{cos}\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$  e  $z_2 = \rho_2(\operatorname{cos}\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$ , então:

$$z_1 = z_2 \iff \rho_1 = \rho_2 \quad \text{e} \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z},$$

ou seja, dois complexos na forma trigonométrica são iguais se, e somente se, os módulos são iguais e os argumentos arcos cômgruos.

**Exemplo 2.1** *Provar que o conjunto dos afixos dos números complexos pertencentes a  $\{(2 + \cos t) + i \sin t; t \in \mathbb{R}\}$ , onde  $i = \sqrt{-1}$ , é uma circunferência de raio 1, com centro no afixo do número 2.*

Solução: Podemos notar que no eixo real  $x = 2 + \cos t$  e no eixo imaginário  $y = \sin t$ . Com isso, elevando ambas as variáveis ao quadrado e somando-as, obtemos:

$$x = 2 + \cos t \implies x - 2 = \cos t \implies (x - 2)^2 = \cos^2 t \quad \text{e} \quad y = \sin t \implies y^2 = \sin^2 t.$$

Como  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$  implica que  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$  que representa uma circunferência de centro  $(2, 0)$  e raio 1.

### 2.3.7 Operações com complexos na forma trigonométrica

As operações de multiplicação e divisão podem ser efetuadas de maneira mais fácil quando os números complexos estão na forma trigonométrica.

(i) **Multiplicação:** Dados  $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$  e  $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$ , então:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1) \cdot \rho_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2) \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2) \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + i \cos\theta_1 \sin\theta_2 + i \sin\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)] \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

Notemos que o número complexo obtido é tal que:

- Seu módulo é igual à produto dos módulos de  $z_1$  e  $z_2$ ;
- Seu argumento é igual à soma dos argumentos de  $z_1$  e  $z_2$ .

(ii) **Divisão:** Dados  $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1)$  e  $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2)$ ,  $z_2 \neq 0$ , então:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2)} = \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2)} \cdot \frac{(\cos\theta_1 - i\text{sen}\theta_2)}{(\cos\theta_1 - i\text{sen}\theta_2)} \\ &= \frac{\rho_1(\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\cos\theta_1\text{sen}\theta_2 + i\text{sen}\theta_1\cos\theta_2 - i^2\text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2)}{\rho_2(\cos^2\theta_2 - i^2\text{sen}^2\theta_2)} \\ &= \frac{\rho_1(\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\cos\theta_1\text{sen}\theta_2 + i\text{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2)}{\rho_2(\cos^2\theta_2 + \text{sen}^2\theta_2)} \\ &= \frac{\rho_1(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2 + i(\text{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\text{sen}\theta_2))}{\rho_2} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Notemos que o número complexo obtido é tal que:

- Seu módulo é igual ao quociente entre os módulos de  $z_1$  e  $z_2$ ;
- Seu argumento é igual à diferença entre o argumentos de  $z_1$  e o argumento de  $z_2$ .

(iii) **Potenciação:** Dados o complexo  $z = \rho(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$  e  $n \in \mathbb{Z}$ . No caso em que  $n > 0$ , temos:

$$\begin{aligned} z^n &= [\rho(\cos\theta + i\text{sen}\theta)]^n = \rho^n (\cos\theta + i\text{sen}\theta)^n \\ &= \rho^n \cdot \underbrace{(\cos\theta + i\text{sen}\theta) \cdot (\cos\theta + i\text{sen}\theta) \cdot (\cos\theta + i\text{sen}\theta) \cdots (\cos\theta + i\text{sen}\theta)}_{n \text{ fatores}} \\ &= \rho^n [\cos(\theta + \theta + \dots + \theta) + i\text{sen}(\theta + \theta + \dots + \theta)] = \rho^n [\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)]. \end{aligned}$$

No caso em que  $n = 0$ , tem-se:

$$z^0 = \rho^0 [\cos(0 \cdot \theta) + i\text{sen}(0 \cdot \theta)] = 1 \cdot (\cos 0 + i\text{sen} 0) = 1.$$

Quando  $n < 0$ , ou seja,  $n = -k$  com  $k > 0$ , temos:

$$\begin{aligned} z^n &= z^{-k} = \frac{1}{z^k} = \frac{1}{\rho^k [\cos(k\theta) + i\text{sen}(k\theta)]} = \frac{1}{\rho^k [\cos(k\theta) + i\text{sen}(k\theta)]} \cdot \frac{[\cos(k\theta) - i\text{sen}(k\theta)]}{[\cos(k\theta) - i\text{sen}(k\theta)]} \\ &= \frac{[\cos(k\theta) - i\text{sen}(k\theta)]}{\rho^k [\cos^2(k\theta) + \text{sen}^2(k\theta)]} = \frac{[\cos(k\theta) - i\text{sen}(k\theta)]}{\rho^k} = \frac{[\cos(-n\theta) - i\text{sen}(-n\theta)]}{\rho^{-n}} \\ &= \rho^n [\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)]. \end{aligned}$$

Ou seja, temos também que

$$z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)].$$

Em resumo, para elevarmos um complexo  $z \neq 0$  a um expoente inteiro  $n$  qualquer basta elevarmos o seu módulo a  $n$  e multiplicarmos o seu argumento por  $n$ . O resultado obtido é denominado primeira fórmula de De Moivre<sup>1</sup>.

**Exemplo 2.2** *Mostre que se  $(\sqrt{3} + i)^{2n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  é real, então  $n$  é múltiplo de 3.*

Solução: Vamos inicialmente transformar  $z = \sqrt{3} + i$  para a forma trigonométrica:

$$\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2.$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{\rho} \implies \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho} \implies \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Logo, temos que

$$z^{2n} = (\sqrt{3} + i)^{2n} = \left[ 2 \left( \cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \right) \right]^{2n}$$

ou seja,

$$z^{2n} = 4^n \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right].$$

Para que  $z^{2n}$  seja real, devemos ter sua parte imaginária igual a zero, ou seja,  $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$ , isto é:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}(k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Logo,  $\frac{n\pi}{3} = k\pi \implies n = 3k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

### 2.3.8 Radiciação de números complexos

Chamamos de raiz  $n$ -ésima de  $z$  a todo complexo  $w$  que satisfaz a relação  $z = w^n$ .

<sup>1</sup>Abraham de Moivre (Vitry-le-François, Champagne, França, 26 de Maio de 1667 - Londres, Reino Unido, 27 de Novembro de 1754) foi um matemático francês famoso pela fórmula de De Moivre, que relaciona os números complexos com a trigonometria.

**Proposição 2.3** *Sejam o complexo  $z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$  e  $n \geq 0$  um número natural, então  $z$  admite  $n$  raízes que são da forma*

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \left[ \cos \left( \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right]$$

onde  $\sqrt[n]{\rho} \in \mathbb{R}_+$  e  $k \in \mathbb{Z}$ .

Demonstração: Seja  $w = r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$  uma raiz  $n$ -ésima de  $z$ . Temos:

$$w^n = z \implies [r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)]^n = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$

Assim,

$$r^n [\cos(n\alpha) + i\operatorname{sen}(n\alpha)] = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$

Dessa igualdade, concluímos:

- $r^n = \rho \implies r = \sqrt[n]{\rho}$  (O módulo da raiz  $n$ -ésima de um complexo  $z$  é igual à raiz  $n$ -ésima do módulo de  $z$ ).
- $\cos(n\alpha) = \cos\theta$  e  $\operatorname{sen}(n\alpha) = \operatorname{sen}\theta$ . Daí,

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \implies \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Como  $\alpha$  é argumento de  $w$ , para  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$  obtemos  $n$  valores distintos e não côngruos para  $\alpha$  e, para qualquer outro valor de  $k$ , o valor de  $\alpha$  será côngruo de um dos anteriores, ou seja:

$$\begin{aligned} k = 0 &\implies \alpha = \frac{\theta}{n} \\ k = 1 &\implies \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \\ k = 2 &\implies \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n} \\ &\dots \\ k = n &\implies \alpha = \frac{\theta}{n} + 2\pi = \frac{\theta}{n}. \end{aligned}$$

Os valores de  $\alpha$  para  $k = n, n + 1, n + 2, \dots$  e  $k = -1, -2, -3, \dots$  são dispensáveis por serem congruentes a valores já obtidos para  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$ . Observamos ainda que todas as raízes  $n$ -ésimas possuem o mesmo módulo  $\sqrt[n]{\rho}$  e argumentos principais formando uma progressão aritmética de primeiro termo  $\frac{\theta}{n}$  e razão  $\frac{2\pi}{n}$ .

Como as raízes  $n$ -ésimas de  $z$  têm o mesmo módulo, então seus afixos estão sobre a mesma circunferência com centro na origem e raio  $\sqrt[n]{\rho}$ , também que esses afixos dividem a circunferência em  $n$  partes iguais pois os arcos da forma  $\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}$  representam pontos distintos no ciclo trigonométrico. Então:

- Para  $n = 2$ , temos as extremidades de um diâmetro da circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio  $\sqrt[n]{\rho}$ .
- Para  $n \geq 3$ , temos os vértices de um polígono regular de  $n$  lados inscritos na circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio  $\sqrt[n]{\rho}$ .

**Exemplo 2.4** Calcular  $\sqrt[4]{1}$ , em  $\mathbb{C}$ .

Solução: Fazendo  $z = 1$  cuja forma trigonométrica é  $z = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$ , então as raízes quarta de  $z$  são da forma:

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[n]{\rho} \left[ \cos \left( \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right] \\ &= \sqrt[4]{1} \left[ \cos \left( \frac{0}{4} + \frac{2k\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{0}{4} + \frac{2k\pi}{4} \right) \right] \\ &= \left[ \cos \left( \frac{0}{4} + \frac{2k\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{0}{4} + \frac{2k\pi}{4} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2 \text{ e } 3. \end{aligned}$$

- Para  $k = 0$ , temos:

$$w_0 = \left[ \cos \left( \frac{0}{4} + \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{0}{4} + \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{4} \right) \right] = \left[ \cos \left( \frac{0}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{0}{4} \right) \right] = 1.$$

- Para  $k = 1$ , temos:

$$w_1 = \left[ \cos \left( \frac{0}{4} + \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{0}{4} + \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{4} \right) \right] = \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) \right] = i.$$

- Para  $k = 2$ , temos:

$$w_2 = \left[ \cos \left( \frac{0}{4} + \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{0}{4} + \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{4} \right) \right] = [\cos(\pi) + i \operatorname{sen}(\pi)] = -1.$$

- Para  $k = 3$ , temos:

$$w_3 = \left[ \cos \left( \frac{0}{4} + \frac{2 \cdot 3 \cdot \pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{0}{4} + \frac{2 \cdot 3 \cdot \pi}{4} \right) \right] = \left[ \cos \left( \frac{3\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{3\pi}{2} \right) \right] = -i.$$

Logo, as raízes são  $1, i, -1, -i$ .

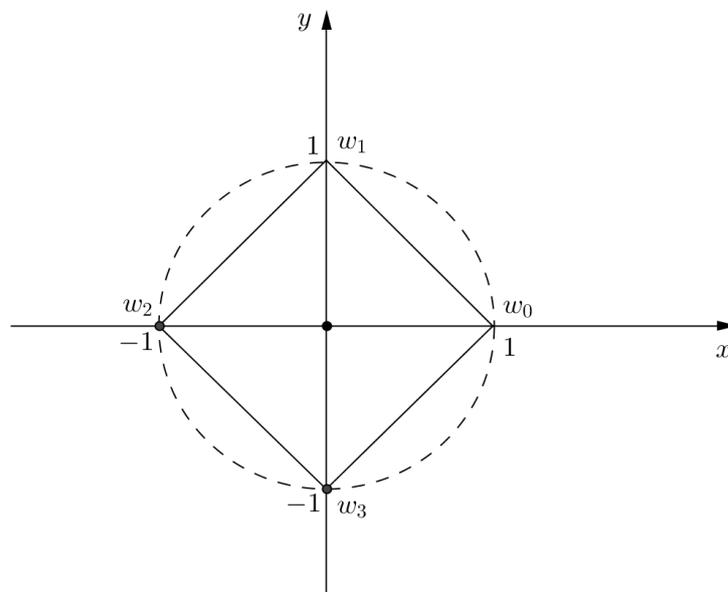


Figura 2.5: Representação geométrica das raízes de  $\sqrt[4]{1}$ .

Aqui, observamos que as raízes quarta de  $z = 1$ , ou seja,  $\sqrt[4]{1}$ , formam um quadrilátero que um é polígono regular. Com este fato em evidência, podemos nos questionar sobre o que acontece com as raízes  $n$ -ésimas de um número complexo  $z \neq 0$ , quando dispostas no plano de Argand-Gauss. Essa pergunta tem como resposta um polígono regular de  $n$  lados, ou seja, as raízes  $n$ -ésimas,  $n \geq 3$  de um número complexo  $z \neq 0$  representam os vértices de um polígono regular de  $n$  lados no plano de Argand-Gauss.

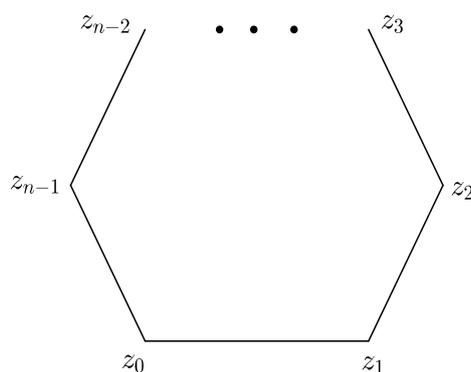


Figura 2.6: Polígono regular de  $n$  lados.

## 2.4 Representação matricial

Um número complexo  $z = a + bi$  também pode ser representado sobre a forma de uma matriz quadrada antissimétrica  $2 \times 2$  da forma:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Vamos agora analisar o comportamento dessa nova representação em relação às operações de adição e multiplicação.

### 2.4.1 Adição de complexos na forma matricial

Dados os complexos  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$ , temos que  $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ . Na forma matricial, teremos:

$$z_1 + z_2 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c & -(b + d) \\ (b + d) & a + c \end{bmatrix}$$

que corresponde ao complexo  $z = (a + c) + (b + d)i$ .

### 2.4.2 Multiplicação de complexos na forma matricial

Dados os complexos  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$ , temos que  $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ . Na forma matricial teremos:

$$z_1 \cdot z_2 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ (ad + bc) & ac - bd \end{bmatrix}$$

que corresponde ao complexo  $z = (ac - bd) + (ad + bc)i$ .

Observamos também que o conjugado de um número complexo  $z$  na forma matricial corresponde a matriz transposta da matriz correspondente de  $z$ , isto é, se  $z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$  que corresponde a  $z = a + bi$  na forma algébrica, então:

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

que corresponde ao complexo  $\bar{z} = a - bi$ .

Também estão garantidas as propriedades da adição e multiplicação na representação matricial, ou seja, vale a propriedade associativa, comutativa, existência do elemento neutro, existência do elemento simétrico e a existência do elemento inverso.

### 2.4.3 Algumas propriedades na representação matricial

- **Elemento neutro da adição:**  $\exists e_a \in \mathbb{C}; z + e_a = z, \forall z \in \mathbb{C}$ .

Fazendo  $z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$  que corresponde ao complexo  $z = a + bi$ , na forma algébrica,

vamos mostrar que existe  $e_a = x + yi = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$  tal que  $z + e_a = z$ . De fato, temos que:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a+x & -(b+y) \\ b+y & a+x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Daí:

$$\begin{cases} a+x = a \\ -(b+y) = -b \\ b+y = b \end{cases} \iff x = 0 \text{ e } y = 0.$$

Portanto  $e_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , ou seja, o elemento neutro da adição  $e_a = 0 + 0i$  é representado pela matriz nula.

- **Elemento neutro da multiplicação:**  $\exists e_m \in \mathbb{C}; z.e_m = z, \forall z \in \mathbb{C}$ .

Fazendo  $z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a + bi$ , vamos mostrar que existe  $e_a = x + yi = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$  tal que  $z.e_m = z$ . De fato, temos que:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} ax - by & -(ay + bx) \\ (ay + bx) & ax - by \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Daí:

$$\begin{cases} ax - by = a \\ -(ay + bx) = -b \\ ay + bx = b \end{cases} \iff x = 1 \text{ e } y = 0.$$

Portanto  $e_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , ou seja, o elemento neutro da adição  $e_m = 1 + 0i$  é representado pela matriz identidade.

- **Existência do elemento inverso:**  $\exists e^{-1} \in \mathbb{C}; z.z^{-1} = e_m \forall z \in \mathbb{C}$ .

Fazendo  $z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , vamos mostrar que existe  $z^{-1} = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$  tal que  $z \cdot z^{-1} = e_m$ . De fato, temos que:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} ax - by & -(ay + bx) \\ (ay + bx) & ax - by \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daí:

$$\begin{cases} ax - by = a \\ -(ay + bx) = -b \\ ay + bx = b \end{cases} \iff x = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \text{ e } y = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

$$\text{Portanto } z^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{a^2 + b^2} & \frac{b}{a^2 + b^2} \\ -\frac{b}{a^2 + b^2} & \frac{a^2}{a^2 + b^2} \end{bmatrix}.$$

As diversas representações para os números complexos, nos possibilitam uma gama de aplicações desses números, bem como um melhor entendimento das propriedades. Dentre essas representações, destacamos a forma trigonométrica, que aparece de modo natural em várias aplicações físicas. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [3], [7], [10], [11], [14], [17], [18].

# Capítulo 3

## Logaritmos no campo dos complexos

### 3.1 Representação exponencial

Por volta de 1747, Euler determinou quatro identidades fundamentais para a matemática, sendo a primeira a mais importante. Euler usando estudos sobre funções complexas chegou à conclusão que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta, \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

que é chamada de forma exponencial de um complexo de módulo 1 e argumento  $\theta$ . Fazendo  $\theta = \alpha + \beta$  em (3.1), obtemos:

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)} &= \cos(\alpha + \beta) + i\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \\ &= \cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta + i\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta.\cos\alpha \\ &= (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha).(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta) \\ &= e^{\alpha i}.e^{\beta i}. \end{aligned}$$

Observamos que a igualdade  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$  se comporta como uma exponencial, então um número complexo cuja forma trigonométrica é  $z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$  tem representação exponencial dada por  $z = \rho.e^{i\theta}$ . As outras identidades são:

- $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$

Demonstração: Como  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ , então  $e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta)$ .

Sabemos que  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$  e  $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$ , portanto:

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta. \quad (3.2)$$

- $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$

Demonstração: Como  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$  e  $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$ , somando as igualdades membro a membro, temos:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \implies \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}. \quad (3.3)$$

- $\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$

Demonstração: Como  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$  e  $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$ , subtraindo as igualdades membro a membro, temos:

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\operatorname{sen}\theta \implies \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \quad (3.4)$$

No ano de 1748, Euler apresenta vários resultados importantes para a matemática de sua época, dentre esses se destaca a identidade numérica obtida quando substituimos  $\theta = \pi \text{ rad}$  na igualdade  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ , ou seja:

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\operatorname{sen}(\pi) = -1 + 0 = -1$$

e, assim,

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \quad (3.5)$$

Essa fórmula é conhecida como fórmula de Euler.

### 3.1.1 Operações na forma exponencial de complexos

- **Multiplicação:** Dados os complexos  $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ , então:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot e^{i\theta_1} \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

- **Divisão:** Dados os complexos  $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2} \neq 0$ , então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \cdot e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

- **Potenciação:** Dados os complexos  $z = \rho \cdot e^{i\theta}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ , utilizando a propriedade da multiplicação, temos:

$$z^n = (\rho \cdot e^{i\theta})^n = \rho e^{i\theta} \cdot \rho e^{i\theta} \cdots \rho e^{i\theta} = \rho \cdot \rho \cdots \rho \cdot e^{i\theta} \cdot e^{i\theta} \cdots e^{i\theta} = \rho^n \cdot e^{i\theta + i\theta + \cdots + i\theta} = \rho^n \cdot e^{i(n\theta)}.$$

**Exemplo 3.1** *Seja  $z$  um número complexo de módulo 1 e de argumento  $\theta$ , se  $n$  é um número inteiro positivo, mostre que  $\frac{z^n}{1 + z^{2n}}$  é real.*

Demonstração: Vamos utilizar a forma exponencial  $z = \rho \cdot e^{i\theta}$ , como  $\rho = 1$ , então  $z = e^{i\theta}$ , logo:

$$\begin{aligned} \frac{z^n}{1 + z^{2n}} &= \frac{(e^{i\theta})^n}{1 + (e^{i\theta})^{2n}} = \frac{e^{i(n\theta)}}{1 + e^{i(2n\theta)}} = \frac{1}{e^{-i(n\theta)} [1 + e^{i(2n\theta)}]} = \frac{1}{e^{-i(n\theta)} + e^{i(n\theta)}} \\ &= \frac{1}{2\cos(n\theta)} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

### 3.1.2 Aplicações da forma exponencial na trigonometria

A conexão entre números complexos e trigonometria se estabelece quando um complexo  $z = a + bi$  pode ser representado da forma  $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$  onde  $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$  e  $\theta = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$ , essa representação junto com a fórmula de De Moivre é de fundamental importância para demonstrar diversas identidades trigonométricas. Vamos, nesta seção, mostrar algumas identidades onde o uso de números complexos simplifica em muito essas demonstrações.

**Exemplo 3.2** *Expressar  $\cos 5\theta$  e  $\sin 5\theta$  em função de  $\sin\theta$  e  $\cos\theta$ , respectivamente.*

Solução: Temos que:

$$\begin{aligned}
 \cos 5\theta + i \operatorname{sen} 5\theta &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^5 = \sum_{p=0}^5 \left[ \binom{5}{p} (\cos \theta)^{5-p} (i \operatorname{sen} \theta)^p \right] \\
 &= \binom{5}{0} \cos^5 \theta \cdot i^0 \cdot \operatorname{sen}^0 \theta + \binom{5}{1} \cos^4 \theta \cdot i^1 \cdot \operatorname{sen}^1 \theta + \cdots + \binom{5}{5} \cos^0 \theta \cdot i^5 \cdot \operatorname{sen}^5 \theta \\
 &= \cos^5 \theta + 5i \cos^4 \theta \operatorname{sen} \theta + \cdots + i^5 \cdot \operatorname{sen}^5 \theta \\
 &= (\cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \operatorname{sen}^2 \theta + 5 \cos \theta \operatorname{sen}^4 \theta) + \\
 &+ i(\operatorname{sen}^5 \theta - 10 \cos^2 \theta \operatorname{sen}^3 \theta + 5 \cos^4 \theta \operatorname{sen} \theta).
 \end{aligned}$$

Obtemos assim uma igualdade de dois complexos, então:

$$\begin{aligned}
 \cos 5\theta &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \operatorname{sen}^2 \theta + 5 \cos \theta \operatorname{sen}^4 \theta \\
 &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta (1 - \cos^2 \theta) + 5 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)^2 \\
 &= 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} 5\theta &= \operatorname{sen}^5 \theta - 10 \cos^2 \theta \operatorname{sen}^3 \theta + 5 \cos^4 \theta \operatorname{sen} \theta \\
 &= \operatorname{sen}^5 \theta - 10(1 - \operatorname{sen}^2 \theta) \operatorname{sen}^3 \theta + 5(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)^2 \operatorname{sen} \theta \\
 &= 16 \operatorname{sen}^5 \theta - 20 \operatorname{sen}^3 \theta + 5 \operatorname{sen} \theta
 \end{aligned}$$

**Exemplo 3.3** Calcule as somas abaixo:

$$(i) A = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x + \cdots + \operatorname{sen}(2n-1)x$$

$$(ii) B = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots + \cos(2n-1)x$$

Solução: Seja  $z = \cos x + i \operatorname{sen} x$ , então:

$$\begin{aligned}
 z^3 &= \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x \\
 z^5 &= \cos 5x + i \operatorname{sen} 5x \\
 &\dots \\
 z^{2n-1} &= \cos(2n-1)x + i \operatorname{sen}(2n-1)x.
 \end{aligned}$$

Somando membro a membro as igualdades anteriores, tem-se:

$$[\cos x + \cdots + \cos(2n-1)x] + i[\operatorname{sen} x + \cdots + \operatorname{sen}(2n-1)x] = z + \cdots + z^{2n-1} = \frac{z^{2n+1} - z}{z^2 - 1}.$$

Fazendo  $w = \frac{z^{2n+1} - z}{z^2 - 1}$ , temos:

$$\begin{aligned} w &= \frac{\cos(2n+1)x + i\operatorname{sen}(2n+1)x - \cos x - i\operatorname{sen} x}{\cos 2x + i\operatorname{sen} 2x - 1} \\ &= \frac{[\cos(2n+1)x - \cos x] + i[\operatorname{sen}(2n+1)x - \operatorname{sen} x]}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + i2\operatorname{sen} x \cos x - 1}. \end{aligned}$$

Utilizando as expressões

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

e

$$\operatorname{cosp} - \operatorname{cos} q = -2\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

chegaremos em:

$$\begin{aligned} w &= \frac{-2\operatorname{sen}(n+1)x\operatorname{sen}(nx) + 2i\cos(n+1)x\operatorname{sen}(nx)}{-2\operatorname{sen}^2 x + 2i\operatorname{sen} x \cos x} \\ &= \frac{2i\operatorname{sen}(nx)[i\operatorname{sen}(n+1)x + \cos(n+1)x]}{2i\operatorname{sen} x [i\operatorname{sen} x + \cos x]} \\ &= \frac{2i\operatorname{sen}(nx)[i\operatorname{sen}(n+1)x + \cos(n+1)x]}{2i\operatorname{sen} x [i\operatorname{sen} x + \cos x]} \cdot \frac{(-i\operatorname{sen} x + \cos x)}{(-i\operatorname{sen} x + \cos x)}. \end{aligned}$$

Como  $\cos x = \cos(-x)$  e  $-\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(-x)$ , então:

$$\begin{aligned} w &= \frac{\operatorname{sen}(nx)[\cos(n+1)x + i\operatorname{sen}(n+1)x] \cdot [\cos(-x) + i\operatorname{sen}(-x)]}{\operatorname{sen} x} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(nx)[\cos(nx) + i\operatorname{sen}(nx)]}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen}(nx)\cos(nx)}{\operatorname{sen} x} + i\frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{\operatorname{sen} x} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(2nx)}{2\operatorname{sen} x} + i\frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{\operatorname{sen} x}. \end{aligned}$$

Logo,

$$A = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x + \cdots + \operatorname{sen}(2n-1)x = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{\operatorname{sen} x}$$

e

$$B = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots + \cos(2n-1)x = \frac{\operatorname{sen}(2nx)}{2\operatorname{sen}x}$$

**Exemplo 3.4** Calcule a soma abaixo:

$$(i) A = \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(4x) + \operatorname{sen}(6x) + \cdots + \operatorname{sen}(2nx)$$

$$(ii) B = \cos(2x) + \cos(4x) + \cos(6x) + \cdots + \cos(2nx)$$

Solução: Seja  $z = \cos x + i\operatorname{sen}x$ , então:

$$z^2 = \cos 2x + i\operatorname{sen}2x$$

$$z^4 = \cos 4x + i\operatorname{sen}4x$$

...

$$z^{2n} = \cos(2n)x + i\operatorname{sen}(2n)x.$$

Somando membro a membro as igualdades anteriores, tem-se:

$$[\cos 2x + \cdots + \cos(2n)x] + i[\operatorname{sen}2x + \cdots + \operatorname{sen}(2n)x] = z^2 + \cdots + z^{2n} = \frac{z^{2n+2} - z^2}{z^2 - 1}.$$

Fazendo  $w = \frac{z^{2n+2} - z^2}{z^2 - 1}$ , temos:

$$\begin{aligned} w &= \frac{\cos(2n+2)x + i\operatorname{sen}(2n+2)x - \cos 2x - i\operatorname{sen}2x}{\cos 2x + i\operatorname{sen}2x - 1} \\ &= \frac{[\cos(2n+2)x - \cos 2x] + i[\operatorname{sen}(2n+2)x - \operatorname{sen}2x]}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + i2\operatorname{sen}x\cos x - 1} \\ &= \frac{-2\operatorname{sen}\left(\frac{2nx+4x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2nx}{2}\right) + 2i\cos\left(\frac{2nx+4x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2nx}{2}\right)}{-2\operatorname{sen}^2 x + 2i\operatorname{sen}x\cos x} \\ &= \frac{2i\operatorname{sen}(nx)[i\operatorname{sen}(nx+2x) + \cos(nx+2x)]}{2i\operatorname{sen}x[i\operatorname{sen}x + \cos x]} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(nx)[i\operatorname{sen}(nx+2x) + \cos(nx+2x)]}{\operatorname{sen}x[i\operatorname{sen}x + \cos x]} \cdot \frac{i\operatorname{sen}(-x) + \cos(-x)}{\cos x - i\operatorname{sen}x} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(nx)[\cos(nx+x) + i\operatorname{sen}(nx+x)]}{\operatorname{sen}x} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(nx)\cos(nx+x)}{\operatorname{sen}x} + i\frac{\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(nx+x)}{\operatorname{sen}x}. \end{aligned}$$

Logo:

$$A = \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(4x) + \cdots + \operatorname{sen}(2nx) = \frac{\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(nx+x)}{\operatorname{sen}x}$$

e

$$B = \operatorname{cos}(2x) + \operatorname{cos}(4x) + \cdots + \operatorname{cos}(2nx) = \frac{\operatorname{sen}(nx)\operatorname{cos}(nx+x)}{\operatorname{sen}x}.$$

**Exemplo 3.5** Calcule a soma abaixo:

$$(i) A = \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(3x) + \cdots + \operatorname{sen}(nx)$$

$$(ii) B = \operatorname{cos}x + \operatorname{cos}(2x) + \operatorname{cos}(3x) + \cdots + \operatorname{cos}(nx)$$

Solução: Observando os exemplos 3.3 e 3.4 temos:

$$\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}(3x) + \cdots + \operatorname{sen}(2n-1)x = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{\operatorname{sen}x}$$

e

$$\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(4x) + \cdots + \operatorname{sen}(2nx) = \frac{\operatorname{sen}(nx)\operatorname{cos}(nx+x)}{\operatorname{sen}x}.$$

Somando membro a membro as igualdades anteriores, tem-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(4x) + \cdots + \operatorname{sen}(2n-1)x + \operatorname{sen}(2nx) &= \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{\operatorname{sen}x} + \frac{\operatorname{sen}(nx)\operatorname{cos}(nx+x)}{\operatorname{sen}x} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(nx) [\operatorname{sen}(nx+x) + \operatorname{sen}(nx)]}{\operatorname{sen}x} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(nx) \left[ 2\operatorname{sen}\left(\frac{2nx+x}{2}\right) \operatorname{cos}\left(\frac{x}{2}\right) \right]}{\operatorname{sen}x}. \end{aligned}$$

Como  $\operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{cos}\left(\frac{x}{2}\right)$ , ou seja,  $\operatorname{sen}x = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{cos}\left(\frac{x}{2}\right)$ , temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(4x) + \cdots + \operatorname{sen}(2n-1)x + \operatorname{sen}(2nx) &= \\ &= \frac{\operatorname{sen}(nx) \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2nx+x}{2}\right) \cdot \operatorname{cos}\left(\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{cos}\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}\left(\frac{2nx+x}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

De maneira análoga, teremos:

$$\begin{aligned} \cos x + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) + \cdots + \cos(2n-1)x + \cos(2nx) &= \\ &= \frac{\operatorname{sen}(nx)\cos\left(\frac{2nx+x}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

### 3.1.3 Aplicações da forma exponencial em somatórios de números binomiais

No triângulo de Pascal a soma dos elementos da  $n$ -ésima linha é dada por  $2^n$ . Vamos usar o binômio de Newton para mostrar esse resultado:

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 + C_n^3 \cdot x^3 + \cdots + C_n^n \cdot x^n.$$

Iremos trabalhar com  $x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}^*$  para evitar a situação onde  $x = -1$  e  $n = 0$  nesse caso teríamos  $(1-1)^0 = 0^0$  que é uma indeterminação.

Fazendo  $x = 1$ , teremos:

$$(1+1)^n = 1 + C_n^1 \cdot 1 + C_n^2 \cdot 1^2 + C_n^3 \cdot 1^3 + \cdots + C_n^n \cdot 1^n.$$

Assim:

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^n. \quad (3.6)$$

Se fizermos  $x = -1$ , obtemos outro resultado importante:

$$(1-1)^n = 1 + C_n^1 \cdot (-1) + C_n^2 \cdot (-1)^2 + C_n^3 \cdot (-1)^3 + \cdots + C_n^n \cdot (-1)^n,$$

ou seja:

$$1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n \cdot C_n^n = 0. \quad (3.7)$$

Quando fazemos a soma das igualdades (1) e (2), temos:

$$2 + 2C_n^2 + 2C_n^4 + 2C_n^6 + \cdots = 2^n$$

ou, de forma equivalente,

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots = 2^{n-1}. \quad (3.8)$$

Quando fazemos (3.6)-(3.7), obtemos:

$$2C_n^1 + 2C_n^3 + 2C_n^5 + \dots = 2^n \quad (3.9)$$

ou, de forma equivalente,

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}. \quad (3.10)$$

Observamos que com poucas manipulações chegamos a uma fórmula fechada para os somatórios  $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$  e  $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots$ . Entretanto, em outros somatórios binomiais, será que é tão fácil chegarmos a uma fórmula fechada? Veremos através de dois exemplos a aplicação de números complexos para chegarmos a essas fórmulas fechadas para somatórios binomiais.

**Exemplo 3.6** *Determine uma fórmula fechada para a soma  $1 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \dots$  e  $C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \dots$*

Solução:

$$(1 + x)^n = 1 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 + C_n^3 \cdot x^3 + \dots + C_n^n \cdot x^n.$$

Procuramos um número  $x$  que repita sua potência de modo que

$$x^0 = x^4 = x^8 = x^{12} = \dots = 1,$$

pois dessa forma teríamos apenas a soma de números binomiais. Facilmente concluímos que  $x = 1$  ou  $x = -1$ , mas já vimos que para esses valores de  $x$  chegamos nas igualdades (3.6) e (3.7), entretanto existem outros números que elevados as potências 4, 8, 12, ... dão resultado igual a 1, para determinar quem são esses outros basta fazermos  $x^4 = 1$  e resolver essa equação no campo dos complexos, observe que não fazemos  $x^8 = 1$ ,  $x^{12} = 1$  ou  $x^{16} = 1$  e assim sucessivamente porque nem todas as raízes dessas igualdades elevadas a quarta potencia serão iguais a 1, já todas as raízes de  $x^4 = 1$  quando elevadas a quarta, a oitava, a décima sexta potências serão iguais a 1.

Resolvendo a equação  $x^4 = 1$ , temos:  $x = 1$  ou  $x = -1$  ou  $x = i$  ou  $x = -i$ .

Vamos então fazer  $x = i$ . Logo:

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= 1 + C_n^1.i + C_n^2.i^2 + C_n^3.i^3 + \dots = 1 + i.C_n^1 - C_n^2 - i.C_n^3 + C_n^4 - i.C_n^5 + \dots \\ &= (1 - C_n^2 + C_n^4 - \dots) + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots).\end{aligned}$$

Como  $(1+i)^n = (\sqrt{2})^n .\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i.(\sqrt{2})^n .\sen\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ , então:

$$(\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i(\sqrt{2})^n \sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) = (1 - C_n^2 + C_n^4 - \dots) + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots).$$

Temos assim uma igualdade de dois complexos, logo:

(i)

$$1 - C_n^2 + C_n^4 - \dots = (\sqrt{2})^n .\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right). \quad (3.11)$$

Somando (3.8) com (3.11), obtemos:

$$2 + 2C_n^4 + 2C_n^8 + \dots = 2^{n-1} + (\sqrt{2})^n .\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right),$$

ou ainda:

$$1 + C_n^4 + C_n^8 + \dots = 2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1} .\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

(ii)

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots = (\sqrt{2})^n .\sen\left(\frac{n\pi}{4}\right). \quad (3.12)$$

Somando(3.10) com (3.12), obtemos:

$$2C_n^1 + 2C_n^5 + 2C_n^9 \dots = 2^{n-1} + (\sqrt{2})^n .\sen\left(\frac{n\pi}{4}\right),$$

ou ainda:

$$C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 \dots = 2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1} .\sen\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Se optássemos por fazer  $x = -i$ , de forma análoga, chegaríamos ao mesmo resultado.

**Exemplo 3.7** *Determine a expressão reduzida para os somatórios*

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \dots \quad e \quad C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \dots .$$

Solução: Procuramos um número que repita sua potência de modo que

$$x^0 = x^3 = x^6 = \dots = 1.$$

Façamos  $x^3 = 1$  e resolvemos essa equação no campo dos complexos, logo  $x = 1$  ou

$$x = \cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \cos\frac{4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}.$$

Para  $x = 1$  chegaremos a igualdade (3.6), então fazemos  $x = \cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ , então:

$$\begin{aligned} \left(1 + e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^n &= 1 + C_n^1 \cdot \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right) + C_n^2 \cdot \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^2 + C_n^3 \cdot \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^3 + C_n^4 \cdot \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^4 + \dots \\ &= 1 + C_n^1 \cdot \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right) + C_n^2 \cdot \left(e^{\frac{4\pi}{3}i}\right) + C_n^3 \cdot \left(e^{\frac{8\pi}{3}i}\right) + C_n^4 \cdot \left(e^{\frac{16\pi}{3}i}\right) + \dots \end{aligned}$$

Como  $e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , então:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n \\ &= 1 + C_n^1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + C_n^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + C_n^3 \dots \\ &= \left(1 - \frac{C_n^1}{2} - \frac{C_n^2}{2} + C_n^3 - \dots\right) + i \left(\frac{\sqrt{3}C_n^1}{2} - \frac{\sqrt{3}C_n^2}{2} + \frac{\sqrt{3}C_n^4}{2} - \dots\right). \end{aligned}$$

Como  $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ , então:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \left(1 - \frac{C_n^1}{2} - \frac{C_n^2}{2} + C_n^3 - \dots\right) + i \left(\frac{\sqrt{3}C_n^1}{2} - \frac{\sqrt{3}C_n^2}{2} + \frac{\sqrt{3}C_n^4}{2} - \dots\right).$$

Temos assim uma igualdade de dois complexos, logo:

(i)

$$1 - \frac{C_n^1}{2} - \frac{C_n^2}{2} + C_n^3 - \dots = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right). \quad (3.13)$$

Multiplicando ambos os membros por 2, teremos:

$$2 - C_n^1 - C_n^2 + 2C_n - \dots = 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right). \quad (3.14)$$

Somando (3.6) com (3.14), temos:

$$3 + 3C_n^3 + 3C_n^6 + \dots = 2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

ou ainda

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots = \frac{2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3}.$$

(ii)

$$\frac{\sqrt{3}C_n^1}{2} - \frac{\sqrt{3}C_n^2}{2} + \frac{\sqrt{3}C_n^4}{2} - \dots = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right). \quad (3.15)$$

Somando (3.6) com (3.15), temos:

$$1 + 2C_n^1 + C_n^3 + 2C_n^4 + C_n^6 + 2C_n^7 + C_n^9 + 2C_n^{10} + \dots = 2^n + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

Segue que:

$$2C_n^1 + 2C_n^4 + 2C_n^7 + 2C_n^{10} + \dots + (1 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \dots) = 2^n + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

ou ainda  $2C_n^1 + 2C_n^4 + 2C_n^7 + 2C_n^{10} + \dots + \frac{2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3} = 2^n + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right).$

Daí, teremos:

$$\begin{aligned} C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \dots &= \frac{2^n + \sqrt{3}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3} \\ &= \frac{2^n - 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right]}{3} = \frac{2^n - 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right]}{3} \\ &= \frac{2^n - 2\cos\left(\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)}{3} = \frac{2^n - 2\cos\left[\left(\frac{n+1}{3}\right)\pi\right]}{3}. \end{aligned}$$

Observamos que o uso de números complexos para determinarmos a fórmula fechada para somatórios do tipo

$$C_n^{p_1} + C_n^{p_2} + C_n^{p_3} + \cdots + C_n^{p_k}, \quad n \in \mathbb{N}^* \text{ e } p_i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k,$$

temos que a sequência  $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_k)$  deve ser uma progressão aritmética.

## 3.2 Conexão entre complexo e logaritmo

Seja  $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$  um complexo diferente de zero, pela definição de logaritmos naturais, o logaritmo do número  $z$  é um número  $w$  tal que  $z = e^w$ , isto é  $\text{Ln}z = w$ . Supondo que  $w$  seja da forma  $a + bi$ , então:

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a(\cos b + i\sin b).$$

Temos que  $\rho(\cos\theta + i\sin\theta) = e^a(\cos b + i\sin b)$ , logo:

- $\rho = e^a \implies a = \ln\rho$ ;
- $b = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ .

Como  $w = a + bi$ , então:

$$w = \ln\rho + (\theta + 2k\pi)i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.16)$$

Como  $\rho > 0$ , então  $\ln\rho$  é um logaritmo natural no conjunto dos números reais e positivos. Se  $z = 0$  a equação  $z = e^w$  não terá solução, pois  $e^w$  é sempre diferente de zero para qualquer valor de  $w$ , conseqüentemente não existe o logaritmo de zero.

### 3.2.1 Valor principal do logaritmo de um complexo

Se escolhermos um valor para o argumento de  $z$  pertencente ao intervalo  $[0, 2\pi[$  então do conjunto de todos os números complexos  $\text{Ln}(z)$  sobressai-se o valor chamado de valor principal do logaritmo, ou seja:

$$\text{Ln}z = \ln\rho + i\theta, \quad (3.17)$$

onde  $\rho = |z|$  e  $\theta \in [0, 2\pi[$ .

Observando a equação  $w = \ln\rho + (\theta + 2k\pi)i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , chegamos à conclusão que todo complexo não nulo possui um conjunto infinito de logaritmos, cujos valores formam uma P.A de razão imaginária  $2\pi i$ .

$$\dots, \ln z - 4\pi i, \ln z - 2\pi i, \ln z, \ln z + 2\pi i, \ln z + 4\pi i, \dots$$

O conjunto de todos os valores do logaritmo de  $z$  são representados pela expressão

$$Ln(z) = \ln\rho + (\theta + 2k\pi)i = \ln|z| + \arg(z), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.18)$$

onde  $\arg(z)$  representa o conjunto de valores do argumento do complexo  $z$ .

Em resumo temos:

- $Ln(z) = \ln|z| + (\theta + 2k\pi)i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ( $Ln$  com a letra  $L$  maiúscula) representa o conjunto de todos os valores do logaritmo de  $z$ ;
- $\ln z = \ln\rho + i\theta$ ,  $\theta \in [0, 2\pi[$  ( $\ln$  com a letra  $l$  minúscula) representa o valor principal do logaritmo de  $z$ .

Vamos agora, enunciar algumas propriedades relacionadas com logaritmos dos números complexos. Vamos nos limitar em demonstrar essas propriedades ao valor principal desses logaritmos. Para um aprofundamento sobre elas devemos consultar a referência[18].

**(P<sub>1</sub>) Propriedade do produto:** Sejam

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sen\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sen\theta_2),$$

então  $Ln(z_1.z_2) = Ln(z_1) + Ln(z_2)$ ,  $0 \leq \theta_1, \theta_2 < 2\pi$ .

Demonstração: Sabemos que

$$z_1.z_2 = \rho_1.\rho_2.[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sen(\theta_1 + \theta_2)]$$

e também que  $Ln(z) = \ln\rho + \theta i$ , onde  $\theta$  é o argumento principal de  $z$ . Logo,

$$Ln(z_1.z_2) = \ln(\rho_1.\rho_2) + i.(\theta_1 + \theta_2). \quad (3.19)$$

Por outro lado,

$$Ln(z_1) = \ln\rho_1 + \theta_1 i \text{ e } Ln(z_2) = \ln\rho_2 + \theta_2 i.$$

Logo:

$$\begin{aligned} Ln(z_1) + Ln(z_2) &= \ln\rho_1 + \theta_1 i + \ln\rho_2 + \theta_2 i \\ &= \ln\rho_1 + \ln\rho_2 + (\theta_1 + \theta_2)i = \ln(\rho_1 \cdot \rho_2 + (\theta_1 + \theta_2)i). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Comparando (3.19) com (3.20) teremos:

$$Ln(z_1 \cdot z_2) = Ln(z_1) + Ln(z_2). \blacksquare \quad (3.21)$$

(P<sub>2</sub>) **Propriedade do quociente:** Sejam

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1) \text{ e } z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2) \neq 0, \quad 0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 2\pi,$$

$$\text{então } Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Ln(z_1) - Ln(z_2).$$

Demonstração: Sabemos que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

e também que  $Ln(z) = \ln\rho + \theta i$ . Logo,

$$Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) + i \cdot (\theta_1 - \theta_2). \quad (3.22)$$

Por outro lado,

$$Ln(z_1) = \ln\rho_1 + \theta_1 i \text{ e } Ln(z_2) = \ln\rho_2 + \theta_2 i.$$

Logo:

$$\begin{aligned} Ln(z_1) - Ln(z_2) &= \ln\rho_1 + \theta_1 i - \ln\rho_2 - \theta_2 i \\ &= \ln\rho_1 - \ln\rho_2 + (\theta_1 - \theta_2)i = \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) + (\theta_1 - \theta_2)i, \end{aligned} \quad (4) \quad (3.23)$$

uma vez que,  $\ln \rho_1 - \ln \rho_2 = \ln \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)$ , pois pertencem ao campo dos reais.

Comparando (3.22) com (3.23) teremos:

$$\operatorname{Ln} \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Ln}(z_1) - \operatorname{Ln}(z_2). \blacksquare \quad (3.24)$$

( $P_3$ ) **Propriedade da potência:** Seja  $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , então  $\operatorname{Ln} z^m = m \cdot \operatorname{Ln} z$ .

**Demonstração:** Seja  $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , então  $z^m = \rho^m [\cos(m\theta) + i \operatorname{sen}(m\theta)]$ . Logo:

$$\operatorname{Ln} z^m = \ln \rho^m + m\theta i.$$

Como  $\ln \rho^m = m \ln \rho$ , pois pertencem ao campo dos reais, então:

$$\operatorname{Ln} z^m = m \ln \rho + m\theta i \quad (3.25)$$

Sabemos também que  $\operatorname{Ln} z = \ln \rho + \theta i$ . Dessa forma, multiplicando ambos os membros por  $m \in \mathbb{Z}^*$ , teremos:

$$m \operatorname{Ln} z = m \ln \rho + m\theta i. \quad (3.26)$$

Comparando (3.25) com (3.26), teremos:

$$\operatorname{Ln} z^m = m \cdot \operatorname{Ln} z. \blacksquare \quad (3.27)$$

### 3.3 Potenciação no campo do complexo

Se  $z$  e  $w$  são números complexos, definimos

$$z^w = e^{w \operatorname{Ln}(z)}. \quad (3.28)$$

Como  $\operatorname{Ln}(z)$  tem infinitos valores, então  $z^w$  também terá infinitos valores, o valor principal de  $z^w$  se define como  $e^{w \ln z}$ , ou seja, determinamos o valor principal para  $\operatorname{Ln}(z)$  e conseqüentemente  $e^{w \operatorname{Ln}(z)}$  terá um único valor.

**Exemplo 3.8** Determinar os valores gerais e principais de  $\operatorname{Ln}(-r)$  e  $\operatorname{Ln}(ri)$  onde  $r$  é real

e positivo e calcule ainda  $\text{Ln}(1 + i\sqrt{3})$  e  $\text{Ln}(-1 - i\sqrt{3})$ .

Solução:

(i) **Cálculo de  $\text{Ln}(-r)$**

Como  $-r = r(\cos\pi + i\sin\pi)$ , então o valor principal é

$$\ln(-r) = \ln r + \pi i$$

e o valor geral é  $\text{Ln}(-r) = \ln r + (\pi + 2k\pi)i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

(ii) **Cálculo de  $\text{Ln}(ri)$**

Como  $ri = r(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ , então o valor principal é

$$\ln(ri) = \ln r + \frac{\pi}{2}i$$

e o valor geral é  $\text{Ln}(ri) = \ln r + (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

(iii) **Cálculo de  $\text{Ln}(1 + i\sqrt{3})$**

Como  $1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ , então o valor principal é

$$\ln(1 + i\sqrt{3}) = \ln 2 + \frac{\pi}{3}i$$

e o valor geral é  $\text{Ln}(1 + i\sqrt{3}) = \ln 2 + (\frac{\pi}{3} + 2k\pi)i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

(iv) **Cálculo de  $\text{Ln}(-1 - i\sqrt{3})$**

Como  $-1 - i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$ , então o valor principal é

$$\text{Ln}(1 + i\sqrt{3}) = \ln 2 + \frac{4\pi}{3}i$$

e o valor geral é  $\text{Ln}(1 + i\sqrt{3}) = \ln 2 + (\frac{4\pi}{3} + 2k\pi)i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Observe que  $\ln(1 + i\sqrt{3}) = \ln 2 + \frac{\pi}{3}i$ , então vamos supor que temos a seguinte equação  $\ln x = \ln 2 + \frac{\pi}{3}i$ . Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$$x = e^{\ln 2 + \frac{\pi}{3}i} = e^{\ln 2} \cdot e^{\frac{\pi}{3}i} = 2 \left( \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \right) = 2 \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}.$$

**Exemplo 3.9** Determinar os valores geral e principal de  $i^i$  e  $(1 + i\sqrt{3})^{1+i}$ .

Solução:

(i) Temos que  $i^i = e^{iLn(i)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi i\right)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (valor geral). Tomando  $k = 0$ , temos  $i^i = e^{-\frac{\pi}{2} - 2 \cdot 0 \cdot \pi} = e^{-\frac{\pi}{2}}$  (valor principal).

(ii) Como  $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ , tem-se

$$Ln\left(1 + i\sqrt{3}\right) = \ln 2 + \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} (1 + i\sqrt{3})^{1+i} &= e^{(1+i) \cdot \left[\ln 2 + \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)i\right]} = e^{\ln 2 + \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)i + i\ln 2 - \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)} \\ &= e^{\ln 2 - \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\left[\ln 2 + \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right]} = e^{\ln 2 - \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)} \cdot e^{i\left[\ln 2 + \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right]}. \end{aligned}$$

Para  $k = 0$ , temos o valor principal:

$$\begin{aligned} (1 + i\sqrt{3})^{1+i} &= e^{\ln 2 - \frac{\pi}{3}} \left[ \cos\left(\ln 2 + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\ln 2 + \frac{\pi}{3}\right) \right] \\ &= e^{\ln 2} e^{-\frac{\pi}{3}} \left[ \cos(\ln 2)\cos\frac{\pi}{3} - \sin(\ln 2)\sin\frac{\pi}{3} + i\sin(\ln 2)\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\cos(\ln 2) \right] \\ &= 2e^{-\frac{\pi}{3}} \left[ \cos(\ln 2) \cdot \frac{1}{2} - \sin(\ln 2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + i\sin(\ln 2) \cdot \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\ln 2) \right] \\ &= e^{\ln 2} \cdot e^{-\frac{\pi}{3}} \left[ \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cos(\ln 2) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \sin(\ln 2) \right] \end{aligned}$$

Como  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) i$ , temos:

$$\begin{aligned} (1 + i\sqrt{3})^{1+i} &= 2e^{-\frac{\pi}{3}} \left[ \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cos(\ln 2) + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) i \sin(\ln 2) \right] \\ &= e^{-\frac{\pi}{3}} (1 + i\sqrt{3}) [\cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2)] \end{aligned}$$

**Exemplo 3.10** Determinar a expressão geral para  $w = \ln(x + iy)$ , com  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Solução: Colocando na forma exponencial, temos:

$$x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{i \cdot \arctg\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} w = \ln \left[ \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{i \cdot \arctg\left(\frac{y}{x}\right)} \right] &= \ln \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) + \ln \left( e^{i \cdot \arctg\left(\frac{y}{x}\right)} \right) \\ &= \ln \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) + i \cdot \arctg\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

Podemos deduzir a partir da expressão anterior, a expressão geral para  $v = L_n(x + iy)$ , ou seja:

$$v = \ln \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) + i \cdot \left[ \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + 2k\pi \right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Como exemplo temos o cálculo de  $v = L_n(-1)$ , para isso basta fazer  $x = -1$  e  $y = 0$ , então:

$$\begin{aligned} v &= \ln \left( \sqrt{(-1)^2 + 0^2} \right) + i \cdot \left[ \arctg\left(\frac{0}{-1}\right) + 2k\pi \right] = \ln 1 + i \cdot (\pi + 2k\pi) \\ &= (2k + 1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Concluimos esta seção com o fato de podermos calcular a potência de um número complexo, não apenas de ordem inteira, mais de um modo geral, potências de valores complexos.

### 3.4 Reflexões nos espelhos planos através de números complexos

Apresentamos uma aplicação dos números complexos a física, mais precisamente na óptica.

Inicialmente vamos conceituar alguns elementos da reflexão de um raio de luz.

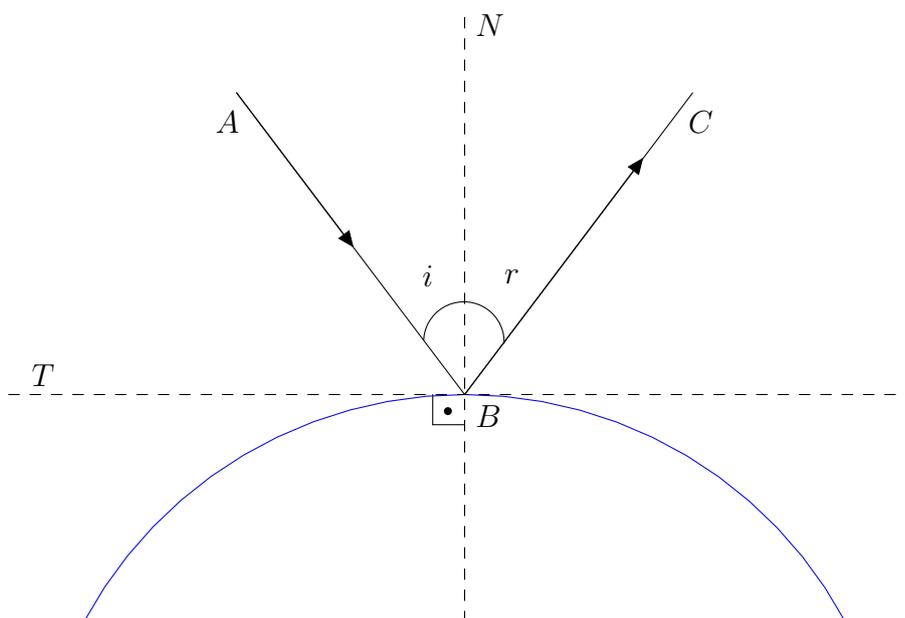


Figura 3.1: Reflexão da luz.

- (i) Raio incidente: É o raio de luz que atinge determinada superfície.
- (ii) Raio refletido: É o raio de luz que a superfície consegue refletir.
- (iii)  $AB$  = raio incidente.
- (iv)  $BC$  = raio de luz refletido.
- (v)  $N$  = reta normal à superfície no ponto  $B$ .
- (vi)  $T$  = reta tangente à superfície no ponto  $B$ .
- (vii)  $i$  = ângulo de reflexão, formado entre o raio incidente e a reta normal.
- (viii)  $r$  = ângulo de incidência, formado entre o raio refletido e a reta normal.

Os fenômenos em que acontecem reflexão obedecem a duas leis fundamentais que são:

**1ª lei da reflexão:** O raio de luz refletido e o raio de luz incidente, assim como a reta normal à superfície, pertencem ao mesmo plano, ou seja, são coplanares.

**2ª lei da reflexão:** O ângulo de reflexão  $r$  é sempre igual ao ângulo de incidência  $i$ :  
 $r = i$ .

Um número complexo  $z = x + yi$  pode ser considerado como um vetor  $\overrightarrow{OP}$  cuja origem  $O$  é o ponto  $(0, 0)$  e a extremidade  $P$  é o ponto  $(x, y)$  do sistema de coordenadas. Denotamos o vetor  $\overrightarrow{OP}$  simplesmente por  $z = x + yi$ . Dizemos que  $\overrightarrow{OP}$  é o vetor posição de  $P$ .

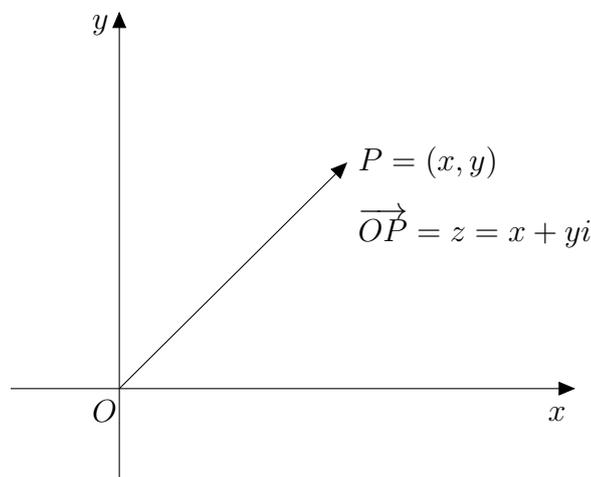


Figura 3.2: Vetor posição.

Representamos um espelho plano  $E$  pelo vetor unitário

$$\vec{u} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

O raio incidente será representado pelo complexo  $z = x + yi$  e o raio refletido pelo número complexo  $w = T_\theta(z)$ .

O produto de  $z = x + yi$  pelo número complexo  $e^{i\theta}$ , rotaciona  $z$  de um ângulo  $\theta$ . De fato, pois se  $\alpha = \arg(z)$ , então podemos escrever  $z$  na forma  $z = |z|.e^{i\alpha}$ . Assim,

$$z = e^{i\theta} = |z|.e^{i\alpha}.e^{i\theta} = |z|.e^{i(\alpha+\theta)}.$$

Em relação ao conjugado de  $z = x + yi$ ,  $x > 0$  e  $y < 0$ , geometricamente,  $\bar{z}$  representa a reflexão de  $z$  em torno do eixo  $Ox$ .

Nesse caso ( $x > 0$  e  $y > 0$ ), para determinarmos  $\bar{z}$  basta realizarmos uma rotação de  $-2\alpha$  no sentido anti-horário sobre o vetor que representa  $z$ .



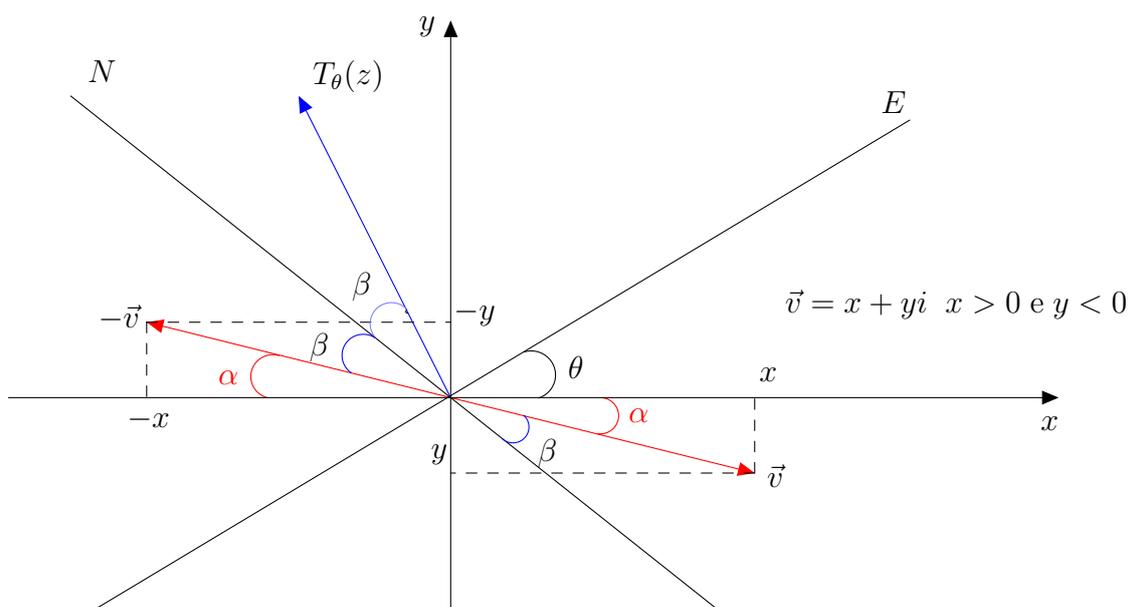


Figura 3.4: Raio de luz refletido sobre o espelho  $E$ .

Sendo por definição, a reflexão uma isometria<sup>1</sup>,  $T_\theta$  é uma transformação que preserva módulo, isto é,  $|T_\theta(z)| = |z|$ . Assim, para determinar  $T_\theta(z)$ , basta realizarmos uma rotação de  $2\beta$  no sentido horário sobre o vetor  $-\vec{v} = -z$ , isto é:

$$T_\theta(z) = -z \cdot e^{-2\beta i}.$$

Como  $-\vec{v} = e^{\pi i} \cdot v$  e  $v = |z| \cdot e^{\alpha i}$ , então:

$$T_\theta(z) = e^{\pi i} \cdot |z| \cdot e^{\alpha i} \cdot e^{-2\beta i} = |z| \cdot e^{(\alpha - 2\beta + \pi)i}. \quad (3.29)$$

Mas, sendo  $\alpha < 0$ , segue da Figura 3.4 que  $\beta = \frac{\pi}{2} - (\theta - \alpha)$ , ou seja,  $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha - \theta$ , de modo que  $-2\beta = 2\theta - 2\alpha - \pi$ . Substituindo esta expressão em (3.29), obtemos:

$$T_\theta(z) = |z| \cdot e^{(\alpha + \pi + 2\theta - 2\alpha - \pi)i} = |z| \cdot e^{(2\theta - 2\alpha)i} = |z| \cdot e^{-2\alpha i} \cdot e^{2\theta i} = e^{2\theta i} \cdot \bar{z}.$$

---

<sup>1</sup>É uma transformação geométrica que aplicada a uma figura geométrica, mantém as distâncias entre pontos. Ou seja, os segmentos da figura transformada são geometricamente iguais aos da figura original, podendo variar a direção e o sentido.

Logo, a expressão fundamental para determinar a direção do raio refletido é dada por

$$T_{\theta}(z) = e^{2\theta i} \cdot \bar{z}. \quad (3.30)$$

Se o espelho  $E$  estiver localizado sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares, então  $\theta = \frac{\pi}{4} \text{rad}$ , logo:

$$T_{\frac{\pi}{4}}(z) = i \cdot \bar{z}. \quad (3.31)$$

**Exemplo 3.11** *Determinar a direção de um raio luminoso na direção de  $z = -1 + 2i$  após refletir em um espelho  $E$  que forma um ângulo de  $60^\circ$  com o eixo  $Ox$ .*

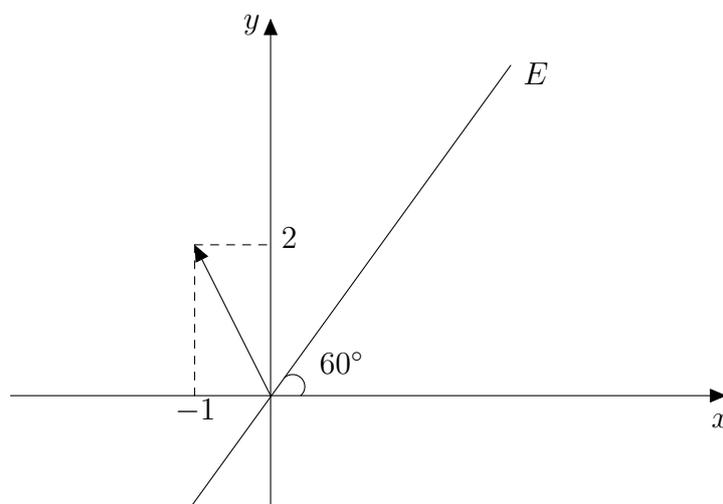


Figura 3.5: Exemplo usando raio refletido.

Solução: Sendo  $\theta = \frac{\pi}{3} \text{rad}$ , segue da expressão (3.30) que:

$$T_{\frac{\pi}{3}}(-1 + 2i) = e^{\frac{2\pi}{3}i} \cdot \overline{(-1 + 2i)} = \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right) \cdot (-1 + 2i) = 2, 23 + 0, 13i. \blacksquare$$

**Exemplo 3.12** *Um raio luminoso na direção de  $z = 2i$  após incidir sobre um espelho  $E$  reflete na direção do vetor  $w = 2$ . Determinar o ângulo  $\theta$  que o espelho forma com o eixo  $Ox$ .*

Solução: Sendo  $w = T_\theta(z)$  segue que:

$$2 = e^{2\theta i} \cdot \overline{2i} \implies e^{2\theta i} = \frac{2}{-2i} = i.$$

Como  $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ , temos:

$$e^{2\theta i} = e^{\frac{\pi}{2}i} \implies 2\theta i = \frac{\pi}{2}i \implies \theta = \frac{\pi}{4} \text{rad.} \blacksquare$$

Nesse capítulo mostramos que a representação exponencial formulada por Euler é uma relação entre a trigonometria e a função exponencial e que essa representação junto com a representação trigonométrica simplifica a demonstração de algumas identidades trigonométricas, além de facilitar a determinação de fórmulas fechadas para alguns somatórios. Mostramos também que o logaritmo de um complexo e uma potenciação de expoente complexo possui infinitos valores. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [2], [8], [?], [12], [14], [21], [23], [25].

# Capítulo 4

## Tópicos de geometria no plano de Argand-Gauss

Já é do nosso conhecimento que um número complexo  $z = a + bi$  fica claramente determinado pelo par ordenado  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , e esse par pode ser representado num plano denominado de plano de Argand-Gauss, então:

1. Será que seria possível determinar a equação de uma reta que passe pelos afixos de dois complexos  $z_1$  e  $z_2$  ( $z_1 \neq z_2$ )?
2. Se fossem dados três complexos  $z_1, z_2$  e  $z_3$  não colineares, classificar quanto aos lados o triângulo formado pelos seus afixos sem ter que calcular a distância entre esses afixos?

Daremos a resposta para estas perguntas mais adiante e também apresentaremos outras aplicações de complexos à geometria.

### 4.1 Equação da reta por dois afixos

Vamos considerar sobre um plano  $\alpha$ , um sistema de coordenadas cartesianas e seja a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \alpha \\ z &\longmapsto (a, b) \end{aligned}$$

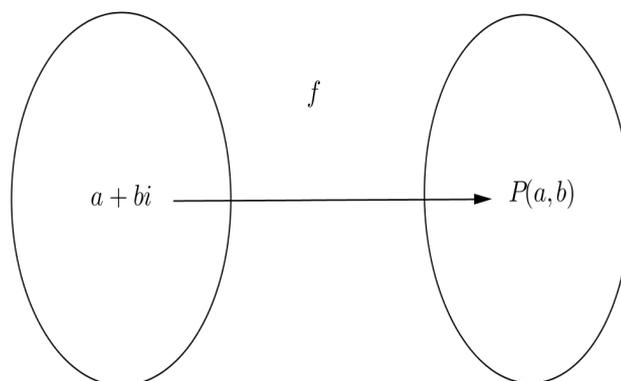


Figura 4.1: Diagrama representando a aplicação  $z = a + bi \rightarrow P(a, b)$ .

Sejam os complexos  $z_1$  e  $z_2$  tais que os pontos  $P$  e  $Q$  do plano  $\alpha$  são definidos respectivamente por  $f(z_1)$  e  $f(z_2)$ , e seja também um ponto  $X = f(z)$  qualquer da reta determinada por  $P$  e  $Q$ .

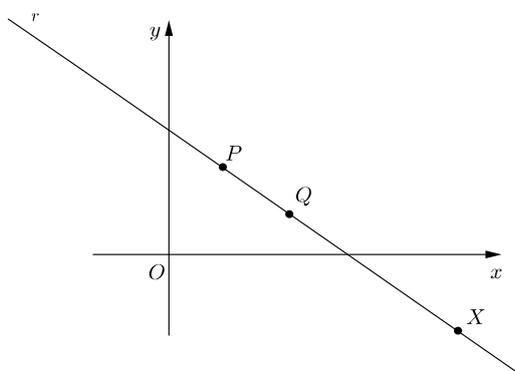


Figura 4.2: Reta  $r$  passando por dois afixos.

Observamos que o vetor  $\overrightarrow{XP}$  é uma combinação linear do vetor  $\overrightarrow{QP}$ , logo:

$$(X - P) = \lambda(Q - P), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como  $X - P = z - z_1$  e  $Q - P = z_2 - z_1$ , teremos que a equação da reta determinada pelos

afixos de  $z_1$  e  $z_2$  é dada por  $z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1)$ . Daí,

$$z - \lambda(z_2 - z_1) - z_1 = 0. \quad (4.1)$$

Se  $\lambda = 0$ , temos  $z = z_1$  e se  $\lambda = 1$ , temos que  $z = z_2$ , ou seja,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  encontraremos um complexo  $z$  pertencente à reta  $s$ .

**Exemplo 4.1** *Determine a equação da reta que passa pelos afixos de  $z_1 = 1 + i$  e  $z_2 = 5 - i$ . Verifique também se os complexos  $z_3 = 4 - 2i$  e  $z_4 = -11 + 7i$  pertencem a essa reta.*

Solução: Vamos inicialmente determinar a equação da reta  $s$  que passa pelos afixos  $z_1$  e  $z_2$ .

Temos que  $z - \lambda(z_2 - z_1) - z_1 = 0$ , logo:

$$z - \lambda(5 - i - 1 - i) - 1 - i = 0 \implies z - \lambda(4 - 2i) - z_1 = 0$$

é a equação da reta  $s$ .

Vamos verificar se  $z_3 \in s$ :

$$z_3 - \lambda(4 - 2i) - 1 - i = 0 \implies 4 - 2i - \lambda(4 - 2i) - 1 - i = 0 \implies 3 - 3i - \lambda(4 - 2i) = 0.$$

Segue que  $\lambda = \frac{3 - 3i}{4 - 2i} = \frac{3 - 3i}{4 - 2i} \cdot \frac{4 + 2i}{4 + 2i} = \frac{9}{10} - \frac{3}{5}i \notin \mathbb{R}$ , logo  $z_3 \notin s$ .

Vamos verificar se  $z_4 \in s$ :

$$z_4 - \lambda(4 - 2i) - 1 - i = 0 \implies -11 + 7i - \lambda(4 - 2i) - 1 - i = 0 \implies 3 - 3i - \lambda(4 - 2i) = 0.$$

Segue que  $\lambda = \frac{-12 + 6i}{4 - 2i} = \frac{-12 + 6i}{4 - 2i} \cdot \frac{4 + 2i}{4 + 2i} = -3 \in \mathbb{R}$ , logo  $z_4 \in s$ .

Observe que o complexo

$$\frac{a + bi}{c + di} \in \mathbb{R} \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

De fato, pois:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Para ser real, devemos ter  $\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} = 0$ , ou seja,  $bc - ad = 0$  e, conseqüentemente,  $bc = ad$ .

## 4.2 Condição de alinhamento de três complexos

Dados os complexos  $z_1, z_2$  e  $z_3$  tais que  $f(z_1) = P$ ,  $f(z_2) = Q$  e  $f(z_3) = R$ , com  $P, Q, R \in \mathbb{R}$ , a condição para que esses três pontos estejam alinhados é que exista  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tal que  $z_3 - z_1 = \lambda(z_2 - z_1)$ , ou seja:

$$\lambda = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \text{ (lembrando que se } z, \text{ então } z = \bar{z}) \iff \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \overline{\left( \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right)} = \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}.$$

Daí, segue que:

$$(z_3 - z_1) \cdot (\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (z_2 - z_1) \cdot (\bar{z}_3 - \bar{z}_1) = 0.$$

Desenvolvendo, teremos:

$$z_2 \bar{z}_3 + z_1 \bar{z}_2 + z_3 \bar{z}_1 - (z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1) = 0 \iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.2)$$

É a condição necessária e suficiente para que  $z_1, z_2$  e  $z_3$  sejam colineares.

**Exemplo 4.2** Verifique se os complexos  $z_1 = 2 + i$ ,  $z_2 = 3 - i$  e  $z_3 = 6 - 7i$  são colineares.

Solução:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 + i & 3 - i & 6 - 7i \\ 2 - i & 3 + i & 6 + 7i \end{vmatrix} = (3 - i)(6 + 7i) + (6 - 7i)(2 - i) + (2 + i)(3 + i) \\ - (2 - i)(3 - i) - (3 + i)(6 - 7i) - (6 + 7i)(2 + i) = 0.$$

Logo,  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  são colineares.

Podemos notar que  $\lambda$  necessariamente deve ser um número real. Caso contrário, teremos três afixos que não são colineares. Por exemplo, os complexos  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = i$  e  $z_3 = 1 + i$  são tais que  $\lambda = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \notin \mathbb{R}$ . Assim, concluímos que eles não são colineares.

### 4.3 Classificação dos triângulos

Na relação  $\lambda = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ , se  $\lambda \in \mathbb{R}$  então  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  são colineares, caso contrário os seus afixos são vértices de um triângulo. Seja o complexo  $\phi = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$  denominado de relação simples de três complexos, onde  $|\phi| = \frac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_1|}$  e  $\arg\phi = \theta$ . O ângulo  $\theta$  é formado pelos lados  $\overline{z_1 z_2}$  e  $\overline{z_1 z_3}$ . Se optássemos por trabalhar com o ângulo formado pelos lados  $\overline{z_2 z_3}$  e  $\overline{z_2 z_1}$  a relação seria  $\phi = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$ .

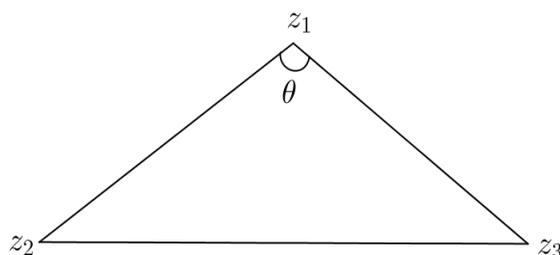


Figura 4.3: Triângulo 1

Analisaremos o triângulo da Figura 4.3 conforme a relação  $\phi = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ :

1. Se  $|\phi| = 1 \implies |z_3 - z_1| = |z_2 - z_1| \implies \Delta_{z_1 z_2 z_3}$  é isósceles;
2. Se  $\phi$  for imaginário puro, então  $\cos\theta = 0$ . De fato, como  $\cos\theta = \frac{a}{|\phi|}$  e  $\phi$  é imaginário puro, então  $a = 0$ , uma vez que  $a$  é a parte real de  $\phi$ . Dessa forma,  $\theta = \frac{\pi}{2} \text{rad}$  e, conseqüentemente,  $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$  é retângulo em  $z_1$ ;
3. Se  $\phi$  for real, temos a condição de alinhamento e, em conseqüência, os afixos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  não formam um triângulo.

4. Se  $\phi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , temos que  $|\phi| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ , conseqüentemente

$$|z_3 - z_1| = |z_2 - z_1| \text{ e } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

Dessa forma,  $\Delta z_1 z_2 z_3$  é equilátero.

Assim, podemos classificar um triângulo conforme  $\phi$ .

## 4.4 Área do triângulo

Após classificarmos os triângulos, vamos determinar a área de um triângulo qualquer, levando em consideração os vértices.

Seja o triângulo  $z_1 z_2 z_3$  e  $N_r$ ,  $r = 1, 2, 3$ , a projeção de qualquer ponto de  $z_r$  sobre o eixo  $Ox$ :

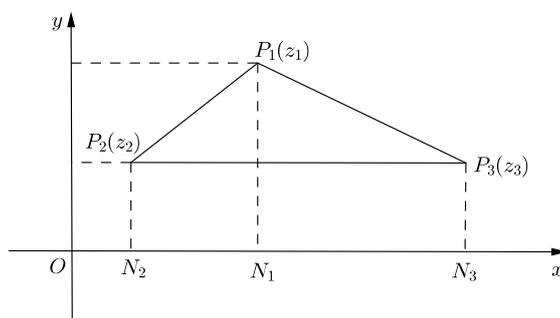


Figura 4.4: Triângulo 2.

Dessa forma, teremos:

$$\begin{aligned} A(\Delta P_1 P_2 P_3) &= A(\text{trapézio } P_1 P_2 N_1 N_2) + A(\text{trapézio } P_1 P_3 N_3 N_1) - A(\text{trapézio } P_2 N_2 N_3 P_3) \\ &= \frac{1}{2}(P_2 P_2 + P_1 N_1)N_2 N_1 + \frac{1}{2}(P_1 N_1 + P_3 N_3)N_1 N_3 - \frac{1}{2}(P_2 P_2 + P_3 N_3)N_2 N_3 \\ &= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2) \\ &= \frac{1}{2}[(x_1 y_2 - y_1 x_2) + (x_2 y_3 - y_2 x_3) + (x_3 y_1 - y_3 x_1)]. \end{aligned}$$

Como:

- $(x_1y_2 - y_1x_2) = \text{Im} [(x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)] = \text{Im}(\bar{z}_1z_2) = \frac{1}{2}i(z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2);$
- $(x_2y_3 - y_2x_3) = \text{Im} [(x_2 - iy_2)(x_3 + iy_3)] = \text{Im}(\bar{z}_2z_3) = \frac{1}{2}i(z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_2z_3);$
- $(x_3y_1 - y_3x_1) = \text{Im} [(x_3 - iy_3)(x_1 + iy_1)] = \text{Im}(\bar{z}_3z_1) = \frac{1}{2}i(z_3\bar{z}_1 - \bar{z}_3z_1),$

então:

$$A(\Delta P_1P_2P_3) = \frac{i}{4}(z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_2z_3 + z_3\bar{z}_1 - \bar{z}_3z_1) = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix}. \quad (4.3)$$

Este determinante é puramente imaginário, já que  $\frac{i}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix}$  é real positivo ou negativo, caso seja negativo devemos tomar seu módulo.

O determinante acima pode ser reescrito como  $\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & z_1 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_1 \end{vmatrix}$ , para isso basta aplicar o teorema de Laplace na primeira linha, ou seja:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13} = \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z_1 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix},$$

onde  $A_{ij}$  é o cofator do elemento  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , da matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{pmatrix}$ . Como

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} z_3 & z_1 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_1 \end{vmatrix}, \text{ então:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & z_1 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_1 \end{vmatrix}. \quad (4.4)$$

Logo, a área do triângulo  $\Delta P_1 P_2 P_3$  também pode ser dada pela expressão:

$$A(\Delta P_1 P_2 P_3) = \frac{i}{4} \cdot \left( \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & z_1 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_1 \end{vmatrix} \right). \quad (4.5)$$

**Exemplo 4.3** Classifique o triângulo formado pelos afixos dos complexos  $z_1 = 1 + 4i$ ,  $z_2 = 1 + 2i$  e  $z_3 = 5 + 2i$ . Calcule também a área desse triângulo,  $\widehat{A}$  e  $\cos \widehat{A}$ .

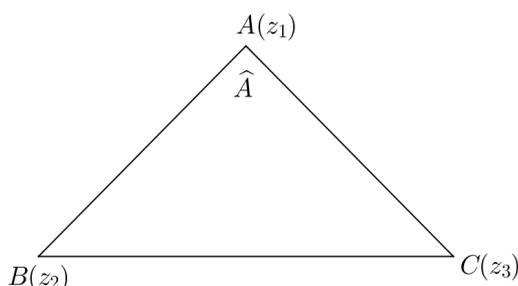


Figura 4.5: Triângulo 3.

(i) Vamos inicialmente determinar o complexo  $\phi_1 = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ .

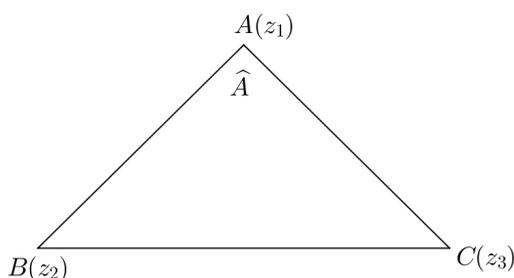


Figura 4.6: Triângulo 4.

Então, temos que  $\phi_1 = \frac{5 + 2i - (1 + 4i)}{1 + 2i - (1 + 4i)} \implies \phi_1 = 2 - 4i$ . Como  $|\phi| \neq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , o triângulo  $\Delta z_1 z_2 z_3$  não é equilátero e como  $\phi_1$  não é imaginário puro então o triângulo  $\Delta z_1 z_2 z_3$  não é retângulo em  $A(z_1)$ .

(ii) Vamos determinar o complexo  $\phi_2 = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$ .

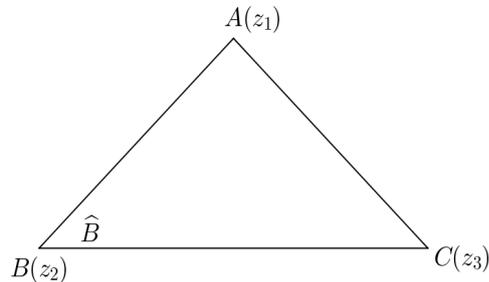


Figura 4.7: Triângulo 5.

Então, temos que  $\phi_2 = \frac{5 + 2i - (1 + 2i)}{1 + 4i - (1 + 2i)} \Rightarrow \phi_2 = -2i$ . Como  $\phi_2$  é imaginário puro então o triângulo  $\Delta z_1 z_2 z_3$  é retângulo em  $B(z_2)$ .

(iii) Por curiosidade vamos calcular  $\phi_3 = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$  (o triângulo já foi classificado).

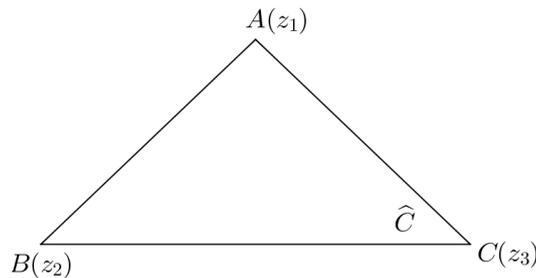


Figura 4.8: Triângulo 6.

Segue que  $\phi_3 = \frac{1 + 4i - (2 + 5i)}{1 + 2i - (2 + 5i)} \Rightarrow \phi_3 = 1 - \frac{1}{2}i$ . Como  $\phi_1 \neq 1$ ,  $\phi_2 \neq 1$  e  $\phi_3 \neq 1$ , o triângulo  $\Delta z_1 z_2 z_3$  não é isósceles.

(iv) Vamos calcular a área do triângulo.

$$A = \frac{i}{4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 + 4i & 1 + 2i & 5 + 2i \\ 1 - 4i & 1 - 2i & 5 - 2i \end{vmatrix} = \frac{i}{4}(-16i) = 4u.a.$$

(v) Vamos calcular  $\text{sen}\hat{A}$ .

Temos que  $b = |z_3 - z_1| = |5 + 2i - -1 - 4i| = |4 - 2i| = \sqrt{20}$  e  $c = |z_2 - z_1| =$

$|1 + 2i - -1 - 4i| = |-2i| = 2$ . Logo:

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{i}{2bc} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = \frac{i}{2 \cdot \sqrt{20} \cdot 2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+4i & 1+2i & 5+2i \\ 1-4i & 1-2i & 5-2i \end{vmatrix} = \frac{i}{8\sqrt{5}}(-16i) = \frac{2\sqrt{5}}{5} u.a.$$

(vi) Vamos calcular  $\cos\widehat{A}$ .

$$\cos^2\widehat{A} + \operatorname{sen}^2\widehat{A} = 1 \implies \cos^2\widehat{A} = 1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 \implies \cos\widehat{A} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Como  $\widehat{A} \in ]0, \pi[$ , pois é um ângulo interno de um triângulo, então  $\cos\widehat{A} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

## 4.5 Área de um polígono convexo

A partir de (4.5), vamos determinar uma fórmula geral para o cálculo da área de um polígono convexo formado por  $n$  afixos. Entretanto, antes devemos lembrar que a área de um polígono convexo é igual à soma das áreas de uma decomposição do polígono em triângulos.

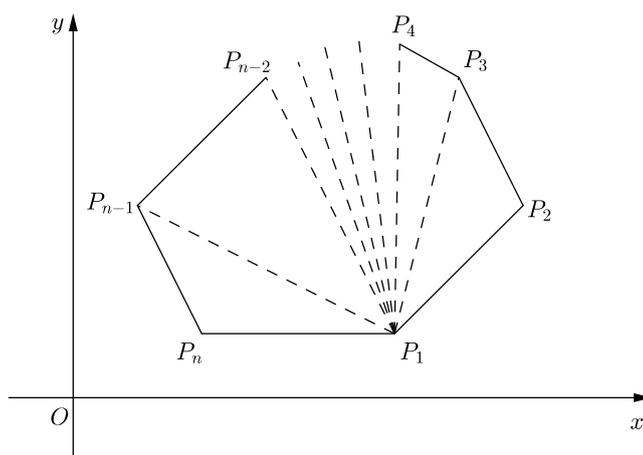


Figura 4.9: Polígono convexo no plano de Argand-Gauss.

Consideremos um polígono convexo  $P$  de  $n$  lados e de afixos  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , percorridos

no sentido anti-horário, então  $A_{\text{polígono}} = A_{P_1P_2P_3P_1} + A_{P_1P_3P_4P_1} + \dots + A_{P_1P_{n-1}P_nP_1}$ , onde  $A_{P_1P_kP_{k+1}P_1}$  representa a área do  $k$ -ésimo triângulo dada pela expressão:

$$A_{P_1P_kP_{k+1}P_1} = \frac{i}{4} \cdot \left( \left| \begin{array}{cc} z_1 & z_k \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_k \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_k & z_{k+1} \\ \bar{z}_k & \bar{z}_{k+1} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_{k+1} & z_1 \\ \bar{z}_{k+1} & \bar{z}_1 \end{array} \right| \right). \quad (4.6)$$

Então:

$$\begin{aligned} A_{\text{polígono}} &= \frac{i}{4} \cdot \left( \left| \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_3 & z_1 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_1 \end{array} \right| \right) \\ &+ \frac{i}{4} \cdot \left( \left| \begin{array}{cc} z_1 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_3 & z_4 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_4 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_4 & z_1 \\ \bar{z}_4 & \bar{z}_1 \end{array} \right| \right) \\ &+ \frac{i}{4} \cdot \left( \left| \begin{array}{cc} z_1 & z_4 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_4 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_4 & z_5 \\ \bar{z}_4 & \bar{z}_5 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_5 & z_1 \\ \bar{z}_5 & \bar{z}_1 \end{array} \right| \right) + \dots \\ &+ \frac{i}{4} \cdot \left( \left| \begin{array}{cc} z_1 & z_{n-1} \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_{n-1} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_{n-1} & z_n \\ \bar{z}_{n-1} & \bar{z}_n \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_n & z_1 \\ \bar{z}_n & \bar{z}_1 \end{array} \right| \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Na expressão (4.7) observamos que o último determinante de  $A_{P_1P_kP_{k+1}P_1}$  se anula com o primeiro determinante de  $A_{P_1P_{k+1}P_{k+2}P_1}$ . Logo, temos:

$$A_{\text{polígono}} = \frac{i}{4} \left( \left| \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{array} \right| + \dots + \left| \begin{array}{cc} z_n & z_1 \\ \bar{z}_n & \bar{z}_1 \end{array} \right| \right). \quad (4.8)$$

Já sabemos que as raízes enésimas de  $z \neq 0$  representam geometricamente os vértices de um polígono regular de  $n$  lados. Representando essas raízes por  $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ , a área desse polígono formado pelos afixos dessas raízes é dada pela expressão<sup>1</sup>

$$A_{\text{polígono}} = \frac{i}{4} \left( \left| \begin{array}{cc} w_0 & w_1 \\ \bar{w}_0 & \bar{w}_1 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} w_1 & w_2 \\ \bar{w}_1 & \bar{w}_2 \end{array} \right| + \dots + \left| \begin{array}{cc} w_n & w_0 \\ \bar{w}_n & \bar{w}_0 \end{array} \right| \right). \quad (4.9)$$

Vimos que a equação (4.9) determina a área do polígono regular formado pelas raízes  $n$ -ésimas de um complexo  $a + bi$ , então será que seria possível chegar a uma equação que

<sup>1</sup>Uma demonstração detalhada pode ser feita usando a indução finita como feito em [4].

determina essa mesma área sem ter que calcular essas raízes? Isto é, seria possível determinar uma fórmula que calcula essa área que dependa apenas de  $a$ ,  $b$  e  $n$ ? Vejamos:

Seja  $w_0, w_1, w_2 \cdots w_{n-1}$  as raízes  $n$ -ésimas de  $z = a + bi$  e seja  $l$  a medida do lado do polígono regular formado por essas raízes, então:

$$|w_1 - w_0| = |w_2 - w_1| = \cdots = |w_k - w_{k-1}| = \cdots = |w_{n-1} - w_0| = l.$$

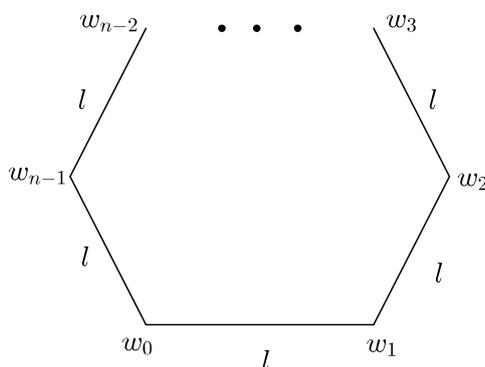


Figura 4.10: Polígono regular formado pelas raízes  $n$ -ésimas.

Logo,  $l = |w_k - w_{k-1}|$ .

Como o valor de  $w_k$  é dado por  $w_k = \rho \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$  e o valor de  $w_{k-1}$  é dado por  $w_{k-1} = \rho \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi - 2\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\theta + 2k\pi - 2\pi}{n} \right) \right]$ , onde  $\rho = \sqrt[n]{|z|} = \sqrt[n]{a^2 + b^2}$ ,  $\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{b}{a} \right)$  e  $k \in \mathbb{Z}$ , fazendo  $w_k - w_{k-1}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} w_k - w_{k-1} &= \rho \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) - \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi - 2\pi}{n} \right) \right] + \\ &+ i\rho \left[ \operatorname{sen} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) - \operatorname{sen} \left( \frac{\theta + 2k\pi - 2\pi}{n} \right) \right] \\ &= \rho \left[ -2\cos \left( \frac{2\theta + 4k\pi - 2\pi}{2n} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{n} \right) + i2\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{n} \right) \cos \left( \frac{2\theta + 4k\pi - 2\pi}{2n} \right) \right]. \end{aligned}$$

Aplicando o módulo, teremos:

$$\begin{aligned} |w_k - w_{k-1}| &= \sqrt{4\rho^2 \left[ \cos^2 \left( \frac{2\theta + 4k\pi - 2\pi}{2n} \right) \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi}{n} \right) + \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi}{n} \right) \cos^2 \left( \frac{2\theta + 4k\pi - 2\pi}{2n} \right) \right]} \\ &= \sqrt{4\rho^2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi}{n} \right)} = 2\rho \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Logo, o lado do polígono é

$$l = 2\rho \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{n} \right) = 2 \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{n} \right). \quad (4.10)$$

O polígono pode ser dividido em  $n$  triângulos tomando o centro da circunferência circunscrita como um vértice comum a todos esses  $n$  triângulos.

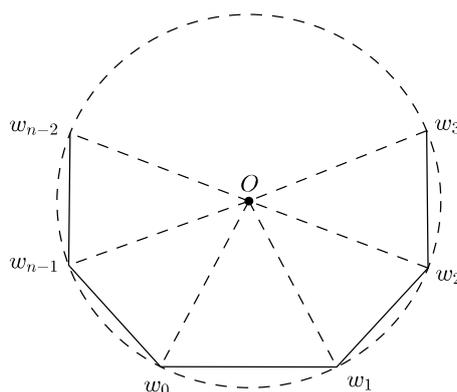


Figura 4.11: Polígono regular inscrito em uma circunferência, associado às raízes  $n$ -ésimas de um complexo.

Sabemos que  $\rho$  é igual à medida do raio dessa circunferência circunscrita, então vamos calcular a área de um desses triângulos.

$$\begin{aligned} \rho^2 &= h^2 + \left( \frac{l}{2} \right)^2 \implies h = \sqrt{\rho^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\rho^2 - \frac{4\rho^2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi}{n} \right)}{4}} = \sqrt{\rho^2 - \rho^2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi}{n} \right)} \\ &= \rho \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi}{n} \right)} = \rho \sqrt{\cos^2 \left( \frac{\pi}{n} \right)} = \rho \cos \left( \frac{\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

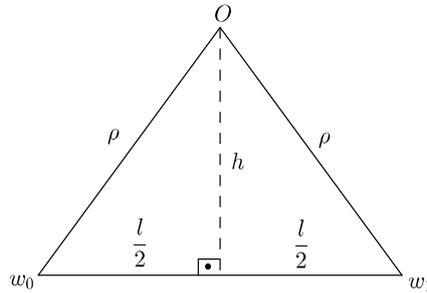


Figura 4.12: Triângulo 7.

Logo, a área do triângulo será:

$$A_T = \frac{h.l}{2} = \frac{\rho \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot 2\rho \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2}.$$

Como o polígono foi dividido em  $n$  triângulos iguais, então:

$$A_{\text{polígono}} = n \cdot A_T = n \cdot \frac{\rho^2 \left[ 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]}{2} = n \cdot \frac{\rho^2 \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right]}{2}.$$

Segue que, a área do polígono regular será:

$$A_{\text{polígono}} = \frac{n \sqrt[n]{a^2 + b^2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}. \tag{4.11}$$

Nesse capítulo observamos que dispendo de três afijos no plano de Argand-Gauss eles podem formar um triângulo e a partir de uma relação envolvendo esses afijos podemos classificar esse triângulo como retângulo, ou isósceles ou equilátero. Mostramos também que as raízes  $n$ -ésimas de um complexo  $z$  formam um polígono regular e que podemos calcular a área desse polígono através de uma fórmula substituindo apenas o índice da radiciação ( $n$ ), o valor da parte real ( $a$ ) e o valor da parte imaginária ( $b$ ). As principais referências utilizadas foram [4], [10], [15], [24].

## Considerações finais

Na busca por uma fórmula para resolver equações do 3º grau, os grandes algebristas do século XVI começaram a se curvar a um número magnífico denominado de imaginário. Desde aquela época, até os dias de hoje, o seu estudo sofre resistência, antes por muitos matemáticos e hoje por alguns estudantes da educação básica. O porquê de se estudar esses números é uma pergunta feita com muita frequência aos professores e essa resistência foi aumentada ainda mais quando esse conteúdo foi excluído da prova do ENEM. Visto isso, é preciso que o professor tenha um cuidado especial ao iniciar esse assunto, abordando principalmente a história dos números complexos e as aplicações presentes na álgebra, na física, dinâmica dos fluidos e electromagnetismo, buscando, sobretudo, situações para explorar este conteúdo através de uma abordagem mais significativa e contextualizada. Para os alunos com interesse em aprofundar o assunto, cabe ao professor orientar a pesquisa e mostrar a magnitude dos números complexos. Desse modo, pretendemos deixar um rastro de luz sobre esse assunto que ainda não é apaixonante para muitos devido a diversos questionamentos que aqui são respondidos de uma maneira elegante e singela, evitando o dogmatismo que em muitos casos afastam o neófito. Lançamos mão a essa obra que pretende ser mais uma ferramenta para os mais experimentados.

# Referências Bibliográficas

- [1] ARAÚJO, Nanci Barbosa Ferreira. Números Complexos: Uma proposta de mudança metodológica para uma aprendizagem significativa no ensino médio. 111f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)- Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Rio Grande do Norte, 2006.
- [2] BERREBI, Edmond. Matemáticas, vol. 3. Madrid:Paraninfo, 1969.
- [3] CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. Trigonometria /Números Complexos. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [4] COSTA, Felix Silva. Áreas e Contornos. 78f.Dissertação (Mestrado em Matemática)- Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, São Paulo, 2008.
- [5] CHURCHILL, RuelVance. Variáveis Complexas e suas Aplicações. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil e Editora da Universidade de São Paulo, 1975.
- [6] DUVAL, Raymond. Semiósis e Pensamento Humano .São Paulo: Livraria da Física, 2009.
- [7] GENTIL, Nelson et al. Matemática para o 2º grau, 7. ed. São Paulo: Ática, 1998. v.1-3.
- [8] GUIMARÃES, Caio. Aplicações diferentes para números complexos capítulo II. Disponível em: <<http://www.rumoaoita.com>>. Acesso em: 20 jan. 2013.
- [9] HELLMEISTER, Ana Catarina P.; PEIXOTO, Cláudia Monteiro. Matemática: Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004.

- [10] IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar. 6.ed. São Paulo: Atual, 1993. v. 2-9.
- [11] IEZZI, Gelson et al. Matemática: Ciência e Aplicações, 3<sup>a</sup> série: ensino médio matemática.2.ed. São Paulo: Atual, 2004.
- [12] LINO, Paulo Sérgio. Reflexão nos espelhos planos através de números complexos. Disponível em: <<http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2011/05/reflexoes-nos-espelhos-planos-atraves.html>>. Acesso em: 10 fev. 2013.
- [13] NETO, Aref Antar et al. Números Complexos, polinômios e Equações Algébricas, vol. 7.2.ed. São Paulo: Moderna, 1982.
- [14] NETO, Aref Antar et al. Trigonometria, 1. ed. São Paulo: Moderna, 1979. v. 3.
- [15] NETO, Aref Antar et al. Geometria, vol. 5.1.ed. São Paulo: Moderna, 1982.
- [16] NETO, Rafael Vassalo. A utilização de material manipulativo na construção do conceito de números complexos. 97f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Universidade Severino Sombra, Vassouras, Rio de Janeiro, 2010.
- [17] OLIVEIRA, Carlos Nely Clementino de. Números Complexos: um estudo dos registros de representações e de aspectos gráficos. 2010. 191 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, São Paulo.
- [18] OLIVEIRA, Edmundo Capelas de; RODRIGUES Jr., Waldyr Alves. Funções analíticas com aplicações. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.
- [19] PINTO JUNIOR, Ulício. A história dos números complexos: das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand. 94f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)-Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.
- [20] REIS NETO, Raimundo Martins. Alternativa metodológica para ensino e aprendizagem de números complexos: uma experiência com professores e alunos. 142 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, Minas Gerais, 2009.

- [21] RICIERI, Aguinaldo Prandini. Assim Nasceu o Imaginário: Origem dos Números Complexos. São Paulo: Abaeté Ltda, 1993.
- [22] RIGHETTO , Armando. Vetores e Geometria Analítica. São Paulo: Rossi, 1977.
- [23] SONNINO, Sérgio; MIRSHAWKA, Victor. Números Complexos. São Paulo, 1965.
- [24] VIGGIANI, Domingos. Alguns Aspectos da Aplicação dos Números Complexos à Geometria. Tese (Doutorado em Matemática) - Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, Universidade de Marília, São Paulo, 1968.
- [25] WILLIAMS, J. Algebra de Numeros Complejos, vol. 6. 1.ed. México: Limusa, 1974.
- [26] <<http://www.ezequiassilva.hpg.ig.com.br/mat/resumo.html>>( 15/01/2013).